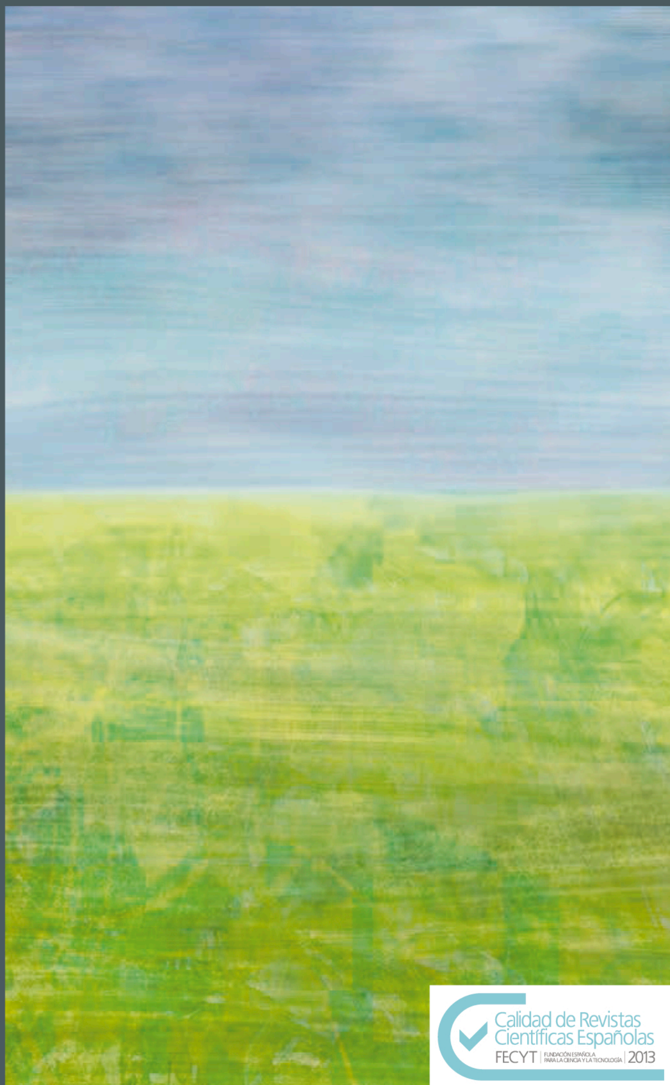
revista de EDUCACIÓN
Nº 367 ENERO-MARZO 2015

Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas

Arithmetic Knowledge of prospective teachers. Strengthsand Weaknesses



Miguel Ángel Montes
Luis Carlos Contreras
María del Mar Liñán
María Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Climent
José Carrillo

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

Calidad de Revistas Científicas Españolas
FECYT | FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA | 2013

Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas[1]

Arithmetic Knowledge of prospective teachers. Strengths and Weaknesses

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282

Miguel Ángel Montes
Luis Carlos Contreras
Universidad de Huelva. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Huelva. España.
María del Mar Liñán
Universidad de Sevilla. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Sevilla. España.
María Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Climent
José Carrillo
Universidad de Huelva. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Huelva. España.

Resumen

Los medios de comunicación han alertado recientemente a la opinión pública acerca de una realidad que la investigación en educación matemática llevaba evidenciando las dos últimas décadas: la deficiente formación matemática de los

(1) Financiado por el proyecto PIE (1101), del Plan de Investigación Educativa de la Universidad de Huelva y el proyecto «Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas» (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad. Agradecemos su colaboración a las Universidades de Sevilla y al CES Cardenal Spínola CEU.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

maestros. Estas deficiencias, que habíamos venido constatando de manera informal en nuestras universidades con los estudiantes para Maestro (EPM), son el objeto de estudio de nuestra investigación. En ese contexto, este artículo describe un estudio exploratorio tipo *survey* sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza que tienen 737 estudiantes para Maestro de tres centros de formación de maestros de universidades andaluzas, realizado en el contexto de un Proyecto de Innovación Docente de una de ellas. Usando el marco de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) y, dentro de él, el subdominio relativo al conocimiento de los temas matemáticos, se elaboró un cuestionario que contenía ítems relativos a fracciones, decimales y porcentajes, contenidos que fueron elegidos tanto por su trascendencia intrínseca como por su aplicación a otros contenidos matemáticos y a otras disciplinas en el ámbito de la Educación Primaria. Esto nos ha permitido explorar el conocimiento que estos futuros profesores poseen sobre esos contenidos. Los resultados han mostrado un número importante de debilidades, algunas de las cuales ya habían sido descritas por la literatura de investigación, y también algunas fortalezas. En ambos casos, la información obtenida supone un referente para explorar la realidad de otros centros de formación de maestros; un elemento de reflexión para las autoridades académicas acerca de los procesos de selección para el acceso a la universidad y, más concretamente, a estos centros de formación; y un punto de partida para el rediseño de sus programas de formación.

Palabras clave: MTSK, estudiantes para Maestro, formación inicial, conocimiento profesional, aritmética.

Abstract

The social media have recently warned to public opinion about a truth that the research in mathematics education has been pointing up the last two decades: the poor mathematical training of primary teachers. These deficiencies, that we have being noticing in our universities with the prospective primary teachers (PPT), are our object of study. In this context, this paper describes a survey-type study on the mathematical knowledge required to teach of 737 prospective primary teachers from three universities in Andalusia. Based on the Mathematic Teacher Specialized Knowledge (MTSK), we have carried out a questionnaire addressing items related to fractions, decimals and percentages, contents chosen by its intrinsic transcendence, as by their application to other mathematical contents and other disciplines, in the ambit of primary school. This questionnaire has allowed us to explore the knowledge that these future teachers posses about these contents. The results of the study show an important number of weaknesses, some of them already described in research literature, and also some strengths. In both cases, the obtained information gives a base to explore other teacher training centers, elements of reflection to the academic authorities about the selection process to the access to university and, more concretely, to this training centers, as a starting point to redesign their training programs.

Key words: MTSK, prospective Primary teachers, initial training, professional knowledge, arithmetic.

Introducción

De entre los temas aritméticos de la Educación Primaria, probablemente el que más trascendencia tiene, tanto como contenido en sí como por su aplicación a otros contenidos matemáticos y a otras disciplinas, es el que podríamos englobar como fracciones, decimales y porcentajes. Por ello, el conocimiento matemático de los maestros, en este ámbito, requiere una especial atención respecto a su estructura, sus contenidos y sus relaciones. Se trata de un tema donde es frecuente encontrar, durante la etapa de la educación obligatoria, un tratamiento algorítmico y ligado a procedimientos y donde los estudiantes suelen mostrar importantes lagunas al acabar su formación (PISA; TIMSS).

El acceso a los estudios de Maestro de Primaria en España no tiene requerimientos específicos y, además, no es de los más demandados, por lo que es frecuente que muchos estudiantes universitarios decidan realizar estos estudios sin haber sido su primera opción. Debemos unir a ello que un número importante de candidatos tuvo su último contacto con las matemáticas varios años atrás. Quizás por ello, su desempeño en matemáticas elementales se muestre tan deficiente (Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012).

Estudios nacionales e internacionales corroboran esta afirmación, en relación con el contenido aritmético elemental y, más concretamente, en el ámbito de las fracciones, los decimales y los porcentajes. Cabe señalar los trabajos de Putt (1995), en el campo de la representación decimal de los números y su ordenación; Post, Harel, Behr y Lesh (1991), en relación con las representaciones decimal y fraccionaria; De Castro, Castro y Segovia (2004) o Zazkis y Campbell (1994), con los decimales menores que uno, las reglas de cálculo con números decimales o ante situaciones de ajuste del valor posicional al realizar estimaciones; o Muñoz-Catalán y

Carrillo (2007), en relación con el uso de métodos formales para la simplificación de fracciones o con el propio concepto de fracción.

Hemos de añadir que en nuestro modelo de conocimiento del profesor este saber matemático ocupa un papel muy relevante, por lo que se hace necesario conocer muy detalladamente el punto de partida antes de iniciar la formación.

Desde esta perspectiva, venimos trabajando en un Proyecto de Innovación Docente de la Universidad de Huelva «Conocimiento para enseñar Matemáticas de los estudiantes para Maestro: análisis de dificultades» (PIE 1101), con el objetivo de determinar las debilidades y fortalezas que muestran los estudiantes para Maestro (EPM) al iniciar su formación y aportar luz sobre posibles causas, de forma que en el proceso formativo pueda iniciarse su reconstrucción a la vez que se aproveche la situación para la construcción de conocimiento matemático especializado.

En una primera fase, hemos abordado un proceso de identificación y análisis de conocimientos matemáticos inadecuadamente construidos, referidos a la matemática de Educación Primaria. Se ha tratado, por tanto, de partir del conocimiento matemático común que tienen los EPM, pero su análisis situará a los formadores en otros dos planos: el del conocimiento de los obstáculos y errores habituales en el ámbito de los temas estudiados y el del conocimiento sobre estrategias de aprendizaje de esos temas, ambos de interés en la formación inicial de maestros.

En este artículo nos centraremos en la identificación de las fortalezas y debilidades del conocimiento matemático relativo a fracciones, decimales y porcentajes de los EPM.

Marco teórico

El conocimiento profesional del profesor es objeto de discusión, teorización y organización de programas en pos de su mejora. En los trabajos seminales de Shulman (1986) se considera la existencia de dos macrocomponentes dentro de este conocimiento: el conocimiento de la materia que se va a explicar y el conocimiento didáctico del contenido; Shulman define siete subdominios en los que se puede organizar el conocimiento del profesor. Esta distinción resulta interesante a la hora de definir programas de formación permanente y de diseñar cursos de formación de futuros profesores, ya que, aunque entendemos que el conocimiento del profesor está integrado, es posible hacer esfuerzos por lograr una caracterización más detallada de cada una de las dos componentes. Tras este trabajo, se han desarrollado varias caracterizaciones del conocimiento del profesor de Matemáticas (Fennema y Franke, 1992; Davis y Simmt, 2006; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009) y, siguiendo la idea de Shulman de separar en las dos macrocomponentes anteriormente citadas, desde el grupo de la Universidad de Míchigan se desarrolló el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, en sus siglas anglófonas, Ball, Thames y Phelps, 2008) no solo como modelo de análisis de conocimiento, sino como referente para el diseño de programas de formación del profesorado. Dentro de esta perspectiva, se definieron tres subdominios para cada una de las macrocomponentes de Shulman. En este documento tienen especial relevancia las relativas al conocimiento de la materia, a saber: conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento en el horizonte matemático (HCK). El CCK se caracteriza como el conocimiento de la materia que cualquier usuario de la matemática pudiera requerir en su profesión, incluyendo a profesionales ajenos a la docencia. Así, este conocimiento es el relativo a la matemática teórico-práctica como cuerpo de conocimiento de posible aplicación a otros campos; puede considerarse similar a las matemáticas que se hallan en los libros de texto. El SCK es una de las grandes aportaciones del grupo de Míchigan, ya que reconoce la diferencia del conocimiento matemático que requiere el profesor de Matemáticas del que necesita, por ejemplo, un físico o un investigador en matemáticas. Este conocimiento está definido en el artículo de presentación del modelo a través de las acciones que permiten al profesor: «responder a las preguntas "¿por qué…?" […] o justificar y evaluar algoritmos no convencionales que desarrollen los alumnos» (Ball et ál., 2008, p. 400), entre otras. Finalmente, el HCK, definido como «una orientación hacia y una familiaridad con el conocimiento matemático» (Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013), es el conocimiento que permite al profesor saber cómo funcionan las matemáticas (de ahí la 'familiaridad con'), y tener una mirada prospectiva de los temas matemáticos que considera en el momento de impartir una clase (de ahí la 'orientación hacia'). Sin embargo, este modelo ha suscitado problemas de definición entre los diferentes subdominios (Silverman y

Thompson, 2008), lo que ha conducido al grupo de investigación de la Universidad de Huelva a desarrollar un refinamiento del modelo. Este nuevo modelo, denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), parte de la base de que el conocimiento matemático que posee el profesor de Matemáticas es especializado por ser parte del conocimiento que necesita para impartir docencia, independientemente de que en otras profesiones pudiera requerirse. Sin embargo, en el desarrollo de este modelo se considera exclusivamente aquel conocimiento que es específico del profesor de Matemáticas, y se excluyen aquellos conocimientos generales útiles para enseñar, pero distantes de la matemática. Así, se considera que el conocimiento del profesor de Matemáticas, pese a su naturaleza integrada, se puede observar desde una perspectiva analítica, considerando que en la tarea de enseñar el profesor conoce, pone en práctica y reflexiona sobre diferentes objetos, como son, en lo relativo al conocimiento matemático, los conceptos y procedimientos matemáticos, las estructuras matemáticas o la forma de pensar en matemáticas; y, en lo relativo al conocimiento didáctico del contenido, las formas organizar el contenido matemático para su enseñanza, las formas de pensar en los contenidos que poseen los estudiantes o las directrices curriculares. Así, estos seis objetos sobre los que pueden centrarse el conocimiento y la reflexión del profesor dan lugar a seis subdominios.

En primer lugar, describimos aquellos encuadrados en la caracterización de la macrocomponente descrita por Shulman relativa al conocimiento de la materia. El subdominio del conocimiento de los temas (KOT) toma como objeto el contenido matemático y contiene el conocimiento de distintas dimensiones (que organizamos como categorías) asociadas al tema, como son las propiedades y sus fundamentos teóricos, los procedimientos que se realizan con él, la fenomenología (Freudenthal, 1983) y las aplicaciones del contenido a situaciones reales o matemáticas (como diferentes ejemplos donde el tema se manifieste), los distintos significados y definiciones del concepto abordado o las representaciones del contenido. Estas categorías nos permitirán diseñar la estructura del instrumento para obtener información y su posterior análisis.

Entendemos que este conocimiento puede ser compartido con otras profesiones, pero ciertas dimensiones, como los significados del tema, tienen una especial relevancia en la labor del profesor de Matemáticas, y lo convierten en especializado, en tanto en cuanto suponen una herramienta para la realización de la profesión de profesor. El conocimiento de la estructura matemática (KSM), por su parte, tiene que ver con conocer el contexto matemático de un determinado objeto matemático. Así, este conocimiento estructural de las matemáticas permitirá al profesor reflexionar sobre el contenido desde una visión prospectiva, en la que conocimientos avanzados le permitan un tratamiento de la 'matemática elemental desde una perspectiva avanzada', o viceversa, considerar que estos contenidos pueden abordarse desde una matemática más sencilla, respondiendo a la idea de 'matemática avanzada desde una perspectiva elemental'. Estas consideraciones, unidas a la idea de Felix Klein de entender la matemática desde un punto de vista superior, que daría al profesor una visión de conjunto de la construcción de las matemáticas, constituyen este subdominio. Finalmente, el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) está formado por el conocimiento sobre cómo se construye la matemática. Este consta de elementos generales, como conocer los distintos tipos de demostración o razonamiento en matemáticas, así como la sintaxis, o las nociones de clasificación o generalización; y de elementos ligados a temas, como por ejemplo, la lógica que sustenta la idea de clase, fundamental para considerar fracciones equivalentes. Estos tres subdominios constituyen, desde esta nueva perspectiva, el contenido de lo que en términos de Shulman sería conocimiento de la materia y que en este caso, dada la contextualización matemática del profesor que se considera, denominaremos 'conocimiento de las matemáticas'.

Dentro del dominio del conocimiento didáctico del contenido (la otra macrocomponente de Shulman), si nos centramos en las formas de organizar el contenido matemático para su enseñanza, surge el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), constituido por el conocimiento del profesor de distintas estrategias, materiales, recursos, o ayudas que le permitan organizar los contenidos matemáticos de una forma adecuada a sus intereses. Incluimos en este subdominio el conocimiento sobre teorías de enseñanza, como el conocimiento de las características de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza de las matemáticas. De igual forma, si enfocamos ahora el conocimiento del profesor sobre el alumno como aprendiz, surge el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), donde se incluye el conocimiento que posee el profesor acerca de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos, las concepciones e ideas previas acerca de conceptos, el lenguaje y vocabulario que suelen usar los estudiantes al trabajar ciertos conceptos o el conocimiento de pautas de cómo se produce el aprendizaje del contenido abordado. Incluimos también en este subdominio el conocimiento de teorías de aprendizaje como APOS. En tercer lugar, partiendo de las orientaciones curriculares, surge el subdominio del conocimiento de los estándares de aprendizaje *en matemáticas* (KMLS), que contiene las guías que puede tener en cuenta el profesor a la hora de secuenciar los contenidos, como la literatura de investigación, documentos de asociaciones profesionales (por ejemplo, NCTM) o, por supuesto, el currículo oficial del país en el que imparte docencia.

Método

Dado que nuestro interés es la identificación de fortalezas y debilidades del conocimiento matemático relativo a fracciones, decimales y porcentajes en los EPM, decidimos utilizar una metodología tipo *survey* (Colás y Buendía, 1998), diseñando un cuestionario de respuesta cerrada. El análisis de la información obtenida se realizó inicialmente con un estudio de frecuencias al que siguió una interpretación, relativa a cinco categorías del conocimiento del tema fracciones, decimales y porcentajes[2]: fenómenos y aplicaciones, significados y definiciones (incluyendo imágenes de los conceptos), propiedades y su fundamentación, representaciones y procedimientos.

Nuestra situación como formadores de maestros en los tres centros universitarios participantes nos ha permitido acceder a 737 estudiantes para Maestro (de los aproximadamente 1.500 que hay) entre la Universidad de Huelva, el CES Cardenal Spínola CEU de Sevilla y la Universidad de Sevilla. De estos, ninguno había recibido previamente formación en didáctica de la matemática relativa a los temas aritméticos en el grado, por lo que su formación previa consiste en los cursos recibidos desde la Primaria hasta el último año de Secundaria en ciertos casos, o hasta segundo de Bachillerato, dependiendo de la opción escogida en este.

(2) Aceptamos que otros criterios de organización son posibles. Usamos este por ser el que se ajusta a nuestro marco teórico.

El cuestionario como instrumento de recogida de información

Elaboramos un cuestionario piloto que fue probado en un grupo de 52 estudiantes de 2.º de grado en Educación Primaria del CES Cardenal Spínola CEU de Sevilla, lo que permitió refinar la herramienta de obtención de información. Las preguntas seleccionadas emanan de los trabajos de Dickson, Brown y Gibson (1991); Hill, Schilling y Ball (2004); Ball (1990*a,* 1990*b*); Hernández, Noda, Palarea y Socas (2003); Contreras, et ál. (2012); y de la propia iniciativa de los profesores de la materia involucrados en el proyecto, considerando errores comúnmente observados en años previos.

Teniendo en cuenta tanto su resultado como los tiempos previstos y reales usados para responderlo, se terminó de perfilar el cuestionario definitivo, compuesto por 17 cuestiones, de respuesta cerrada, con cuatro opciones de respuesta y una sola correcta. Además, dentro de las tres opciones incorrectas, hay una 'respuesta esperada', que proviene de resultados de la literatura citada anteriormente.

Las cuestiones 4 y 8 abordaron los descuentos como aplicaciones de los porcentajes, y la 1 y la 13 los significados de las fracciones (como parte todo), entendidas como fenomenología. Asimismo, las cuestiones 1, 11, 13, 15 y 16 requieren el conocimiento sobre las definiciones de fracción (y papel de la unidad), fracción impropia, número racional, número decimal y sentido del valor posicional. En cuanto a las propiedades y sus fundamentos, las preguntas 3, 9, 10, 16 y 17 abordan la densidad de los racionales, la jerarquía de operaciones y la naturaleza de la ordenación en números racionales (con énfasis en los negativos). En cuanto a la categoría de representaciones y su interpretación, todas las preguntas requieren que se comprenda la expresión en diferentes registros de los racionales o decimales irracionales (incluyendo porcentajes); a esto se dirigen especialmente las preguntas 1, 12, 13, 15 y 16. Finalmente, en cuanto a la categoría basada en procedimientos, las preguntas 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14 y 17 implican la ordenación de decimales y fracciones, las operaciones con fracciones, y las operaciones con decimales (incluyendo operaciones elementales, cambios de registro).

Los estudiantes recibieron instrucciones para la realización del cuestionario, consistentes en no usar la calculadora.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas acerca de fracciones, números decimales y porcentajes como soporte del cuestionario

El conocimiento especializado de un profesor de Matemáticas, en particular el relativo al contenido que trabaja, no solamente tiene sentido por su valor matemático, sino que aporta a la práctica docente herramientas con las que organizar, dar sentido y comunicar el contenido. Ma (1999) afirma que la falta de conocimiento del contenido (en su caso, de la división de fracciones) genera una dificultad a la hora de crear representaciones útiles en la enseñanza y que «ni el conocimiento pedagógico puede compensar su ignorancia del concepto» (p. 89). Así pues, relacionaremos el conocimiento requerido con los diferentes subdominios planteados en el modelo MTSK.

Respecto al conocimiento de los temas (KOT), nos interesa averiguar el significado que los EPM otorgan a las fracciones (por ejemplo, parte-todo), particularmente a las impropias, como parte de su fenomenología, así como su conocimiento acerca de sus definiciones, representaciones y la ordenación y las operaciones con fracciones, decimales y porcentajes (asociado a la categoría 'procedimientos'). Entendiendo cada uno de estos tres elementos como un tipo de representación del número racional, nos interesa analizar si los EPM son capaces de pasar de uno a otro conservando el valor numérico y el significado que le atribuyen al propio valor (Llinares y Sánchez, 1988), ordenando números racionales y teniendo en cuenta en todo esto la propiedad de densidad de los números racionales. Ligado a lo anterior, se encuentra el concepto de número racional, que asociamos al conocimiento de la definición de dicho número. De igual forma, se aborda la ubicación de racionales en la recta real, añadiendo a las dificultades de identificación y situación de los números decimales la casuística de los números decimales negativos. Otro punto sobre el que se cuestiona es el del porcentaje, en situaciones propias de aplicaciones fenomenológicas (en contextos como los descuentos), no solo en cuanto al cálculo directo del porcentaje de un número, sino también en cuanto a la forma de revertir el proceso de 'hacer un descuento porcentual', así como la forma de encadenar dos porcentajes en uno solo, cuestión íntimamente relacionada con el significado del producto de fracciones, a lo que añadiremos otros procedimientos como la suma de fracciones y la obtención de fracciones equivalentes, y la jerarquía de operaciones. Un elemento que entendemos que debe formar parte fundamental del KOT de los estudiantes para Maestro es el sistema de numeración decimal (SND), en el que se profundiza a través de cuestiones sobre sus propiedades y fundamentos, que abordan la problemática relacionada con la posicionalidad y el significado de cada uno de los elementos.

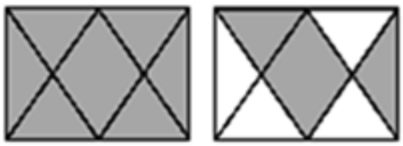
Asimismo, nos interesa el conocimiento sobre la relación entre las fracciones y el área de una figura a través de la identificación de fracciones en modelos de representación de área como partes del total, así como su conocimiento de la estructura matemática (KSM), al trabajar con cantidades genéricas, expresadas en forma de incógnita o variable. También nos interesa su conocimiento de la práctica matemática (KPM) vinculado a inducir la necesidad de generalizar un procedimiento. Sin embargo, aunque creemos que estos aspectos del conocimiento que pudiera tener un EPM son fundamentales en el desarrollo de su práctica, no fueron objeto de especial atención durante el desarrollo del cuestionario; fue en el análisis *a posteriori* de este cuando entendimos que podían ponerse en juego al responder a algunas preguntas, dada la naturaleza de estas. Por esa razón, el cuestionario que justificaremos a continuación está enfocado principalmente en la indagación del KOT relativo a fracciones, decimales y porcentajes (en lo relativo a los elementos resaltados en los dos párrafos anteriores), buscando tanto las debilidades como las fortalezas del conocimiento de los futuros maestros.

A continuación, presentamos las preguntas del cuestionario y la información que deseamos que nos proporcione acerca del KOT de los EPM.

FIGURA I. Pregunta 1 del cuestionario

Si las partes sombreadas del siguiente dibujo representan la parte que nos hemos comido de dos tabletas de chocolate y la no sombreada la que no nos hemos comido, indica cuál de las siguienets opciones representa lo que nos hemos comido.

a) 10/14 de tableta
b) 12/16 de tableta
c) 6/8 de tableta
d) 6/4 de tableta



Esta pregunta está basada en el problema número 5 planteado por Hill et ál. (2004), con el que pretendían calibrar la concepción que los sujetos

Revista de Educación, 367. Enero-marzo 2015, pp. 36-62
Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

poseen sobre la unidad, centrando la atención en la fracción impropia. Llinares (2003) anota que la idea de unidad aparece cuando debemos reconstruirla dada la representación de la parte.

Su resolución requiere la toma de conciencia de que hay dos unidades y de que el resultado es mayor que la unidad: el hecho de que cada una de las opciones mencione «de la tableta» debería dejar claro que esa es la unidad. Eso permite descartar las soluciones *a, b, c* y comprobar la *d* como posible, para lo que basta con ver que cada tableta se compone de ocho triángulos congruentes y que la segunda tiene la mitad sombreada. Es también preciso conocer la equivalencia de fracciones y saber descomponer 6/4 como 1 (4/4) más 4/8, e, incluso, el número mixto: 1 4/8.

De entre las alternativas erróneas, las más esperadas son 12/16 y 6/8, ya que en ambas se obvia la idea de fracción impropia. La opción 10/14 implica dificultades en la identificación de una unidad de medida para calcular la parte sombreada.

FIGURA II. Pregunta 3 del cuestionario

3. Selecciona la respuesta correcta:

a) La letra A equivale al número -1,9
b) La letra A equivale al número -2,04
c) La letra A equivale al número -2,1
d) La letra A equivale al número -2,15

Esta pregunta se plantea desde Castro (2001), quien comenta que la comparación de números decimales resulta problemática porque se tiende a considerar la parte decimal como un número natural. Además, dicha pregunta supone también la dificultad de añadir la parte negativa de la recta real, concepto que ampliamos desde la afirmación de González Marí (2001), quien, refiriéndose a los enteros, asevera que las nociones asociadas a los números negativos no son fáciles de comprender, aunque estos se encuentren en situaciones cotidianas. En esta cuestión se requiere identificar A como número negativo menor que –2 y que cada división entre unidades es una décima, además de la comprensión del orden de números decimales y negativos, para ubicar A entre –2 y –2,1. Por otro lado, Castro y Torralbo (2001) indican que este tipo de representación de los números racionales en la recta real genera dudas cuando aparecen varios números.

La opción *a* refleja no advertir que A es menor que –2 (o lo que es lo mismo, pensar que $-1{,}9 < -2$) y las opciones *c* y *d* pueden implicar no haber tomado conciencia de la división en décimas que ofrece el dibujo. Los tres casos conllevan dificultades en la ordenación de números decimales negativos.

FIGURA III. Pregunta 4 del cuestionario

4. Si he pagado 12.710 € por un vehículo de segunda mano, ¿cuál era su precio de fábrica si su anterior dueño me lo vendió con un 18% de descuento?

a) La letra A equivale al número -1,9
b) La letra A equivale al número -2,04
c) La letra A equivale al número -2,1
d) La letra A equivale al número -2,15

Esta pregunta se apoya en la afirmación de Dickson et ál. (1991, p. 323) sobre la «evidente importancia que reviste la comprensión de los porcentajes en la vida cotidiana y en las actividades comerciales».

En esta cuestión es preciso reconocer el hecho de que no tenemos el precio inicial, pero que, si hemos tenido un descuento del 18%, el precio que hemos pagado es el 82% de la cantidad inicial. Contreras et ál. (2012) han comprobado en su reciente estudio que el error más frecuente estaba relacionado con la aplicación del porcentaje mostrado sobre la cantidad que ya tenía el descuento aplicado, sumándolo a él, o asumiendo que el precio final supone el porcentaje de descuento de la cantidad inicial.

Resolver la proporcionalidad anterior (que es, de alguna manera, la situación inversa de aplicar un descuento) requiere un manejo de las operaciones básicas con números racionales. La opción *c* es la más esperada de entre las incorrectas y supone la idea de que 'deshacer' el descuento es como aplicar el porcentaje al precio final y sumarlo a él, error que resulta muy común (Ariza, Sánchez y Trigueros, 2011).

FIGURA IV. Pregunta 5 del cuestionario

5. Selecciona la opción correcta que corresponde al resultado final de la siguiente serie de operaciones:

$200 \xrightarrow{75\%} \boxed{} \xrightarrow{6/10} \boxed{} \xrightarrow{90\%} \boxed{} \xrightarrow{:0,3} \boxed{}$

a) 2700
b) 2,70
c) 27
d) 270

Esta cuestión supone el manejo de las distintas expresiones de un número racional, sus equivalencias y las operaciones con ellas (Llinares y Sánchez, 1988), y probablemente de la estimación, ya que los cálculos se realizaron sin calculadora. Es previsible que la mayor dificultad esté en la última división, pues suele haber dificultades en comprender que al dividir se pueda obtener un número mayor que el dividendo; asimismo, si efectúan la división transformando el número decimal en una fracción, de nuevo surgen dificultades, ya que, como aseveran Ball (1990*b*) y Ma (1999), el algoritmo de la división por una fracción es conocido por la mayoría, pero no lo es el fundamento matemático que lo sustenta.

FIGURA V. Pregunta 8 del cuestionario

8. Si una mercancía sale a la venta con un descuento sobre su precio de fabricación ***X*** y, sobre ese precio, el vendedor hace un nuevo descuento, lo que paga el cliente se obtiene:

a) Aplicando al valor inicial ***X*** la suma de ambos descuentos
b) Aplicando al valor inicial ***X*** el producto de los dos descuentos
c) Aplicando solo el segundo descuento sobre el valor inicial ***X***
d) Ninguna de las anteriores es correcta

Al igual que en la pregunta número 4, de nuevo estamos ante una aplicación no directa de porcentajes, cuya esencia es la identificación correcta de los valores sobre los que, en cada caso, han de aplicarse aquellos (Contreras et ál., 2012). Busca identificar un error extendido en la aplicación de porcentajes consecutivos; la tendencia natural es sumar ambos porcentajes para obtener la cifra final. Queremos comprobar también si son capaces de interpretar tales porcentajes como fracciones:

en tal caso debería resultar inmediata la identificación de la solución con el producto de ambos.

FIGURA VI. Pregunta 9 del cuestionario

9. Indica la opción correcta:

a) Entre 0,21 y 0,22 no hay ningún número decimal
b) Entre 0,21 y 0,22 hay más de 10 números decimales
c) Entre 0,21 y 0,22 hay exactamente 10 números decimales
d) Entre 0,21 y 0,22 hay exactamente 9 números decimales

FIGURA VII. Pregunta 10 del cuestionario

10. Entre 3/7 y 4/7:

a) No hay ningina fracción
b) No se puede saber si hay fracciones o no
c) Hay una cantidad infinita de fracciones
d) Hay un cantidad finita de fracciones

Basándonos en Ruiz y Castro (2011), en estas dos cuestiones (9 y 10) queremos identificar el conocimiento sobre el proceso que nos permite encontrar un número racional entre dos dados, determinando como error principal la idea de un siguiente en Z (opción *a*); en la número 9 esto se plantea en formato decimal.

La pregunta 10 pretende identificar el conocimiento que permite ubicar una fracción entre otras dos dadas, más allá de la mera comparación entre numeradores (opción *a*), a través de fracciones equivalentes o previo paso a las expresiones decimales de las fracciones dadas. También, como en la cuestión anterior, podremos explorar la idea errónea que sitúa solo un número finito de fracciones entre dos dadas, obviando la densidad de los números racionales (Pehkonen, Hannula, Maijala y Soro, 2006); en este caso, incluso, podemos esperar porcentajes de error superiores a los de la pregunta número 9, pues la representación a través de cocientes entre números enteros de los números racionales acentúa esta confusión.

La opción *a* responde a la idea intuitiva de que entre dos fracciones de igual denominador y numeradores consecutivos (en Z) no se pueden generar más fracciones. La opción *b* supone un distractor, basado en la duda que pudiera generar el conflicto entre la idea intuitiva que nos guiaría hacia la opción *a* y la intuición de las propiedades de densidad de los números racionales. Las opciones *c* y *d* nos informan de la capacidad de los EPM para generalizar el proceso de generación de fracciones entre dos dadas, quedándose en una cantidad limitada (opción *d*) o en una cantidad infinita (opción correcta, *c*).

FIGURA VIII. Pregunta 11 del cuestionario

11. Un número que se encuentra a tres milésimas de 2,347 es:

a) 2,344
b) 2,647
c) 2,317
d) Ninguna es correcta

Se aborda la comprensión del SND (ideas básicas, Ma, 1999), pero esta vez a través del concepto de distancia, que esperamos que sea interpretado como una sustracción (opción *a*), habiéndose elegido esta en vez de la suma por ser menos evidente. Las opciones incorrectas están generadas para evidenciar el desconocimiento del valor posicional de la milésima, que puede confundirse con décima o centésima. Konic, Godino y Rivas (2010) señalan que, siendo el concepto de valor posicional un componente esencial del currículo en Primaria, forma parte de las dificultades comúnmente detectadas en el aprendizaje de los números decimales.

FIGURA IX. Pregunta 12 del cuestionario

12. Indica cuál o cuáles de las siguientes representaciones equivalen a 1,75:

a) 15/10x5/10
b) 100x0,75
c) 3/4+100/25
d) 12/8+50/200

Como Muñoz-Catalán y Carrillo (2007), pretendemos analizar, aunque con un planteamiento diferente, la capacidad de estimar y operar con fracciones y decimales de forma combinada sin el uso de calculadora, a través de un pensamiento flexible de las estructuras subyacentes, lo que supone un dominio de las equivalencias entre distintas expresiones de un número racional. Algunas opciones deberían descartarse por estimación, como c, en la que aparece una fracción equivalente a cuatro sumada a un número positivo.

FIGURA X. Pregunta 13 del cuestionario

13. Señala la representación gráfica equivalente a la fracción 7/8:

a) 

b) 

c) a y b son correctas
d) Ninguna es correcta

Al igual que en la primera cuestión se analizaba la fracción impropia, en esta se aborda el concepto de fracción propia, pero en este caso se proporciona como dato la expresión numérica y se busca la correcta identificación de su representación icónica, señalando como error esperado la opción *c,* lo que, además, informará de nuevo sobre el concepto de fracción impropia.

FIGURA XI. Pregunta 14 del cuestionario

14. Indica qué porcentaje es equivalente a 2/10:

a) 2%
b) 20%
c) 0,2%
d) 0,02%

Esta cuestión requiere la simple identificación de la equivalencia entre las expresiones decimal y en forma de porcentaje de un número; el error esperado es la opción *c* al ser la expresión decimal de 2/10. Pretendemos profundizar con esta pregunta en la habitual dificultad de los alumnos para relacionar una fracción con un porcentaje, algo que Dickson et ál*.* (1991)

mencionan como una de las debilidades detectadas en algunos estudios realizados al respecto. Añadimos la posible aparición de dificultades con el SND en cuanto a la posición de la coma al dividir entre 10 y, posteriormente, pasar a porcentaje.

FIGURA XII. Pregunta 15 del cuestionario

15. En 1,237 hay:

    a) 23 décimas
    b) 12 décimas
    c) 237 décimas
    d) Solo hay 2 décimas

Al igual que en la cuestión undécima, se aborda la comprensión del SND, esta vez con expresiones decimales, dotando de significado a cada uno de los términos y profundizando en la comprensión del valor posicional de los elementos relativos a la parte no entera.

Konic et ál. (2010) destacan que el modo en el cual se expresan ciertos problemas planteados en los libros de Primaria al respecto puede llevar a no considerar la relación entre la posición que ocupa una cifra y el valor asignado; en nuestro caso, la respuesta esperada es *d solo hay dos décimas,* haciéndonos eco de esta situación de conocimiento habitualmente mal construido.

FIGURA XIII. Pregunta 16 del cuestionario

16. Selecciona la opción correcta:

    a) $1{,}23 < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\hat{3}$
    b) $1{,}2\hat{3} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}23$
    c) $1{,}23 < 1{,}2\widehat{32} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}2\hat{3}$
    d) Ninguna respuesta es correcta

Esta cuestión requiere comprender correctamente la ordenación de números en sus expresiones decimales y, subyacente a esta ordenación, comprender el significado de la periodicidad de una cantidad. Asimismo, comprender la ordenación mediante la comparación del valor posicional también requiere que se comprenda el significado de dicha posicionalidad.

FIGURA XIV. Pregunta 17 del cuestionario

17. Selecciona el resultado de la siguiente operación:

2/10-[1/4+3/2+(-8-1/5)]=

a) 133/20
b) 1197/180
c) 117/20
d) a y b son correctos

Finalmente, esta cuestión pretende valorar la capacidad de operar con fracciones, ciñéndonos en este caso a su suma y resta, así como la jerarquía de las operaciones y la equivalencia de fracciones, ya que el resultado correcto requiere identificar todas las soluciones posibles, en este caso, las fracciones equivalentes.

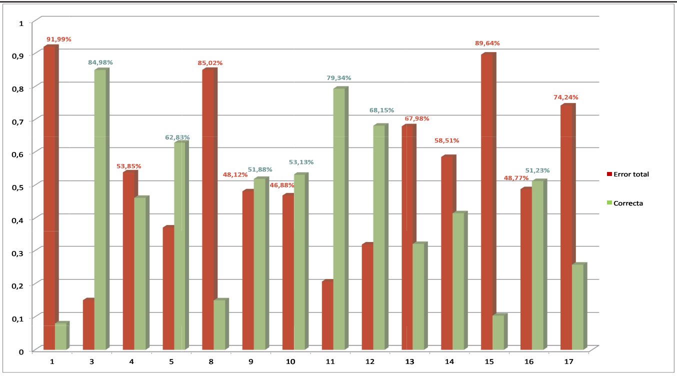
Resultados y conclusiones

El Gráfico I muestra la distribución de porcentajes en cada una de las cuestiones atendiendo a la respuesta correcta y el error acumulado.

Las cuestiones 1 y 13 (significado y representación de fracciones, fracciones impropias), 8 y 14 (porcentajes como aplicación y operador), 15 (significados en el SND) y 17 (aspectos procedimentales relativos a las fracciones) son las que presentan menor porcentaje de respuestas correctas; en la cuestión 4 (aplicación de porcentajes) también el error acumulado supera el valor de respuestas correctas. Por otro lado, en las cuestiones 3 (propiedades y significados de decimales negativos), 5 (operaciones combinadas), 11 (significado de distancia como sustracción en el SND) y 12 (representación y operaciones con fracciones), el porcentaje de respuesta correcta es significativamente elevado, mientras que en las cuestiones 9 y 10 (encontrar un racional entre dos dados, en sus expresiones decimal y fraccionaria) y 16 (representación de decimales), aunque el índice de respuestas correctas supera al total de errores, los valores se muestran muy cercanos.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

GRÁFICO I. Distribución de porcentajes de respuestas correctas y error acumulado



El tratamiento de las fracciones impropias es menos frecuente que el de las fracciones propias en la educación obligatoria, por ello, el bajo resultado de las cuestiones 1 y 13 era esperado: puesto que la interpretación de fracción como partes de un todo es la más fácilmente comprensible (Castro y Torralbo, 2001), se tiende a presentarlas así en el medio escolar; si no se trabaja correctamente el concepto de unidad, puede generarse una errónea construcción del concepto fracción cuando las partes superan la unidad.

Por otro lado, Dickson et ál. (1991) ya mencionan otros estudios relativos a esta cuestión en los que quedaba de manifiesto la no comprensión de la fracción impropia al ser representada mediante subáreas de una unidad de superficie. Los mismos autores presentan como ejemplo la suma de dos fracciones propias que da lugar a una fracción impropia y mencionan la confusión que se genera ante una mala adquisición del concepto unidad al reinterpretarla en el resultado.

El significado de fracción, que puede estar asociado a contextos de partes de un todo (continuo o discreto), operador, razón o cociente (de dos enteros), se trata frecuentemente en Primaria desde la primera de las perspectivas y utilizando modelos de partes de una sola unidad. El cuarto contexto, que proporciona de manera natural la idea de fracción impropia y que está asociado a un significado de la fracción que los estudiantes de Educación Primaria han trabajado previamente (división partitiva), no suele relacionarse con el de partes de un todo. Además es el que más se acerca a la definición formal de fracción. Precisamente, obviar esta definición suele conducir a algunos EPM a identificar 3,5/7 como respuesta a la décima cuestión.

De la misma forma, utilizar los porcentajes más allá de la mera aplicación a un valor concreto, como es el caso de las cuestiones 8 y 14, suele resultar complejo. En la primera de ellas esperábamos el resultado obtenido, pues suele ser parte del elenco de errores con que nos solemos encontrar en las aulas de formación inicial de maestros. El carácter consecutivo de los descuentos lleva a identificar la suma como operación que conduce al resultado, de la misma forma que para averiguar el precio inicial, conocido el precio con descuento, los EPM aplican el porcentaje de descuento al precio final y se lo suman a ese valor (apartado *c* de la cuestión cuarta). En las cuestiones 4 y 8 emerge, de distinta forma, la necesidad de identificar el valor sobre el que aplicar el porcentaje, que es un paso conceptualmente más complejo que el hecho simple de aplicar un porcentaje a un valor determinado (que se podría identificar con la fracción como operador); por su parte, en la cuestión 14, precisamente la ausencia de ese valor sobre el que operar es lo que suele conducir a error (Contreras et ál., 2012). Si la pregunta se hubiera planteado como «¿Qué porcentaje de A (determinado) se corresponde con 2/10 de ese valor?», los resultados se hubieran correspondido con los obtenidos en la quinta cuestión.

Por otro lado, nombrar o reconocer expresiones decimales en representaciones no convencionales es una dificultad evidenciada en otros estudios (Ball, 1990*a*). En la Educación Primaria se suele hacer poco hincapié en el sistema de numeración decimal, cuyo conocimiento tiene importantes implicaciones en todos los aspectos de la Educación Primaria como para ser considerado conocimiento transversal; es más, Kamii (1994) indica que el aprendizaje de los algoritmos aritméticos sin una comprensión conceptual significativa previa del número genera un círculo vicioso, pues «'malenseña' el valor de posición e impide el correcto desarrollo del concepto del número» (p. 49), cuando el valor de posición de nuestro sistema de numeración es fundamental para un profundo conocimiento del mismo que, posteriormente, permita utilizarlo correctamente. El conocimiento con sentido de su estructura implica mucho más que identificar el papel de las unidades de cada orden. La cuestión 15 aborda un aspecto particular de esta comprensión: la relacionada con la lectura y escritura de los números enfatizando un orden de unidad cualquiera. En esta cuestión la dificultad no está en reconocer que el número está compuesto por una unidad, dos décimas, tres centésimas y siete milésimas, sino en hacer diferentes lecturas de esa cantidad, conjugando décimas y centésimas, conociendo la definición de número decimal y sentido de las unidades. Otro aspecto que incluye esa comprensión con sentido del SND es el que se aborda en la cuestión 11 (significado de la distancia entre dos números racionales), pero en este caso la resolución pasa por sumar o restar tres milésimas al valor dado, de ahí la diferencia de resultados entre ambas.

Es destacable, asimismo, la proximidad entre la frecuencia de acierto y error en las preguntas 9 y 10, ambas diseñadas para el estudio de la comprensión de la densidad de los números racionales: este hecho, independientemente de la representación del número racional como decimal o como fracción, no suele ser una idea correctamente construida en los EPM (Ruiz y Castro, 2011).

La cuestión 17, como ya se ha señalado, no requiere solo operar con fracciones, sino también la jerarquía y el uso de fracciones equivalentes o una utilización del algoritmo y el consiguiente dominio del cálculo del mínimo común múltiplo. La conjunción de todos estos aspectos determina la dificultad con la que parecen encontrarse los EPM, reflejada en el resultado del cuestionario.

Analizando ahora los elementos del KOT mencionados en el apartado 4, consideramos que tanto la definición como el significado que los EPM otorgan a las fracciones, impropias y propias (preguntas 1 y 13), así como su conocimiento acerca de las representaciones y los procedimientos que se pueden desarrollar usando fracciones, decimales y porcentajes, en todos los aspectos tratados (preguntas 14, 15, 4, 8) forman parte de las debilidades de los EPM estudiados; igualmente, la obtención de fracciones equivalentes y la jerarquía de operaciones (pregunta 17) son debilidades destacables. También el sistema de numeración decimal (SND), parece formar parte también de las dificultades, pues, aunque la pregunta número 11 en la que se trata el significado de la distancia a la que se encuentran dos números decimales tiene un acierto considerable, las preguntas 14 y 15, que inciden más profundamente en la estructura del SND, cosechan un error muy importante.

En cuanto a la densidad de los números racionales y su orden, aunque el porcentaje de respuestas correctas de las cuestiones correspondientes (9, 10 y 16) supera al del error acumulado en cada una de ellas, es tan escasa la diferencia que nos inclinamos a pensar que son también muestra de debilidades solo superadas mínimamente por el posible conocimiento procedimental asociado, lo cual muestra una debilidad en el conocimiento de las propiedades y fundamentos de los números racionales en cuando a su densidad.

Del lado de las fortalezas, por tanto, solo es razonable situar la capacidad de ubicar un número decimal en la recta (pregunta 3), incluso siendo este un numero negativo, que es lo que establece la mayor dificultad de la cuestión y lo que hace el hallazgo más destacable; debemos unir a esta el uso de los algoritmos como el producto y la suma (entendida en el sentido amplio) de fracciones, lo que incluye la interpretación de la distancia entre dos expresiones decimales como una sustracción, y la estimación y operación con dos expresiones fraccionarias y/o decimales (preguntas 11 y 12), que son objeto de aprendizaje ampliamente a lo largo de la Primaria y del primer ciclo de la Secundaria.

Reflexión final

Para finalizar, nos gustaría que este estudio pudiera contribuir a la reflexión de los distintos actores implicados en el sistema educativo con capacidad en la toma de decisiones. En primer lugar, esto nos debe ayudar a comprender mejor qué y cómo trabajar determinados aspectos relacionados con las fracciones, los decimales y los porcentajes en la Educación Primaria. En segundo lugar, las autoridades educativas deberían definir con más precisión los conocimientos matemáticos previos exigibles a un estudiante para Maestro, puesto que la universidad no parece el lugar más adecuado para volver sobre conocimientos que deberían haberse superado con anterioridad.

Queremos llamar la atención asimismo sobre el marco teórico sobre el que se apoya nuestro estudio. Aunque nos hemos centrado en el conocimiento de los temas matemáticos (KOT), también han aflorado conocimientos relacionados con la estructura matemática (KSM) y con la práctica matemática (KPM), que conforman las tres componentes del conocimiento matemático del profesor de Matemáticas (MK), íntimamente relacionado con las cuatro propiedades que plantea Ma (1999) como caracterizadoras de lo que llama 'comprensión profunda de la matemática fundamental' por parte del maestro: ideas básicas (simples y poderosas), relacionadas con el KOT y el KSM que les permitirán guiar a sus futuros alumnos a «realizar una verdadera actividad matemática» (Ma, 1999, p. 148); conectividad, en cuanto a las conexiones entre los conceptos y los procedimientos (KOT y KSM); múltiples perspectivas de una misma realidad o aproximación a la solución de un problema (KOT); y coherencia longitudinal, relacionada con el conocimiento curricular. Los subdominios de nuestro marco teórico, y particularmente las categorías del KOT analizadas en este estudio, conforman una estructura fundamentada de lo que debería abordarse en la formación inicial de los maestros. Para que esto pueda hacerse, es imprescindible partir de un conocimiento matemático, sólidamente construido que permita abordar con garantías, tanto las componentes del conocimiento didáctico del contenido, como profundizar en el conocimiento matemático especializado que requiere un maestro para realizar una buena práctica docente. Una posibilidad de conseguir un mayor nivel de conocimiento matemático en el momento de comenzar la formación inicial, que está en este momento en discusión (Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014), es la realización de pruebas específicas para el acceso a esta formación.

Referencias bibliográficas

Ariza, A. Sánchez, A. y Trigueros, R. (2011). *Matemáticas específicas para maestros.* Sevilla: Ediciones Copiarte.

Ball, D. L. (1990*a*). I Haven't Done these since High School: Prospective Teachers' Understanding of Mathematics. En M. Behr, C. Lacampagne y M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th PME-NA,* 268-274. DeKalb (Illinois): PME, NA.

— (1990*b*). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21 (2), 132-144.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), 389-407.

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codés, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII,* 227-236. Salamanca: SEIEM.

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 315-345. Madrid: Síntesis.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 285-314. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. *Actas del 8.º CERME.* Febrero. Antalya, Turquía.

Colás, M. P. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa.* Sevilla: Ediciones Alfar.

Contreras, L. C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M. C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para Maestro. *Bolema,* 26 (42*b*), 433-458.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 61 (3), 293-319.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del VIII simposio de la SEIEM.* La Coruña: SEIEM.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: MEC, Labor.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and Its Impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 147-164. Reston (Virginia): NCTM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht (Países Bajos): Reidel.

González Marí, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 257-284. Madrid: Síntesis.

Hernández, J., Noda, M. A., Palarea, M. M. y Socas, M. M. (2003). *Habilidades básicas en matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio* (preprint). Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.

Hill, H. C., Schilling, S. G. y Ball, D. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *Elementary School Journal,* 105, 11-30.

Jakobsen, A., Thames, M. H. y Ribeiro, C. M. (2012). Delineating Issues related to Horizon Content Knowledge for Mathematic Teaching. *Actas del 8.º congreso del CERME.* Febrero. Antalya, Turquía.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Konic, P. M., Godino, J. D. y Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números,* 74, 57-74.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas,* 187-220. Madrid: Pearson Educación.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah (Nueva Jersey): Lawence Erlbaum.

Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación Matemática,* 19 (1), 5-26.

Pehkonen, E., Hannula, M., Maijala, H. y Soro, R. (2006). Infinity of Numbers: How Students Understand it. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME Conference* (vol. 4), 345-352. Praga: PME.

Post, T., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. En E. Fennema , T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.), *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics,* 177-198. Nueva York: SUNY Press.

Putt, I. J. (1995). Preservice Teachers Ordering of Decimal Numbers: When More is Smaller and Less is Larger! *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 17 (3), 1-15.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching.* Londres: Sage.

Ruiz, J. F. y Castro, E. (2011). Decimales. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria,* 219-244. Madrid: Ediciones Pirámide.

Shulman, L. S. (1986). Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15 (2), 4-14.

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a Framework for the Development of Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 11, 499-511.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teacher's Thinking about Division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21 (2), 98-108.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1994). Divisibility and Division: Procedural Attachments and Conceptual Understanding. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of 18th PME,* 423-430. Lisboa: PME.

Dirección de contacto: Miguel Ángel Montes. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Universidad de Huelva. Campus El Carmen. Avda. del 3 de marzo, s/n; 21071, Huelva. E-mail: miguel.montes@ddcc.uhu.es

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

The arithmetic Knowledge of prospective teachers. Strengths and Weaknesses[1]

Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282

Miguel Ángel Montes
Luis Carlos Contreras
University of Huelva. Faculty of Education Sciences. Department of Didactics and Philosophy. Huelva. España.
María del Mar Liñán
University of Seville. Faculty of Education Sciences. Department of Didactics of Mathematics. Seville. España.
María Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Climent
José Carrillo
University of Huelva. Faculty of Education Sciences. Department of Didactics of Sciences and Philosophy. Huelva. España.

Abstract

The media has recently alerted public opinion to a situation which research into mathematical education has been highlighting for the last two decades: the poor quality of primary teachers' mathematical training. This failing of prospective primary teachers (PPTS), which has been noted at an informal level in our universities for some time, is the focus of this study. Against this background, the paper describes an exploratory study using a survey about the mathematical knowledge required for teaching with 737 trainee primary teachers at three

(1) Sponsored by the research project PIE (1101), from the University of Huelva (Educational Research Program), and by the research project EDU2013-44047-P Characterisation of the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge, from the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness. We acknowledge the collaboration of University of Seville and CES Cardenal Spínola CEU.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

Andalusian university training centres, carried out under the auspices of a Teaching Innovation Project at one of them. Using the framework of the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK), and specifically, the sub-domain concerning knowledge of mathematics topics, a questionnaire was developed which contained items relating to fractions, decimals and percentages, chosen as much for their inherent importance as for their application to other mathematical contents and other disciplines within the scope of primary education. By this means we were able to explore the prospective teachers' knowledge of these contents. The results highlighted a significant number of weaknesses, some already described in the literature, and some strengths. In both cases, the findings represent baseline data which can be compared with the situation in other primary training centres. We hope they also provide food for thought for the educational authorities in regard to university entrance selection procedures. More specifically, the study should be a starting point for training centres to redesign their programmes.

Keywords: MTSK, Prospective Primary Teachers, Initial Training, Professional Knowledge, Arithmetic

Resumen

Los medios de comunicación han alertado recientemente a la opinión pública acerca de una realidad que la investigación en educación matemática llevaba evidenciando las dos últimas décadas: la deficiente formación matemática de los maestros. Estas deficiencias, que habíamos venido constatando de manera informal en nuestras universidades con los estudiantes para Maestro (EPM), son el objeto de estudio de nuestra investigación. En ese contexto, este artículo describe un estudio exploratorio tipo *survey* sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza que tienen 737 estudiantes para Maestro de tres centros de formación de maestros de universidades andaluzas, realizado en el contexto de un Proyecto de Innovación Docente de una de ellas. Usando el marco de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) y, dentro de él, el subdominio relativo al conocimiento de los temas matemáticos, se elaboró un cuestionario que contenía ítems relativos a fracciones, decimales y porcentajes, contenidos que fueron elegidos tanto por su trascendencia intrínseca como por su aplicación a otros contenidos matemáticos y a otras disciplinas en el ámbito de la Educación Primaria. Esto nos ha permitido explorar el conocimiento que estos futuros profesores poseen sobre esos contenidos. Los resultados han mostrado un número importante de debilidades, algunas de las cuales ya habían sido descritas por la literatura de investigación, y también algunas fortalezas. En ambos casos, la información obtenida supone un referente para explorar la realidad de otros centros de formación de maestros; un elemento de reflexión para las autoridades académicas acerca de los procesos de selección para el acceso a la universidad y, más concretamente, a estos centros de formación; y un punto de partida para el rediseño de sus programas de formación.

Palabras clave: MTSK, estudiantes para Maestro, formación inicial, conocimiento profesional, aritmética.

Introduction

Out of all the primary level topics relating to arithmetic, the most important, in terms of both the actual content and its application to other mathematical content and other disciplines, is that coming under the umbrella of fractions, decimals and percentages. In consequence, primary teachers' mathematical knowledge requires special attention regarding the structure, contents and associations relating to this area. It is the area in which algorithms and procedures are frequently covered, and where pupils often display significant gaps in their knowledge at the end of their period of compulsory education (PISA; TIMSS).

There are no specific entry requirements for Primary Education courses in Spain. Nor is the area amongst the most popular, which means that for many students, the degree was not their first choice. Added to this, it must be recognised that a significant number of students have had little contact with mathematics for many years, which may be the reason why their grasp of elementary mathematics has proved to be lacking (Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán and Climent, 2012).

Evidence of this can be found in both national and international studies. In the area of fractions, decimals and percentages, specifically, we can cite the work of Putt (1995) with regard to the representation and ordering of numbers as decimals; Post, Harel, Behr and Lesh (1991) with respect to decimal and fractional representations; Castro, Castro and Segovia (2004), and Zazkis and Campbell (1994) regarding decimals less than one, calculation rules for decimal numbers, and adjusting positional value in estimates; and Muñoz-Catalán and Carrillo (2007) in terms of the use of formal methods of simplifying fractions, and the concept of fraction itself.

It should be added that, in our model of teachers' knowledge, this area of mathematical knowledge plays a very significant role, for which reason

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

it is important to have a very clear idea of each student's starting point before undertaking any training.

In this respect, we have been working on a Project for Teaching Innovation at the University of Huelva entitled "Prospective Primary Teachers' Knowledge for Teaching Mathematics: Analysis of Difficulties" (PIE 1101), with the aim of identifying the strengths and weaknesses of prospective primary teachers (PPTS) at the start of their studies, and of gaining insights into the possible causes, such that the training they are offered can fill the gaps at the same time as developing the specialised mathematical knowledge they are to need.

In the first stage of the project, we developed a process for the identification and analysis of the students' incomplete and erroneous primary level mathematical knowledge. That is to say, we started from the mathematical knowledge held in common by the PPTS. However, the subsequent analysis of this knowledge brings with it two further considerations: awareness of the points of difficulty and frequently occurring errors associated with specific topics, and familiarity with learning strategies that can be applied to these, both of interest to primary teacher training.

In this paper, we focus on the task of identifying the PPTS' strengths and weaknesses with respect to fractions, decimals and percentages.

Theoretical Background

Teachers' professional knowledge has been the object of much debate and theorisation, and has given rise to multiple programmes aimed at its improvement. In Shulman's (1986) seminal work, this knowledge is divided into two large macro-components: knowledge about the subject to be taught and pedagogical knowledge associated with this content. These macro-components are then further sub-divided into seven sub-domains, among which the teacher's knowledge can be classified. This initial distinction is of special interest when it comes to developing initial and in-service training programmes in that, whilst recognising the integrated nature of teachers' knowledge, it suggests that it is possible to achieve a detailed characterisation of each of the two components. Building

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

on Shulman's work, various such characterisations of teachers' knowledge have been developed (Fennema and Franke, 1992; Davis and Simmt, 2006; Rowland, Turner, Thwaites yand Huckstep, 2009), and in keeping with Shulman's decision to separate out the two macro-components above, the research group at the University of Michigan developed the model, "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT: Ball, Thames and Phelps, 2008), not only as an instrument of analysis, but also as the foundation on which to build teacher-training courses. The model defines three sub-domains for each macro-component defined by Shulman. Of particular interest for this paper are those associated with knowledge of the subject, that is, Common Content Knowledge (CCK), Specialised Content Knowledge (SCK), and Horizon Content Knowledge (HCK). CCK is defined as the kind of knowledge of the subject that anyone using mathematics might require in their profession, including those working outside the field of teaching. It is thus the knowledge associated with the theory and practice of mathematics, and its potential application to other fields; in short, the kind of mathematics to be found in textbooks. SCK is one of the chief contributions of the Michigan group, as it recognises the difference in the mathematical knowledge required by a mathematics teacher, as opposed to, say, a physicist or mathematics researcher. In the paper in which the model was presented, the specialist nature of this knowledge is given shape in terms of the actions it enables the teacher to perform: "***responding to students why questions', […] and giving or evaluating mathematical explanations***" (Ball et al., 2008, p. 400), amongst others. Finally, HCK, defined as "an orientation to, and a familiarity with, mathematical knowledge" (Jakobsen, Thames and Ribeiro, 2013), is the knowledge enabling the teacher to understand how mathematics works (from which the 'familiarity with'), and to take a prospective view of the mathematical topics to be dealt with in class (from which the 'orientation to'). Nevertheless, this model has encountered problems in the definition between the different sub-domains (Silverman and Thompson, 2008), which led the research group at the University of Huelva to develop a refinement. This new model, denominated "Mathematics Teachers' Specialised Knowledge" (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán, 2013), starts from the premise that the mathematics teacher's knowledge is specialised by virtue of being part of the knowledge required to give lessons, irrespective of whether other professions might draw on it. Nevertheless, in the design of the model, only the knowledge specific to mathematics teachers is considered, all other general knowledge of use to teaching, but alien to mathematics, being excluded. To this extent, despite its synthetic nature, the mathematics teacher's knowledge is considered amenable to an atomistic analysis. In the course of conducting their teaching, the teacher understands, puts into action and reflects on different elements. These elements comprise, in terms of mathematical knowledge, the concepts, procedures and structures inherent in mathematical thinking, and in terms of pedagogical content knowledge, systems for organising content for teaching, the pupils' ways of approaching content, and curricular constraints. These six elements of teachers' knowledge and reflection give rise to six different sub-domains.

We will first describe those fitting the characterisation of the macro-component described by Shulman relating to subject knowledge. The sub-domain *Knowledge of Topics* (KOT) takes mathematical content as its object, and contains the knowledge of different dimensions (which we organise into categories) associated with each topic, including properties and their theoretical underpinnings, the procedures which can be undertaken with the topic, the phenomenology (Freudenthal, 1983) and applications of the content to real or mathematical situations (such as different examples in which the topic becomes evident), the different meanings and definitions of the concept, and the representations of the content. These categories will enable us to design the structure of the data-collection instrument and subsequent analysis.

We recognise that this knowledge can be shared with other professions, but that certain dimensions, such as the meanings of a topic, are particularly relevant to the work of the mathematics teacher, making it specialised, to the extent that they represent a tool for exercising the profession of teacher. *Knowledge of the Structure of Mathematics* concerns understanding the mathematical context of an item to be taught. It is the kind of structural knowledge which enables the teacher to consider content prospectively, in the sense that he or she approaches "basic mathematics from an advanced perspective," or conversely, approaches "advanced mathematics from a basic perspective". It is these considerations, together with the idea of Felix Klein of understanding mathematics from a higher perspective, providing the teacher with a synthesised view of the structure of mathematics, which constitute this sub-domain. Finally, *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM) consists of knowledge about how mathematics is constructed. It involves elements of a general nature, such as knowing different kinds of demonstrations or forms of reasoning, like syntax, and notions of classification and generalisation, and elements associated with a specific topic, such as the logic underpinning the idea of equivalence class, fundamental to considering equivalent fractions. These three sub-domains together comprise, in this new perspective, the content which in Shulman's terms would be subject matter knowledge, and which in this case, given the mathematical contextualisation of the teacher to be considered, we denominate mathematical knowledge.

In the domain of pedagogical content knowledge (Shulman's second macro-component), if we focus attention on the means of organising mathematical content for teaching, the sub-domain *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) emerges. This consists of different strategies, materials, resources and aids that enable mathematical content to be organised in the way the teacher would like. Included within this sub-domain are theories of teaching, such as the features of problem-solving as a methodological gambit. In the same way, if we focus on the teacher's knowledge of the pupil as learner, we arrive at the sub-domain *Knowledge of the Features of Learning* (KFLM), which includes the teacher's knowledge of the pupils' difficulties, errors and obstacles, conceptions and initial ideas about concepts, the language and vocabulary typically employed by pupils to talk about certain concepts, and knowledge of the steps along the way to learning a particular item. Also included in this sub-domain are theories of learning, such as APOS. Thirdly, based on curricular questions, there is the sub-domain *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), which contains guidelines that the teacher might take into account when sequencing content, such as research literature, documents supplied by professional associations (e.g. NCTM), and of course the national curriculum of the country in question.

Method

Given our interest in identifying the strengths and weaknesses of the PPTS' knowledge of fractions, decimals and percentages, we settled on using a *Survey* methodology (Colás and Buendía, 1998), designing a multiple-choice questionnaire. The analysis of the data thus obtained first involved

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

a frequency count of five categories of knowledge about fractions, decimals and percentages[2]: phenomena and applications; meanings and definitions (including images of the concepts); properties and their fundamental principles; representations; procedures.

As primary teacher trainers in three university centres –the University of Huelva, the Cardenal Spínola CES Seville CEU (University Centre for Teacher Training), and the University of Seville– gave us access to 737 primary trainees (or around 1,500 in total). None had received tuition in Mathematics Education relating to arithmetic in the course of their degree, such that their previous contact with the topics took place during the compulsory education phase, or in some cases from 16 to 18 years of age.

The questionnaire as data collection instrument

A pilot questionnaire was put to the test with a group of 52 students in their second year of a degree in Primary Education at the Cardenal Spínola CES Seville CEU. This gave us the opportunity to refine the data collection instrument. The questions selected for inclusion were drawn chiefly from the work of Dickson, Brown and Gibson (1991), Hill, Schilling and Ball (2004), Ball (1990 a, 1990 b), Hernández, Noda, Palarea and Socas, (2003), Contreras et al. (2012), but also included items written by the participating teachers themselves, based on frequently occurring errors they had noted in previous years.

Bearing in mind the results of the pilot, especially in terms of estimated and real turn-around times, the definitive questionnaire was given the form of 17 multiple-choice questions of four options each and only one correct answer. In addition, amongst the three incorrect responses, there was an *expected answer* drawn from the above literature on the topic.

Questions 4 and 8 dealt with discounts as applications of percentages. Questions 1 and 13 considered the meanings of fractions (as part of a whole), understood as phenomenology. Likewise, questions 1, 11, 13, 15 and 16 demanded knowledge of the definitions of fraction (and the role of the unit), improper fractions, rational numbers, decimals, and meaning of positional value. In terms of properties and their fundamental features, questions 3, 9, 10, 16 and 17 focused on the density of rational numbers, the hierarchy of operations, and the nature of ordering in rational numbers (with an emphasis on negative numbers). Regarding the

(2) We assume that different organisational criteria are possible. We apply these due to their adjustment to our theoretical framework.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

category of representations and their interpretation, all the questions required an understanding of the expression of different registers for rational numbers and irrational decimals (including percentages), with questions 1, 12, 13, 15 and 16 particularly focussed on this aspect. Finally, with respect to the category of procedures, questions 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14 and 17 involved the ordering of decimals and fractions, and operations on fractions and decimals (including basic operations and changes of register).

Key amongst the instructions that the students were given for completing the questionnaire was the injunction against using a calculator.

Mathematics teachers' specialised kowledge of fractions, decimal numbers and percentages as support to the questionnaire

A mathematics teacher's specialised knowledge, especially of the content in hand, matters not only in terms of its mathematical value, but also in that it provides instruction with tools for organising, making sense of, and communicating this content. Ma (1999) claims that lack of content knowledge (in this case, the division of fractions) causes problems when it comes to creating useful representations in teaching, and that "*even pedagogical knowledge may not compensate for their ignorance of the concept*" (p. 89). We will thus make a connection between the required knowledge and the corresponding sub-domains within the MTSK model.

With respect to Knowledge of Topics (KOT), we were interested to find out the meaning which the PPTS gave to fractions (for example, part-whole), particularly to improper fractions, as part of their phenomenology. Equally, we were interested in their knowledge about definitions, representations and the ordering of, and operations using, fractions, decimals and percentages (associated with the category "procedures"). Taking these three latter items as alternative ways of representing rational numbers, we were keen to discover the extent to which the students were able to move from one to another while retaining the numerical value, and to learn the meaning they attached to this value (Llinares and Sánchez, 1988), ordering rational numbers, and taking into account throughout the property of density of rational numbers. Connected to the foregoing, is the concept

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

of rational number, which we associate with knowledge of its definition. In the same way, the location of rational numbers along the real number line is also relevant, with the additional difficulty of identifying and locating the decimal numbers, and the problem of the negative decimal numbers. Another point of interest was that of percentages. In phenomenological applications (such as calculating discounts), we were interested in students ability not only to calculate the direct percentage of a number, but also to reverse the procedure of "making a percentage discount", and the means of chaining together two percentages as just one, a procedure very closely related to the meaning of the product of fractions, and to which we would add other procedures such as the addition of fractions, the obtaining of equivalent fractions, and the hierarchy of operations. One element which we believe should form a fundamental part of primary education students' KOT is the Decimal Number System (DNS), which can be explored through questions about its properties and fundamental features, tackling the issue of place value and the meaning of each one of the elements.

Additionally, we were interested in the knowledge relating to the relation between fractions and the area of a shape through the identification of fractions in models representing area as part of the whole, as well as Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM), in working with generic quantities, expressed in the form of an unknown or variable item. We were also interested in the students' Knowledge of the Practice of Mathematics (KPM) linked to inducing the need to generalise a procedure. Nevertheless, although we believe that these aspects of a PPT's potential knowledge are fundamental to the putting into effect of their work, they did not originally receive special attention during the development of the questionnaire. It was during the *post hoc* analysis that we realised that this knowledge might be brought into play in answering the questions, given the way they were formulated. For this reason, the questionnaire which we explain in detail below is chiefly focussed on exploring the KOT associated with fractions, decimals and percentages (relative to the elements highlighted in the foregoing paragraphs), aiming to identify both the strengths and weaknesses of the prospective teachers' knowledge.

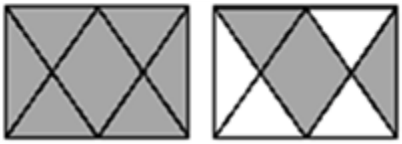
Below, we present the questions forming the questionnaire, along with the data we hoped it would provide about the KOT of the PPTS.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

FIGURE I. Question 1 in the questionnaire

1. If the shaded parts of the drawing below represent the part of two chocolate bars that we have eaten, and the unshaded what we have not eaten, indicate which of the following options represents what we have eaten:

a) 10/14 of a bar
b)12/16 of a bar
c) 6/8 of a bar
d) 6/4 of a bar



This question is based on problem number 5 posed by Hill et al. (2004), with the intention of calibrating responders' conception of unity and focussing attention on the improper fraction. Llinares (2003) notes that the idea of unity appears when we need to reconstruct it given the representation of the part.

The solution requires the responder to be aware that there are two units and that the result is larger than a unit: the fact that each of the options includes the phrase "of a bar" should make it clear that this is to be taken as the unit. Once this premise is assimilated, options *a*, *b* and *c* can be discarded, and *d* checked. To do this it is sufficient to observe that each bar is composed of 8 triangles of equal size, and that half of the second bar is shaded. It is also necessary to know the equivalence of fractions and to know how to decompose 6/4 as 1 (4/4) plus 4/8, and even the mixed number, 1 4/8.

From amongst the wrong answers, the more expected are 12/16 and 6/8, as in each the idea of improper fraction is not present. The option 10/14 suggests the responder has difficulties in identifying an appropriate unit of measurement to calculate the shaded area.

Revista de Educación, 367. January-March 2015, pp. 36-62
Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

FIGURE II. Question 3 in the questionnaire

3. Choose the correct answer:

a) Letter A equals the number −1.9
b) Letter A equals the number −2.04
c) Letter A equals the number −2.1
d) Letter A equals the number −2.15

This question is posed in Castro (2001), in which it is noted that the comparison of decimal numbers can be problematic because there is a tendency to consider the decimal part as a natural number. What is more, the difficulty is augmented by being located on the negative axis of the number line; as González Marí (2001) points out about whole numbers, notions associated with negative numbers are not easy to assimilate, even though they can be met with in everyday situations. This question demands the responder to identify A as a negative number smaller than -2, to recognise that each line between the units represents a tenth, and to know how to put both decimals and negative numbers in order so as to locate A between -2 and -2.1. For their part, Castro and Torralbo (2001) note that this kind of representation of rational numbers along the number line cause doubts to emerge when several numbers are involved.

Option a suggests the responder is unaware that A is less than -2 (or, which is the same, believe that $-1.9 < -2$). Options c and d might suggest that the responder is not aware that the evenly spaced vertical bars represent tenths of a unit. All three wrong answers imply difficulties in putting decimals and negative numbers in order.

FIGURE III. Question 4 in the questionnaire

4. If I paid 12.710€ for a second-hand car, what was its factory price if the previous owner sold it to me with an 18% discount?

a) The original price was 15.600€
b) The original price was15.500€
c) The original price was 14.997.80€
d) None of the above

This question draws on Dickson et al. (1991) observation underlining the "clear importance that an understanding of percentages exerts in everyday life and in commercial activities" (p. 323).

In this question it is essential to recognise the fact that we do not have the starting price, but that if we have had an 18% discount, the price that we have actually paid is 82% of the original price. In a recent study, Contreras et al. (2012) demonstrated that the most frequently occurring error consists in applying the percentage to the known price, that is the figure which has already been discounted, and adding the stipulated percentage to this amount, that is, assuming that the final price determines the percentage discount of the original price.

Solving the proportionality (which is, in one way, the inverse of applying a discount) requires an ability to handle basic operations with rational numbers. Option *c* is the most expected of the wrong answers as it stems from the idea that "undoing" the discount means applying the percentage to the final (i.e., the discounted) price and adding the amount thus obtained to the same, a frequently occurring error (Ariza, Sánchez, Trigueros, 2011).

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

FIGURE IV. Question 5 in the questionnaire

5. Choose the correct answer corresponding to the final result of the following series of operations:

$$200 \xrightarrow{75\%} \boxed{} \xrightarrow{6/10} \boxed{} \xrightarrow{90\%} \boxed{} \xrightarrow{:0.3} \boxed{}$$

a) 2,700
b) 2.70
c) 27
d) 270

This question supposes being able to handle the different expressions of a rational number, its equivalents and the operations on them (Llinares and Sánchez, 1988), and probably estimating, given that the calculations are to be done without a calculator. It is foreseeable that the greatest difficulty lies with the final division, as difficulties often accompany understanding that a higher number than the dividend can be obtained after division. Likewise, if the division is achieved by transforming the decimal number into a fraction, difficulties again arise, since, as Ball (1990b) and Ma (1999) assert, the algorithm for dividing by a fraction is known to most people, but not the mathematical foundations underpinning it.

FIGURE V. Question 8 in the questionnaire

8. If some goods go on sale with a discount on the manufacturing price X, and the retailer applies another discount to this price, the purchasing price is obtained:

a) By applying the sum of both discounts to the original value X
b) By applying the product of the two discounts to the original value X
c) By applying only the second discount to the original value X
d) None of the above is correct

As in question 4, we are again faced with a non-direct application of percentages, the essence of which is the correct identification of the values to which these should be applied in each case (Contreras et al., 2012). The question seeks to identify a widespread error in applying consecutive percentages: the natural tendency to add both percentages together to arrive at the final figure. We also sought to check whether the students were able to interpret the percentages as fractions, in which case identifying the solution as the product of both should be immediate.

FIGURE VI. Question 9 in the questionnaire

9. Indicate the correct answer:

a) Between 0.21 and 0.22 there is no decimal number
b) Between 0.21 and 0.22 there are more than 10 decimal numbers
c) Between 0.21 and 0.22 there are exactly 10 decimal numbers
d) Between 0.21 and 0.22 there are exactly 9 decimal numbers

FIGURE VII. Question 10 in the questionnaire

10. Between 3/7 and 4/7:

a) There is no fraction
b) It is not possible to know whether or not there are fractions
c) There is an infinite number of fractions
d) There is a finite number of fractions

Drawing on Ruiz and Castro (2011), in these two questions (9 and 10) we aimed to identify knowledge of the process which allows us to find a rational number between two given numbers, determining as the chief error the notion of a following number in Z (answer *a*), question 9 being in the decimal register.

Question 10 aims to identify the knowledge required to locate a fraction between two given fractions, beyond merely comparing the numerators (answer *a*), by means of equivalent fractions, or by first converting the given fractions into decimal expressions. As in the previous question, we also wanted to explore the erroneous idea that there is a finite number of fractions between two given fractions, indicating a lack of awareness of the density of rational numbers (Pehkonen, Hannula, Maijala and Soro, 2006). In this instance, we expected a higher percentage of errors than for question 9, as the representation of rational numbers through coefficients between whole numbers tends to accentuate the misconception.

Answer *a* draws on the intuitive idea that between two fractions consisting of the same denominator and consecutive numerators (en Z), there cannot be any further fractions. Answer *b* represents a distracter,

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

playing on the doubt arising from the conflict between the intuitive idea expressed in *a* and an intuition of the property of density of rational numbers. Answers *c* and *d* concern the ability of the PPTs to generalise the process of making fractions which lie between those given, opting either for a limited number, answer *d*, or an infinite number, answer *c*, the correct one.

FIGURE VIII. Question 11 in the questionnaire

11. The number which is three thousandths from 2.347 is:

a) 2.344
b) 2.647
c) 2.317
d) None is correct

This question deals with understanding the DNS (basic ideas, Ma, 1999), but this time through the concept of distance. The question was designed with a subtraction (answer *a*), as opposed to an addition, in order to make the association with the concept of distance less evident. The wrong answers were designed to highlight a lack of awareness of the positional value of the thousandths, with the value being mistakenly interpreted as a tenth or hundredth. Konic, Godino and Rivas (2010) note that, as an essential item on the primary curriculum, difficulties in grasping the concept of positional value are frequently detected in the course of learning decimal numbers.

FIGURE IX. Question 12 in the questionnaire

12. Indicate which one, or ones, of the representations below can be written as 1.75:

a) 15/10 x 5/10
b) 100 x 0.75
c) ¾ + 100/25
d) 12/8 + 50/200

As in Muñoz-Catalán and Carrillo (2007), this question aims to analyse –although from a different perspective– the ability to estimate and operate, using fractions and decimals in combination, without the use of a calculator. It requires a certain flexibility of thought in recognising the underlying structures, and demands a sound understanding of the equivalent forms of expressing a rational number. Some of the answers can be discarded through the process of estimation, such as *c*, in which a fraction equivalent to 4 is added to a positive number.

FIGURE X. Question 13 in the questionnaire

13. Indicate the diagram equivalent to the fraction 7/8

a)

b)

c) Both a and b are correct
d) None of the above is correct

In the same way that the first question analysed improper fractions, this question considers the concept of proper fraction. In this case, however, the numerical expression is provided and it is the corresponding diagrammatic equivalent that must be identified. The expected error is answer *c*, which also gives further information on the conceptualisation of improper fractions.

FIGURE XI. Question 14 in the questionnaire

14. Indicate which percentage is equivalent to 2/10:

a) 2%
b) 20%
c) 0.2%
d) 0.02%

This question requires a simple identification of the equivalence between fractional and percentage registers for a number. The expected most likely error in this case is offered in option *c*, which is decimal equivalent of 2/10.

In this question, we aim to explore the common difficulty pupils have in associating a fraction with a percentage, something which Dickson et al.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

(1991) mention as one of the weaknesses detected in studies into the area. We included the possibility of difficulties with DNS arising from the position of the decimal point after dividing by 10 and then converting it to a percentage.

FIGURE XII. Question 15 in the questionnaire

15. In 1.237 there are

a) 23 tenths
b) 12 tenths
c) 237 tenths
d) There are only 2 tenths

As in question 11, the focus is on understanding the DNS, in this case in respect to decimal expressions and the meaning of each of the terms, in particular the positional value of the elements within the non-whole part.

Konic et al. (2010) note that the way certain problems are expressed in primary textbooks can lead children not to consider the relation between the position a number occupies and the value that is assigned to it; in our case, the expected answer is *d* 'There are only two tenths', echoing this situation of frequently badly constructed knowledge.

FIGURE XIII. Question 16 in the questionnaire

16. Choose the correct answer:

a) $1{,}23 < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\hat{3}$
b) $1{,}2\hat{3} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}23$
c) $1{,}23 < 1{,}2\widehat{32} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}2\hat{3}$
d) None of the answers is correct

In this question it is necessary not only to know how to put decimal numbers in order, but also to understand the system of recurring numbers. In effect, knowing how to sequence the numbers by comparing their positional value here demands full understanding of how this positionality operates.

FIGURE XIV. Question 17 in the questionnaire

17. Indicate the result of the following operation:

2/10-[1/4+3/2+(-8-1/5)]=

a) 133/20
b) 1197/180
c) 117/20
d) a and b are both correct

Finally, this last question aims to evaluate the capacity to operate with fractions, focussing in this instance on the addition and subtraction of fractions, the hierarchy of operations and equivalent forms of expressing fractions, as the correct answer requires recognising equivalent solutions.

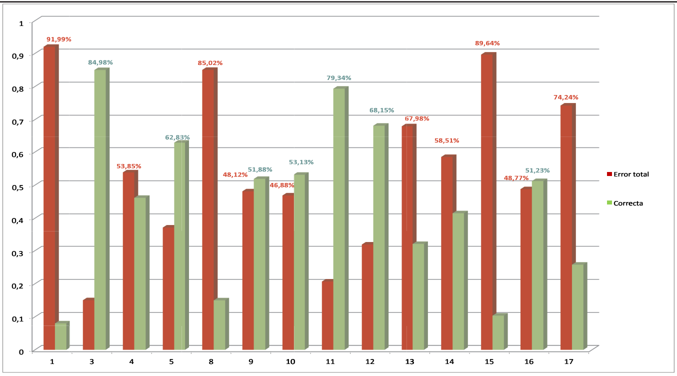
Results and conclusions

Graph I shows the percentage of correct answers as against incorrect answers for each of the questions in the questionnaire.

Questions 1 and 13 (the meaning and representation of fractions, improper fractions), 8 and 14 (percentages as an application and operator), 15 (meanings of the DNS) and 17 (procedural aspects of fractions) returned the lowest percentage of correct answers; in question 4 (application of percentages) the percentage of wrong answers is also greater than the correct answers. By contrast, in questions 3 (the properties and meanings of negative decimals), 5 (combined operations), 11 (the meaning of distance as subtraction in the DNS) and 12 (the representation of, and operations with, fractions) the percentage of correct answers is significantly high, while in questions 9 and 10 (finding a rational number between two given numbers in decimal and fractional expressions) and 16 (the representations of decimals) the figures are much closer, although the correct answers outnumber the incorrect.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

GRAPH I. Distribution by percentage of correct answers against total number of errors



During the obligatory period of schooling, improper fractions are far less frequently taught than proper fractions, and hence the low number of correct answers in questions 1 and 13 was to be expected. Further, given that the interpretation of fraction as parts of whole is most easily understood (Castro and Torralbo, 2001), there is a tendency to present it this way at school; unless the concept of unit is dealt with adequately, a false construction of the concept of fraction can result when the parts are greater than the unit.

Dickson et al. (1991) refer to other studies tackling this question, which highlight the failure to understand improper fractions due to their representation as sub-areas of an area unit. The authors give the example of the addition of two proper fractions which results in an improper fraction, noting the confusion created by a poor acquisition of the concept of unit, which is reinterpreted when they see the improper result.

The meaning of fraction, which can be associated with parts of a whole (continuous or discrete), operators, ratios, and quotient (of two integers), is often approached at primary level from the first of these perspectives, using examples based on parts of a single unit. The fourth approach –quotients– naturally leads to the idea of improper fractions, and is associated with a meaning of fraction which the primary pupils will have seen previously (partitive division), and is not usually associated with parts of a whole. What is more, it is this approach which comes closest to the formal definition of fraction. Being unaware of this definition typically leads some PPTs to identify 3.5/7 as the answer to question 10.

In the same way, using percentages for more than the mere application to a specific number tends to challenge the PPTs, as in the case of questions 8 and 14. The result in the former came as no surprise, as this tends to feature prominently amongst the errors we usually find on the teacher training courses. The consecutive nature of the discounts leads trainees to identify addition as the appropriate operation, in the same way that in order to calculate the original price from the discounted price, they tend to apply the percentage discount to this latter and then add to it the resultant amount (option *c* in question 4). In both questions 4 and 8, the key issue (in different ways) is which figure the percentage should be applied to. This is a more cognitively demanding operation than that of simply applying a percentage to a particular figure (which could be identified with the fraction as operator). In question 14, it is precisely the absence of the number on which to operate which usually leads to error (Contreras et al., 2012). If the question had been couched as "What percentage of A (given) corresponds to 2/10 of this number?" the results would have been the same as those for question 5.

Indeed, naming or recognising decimal expressions in non-conventional expressions is a difficulty highlighted in other studies (Ball, 1990 a). There tends to be little importance given to the Decimal Number System, familiarity with which has significant implications at all levels of primary education, such that it is considered of cross-curricular significance. Furthermore, Kamii (1994) notes that learning arithmetic algorithms without a sound understanding of number generates a vicious circle, as it "'misteaches' positional value and prevents the correct development of the concept of number" (p. 49), as the positional value is fundamental for an in-depth understanding of the number system which will enable pupils to manipulate it correctly further down the line. Understanding the underlying structure means more than identifying the role of the units in each order. Question 15 focuses on a particular aspect of this understanding, that relating to the reading and writing of numbers, emphasising the order of any unit. Here, the difficulty does not lie in recognising that the number is made up of one unit, two tenths, three hundredths and seven thousandths, but rather reading the amount in different ways, mixing tenths and hundredths, understanding the definition of a decimal number and the sense of units. Another aspect which includes

Revista de Educación, 367. January-March 2015, pp. 36-62
Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

this sense of understanding of the DNS is tackled in question 11 (the meaning of distance between two rational numbers). However, in this instance the solution involves adding or subtracting 3 thousandths from the given figure, which accounts for the difference in results for both.

It is also interesting to note the closeness in frequencies of the correct and incorrect answers to questions 9 and 10, both designed to study the understanding of the property of density in rational numbers. This finding, irrespective of whether the rational numbers are expressed as decimals or fractions, runs counter to reports of a predominance of incorrect conceptual constructs on the part of the PPTs (Ruiz and Castro, 2011).

Question 17, as mentioned above, requires the responders not only to operate with fractions, but also to recognise hierarchy, to be able to use equivalent fractions and to know how to apply the calculations involved in the lowest common denominator. The confluence of these various aspects determines the difficulty facing the PPTs and reflected in the outcome.

If we now turn to the elements of KOT mentioned in section 4, it seems to us that both the definition and meaning which the PPTs attach to improper and proper fractions (questions 1 and 13), in addition to their understanding of the representations and procedures that can be carried out using fractions, decimals and percentages, in all the aspects dealt with (questions 14, 15 , 4 and 8), constitute part of the weaknesses of the PPTs participating in the study. Likewise, both the formation of equivalent fractions, and the hierarchy of operations (question 17) represent significant weaknesses. Knowledge of the Decimal Number System (DNS) would also seem to belong to this group, as, despite the relatively high percentage of correct answers to question 11 about the meaning of the distance between two decimal numbers, questions 14 and 15 –dealing with the structure of the DNS in more depth– returned a significant number of incorrect answers.

With respect to the density of rational numbers and their order, although the number of correct answers to the corresponding questions (9, 10 and 16) exceeds the number of incorrect answers in each case, the difference is so slight that we are inclined to think that they, too, show weaknesses, specifically in regard to knowledge of the properties and foundations of the density of rational numbers, which are perhaps compensated in this instance by the associated procedural knowledge.

On the positive side, in terms of strengths, it is only fair to acknowledge the capacity to place a decimal number on the number line (question 3), even when this is a negative number and as such increases the degree of difficulty and makes the achievement more noteworthy. Also included is the use of the algorithms for adding and multiplying fractions (in the full sense), including the interpretation of distance between to decimal expressions as a subtraction, and the processes of estimation and operation using two fractional and/or decimal expressions (questions 11 and 12), this being an area which is amply covered throughout the primary years as well as over the course of the first cycle of secondary.

A final reflection

To finish, we would be gratified if this study was to contribute to the reflection of those with decision-making powers in theeducational system. First, the work should help improve the understanding of which aspects relating to fractions, decimals and percentages require attention in Primary Education, and what form that attention should take. Secondly, the educational authorities should define more precisely the mathematical knowledge required of trainee Primary Teachers, as the university is hardly the most appropriate place to go back over knowledge which should have already been assimilated. It is also apposite here to return our attention to the theoretical framework underpinning this study. Although our focus has KOT), knowledge involving the Structure of Mathematics (KSM) and the Practice of Mathematics (KPM) can also be detected. Together, these three components make up the teacher's Mathematical Knowledge (MK), and are closely related to the four properties proposed by Ma (1999) as the defining features of what she terms as the teacher's *profound understanding of fundamental mathematics*: basic ideas (simple but powerful), related to KOT and KSM, which will enable them to guide their future pupils towards "doing true mathematical activity" (Ma, *1999* p. 148); connectivity, regarding the connections between concepts and procedures (KOT and KSM); multiple perspectives of the same situation or approach to solving a problem (KOT); and longitudinal coherence, which concerns knowledge of the curriculum. The sub-domains comprising our theoretical

Revista de Educación, 367. January-March 2015, pp. 36-62
Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

framework, and in particular the categories of KOT analysed in this study, together represent a grounded structure of what initial teacher training should concern itself with. For this to happen, it is essential to start with well-founded mathematical knowledge which offers certain guarantees when it comes to tackling the components of Pedagogical Content Knowledge, and developing the specialised mathematical knowledge required by primary teachers if they are to do a good job. One possibility for achieving a better level of mathematical knowledge at the start of initial training, which is being debated at the moment (Castro, Mengual, Prat, Albarracín, Gorogorió, 2014), is the use of specific entry tests for the training courses.

Bibliography

Ariza, A. Sánchez, A. & Trigueros, R. (2011). *Matemáticas Específicas para Maestros*. Sevilla: Ediciones Copiarte.

Ball, D. L. (1990a). I haven't done these since high school: prospective teachers' understanding of mathematics. In M. Behr, C. Lacampagne y M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th PME-NA*, (pp. 268-274). DeKalb, Il.: PME-NA.

Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *ed 21*(2), 132-144.

Ball, D. L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M.T. González, M. Codés, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Castro, E. (2001). Números decimales. In E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, (315-345). Madrid: Síntesis.

Castro, E. & Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. In E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. *Actas del 8º CERME*. Febrero 2013. Antalya, Turquía.

Colás, M. P. & Buendía, L. (1998). *Investigación Educativa*. Sevilla: Ediciones Alfar.

Contreras, L. C., Carrillo, J. Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M. C. & Climent, N. (2012). Un Estudio Exploratorio sobre las competencias numéricas de los Estudiantes para Maestro. *Bolema*, 26 (42b), 433-458.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.

De Castro, C., Castro, E. & Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación. In E. Castro & E. De La Torre (Eds.), *Actas del VIII simposio de la SEIEM*. La Coruña: SEIEM.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC & Labor.

Fennema, E. & Franke, M.L. (1992). Teachers' knowledge and Its Impact. En Grouws, D. A. (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (147-164). Reston, Virginia: NCTM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

González Marí, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. In E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, (pp. 257-284). Madrid: Síntesis.

Hernández, J., Noda, M. A., Palarea, M. M. & Socas, M. M. (2003). *Habilidades básicas en matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio* (Preprint). Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Hill, H.C., Schilling, S. G. & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal,* 105, 11-30.

Jakobsen, A., Thames, M. H. & Ribeiro, C. M. (2012). Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematic teaching. *Actas del 8º congreso del CERME,* Febrero 2013. Antalya, Turkey.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Konic, P.M., Godino, J. D. & Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*, 74, 57-74.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas,* (187-220). Madrid: Pearson Educación.

Llinares, S. & Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawence Erlbaum.

Muñoz-Catalán, M.C. & Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación Matemática,* 19(1), 5-26.

Pehkonen, E., Hannula, M., Maijala, H. & Soro, R. (2006). Infinity of Numbers: How students understand it. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME Conference,* vol. 4, (345-352). Praga: PME.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. In E. Fennema, T. P. Carpenter, y S. J. Lamon (Eds.), *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics* (177-198). New York: SUNY Press.

Putt, I.J. (1995). Preservice teachers ordering of decimal numbers: when more is smaller and less is larger! *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(3), 1-15.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE.

Ruiz, J. F. & Castro, E. (2011). Decimales. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (219-244). Madrid: Ediciones Pirámide.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *ed 15(2)*, 4-14.

Silverman, J. & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511.

Tirosh, D. & Graeber, A (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 98-108.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1994). Divisibility and division: Procedural attachments and conceptual understanding. En J.P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of 18th PME*, (423-430). Lisboa: PME.

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014

Contact Address: Miguel Ángel Montes. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Universidad de Huelva. Campus El Carmen. Avda. del 3 de marzo, s/n; Huelva (21071). E-mail: miguel.montes@ddcc.uhu.es

Received: 30-10-2013 Accepted: 24-10-2014