Materiales Didácticos

Matemáticas de la Forma

BACHILLERATO

Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos

Optativas

Matemáticas de la Forma

Autor:
Claudi Alsina Catalá

Coordinación:
Eugenio Bargueño Gómez
del Servicio de Innovación

Ministerio de Educación y Ciencia

DEPARTAMENTO DE INFORMACIÓN, DOCUMENTACIÓN, EDICIÓN Y DIFUSIÓN
C. N. R. E. E. / SERVICIO DE INNOVACIÓN:

- *Coordinación de la edición:* Ana Francisca Aguilar Sánchez
- *Maquetación y supervisión de pruebas:* Salvador Peña Neva

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación

N. I. P. O.: 176-93-115-9
I. S. B. N.: 84-369-2420-7
Depósito legal: Z-2215-93
Realización: EDELVIVES

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para el Bachillerato es orientar a los profesores que, a partir de octubre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas de Bachillerato en los centros que han anticipado su implantación. Pretenden facilitarles el desarrollo de las materias de segundo curso, algunas de las cuales continúan las de primer curso. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone el haber anticipado desde el curso 1992/93 la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente asignatura, y que su utilización por profesores, en la medida en que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionar estos materiales y para elaborar otros.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental: destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

La Resolución de 29 de diciembre de 1992 de la Dirección General de Renovación Pedagógica, por la que se regula el currículo de las materias optativas de Bachillerato, contiene en su anexo la información referida a esta asignatura que aparece reproducida al término del presente volumen.

Índice

Introducción

Las «Matemáticas de la forma» constituyen un reto profesional atractivo para cualquier profesora o profesor de Matemáticas. Tratándose de una asignatura optativa, durante el segundo curso de Bachillerato y dentro de la Modalidad de Artes, exige de entrada una actitud muy diferente a la que puede tenerse frente a las tradicionales asignaturas obligatorias.

Es razonable suponer de entrada que los posibles seguidores de esta asignatura son alumnas y alumnos con especial predilección por la creatividad artística, no exentos de razonamientos rigurosos, pero con un enorme potencial artístico y emotivo. Seguramente tampoco recuerdan demasiado bien todas aquellas matemáticas comunes de su Enseñanza Secundaria Obligatoria y, para terror de su enseñante, es posible que tampoco tengan nunca más clase de Matemáticas. Todo esto no debe constituir una visión pesimista, sino al contrario: es un reto optimista que debe forzar a planteamientos novedosos, ritmos nuevos de concebir la enseñanza y una oportunidad única de propagar nuestras queridas matemáticas a las mujeres y hombres que en un futuro pueden diseñar nuestros objetos, llenar de arte las salas de nuestros museos, calles o casas, hacer escenografías emocionantes,... o ser unos buenos ciudadanos con un buen bagaje cultural.

Primera reflexión: el Bachillerato debe ser una fase educativa interesante en sí misma, al margen de su posible continuidad universitaria o profesional, y la elección de una Modalidad no implica necesariamente un futuro concreto. Así pues, debemos tener presente edad, formación previa, modalidad, y posibles desarrollos ulteriores, pero relativizando la importancia del «pasado» y del «futuro» y centrando la atención en el presente: hacer lo máximo que se pueda hacer realizándolo lo mejor posible.

Así pues, el «retrato robot» técnico de este posible asistente en la asignatura podría ser: alumna o alumno que se interesa por las aportaciones que las Matemáticas puedan hacer a su conocimiento del plano, del espacio, de las formas con las que articular creaciones plásticas, de los tamaños y las proporciones... una persona que puede convertirse en un usuario o no de estos recursos, pero que debería encontrar en nuestra oferta un abanico de horizontes dignos de ser explorados.

Segunda reflexión: ante este tipo de alumnas y alumnos nuestra enseñanza debe alejarse de sus planteamientos tradicionales axiomático-deductivos y centrar las actividades en unos temas que, resultando formativos e interesantes, faciliten la adquisición de destrezas específicas. No importan tanto los hechos matemáticos tradicionales (fórmulas, teoremas, listados de figuras,...) como el ayudar a descubrir un mundo geométrico en la Naturaleza y en las Artes, diseñar, dibujar, combinar, construir, resolver... Asumir este principio presupone planificar los contenidos, el desarrollo del curso y la evaluación del mismo en coherencia con este objetivo general de hacer posible conjugar rigor con belleza, resolución con intuición.

Tercera reflexión: nuestra labor enlaza con una añeja tradición de Geometría en el Arte, susceptible de empaparse de referencias culturales e históricas pero también capaz de conectar con las tendencias artísticas o de diseño más actuales. He aquí como la asignatura admite trabajar ejes transversales de conocimiento de sumo interés (historia, dibujo técnico, diseño, consumo,...).

Ante las anteriores reflexiones son diversos los modelos de enseñanza y aprendizaje que podrían concebirse. Mucho nos complacería que el modelo de propuesta por el cual aquí se ha optado, pueda servir para experimentar esta nueva asignatura con el espíritu de que nuestra labor sea esencialmente abrir ojos para que sea posible mirar y ver, y conseguir que el viejo proverbio que decía «lleva los números en la inteligencia de tu corazón» sea también una realidad.

Propuesta general

Asumida como referente la filosofía que acabamos de exponer y en correspondencia con el currículo oficial, nos planteamos llegar a un máximo grado de concreción de una propuesta didáctica atractiva para el posible desarrollo de la asignatura.

Para llevar adelante una docencia ágil y flexible de la asignatura «Matemáticas de la forma» caben planteamientos alternativos, itinerarios diversos y metodologías complementarias que cada profesora o profesor deberá elegir según su propia forma de entender la enseñanza, los recursos disponibles y teniendo en cuenta las alumnas y los alumnos que deben realizar su aprendizaje.

Los posibles modelos o enfoques que puede tener la materia a nivel de dinámica incluirían desde una posible secuenciación de lecciones magistrales y clases de problemas de carácter cerrado hasta la posible celebración de un sugerente taller integral de carácter abierto. Las últimas tendencias en educación matemática que caben observar en este momento en todo el mundo, apuntan a una necesaria evolución de la actividad docente del profesorado hacia una labor de guía, donde se posibilite el protagonismo del alumnado para que éste pueda ir «construyendo» su propia formación. Esta tendencia es la que ha llevado a acuñar la ahora ya popular definición de que «el profesor es un guía, y no un guarda, y debe hacer posible que el aprendizaje sea un viaje interesante y no un destino».

Pero además de la dinámica hay otra forma de abordar enfoques alternativos desde la propia concepción sobre la deducción, el estructuralismo, la vía experimental, la modelización, etc. No creemos que para el caso de esta asignatura proceda ni un enfoque axiomático-deductivo que pocas motivaciones daría al alumnado, ni un enfoque estructuralista-abstracto que poco podría aportar al espíritu creativo que se pretende desarrollar. Seguramente la modelización-resolución de problemas-realismo serían tres palabras clave que creemos más acordes con el espíritu que debería regir el desarrollo de la enseñanza en este caso concreto (¡como en otros muchos!).

Al analizar posibles enfoques y asumiendo las limitaciones del presente documento, también hemos renunciado en aras a la eficacia de estas modestas páginas a sugerir modelos de actuación que por su coste, su dificultad técnica o su carácter local, también podrían ser interesantes. Imaginemos un enfoque basado en trabajar todas las representaciones con técnicas de dibujo asistido por ordenador o usando los más recientes programas informáticos interactivos, u otro enfoque ligado a una serie de vídeos o películas o una propuesta basada en visitas a museos de arte y edificios singulares... es evidente que en aquellos centros donde un tal planteamiento fuera posible, la riqueza de los medios podría aportar un valor añadido a las propuestas didácticas. Si bien sugeriremos usar medios extraordinarios cuando ello sea factible, no hemos querido que una ambición en los medios de presentación pudiera frenar el implementar esta asignatura.

Los criterios que han guiado la elección realizada son pues, por una parte, el realismo de proponer actividades interesantes y posibles sin medios sofisticados y, por otra parte, sintonizar con las últimas tendencias, antes aludidas, de combinar medios comunicativos diversos, abrir el paso a nuevas dinámicas de clase, hacer posible una evaluación plural y global, e incitar a la curiosidad que, en definitiva, es el gran motor para conseguir una participación activa y fructífera.

El enfoque elegido se ha concretado en plantear el desarrollo de la asignatura como un viaje donde progresivamente se van descubriendo las formas y las transformaciones, el plano y el espacio, las relaciones entre Matemáticas, Arte y Creatividad, integrando explicaciones, actividades de representación, dibujo o diseño, resolución de problemas, etc. Para clarificar este enfoque se propone una secuenciación de la asignatura en ocho grandes unidades que a su vez se desglosan en un total de cuarenta y ocho actividades básicas. La profesora o el profesor hallará en el apartado siguiente las completas orientaciones didácticas para impartir y evaluar todas las unidades y actividades y en el material de la alumna o el alumno las cuarenta y ocho fichas de trabajo que podrían usarse.

El desglose del programa en unidades y actividades se da a continuación en forma de tabla y a él se harán continuas referencias en lo que sigue.

	UNIDADES DIDÁCTICAS	**ACTIVIDADES**
1.	EL MUNDO DE LOS POLÍGONOS	*1.* Explorando el plano *2.* Poligolandia *3.* Geoplano *4.* Formas con tangrams *5.* Poliminos
2.	DINÁMICA PLANA	*6.* Trasladar *7.* Girar *8.* Simetrizar *9.* Movimientos en 2D *10.* Mallas creativas
3.	DECORACIÓN PLANA	*11.* Frisos *12.* Mosaicos *13.* Decorando el plano
4.	EL MUNDO DE LOS POLIEDROS	*14.* Explorando el espacio *15.* Poliedrolandia *16.* Poliedros regulares *17.* Poliedros de Arquímedes *18.* Deltaedros *19.* Policubos *20.* Caleidociclos
5.	DINÁMICA ESPACIAL	*21.* Movimientos en 3D *22.* Medidas espaciales *23.* Teselar el espacio *24.* Empaquetar en 3D
6.	GENERACIÓN DE CURVAS Y SUPERFICIES	*25.* Lugares geométricos *26.* Circunferencia y perfección *27.* Visita a la elipse *28.* Visita a la parábola *29.* Visita a la hipérbola *30.* Curvas y círculos rodantes *31.* Los secretos de la cicloide *32.* El encanto espiral *33.* Un mundo fractal *34.* Esfera *35.* Superficies con rectas *36.* Superficies creativas

UNIDADES DIDÁCTICAS		ACTIVIDADES
7.	RAZÓN Y SEMEJANZA	*37*. Tamaños y formas *38*. Escalas convenientes *39*. Razón y proporción *40*. Homotecia y semejanza *41*. Razones trigonométricas
8.	TEORÍA DE LA PROPORCIÓN	*42*. Medidas y proporciones humanas *43*. Proporciones clásicas *44*. Proporciones dinámicas *45*. La divina proporción *46*. Números de Fibonacci *47*. El Ken japonés *48*. El modulor de Le Corbusier

Orientaciones didácticas y para la evaluación

Orientaciones generales

En este apartado vamos a concretar las orientaciones didácticas básicas que puedan ayudar al desarrollo lectivo del enfoque propuesto para la asignatura en esta publicación.

Las introducciones a las unidades

El inicio de cada una de las ocho unidades propuestas puede ser un momento ideal para que la profesora o el profesor pueda explicar un tema que por su interés histórico-matemático, su carácter ejemplificador o su vertiente interdisciplinaria contribuya a hacer atractiva la Unidad que se propone. Esta explicación inicial también ayudará a aclarar y delimitar el mundo de las formas o transformaciones al cual se dedicará la Unidad. En este sentido nos permitimos apuntar algunas sugerencias alternativas indicando recursos audiovisuales o bibliográficos donde pueden encontrarse desarrollos a partir de los cuales estructurar la explicación.

Unidad 1.

- Planilandia. Un cuento de muchas dimensiones (E. Abbot: «Planilandia»).
- Vídeo de M. Emmer sobre «Planilandia» (en inglés/italiano).

Unidad 2.

- Historia de los calidoscopios (véase bibliografía en la enciclopedia de Sir David Brewster).

Unidad 3.

- *La Alhambra de Granada* (Colección «Vivir La Alhambra» de Proyecto Sur, Granada).
- Vídeo de S. Garfunkel producido por COMAP (serie «For all practical purposes» nº 16) (en inglés).
- Vídeo de R. Pérez Gómez sobre «La Alhambra» (en español).
- Vídeo de M. Emmer sobre «Escher» (en inglés/italiano).

Unidad 4.

- Historia de los poliedros (véase: C. Guillén, 1990 y Senechal, 1988).
- Objetos posibles e imposibles (véase: Carlman, 1990).

Unidad 5.

- Robótica en 3D (véase: Bolt, 1991).
- Vídeo de J. M. Kantor sobre empaquetamientos de esferas (en francés).

Unidad 6.

- Curvas clásicas y modernas (véase: Pedoe, 1982), (Boles-Newman, 1990).
- Vídeo de S. Garfunkel producido por COMAP (serie For all practical purposes nº 19) (en inglés).

Unidad 7.

- Mapas, planos y escalas (véase: Kline, 1975).
- Vídeos de S. Garfunkel producido por COMAP (serie For all practical purposes nº 17 y 20) (en inglés).

Unidad 8.

- Proporciones en el Arte (véase: Pedoe, 1982; Holt, 1971; Ghyka, 1977,...).
- Diapositivas sobre obras de Leonardo da Vinci y Le Corbusier.

Por supuesto en las introducciones es un buen momento para organizar alguna conferencia interdisciplinaria que podría enriquecer el curso en sí.

Recursos materiales

Para el desarrollo de las actividades se sugiere que cada alumno o alumna trabaje con cierto material mínimo que sería el siguiente:

a) *Material personal*: calculadora, lápiz, rotulador, regla, compás, transportador, escuadra, cartabón, tijeras, aguja de coser.

b) *Material fungible*: papel, cartulina blanca, cinta adhesiva, pegamento, hilo grueso rojo de coser, cañas de bar, acetatos, palillos, papel milimetrado, agua, jabón, glicerina.

c) *Material de clase*: retroproyector, espejos rectangulares pequeños, espejos de plástico flexible, geoplanos 5x5 y sus gomas elásticas, tangrams chinos, centicubos, cajas, esferas de porexpan, papel polar, estructura metálica de cubo, modelos de poliedros. En su caso proyector de diapositivas y vídeo.

A nivel físico sería óptimo operar en un aula con mesas y sillas que permitan la labor de equipos simultáneos.

Las actividades

Cada actividad debe ir precedida de una breve introducción (una definición básica, un apunte histórico, un uso interesante del concepto,...) e inmediatamente proponer el desarrollo de la actividad el cual se ha estructurado en la siguiente tipología de acciones:

a) *Descubre*: se da una información visual y el análisis de la cual lleva al «descubrimiento» de las figuras, transformaciones o propiedades motivo de estudio en la actividad. Es un apartado simple, presumiblemente motivador, que debe permitir acotar el campo a tratar introduciendo matices a la introducción del principio.

b) *Dibuja*: se propone la realización de un dibujo o esquema que es relevante para el tema y que obliga a una reflexión sobre la representación gráfica en sí misma.

c) *Diseña*: puede tratarse de un dibujo como en **b)** o de un pequeño modelo pero que tiene un carácter abierto y creativo: generar algo nuevo en referencia, o con el trasfondo, del tema en cuestión.

d) *Experimenta*: se trata de una experiencia de taller, usando material en base al cual se llega, empíricamente, a una visión o análisis del tema tratado.

e) *Calcula*: resolución de una situación problemática (que de paso a ejemplificar una tipología de problemas ligados al tema motivo de estudio).

f) *Practica*: listado de enunciados de problemas a resolver, en su caso, como ampliación de lo trabajado anteriormente.

Dinámica de clase

La estructura de cada actividad hace aconsejable que sea preferible un horario que otorgue a la asignatura bloques seguidos de dos horas (aunque ello no sea un requerimiento esencial). Pero a nivel de dinámica y sin presuponer que ésta deba ser idéntica en todas las actividades, la profesora o el profesor puede adoptar estrategias diversas que esquematizaremos a continuación:

PARTE DE LA ACTIVIDAD	*(1)* TRABAJO	*(2)* TRABAJO	*(3)* TRABAJO
Descubre	individual	equipo	individual
Diseña o dibuja	individual	equipo	equipo
Experimenta	individual	equipo	equipo
Calcula	individual	equipo	equipo
Practica	individual	equipo	individual

En la opción ***(1)*** la actividad se plantea como una labor personal, en la ***(2)*** el trabajo se supone desarrollado por equipos (estando cada equipo compuesto por 4 estudiantes) y en la ***(3)*** se considera que debe darse una reflexión individual en la fase inicial de descubrimiento y en la fase final de practicar, pero que hay posibilidad de trabajar en equipo en los apartados de tipo diseño, dibujo, experimentación, cálculo sobre modelos, etc.

Por otra parte, no necesariamente todo el mundo debe hacerlo todo ni todo debe ser hecho, es decir, puede ser oportuno dividir la actividad en acciones que el grupo de clase realiza en paralelo (unos dibujan y los otros experimentan) y al final los portavoces de los equipos explican a los demás sus resultados. También son posibles actividades completas en paralelo para ir más a fondo en ciertos aspectos (por ejemplo, la mitad de los grupos trabajan el tangram y la otra mitad el geoplano).

Realizadas todas las actividades de una Unidad deberá dedicarse un tiempo mínimo a una puesta en común de conclusiones, cosas a recordar, etc. Un diálogo general participativo puede ser un buen medio, siempre y cuando la profesora o el profesor lleven la discusión a las esencias que pretenden remarcarse. Este será el momento de plantear cuestiones de evaluación de seguimiento como las descritas más adelante.

En el listado de unidades y actividades hemos optado por una secuenciación determinada indicada a través del número de Unidad y de la numeración de actividades. Pero existen otras versiones posibles, por ejemplo, agrupar primero todo lo plano (Unidades 1, 2, 3, 4 (Actividades 25-33), 7 y 8) y luego lo espacial (Unidades 2, 5, 6 (Actividades 34-36)).

Atención a la diversidad

Aunque el tema de la diversidad de niveles en alumnas y alumnos en una optativa de una modalidad y en un segundo curso de Bachillerato no tendrá las características importantes que se dan en la secundaria obligatoria, parece interesante remarcar que a nivel de actividades **merecen ser resaltadas al máximo las habilidades** que cada alumna o alumno presente. Así no sería descabellado que aquellas o aquellos más dotados para el dibujo, la elaboración de modelos o los experimentos de taller volcarán sus actuaciones en los apartados de Diseña-Dibuja-Experimenta, con menos énfasis en el Calcula-Practica y viceversa, aquellas o aquellos más inclinados a una actividad analítica enfatizasen estos aspectos de resolución de problemas. A nivel de evaluación esto será importante y la asignación de los Proyectos y Talleres deberá tener en cuenta esta diversidad de tendencias (véanse las orientaciones para la evaluación).

Orientaciones para la evaluación

En este apartado es interesante abordar el tema de la evaluación posible de las alumnas y los alumnos que participen en la asignatura de «Matemáticas de la forma». No se trata de hacer una declaración genérica de principios alegando la necesidad de que la evaluación debe «medir el grado de consecución de los objetivos propuestos» y remitir al evaluador a los listados que sobre objetivos generales y criterios de evaluación se han incluido en la primera parte del documento. Intentaremos dar una visión concreta de las posibilidades evaluativas que la profesora o el profesor pueden tener en cuenta en el momento de elegir *su* forma de evaluar a *su* curso.

En *primer lugar*, reivindicaremos **la necesidad de coherencia entre la metodología docente utilizada y la tipología de evaluación**: si la clase ha hecho especial atención a resoluciones gráficas, úsese este recurso; si la resolución de problemas ha sido protagonista, propónganse problemas a resolver; si se ha trabajado en equipos, déjense a estos resolver parte de la evaluación... En otros términos, la evaluación debe llevarse a cabo haciendo uso de los recursos, expresividades o dinámicas que hayan marcado las labores de aprendizaje.

En *segundo lugar*, también reivindicaremos **la necesidad de integrar en la evaluación informaciones muy diversas**, que van desde la actitud frente al trabajo realizado hasta el espíritu creativo y los conceptos adquiridos, desde la labor bien acabada a los procedimientos usados. Los tiempos de una sola evaluación final tradicional de carácter mecánico y escrito deben dar paso a una evaluación vectorial, donde el profesor integre una diversidad de observaciones.

En *tercer lugar*, y en atención al hecho de tratarse de una asignatura optativa en la modalidad de Artes, reivindicaremos la idea de que será mucho más importante haber abierto con el curso nuevos horizontes a las alumnas y los alumnos, que no haber creado una barrera más al salto de vallas sucesivas en que, a menudo, se convierten las evaluaciones de las asignaturas obligatorias. En otras palabras, ni se trata de una asignatura imprescindible en la modalidad, ni se trata de un eslabón ineludible para futuros aprendizajes. Así pues, será muy importante haber transmitido un **interés por los recursos matemáticos en la creación artística**, un sentido estético de la belleza derivada de la geometría y un entusiasmo por hacer compatible Arte y Matemática, y la evaluación debe ponderar estos aspectos más allá que el estricto dominio técnico de determinados contenidos.

Qué evaluar

Los siete criterios de evaluación dados anteriormente podrían resumirse en estos ejes generales:

1. Conocer las figuras planas y espaciales (polígonos y curvas, poliedros y superficies) desde el punto de vista de generación, relaciones, definiciones y propiedades características sabiendo clasificarlas y combinarlas, apreciando sus presencias naturales y sus usos creativos.
2. Conocer las transformaciones planas y espaciales (rígidas o de semejanza) apreciando sus invariantes y acciones características.
3. Saber apreciar el interés de los contenidos matemáticos (forma, tamaño, proporción, repetición, composición, representación,...) para los procesos de creatividad artística.

En torno a estos tres ejes generales deberá plantearse la evaluación, pero atendiendo a que las alumnas y los alumnos puedan manifestar su suficiencia en la asignatura y demostrando su dominio en:

a) Razonar sobre conceptos y procedimientos trabajados en clase;

b) Resolver problemas gráficos, constructivos o de cálculo;

c) Desarrollar creaciones en base a los contenidos visitados.

Cómo evaluar

En este nivel cabe comentar propuestas concretas de evaluación en relación a la programación propuesta. Así pues distinguiremos varias posibilidades todas ellas complementarias:

Evaluación continuada

Para facilitar la observación de cómo la alumna o el alumno trabaja la asignatura tanto a nivel individual como en equipo o en sus intervenciones en las discusiones del grupo de clase, proponemos que sea importante que cada alumno y alumna tenga una carpeta de trabajo. En dicha carpeta deberá ir incluyendo todos los dibujos, fichas, problemas resueltos, bordados, etc., sabiendo que dicho material podrá ser revisado por el profesor o la profesora. Los materiales tridimensionales (maquetas, modelos,...) producidos también se podrán adjuntar a dicha carpeta.

Evaluación de seguimiento

De forma esporádica, coincidiendo con la finalización de las unidades, ya sea de forma escrita, dibujada u oral, cabe plantear cuestiones de razonar-resolver-desarrollar, en base a los contenidos tratados. Ejemplos de tales cuestiones son las baterías de cuestiones E.n.m. (E.n.m. indica E-evaluación, n-número de Unidad, m-número de la cuestión), como se podrá ver más adelante en Contenidos de las unidades (pág. 22).

Evaluación de proyectos

Toda alumna o alumno debería desarrollar de forma individual a lo largo del curso al menos un proyecto. El proyecto es un trabajo extraescolar, a desarrollar durante una o dos semanas (según complejidad), y que constituye una labor de investigación-creación sobre un tema que a menudo puede tener carácter globalizador, o incluir tanto desarrollos de temas apuntados en clase como datos históricos, material estadístico, realización de reportajes, etc. Para ello se facilitará un guión general de normas y pautas de evaluación. Incluimos en las dos páginas siguientes un modelo de dichas hojas.

MODELO DE NORMAS PARA ELABORAR UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

1. PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

La presente normativa ha de guiar la elaboración del proyecto cuyo tema y fecha de entrega se te ha facilitado. Hacer un proyecto quiere decir que debes informarte, buscar fuentes interesantes, trabajar sobre los problemas asociados al tema, comprobar y sacar conclusiones, para realizar al final la memoria que entregarás al profesor o profesora para su evaluación.

2. INICIO DEL PROYECTO

En una primera fase debes familiarizarte con el tema propuesto consultando, preguntando, etc. Un primer guión del trabajo que te propones hacer puedes presentarlo al profesor o a la profesora para que te oriente sobre la oportunidad del enfoque.

3. FORMATO DE PRESENTACIÓN

La memoria consistirá en:

- Portada con título del proyecto y nombre del alumno o alumna.
- Texto explicativo del desarrollo del proyecto: pasos iniciales, consultas, trabajos realizados, desarrollo de lo conseguido.
- Elementos complementarios de nivel gráfico que se hayan realizado expresamente para el proyecto.
- Conclusiones principales
- Recursos consultados de bibliografía, informaciones, archivos.
- Agradecimientos a personas o instituciones colaboradoras.
- Contraportada para la evaluación del proyecto.

EVALUACIÓN

	Muy bajo	*Bajo*	*Medio*	*Alto*
A. Trabajo				
Información recogida	☐	☐	☐	☐
Enfoque del proyecto	☐	☐	☐	☐
Extensión y profundidad	☐	☐	☐	☐
B. Contenido matemático				
Formulación matemática	☐	☐	☐	☐
Uso del lenguaje	☐	☐	☐	☐
Aplicación de estrategias	☐	☐	☐	☐
Corrección de resultados	☐	☐	☐	☐

C. Presentación

Explicaciones	☐	☐	☐	☐
Estructuración	☐	☐	☐	☐
Calidad de materiales adjuntos	☐	☐	☐	☐

D. Conclusiones

Valoración conclusiones	☐	☐	☐	☐

Puntuación final

Comentarios

TEMAS CONCRETOS QUE PUEDEN SER PROPUESTOS PARA ELABORAR PROYECTOS

PROYECTO 1: *Geometría e imprenta.*

Estudio de los tamaños de las letras, proporciones de cajas, columnas, etc. y proporciones en márgenes; comprensión de tipologías de letras; estudio de los frisos impresos. Pueden analizarse textos de épocas diversas.

PROYECTO 2: *Geometría y cerámica.*

Estudio de frisos, mosaicos y decoración presentes en la cerámica tradicional del lugar.

PROYECTO 3: *Decoración en papel, en tejidos, en yeso o en madera.*

Estudio de frisos, mosaicos y decoración presentes en papel pintado, en tejidos, trazados en yeso o trazados en madera.

PROYECTO 4: *Geometría en la obra de...*

Estudio de las formas, tamaños, proporciones y simetrías en las obras de un arquitecto o artista. Se sugieren los nombres de: Gaudí, Cerdà, Sert, Coderch, Leoz, Calatrava, Bofill, Correa, Bohigas, Fernández Alba, Moneo, Piñón, Viaplana,... como nombres de la arquitectura española de este siglo. Le Corbusier, Aalto, Eiffel, Rossi, Foster, Steegman, Isosaki, etc. como nombres internacionales. Leonardo da Vinci, Alberti, Rafael, Albert, Vassareli, Picasso, Dalí, Antonio López, Chillida, Alfaro, Carleman, etc., como ejemplos de productividad artística con cierto contenido formal susceptible de análisis matemático.

PROYECTO 5: *Geometría en...*

Estudio de la forma, tamaño, proporciones, decoraciones y simetrías en un edificio, cuadro o escultura concreto que posea riqueza matemática y que por su proximidad sea visitable a parte de buscar información escrita (Alhambra de Granada, las grandes catedrales, Escorial, Teatro de Mérida, Faro de Finisterre, Reales Alcázares, Parque Güell, Mezquita de Córdoba,... y todos los contenidos de los museos de arte). ¡Tenemos un patrimonio que hay que aprovechar! Y no necesariamente histórico: hay magníficas obras actuales de interés.

PROYECTO 6: *Una biografía de los poliedros*

Estudio histórico del conocimiento de los poliedros.

PROYECTO 7: *Las medidas de las cosas*

Estudio metrológico de las medidas de los objetos cotidianos actuales (muebles, electrodomésticos, coches,...).

Evaluación de actividades del taller

Toda alumna o alumno debería desarrollar en equipo a lo largo del curso al menos un trabajo extraescolar de «taller». Entendemos por tal actividad la materialización física (dibujos, murales, modelos, maquetas,..) de unos elementos que amplíen o complementen temas ya tratados.

Ejemplos de dichos talleres especiales podrían ser:

TALLER 1: *Rectángulos y poliminos*

Investigación con resultado gráfico de tipos de rectángulos obtenibles por repetición de una pieza que sea un polimino.

TALLER 2: *Modelos de poliedros regulares y de Arquímedes de igual diámetro*

Construcción de los 18 modelos en cartulina logrando que todos posean igual diámetro.

TALLER 3: *Mural de decoraciones*

Dibujo de un mural ejemplificando con la repetición adecuada de un mismo motivo los 7 frisos y las 17 formas de decorar el plano.

TALLER 4: *Bordando parábolas*

Combinaciones de parábolas como envolventes bordadas.

TALLER 5: *Superficies regladas*

Construcción de modelos de superficies regladas.

TALLER 6: *La maqueta*

Colección de planos y elaboración de maqueta de un edificio o escultura real.

TALLER 7: *Creatividad geométrica*

Dibujos o modelos de libre combinación de formas geométricas.

Cuándo evaluar

Como evaluación inicial al principio del curso será suficiente observar el desarrollo de la Unidad 1 y, si fuese el caso, proponer las cuestiones E.1.1, E.1.2 y E.1.3.

Como evaluación formativa deben combinarse las evaluaciones sugeridas anteriormente y creemos que no debería existir una evaluación sumativa de carácter terminal, dado que la última Unidad propuesta sugiere multitud de temas que son susceptibles de integrar tanto cuestiones de esta Unidad como de las anteriores.

Cómo guardar la información

Será importante que la profesora o el profesor vaya acumulando la máxima información posible sobre las diferentes evaluaciones realizadas sobre cada alumna o alumno. Una ficha individual sería conveniente y cuadros resumen del nivel de la clase elaborados a partir de dichas fichas.

Como modelo de ficha proponemos el siguiente:

EVALUACIÓN

NOMBRE .... CURSO ....

CLASE ....

	Muy bajo	*Bajo*	*Medio*	*Alto*
INICIAL				
Conocimientos previos	☐	☐	☐	☐
Razonamiento y abstracción	☐	☐	☐	☐
Lenguajes y su uso	☐	☐	☐	☐
Resolución problemas	☐	☐	☐	☐
Espiritu creativo	☐	☐	☐	☐
SEGUIMIENTO				
Unidad 1	☐	☐	☐	☐
Unidad 2	☐	☐	☐	☐
Unidad 3	☐	☐	☐	☐
Unidad 4	☐	☐	☐	☐
Unidad 5	☐	☐	☐	☐
Unidad 6	☐	☐	☐	☐
Unidad 7	☐	☐	☐	☐
Unidad 8	☐	☐	☐	☐
CARPETA				
Recogida de información	☐	☐	☐	☐
Trabajos (propuestos)	☐	☐	☐	☐
Trabajos (voluntarios)	☐	☐	☐	☐
Calidad del contenido	☐	☐	☐	☐
PROYECTO				
Calidad del trabajo	☐	☐	☐	☐
Contenido matemático	☐	☐	☐	☐
Presentación	☐	☐	☐	☐
Conclusiones	☐	☐	☐	☐
TALLER				
Desarrollo del trabajo	☐	☐	☐	☐
Calidad formal del producto	☐	☐	☐	☐
Corrección resultados	☐	☐	☐	☐

Equipo ....

VALORACIÓN GLOBAL ______________________

Programación

Programación general

En este apartado detallaremos la propuesta de programación: tanto las ocho unidades en que se divide el curso como las correspondientes cuarenta y ocho actividades; quedando la profesora o el profesor invitado a ver, simultáneamente con la lectura de esta sección, todas las fichas de actividades incluidas en el apartado cuarto.

Empezaremos dando el cuadro general, con referencia especial a los objetivos y criterios de evaluación relacionados de forma principal con cada una de las actividades, e insistimos en el calificativo «principal» al entender que objetivos como el 1, 2, 4, 8 y 9 (referentes, respectivamente al lenguaje: geométrico y su representación, recolección de problemas, relaciones de las Matemáticas con el Arte y los procesos de creación, valoración de las aportaciones geométricas y actitudes flexibles y críticas) están presentes de forma directa o indirecta en todos los apartados de las actividades propuestas. Otro tanto ocurre con el criterio de evaluación 7 relativo al desarrollo de estrategias en resolución de problemas.

Desarrollaremos ahora las referencias a cada Unidad:

UNIDADES DIDÁCTICAS		ACTIVIDADES	OBJETIVOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
1.	**El mundo de los polígonos**	*1. Explorando el plano*	1 y 9	7
		2. Poligolandia	1	7
		3. Geoplano	1, 3 y 7	7
		4. Formas con tangrams	1, 3 y 7	7 y 6
		5. Poliminos	1, 2 y 7	7
2.	**Dinámica plana**	*6. Trasladar*	6	2
		7. Girar	6	2
		8. Simetrizar	6	2
		9. Movimientos en 2D	6	2
		10. Mallas creativas	6 y 9	2
3.	**Decoración plana**	*11. Frisos*	4, 8 y 9	1
		12. Mosaicos	4, 8 y 9	1
		13. Decorando el plano	4, 2, 8 y 9	1
4.	**El mundo de los poliedros**	*14. Explorando el espacio*	1, 7 y 9	3 y 7
		15. Poliedrolandia	1 y 7	3
		16. Poliedros regulares	2	3 y 7
		17. Poliedros de Arquímedes	2	3 y 7
		18. Deltaedros	2	3 y 7
		19. Policubos	2 y 7	3
		20. Caleidociclos	4 y 7	3

UNIDADES DIDÁCTICAS		ACTIVIDADES	OBJETIVOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
5.	**Dinámica espacial**	*21. Movimientos en 3D*	3, 6 y 7	2
		22. Medidas espaciales	2, 3 y 6	2, 3 y 6
		23. Teselar el espacio	3, 6 y 7	2, 3 y 6
		24. Empaquetar en 3D	2, 7 y 9	2, 3 y 6
6.	**Generación de curvas y superficies**	*25. Lugares geométricos*	1 y 2	5 y 7
		26. Circunferencia y perfección	4	5 y 7
		27. Visita a la elipse	1, 7 y 8	5 y 7
		28. Visita a la parábola	1, 7 y 8	5 y 7
		29. Visita a la hipérbola	1, 7 y 8	5 y 7
		30. Curvas y círculos rodantes	1, 7 y 8	5 y 7
		31. Los secretos de la cicloide	1, 7 y 8	5 y 7
		32. El encanto espiral	1, 7 y 8	5 y 7
		33. Un mundo fractal	1, 7, 8 y 9	5 y 7
		34. Esfera	3 y 4	2 y 7
		35. Superficies con rectas	3, 4 y 7	2 y 7
		36. Superficies creativas	3, 4 y 7	2 y 7
7.	**Razón y semejanza**	*37. Tamaños y formas*	1, 4, 5 y 9	2, 7
		38. Escalas convenientes	1, 2 y 9	2 y 7
		39. Razón y proporción	4	4
		40. Homotecia y semejanza	5 y 6	2
		41. Razones trigonométricas	5 y 2	6 y 7
8.	**Teoría de la proporción**	*42. Medidas y proporciones humanas*	4, 5 y 9	4 y 7
		43. Proporciones clásicas	4, 5 y 7	4 y 7
		44. Proporciones dinámicas	4, 5 y 7	4 y 7
		45. La divina proporción	4, 5 y 7	4 y 7
		46. Números de Fibonacci	4 y 5	4 y 7
		47. El Ken japonés	4, 5 y 8	1 y 4
		48. El modulor de Le Corbusier	4, 5 y 8	4

Contenidos de las unidades

Unidad 1. El mundo de los polígonos

Esta Unidad introductoria plantea un recorrido por el plano, centrando la atención en las formas poligonales y atendiendo a los aspectos básicos de trazado o construcción, características topológicas, afines y métricas, clasificación según diferentes criterios y generación de formas complejas por combinación de polígonos simples.

La Unidad debe permitir unificar nomenclaturas, refrescar temáticas ya tratadas en el nivel secundario y con ello, servir de indicador fiable de niveles iniciales (evaluación inicial informativa). Todos los contenidos de la Unidad son imprescindibles en el desarrollo de las restantes unidades.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Distinguir cuándo los dibujos de figuras planas se corresponde biunívocamente con una realidad tridimensional o cuando dicha correspondencia no existe o contiene ambigüedad.
2. Dibujar, construir o manipular formas poligonales analizando su potencial generador de formas geométricas.
3. Clasificar polígonos atendiendo a criterios alternativos (igualdad de lados, paralelismos, ángulos, perímetros, áreas, sombreados,...).
4. Determinar las características métricas de los polígonos.
5. Resolver problemas de clasificación, trazado o combinación de formas poligonales.

Contenidos

Conceptos

a) Distintas definiciones de polígonos.

b) Clasificaciones métricas, proyectivas o como grafos de polígonos en el plano.

Procedimientos

a) Utilización de diversos recursos para construir formas poligonales.

b) Manejo de distintos criterios de clasificación de polígonos.

c) Saber generar formas complejas a partir de formas simples.

d) Resolver problemas relativos a las combinaciones poligonales.

Actitudes

a) Apreciar la exactitud, ambigüedad o bondad del dibujo plano como descripto de la realidad.

b) Reconocer la relatividad de los criterios de clasificación.

c) Interés por la justificación geométrica de cualquier construcción geométrica.

d) Estimar la versatilidad en la creación de formas complejas al combinar elementos simples.

Temporalización

Se considera conveniente 1 hora para la primera actividad y sesiones de 2 horas para las cuatro restantes, haciendo pues un total de 9 horas dedicadas a la Unidad.

Actividades

Se proponen cinco, cuyo título y descripción son (véanse ACTIVIDADES 1, 2, 3, 4 y 5, desde la página 41):

Actividad 1. *Explorando el plano*: lectura tridimensional de figuras planas haciendo ver las ilusiones ópticas, las figuras imposibles y ambiguas.

Actividad 2. *Poligolandia*: trata las definiciones de polígonos, clasificación, trazado con regla y compás y sombras.

Actividad 3. *Geoplano*: análisis de polígonos en una malla 5x5, viendo los tipos posibles y características métricas de los mismos (concavidad, convexidad, lados iguales, perímetros, áreas,...).

Actividad 4. *Formas con tangrams*: generación de formas (de igual área) por combinación de unas piezas dadas y análisis de las relaciones entre dichas piezas.

Actividad 5. *Poliminos*: resolución de problemas inherentes a la unión de cuadrados idénticos.

Evaluación

Cuestiones con las que evaluar esta Unidad pueden ser las siguientes:

1. Dibuja varios geoplanos idénticos de 3x3 y traza en ellos todos los tipos posibles de triángulos y cuadriláteros, indicando en cada caso su nombre y área.
2. Con los dos triángulos rectángulos isósceles grandes del tangram chino, ¿qué tipos de polígonos podrías formar? Dibújalos y señala sus características.
3. Razona si es posible con piezas podium (tetraminos) rellenar un cuadrado.

Recursos

Equipo de dibujo, un retroproyector (Actividad 2); geoplanos 5x5 y gomas (Actividad 3); tangram chino (Actividad 4).

Unidad 2. Dinámica plana

Esta Unidad centra la atención en los movimientos del plano y ciertas deformaciones, visitando paso a paso las características de cada transformación, sus propiedades (invariantes), su visualización experimental, los mecanismos basados en dichas transformaciones y la generación de imágenes artísticas basadas en ellas.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Utilizar las transformaciones geométricas más usuales del plano entendiendo sus propiedades fundamentales.
2. Identificar mecanismos que permitan visualizar las transformaciones planas o hacer trazados basados en las mismas.
3. Obtener transformaciones de figuras planas haciendo uso de las mismas en generación de diseños o creaciones plásticas.

Contenidos

Conceptos

a) Traslaciones, giros y simetrías axiales.

b) Isometrías.

c) Transformaciones afines.

d) Composición de transformaciones del plano.

e) Invariantes de transformaciones del plano.

Procedimientos

a) Utilización de instrumentos ligados a las isometrías del plano.

b) Generar figuras a partir de una dada por aplicación de isometrías.

c) Realizar y analizar diseños y creaciones basadas en isometrías.

Actitudes

a) Apreciar la belleza de formas generadas dinámicamente.

b) Estimar la experimentación como método de investigación en geometría.

Temporalización

Se considera conveniente 2 horas para cada una de las cinco actividades lo que representa un total de 10 horas para esta Unidad.

Actividades

Se proponen cinco (véanse ACTIVIDADES 6, 7, 8, 9 y 10, desde la página 50):

Actividad 6. *Trasladar*: identificar y visualizar traslaciones en el plano.

Actividad 7. *Girar*: descubrir giros y calidoscopios, dibujos girables, imágenes que giran y propiedades de los giros.

Actividad 8. *Simetrizar*: identificar ejes de simetría, trazados, reconocerlos en figuras y ver propiedades básicas.

Actividad 9. *Movimientos en 2D*: descubrir las composiciones de transformaciones isométricas y sus usos.

Actividad 10. *Mallas creativas*: trazado de transformaciones afines y deformadoras mediante la ayuda de coordenadas.

Evaluación

Para evaluar esta Unidad sugerimos cuestiones como las siguientes:

1. Dibuja figuras que autocoincidan al girarlas 90°.

2. Haz la lista de movimientos que pueden dejar invariante un pentágono regular.

3. Razona cómo diseñarías un experimento donde a partir de un triángulo equilátero pudieses ver un hexágono regular ¿qué movimientos estarían detrás de esta visión?

Recursos

Equipo de dibujo, 2 espejos, cinta adhesiva, transportador, acetato transparente, palillos y botón.

Unidad 3. Decoración plana

La Unidad presenta los recursos geométricos para hacer frisos, mosaicos o decoraciones periódicas, haciendo énfasis en su clasificación, en su trazado y en su uso reiterado a lo largo de la Historia del Arte, abriendo puertas a la creatividad propia en este campo.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Apreciar las cualidades estéticas, creativas y geométricas inherentes a las decoraciones artísticas del plano basadas en repeticiones isométricas.
2. Saber trazar y clasificar frisos, mosaicos y decoraciones del plano con bitraslaciones.
3. Resolver problemas de recubrimientos de bandas o superficies planas, reconociendo en cada caso las mismas figuras generadoras.

Contenidos

Conceptos

a) Los siete tipos de frisos del plano.

b) Mosaicos regulares, semirregulares, pararregulares, de Escher y de Penrose.

c) Los diecisiete recursos de decoración del plano.

Procedimientos

a) Saber generar frisos y clasificarlos geométricamente reconociendo la pieza mínima.

b) Saber generar mosaicos apreciando qué formas son válidas para hacerlo.

c) Saber decorar el plano con recursos diversos, aplicando los movimientos planos y reconociendo la pieza mínima de la generación.

Actitudes

a) Apreciar la belleza derivada de la repetición ritmada geométricamente de motivos planos.

b) Darse cuenta de las posibilidades creativas propias con la ayuda de las Matemáticas.

Temporalización

Se considera un mínimo de 2 horas por actividad. Las 6 horas de la Unidad deberán ampliarse si en régimen de taller se realizan los murales de frisos, mosaicos y decoraciones.

Actividades

Se proponen tres (véanse ACTIVIDADES 11, 12 y 13, desde la página 59):

Actividad 11. *Frisos*: identificar, trazar, recortar y apreciar la geometría de los siete tipos de frisos.

Actividad 12. *Mosaicos:* identificar, trazar y crear mosaicos del plano.

Actividad 13. *Decorar plano*: identificar, trazar y crear decoraciones periódicas del plano.

Evaluación

Se propone como forma evaluativa óptima la realización de la siguiente actividad:

1. Dibuja los siete tipos de friso a partir de la letra (en mayúsculas de imprenta) inicial de tu apellido.

Recursos

Equipo de dibujo, tiras de papel, tijeras y cartulina.

Unidad 4. El mundo de los poliedros

La Unidad ofrece una aproximación a la visión geométrica tridimensional, a través de los poliedros como figuras describibles matemáticamente, descubriendo sus secretos, su belleza, sus relaciones, sus desarrollos, sus representaciones y sus construcciones.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Comprender y usar el lenguaje geométrico y su representación matemática para describir, construir y clasificar los principales tipos de poliedros.
2. Realizar los cálculos y medidas fundamentales en las clases principales de poliedros.
3. Construir y representar poliedros.
4. Crear nuevas formas poliédricas operando con poliedros conocidos.
5. Apreciar la creatividad en la decoración de poliedros y la creación de caleidociclos.

Contenidos

Conceptos

a) Prismas, pirámides y antiprismas.

b) Generación de poliedros a partir de polígonos (desarrollos planos).

c) Representación gráfica en 2D de poliedros.

d) Clasificaciones métricas de poliedros.

e) Fórmula de Euler ($C + V = A + 2$).

f) Poliedros regulares y semirregulares.

g) Poliedros, deltaedros y policubos.

h) Caleidociclos flexibles.

Procedimientos

a) Utilizar diversos métodos para construir o generar poliedros.

b) Manejar diversos criterios de clasificación de poliedros.

c) Saber establecer relaciones entre familias de poliedros (dualizar, truncar,...) o entre parámetros de un mismo poliedro (caras, vértices, aristas,...).

d) Resolver problemas relativos a las formas poliédricas.

Actitudes

a) Apreciar la belleza, simplicidad y riqueza de las formas poliédricas.

b) Reconocer la relatividad de los criterios de clasificación.

c) Interés por los modelos bien acabados o las representaciones bien hechas.

d) Admitir que la creatividad artística plástica puede encontrar en los poliedros una fuente de sugerencias atractivas.

Temporalización

Se considera un mínimo de 14 horas dedicadas a los poliedros.

Actividades

Se proponen siete (véanse ACTIVIDADES 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20, desde la página 64):

Actividad 14. *Explorando el espacio*: diálogo 2D-3D a nivel de polígonos–poliedros con atención a los desarrollos planos y la representación.

Actividad 15. *Poliedrolandia*: clasificaciones métricas de los poliedros y fórmulas de Euler para poliedros convexos.

Actividad 16. *Poliedros regulares*: definición, construcción y estudio de los 5 poliedros regulares.

Actividad 17. *Poliedros de Arquímedes*: definición, construcción y estudio de los 13 poliedros semirregulares.

Actividad 18. *Deltaedro*: definición, construcción y estudio de los 8 deltaedros.

Actividad 19. *Policubos*: generación, representación y combinación de policubos.

Actividad 20. *Caleidociclos*: poliedros flexibles formando caleidociclos.

Evaluación

Se proponen como evaluación el siguiente tipo de cuestiones:

1. Inventa un poliedro donde $C + V = A + 2$.

2. Al representar una vista de un poliedro se ve un cuadrado. Enumera poliedros posibles que pudieran ofrecer esta vista.

3. Razona cuántos tipos de deltaedros pueden ser pirámides.

4. Dibuja desarrollos planos de todos los tipos de tetracubos.

5. Un poliedro tiene dos caras cuadradas y ocho caras que son triángulos equiláteros. Haz un posible modelo.

Recursos

Equipo de dibujo, cartulina, pega, tijeras, centicubos.

Unidad 5. Dinámica espacial

Esta Unidad invita a descubrir aspectos espaciales como mover, medir, teselar y empaquetar, tanto a través de aplicaciones prácticas como a través de las posibilidades plásticas inherentes a dichas acciones.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Utilizar los movimientos espaciales entendiendo sus propiedades y usos.
2. Identificar mecanismos que permitan visualizar las transformaciones espaciales.
3. Saber evaluar áreas y volúmenes de cuerpos tridimensionales a través de estrategias geométricas y/o empíricas.
4. Identificar poliedros que teselen el espacio formando mosaicos 3D.
5. Saber criterios óptimos de empaquetamiento espacial.

Contenidos

Conceptos

a) Isometrías espaciales.

b) Áreas y volúmenes de campos sólidos.

c) Poliedros que teselan el espacio y sus combinaciones.

d) Empaquetamientos óptimos en 3D.

Procedimientos

a) Utilizar instrumentos ligados a las isometrías espaciales.

b) Evaluar experimentalmente o por estrategias geométricas áreas y volúmenes de cuerpos.

c) Reconocer piezas con capacidad de tesela el espacio.

d) Determinar empaquetamientos óptimos en 3D.

Actitudes

a) Apreciar la riqueza de formas espaciales y el enorme margen de creatividad para su combinación.

b) Estimar la experimentación como método de investigación en Geometría.

c) Tener interés por hallar soluciones óptimas respecto un determinado criterio.

Temporalización

Se consideran adecuadas unas 8 horas dedicadas a la Unidad, a las que deberían añadirse, en su caso, el tiempo del taller de calidoscopios.

Actividades

Se proponen cuatro tipos (véanse ACTIVIDADES 21, 22, 23 y 24, desde la página 77):

Actividad 21. *Movimientos en 3D*: descubrir mecanismos y usos de las isometrías.

Actividad 22. *Medidas espaciales*: cálculo de áreas y volúmenes.

Actividad 23. *Teselar el espacio*: formación de mosaicos en 3D con poliedros.

Actividad 24. *Empaquetar en 3D*: empaquetamiento de esferas y cilindros.

Evaluación

Cuestiones para evaluar esta Unidad. Por ejemplo:

1. Un poliedro está formado por cuatro cubos iguales, ¿en qué caso el papel para envolverlos sería mínimo?

2. Dibuja una pirámide que permita teselar el espacio.

3. Razona cómo relacionarías la suma $1 + 4 + 9 + ... + n^2$ con una forma de agrupar esferas.

Recursos

Equipo de dibujo, papel milimetrado de envolver, centicubos, cartulina, tijeras, caja y esferas de porexpan.

Unidad 6. Generación de curvas y superficies

Esta extensa Unidad propone un acercamiento desde la experimentación, el dibujo, el bordado y otros medios, a la generación de curvas en el plano o superficies en el espacio. Técnicamente se formula la descripción de dichas variedades en base a su definición, ya sea como lugar geométrico correspondiente a alguna propiedad métrica, o como límite de envolventes de rectas tangentes, o como el resultado de movimientos relativos de ciertas figuras. Se propone la visión de estas curvas y superficies, presentes tanto en la Naturaleza (formas y fenómenos) como en el arte, al constituir por simplicidad y simetría elementos referenciales importantes.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Describir curvas planas y superficies espaciales como lugares geométricos.
2. Entender ciertas curvas como el resultado dinámico de movimientos de figuras.
3. Identificar ciertas curvas como secciones de cuerpos espaciales.
4. Dibujar, bordar o construir curvas y superficies.
5. Reconocer la presencia de curvas y superficies en formas y fenómenos naturales y en procesos creativos artísticos.

Contenidos

Conceptos

a) Las cónicas como lugares geométricos (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) y como envolventes de rectas.

b) Cicloides, hipocicloides y epicicloides obtenidas al rodar círculos en círculos y como envolventes de rectas.

c) Generación de curvas espirales y uso.

d) Generación de fractales geométricamente.

e) Esfera y sus propiedades características.

f) Superficies regladas elementales (cilindros, cono, hiperboloides).

g) Superficies mínimas, deformables, reflectantes y resistentes.

Procedimientos

a) Construir gráficamente curvas a partir de su definición como lugar geométrico.

b) Reconocer curvas como límites de trazados de rectas envolventes.

c) Resolver problemas donde las soluciones o datos sean curvas cónicas.

d) Construir modelos de superficies e identificar secciones.

Actitudes

a) Apreciar la naturalidad y belleza de formas geométricas describibles como curvas, superficies o límites de trazados rectos.

b) Estimar los trazados bien acabados.

Temporalización

Unas 24 horas para la Unidad, al ser ineludible el trabajo de taller.

Actividades

Se proponen doce (ACTIVIDADES 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 y 36, desde la página 84):

Actividad 25. *Lugares geométricos*: definiciones de regiones, curvas o superficies a través de una propiedad métrica.

Actividad 26. *Circunferencia y perfección*: definición, trazado, aproximación envolvente y bordado de circunferencia.

Actividad 27. *Visita a la elipse*: definición, trazado, aproximación envolvente y bordado de elipses.

Actividad 28. *Visita a la parábola*: definición, trazado, aproximación envolvente y bordado de parábolas.

Actividad 29. *Visita a la hipérbola*: definición, trazado, aproximación envolvente y bordado de hipérbolas.

Actividad 30. *Curvas y círculos rodantes*: definición, trazado, aproximación de la astroide, deltoide, cardiode y nefroide.

Actividad 31. *Los secretos de la cicloide*: definición, trazado, bordado de la cicloide y descubrimiento de sus propiedades más notables y trascendentes.

Actividad 32. *El encanto espiral*: generación de espirales crecientes de Arquímedes y logarítmicas.

Actividad 33. *Un mundo fractal*: generación iterativa de fractales planos.

Actividad 34. *Esfera*: características métricas de las esferas.

Actividad 35. *Superficies con rectas*: generación de superficies regladas (cilindros, conos e hiperboloides) reconociendo sus secciones.

Actividad 36. *Superficies creativas*: superficies resistentes, reflejantes, deformables y mínimas reconociendo sus peculiaridades.

Evaluación

Cuestiones para la evaluación de la Unidad son, por ejemplo:

1. Describe el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos (1,0) y (-1,0) es 3 y cuya suma de distancias a los puntos (0,-1) y (0, +1) también es 3.

2. Dibuja tipos de cónicas que pueden pasar por los cuatro vértices de un cuadrado.

3. Una escalera vertical con ruedas apoyadas en una pared va cayendo hacia el suelo al desplazarse sus ruedas hasta quedar extendida horizontalmente. Si retratases esta caída superponiendo imágenes, ¿qué curva verías aproximadamente?

4. Al cortar una superficie por un plano sale una circunferencia. Dibuja superficies que puedan tener esta propiedad.

Recursos

Equipo de dibujo, cartulinas, aguja de coser, hilo rojo grueso, papel milimetrado, papel polar, pega, varilla, barras de meccano y ángulos, cañas de bar, espejo flexible, agua, jabón líquido y glicerina líquida.

Unidad 7. Razón y semejanza

Esta Unidad, independiente de las anteriores pero esencial para desarrollar la Unidad 8, introduce los hechos básicos en torno al mundo de la proporcionalidad, ya sea en sus aspectos de formas y tamaños, escalas de representación, proporciones, transformaciones conservando la forma o razones trigonométricas invariantes por homotecias y claves en la resolución de problemas métricos.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Conocer los principios básicos de la proporcionalidad geométrica, su independencia respecto de los tamaños y su relación con el concepto de forma geométrica.
2. Transformar figuras por semejanzas y clasificarlas desde el punto de vista de la Geometría equiforme.
3. Analizar proporciones entre diversos tipos de magnitudes y figuras (longitudes, áreas, partes, respecto del todo, etc.).
4. Reconocer los límites que la Naturaleza impone a los tamaños naturales y las relaciones formas-función que se dan en la realidad.
5. Aprender a leer y realizar representaciones en escalas convenientes.
6. Resolver problemas que involucren proporciones o razones trigonométricas.

Contenidos

Conceptos

a) Formas geométricas y su invariancia por semejanzas.

b) Cambios de escala y escalas convenientes en representaciones.

c) Proporciones entre longitudes. Caso de los rectángulos.

d) Homotecias y semejanzas en el plano y sus propiedades.

e) Razones trigonométricas y relaciones métricas en triángulos.

Procedimientos

a) Dibujar figuras a una escala dada.

b) Transformar figuras usando semejanza.

c) Generar rectángulos de idéntica proporción cambiando tamaños.

d) Calcular ángulos, razones trigonométricas y resolver problemas,...

Actitudes

a) Aceptar los límites de la Naturaleza en cuanto a tamaños y formas, dándose cuenta del potencial creador humano para generar formas y tamaños mediante estrategias ingeniosas e inteligentes.

b) Distinguir realidad y ficción en el mundo de las formas.

Temporalización

Unas 10 horas debe ser el tiempo adecuado para todas las actividades.

Actividades

Se proponen cinco (ACTIVIDADES 37, 38, 39, 40 y 41, desde la página 106):

Actividad 37. *Tamaños y formas*: razones homotéticas y cambios en longitudes, áreas y volúmenes.

Actividad 38. *Escalas convenientes*: escalas convenientes y posibles para problemas de representación y viceversa.

Actividad 39. *Razón y proporción*: proporciones en rectángulos y medidas indirectas basadas en proporcionalidad.

Actividad 40. *Homotecia y semejanza*: propiedades básicas de las transformaciones de la geometría equiforme.

Actividad 41. *Razones trigonométricas*: medidas trigonométricas basadas en razones entre lados de triángulos rectángulos y su uso.

Evaluación

Cuestiones evaluativas de seguimiento podrían ser las siguientes:

7. En un mapa una calle de 60 m de anchura es representada con 4 mm de anchura. ¿Cuál es la escala del mapa?

2. Razona a qué escala máxima podrías hacer un dibujo de todo tu cuerpo en una hoja DIN A4.

3. Dibuja la imagen por una homotecia de razón 3/2 de un triángulo equilátero de lado 3 cm.

4. Dos rectángulos con idéntica longitud de las diagonales, ¿son iguales?

5. El seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo vale 1/2. ¿Qué puedes decir sobre los lados de dicho triángulo?

Recursos

Equipo de dibujo, cartulina, tijeras, pega y calculadora.

Unidad 8. Teoría de la proporción

Unidad fundamental en la asignatura, presupone el desarrollo de la Unidad 7 y pretende potenciar los aspectos creativos plásticos de las alumnas y los alumnos, a través del análisis de las medidas humanas y sus proporciones, las proporciones en los trazados geométricos con especial visita al número de oro (la divina proporción) y sus aproximaciones y usos tanto en el modulor de Le Corbusier como en otros ejemplos clásicos del Arte. También se presenta el caso del Ken japonés como diseño modular de singular simplicidad y belleza.

Objetivos didácticos

Al término de esta Unidad, las alumnas y los alumnos deberán ser capaces de:

1. Conocer las medidas humanas y proporciones más usuales.
2. Saber realizar los trazados clásicos de proporciones estáticas, dinámicas o divinas.
3. Reconocer la teoría de la proporción en trazados de pintura, escultura o arquitectura como método de realización artística.
4. Conocer ejemplos fundamentales del uso de proporciones de la Historia del Arte.

Contenidos

Conceptos

a) Medidas humanas estadísticas y sus relaciones.

b) Proporciones racionales en rectángulos y su modulación.

c) Proporciones de valor $\sqrt{n}$ en rectángulos y caracterización de los mismos.

d) Proporción $(1 + \sqrt{5})/2$ y sus propiedades características.

e) Sucesión de Fibonacci y su relación con el número de oro.

f) El Ken japonés.

g) El modulor de Le Corbusier.

Procedimientos

a) Realizar cálculos de proporciones humanas en base a datos estadísticos.

b) Trazar rectángulos de proposiciones $\sqrt{n}$ ó $(1+\sqrt{5})2$ sabiendo sus subdivisiones o ampliaciones.

c) Reconocer la presencia de proporciones en obras de arte y diseño.

d) Relacionar proporcionalidad con modularidad y sus usos.

Actitudes

a) Apreciar la belleza inherente a determinadas proporciones tanto desde un punto de vista estético como funcional.

b) Apreciar que el trabajo basado en la teoría de la proporción es un método que ayuda a la creatividad sin cortar posibilidades a la innovación.

Temporalización

Un mínimo de 14 horas, más el tiempo necesario para realizar proyectos o trabajos ligados a la Unidad.

Actividades

Se proponen siete (ACTIVIDADES 42, 43, 44, 45, 46, 47 y 48, desde la página 115):

Actividad 42. *Medidas y proporciones humanas*: medidas estáticas, proporciones propias y artísticas y su uso.

Actividad 43. *Proporciones clásicas*: estudio de proporciones fraccionarias y su modulación en una cuadrícula.

Actividad 44. *Proporciones dinámicas*: estudio de proporciones irracionales de la forma n, su generación, subdivisión y propiedades.

Actividad 45. *La divina proporción*: estudio de la proporción $(1+\sqrt{5})/2$ en rectángulos, en división de segmentos, espirales, polígonos, cuerpo humano, etc.

Actividad 46. *Números de Fibonacci*: sucesión de Fibonacci, su presencia natural y uso artístico en relación a la divina proporción.

Actividad 47. *El Ken japonés*: el ejemplo de modulación en la arquitectura japonesa tradicional.

Actividad 48. *El modulor de Le Corbusier*: un ejemplo de modulación de este siglo que influyó en el desarrollo de la Arquitectura Moderna.

Evaluación

Cuestiones para evaluación podrían ser:

1. Dibuja de dos formas diferentes un rectángulo de proporción el número de oro $(1+\sqrt{5})/2$.

2. Razona cómo dividirías un rectángulo de proporción $1+\sqrt{5}$ en dos rectángulos áureos y dos cuadrados.

3. Dibuja una malla donde todos los rectángulos tengan proporción $\sqrt{3}$. ¿Cuál sería el método más rápido?

4. Qué analogía y diferencias hay entre el Ken japonés y el modulador de Le Corbusier.

Recursos

Equipo de dibujo, tijeras y cartulinas.

Materiales para los alumnos

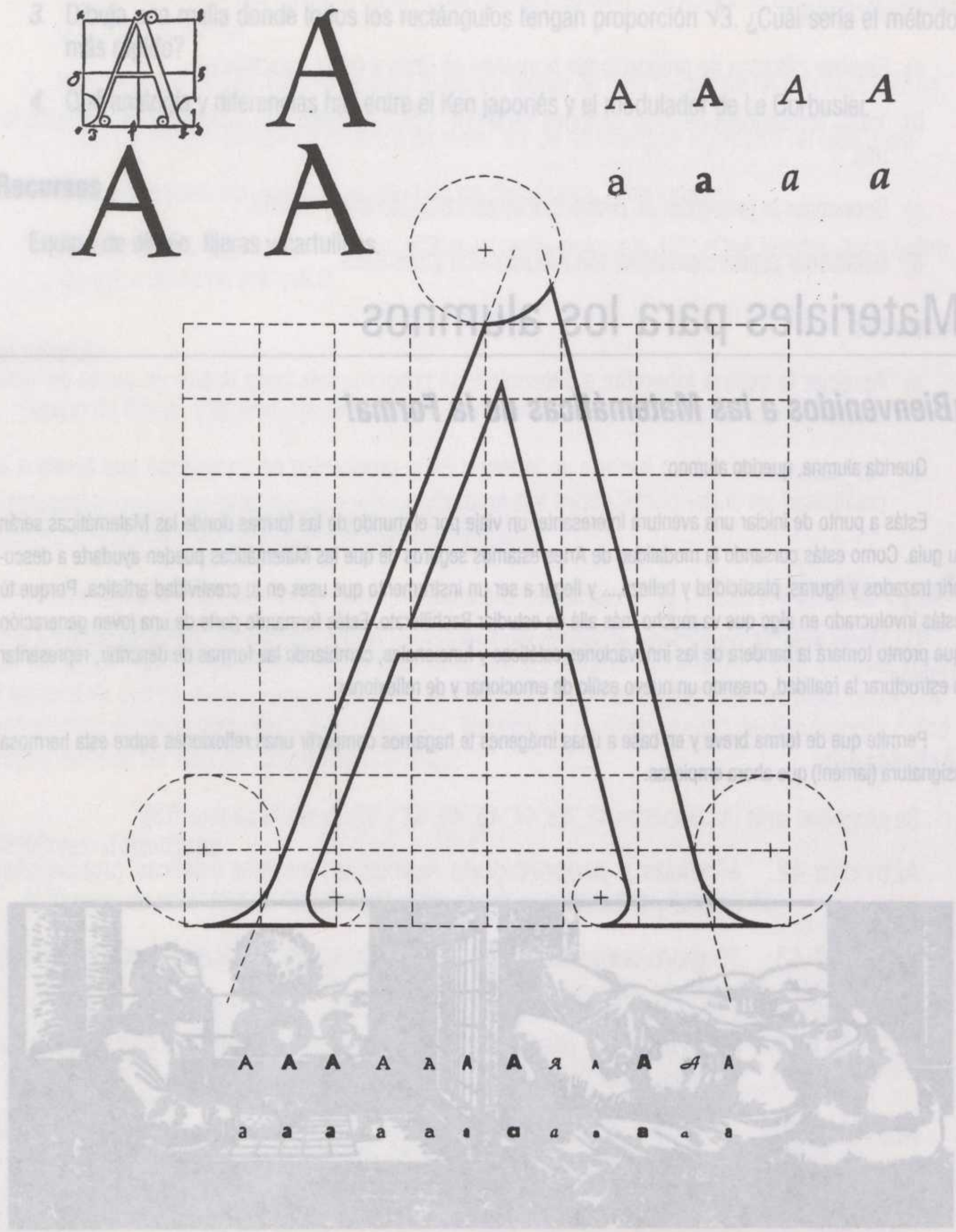
¡Bienvenidos a las Matemáticas de la Forma!

Querida alumna, querido alumno:

Estás a punto de iniciar una aventura interesante: un viaje por el mundo de las formas donde las Matemáticas serán tu guía. Como estás cursando la modalidad de Artes estamos seguros de que las Matemáticas pueden ayudarte a descubrir trazados y figuras, plasticidad y belleza,... y llegar a ser un instrumento que uses en tu creatividad artística. Porque tú estás involucrado en algo que va mucho más allá de estudiar Bachillerato. Estás formando parte de una joven generación que pronto tomará la bandera de las innovaciones estéticas y funcionales, cambiando las formas de describir, representar o estructurar la realidad, creando un nuevo estilo de emocionar y de reflexionar.

Permite que de forma breve y en base a unas imágenes te hagamos compartir unas reflexiones sobre esta hermosa asignatura (¡amén!) que ahora empiezas.

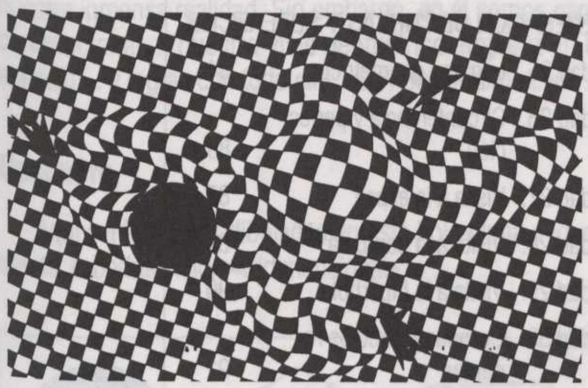
Tú no eres Eva o Adán. Afortunadamente detrás de ti hay muchos siglos de Historia y Cultura donde puedes hallar ejemplos espectaculares de cómo la interacción de las Matemáticas con las Artes ha sido beneficiosa y esencial. Verás Geometría, Aritmética y Medida en los trazados de las catedrales góticas, en las decoraciones de yeso, madera y cerámica, en los cuadros de Leonardo proporcionando la figura humana y en las villas de Paladio, en el teatro griego circular y en los estudios de Kandinsky... mira atrás y descubre. No verás una Matemática escrita. Hallarás una Matemática subyacente, escondida, haciendo posible aquello que ahora ves. La verás discretamente presente en los puntos de fuga, en las medidas del anfiteatro, en la relación frente-nariz de la cara sonrosada, en los formatos del cuadro rectangular, en la sabia combinación de colores básicos que han posibilitado este color final... No hay ningún siglo donde no pueda encontrarse un ejemplo interesante de cómo el diálogo plástico-matemático no haya tenido una concreción brillante. Súmate a esta tradición.

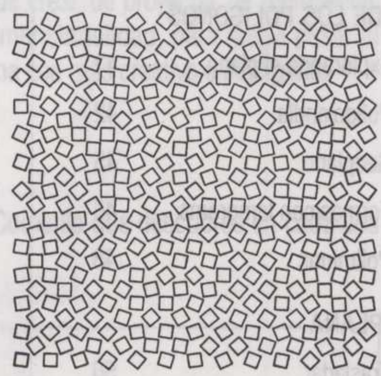


Tú vives a finales del siglo XX. Tu tiempo es el de la información, la cibernética, el satélite, el scanner, la digitalización... tú eres libre para usar el pincel y la escarpa o ponerte a bordar. Pero no desprecies lo que la tecnología te está ofreciendo. Mira la figura adjunta. Es un útil collage de letras «a». Verás las cuatro «aes» de Alberto Durero, aportando geometría de regla y compás al trazado regulador de la letra en un intento de hallar una explicación a unas formas de tradición romana. Y verás una impresionante «A», trazada sobre una cuadrícula con la técnica del diseño asistido por ordenador (CAD) y otras tipologías de letras «aes», realizadas con impresión o tinta a partir de un tratamiento de texto, programa WordPerfect 5.1..., los medios están aquí. Hay un nuevo arte con nuevos medios. El arte puede ser una imagen de televisión, una danza de rayo láser o el paisaje de un videojuego. Las formas que con ello ves son cuadrículas minúsculas con tonos de colores y el tecleo de medidas, coordenadas, ecuaciones o transformaciones, es el lenguaje generador. El nuevo pincel tiene números y no pelos. Dale una oportunidad de serte útil.

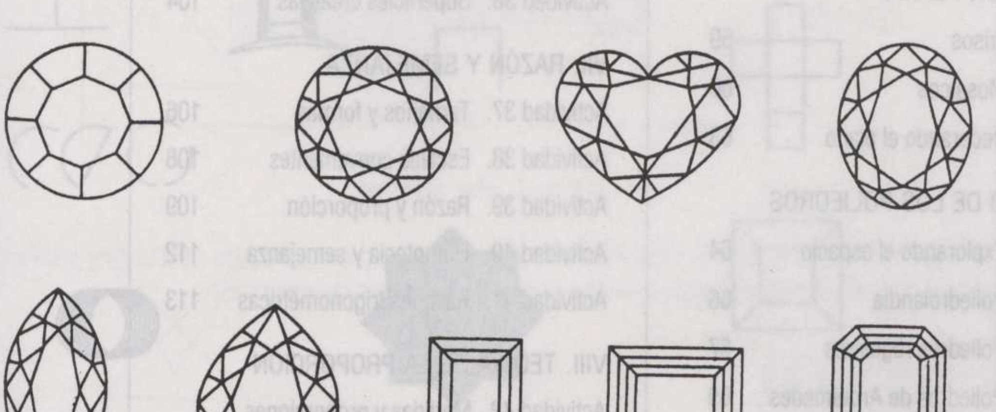
Tú tienes la decisión final. Al final, en tus obras plásticas, en tus diseños, en tus collages, tú eres el que eliges. Aquí estará tu arte. Puedes usar Matemáticas o puedes no usarlas, o incluso puedes usarlas malévolamente para visitar lo imposible o lo absurdo. Hay cubos inexistentes de Escher, hay un famoso cuadro-espejo irreal de Magritte donde un hombre ve su nuca al mirarse frente un espejo y hay una serie de objetos delirantes de Carleman denominados imposibles. En estas creaciones hay la anti-simetría, la negación lógica del diálogo forma-función, la realidad bidimensional que no representa nada espacialmente. Esto también tiene su interés.

En las actividades que te hemos preparado verás de hecho muy pocas afirmaciones pero muchas cuestiones. Tú eres el protagonista. La partitura quiere incitar tu labor. Lo que tú hagas con el «descubre, diseña, dibuja, practica, calcula, experimenta» será lo realmente importante.





Mira ahora las figuras con cuadrados. Son simples cuadrados. La Geometría te diría poco más. La creatividad que ha roto la cuadrícula cartesiana, moviéndola o deformándola y colocándola de forma ajedrezada, ha hecho posible ver una distribución dinámica de cuadrados en esta escultura-motorizada o un bello arlequín visto desde arriba. Aquí puedes encontrar otra reflexión: tú, con tu creatividad, puedes sacar un gran partido a cosas muy simples.



Y observa la última figura. ¿Qué son? Para algunas personas son poliedros. Para la mayoría son los diseños poliédricos de las tallas de diamantes. Ya sabes algo más. En tus joyas llevas geometría. Desearíamos que en tu corazón y en tu inteligencia también hubiese un rincón para las Matemáticas.

Actividades

RELACIÓN DE ACTIVIDADES

Actividad 1.

Explorando el plano

Miramos el papel con la soberbia de nuestra tridimensionalidad. El papel es un plano perdido en nuestra inmensa realidad. Sin embargo, en él somos capaces de crear, de proyectar, de representar, de emocionar,... nuestro viaje geométrico empieza en la bidimensionalidad, para luego pasar al espacio,... y lograr, con todo ello, que nuestra dimensión humana sea más creativa e inteligente.

Descubre

Aquí verás figuras dibujadas en esta hoja plana *(Figura 1)*. Comenta qué descubres en cada una con tu soberbia visión «tridimensional»:

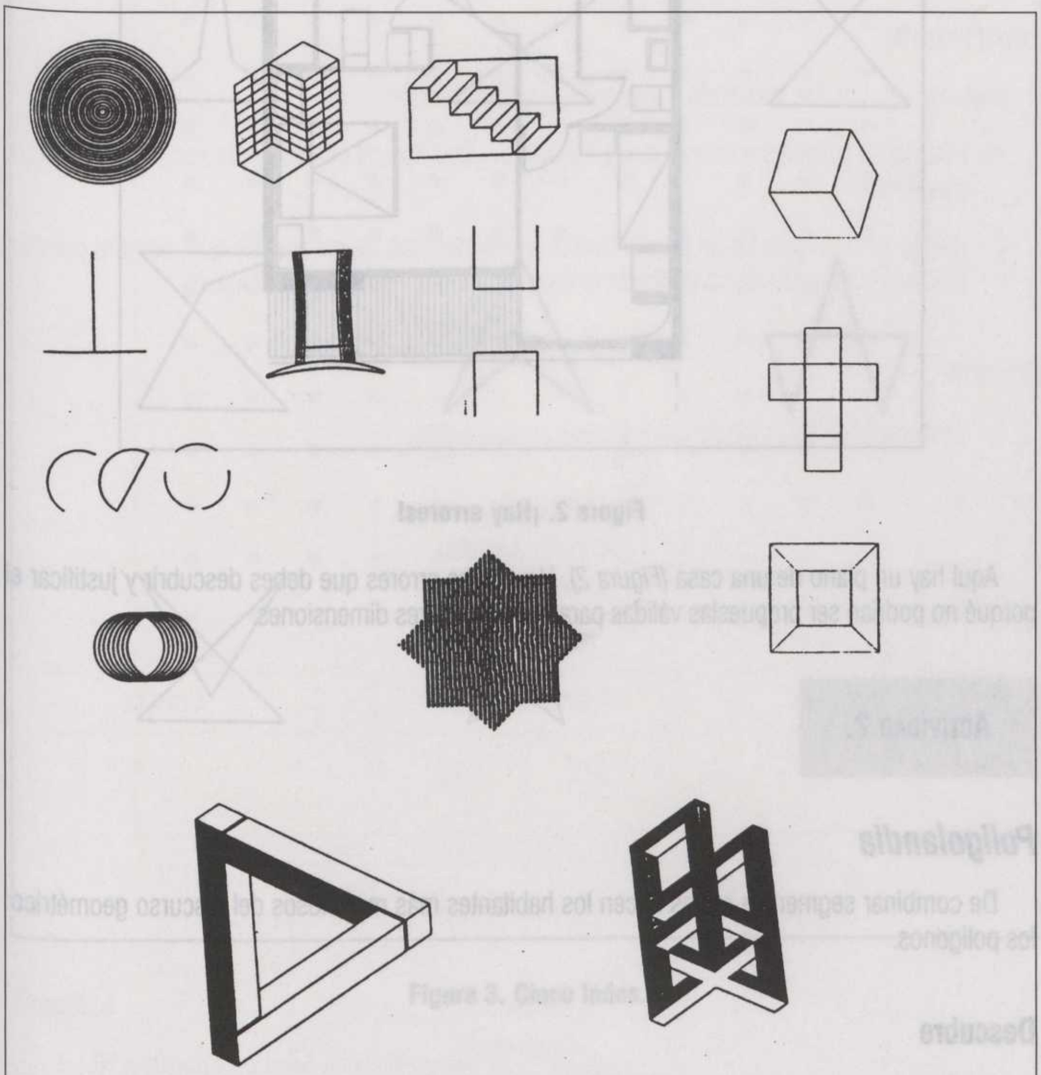


Figura 1. ¡Todos son dibujos planos!

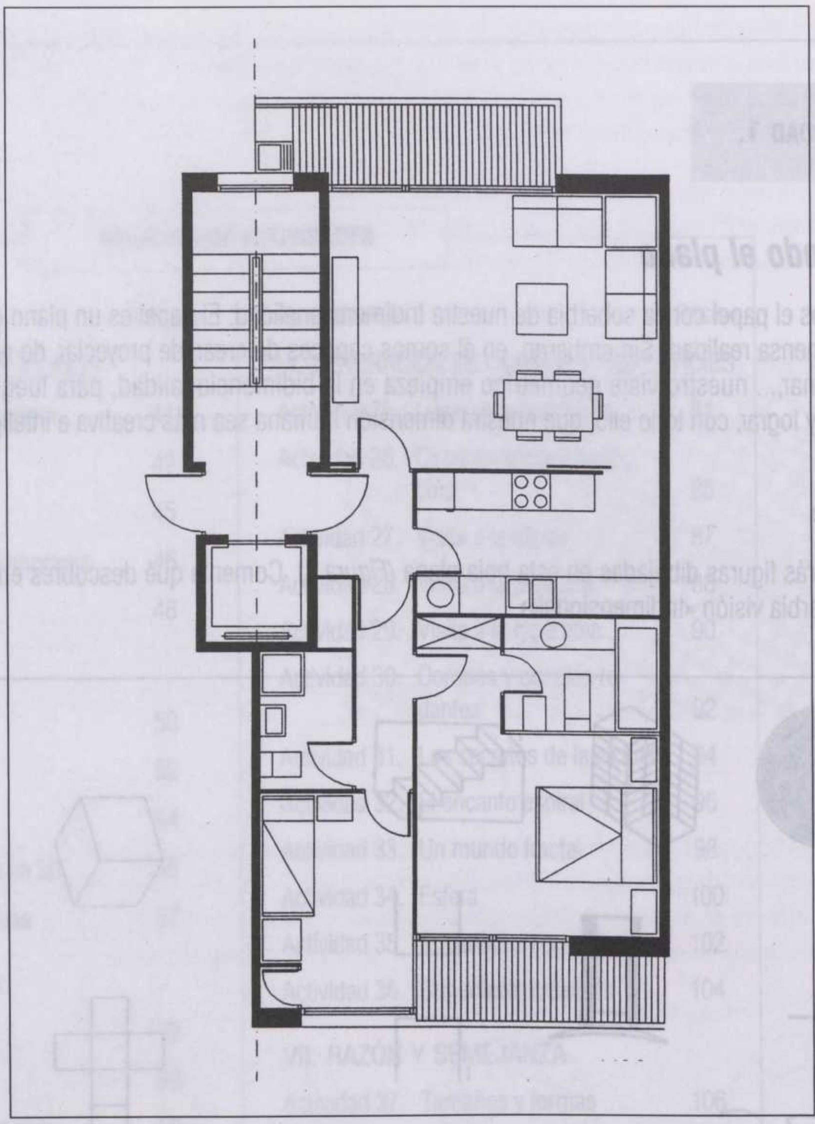


Figura 2. ¡Hay errores!

Aquí hay un plano de una casa *(Figura 2)*. Hay varios errores que debes descubrir y justificar el porqué no podrían ser propuestas válidas para hacerse en tres dimensiones.

ACTIVIDAD 2.

Poligolandia

De combinar segmentos rectos nacen los habitantes más marchosos del discurso geométrico: los polígonos.

Descubre

Aquí tienes muchos polígonos dibujables con 5 segmentos *(Figura 3)*, ¿los podrías dibujar todos empezando en un vértice, terminando en él y sin levantar el lápiz del papel? Estudia posibles clasificaciones de estos «pentágonos».

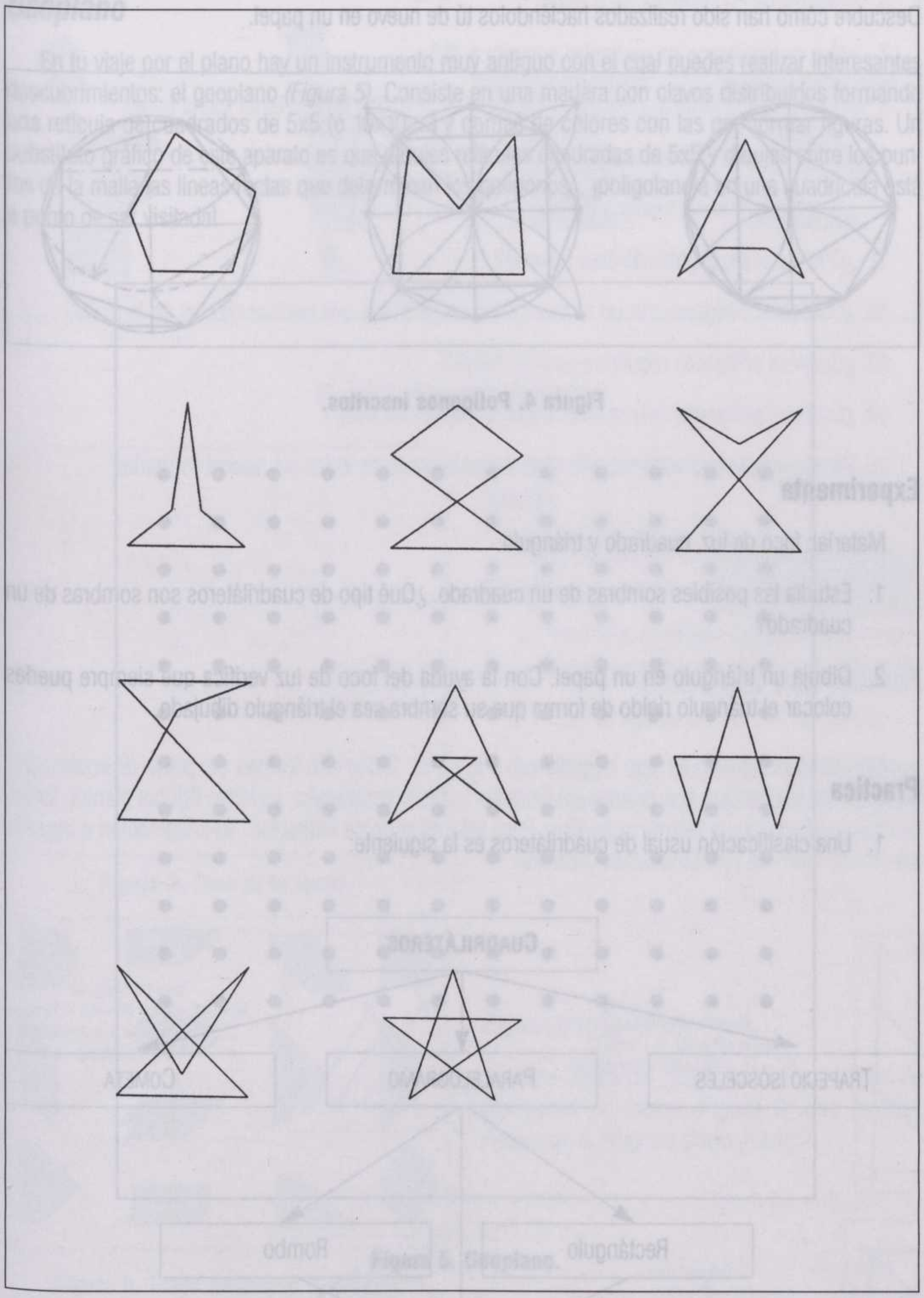


Figura 3. Cinco lados.

Dibuja

Material: papel, lápiz, regla y compás.

Aquí tienes dibujos de los primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia *(Figura 4)*. Descubre cómo han sido realizados haciéndolos tú de nuevo en un papel.

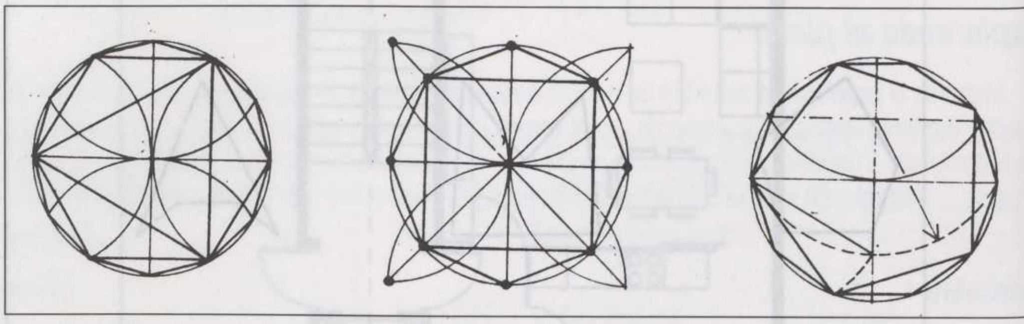


Figura 4. Polígonos inscritos.

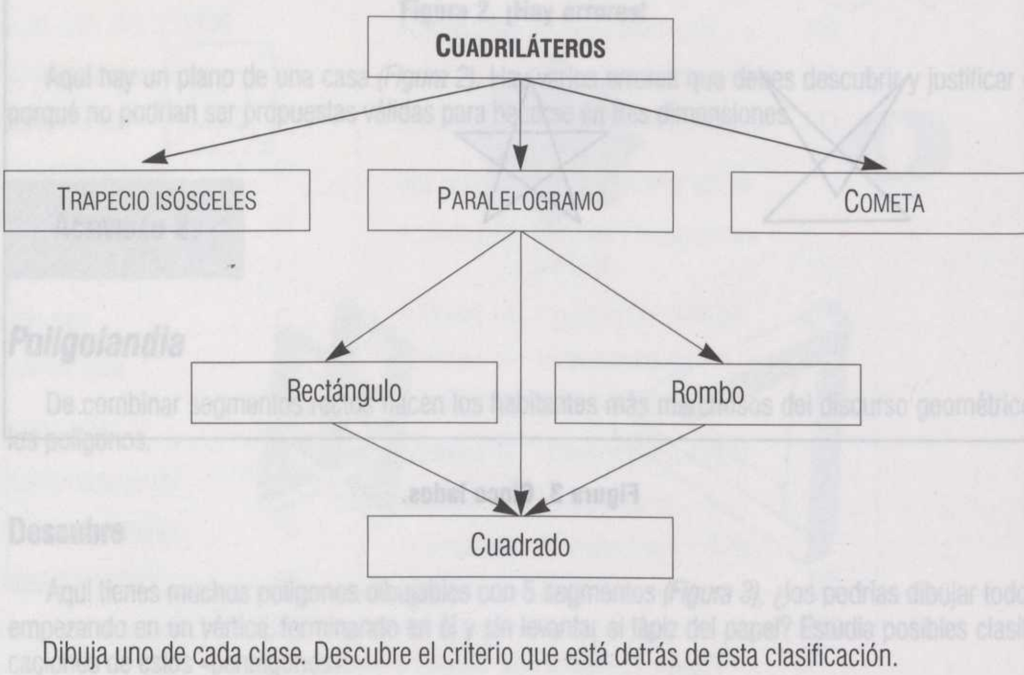
Experimenta

Material: foco de luz, cuadrado y triángulo.

1. Estudia las posibles sombras de un cuadrado. ¿Qué tipo de cuadriláteros son sombras de un cuadrado?
2. Dibuja un triángulo en un papel. Con la ayuda del foco de luz verifica que siempre puedes colocar el triángulo rígido de forma que su sombra sea el triángulo dibujado.

Practica

1. Una clasificación usual de cuadriláteros es la siguiente:



Dibuja uno de cada clase. Descubre el criterio que está detrás de esta clasificación.

Actividad 3.

Geoplano

En tu viaje por el plano hay un instrumento muy antiguo con el cual puedes realizar interesantes descubrimientos: el geoplano *(Figura 5)*. Consiste en una madera con clavos distribuidos formando una retícula de cuadrados de 5x5 (ó 10x10,...) y gomas de colores con las que formar figuras. Un substituto gráfico de este aparato es que dibujes retículas cuadradas de 5x5 y dibujes entre los puntos de la malla las líneas rectas que determinan los polígonos... ¡poligolandia en una cuadrícula está a punto de ser visitada!

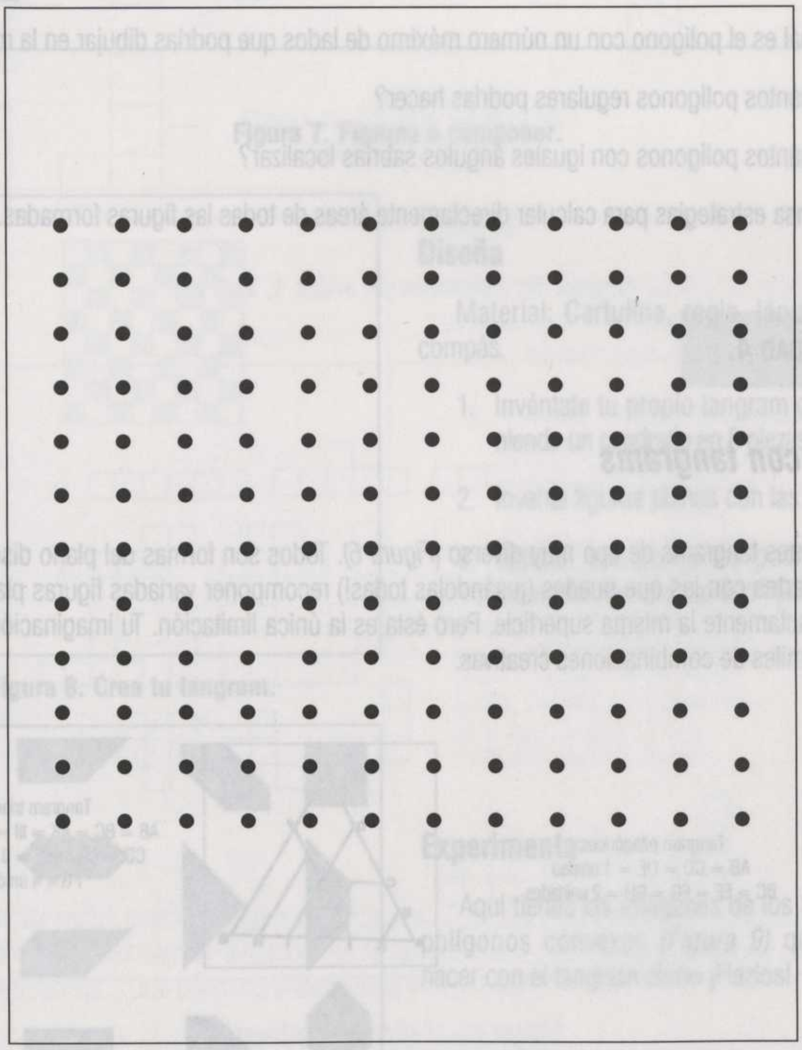


Figura 5. Geoplano.

Practica

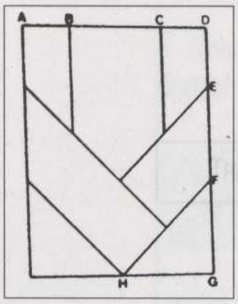
1. Dibuja todos los cuadrados diferentes en perímetro.
2. Dibuja todos los rombos no cuadrados.
3. Dibuja todos los rectángulos no cuadrados.

4. Dibuja cuadriláteros posibles con dos ángulos rectos opuestos.
5. Dibuja cuadriláteros cóncavos posibles. ¿Cuáles son los ángulos cóncavos posibles?
6. Halla trapecios posibles en la malla.
7. ¿Hay cuadriláteros de perímetro superior a 11?
8. Fijado un lado unidad, ¿cuántos triángulos en la malla pueden tener dicha base?
9. Halla todos los triángulos de área 1.
10. ¿Podrías formar un triángulo equilátero?
11. ¿Cuál es el pentágono de área mínima?
12. ¿Cuál es el polígono con un número máximo de lados que podrías dibujar en la malla?
13. ¿Cuántos polígonos regulares podrías hacer?
14. ¿Cuántos polígonos con iguales ángulos sabrías localizar?
15. Piensa estrategias para calcular directamente áreas de todas las figuras formadas.

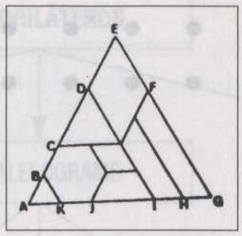
ACTIVIDAD 4.

Formas con tangrams

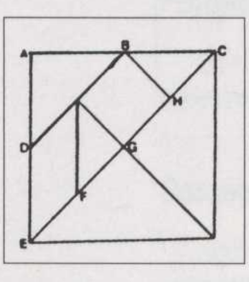
Aquí tienes tangrams de tipo muy diverso *(Figura 6).* Todos son formas del plano diseccionadas en varias partes con las que puedes (¡usándolas todas!) recomponer variadas figuras planas. Todas tendrán exactamente la misma superficie. Pero ésta es la única limitación. Tu imaginación e ingenio permitirán miles de combinaciones creativas.



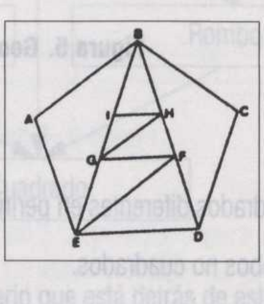
Tangram pitagóricos:
AB = CD = DE = 1 unidad
BC = EF = FG = GH = 2 unidades



Tangram triangular:
AB = BC = AK = III = HG = 1 unidad
CD = DE = EF = J = 2 unidades
FG= 4 unidades



Tangram chino:
AB = BC =AD =DE = $^1/_2$ unidad
CD=FG = GH = HC =
$\sqrt{2}/_4$ unidades



Tangram pentagonal (pentagrama)
GF //ED, GH// EF, IH// GF

Figura 6. Tangrams.

Descubre

Usa las piezas del tangram chino para componer estas figuras *(Figura 7)*.

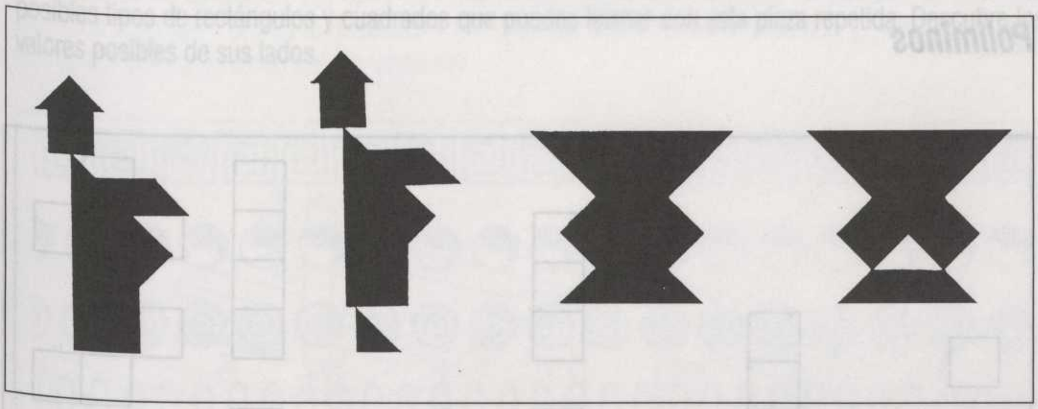


Figura 7. Figuras a componer.

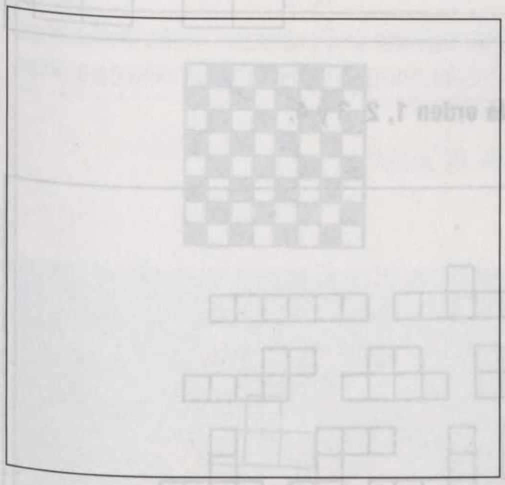


Figura 8. Crea tu tangram.

Diseña

Material: Cartulina, regla, lápiz, tijeras y compás.

1. Invéntate tu propio tangram descomponiendo un cuadrado en 8 piezas *(Figura 8)*.
2. Inventa figuras planas con las piezas.
3. Estudia que polígonos podrías formar (como mínimo el cuadrado inicial ¡seguro!).

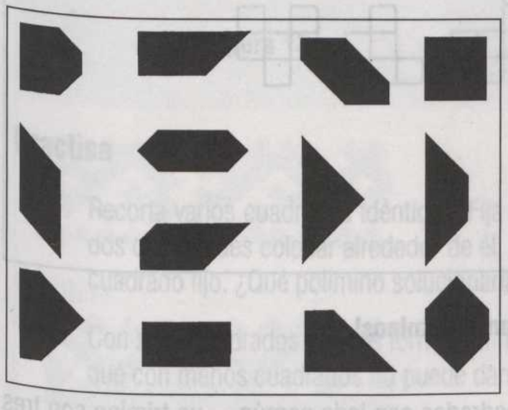


Figura 9. Trece polígonos convexos.

Experimenta

Aquí tienes las imágenes de los 13 tipos de polígonos convexos *(Figura 9)* que puedes hacer con el tangram chino ¡Hazlos!

Practica

1. Estudia paralelogramos formados con las piezas del tangram chino. ¿Qué tipos de rectángulos puedes formar?
2. Da un nombre a cada pieza. Calcula su superficie. Halla todas las posibles relaciones entre todas estas superficies. ¿Qué descubres?

Actividad 5.

Polimínos

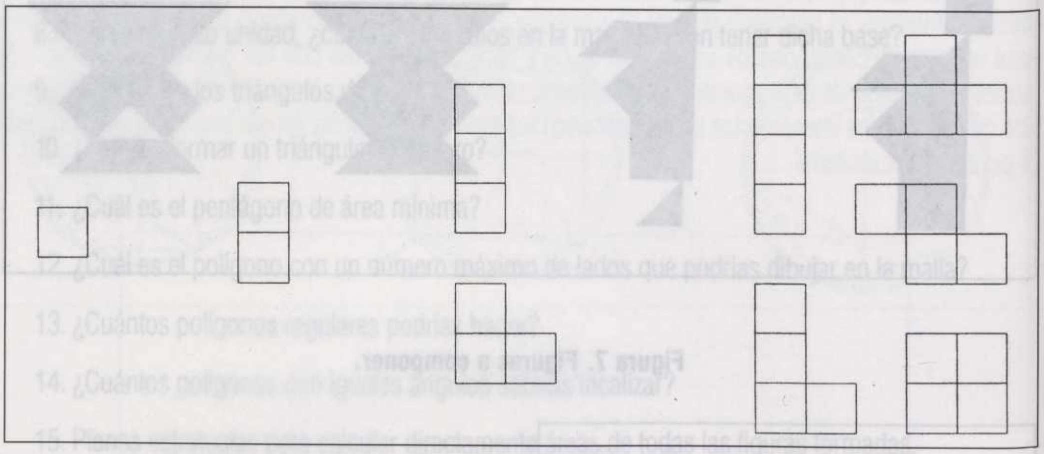


Figura 10. Polimínos de orden 1, 2, 3 y 4.

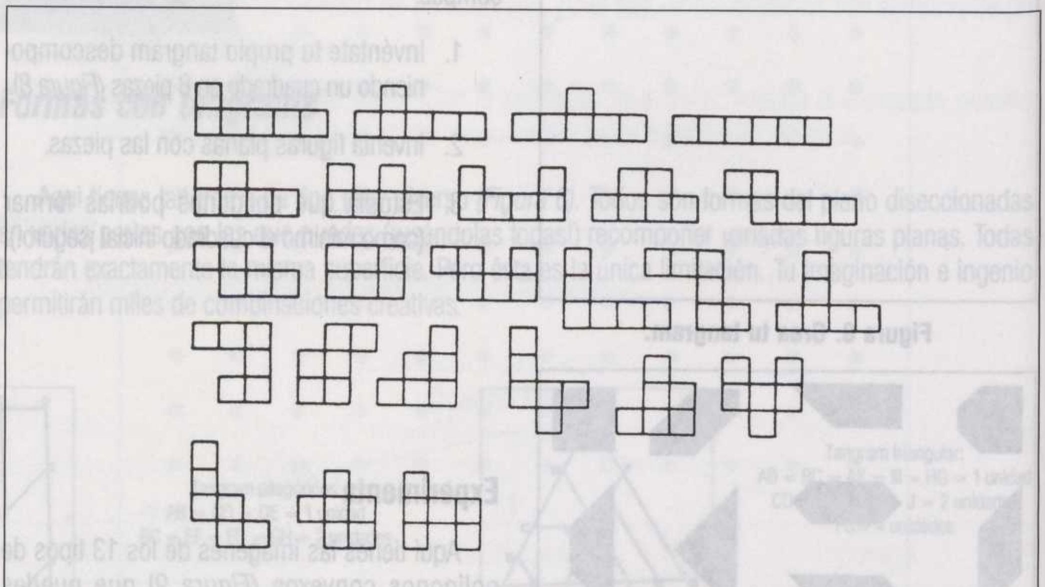


Figura 11. ¡Faltan hexaminos!

Una ficha de dominó está formada por dos cuadrados con lado común,... un trimino son tres cuadrados que por parejas tienen un lado común,... así nacen los tetraminos, pentaminos, hexaminos,... etc. Con el nombre general de polimínos nos referiremos a todos estas figuras *(Figura 10)*.

Descubre

Dibuja los pentaminos. Aquí ves algunos posibles tipos de hexaminos pero hay más. Descubre los que faltan *(Figura 11)*.

Dibuja

Considera el tetramino formado por cuatro cuadrados en hilera: es un rectángulo 1x4. Dibuja posibles tipos de rectángulos y cuadrados que puedes formar con esta pieza repetida. Descubre los valores posibles de sus lados.

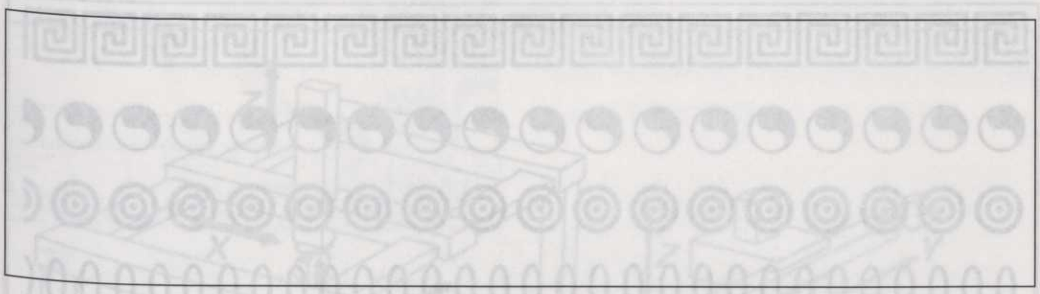


Figura 12. ¿Y este rectángulo?

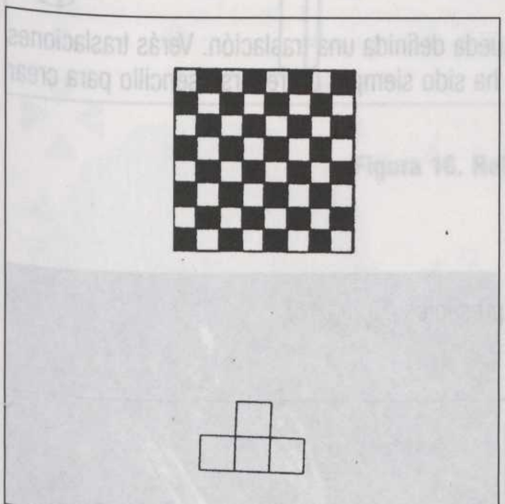


Figura 13.

Calcula

Dispones de un tablero de ajedrez 8x8, un cuadrado 2x2 y 15 piezas pódium *(Figura 13)*. ¿Podrías recubrir todo el tablero?

1. Estudia cuántos cuadrados negros o blancos puede cubrir un pódium. Descubrirás dos situaciones.

2. Llama x a los podiums de una de las situaciones e y a los podiums de la otra. ¿Qué relaciones descubres entre x e y? ¿Qué puedes concluir?

Practica

1. Recorta varios cuadrados idénticos. Fija uno y estudia cuál es la mayor cantidad de cuadrados que puedes colocar alrededor de él, de forma que todos toquen al menos en un punto al cuadrado fijo. ¿Qué polimino solucionaría este problema?

2. Con siete cuadrados puedes formar un heptamino que tiene un «agujero». Encuéntralo. ¿Por qué con menos cuadrados no puede darse esta situación?

Actividad 6.

Trasladar

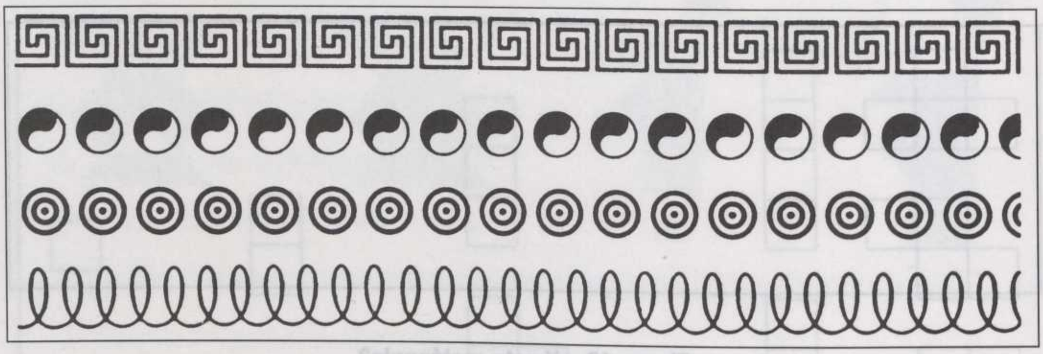


Figura 14. Traslaciones.

Fijada una dirección, un sentido y un módulo queda definida una traslación. Verás traslaciones en los diseños más diversos: la repetición ritmada ha sido siempre un recurso sencillo para crear una armonía a partir de un motivo sencillo.

Descubre

Material: regla y lápiz.

Marca en cada caso (si las hay) las traslaciones presentes *(Figura 15)*.

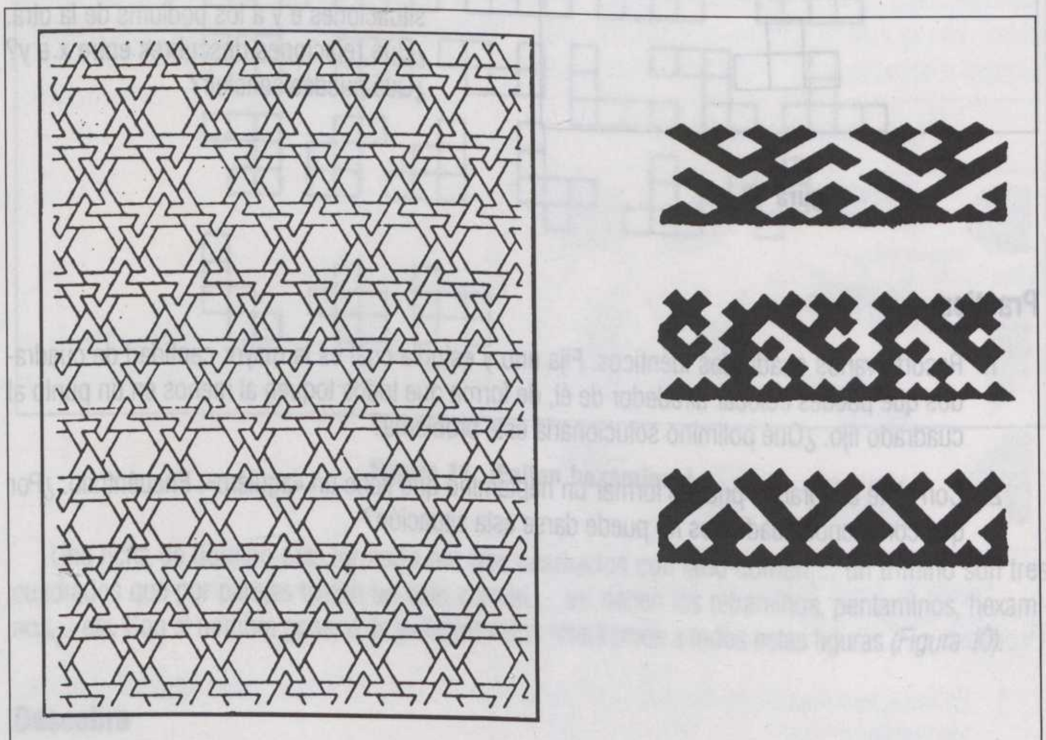


Figura 15. ¿Qué traslaciones?

Calcula

Estos robots combinan tres tipos de traslaciones *(Figura 16).* Si deben desplazarse 30 cm en la dirección X, luego 1 cm en la dirección Y y finalmente 200 mm en la dirección Z, siendo la velocidad de 0,1 m/seg, ¿cuánto tiempo tardarán?

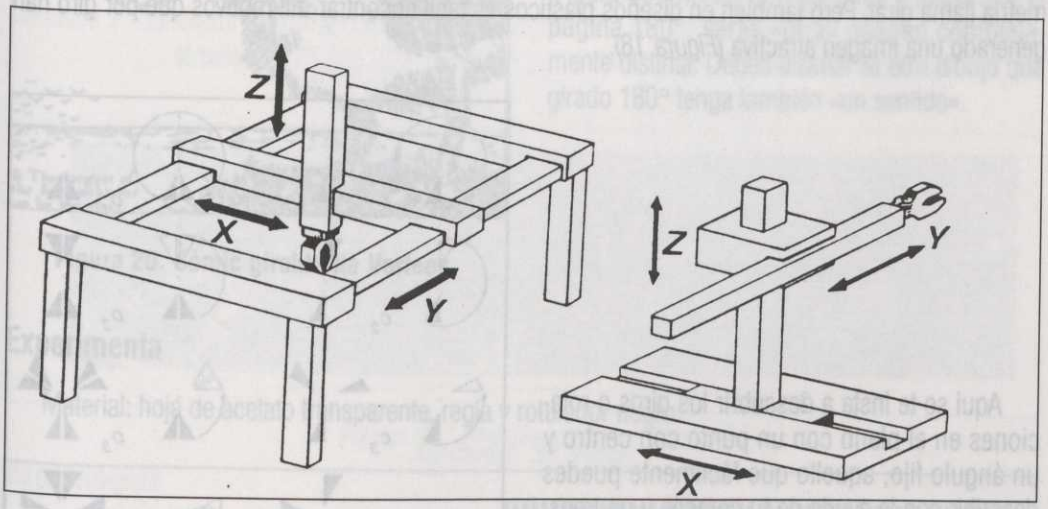


Figura 16. Robots cartesianos.

Figura 17.

Experimenta

Material: 2 espejos.

Pon dos espejos paralelos (mirándose) y perpendiculares a una hoja de papel. Dibuja un motivo. Observa las traslaciones que de él se ven.

Practica

1. Haz una lista de mecanismos cuyo funcionamiento esté ligado a una traslación (ejemplo: gatos de coches,...).
2. ¿Qué ocurre al combinar dos traslaciones?
3. ¿Cómo diseñarías un mecanismo formado por barras de mecano que permitiese trasladar figuras al dibujar?

ACTIVIDAD 7.

Girar

Manecillas en un reloj, ruedas, ventiladores,... un sinfín de instrumentos visualizan lo que la geometría llama girar. Pero también en diseños plásticos es fácil encontrar mil motivos que por giro han generado una imagen atractiva *(Figura 18)*.

Aquí se te insta a descubrir los giros o rotaciones en el plano con un punto con centro y un ángulo fijo, aquello que fácilmente puedes describir con la ayuda de tu compás y un transportador de ángulos.

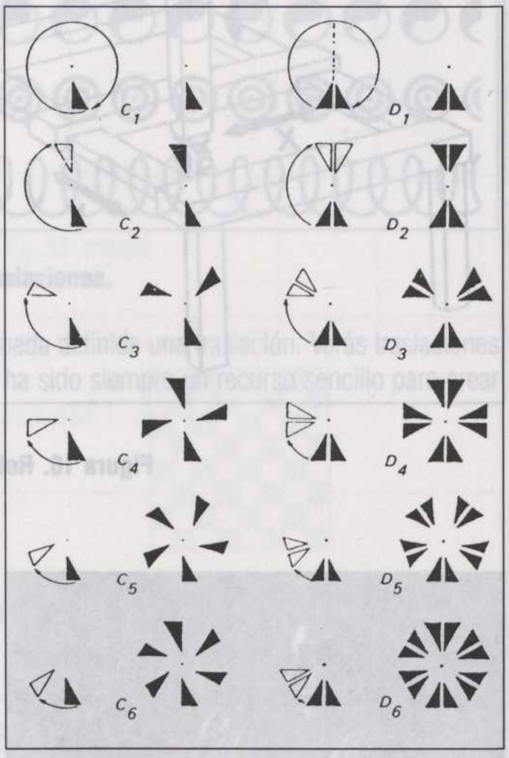


Figura 18. Giros.

Descubre

Material: Dos espejos rectangulares, cinta adhesiva y transportador.

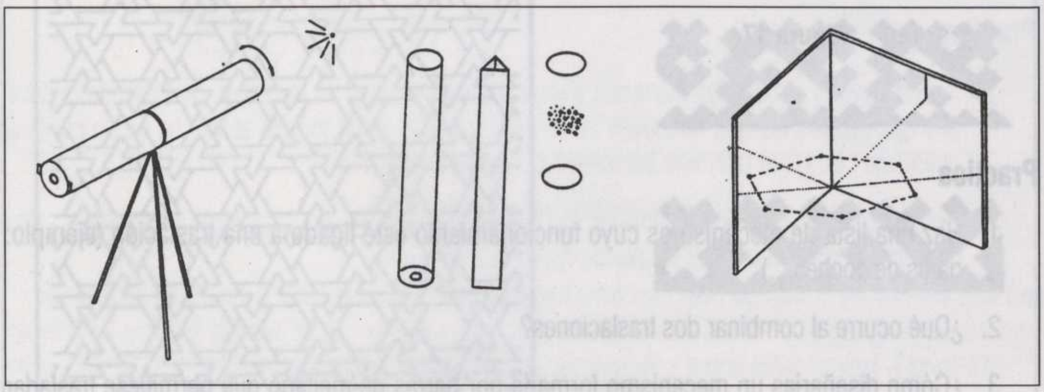


Figura 19. Calidoscopio.

Con los dos espejos forma un calidoscopio (libro de espejos) *(Figura 19)*. Si miras figuras colocadas entre los dos verás como «giran», ¿qué relación tiene el ángulo de los espejos con el número de veces que se repite la figura?

Diseña

Aquí tienes una famosa viñeta de un comic *(Figura 20)*. Mírala normalmente y luego gira la página 180°. Verás «otra» imagen completamente distinta. Debes diseñar tú otro dibujo que girado 180° tenga también «un sentido».

Figura 20. Cómic girable de Verleek.

Experimenta

Material: hoja de acetato transparente, regla y rotulador negro.

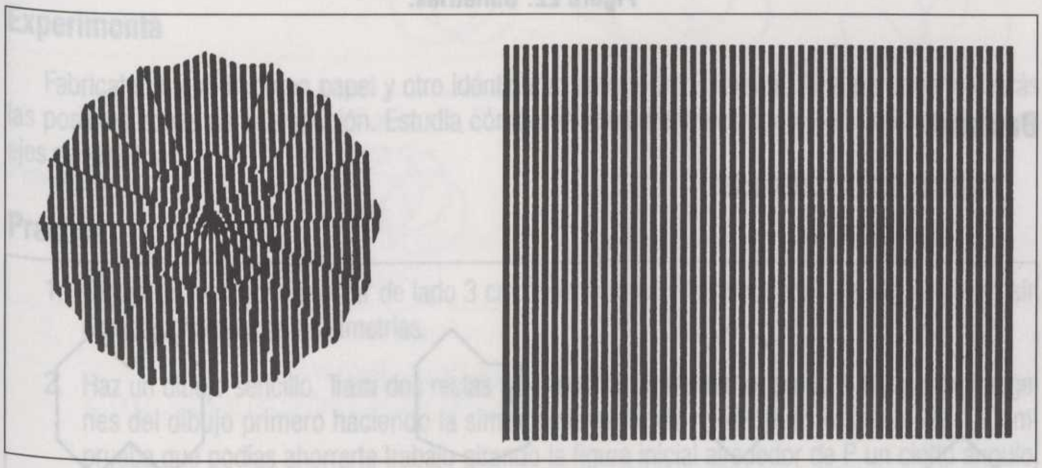


Figura 21. Haz rodar la figura.

Haz en acetato una hoja de barras negras como la presente *(Figura 21)*. Al desplegarla sobre el modelo verás cómo éste gira.

Practica

1. Dibuja un pentágono regular de lado 3 cm y apotema (distancia del centro al punto mitad del lado) 2 cm. Usa el transportador de ángulos, regla y compás y compón el pentágono girando convenientemente un ángulo.

2. ¿Qué ocurre al girar primero un ángulo A alrededor de un punto P y luego girar un ángulo B alrededor de P?

Actividad 8.

Simetrizar

Una simetría o reflexión hace corresponder a cada punto otro equidistante respecto de una recta llamada eje, determinando punto e imagen una perpendicular al eje. Los ejes de simetría se ven en rosetones y plantas, en figuras humanas representadas de frente, en letras de imprenta... y hasta en los capicúas numéricos. Ver ejes de simetría es fácil. Trabajar con ejes es interesante.

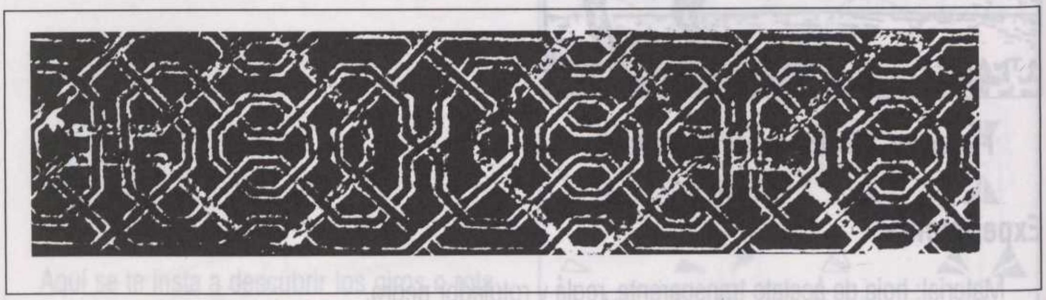


Figura 22. Simetrías.

Descubre

Material: espejo rectangular.

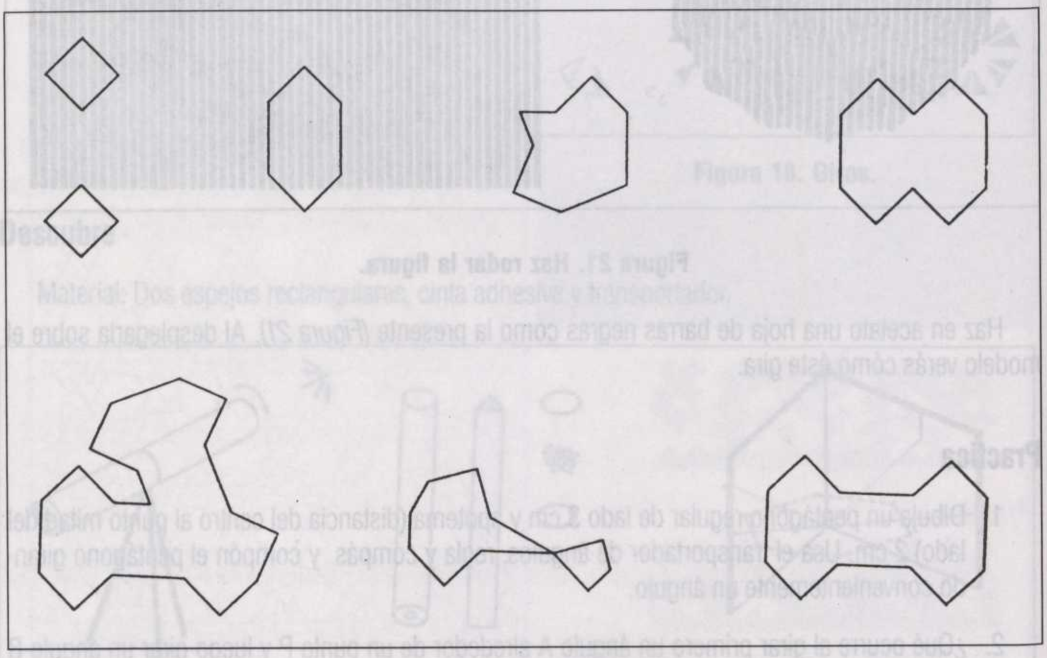


Figura 23. ¿Dónde poner el espejo?

Coloca el espejo verticalmente sobre la figura inicial. ¿Dónde debes colocarlo para ver las otras figuras? *(Figura 23)*.

Dibuja

Dibuja los ejes de simetría que encuentres en estos diseños *(Figura 24)*.

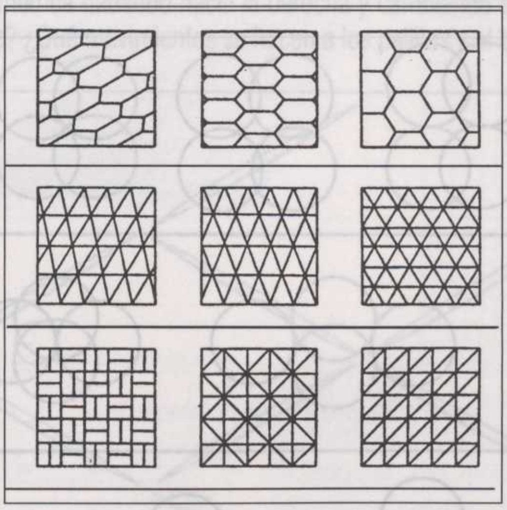


Figura 24. ¿Dónde están los ejes?

Experimenta

Fabrícate un cuadrado en papel y otro idéntico en acetato transparente. Al superponerlos verás las posibles zonas de intersección. Estudia cómo son estas intersecciones y en qué casos tienen ejes de simetría.

Practica

1. Dibuja un hexágono regular de lado 3 cm usando regla y transportador de ángulos pero sin compás. Aprovecha las simetrías.
2. Haz un dibujo sencillo. Traza dos rectas r y r' que se corten en un punto P. Busca las imágenes del dibujo primero haciendo la simetría respecto de r y después respecto de r'. Comprueba que podías ahorrarte trabajo girando la figura inicial alrededor de P un cierto ángulo. ¿Qué relación hay entre este ángulo y el que formaban r y r'?
3. ¿Qué ocurre si haces dos simetrías seguidas respecto de dos rectas paralelas?

ACTIVIDAD 9.

Movimientos en 2D

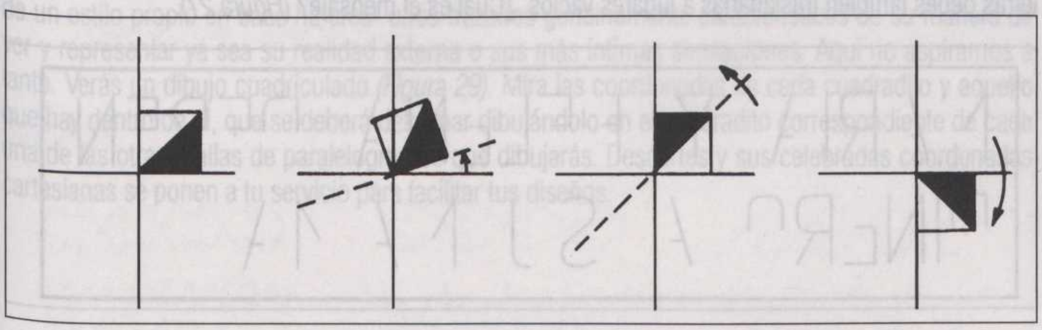


Figura 25. Movimiento en 2D.

Los movimientos en el plano que conservan las distancias y por tanto tamaños, formas, ángulos, paralelismos, etc., son siempre combinaciones de las traslaciones, giros y simetrías que acabamos de visitar. Así a partir de aquí vale cualquier combinación *(Figura 25)*.

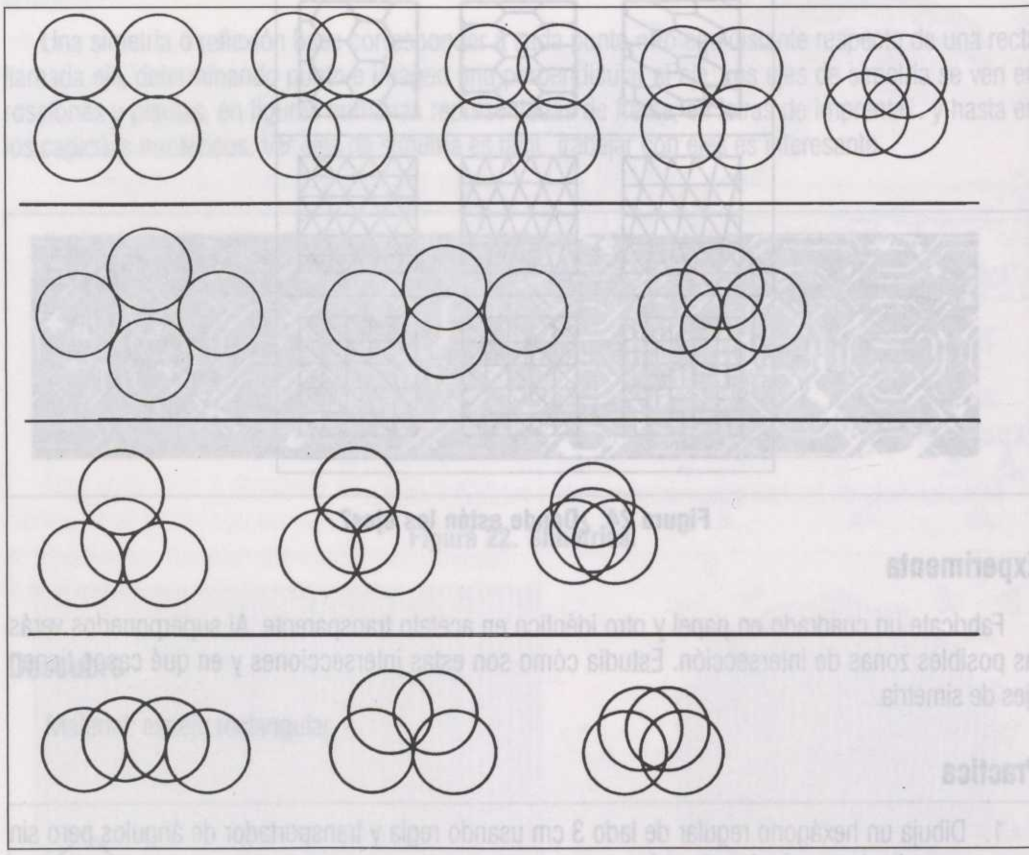


Figura 26. Figuras con 4 círculos.

Descubre

Aquí tienes un bello estudio de diseño con formas obtenidas combinando cuatro círculos *(Figura 26)*. En cada dibujo indica cómo pasas de uno de los círculos a los otros tres (trasladando, girando o simetrizando).

Descubre

A cada trozo de palabra puedes hacerle un giro o una simetría para completar la letra. Algunas letras debes también trasladarlas a lugares vacíos. ¿Cuál es el mensaje? *(Figura 27)*.

Figura 27. ¿Mensaje?

Experimenta

El famoso juego japonés de dar la vuelta al pez consiste en pasar de la figura del pez (8 palillos y un botón) a su imagen simétrica nadando hacia la derecha y cambiando sólo de sitio 3 palillos y el botón. ¿Cómo se resuelve? ¿Qué movimientos se hacen a los palillos y el botón? *(Figura 28)*.

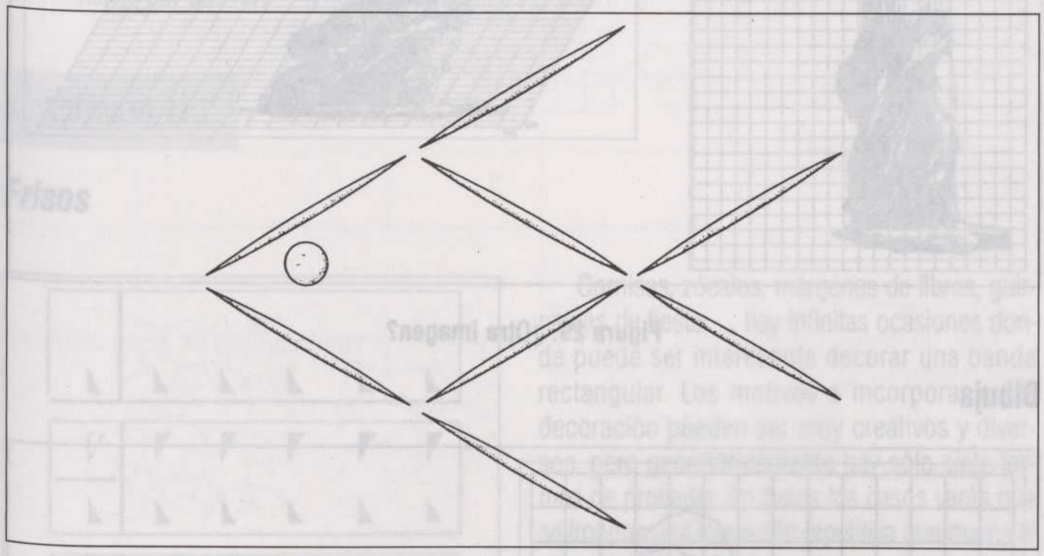


Figura 28. Dar la vuelta al pez.

Practica

1. En una cartulina se recorta un cuadrado. ¿De cuántas maneras podrías volver a poner el cuadrado en el agujero que queda?

2. Un número se dirá girable si tiene un número par de cifras, y sus cifras son 6, 8, 9 ó 0 y girando la primera mitad media vuelta sale la otra mitad. Halla los números girables entre 0 y 10.000. ¿Puede un número girable ser capicúa?, ¿cuándo?

ACTIVIDAD 10.

Mallas creativas

Se te invita a una interesante aventura: descubrir el mundo de transformar imágenes con la ayuda de mallas y coordenadas que guíen tus trazados. Los grandes artistas a menudo se han dotado de un estilo propio en base ha crear unos trazados genuinamente característicos de su manera de ver y representar ya sea su realidad externa o sus más íntimas sensaciones. Aquí no aspiramos a tanto. Verás un dibujo cuadriculado *(Figura 29)*. Mira las coordenadas de cada cuadradito y aquello que hay dentro de él, que se deberá deformar dibujándolo en el cuadradito correspondiente de cada una de las otras mallas de paralelogramos que dibujarás. Descartes y sus celebradas coordenadas cartesianas se ponen a tu servicio para facilitar tus diseños.

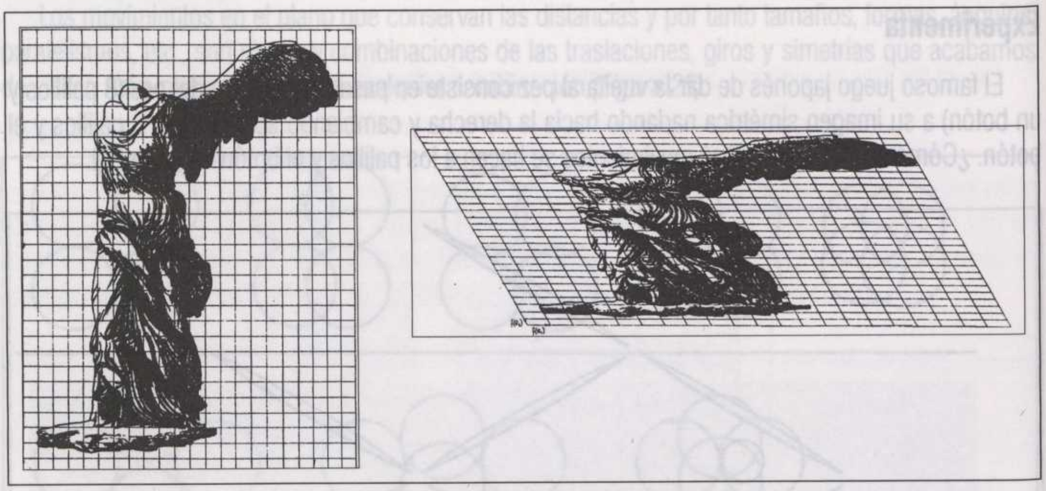


Figura 29. ¿Otra imagen?

Dibuja

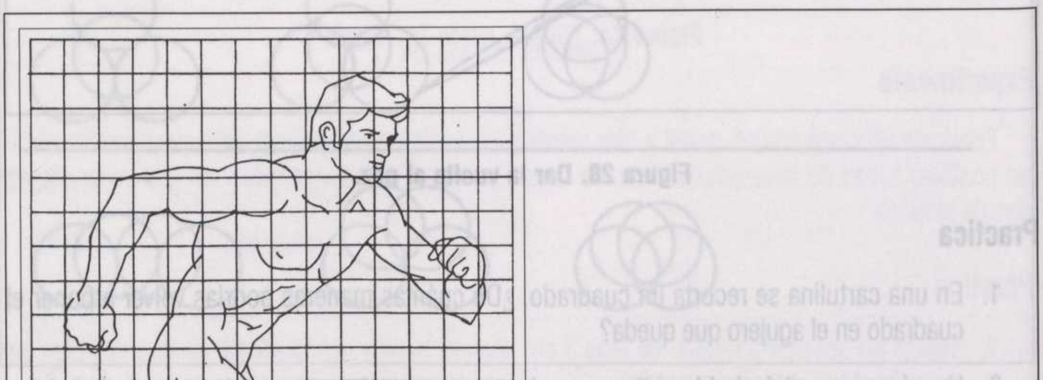


Figura 30. ¡Transforma!

Reflexiona

1. Medita sobre todas las transformaciones que has realizado: ¿qué características de la figura inicial se conservan?, ¿qué cosas cambian?... fíjate bien en longitudes, ángulos, paralelismos, áreas,..., ¿podría ser alguna de las imágenes una ampliación reducción fotocopiada del original?, ¿por qué no?

ACTIVIDAD 11.

Frisos

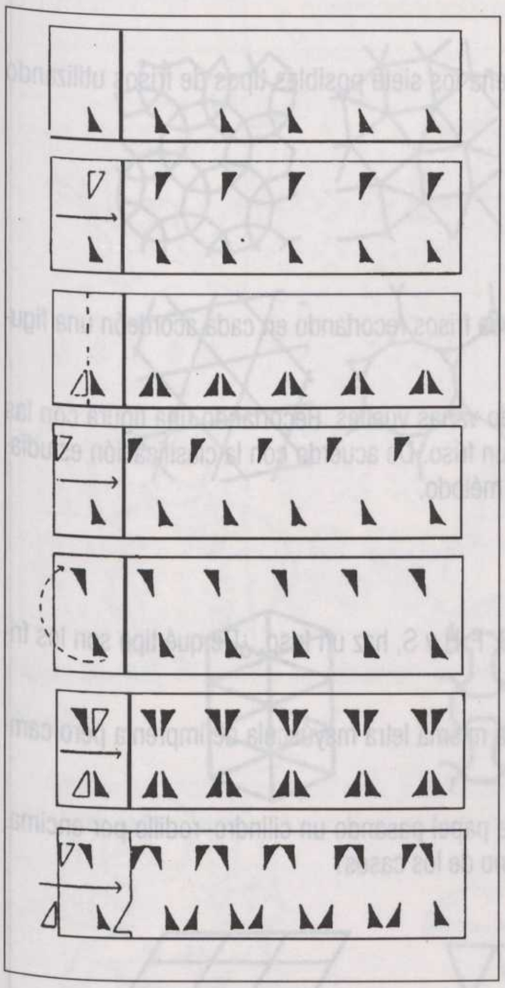


Figura 31. Los 7 tipos de frisos.

Cornisas, zócalos, márgenes de libros, guirnaldas de fiesta,..., hay infinitas ocasiones donde puede ser interesante decorar una banda rectangular. Los motivos a incorporar en la decoración pueden ser muy creativos y diversos, pero geométricamente hay sólo siete formas de proceder. En todos los casos verás que se impone una traslación repetitiva que marca el ritmo del friso y la dirección que subyace a su desarrollo. Pero también pueden aparecer simetrías horizontales, simetrías verticales, giros de 180º o semigiros y reflexiones con desplazamiento de media traslación. En la *Figura 31* tienes los siete esquemas generales donde dichos movimientos se combinan de forma más o menos ingeniosa. Nota cómo toda la cenefa o friso «encaja» consigo misma al aplicar el movimiento correspondiente. Así no importa tanto cómo es el motivo inicial sino cómo lo vamos repitiendo. A partir de hoy los frisos que encontrarás en tu casa, en la calle, en tu jersey o en tus libros, ya los podrás mirar con otros ojos: con la mirada geométrica que te permite ser crítico y creador.

Descubre

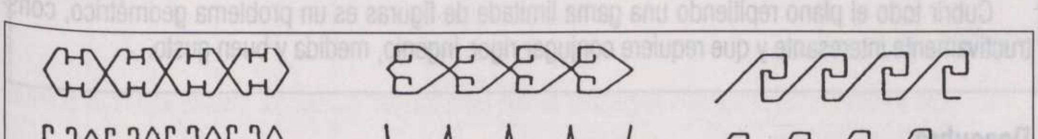


Figura 32. Frisos.

Aquí hay muchos frisos *(Figura 32)*. Escribe en cada caso de qué tipo son respecto de la clasificación vista anteriormente.

Diseña

1		5	
2		6	
3		7	
4			

Elige un motivo (letra, número, dibujo,...). Diseña los siete posibles tipos de frisos utilizando dicho motivo.

Experimenta

Material: Tiras rectangulares de papel y tijeras.

1. Con las tiras de papel forma acordeones. Crea frisos recortando en cada acordeón una figura. ¿Cuántos tipos de frisos crearás así?
2. Con las tiras de papel forma cilindros dando varias vueltas. Recortando una figura con las tijeras al desplegar de nuevo la tira tendrás un friso. De acuerdo con la clasificación estudiada logra siete guirnaldas diferentes por este método.

Practica

1. Con cada una de las letras de imprenta A, B, F, H y S, haz un friso. ¿De qué tipo son los frisos resultantes?
2. Dibuja diferentes tipos de frisos usando una misma letra mayúscula de imprenta pero cambiando la longitud de la traslación repetitiva.
3. Se quieren imprimir frisos sobre bandas de papel pasando un cilindro–rodillo por encima. ¿Cómo prepararías dicho cilindro en cada uno de los casos?

ACTIVIDAD 12.

Mosaicos

Cubrir todo el plano repitiendo una gama limitada de figuras es un problema geométrico, constructivamente interesante y que requiere conjugar rigor, ingenio, medida y buen gusto.

Descubre

Aquí aparecen varias familias de mosaicos (*Figura 33)*. Obsérvalos. Intenta formular una definición de cada uno de ellos y remarcar sus diferencias.

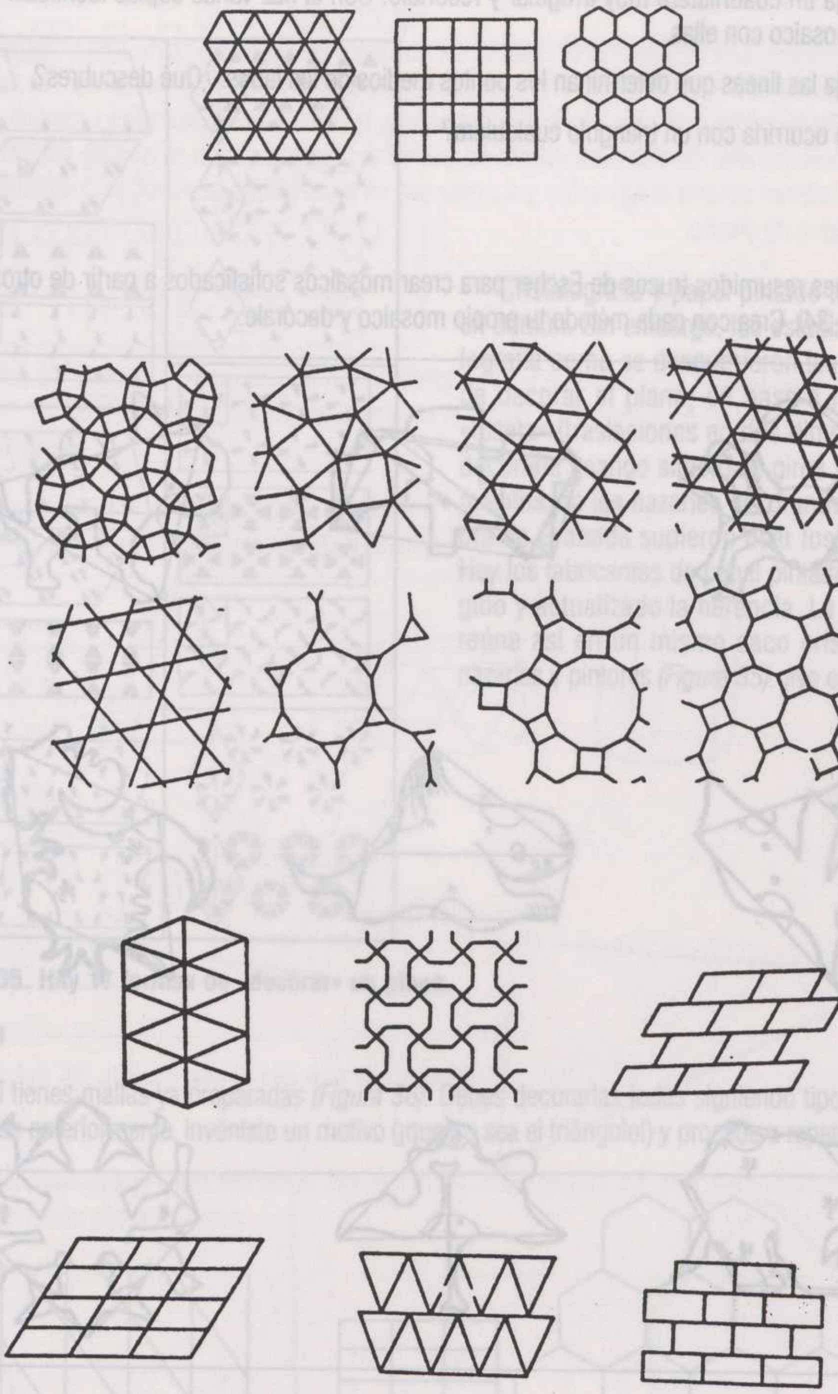


Figura 33. Los 5 mosaicos regulares, los 8 semirregulares y otros.

Experimenta

Material: cartulinas, regla, lápiz y tijeras

1. Dibuja un cuadrilátero muy irregular y recórtalo. Con él haz varias copias idénticas. Forma un mosaico con ellas.
2. Dibuja las líneas que determinan los puntos medios de los lados. ¿Qué descubres?
3. ¿Qué ocurriría con un triángulo cualquiera?

Diseña

Aquí tienes resumidos trucos de Escher para crear mosaicos sofisticados a partir de otros regulares *(Figura 34)*. Crea con cada método tu propio mosaico y decóralo.

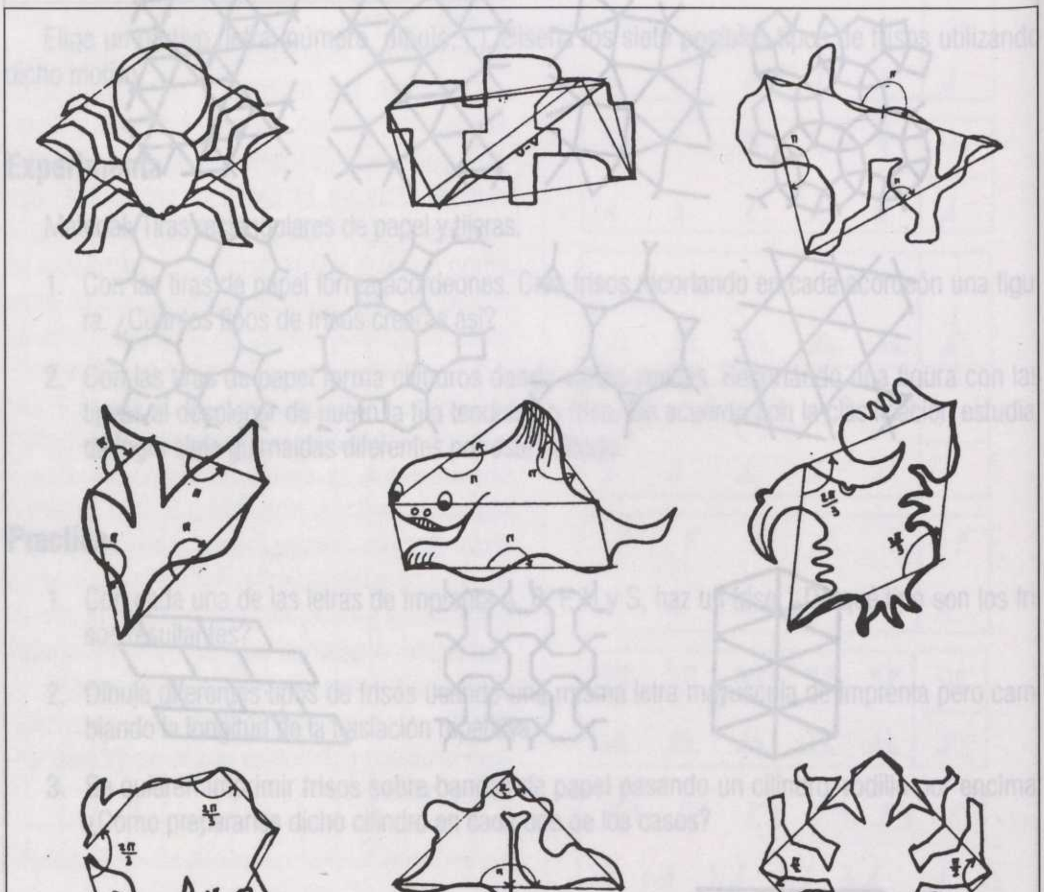


Figura 34. Método escheriano de crear mosaicos.

Practica

1. Sólo tres tipos de polígonos regulares sirven para formar mosaicos. Intenta justificar porqué los otros no sirven.
2. En la familia de pararregulares aparece, por ejemplo, un pentágono (¡no regular!). Describe sus características. ¿Podrías encontrar otro pentágono que sirviera de loseta?

Actividad 13.

Decorando el plano

Cristalografía y papel pintado tienen poco en común. Sin embargo, fue estudiando cristalografía como se descubrieron las 17 formas de decorar el plano, en base a repetir una «loseta» (traslaciones en dos dimensiones) y decorarla usando simetrías, giros y desplazamientos. Ya los nazaríes decorando la Alhambra de Granada supieron usar los 17 trucos. Hoy los fabricantes de papel pintado han recogido y actualizado la herencia. La geometría reúne así en un mismo saco cristalografía, nazaríes y pintores *(Figura 35)*. ¡No está mal!

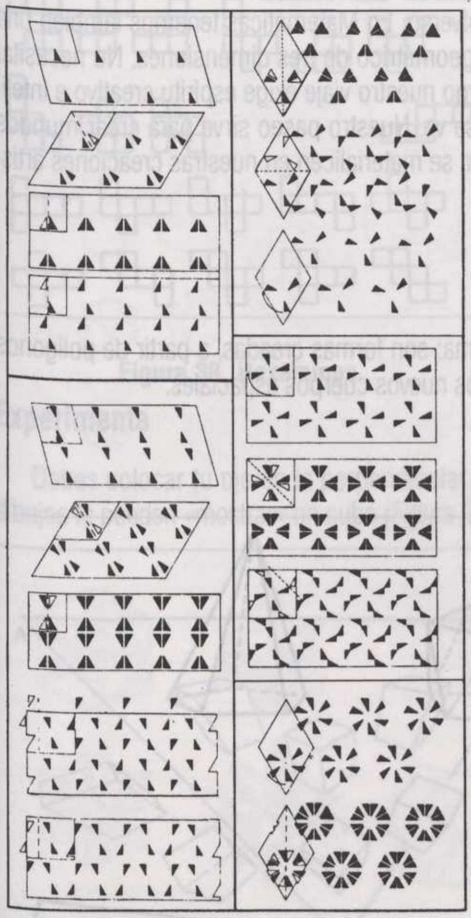


Figura 35. Hay 17 formas de «decorar» un plano.

Diseña

Aquí tienes mallas ya preparadas *(Figura 36)*. Debes decorarlas todas siguiendo tipos de trazados vistos anteriormente. Invéntate un motivo (¡que no sea el triángulo!) y procede a repetirlo.

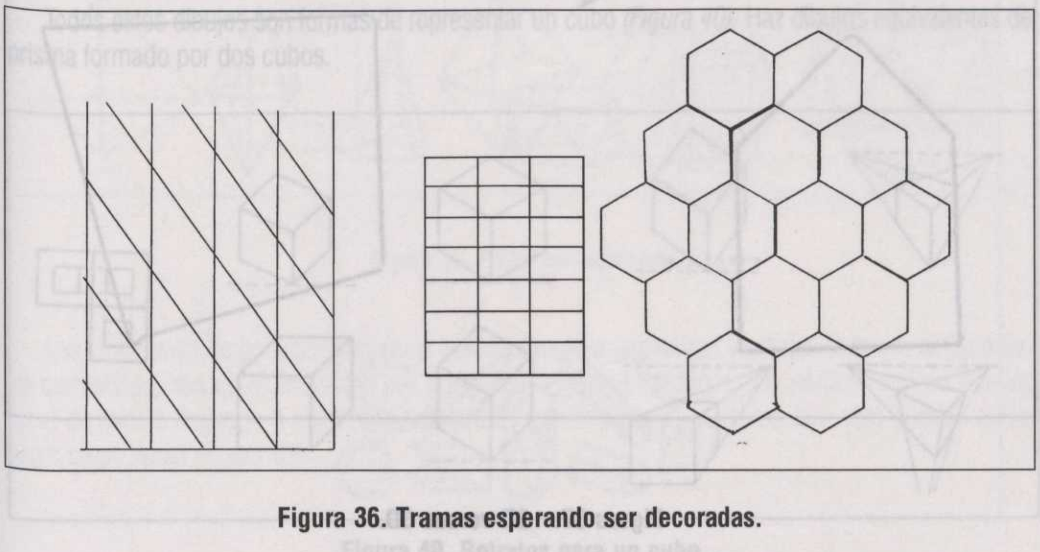


Figura 36. Tramas esperando ser decoradas.

ACTIVIDAD 14.

Explorando el espacio

Los astronautas salen a explorar el espacio del universo. En Matemáticas tenemos también una aventura muy interesante que es explorar el espacio geométrico de tres dimensiones. No necesitamos ni botella de oxígeno, ni traje especial. Sin embargo nuestro viaje exige espíritu creativo e inteligencia. No salimos a la travesía para retratar lo que se ve. Nuestro paseo sirve para crear mundos nuevos que habiten nuestra imaginación y, a poder ser, se materialicen en nuestras creaciones artísticas, técnicas o de diseño.

De 2D a 3D

Aquí tienes un prisma, una pirámide y un antiprisma: son formas creadas, a partir de polígonos *(Figura 37)*. Tienes varios polígonos más: crea con ellos nuevos cuerpos espaciales.

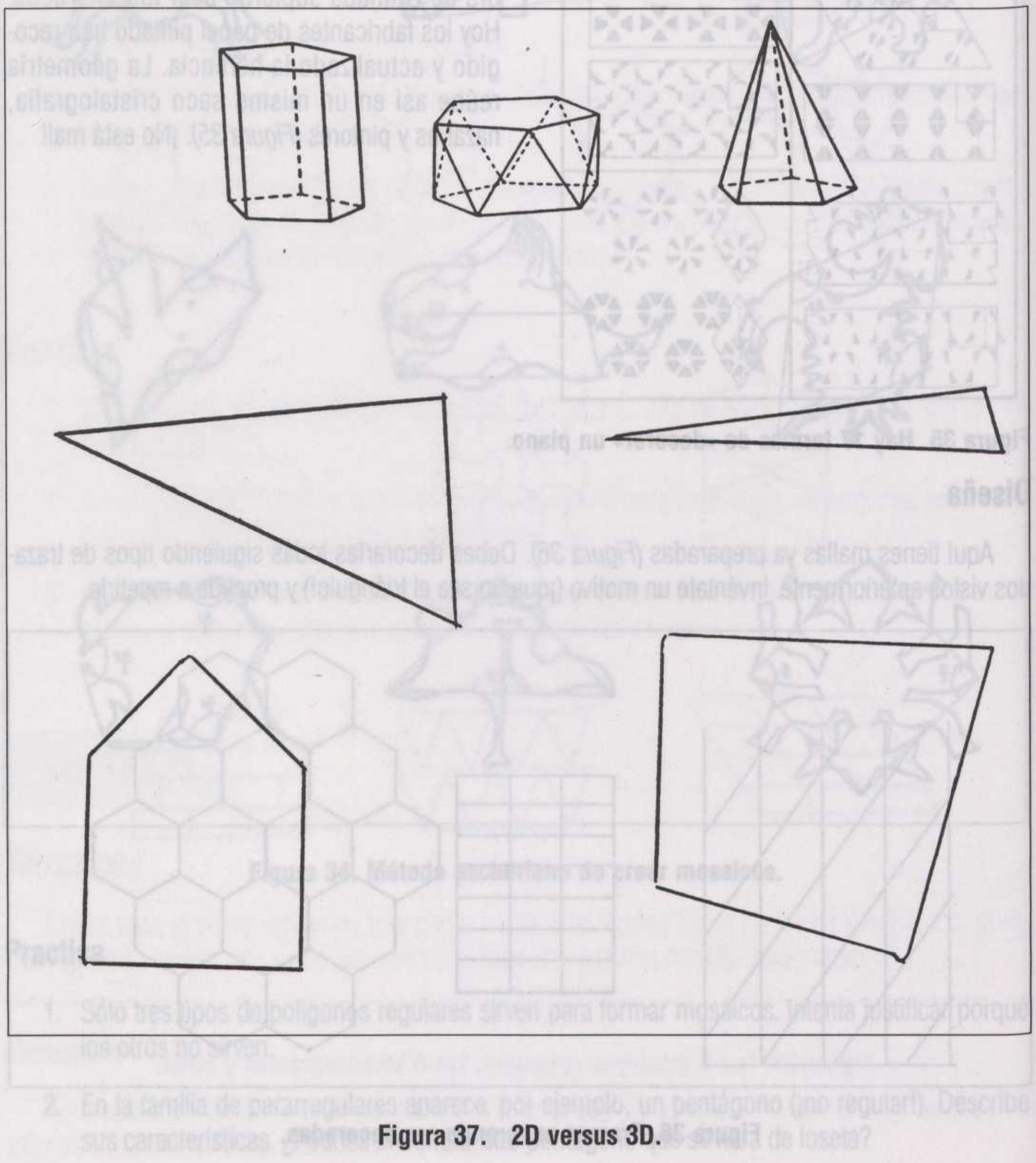
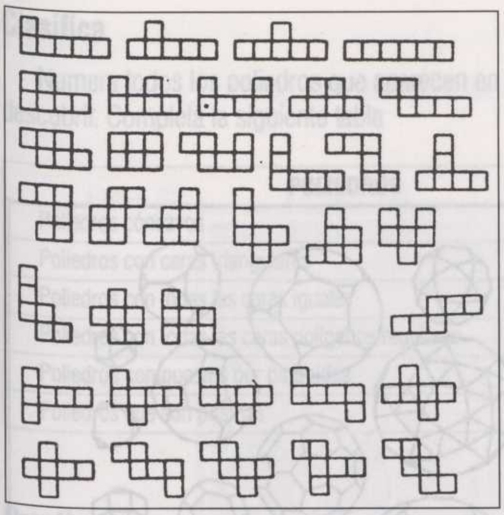


Figura 37. 2D versus 3D.



Aquí tienes todos los posibles hexaminos *(Figura 38)*. Cuéntalos. ¿Cuáles corresponden al desarrollo de un cubo 3D en el plano 2D? Localízalos. Di qué tienen en común.

Figura 38. Hexaminos.

Experimenta

Debes colocar tu ojo en la perpendicular del punto marcado hasta lograr ver que todos estos dibujos te pueden «mostrar» un cubo *(Figura 39)*.

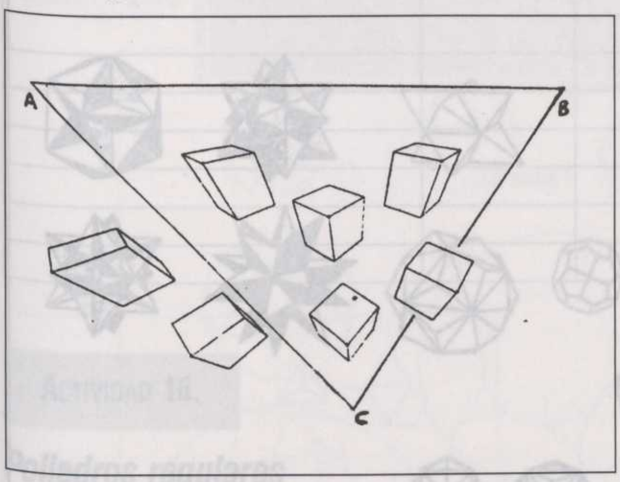


Figura 39. ¿Desde dónde ves que son cubos?

Practica

Todos estos dibujos son formas de representar un cubo *(Figura 40)*. Haz dibujos equivalentes del prisma formado por dos cubos.

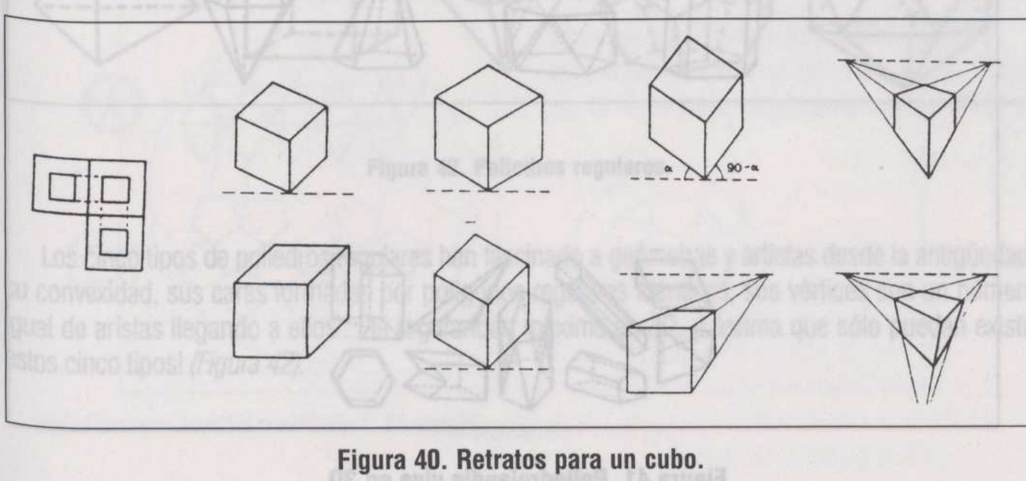


Figura 40. Retratos para un cubo.

Actividad 15.

Poliedrolandia

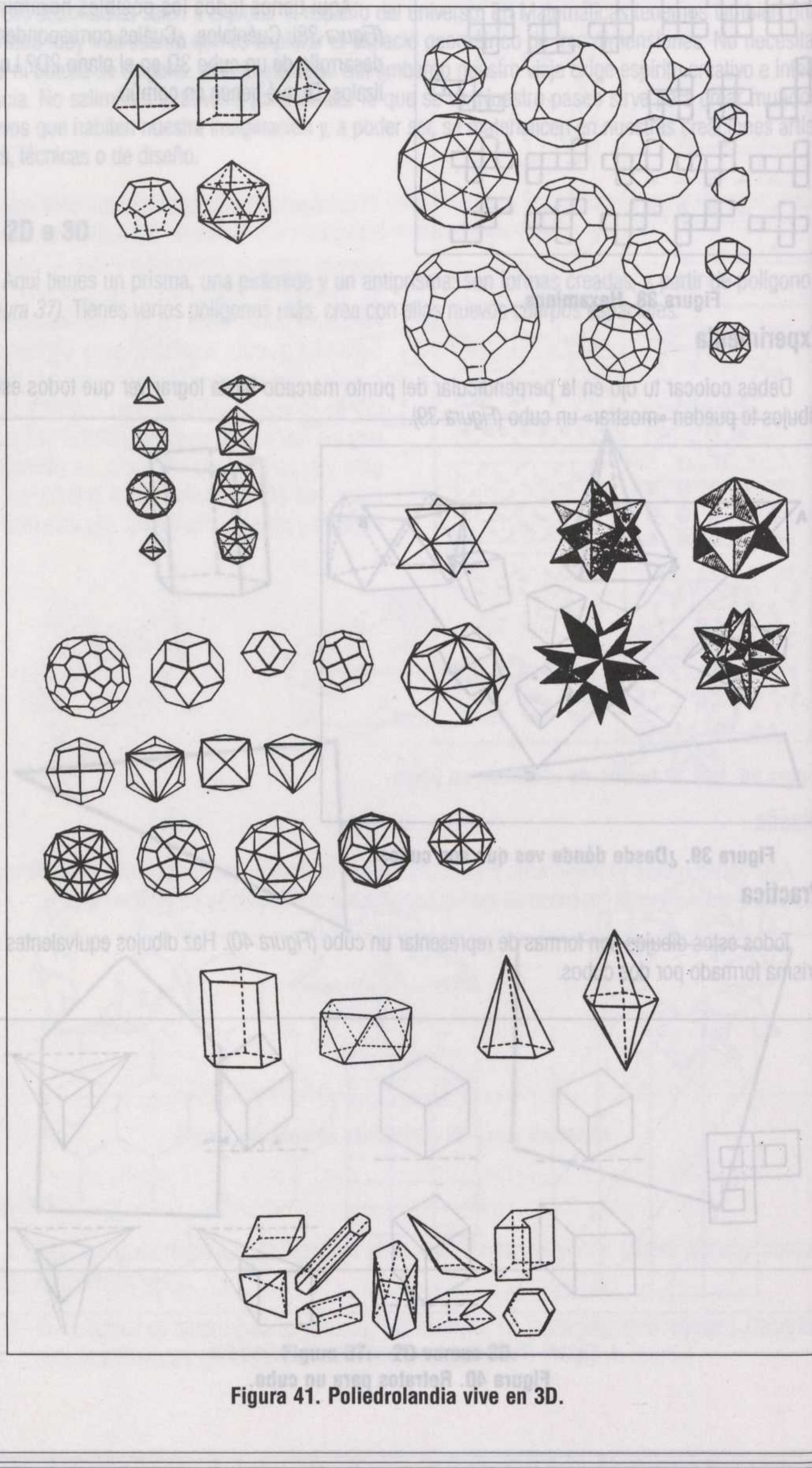


Figura 41. Poliedrolandia vive en 3D.

Clasifica

Numera todos los poliedros que aparecen en la figura anterior evitando repeticiones que deberás descubrir. Completa la siguiente tabla

POLIEDROS	NÚMEROS
Poliedros cóncavos	
Poliedros con caras triangulares	
Poliedros con todas las caras iguales	
Poliedros con todas las caras polígonos regulares	
Poliedros compuestos por pirámides	
Poliedros que son prismas	

Practica

1. Dibuja en un papel desarrollos planos de los poliedros que son pirámides o prismas.
2. Elige ocho poliedros convexos y completa la siguiente tabla. ¿Qué conclusión sacas?

NÚMERO DEL POLIEDRO	CARAS (C)	VÉRTICES (V)	ARISTAS (A)	C+V-A

ACTIVIDAD 16.

Poliedros regulares

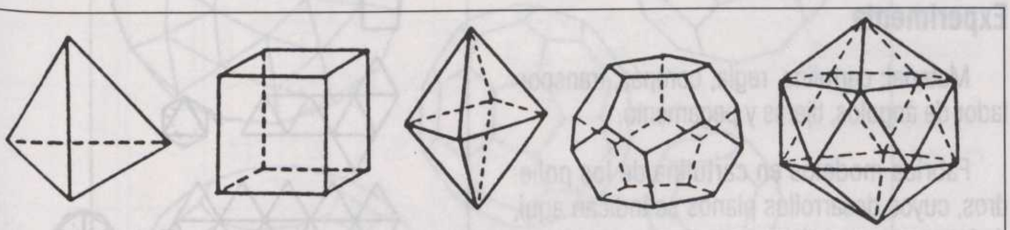


Figura 42. Poliedros regulares.

Los cinco tipos de poliedros regulares han fascinado a geómetras y artistas desde la antigüedad: su convexidad, sus caras formadas por polígonos regulares idénticos, sus vértices con un número igual de aristas llegando a ellos..., la regularidad máxima en 3D. ¡Lástima que sólo puedan existir estos cinco tipos! *(Figura 42)*.

Descubre

Identifica cuáles de las figuras siguientes *(Figura 43)* son poliedros regulares.

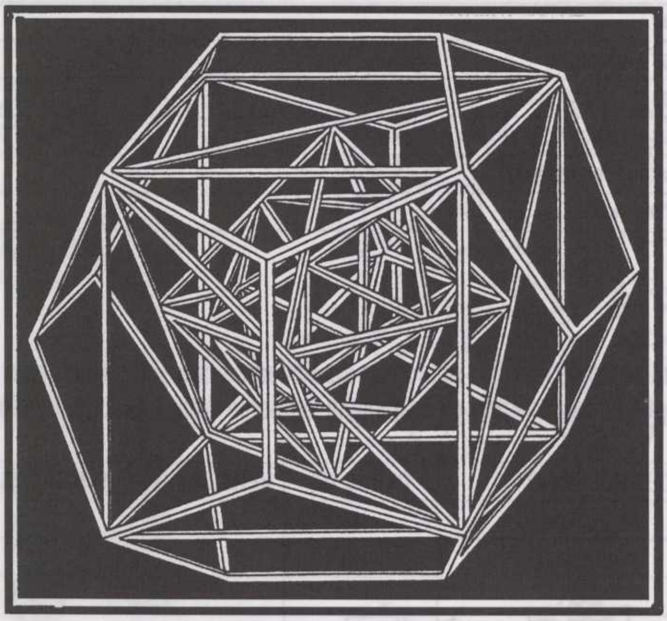


Figura 43.

Experimenta

Material: cartulina, regla, compás, transportador de ángulos, tijeras y pegamento.

Fabrica modelos en cartulina de los poliedros, cuyos desarrollos planos se indican aquí, de forma que sus aristas sean siempre de 10 cm.

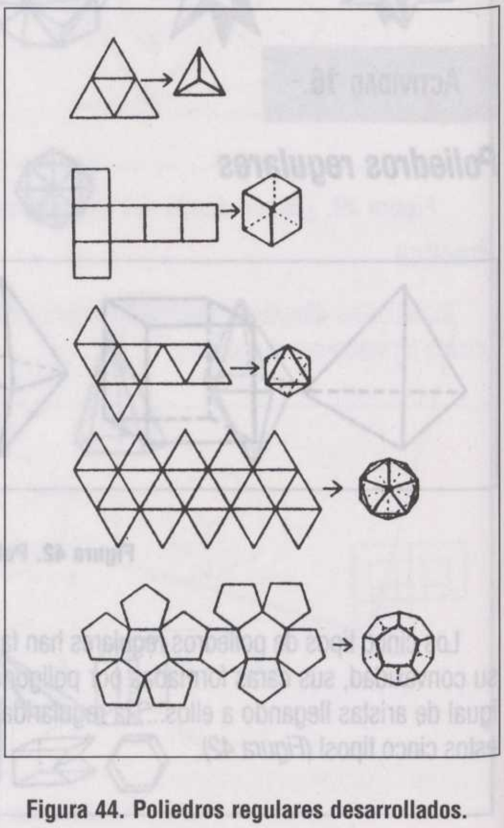


Figura 44. Poliedros regulares desarrollados.

Practica

Completa la siguiente tabla. Analiza posteriormente tus conclusiones.

Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	C+V-A	360°.V-720
Radio esfera circunscrita (R)	**Radio esfera inscrita (r)**	**Ángulo diedro entre dos caras (a)**	**Superficie (S_L)**	**Volumen**

ACTIVIDAD 17.

Poliedros de Arquímedes

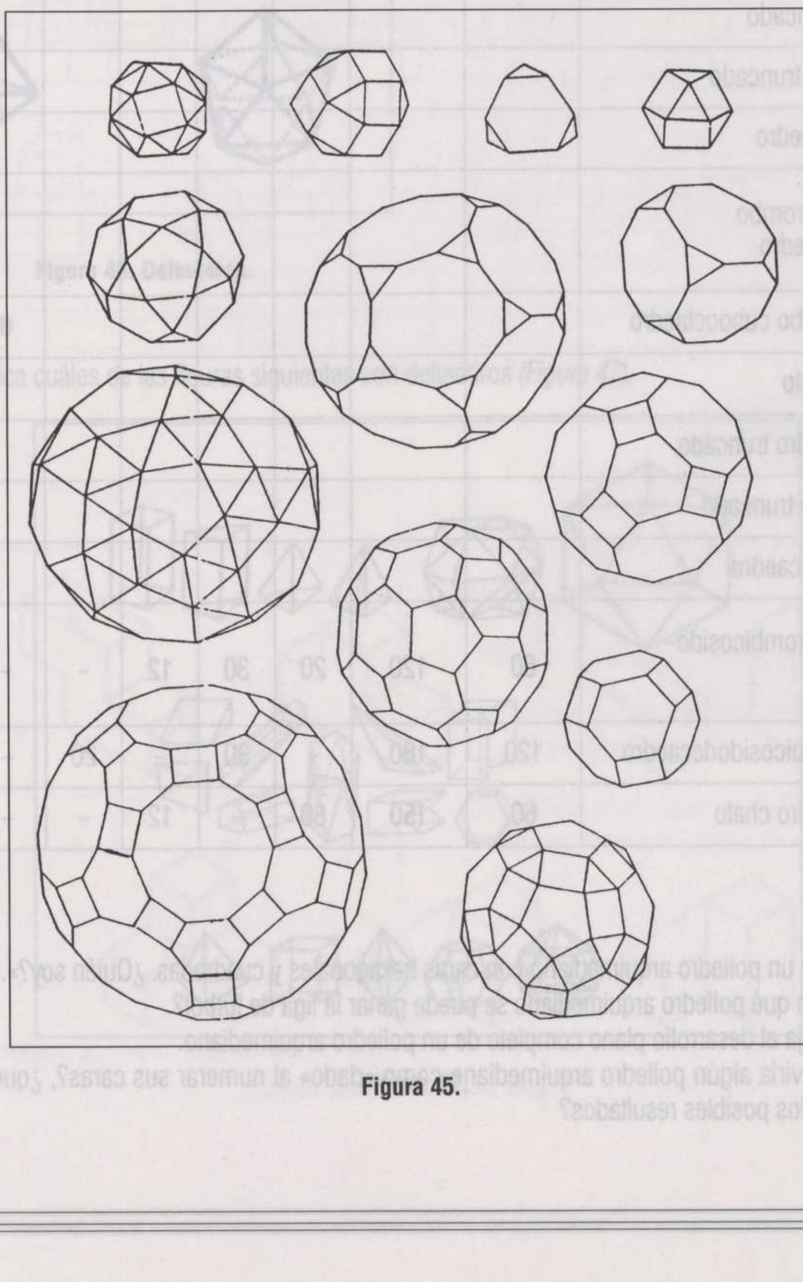


Figura 45.

Aquí tienes los 13 tipos de poliedros de Arquímedes (287-212 a. C.) también llamados semirregulares *(Figura 45)*. Son poliedros convexos donde todas las caras son polígonos regulares y donde, si juntas alrededor de cada vértice los puntos medios de las aristas confluyentes en él, descubrirás siempre un mismo tipo de polígono.

Descubre

¿Cómo diseccionarías un cubo para obtener algunos de los poliedros semirregulares?

Calcula

Identifica los nombres de la siguiente tabla con los de la *Figura 45*.

Completa la tabla. Saca consecuencias.

	NÚMERO VÉRTICES	NÚMERO ARISTAS	NÚMERO DE CARAS SEGÚN SU NÚMERO DE LADOS					
			3	4	5	6	8	10
Tetraedro truncado								
Cubo truncado								
Octaedro truncado								
Cubooctaedro								
Pequeño rombo cubooctaedro								
Gran rombo cubooctaedro								
Cubo chato								
Dodecaedro truncado								
Icosaedro truncado								
Icosidodecaedro								
Pequeño rombicosido-decaedro	60	120	20	30	12	-	-	-
Gran rombicosidodecaedro	120	180	-	30	-	20	-	12
Dodecaedro chato	60	150	80	-	12	-	-	-

Practica

1. «Soy un poliedro arquimediano con caras hexagonales y cuadradas. ¿Quién soy?».
2. ¿Con qué poliedro arquimediano se puede ganar la liga de fútbol?
3. Dibuja el desarrollo plano completo de un poliedro arquimediano.
4. ¿Serviría algún poliedro arquimediano como «dado» al numerar sus caras?, ¿qué ocurriría con los posibles resultados?

ACTIVIDAD 18.

Deltaedros

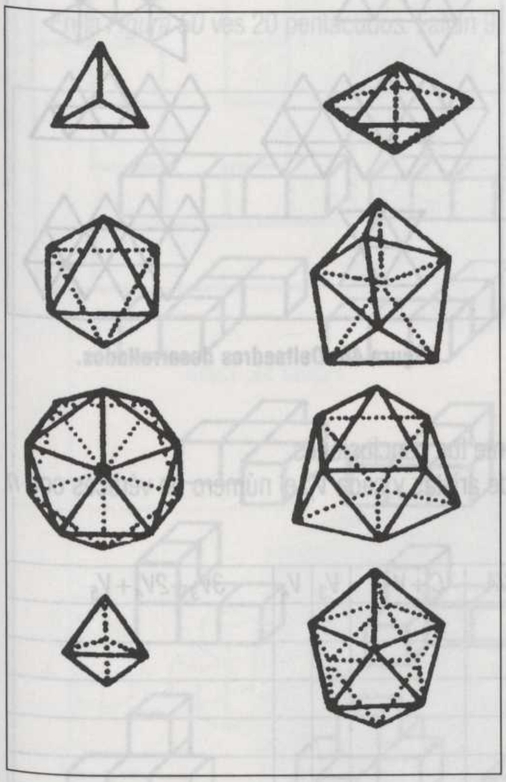


Figura 46. Deltaedros.

Los deltaedros son los poliedros convexos formados por triángulos equiláteros idénticos *(Figura 46)*. La letra griega delta se representaba por un triángulo equilatero Δ y de aquí nació el nombre de estas figuras. Constituyen una pequeña familia de ocho tipos de gran interés estructural al tratarse de figuras rígidas cuando se montan en barras.

Descubre

Identifica cuáles de las figuras siguientes son deltaedros *(Figura 47)*.

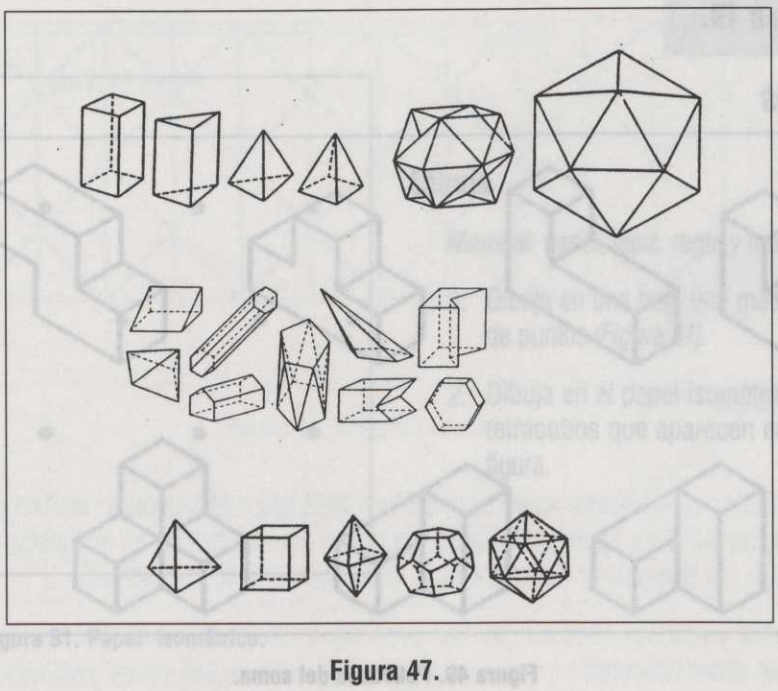


Figura 47.

Experimenta

Material: cartulina, regla, compás, transportador de ángulos, tijeras y pegamento.

Fabrica modelos en cartulina de los poliedros, cuyos desarrollos planos se indican aquí, de forma que sus aristas sean siempre de 10 cm *(Figura 48)*.

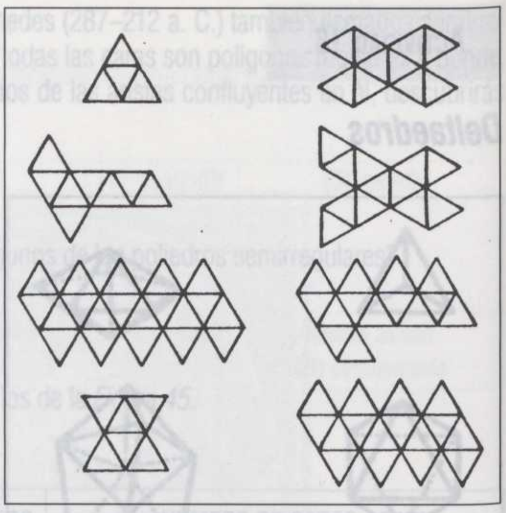


Figura 48. Deltaedros desarrollados.

Practica

Completa la siguiente tabla. Analiza posteriormente tus conclusiones.

C es el número de caras, *V* el de vértices, *A* el de aristas y cada V_n el número de vértices con *n* aristas incidentes.

	C	*V*	*A*	*C/A*	*C+V-A*	V_3	V_4	$3V_3+2V_4+V_5$
Tetraedro								
Octaedro								
Icosaedro								
Dipirámide triangular								
Dipirámide pentagonal								
Dodecadeltaedro								
Tetracaidecadeltaedro								
Exacaidecadeltaedro								

ACTIVIDAD 19.

Policubos

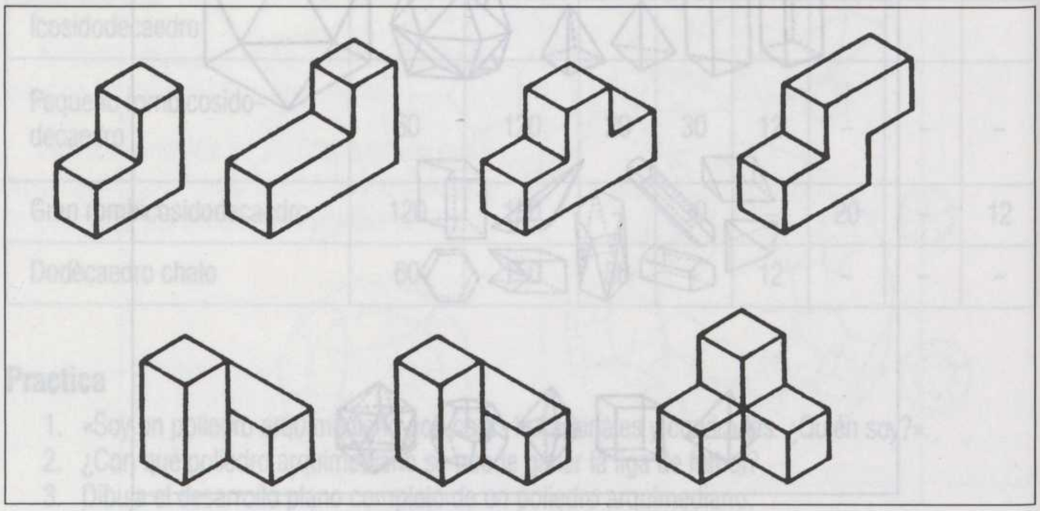


Figura 49. Policubos del soma.

Los cuadrados en el plano forman los polimínos. Los cubos en el espacio forman los policubos *(Figura 49)*. Su simplicidad y belleza justifican su uso.

Descubre

En la *Figura 50* ves 20 pentacubos. Faltan 9. Descúbrelos.

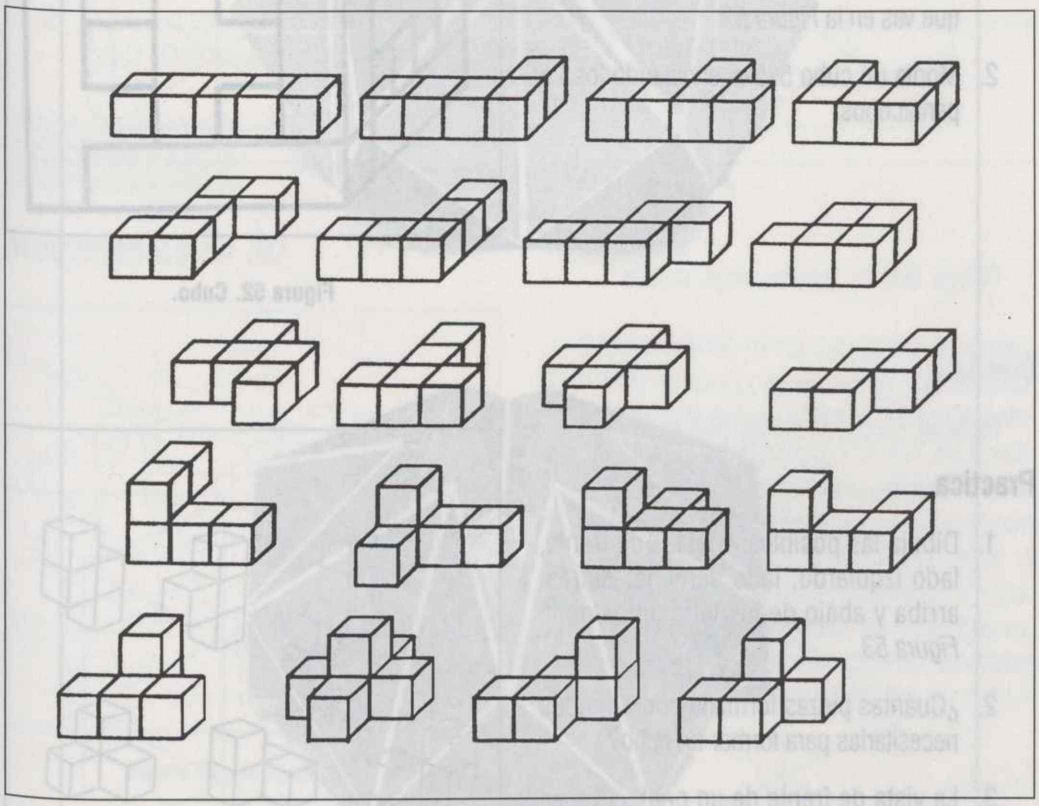


Figura 50. ¡Faltan 9!

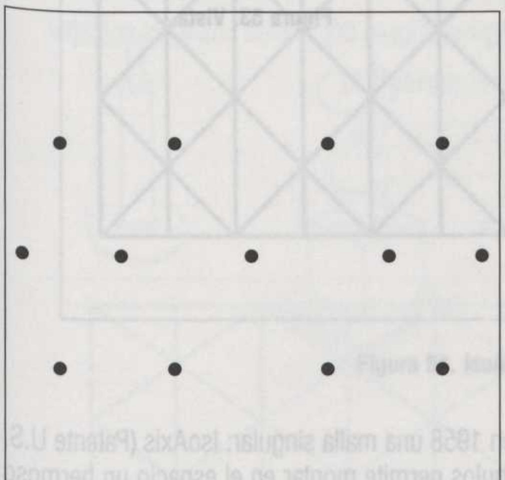


Figura 51. Papel isométrico.

Dibuja

Material: papel, lápiz, regla y transportador.

1. Dibuja en una hoja una malla isométrica de puntos *(Figura 51)*.

2. Dibuja en el papel isométrico todos los tetracubos que aparecen en la primera figura.

Experimenta

Material: centicubos encajables.

1. Forma 25 piezas iguales del pentacubo que ves en la *Figura 52*.
2. Monta un cubo 5x5x5 encajando los 25 pentacubos.

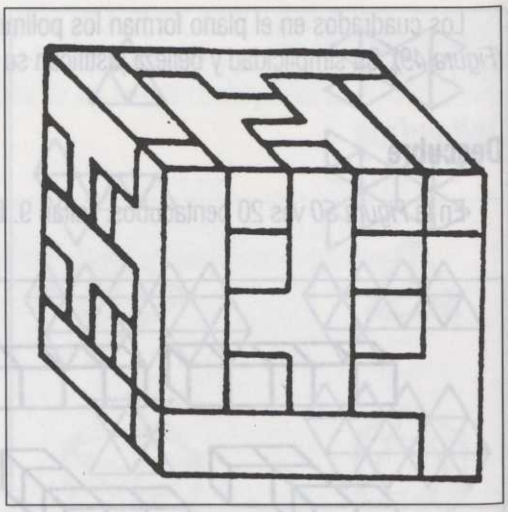


Figura 52. Cubo.

Practica

1. Dibuja las posibles «vistas» de frente, lado izquierdo, lado derecho, detrás, arriba y abajo de los tetracubos de la *Figura 53*.
2. ¿Cuántas piezas formadas por 2 cubos necesitarías para formar un cubo?
3. La vista de frente de un pentacubo es una pieza en forma de L. ¿Cuántos pentacubos ofrecerían esta vista?

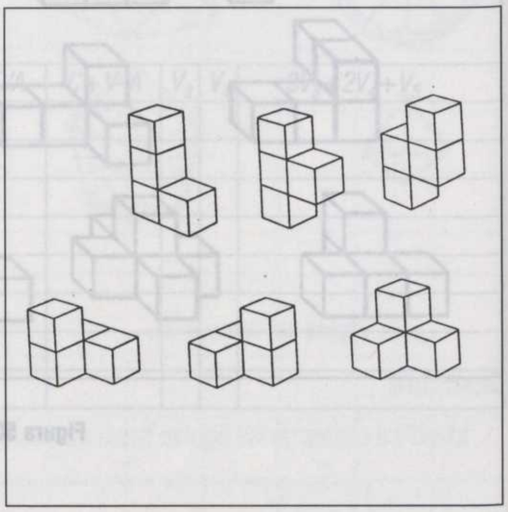


Figura 53. Vista.

ACTIVIDAD 20.

Caleidociclos

Wallace Walker, un diseñador americano, creó en 1958 una malla singular: IsoAxis (Patente U.S. 3302321) *(Figura 54)*. Esta figura plana de 60 triángulos permite montar en el espacio un hermoso poliedro flexible: un caleidociclo (Kalós [bello] + eîdor [forma] + Kyklos [anillo]).

M.C. Escher y muchos otros artistas han decorado y creado nuevos caleidociclos: un mundo fascinante que debes descubrir.

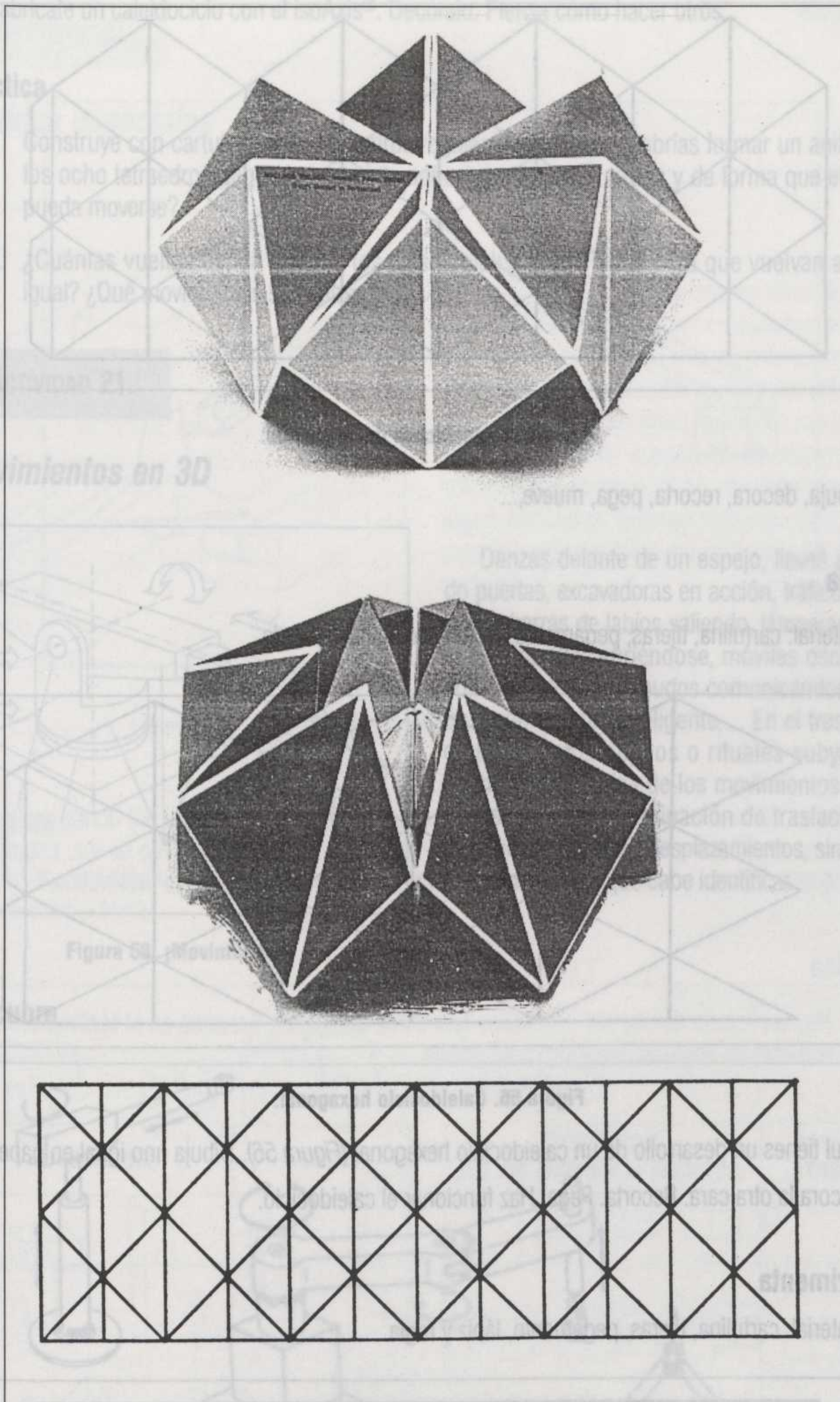


Figura 54. IsoAxis y caleidociclo.

Diseña

Material: cartulina, tijeras, pegamento, lápiz y regla.

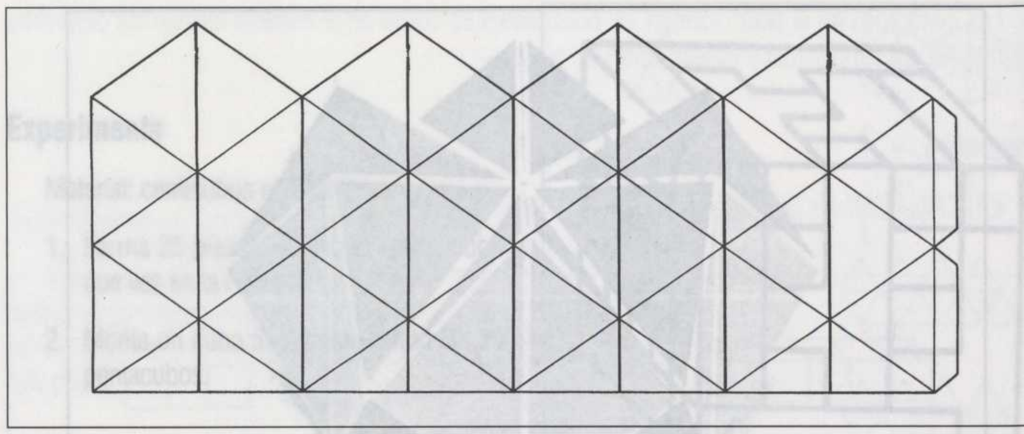


Figura 55. Caleidociclo de cuadrados.

Dibuja, decora, recorta, pega, mueve,...

Diseña

Material: cartulina, tijeras, pegamento, lápices de colores y regla.

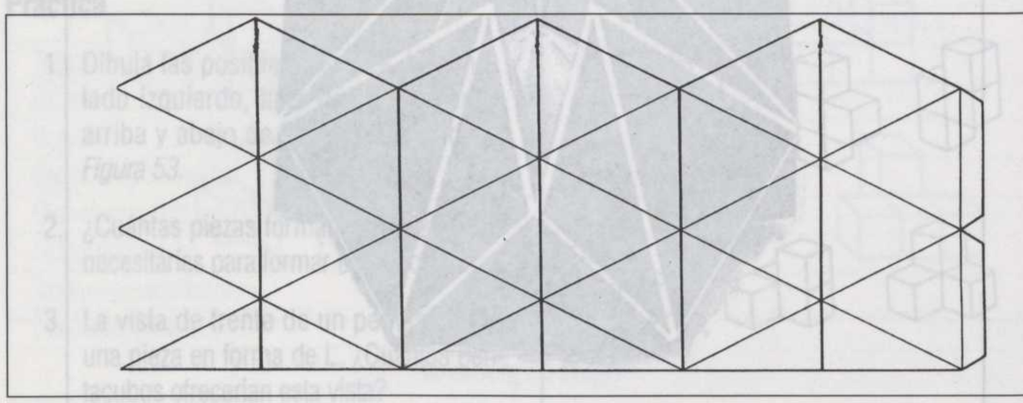


Figura 56. Caleidociclo hexagonal.

Aquí tienes un desarrollo de un caleidociclo hexagonal *(Figura 56)*. Dibuja uno igual en papel. Decora la otra cara. Recorta. Pega. Haz funcionar el caleidociclo.

Experimenta

Material: cartulina, tijeras, pegamento, lápiz y regla.

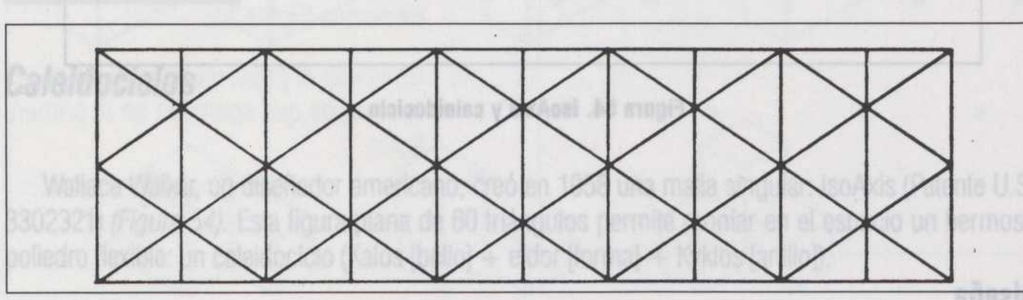


Figura 57.

Fabrícate un caleidociclo con el IsoAxis®. Decóralo. Piensa cómo hacer otros.

Practica

1. Construye con cartulina ocho tetraedros regulares idénticos. ¿Sabrías formar un anillo con los ocho tetraedros pegando con cinta adhesiva sólo ocho aristas y de forma que el anillo pueda moverse?

2. ¿Cuántas vueltas deben darse a los caleidociclos construidos para que vuelvan a verse igual? ¿Qué movimientos se realizan?

Actividad 21.

Movimientos en 3D

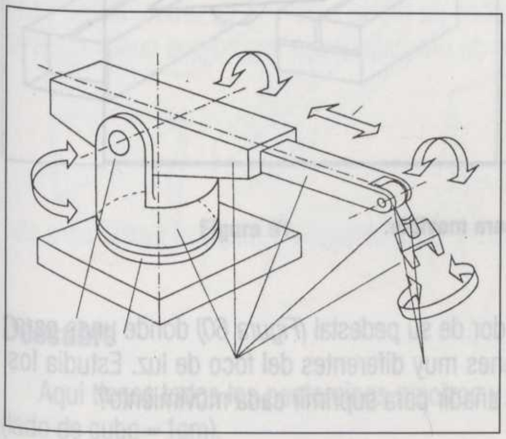


Figura 58. ¡Movimientos!

Danzas delante de un espejo, llaves abriendo puertas, excavadoras en acción, tráfico circulando, barras de labios saliendo, lámparas enfocando, puertas abriéndose, móviles oscilando con el viento, sordomudos comunicándose con un juego manual inteligente,... En el trasfondo de todos estos objetos o rituales subyace la geometría dinámica de los movimientos espaciales, una fina combinación de traslaciones, rotaciones, simetrías, desplazamientos, simetrías rotacionales, etc. que cabe identificar.

Descubre

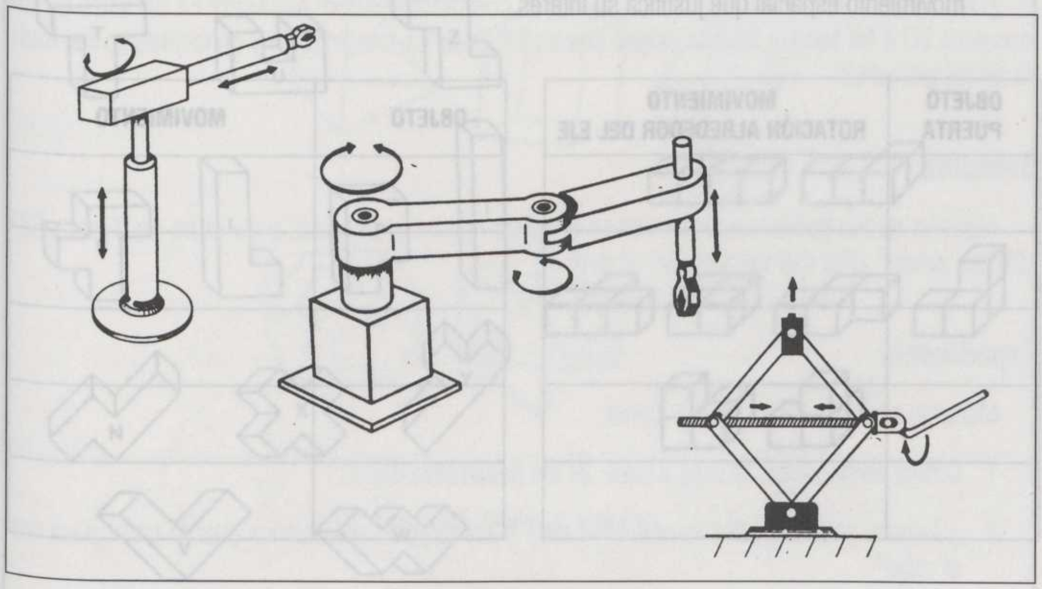


Figura 59. Robots y mecanismos.

Descubre en cada robot o mecanismo *(Figura 59)* los movimientos realizables.

Descubre

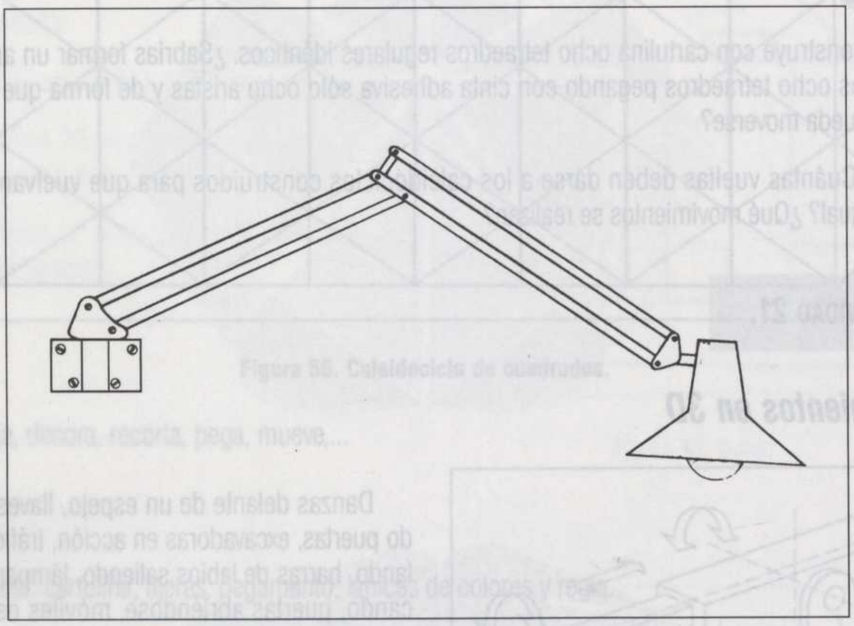


Figura 60. Lámpara movible.

Fíjate en las lámparas de mesa que giran alrededor de su pedestal *(Figura 60)* donde unos paralelogramos metálicos articulados permiten posiciones muy diferentes del foco de luz. Estudia los movimientos posibles y sus ángulos. ¿Qué deberías añadir para suprimir cada movimiento?

Practica

1. Haz un listado de objetos cotidianos que estén diseñados basados en la realización de un movimiento espacial que justifica su interés.

OBJETO PUERTA	MOVIMIENTO ROTACIÓN ALREDEDOR DEL EJE

OBJETO	MOVIMIENTO

ACTIVIDAD 22.

Medidas espaciales

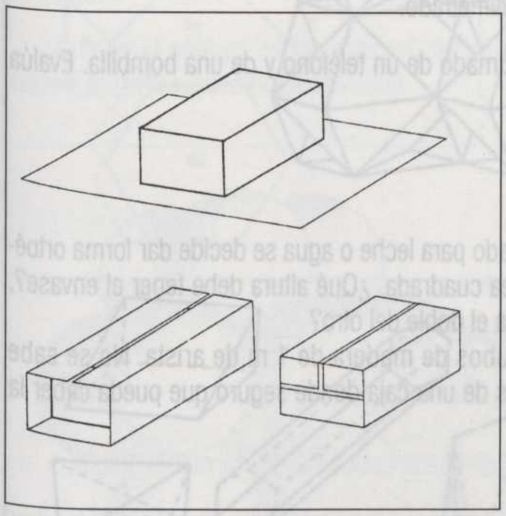


Figura 61.

Un reconocido artista internacional ha realizado curiosas experiencias en escultura efímera al envolver con telas de colores monumentos ya existentes. Matemáticamente, las telas envolventes evalúan las superficies de dichos monumentos. Las medidas espaciales de superficie y volumen requieren técnicas específicas y estrategias concretas. Sólo en algunos casos tenemos maravillosas fórmulas para calcular dichos parámetros.

Descubre

Aquí tienes todos los pentominos macizos y tetracubos *(Figura 62)*. Calcula sus áreas laterales (lado de cubo=1cm).

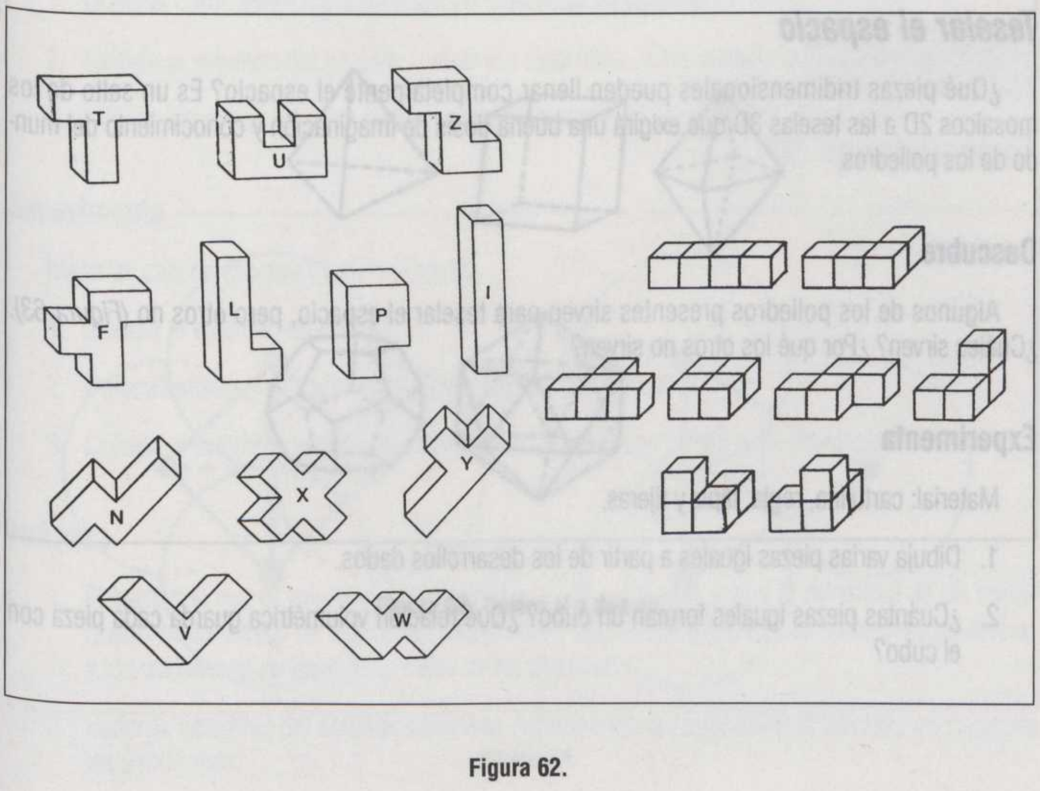


Figura 62.

Experimenta

Material: papel de envolver, papel milimetrado y centicubos.

¿Qué superficie tiene un teléfono?, ¿y una bombilla?

1. Usa papel de envolver y en cada caso recorta el papel necesario para cubrir el cuerpo. Luego evalúa la superficie con la ayuda del papel milimetrado.

2. Usa centicubos para hacer un modelo aproximado de un teléfono y de una bombilla. Evalúa su volumen.

Practica

1. En el diseño de un envase de cartón plastificado para leche o agua se decide dar forma ortoédrica, donde quepa un litro y que la base sea cuadrada. ¿Qué altura debe tener el envase?, ¿y si sólo se fijase que en la base un lado sea el doble del otro?
2. Una escultura se sabe formada por dos cubos de madera de 1 m de arista. No se sabe cómo están enganchados. Calcular los lados de una caja donde seguro que pueda caber la escultura.

Calcula

Calcula el volumen del octaedro regular, el tetraedro y la bipirámide pentagonal (utiliza para ello un papel aparte).

ACTIVIDAD 23.

Teselar el espacio

¿Qué piezas tridimensionales pueden llenar completamente el espacio? Es un salto de los mosaicos 2D a las teselas 3D que exigirá una buena dosis de imaginación y conocimiento del mundo de los poliedros.

Descubre

Algunos de los poliedros presentes sirven para teselar el espacio, pero otros no *(Figura 63)*. ¿Cuáles sirven? ¿Por qué los otros no sirven?

Experimenta

Material: cartulina, regla, lápiz y tijeras.

1. Dibuja varias piezas iguales a partir de los desarrollos dados.

2. ¿Cuántas piezas iguales forman un cubo? ¿Qué relación volumétrica guarda cada pieza con el cubo?

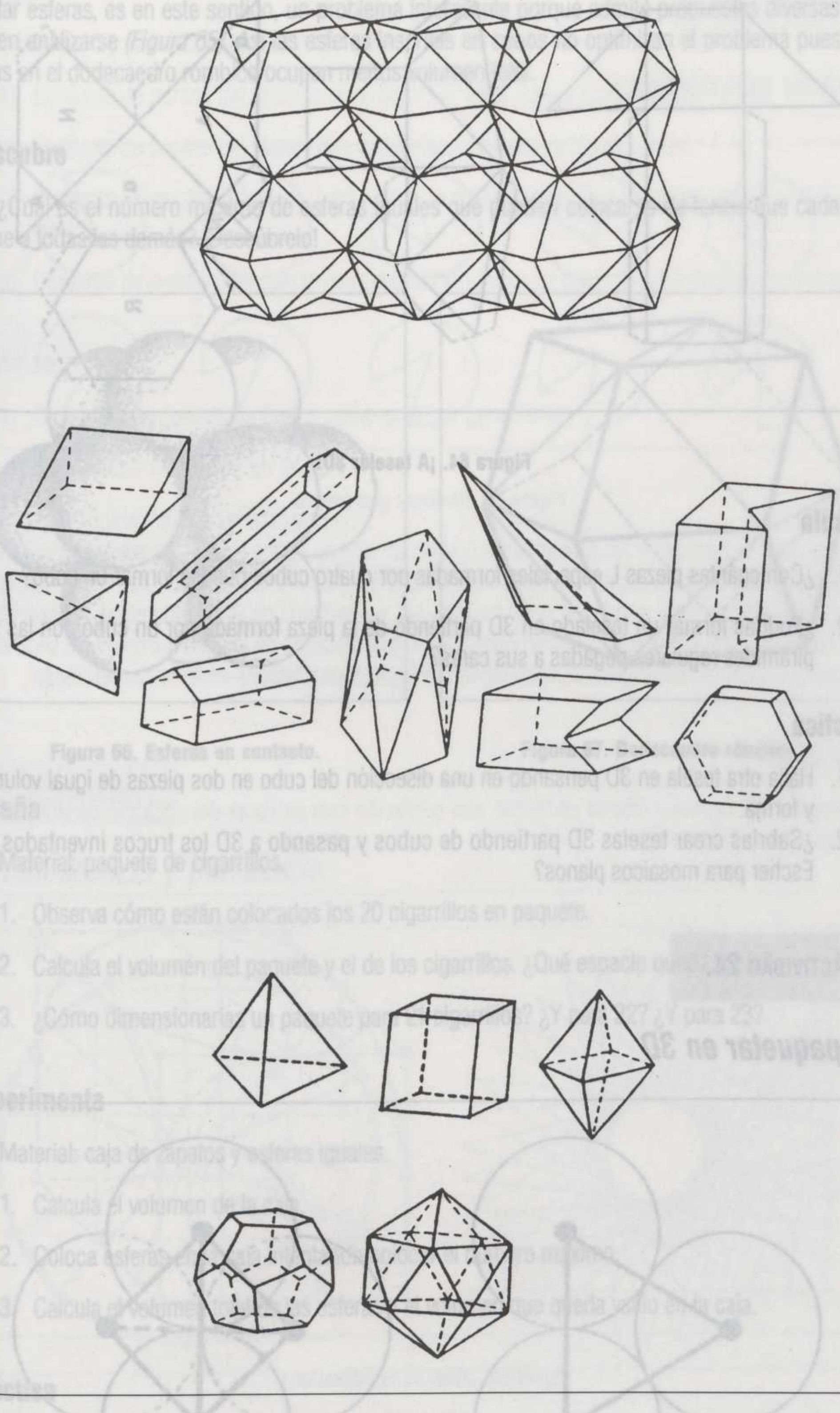


Figura 63. Cuatro sí y dos no.

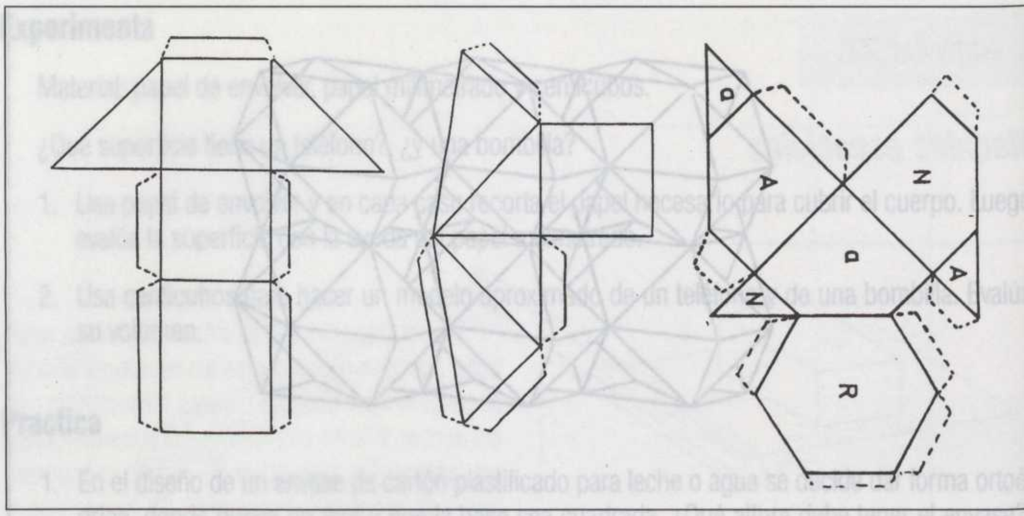


Figura 64. ¡A teselar 3D!

Calcula

1. ¿Con cuántas piezas L espaciales formadas por cuatro cubos puedes formar un cubo?
2. ¿Podrías formar un teselado en 3D partiendo de la pieza formada por un cubo con las seis pirámides regulares pegadas a sus caras?

Práctica

1. Halla otra tesela en 3D pensando en una disección del cubo en dos piezas de igual volumen y forma.
2. ¿Sabrías crear teselas 3D partiendo de cubos y pasando a 3D los trucos inventados por Escher para mosaicos planos?

Actividad 24.

Empaquetar en 3D

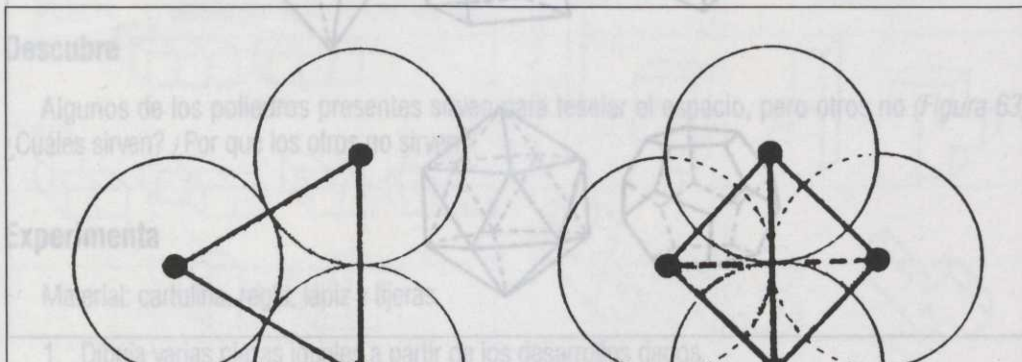


Figura 65.

Empaquetar en 3D es juntar figuras espaciales iguales ocupando un mínimo volumen. Empaquetar esferas, es en este sentido, un problema interesante porque admite propuestas diversas que deben analizarse *(Figura 65)*. Así las esferas inscritas en cubos no optimizan el problema pues inscritas en el dodecaedro rómbico ocupan menos volumen total.

Descubre

¿Cuál es el número máximo de esferas iguales que pueden colocarse de forma que cada una toque a todas las demás? ¡Descúbrelo!

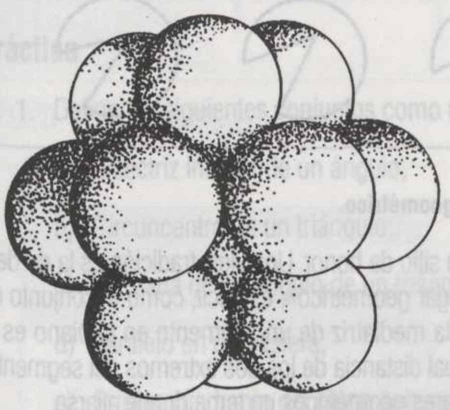


Figura 66. Esferas en contacto.

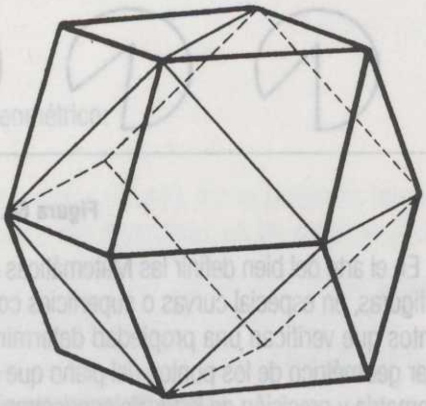


Figura 67. Dodecaedro rómbico.

Diseña

Material: paquete de cigarrillos.

1. Observa cómo están colocados los 20 cigarrillos en paquete.
2. Calcula el volumen del paquete y el de los cigarrillos. ¿Qué espacio queda vacío?
3. ¿Cómo dimensionarías un paquete para 21 cigarrillos? ¿Y para 22? ¿Y para 23?

Experimenta

Material: caja de zapatos y esferas iguales.

1. Calcula el volumen de la caja.
2. Coloca esferas en la caja intentando colocar el número máximo.
3. Calcula el volumen total de las esferas y el volumen que queda vacío en la caja.

Práctica

1. Recordando que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ y que la densidad de un empaquetamiento cúbico de esferas se define como la relación entre los volúmenes de las esferas y los volúmenes de los cubos, hallar dicha densidad.
2. Hallar la densidad del empaquetamiento correspondiente a las esferas inscritas en dodecaedros rómbicos.

ACTIVIDAD 25.

Lugares geométricos

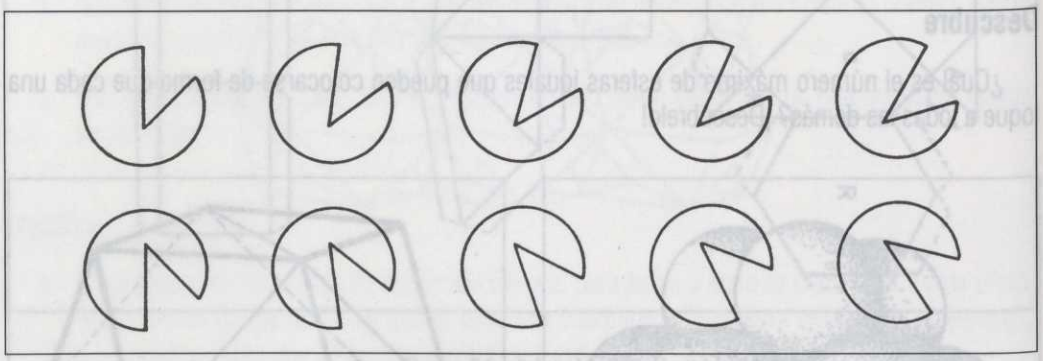


Figura 68. Un lugar geométrico.

En el arte del bien definir las Matemáticas ocupan un sitio de honor. Una vieja tradición es la de definir figuras, en especial curvas o superficies como «un lugar geométrico», es decir, como el conjunto de puntos que verifican una propiedad determinada. Así, la mediatriz de un segmento en el plano es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de los dos extremos del segmento. Geometría y precisión de lenguaje encuentran en los lugares geométricos un tema donde aliarse.

Descubre

Observa las figuras e intenta encontrar una definición con palabras del conjunto de puntos que forman la figura *(Figura 69)*.

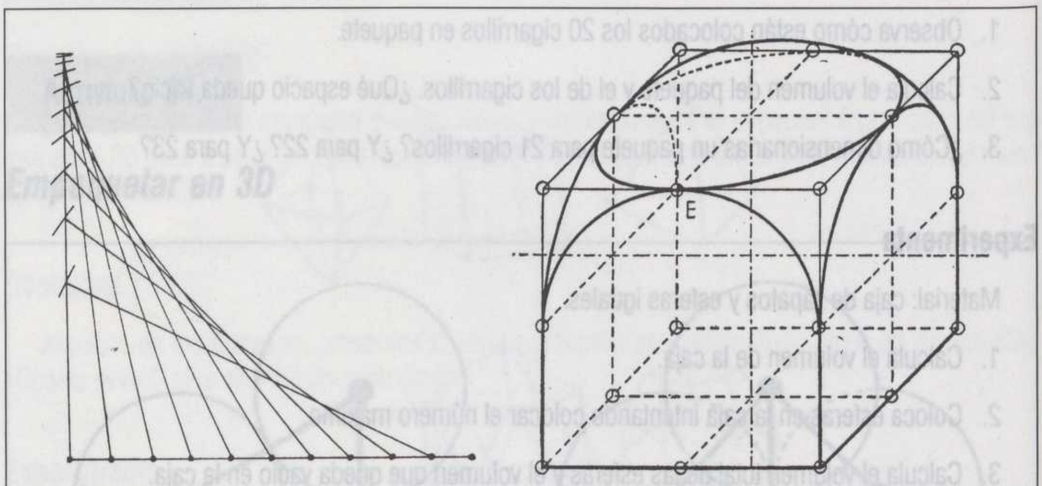


Figura 69. ¿Cuál es la definición?

Experimenta

Material: cinta métrica de 15 m.

Es una labor de la clase en un patio. Una alumna A y un alumno B se colocan a 3 m de distancia. El resto de alumnas y alumnos deben colocarse de forma que su distancia a A sea el doble que la distancia a B. Después del ensayo resolver por dibujo este problema de lugares geométricos.

Dibuja

Dibuja las figuras definidas a continuación:

a) Conjunto de puntos del espacio cuya distancia a los puntos fijos es igual;

b) Conjunto de puntos del plano cuya distancia a una recta dada vale 3 cm;

c) Conjunto de puntos del plano cuya distancia a tres rectas (que se cortan en un punto) es la misma;

d) Conjunto de puntos del espacio cuya proyección sobre un plano es un triángulo determinado.

Práctica

1. Define los siguientes conjuntos como un lugar geométrico:

   a) Bisectriz interior de un ángulo;

   b) Circuncentro de un triángulo;

   c) Mediana de un ángulo de un triángulo;

   d) Paralelo en una esfera;

   e) Primer cuadrante del plano con una referencia ortogonal dibujada.

ACTIVIDAD 26.

Circunferencia y perfección

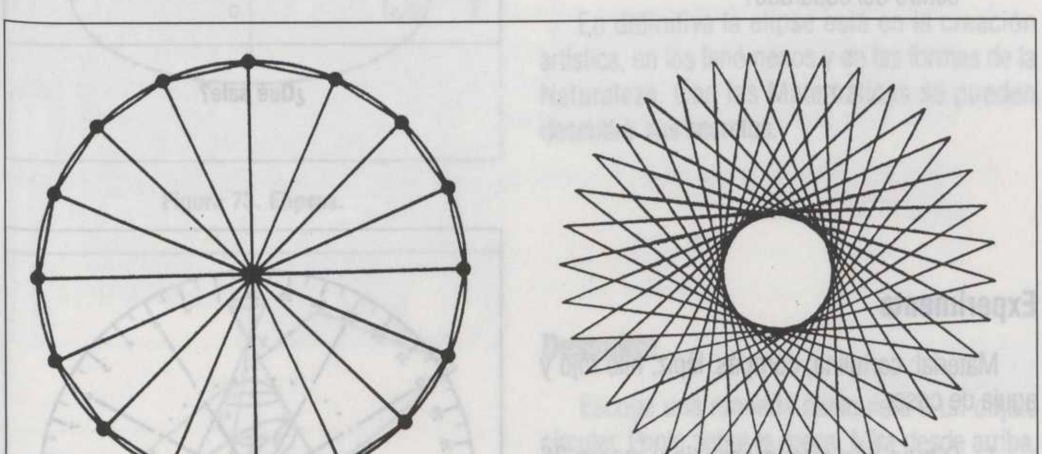


Figura 70.

El compás gira una vuelta completa y nace sobre el papel la más perfecta de las curvas, la que distribuye sus puntos a igual distancia de un centro. Equilibrio, perfecta simetría, límite de polígonos regulares,... una curva presente en las formas naturales, en los fenómenos físicos y omnipresente en la creación artística y de diseño *(Figura 70)*.

Descubre

Descubre en estos trazados de la arquería gótica cómo se dibujaron las circunferencias presentes *(Figura 71)*.

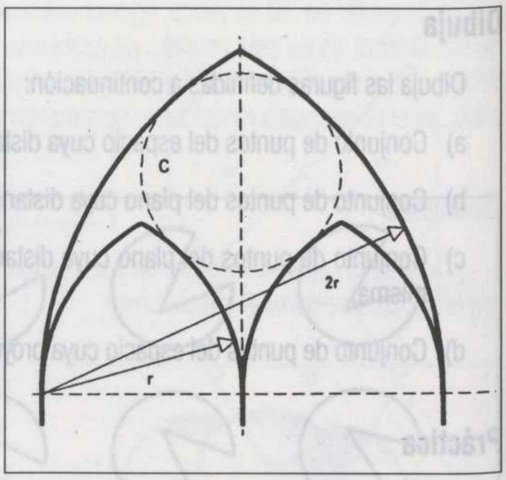


Figura 71.

Dibuja

Material: regla, compás y lápiz.

1. Dibuja un cuadrado y con la regla fija la longitud de una cuerda cualquiera.
2. Dibuja muchas cuerdas de la longitud elegida entre puntos del perímetro del cuadrado.
3. ¿Qué curva aparece aproximada en el centro del cuadrado?

¿Qué sale?

Experimenta

Material: cartulina, compás, lápiz, hilo rojo y aguja de coser.

1. Dibuja una circunferencia y marca 36 puntos de división igual *(Figura 72)*.
2. Coser cada punto con el punto que se encuentra 15 divisiones después.
3. ¿Qué curva aparece en el centro?

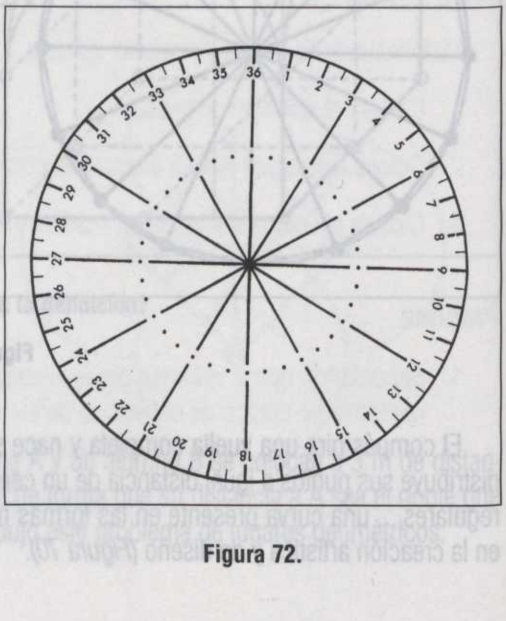


Figura 72.

Practica

1. Con dos círculos idénticos visualiza las ocho maneras diferentes de interrelación: distanciamiento, toque, superposición, penetración, unión, sustracción, intersección y coincidencia. Puedes colocar en negro las ocho figuras representativas de estas situaciones.
2. Haz todos los posibles diseños con cuatro circunferencias idénticas.
3. Dados dos puntos A, B y sólo un compás, lograr marcar puntos alineados con A y B trazando sólo arcos de circunferencias.

ACTIVIDAD 27.

Visita a la elipse

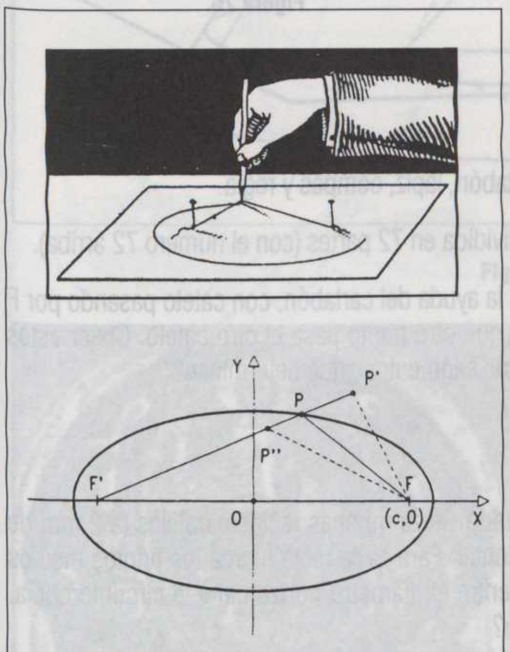


Figura 73. Elipses.

La elipse trazada por el jardinero introduciendo orden geométrico en los setos del jardín.

La elipse de luz que un foco circular proyecta desde el aforo sobre la escena del teatro.

La elipse que describe el planeta en su recorrido anual alrededor del sol.

La elipse que dibuja el artista para dar verosimilitud en el cuadro a lo que en la realidad es una esfera.

La elipse que estudia el matemático como los puntos cuya suma de distancias a dos focos dados es constante.

En definitiva la elipse está en la creación artística, en los fenómenos y en las formas de la Naturaleza. Con las Matemáticas se pueden descubrir sus secretos.

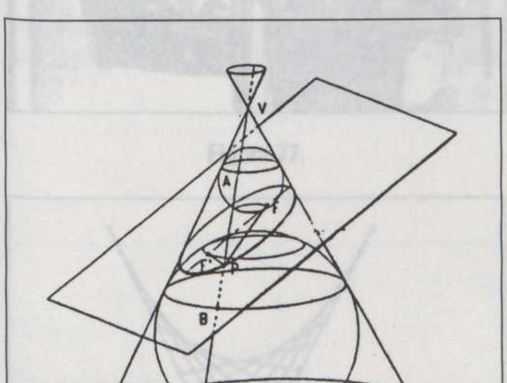


Figura 74.

Descubre

Escoge una moneda cualquiera o un objeto circular. Ponlo sobre la mesa. Mira desde arriba, ve bajando la cabeza en posiciones diferentes. Tu mirada describirá visiones elípticas de la moneda. Aprovecha un foco de luz, analiza las sombras de la moneda. Oscuras elipses desfilarán ante tus ojos.

Dibuja

Dibuja dos ejes numéricos paralelos con las divisiones marcadas.

Traza las rectas que unen cada valor x con el 1/x (5 con 1/5, 4 con 1/4, –3 con –1/3, etc.).

Todas estas rectas son tangentes a una elipse *(Figura 75)*. ¿Cómo afectará la distancia entre los ejes al tamaño de ésta?

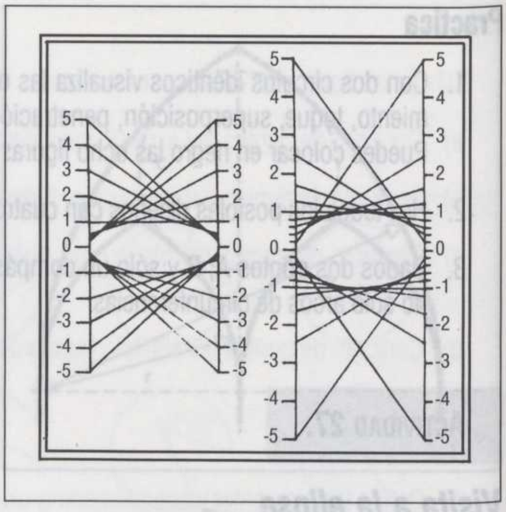


Figura 75.

Experimenta

Material: cartulina, hilo rojo, aguja de coser, cartabón, lápiz, compás y regla.

1. Dibuja en una cartulina una circunferencia dividida en 72 partes (con el número 72 arriba).

2. Marcar un punto F en el eje horizontal y con la ayuda del cartabón, con cateto pasando por F y ángulo recto en un punto, determinar por qué otro punto pasa el otro cateto. Coser estos dos puntos... y así sucesivamente. Todos estos segmentos ¿qué determinan?

Práctica

1. Dibuja una circunferencia en papel milimetrado. Traza muchas rectas paralelas (a 2 mm de distancia) perpendiculares al diámetro horizontal. Para cada recta marca los puntos medios (por arriba y por debajo de este diámetro) entre el diámetro horizontal y la circunferencia. Todos estos puntos medios ¿qué determinan?

2. Dada una elipse de semiejes a y b, ¿cómo se puede hacer un cilindro que tenga por sección plana a dicha elipse?

ACTIVIDAD 28.

Visita a la parábola

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de una recta dada y de un punto fijo llamado foco *(Figura 76)*. Las parábolas están presentes en arcos de arquitectura, en movimientos naturales de trayectorias de cuerpos, en espejos, telescopios y faros de coches,... curvas geométricamente describibles y con propiedades de enorme trascendencia, utilidad y belleza.

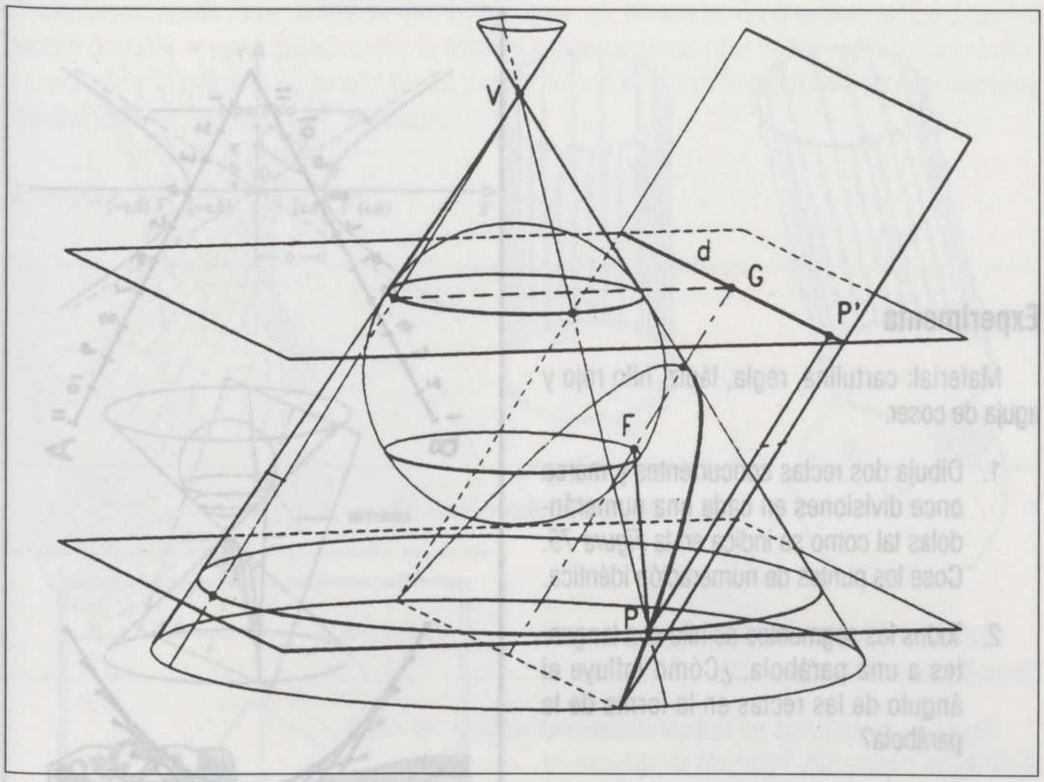


Figura 76.

Figura 77.

Descubre

Esto no es una parábola. ¿Cómo justificas tu respuesta? *(Figura 77)*.

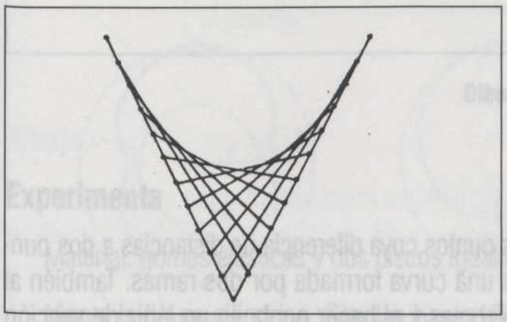


Figura 78.

Dibuja

Material: regla, compás y lápiz.

1. Dibuja una circunferencia C y una recta r.
2. Dibuja circunferencias tangentes a C y a r marcando bien sus centros. ¿Qué curva describen los centros?

Experimenta

Material: cartulina, regla, lápiz, hilo rojo y aguja de coser.

1. Dibuja dos rectas concurrentes y marca once divisiones en cada una numerándolas tal como se indica en la *Figura 79*. Cose los puntos de numeración idéntica.

2. Todos los segmentos de hilo son tangentes a una parábola. ¿Cómo influye el ángulo de las rectas en la forma de la parábola?

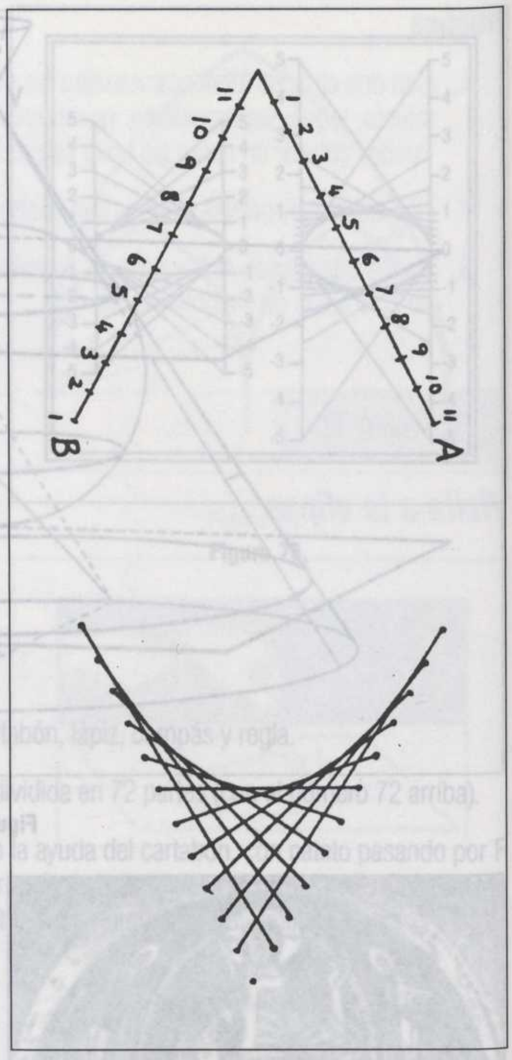


Figura 79.

Practica

1. Con la ayuda de la calculadora gráfica visualiza parábolas usando la expresión $y=ax^2+bx+c$ e intenta ver cómo influyen los valores de a, b y c en la forma de la parábola.

2. Al resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ pueden haber dos soluciones, una o ninguna. ¿Cómo interpretas geométricamente este hecho respecto de la parábola $y=ax^2+bx+c$?

ACTIVIDAD 29.

Visita a la hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos dados (focos) es constante. Así la hipérbola es una curva formada por dos ramas. También al cortar un cono con un plano vertical aparecen hipérbolas y al hacer punta en un lápiz de sección hexagonal verás muchas ramas de hipérbolas *(Figura 80)*: ¡las hipérbolas están servidas!

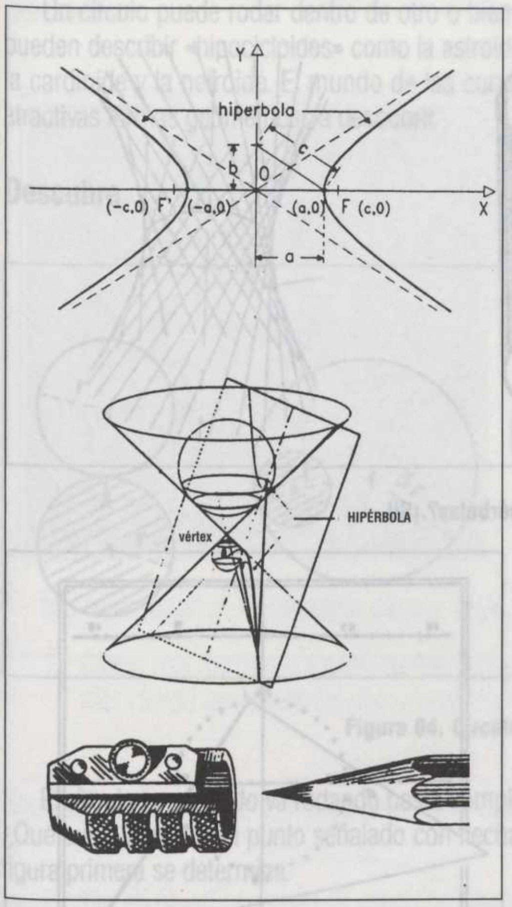


Figura 80. Hipérbolas.

Descubre

Material: papel milimetrado, lápiz y calculadora.

Tienes que fabricar un rectángulo $x \times y$ de papel cuya superficie sea exactamente $x.y = 1\ m^2$. Haz la gráfica que relaciona y con x. Descubrirás una rama de hipérbola.

Dibuja aquí.

Experimenta

Material: gomas elásticas y dos discos iguales con agujeros en el borde.

Monta la figura cilíndrica. Gira las bases. Observa cómo son las superficies que ves. ¿Dónde están las hipérbolas?

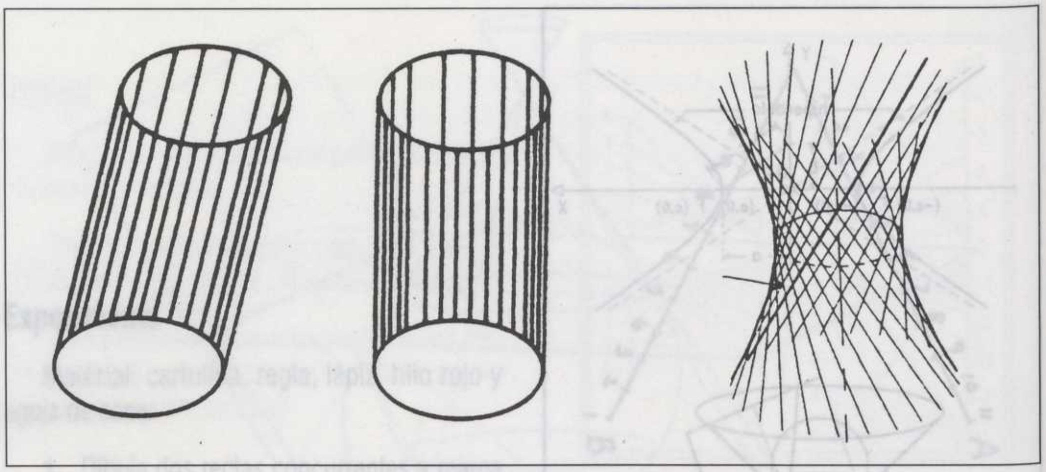


Figura 81. ¿Hipérbolas? ¡Sí!

Material: cartulina, hilo rojo, aguja de coser, cartabón, lápiz, compás y regla.

Dibuja en tu cartulina un esquema como el de la figura *(Figura 82).* Poniendo el cartabón tal como se indica (cateto por F) coser los puntos indicados por el ángulo recto y el otro cateto al pasar por el correspondiente punto en las líneas horizontales. ¿Dónde aparecerán aproximadas las ramas de la hipérbola.

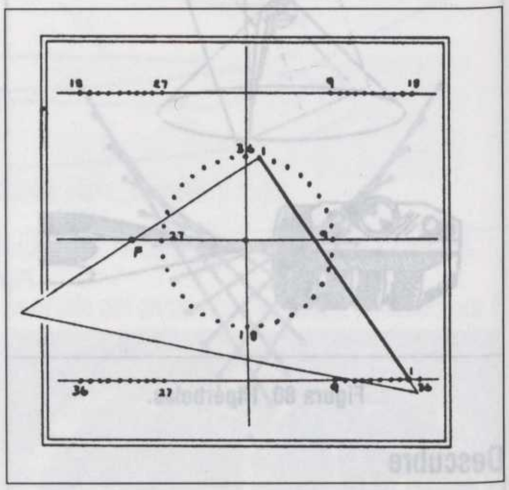


Figura 82.

Practica

1. Dibuja ejes en el centro del papel milimetrado. Marca los focos (3,0) y (–3,0). Dibuja la hipérbola que pasa por el punto (1,0).
2. Tienes un cuadrado, ¿sabrías dibujar una hipérbola que pasase por los cuatro vértices?

ACTIVIDAD 30.

Coronas y círculos rodantes

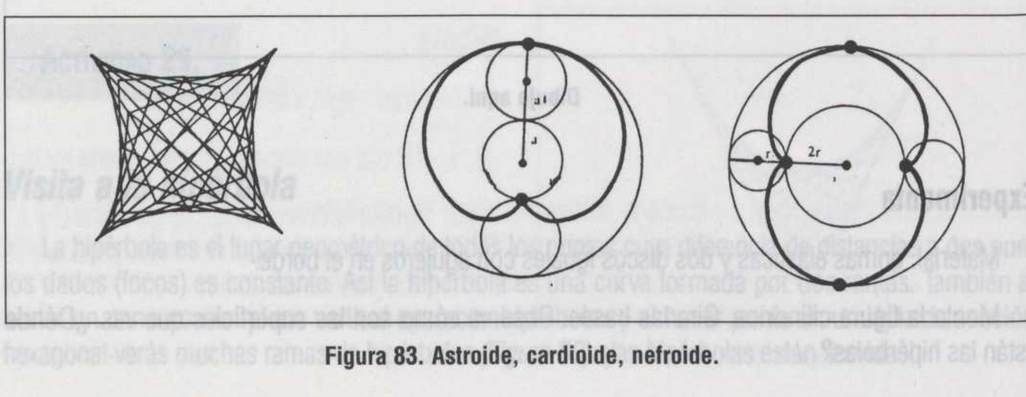


Figura 83. Astroide, cardioide, nefroide.

Un círculo puede rodar dentro de otro o bien rodar por el exterior. En el primer caso los puntos pueden describir «hipocicloides» como la astroide y en el segundo caso nacen «epicicloides» como la cardioide y la nefroide. El mundo de las curvas obtenidas por rodamiento de círculos contiene atractivas formas geométricas a descubrir.

Descubre

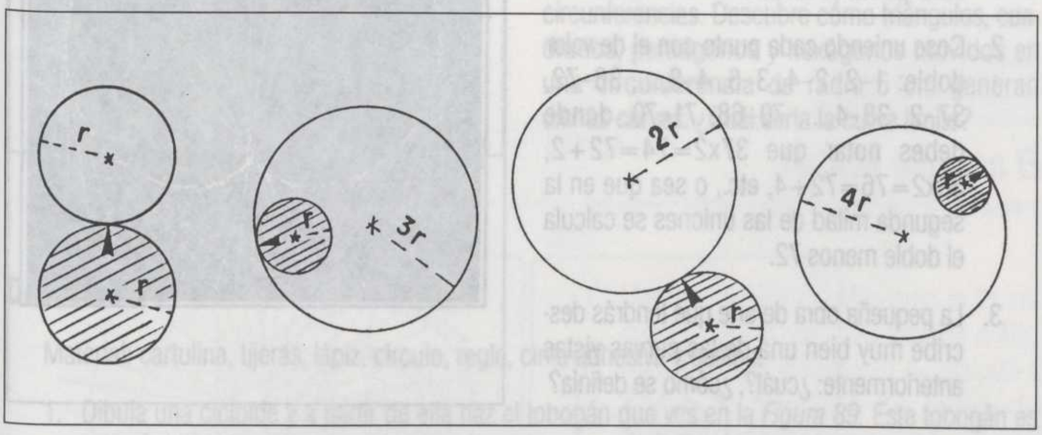


Figura 84. Círculos generando curvas.

El círculo sombreado va rodando hasta completar una vuelta completa alrededor del otro círculo. ¿Qué curva describe el punto señalado con flecha? Descubre en cada caso cuál de las curvas de la figura primera se determina.

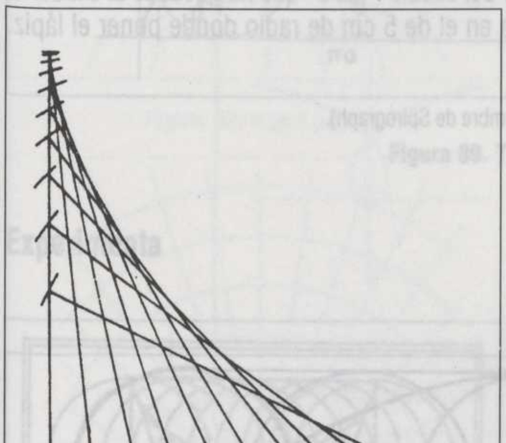


Figura 85.

Dibuja

Dibuja en un papel milimetrado los ejes tal como se ve *(Figura 85)* y marca las 10 divisiones iguales horizontales. Con una regla dibuja todos los segmentos de longitud 10 cm que unen un punto de la división horizontal con el correspondiente del eje vertical. Haz lo mismo en los cuatro cuadrantes. Descubrirás un bonito diseño de una curva que antes fue generada con círculos rodantes. ¿Cuál?

Experimenta

Material: cartulina, compás, lápiz, regla, hilo de coser rojo y agujas de coser.

1. Dibuja en la cartulina una circunferencia con 72 divisiones marcadas, siendo el 72 el punto de arriba.

2. Cose uniendo cada punto con el de valor doble: 1-2, 2-4, 3-6, 4-8,..., 36-72, 37-2, 38-4,..., 70-68, 71-70, donde debes notar que 37x2=74=72+2, 38x2=76=72+4, etc., o sea que en la segunda mitad de las uniones se calcula el doble menos 72.

3. La pequeña obra de arte que tendrás describe muy bien una de las curvas vistas anteriormente: ¿cuál?, ¿cómo se definía?

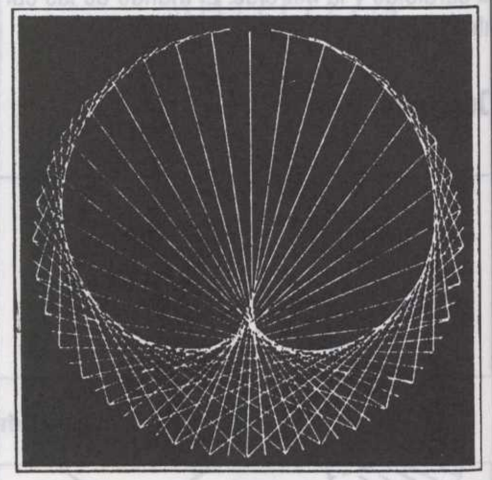


Figura 86.

Practica

1. ¿Qué curva describiría un punto de un círculo que rueda alrededor de otro círculo de radio 3r? Dibuja aproximadamente la curva.

2. Recorta un círculo de radio 10 cm, de una cartulina rígida. Recorta un círculo de radio 5 cm de cartulina. El pequeño deberá rodar dentro del círculo «vacío» que ha quedado al extraer el de 10 cm de radio. Puedes hacer agujeros en el de 5 cm de radio donde poner el lápiz. ¿Cómo son las curvas que generas?

(Nota: este juego está comercializado en plástico con el nombre de Spirograph).

ACTIVIDAD 31.

Los secretos de la cicloide

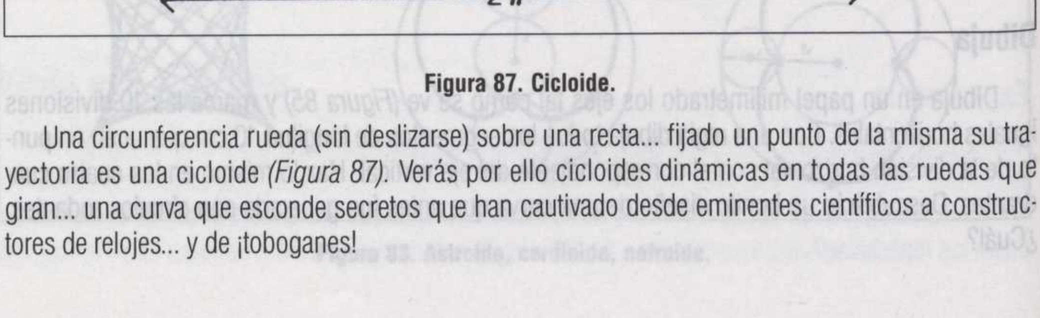


Figura 87. Cicloide.

Una circunferencia rueda (sin deslizarse) sobre una recta... fijado un punto de la misma su trayectoria es una cicloide *(Figura 87)*. Verás por ello cicloides dinámicas en todas las ruedas que giran... una curva que esconde secretos que han cautivado desde eminentes científicos a constructores de relojes... y de ¡toboganes!

Descubre

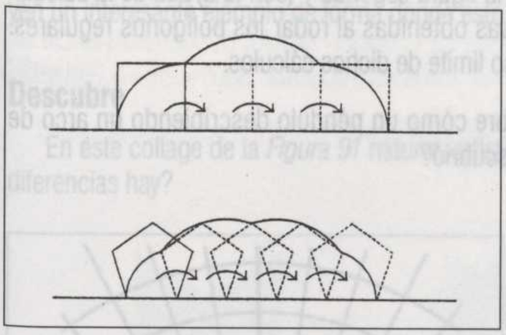


Figura 88. Polígonos rodantes.

Si cualquier polígono regular lo hacemos «rodar» a lo largo de una recta y nos fijamos en la trayectoria de un vértice como en la figura, nos descubrirá una curva formada por arcos de circunferencias. Descubre cómo triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos movidos en una circunferencia de radio 5 cm generan dichas curvas. ¿Cuál sería la curva límite?

Descubre

Material: cartulina, tijeras, lápiz, círculo, regla, cinta adhesiva y canica.

1. Dibuja una cicloide y a partir de ella haz el tobogán que ves en la *Figura 89*. Este tobogán es más rápido que una recta que uniese los mismos puntos. Experiméntalo.

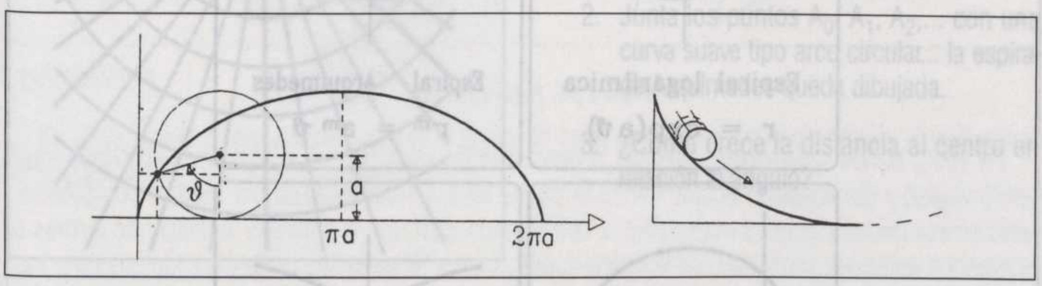


Figura 89. Tobogán rápido.

Experimenta

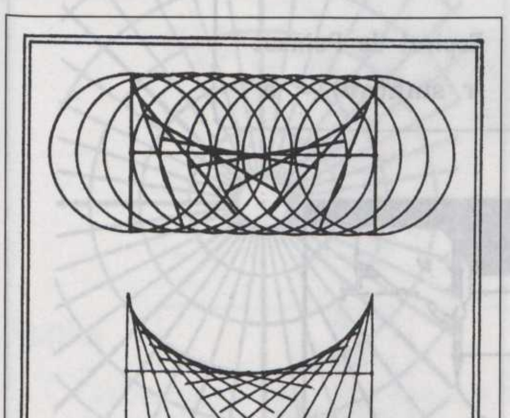


Figura 90.

Material: cartulina, regla, compás, transportador de ángulos, lápiz, hilo de color rojo y aguja de coser.

1. Realizar un dibujo como el de la figura (línea de 9 cm dividida en 18 partes).
2. Trazar todos los círculos indicados y los segmentos de longitud 5, 7 cm inclinados 90°, 80°, 70°,..., 10°, 0°, 10°,..., 80°, 90° y con los límites indicados por los círculos y pasando por sus centros.
3. ¿Qué curva describes por debajo de todas estas rectas?

Practica

1. Aprovecha los dibujos realizados a partir de la figura segunda y (con la ayuda de la calculadora) calcula longitudes y áreas de las curvas obtenidas al rodar los polígonos regulares. Obtén la longitud y crea la cicloide como caso límite de dichos cálculos.
2. Busca información sobre péndulos. Descubre cómo un péndulo describiendo un arco de cicloide sería un péndulo ideal. ¿Quién lo descubrió?

ACTIVIDAD 32.

El encanto espiral

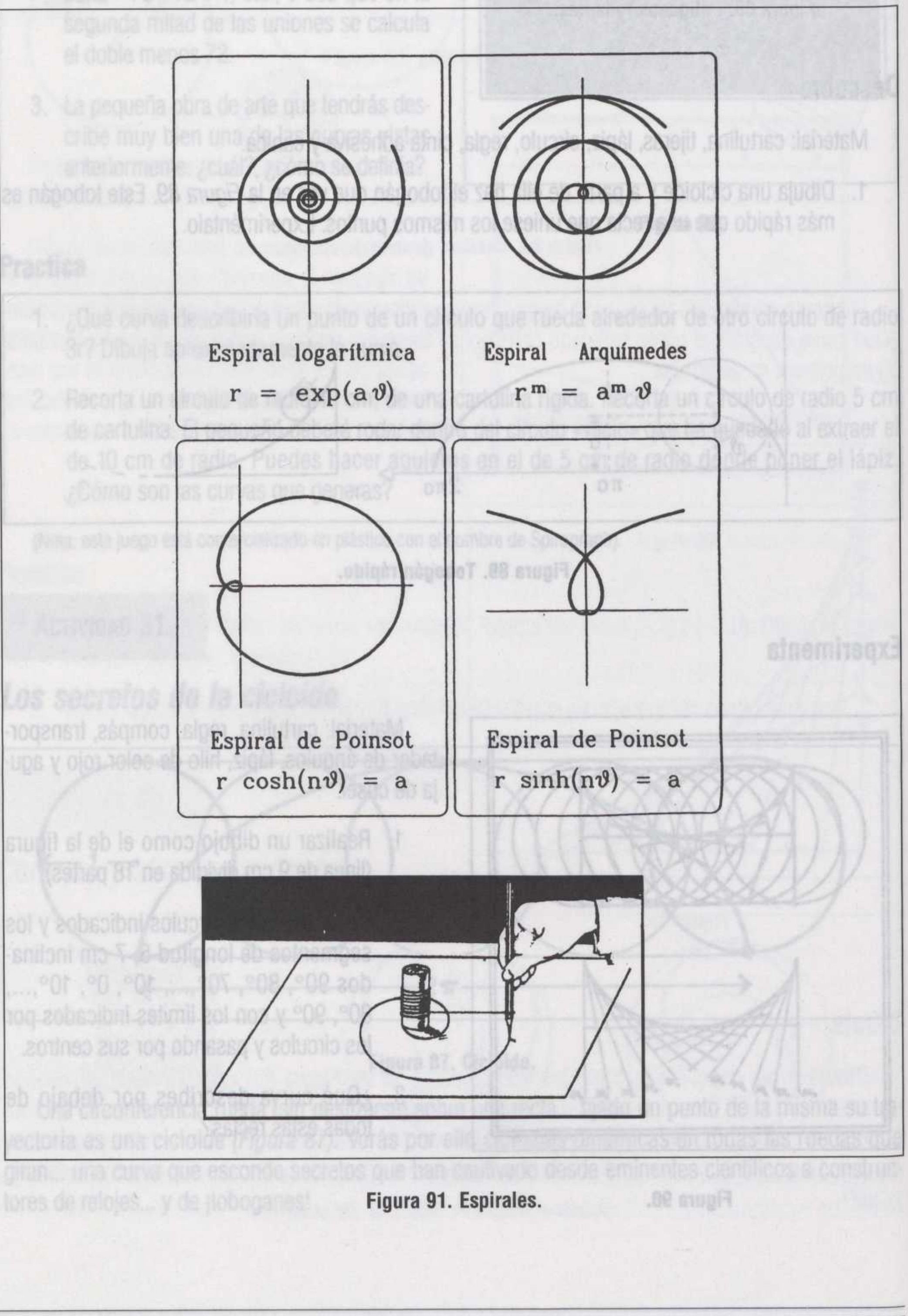


Figura 91. Espirales.

Conchas de caracoles, ramos de plantas, galaxias y virus, columnas griegas y escaleras de caracol,..., las curvas espirales desarrollándose en el plano o creciendo en un cilindro espacial constituyen un interesante ejemplo de forma donde estructura, función y belleza se articulan perfectamente.

Descubre

En este collage de la *Figura 91* natural-artístico se esconden muchas espirales, ¿cuántas?, ¿qué diferencias hay?

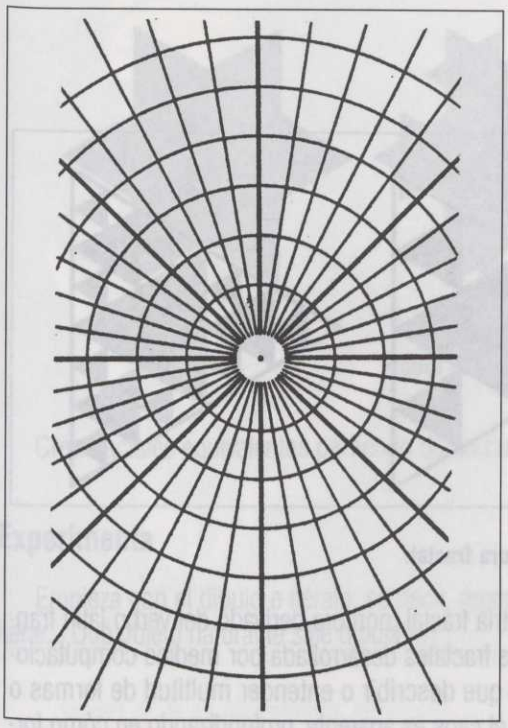


Figura 92. Papel polar.

Dibuja

Material: papel con coordenadas polares y lápiz.

1. Marca el centro A_0. Marca en la 1ª circunferencia el punto A_1 situado a 60_0. Marca en la 2.ª el punto A_2 situado a 120°... Ve marcando los puntos A_n pasando cada vez a una nueva circunferencia y aumentando 60°.
2. Junta los puntos A_0, A_1, A_2,... con una curva suave tipo arco circular... la espiral de Arquímedes queda dibujada.
3. ¿Cómo crece la distancia al centro en relación al ángulo?

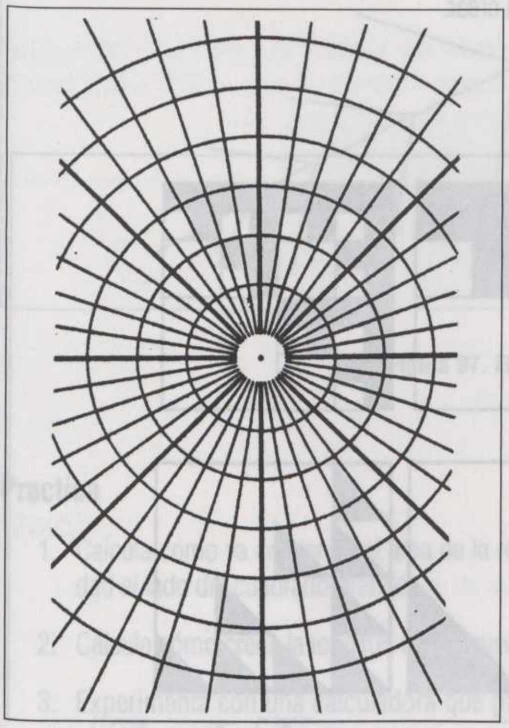


Figura 93. ¡A bordar!

Experimenta

Material: cartulina, regla, compás, lápiz, transportador de ángulos, hilo rojo y aguja de coser.

1. Dibuja en la cartulina los puntos dibujados anteriormente A_0, A_1, A_2,...
2. En lugar de dibujar las curvas uniones cose cada punto con el siguiente.
3. ¡Habrás bordado una aproximación a la espiral!

Practica

Con la ayuda de la calculadora científica y trabajando sobre papel polar marca los puntos principales de la espiral logarítmica (o equiangular), usando su ecuación exp(A), donde la distancia al centro d es la «exponencial» del ángulo A expresado en radianes (recuerda: $360° = 2\pi = 6{,}28$ radianes), une al final todos los puntos con curvas suaves.

ACTIVIDAD 33.

Un mundo fractal

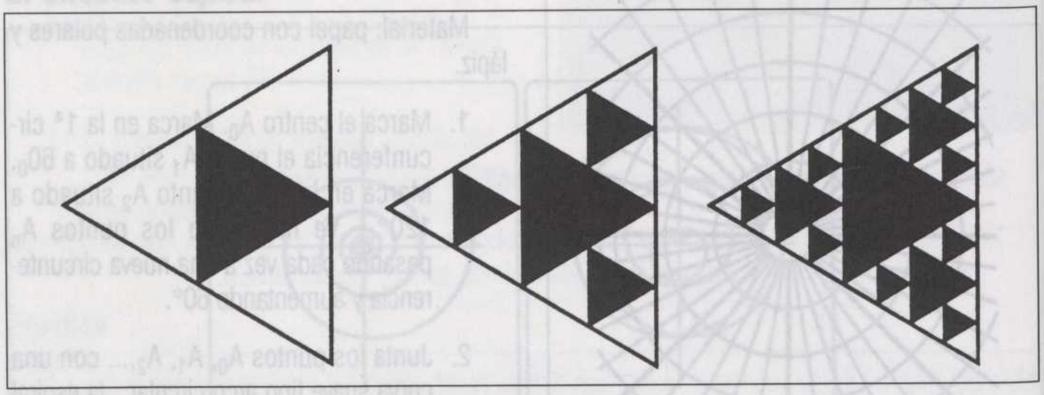


Figura 94. Figura fractal.

En 1975, Benoit Mandelbrot introdujo la geometría fractal (nombre derivado del verbo latín frangere (romper) y del adjetivo fractus). La teoría de los fractales desarrollada por medios computacionales ofrece bellos modelos matemáticos con los que describir o entender multitud de formas o fenómenos naturales, poniendo cierto orden donde el caos es aparente, profundizando en cómo formas complejas pueden generase fácilmente iterando ciertos procesos. Hoy las imágenes fractales son piezas de arte cibernético y un instrumento para crear.

Descubre

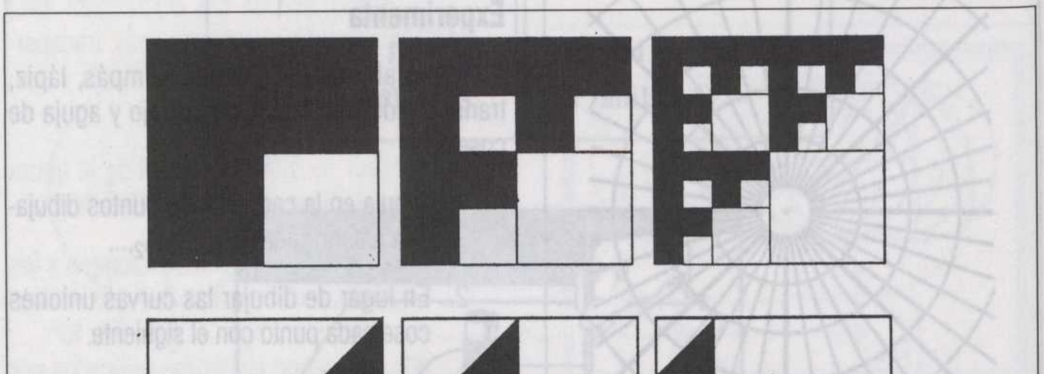


Figura 95. Tres generaciones.

¿Cómo se pasa de un fractal al siguiente? *(Figura 95)*. Medita cómo describirías en una carta (con palabras) el desarrollo de estos fractales.

Dibuja

Dibuja la siguiente figura fractal en esta serie de Koch *(Figura 96)*:

Figura 96. Curvas de Koch.

Crea fractales equivalentes partiendo de un cuadrado o un polígono regular cualquiera.

Experimenta

Empieza con el dibujo e itéralo, es decir, repite en cada rama la totalidad del dibujo. Y vuélvelo a iterar. ¿Qué objeto natural te sale dibujado?

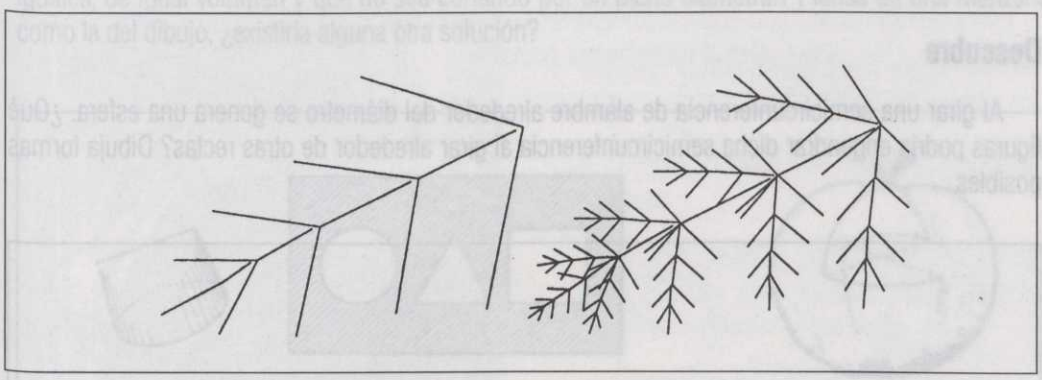


Figura 97. Figura iterable.

Practica

1. Calcula cómo va creciendo el área de la región blanca en la segunda figura (toma como unidad el lado del cuadrado grande).
2. Calcula cómo crece la longitud de las curvas de Koch.
3. Experimenta con una calculadora qué pasa al iterar $\sqrt{x}$ en el punto $x=1/2$ ó $x=2$ ($\sqrt{1/2}$, $\sqrt{\sqrt{1/2}}$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, ...).

Actividad 34.

Esfera

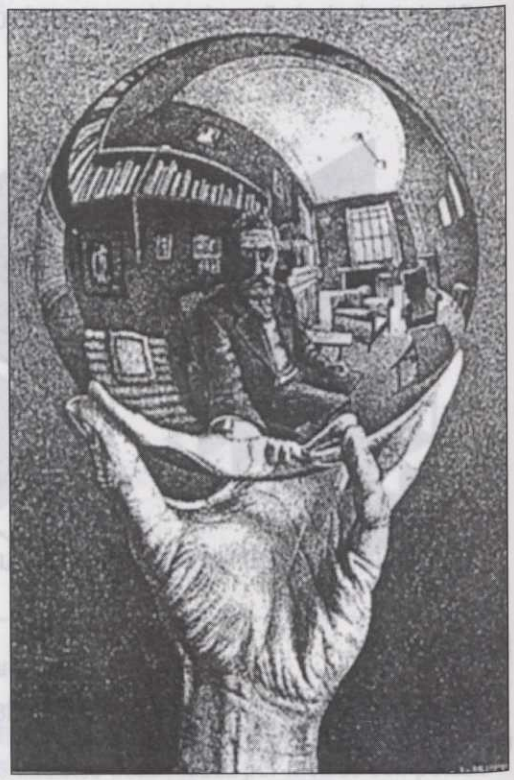


Figura 98. Autorretrato de M. C. Escher.

Las esferas están formando parte substancial de la armonía del universo, determinando hermosas esculturas o siendo representadas con recursos muy diversos en las artes plásticas. La esfera es la figura perfecta espacial de la misma manera que el círculo lo es en el plano. Este lugar geométrico de puntos en el espacio cuya distancia a un punto llamado centro es siempre el mismo.

Descubre

Al girar una semicircunferencia de alambre alrededor del diámetro se genera una esfera. ¿Qué figuras podría engendrar dicha semicircunferencia al girar alrededor de otras rectas? Dibuja formas posibles.

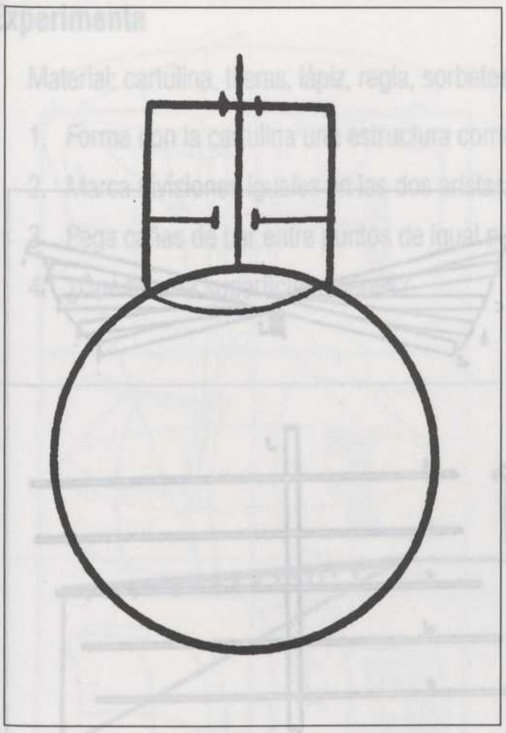


Figura 99. Esferómetro.

Diseña

Material: cartulina, pegamento, tijeras, regla, lápiz y varilla.

1. Fabrica un cilindro de 20 cm de radio con una doble tapa con agujero central. Deberás pasar la varilla por este agujero y que salga por el otro extremo.

2. Marca centímetros y milímetros en el trozo de varilla que queda dentro el cilindro.

3. Al poner el aparato sobre una esfera anota el número a de milímetros que salen fuera.

4. Justifica que el radio de la esfera es $R=\frac{a^2+20^2}{2a}$ es decir puedes calcular el radio de la esfera.

Experimenta

¿Puedes fabricar un cuerpo espacial que pase a través de los tres agujeros que son respectivamente un círculo, un triángulo equilátero y un cuadrado? ¿Cómo dividir una esfera en dos partes iguales, de igual volumen y que no sea cortando por un plano diametral? Piensa en una manzana como la del dibujo, ¿existiría alguna otra solución?

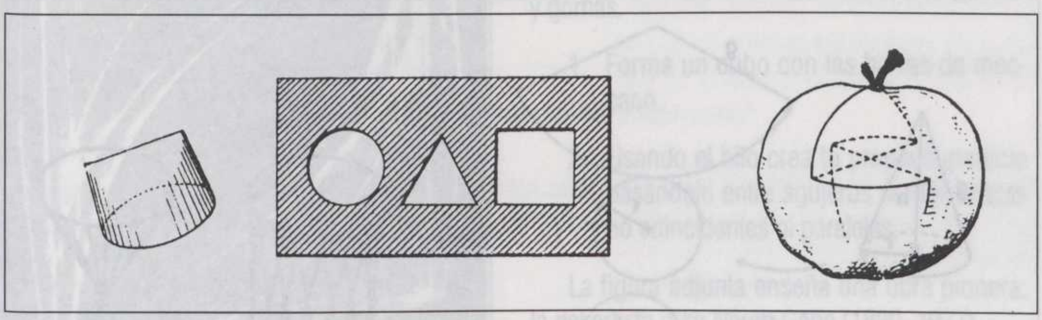


Figura 100.

Practica

1. ¿Cómo son las formas posibles de las sombras de una esfera?

2. ¿Cuál es la intersección de dos esferas que se cortan? ¿Y de tres esferas?

3. El volumen de una esfera es $4/3\pi R^3$ y su superficie $4\pi R^2$. Hallar el volumen del mundo y su superficie (deducir el valor del radio terrestre a partir de la definición de metro).

Actividad 35.

Superficies con rectas

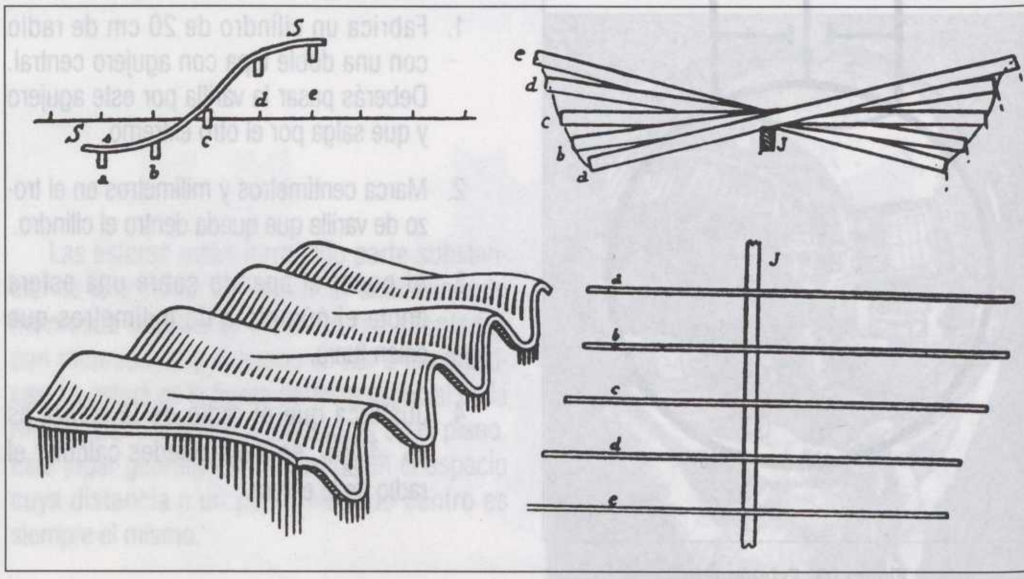


Figura 101. Techo reglado de A. Gaudí.

Usando sólo segmentos rectos pueden crearse en el espacio superficies muy bellas que a menudo intrigan por su apariencia «curvada» y cuya construcción efectiva es simple *(Figura 101).*

Descubre

Estos dibujos describen superficies formadas por rectas: cilindros, conos e hiperboloides *(Figura 102).* ¿Qué curvas salen al cortarlas por planos?

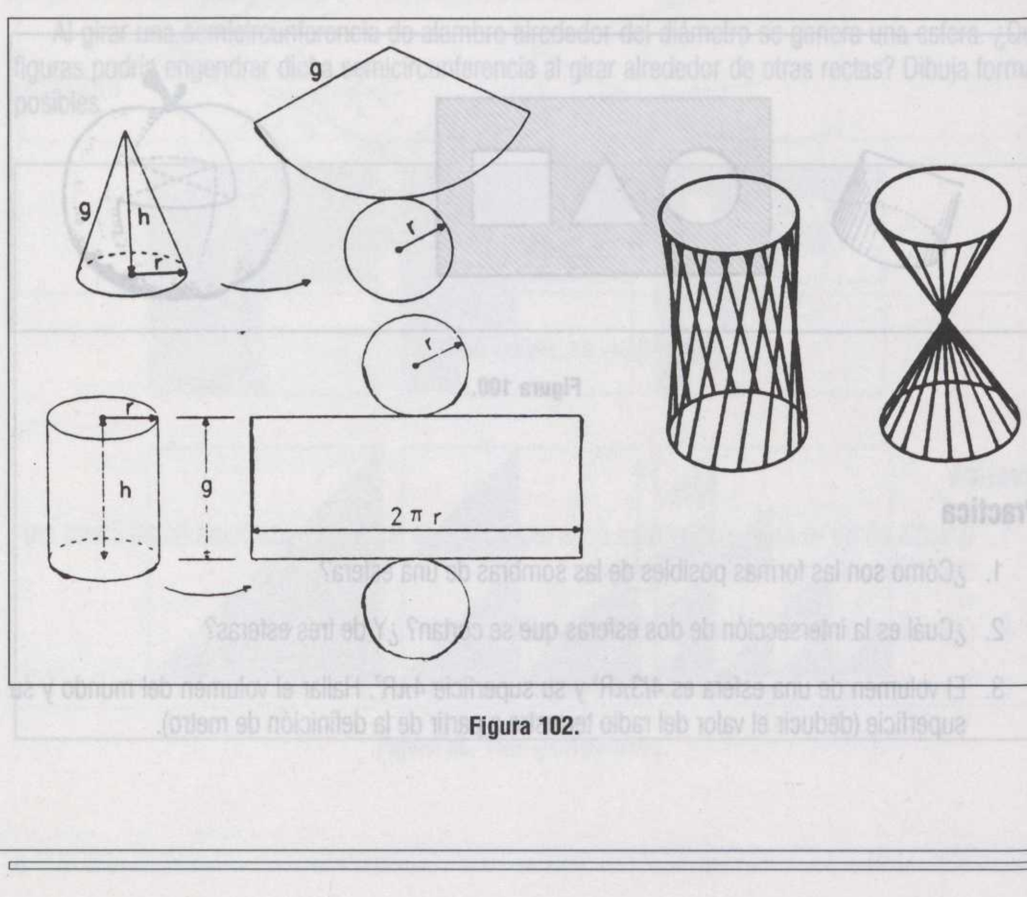


Figura 102.

Experimenta

Material: cartulina, tijeras, lápiz, regla, sorbetes (pajitas para sorber) y pegamento.

1. Forma con la cartulina una estructura como la de la *Figura 103*.
2. Marca divisiones iguales en las dos aristas.
3. Pega cañas de bar entre puntos de igual numeración.
4. ¿Qué tipo de superficie obtienes?

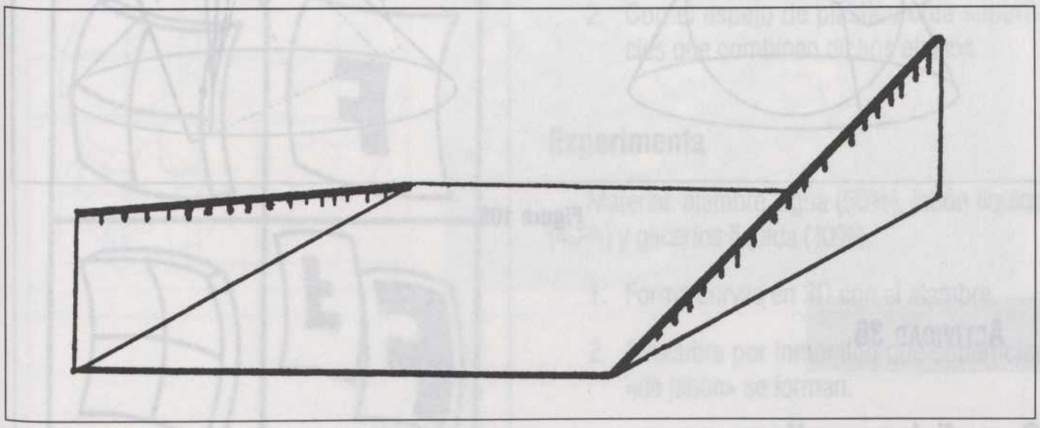


Figura 103.

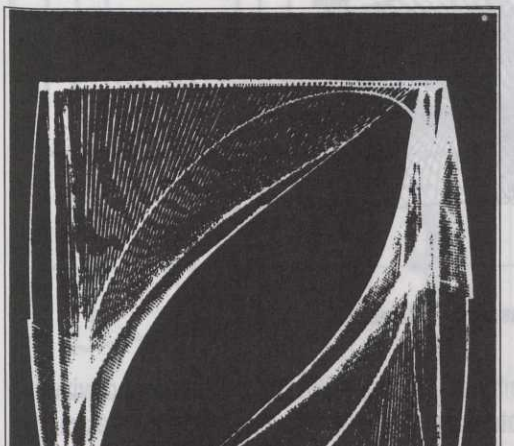


Figura 104. Diseño de N. Gabo (1942).

Diseña

Material: barras de meccano largas, tuercas y gomas.

1. Forma un cubo con las barras de meccano.
2. Usando el hilo crea tu propia superficie pasándolo entre agujeros de dos aristas no coincidentes ni paralelas.

La figura adjunta enseña una obra pionera: la del artista ruso Naum Gabo (1890-1977).

Practica

Fíjate en los dibujos donde las esferas son tangentes a las secciones planas. ¿Qué son estos puntos?

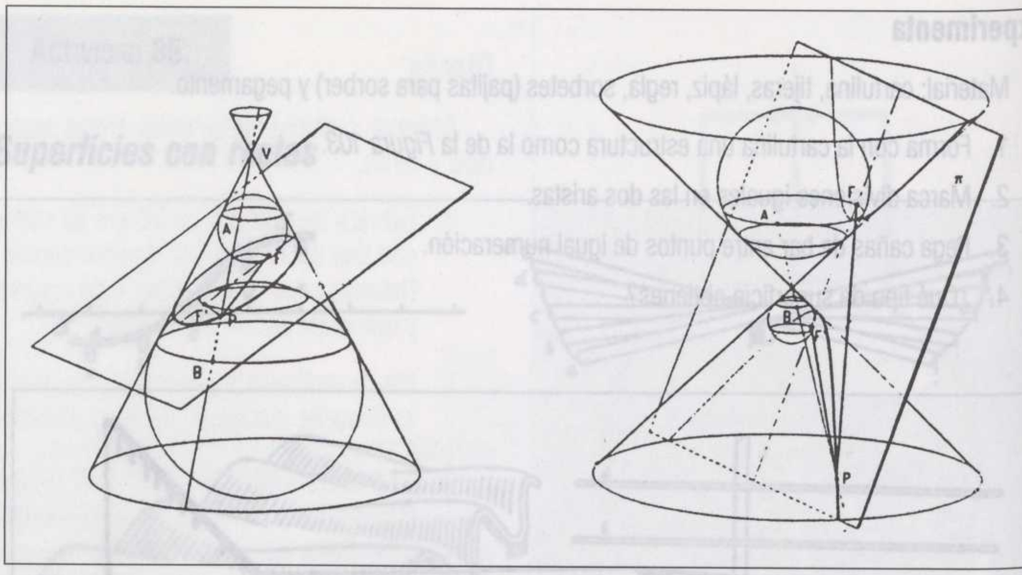


Figura 105.

ACTIVIDAD 36.

Superficies creativas

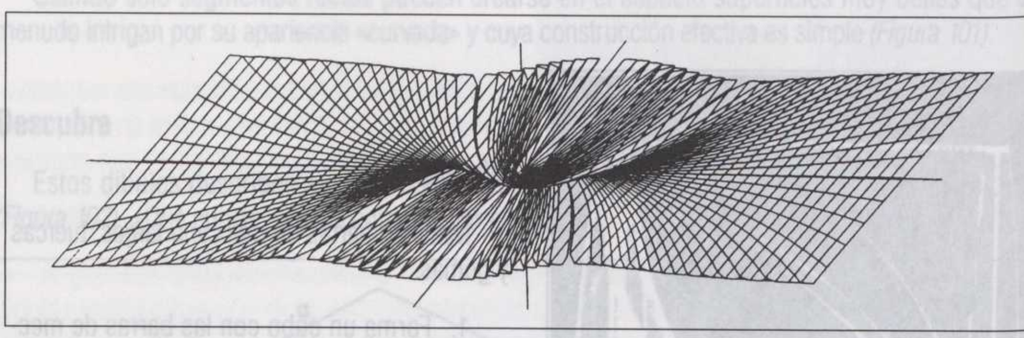


Figura 106. Formas superficiales.

El universo de las superficies tiene hermosos habitantes *(Figura 106)*. Artísticamente conviven la geometría de las formas con texturas, colores o materiales. Una diversidad de componentes dignas de ser exploradas.

Descubre

Entre dos libros deseas hacer un puente de papel con una hoja para aguantar otro libro. En la *Figura 107* puedes ver una solución. Inventa otras. Investiga doblando papel y formando una torre qué peso se podría aguantar.

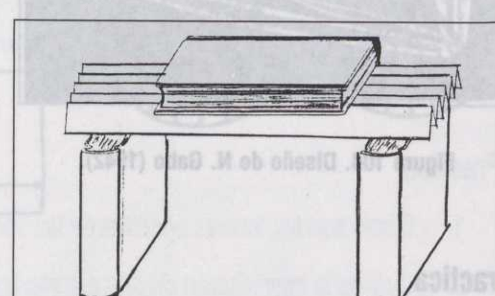


Figura 107. Una superficie más resistente.

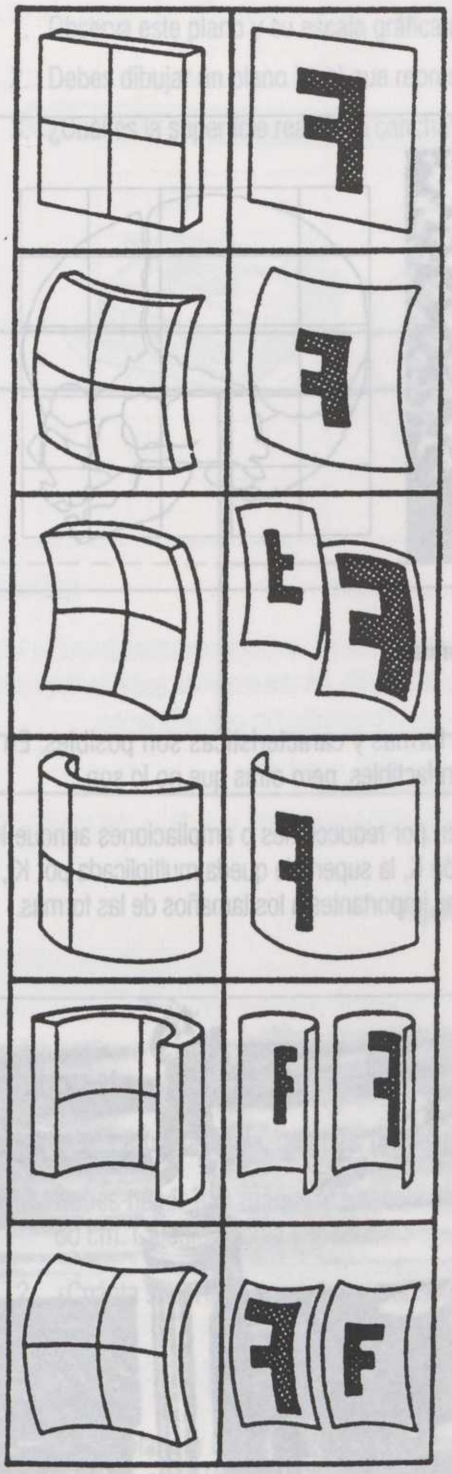


Figura 108. Espejos.

Diseña

Material: espejo de plástico flexible, tijeras y cinta adhesiva.

1. Observa los efectos de la convexidad y la concavidad.
2. Con el espejo de plástico crea superficies que combinen dichos efectos.

Experimenta

Material: alambre, agua (50%), jabón líquido (40%) y glicerina líquida (10%).

1. Forma curvas en 3D con el alambre.
2. Descubre por inmersión qué superficies «de jabón» se forman.
3. Haz un cubo y un tetraedro con el alambre. ¿Qué descubres después de sumergirlos?

¡Bienvenidos al mundo de las «superficies mínimas»!

Practica

1. Crea una escalera de caracol poniendo en espiral prismas triangulares de cartulina de alturas crecientes. ¿Qué se ve desde arriba?
2. Una bóveda romana se obtiene como intersección de dos semicilindros. Haz un modelo con papel. ¿Qué secciones tendrá dicha bóveda?
3. ¿Cómo crearías con barro o plastilina una superficie donde fuera cómodo apoyar tu mano?

ACTIVIDAD 37.

Tamaños y formas

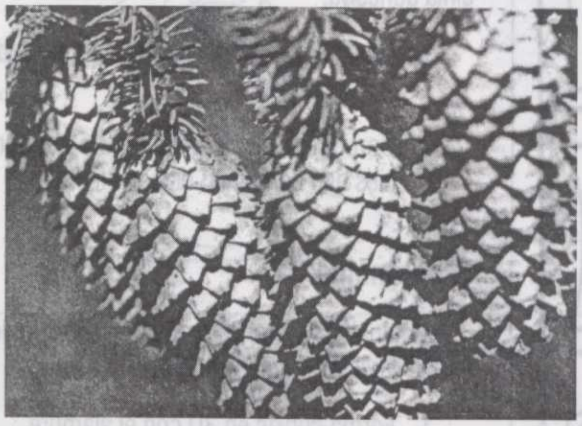
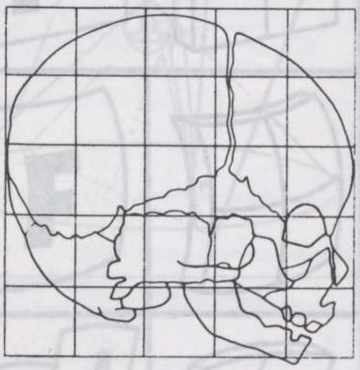



Figura 109. Formas.

En Arte y en Ciencia Ficción todos los tamaños, formas y características son posibles. En la Naturaleza, no obstante, hay formas y tamaños que son factibles, pero otras que no lo son.

Las «formas» de las cosas o los seres se mantienen por reducciones o ampliaciones aunque los tamaños varíen: Si la longitud se multiplica por una razón K, la superficie queda multiplicada por K^2, el volumen por K^3, el peso por K^3, y ello implica limitaciones importantes a los tamaños de las formas.

Descubre

Se dice que King Kong era 20 veces más alto que un hombre. Considera una persona de 1,75 m de altura y 75 Kg de peso. ¿Cuánto mediría King Kong? ¿Cuánto pesaría? King Kong nunca existirá. ¿Por qué?

Figura 110. ¿Podría existir King Kong?

Dibuja

Material: papel, lápiz, regla, compás y calculadora.

1. Observa este plano y su escala gráfica (*Figura 111).*
2. Debes dibujar un plano igual que represente la cancha real de tenis a escala 1:200.
3. ¿Cuál es la superficie real de la cancha? ¿Y la de la maqueta a escala 1:200?

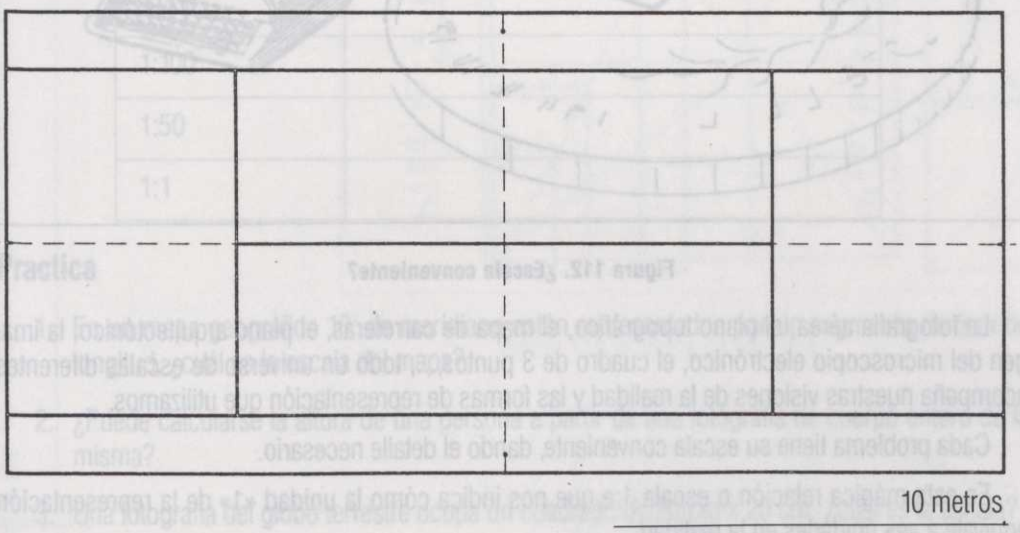


Figura 111. PLano.

Experimenta

Material: cartulina, regla, compás, tijeras, pegamento y calculadora.

1. Debes hacer una maqueta a escala 1:200 de una caja cuyas medidas reales son 20 x 40 x 60 cm. Calcula, dibuja y monta.
2. ¿Cuánta superficie de cartulina consume la maqueta? ¿Cuál es su volumen?

Practica

1. En un plano a escala 1:200 se representa un terreno cuadrado mediante un cuadradito de lado 2,5 cm. ¿Cuál es la superficie real del terreno?
2. Una maqueta de una escultura cúbica hecha a escala 1:500 consiste en un cubo de arista 10 cm. ¿Qué volumen tendrá la escultura real? ¿Qué escala se usaría si la maqueta fuese de 6 cm de arista?
3. Una maqueta de una silla hecha a escala 1:50 y con material idéntico al de la silla de verdad pesa 200 gramos: ¿cuánto pesará la silla?

Actividad 38.

Escalas convenientes

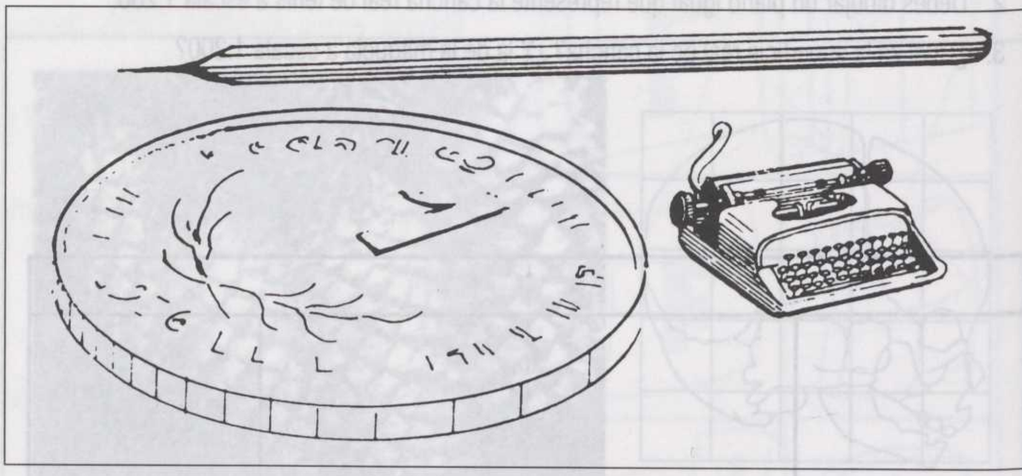


Figura 112. ¿Escala conveniente?

La fotografía aérea, el plano topográfico, el mapa de carreteras, el plano arquitectónico, la imagen del microscopio electrónico, el cuadro de 3 puntos,..., todo un universo de escalas diferentes acompaña nuestras visiones de la realidad y las formas de representación que utilizamos.

Cada problema tiene su escala conveniente, dando el detalle necesario.

Es esta mágica relación o escala 1:e que nos indica cómo la unidad «1» de la representación equivale a «e» unidades en la realidad.

Descubre

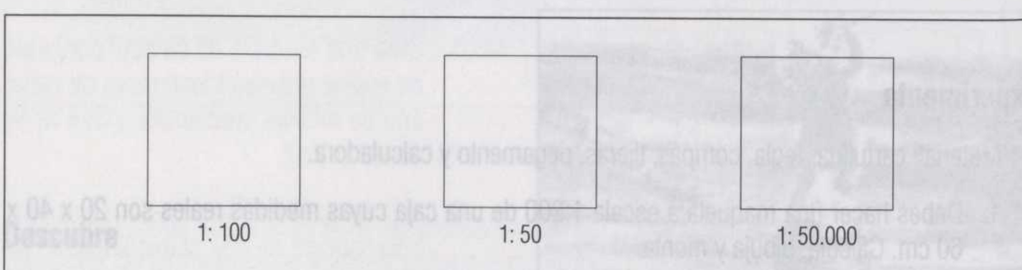


Figura 113.

Los tres cuadrados miden 2 cm de lado en el dibujo *(Figura 113)*. Pero son tres planos de escalas diferentes. ¿Cuánto miden en la realidad los cuadrados aquí representados?

Dibuja

Material: papel DIN A4, lápiz, cinta métrica y regla.

1. Elige una silla. Toma sus medidas principales.
2. Calcula cuál es la máxima escala que puedes usar para dibujar la silla en tu DIN A4.
3. Dibújala.

Calcula

Fijada una escala 1:e se dirán objetos invisibles aquellos objetos reales que representados en aquella escala tengan tamaño menor o igual a 1 mm. Completa la siguiente tabla:

ESCALA	TAMAÑO OBJETO INVISIBLE
1:50.000	
1:1.000	
1:500	
1:200	
1:100	
1:50	
1:1	

Practica

1. En un mapa geográfico 10' de meridiano están representados por un segmento de 5 m de longitud, ¿cuál es la escala del mapa?
2. ¿Puede calcularse la altura de una persona a partir de una fotografía de cuerpo entero de la misma?
3. Una fotografía del globo terrestre ocupa un cuadrado de 20 cm x 20 cm, ¿cuál es la escala?

ACTIVIDAD 39.

Razón y proporción

Dividiendo dos magnitudes o dos números salen razones numéricas. La división entre magnitudes tiene el aliciente de no depender del sistema de medidas utilizado (m, cm, pies ingleses,...). Geométricamente, dado un rectángulo de lados a, b con $a \leq b$, se define la proporción del rectángulo como b/a, o sea, la razón del lado mayor al menor.

La proporción es un número que retrata la forma del rectángulo, la cual se mantiene ampliando o reduciendo dicha figura (*Figura 114*). ¡Bienvenidos al mundo de las proporciones!

Descubre

Dibuja un rectángulo. Traza un diagonal. Haz una perpendicular por un vértice. Prolonga el rectángulo. Acaba de cerrar esta pieza vertical. Mide. Comprueba que el rectángulo vertical tiene la misma proporción que el de partida *(Figura 115)*.

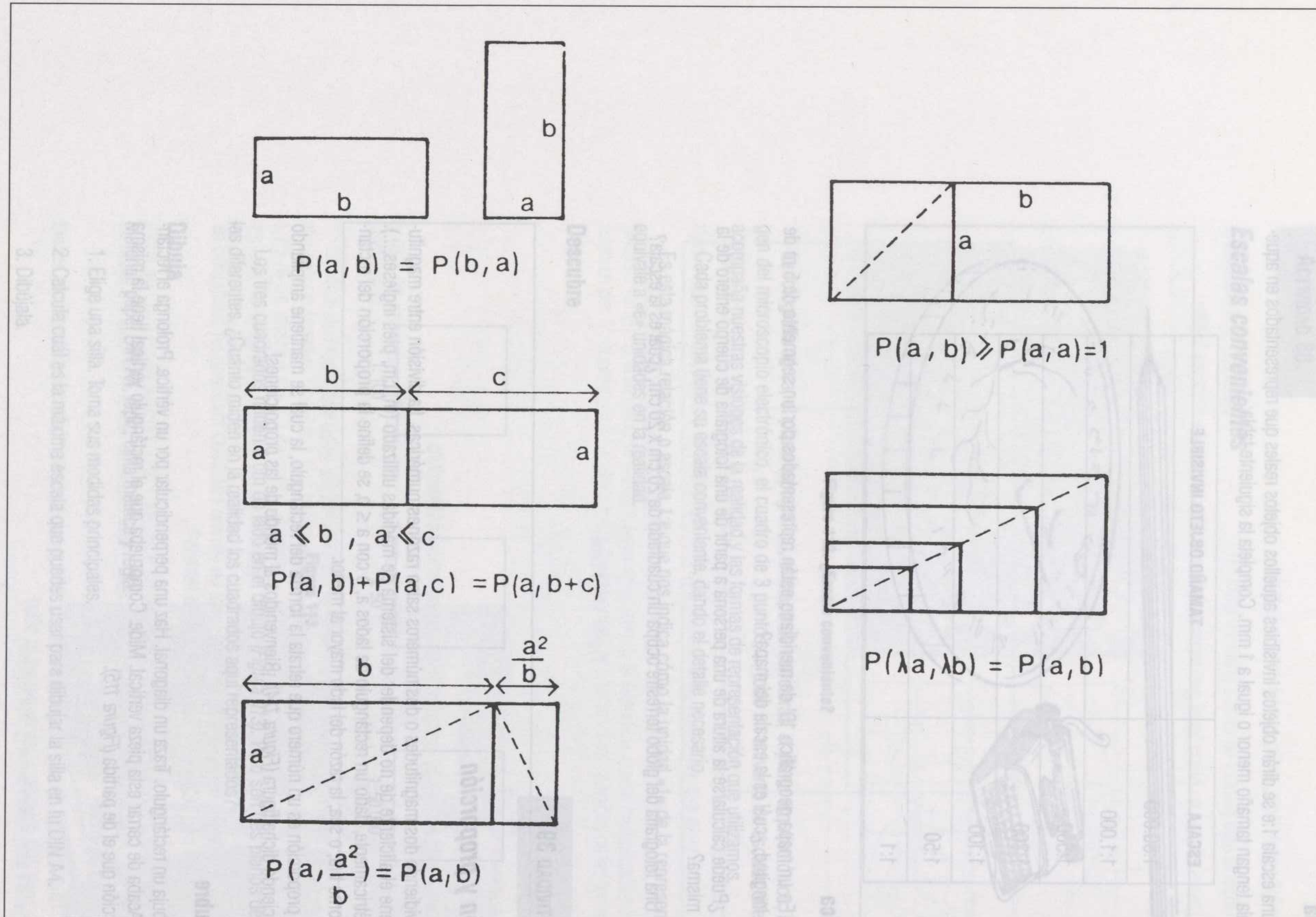

a
b
b
a
P(a, b) = P(b, a)
b
a
P(a, b) ⩾ P(a, a) = 1
b
c
a
a
a ≪ b, a ≪ c
P(a, b) + P(a, c) = P(a, b + c)
P(λa, λb) = P(a, b)
b
a²/b
a
P(a, a²/b) = P(a, b)

Figura 114.

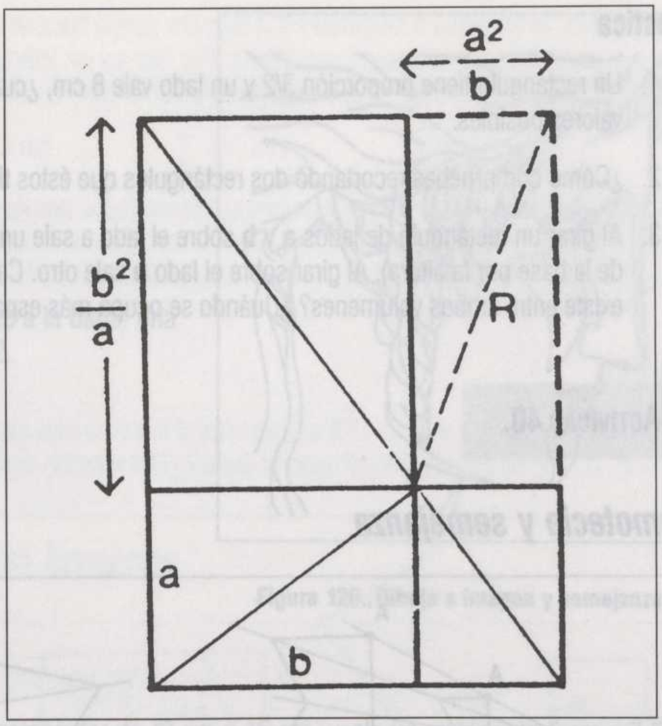


Figura 115. Rectángulo recíproco.

Calcula

Aquí tienes un dibujo del Partenón con muchos rectángulos marcados. Mídelos y calcula sus proporciones.

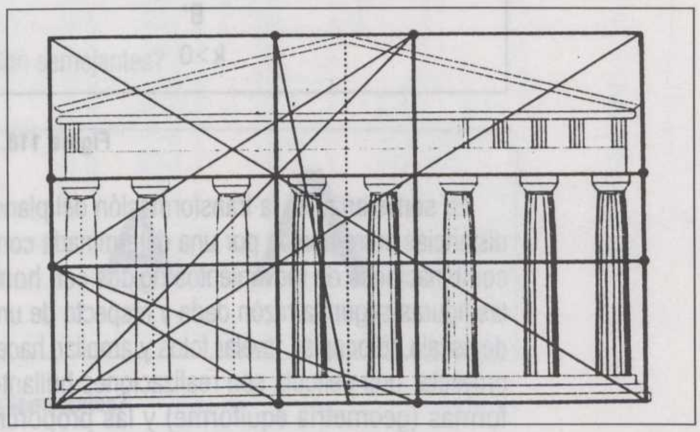


Figura 116. Partenón.

Experimenta

Fabrícate en cartulina gruesa un aparato así *(Figura 117)*. Sirve para medir pequeños gruesos aplicando el teorema de Tales $\frac{X}{1} = \frac{d}{10}$. Usando el aparato, ¿cómo medirías el grueso de una hoja de este libro?¡Fíjate que el libro tiene muchas hojas iguales!

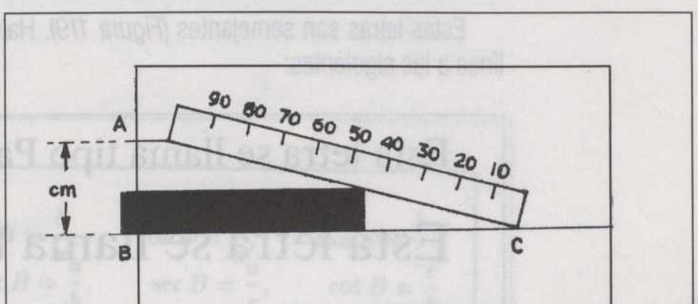


Figura 117. Gruesómetro.

Practica

1. Un rectángulo tiene proporción 3/2 y un lado vale 8 cm, ¿cuánto vale el otro? Halla todos los valores posibles.

2. ¿Cómo compruebas recortando dos rectángulos que éstos tienen la misma proporción?

3. Al girar un rectángulo de lados **a** y **b** sobre el lado a sale un cilindro. Halla su volumen (área de la base por la altura). Al girar sobre el lado **b** sale otro. Calcula su volumen. ¿Qué relación existe entre ambos volúmenes? ¿Cuándo se ocupa más espacio?

ACTIVIDAD 40.

Homotecia y semejanza

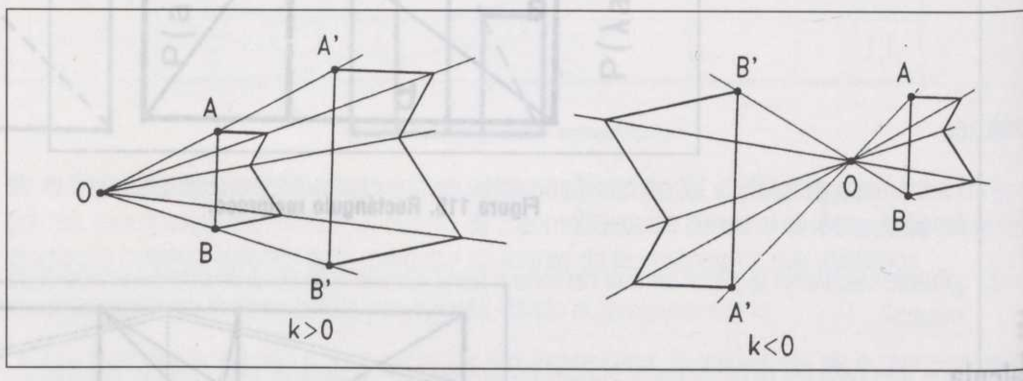


Figura 118. Homotecias.

La semejanza es la transformación del plano (o del espacio) que al ser aplicada multiplica las distancias entre puntos por una determinada constante diferente de 1. Las semejanzas resultan ser combinaciones de movimientos rígidos con homotecias, siendo éstas las que amplían o reducen las figuras según la razón dada y respecto de un punto *(Figura 118)*. Rehacer un mapa cambiando de escala, fotocopiar, revelar fotos y ampliar, hacer una escultura pequeña, construir una maqueta o proyectar una película son realizaciones brillantes de las homotecias: el arte de conservar las formas (geometría equiforme) y las proporciones aun cambiando los tamaños.

Descubre

Estas letras son semejantes *(Figura 119)*. Halla las constantes que permiten pasar de la primera línea a las siguientes:

Esta letra se llama tipo Palacio

Esta letra se llama tipo Palacio

Esta letra se llama tipo Palacio

Figura 119. ¿Qué semejanza?

Dibuja

Material: lápiz.

Haz dos figuras semejantes a la dada: una de razón 1/2 y otra de razón 3/2.

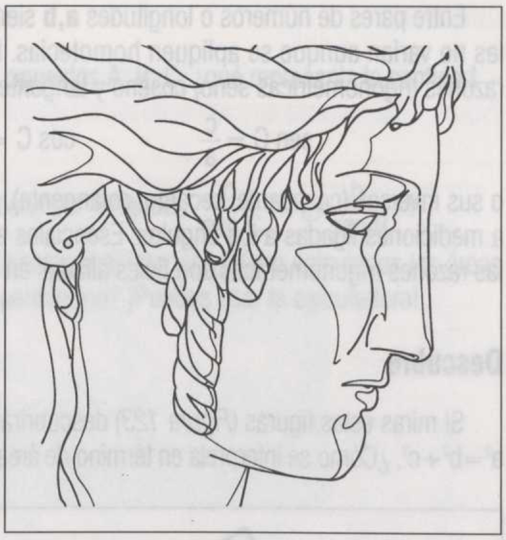


Figura 120. Dibuja a imagen y semejanza.

Practica

1. Fotocopias un dibujo rectangular de 10 cm x 15 cm y sale un rectángulo 5 cm x 7,5 cm. ¿Qué tanto por ciento de reducción ha aplicado la fotocopiadora?
2. Llevas a reducir un DIN A4 escrito y pides una fotocopia del 75%. ¿Qué dimensiones tendrá el rectángulo del escrito fotocopiado?
3. Aquí tienes diversos tipos de letras «A». ¿Son semejantes?

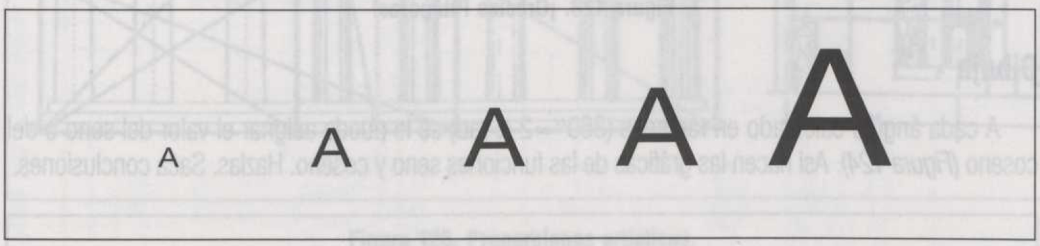
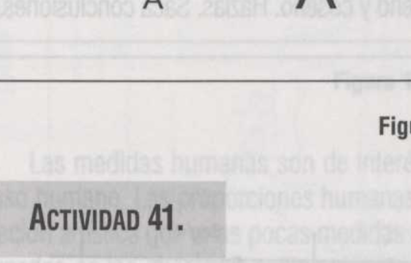


Figura 121. ¿Semejantes?

ACTIVIDAD 41.

Razones trigonométricas



$$\text{sen} B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \tan B = \frac{b}{c}$$

$$\text{cosec}\ B = \frac{a}{b}, \quad \sec B = \frac{a}{c}, \quad \cot B = \frac{c}{b}$$

Figura 122.

Entre pares de números o longitudes **a,b** siempre puede hacerse sus razones **a/b** ó **b/a** las cuales no varían aunque se apliquen homotecias. Por ello en un triángulo rectángulo se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo C como:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad \tan C = \frac{c}{b}$$

o sus inversas (cosecante, secante, cotangente). Así los lados nos llevan de la mano de sus razones a mediciones ligadas a los ángulos. Esenciales en todo tipo de cálculos de longitudes y superficies las razones trigonométricas son fieles aliadas en el arte del bien calcular *(Figura 122)*.

Descubre

Si miras estas figuras (*Figura 123*) descubrirás el teorema más famoso de la historia matemática: $a^2=b^2+c^2$. ¿Cómo se interpreta en término de áreas? ¿Qué relación deduces para el seno y el coseno?

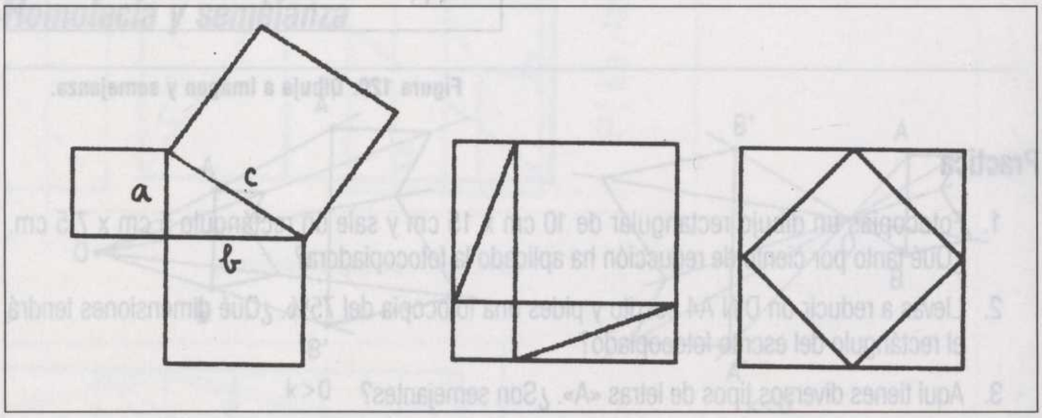


Figura 123. ¡Gracias Pitágoras!

Dibuja

A cada ángulo calculado en radianes (360°=2 π rad) se le puede asignar el valor del seno o del coseno *(Figura 124)*. Así nacen las gráficas de las funciones seno y coseno. Hazlas. Saca conclusiones.

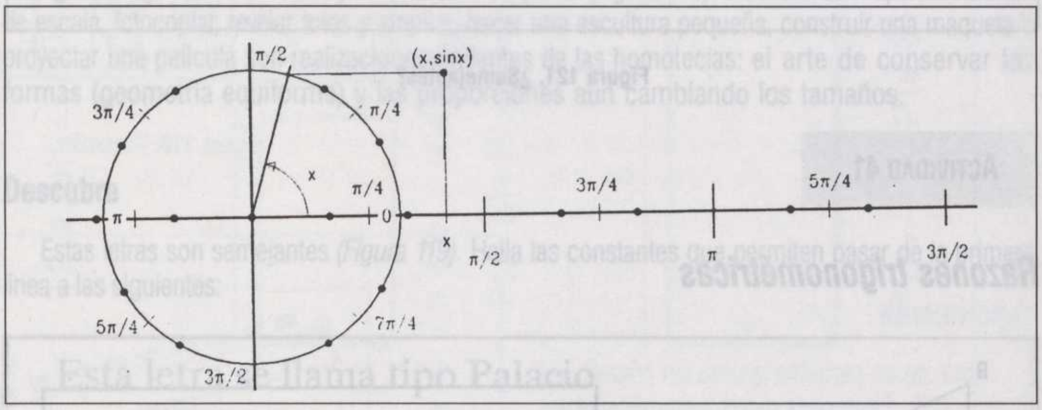


Figura 124.

Experimenta

Material: tangram chino, regla y calculadora.

Usa el tangram chino. Puedes medir. Se te pide calcular los senos de todos los ángulos que aparecen en las figuras.

Practica

1. Dado un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, ¿qué representa la cantidad $\frac{a \cdot b \operatorname{sen} C}{2}$?

2. En un triángulo rectángulo, ¿qué segmento tiene por longitud $\frac{c}{\operatorname{sen} C}$?, ¿y $\frac{b}{\operatorname{sen} B}$?
3. Dibuja un pentágono regular con su estrella pentagonal interior. ¿Cómo calcularías las áreas de las once piezas en que queda dividido el pentágono? ¡Puedes usar la calculadora!

ACTIVIDAD 42.

Medidas y proporciones humanas

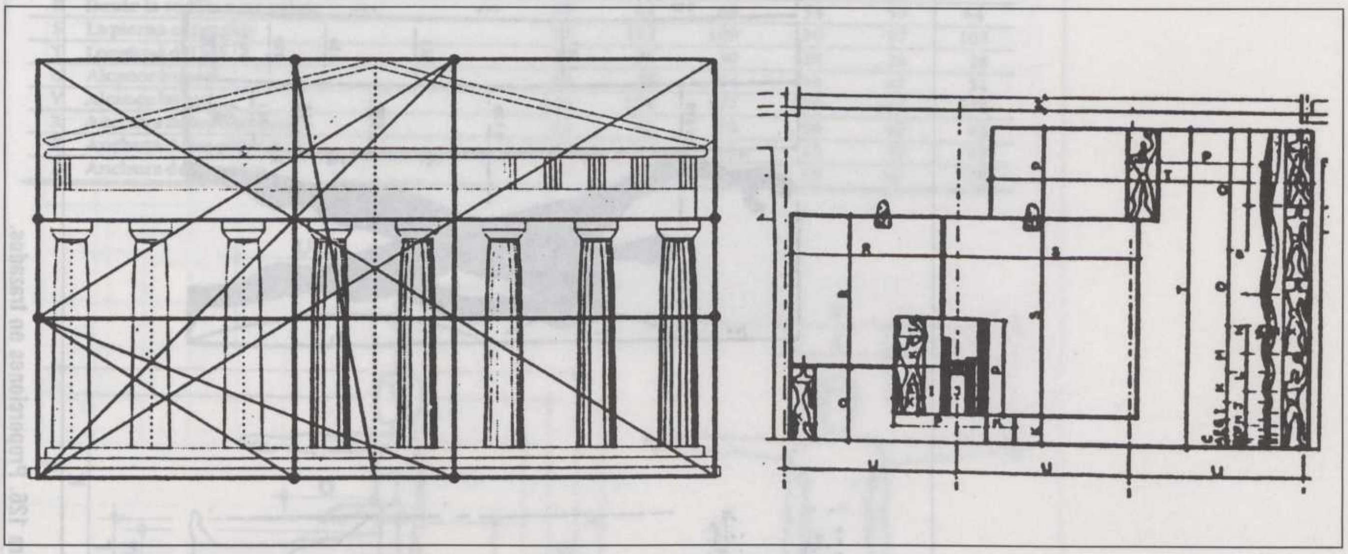


Figura 125. Proporciones artísticas.

Las medidas humanas son de interés artístico en el dimensionado de objetos diseñados para uso humano. Las proporciones humanas simplifican este diseño y dan un método para la representación artística (¡de unas pocas medidas se deducen las demás!). Pero los sistemas de proporciones usados en los diferentes estilos plásticos no son sólo geometría y medida: esconden una concepción estética, un ideal de belleza, una pauta posible para la creación artística *(Figura 125)*.

Descubre

Aquí tienes tres formas diferentes de “proporcionar” el trazado artístico de la figura humana *(Figura 126)*. Expresa en cada caso las proporciones más relevantes y compáralas.

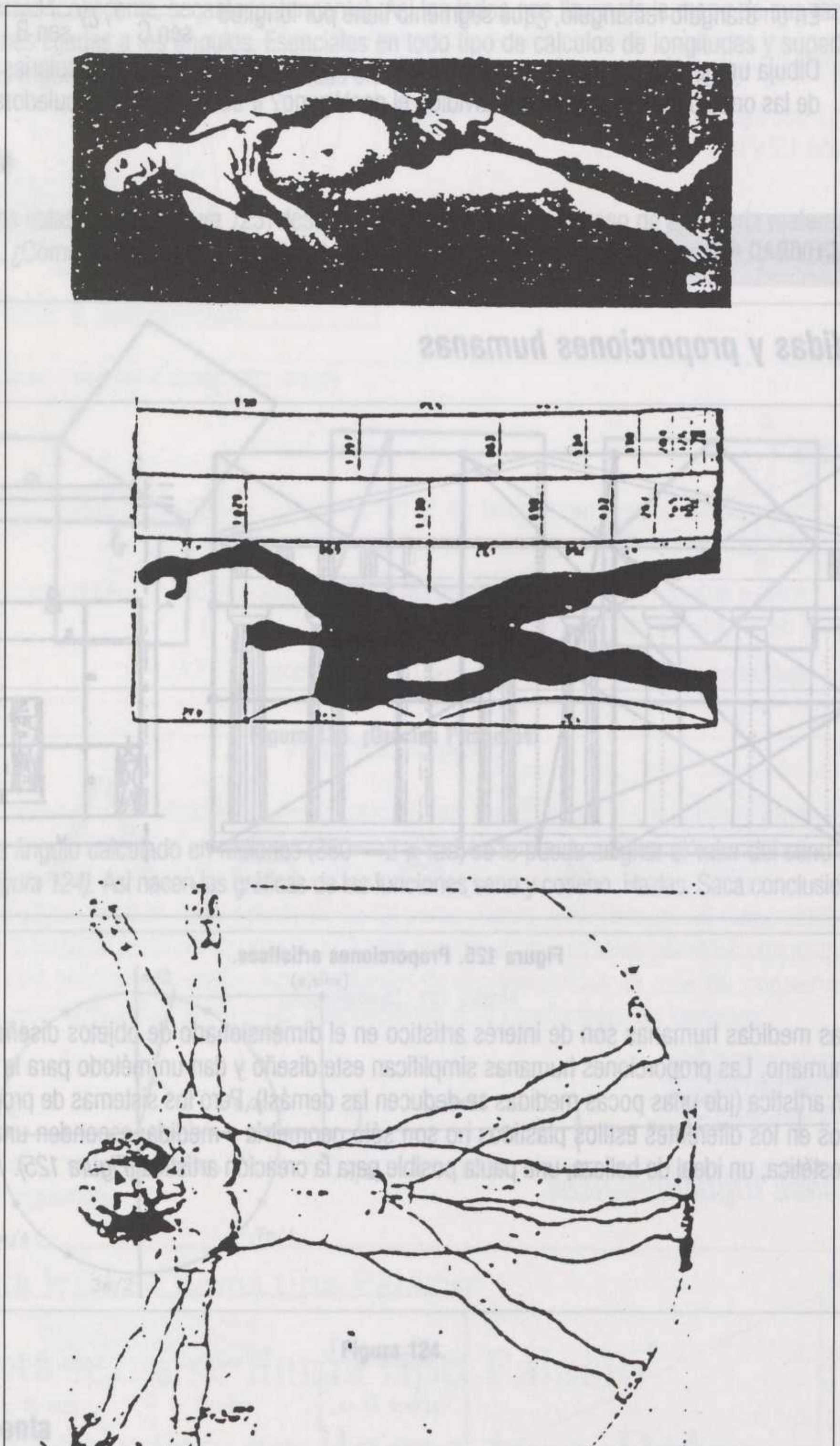


Figura 126. Proporciones en trazados.

Diseña

Aquí tienes los datos estadísticos de medidas humanas *(Figura 127)*. Calcula proporciones relevantes. Estudia qué objetos de diseño deberían incorporar dichas medidas y proporciones.

		Hombres			Mujeres		
	Dimensión del gesto o postura	**5%**	**50%**	**95%**	**5%**	**50%**	**95%**
A	Alcance vertical	190	208	222	177	190	210
B	Estatura	160	171	182	149	160	172
C	Altura de la vista	150	160	170	139	150	161
D	Altura sobre el hombro	134	144	154	124	134	145
E	Altura bajo el antebrazo	96	103	110	89	96	104
F	Altura de los nudillos	70	75	81	65	70	76
G	Proyección de la punta de los pies	7	8	10	6	7	8
H	Entre frente del pecho y nalgas	26	28	30			
J	Altura sobre el asiento	81	87	95	75	81	88
K	Altura de la vista sobre el asiento	71	76	83	65	71	77
L	Altura del antebrazo	19	22	25	16	19	23
M	Altura del muslo	14	17	19	14	16	18
N	Bajo el muslo al suelo	38	41	44	35	38	41
O	Del frente del abdomen a rodillas	36	39	42	33	36	39
P	Del frente del abdomen a punta de los pies	43	47	52	39	43	47
Q	Tras la pantorrilla a las nalgas	45	48	52	42	47	57
R	Desde la rodilla a las nalgas	57	61	66	54	59	64
S	La pierna extendida	95	102	109	90	97	105
T	Longitud del pie	26	28	30	24	26	28
U	Alcance frontal	46	50	54	44	47	51
V	Alcance lateral	145	156	177	130	144	155
X	Anchura de los hombros	42	46	50	38	42	46
Y	Anchura de las caderas	33	37	41	35	39	43
Z	Anchura de los codos	38	45	52	35	42	38

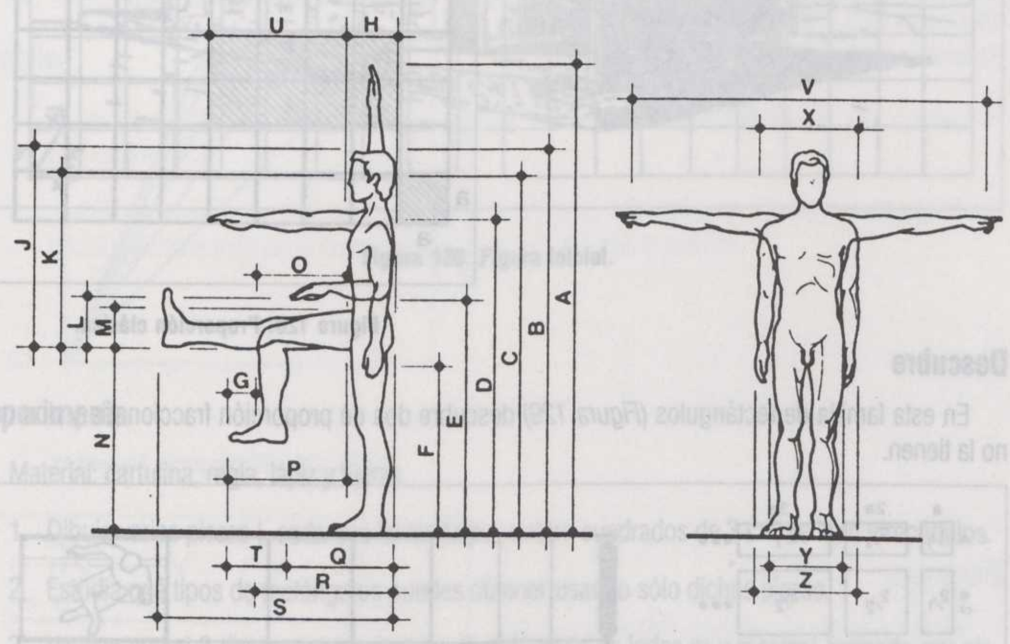


Figura 127. Medidas humanas.

Practica

1. Haz una tabla de tus medidas y tus proporciones.
2. Haz un estudio de medidas cómodas para una silla de tijera que se adapte a tus medidas.
3. En muchas escaleras la relación entre la huella (H) y la contra-huella (C) de cada escalón es H+2C=63 cm. ¿Cuáles serían valores razonables para H si debe apoyarse el pie entero?

ACTIVIDAD 43.

Proporciones clásicas

Las proporciones típicas del arte clásico eran de tipo simple 8:1, 3:2, 5:4,... Que la proporción entre dos magnitudes a:b sea una fracción m:n es indicativo de que hay una unidad que modula el trazado. Así trabajando sobre cuadrícula se pueden representar todos los rectángulos de proporción fraccionaria m:n con m y n enteros positivos. Estas proporciones se trasladaron al Arte por la vía de traspasar al objeto artístico las proporciones consideradas simples de la belleza humana *(Figura 128).*

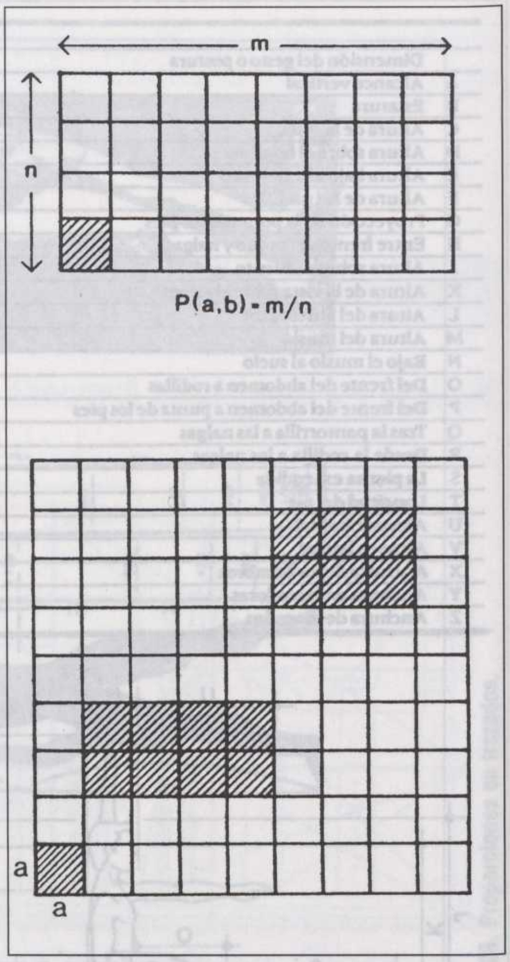


Figura 128. Proporción clásica.

Descubre

En esta familia de rectángulos *(Figura 129)* descubre dos de proporción fraccionaria y dos que no la tienen.

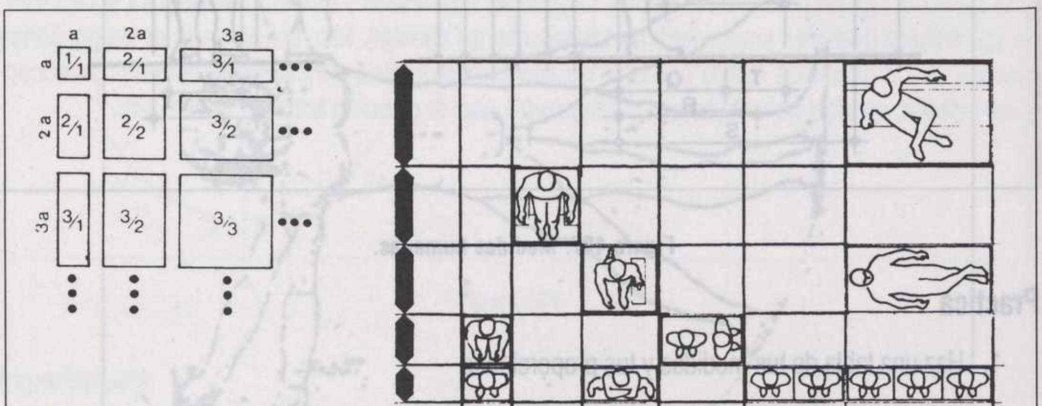


Figura 129. ¿Proporciones clásicas?

Dibuja

Material: papel, lápiz, regla y compás.

1. Cuadricula la figura inicial *(Figura 130)*.
2. Dibuja en el papel una cuadrícula con cuadrados de 5 cm de lado.
3. Dibuja la ampliación de dicha figura ayudándote de la cuadrícula dibujada. ¿Cómo habrá cambiado el tamaño? ¿Cambiará la proporción?

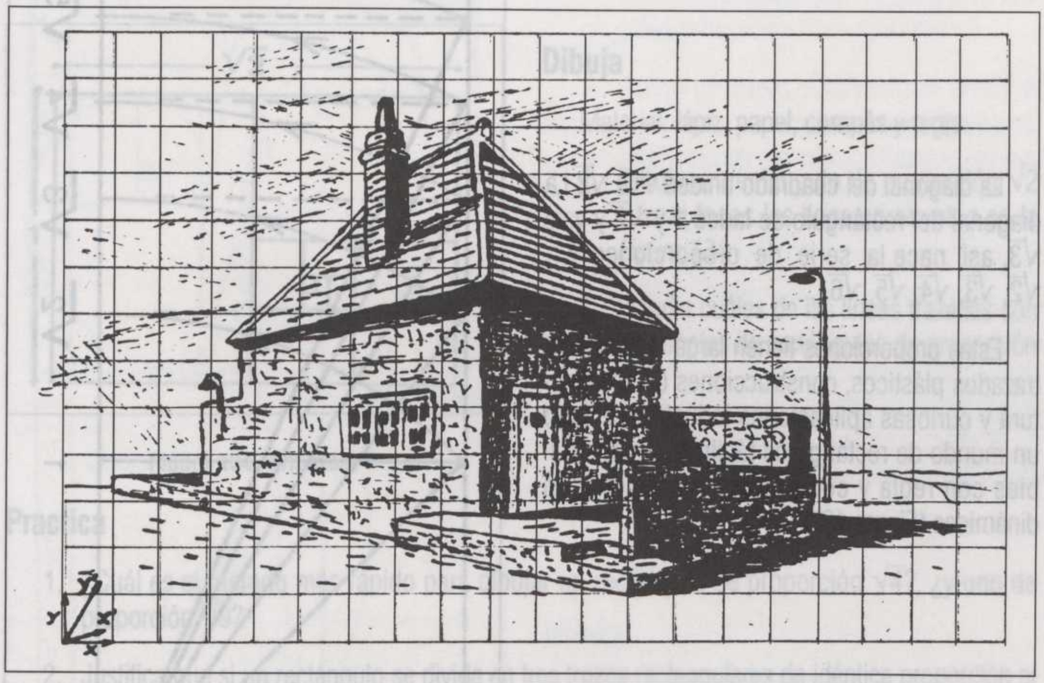


Figura 130. Figura inicial.

Experimenta

Material: cartulina, regla, lápiz y tijeras.

1. Dibuja varias piezas L cada una formada por cuatro cuadrados de 3 cm de lado y recórtalos.
2. Estudia qué tipos de rectángulos puedes obtener usando sólo dichas piezas.
3. Verifica que si 8 divide a m.n entonces el rectángulo de lados m y n estará formado por piezas L.

Practica

1. ¿Podrías cubrir un tablero de ajedrez 8x8 con 16 piezas en L formadas por cuatro cuadrados de lado igual al de la casilla del tablero?
2. Usando el tangram chino, ¿qué tipo de rectángulos sabrías formar?

ACTIVIDAD 44.

Proporciones dinámicas

La diagonal del cuadrado unidad vale $\sqrt{2}$ La diagonal del rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$ y vale $\sqrt{3}$, así nace la serie de proporciones $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,...

Estas proporciones tienen larga tradición en trazados plásticos, construcciones de arquitectura y curiosas aplicaciones industriales. Todo un mundo de rectángulos fácilmente construibles con regla y compás que se denominan dinámicos (*Figura 131*).

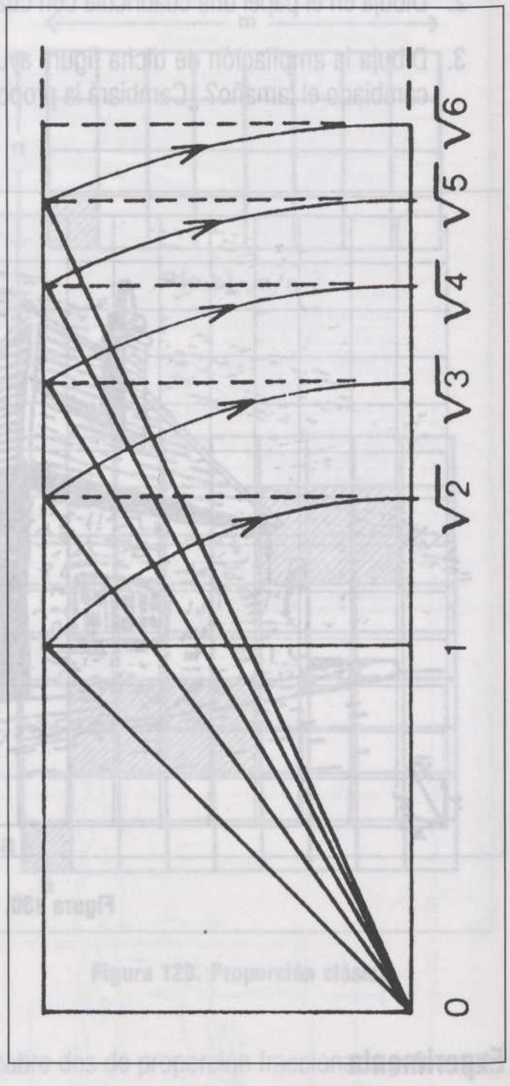


Figura 131. Rectángulos dinámicos.

Descubre

Mide los lados de una hoja DIN A4 y calcula la proporción. ¿Qué ocurre al dividir un DIN A4 en dos DIN A5? ¿Y éste en dos DIN A6?

Justifica que si una hoja de lados a y b (a<b) al dividirse en dos trozos, por la mitad de b, se convierte en dos hojas de idéntica proporción a la pieza inicial, por lo que entonces $b/a = \sqrt{2}$.

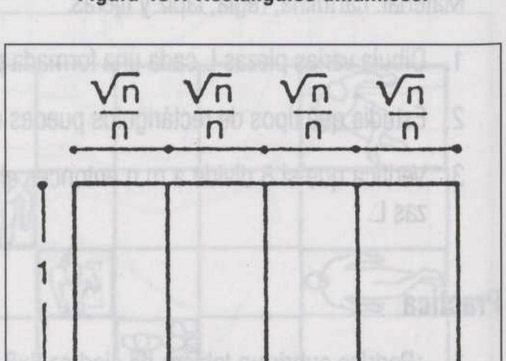


Figura 132. Sistema DINA.

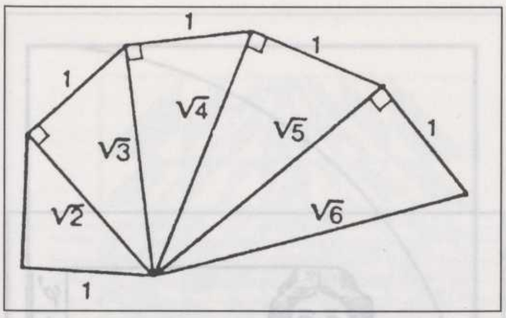


Figura 133. La serie dinámica.

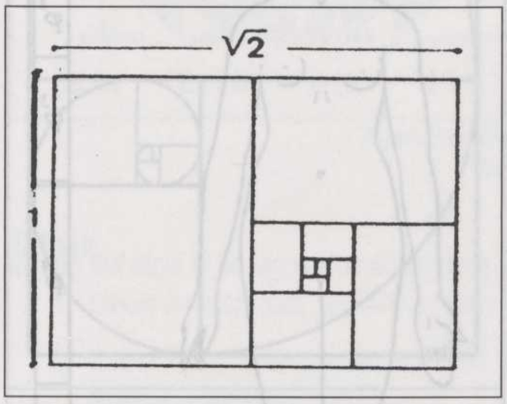


Figura 134. Armazón.

Diseña

Material: lápiz, papel, compás y regla.

Sigue el diseño de esta espiral creciente de brazos 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...hasta dar un par de vueltas *(Figura 133)*. Calcula todos los brazos dibujados.

Dibuja

Material: lápiz, papel, compás y regla.

1. Dibuja un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$ y traza todas las líneas presentes en la *Figura 134*.
2. Estudia cuáles de las líneas trazadas son diagonales de rectángulos de proporción $\sqrt{2}$.

Practica

1. ¿Cuál es el método más rápido para dibujar un rectángulo de proporción $\sqrt{4}$?, ¿y uno de proporción $\sqrt{9}$?
2. Justifica que si un rectángulo se divide en tres trozos rectangulares de idéntica proporción al inicial entonces este tiene proporción $\sqrt{3}$. Generaliza este resultado.

ACTIVIDAD 45.

La divina proporción

Los griegos hablaron de proporción áurea cuando aparecía el número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$, el cual se representa también con la letra («fi») en honor del escultor Fidias. El gran artista renacentista Lucca Paccioli habló de la «divina proporción». El número ϕ es plástico por excelencia y los rectángulos de proporción ϕ se consideran los más bellos. Por eso ϕ subyace en miles de obras de arte, en las tarjetas de crédito y en la relación entre la altura de una persona y la altura de su cintura (¡calcúlalo en tu caso!).

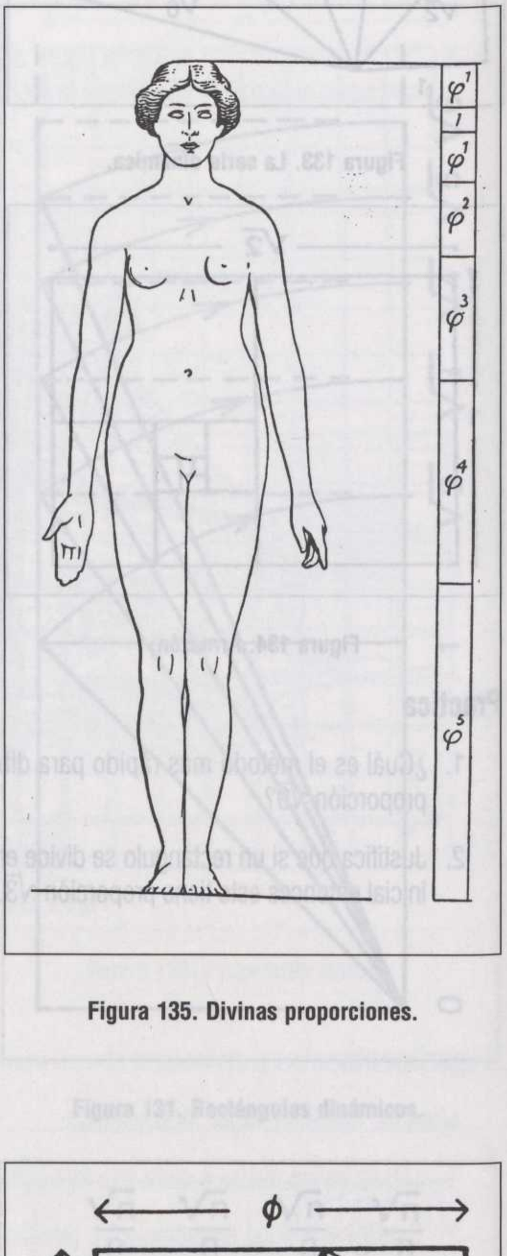


Figura 135. Divinas proporciones.

Descubre

¿Cómo describir que un rectángulo es áureo sin medir ni calcular? Pon el rectángulo horizontal y una copia del mismo vertical a su lado. Si la diagonal del primero al prolongarse pasa por el vértice superior derecho... ¡el rectángulo es áureo!

Justifícalo imponiendo la proporcionalidad de triángulos.

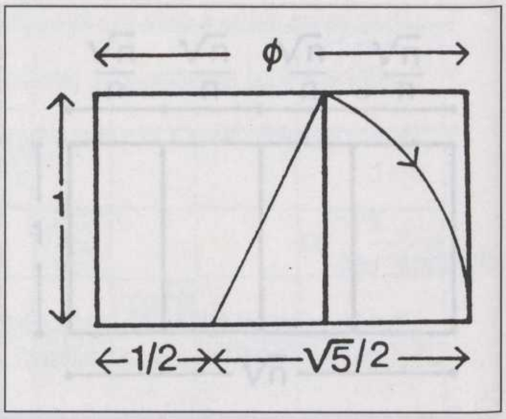


Figura 136.

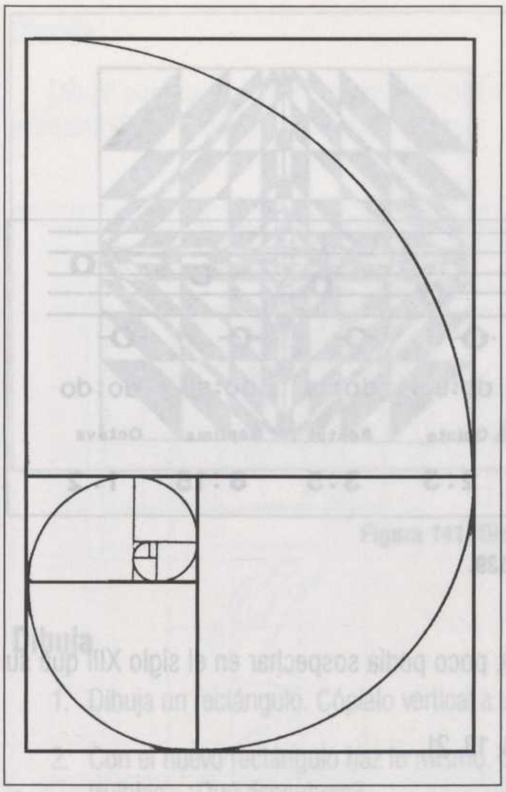


Figura 137. Hacia la espiral áurea.

Diseña

Material: papel, regla, compás y lápiz.

1. Dibuja un rectángulo áureo de 10 cm x 16,18 cm.
2. Divídelo en un cuadrado de 10 cm x 10 cm y un rectángulo de 10 cm x 6,18 cm. ¿Qué proporción tiene este último?
3. Aplica de nuevo el proceso de dividir el rectángulo en cuadrado más rectángulo. Haz la operación varias veces.
4. Traza arcos de circunferencia en los cuadrados obtenidos creando una espiral áurea *(Figura 137)*.

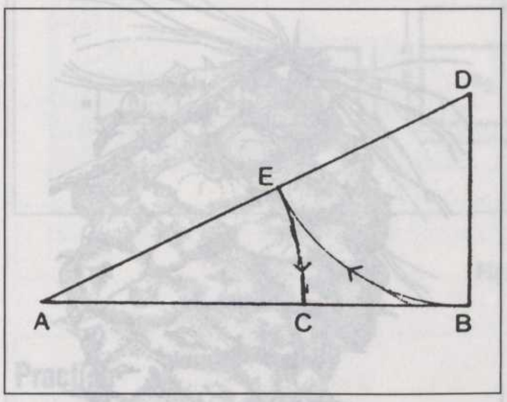


Figura 138.

Dibuja

Material: papel, regla, compás y lápiz.

1. Dibuja un segmento cualquiera **c.**
2. Levanta la perpendicular en un extremo y marca **c/2.** Traza la hipotenusa donde llevarás la medida **c/2.** Baja el resto de hipotenusa al segmento de abajo.
3. Justifica que el segmento **c**, queda dividido en dos trozos cuya razón vale ϕ *(Figura 138)*.

Practica

1. Dibuja un pentágono regular y la estrella pentagonal asociada sabiendo que *cos* $36° = \phi/2$ justifica que la relación entre el brazo de la estrella y el lado del pentágono es ϕ.
2. ¿Cuántos números positivos *x* verifican $x^3 = x^2 + x$?
3. Las tarjetas de crédito tienen proporción áurea. Tienes dos tarjetas. ¿Cómo justificarías que tienen la divina proporción?

Actividad 46.

Números de Fibonacci

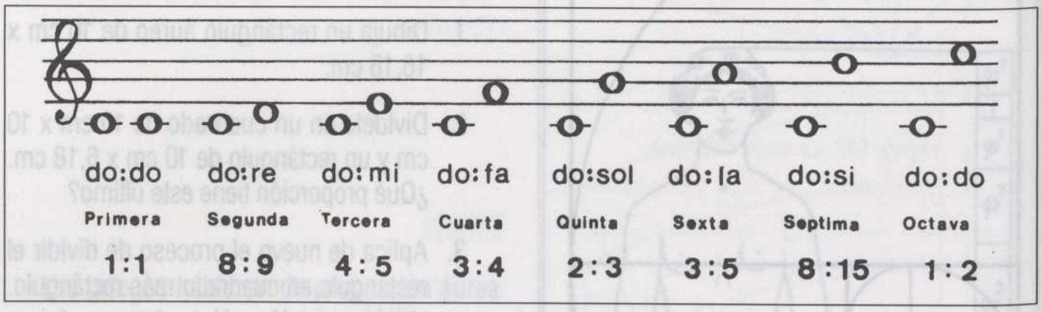


Figura 139.

Leonardo de Pisa, alias Fibonacci (1170–1250), poco podía sospechar en el siglo XIII que su serie de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

donde cada término es la suma de los dos anteriores, se convertiría en uno de los repertorios numéricos más interesantes de la historia, por su presencia en la Naturaleza y las Artes.

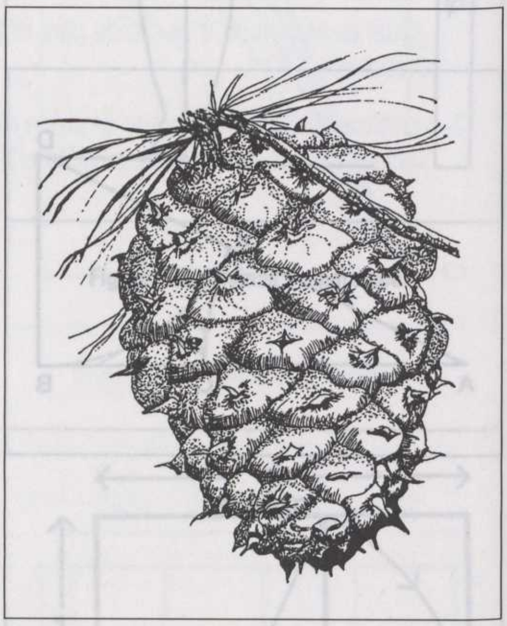


Figura 140. Fibonacci... ¡es natural!

Descubre

¿Dónde están los números de Fibonacci?

Diseña

Traza las líneas verticales y horizontales correspondientes a los números de Fibonacci indicados. Colorea en blanco y negro (ajedrezado) las regiones.

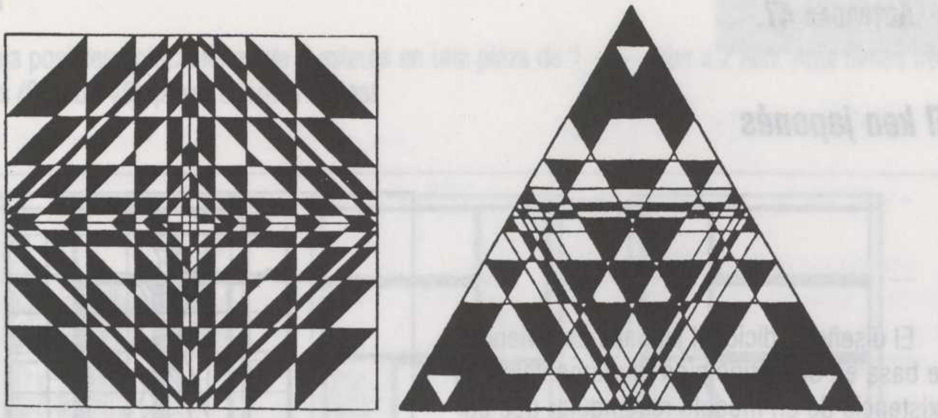


Figura 141. Diseño a la Fibonacci.

Dibuja

1. Dibuja un rectángulo. Cópialo vertical a un lado y completa el rectángulo.

2. Con el nuevo rectángulo haz lo mismo. Calcula cómo son los lados de los rectángulos construibles . ¿Qué descubres?

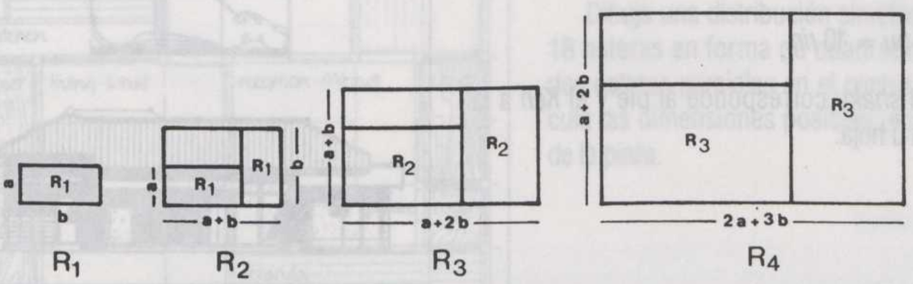


Figura 142.

Practica

1. Con una calculadora haz el conjunto de los cocientes de Fibonacci

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{6}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

   ¿A qué número tienden estos valores? Los rectángulos que tengan por proporciones dichos números ¿a qué proporción se aproximarán?

2. Halla la suma de los 1080 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

3. Halla la suma de los 99 primeros términos de la sucesión de Fibonacci que ocupan un lugar impar.

Actividad 47.

El ken japonés

El diseño tradicional japonés de viviendas se basa en dos principios fundamentales: la existencia de un módulo rectangular que por repetición genera el espacio habitable y la adopción de una medida (el *Ken*) para dicho módulo basada en la dimensionalidad humana.

1 *ri* = 36 *chó* = 2160 *Ken*

1 *chó* = 60 *Ken* = 36 *jó*

1 *jó* = 10 *shaku*

1 *Ken* = 6 *shaku* = 181,81 cm

1 *shaku* = 10 *sun* = 30,30 cm

1 *sun* = 10 *bu*

1 *bu* = 10 *rin*.

El *shaku* corresponde al pie y el *Ken* a la altura u hoja.

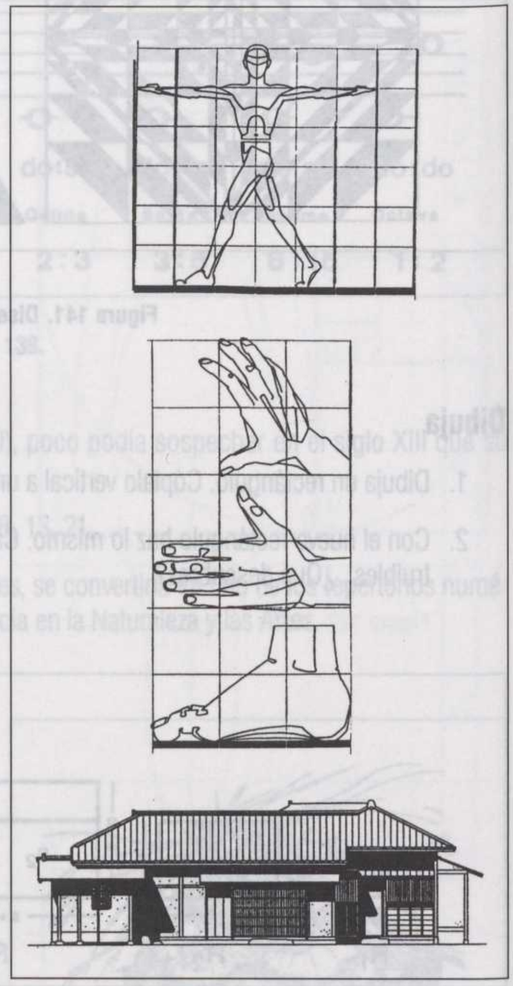


Figura 143.

Descubre

El *Ken* da la medida entre los ejes centrales de las columnas cuadradas de sección 12,12 cm. Aquí tienes la planta de dos esteras o tatamis (*Figura 144*).

Descubre las dimensiones «utilizables» de este módulo. Las esteras normales miden 85 cm x 170 cm, ¿descubres el porqué?

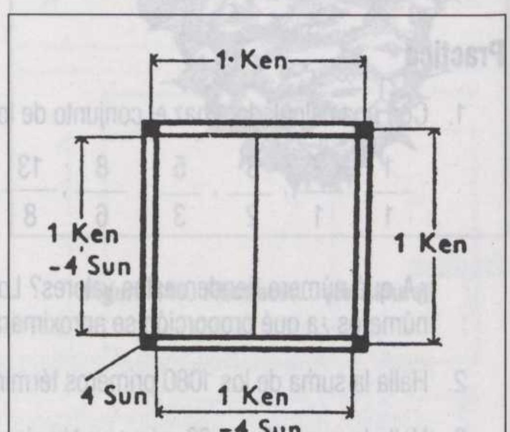


Figura 144.

Diseña

Dibuja posibles colocaciones de 6 esteras en una pieza de $1\frac{1}{2}$ *Ken* x 2 *Ken*. Aquí tienes tres ejemplos *(Figura 145)*. ¡A ver cuántos logras!

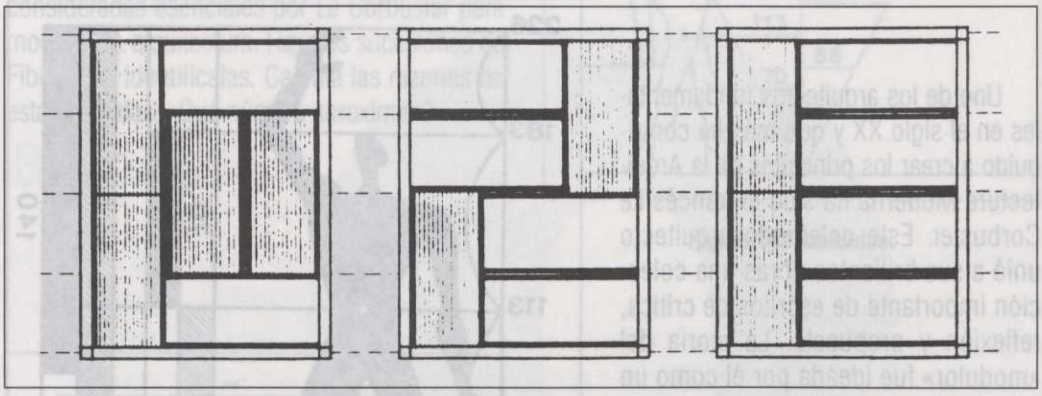


Figura 145. 6 esteras.

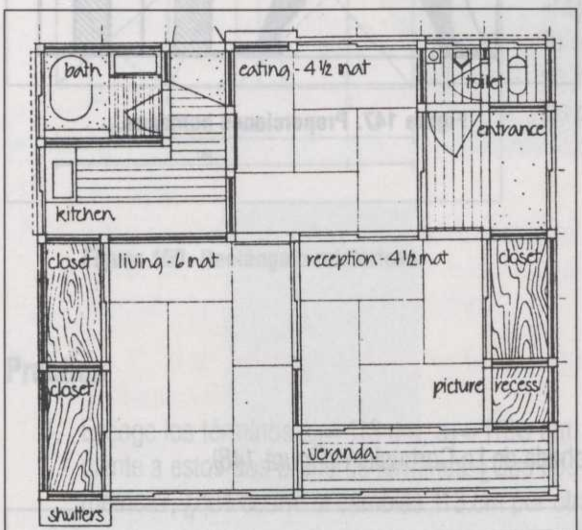


Figura 146. Planta japonesa.

Dibuja

Dibuja una distribución simétrica de 18 esteras en forma de cuadrado con dos esteras paralelas en el centro. Calcula las dimensiones posibles (en *Ken*) de la pieza.

Practica

1. Calcula en centímetros todas las medidas japonesas dadas al principio aprovechando los valores del *Ken* y el *shaku*.

2. Estudia posibles distribuciones de 4 esteras en una pieza de $1\frac{1}{2}$ *Ken* x $1\frac{1}{2}$ *Ken* (donde aparece un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ *Ken* situable en diversos lugares).

ACTIVIDAD 48.

El modulor de Le Corbusier

Uno de los arquitectos fundamentales en el siglo XX y que más ha contribuido a crear los principios de la Arquitectura Moderna ha sido el francés Le Corbusier. Este celebrado arquitecto unió a sus brillantes obras una colección importante de escritos de crítica, reflexión y propuesta. La teoría del «modulor» fue ideada por él como un camino para hallar un módulo realista para construir y sensible al usuario humano del espacio creado *(Figura 147).*

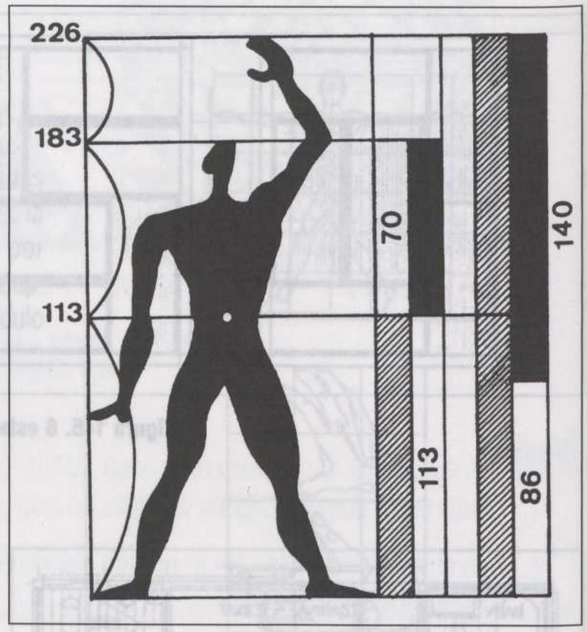


Figura 147. Proporciones humanas.

Descubre

¿Qué proporciones descubres en esta fachada de Le Corbusier? *(Figura 148).*

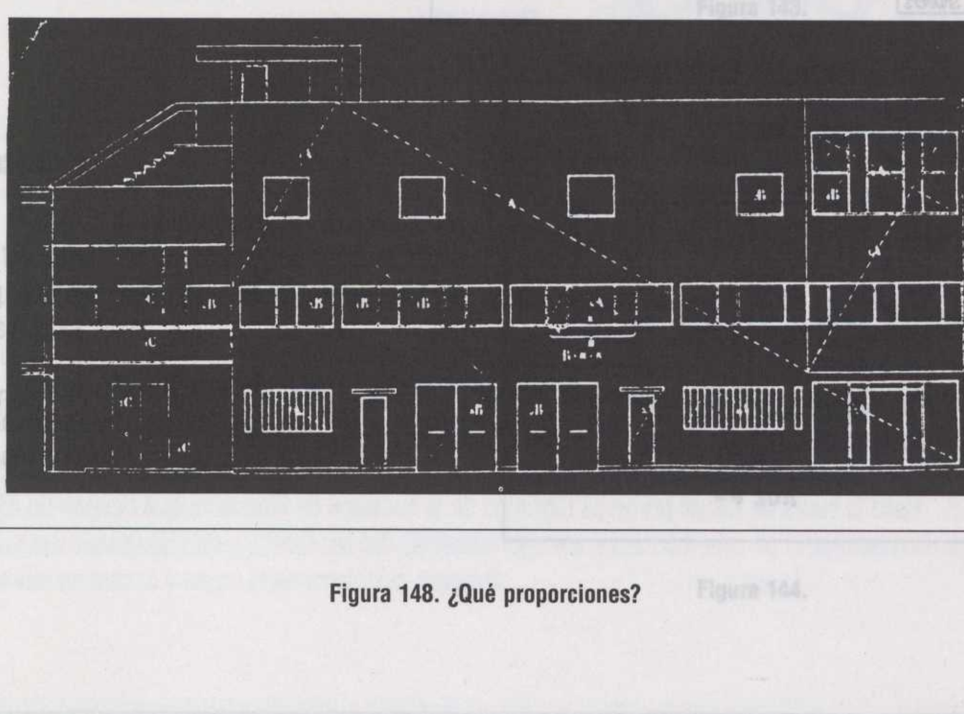


Figura 148. ¿Qué proporciones?

Calcula

Aquí hay las series roja y azul de medidas consideradas esenciales por Le Corbusier para modular en arquitectura. Hay dos sucesiones de Fibonacci. Identifícalas. Calcula las razones de estas medidas. ¿Qué número aproximan?

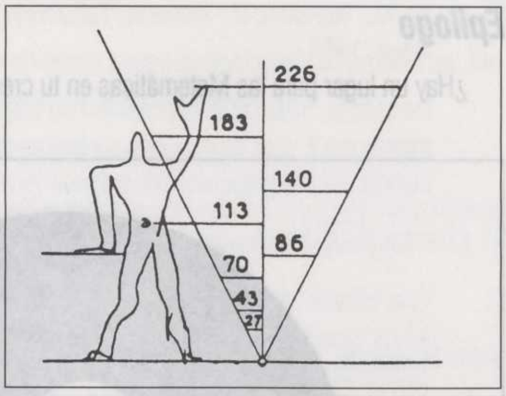


Figura 149. Medidas.

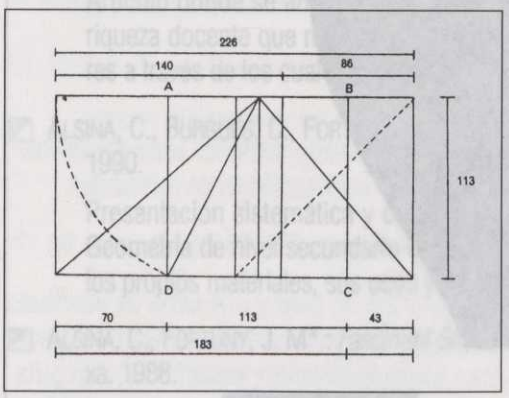


Figura 150. Rectángulo misterioso.

Dibuja

Uno de los dibujos básicos en la obra del «Modulor» aparece reproducido aquí *(Figura 150)*. Tu ejercicio de dibujo está en intentar ver cómo se procedió al trazado del mismo e investigar las propiedades que se esconden detrás de él.

Practica

1. Escoge los términos $a_0 = 113$ cm, $a_1 = 113\phi$ cm. Forma la sucesión de Fibonacci correspondiente a estos dos primeros términos. ¿Qué tipo de sucesión sale?, ¿es una progresión geométrica?, ¿qué ocurre si cambias 113 cm por otra cantidad *d*?

2. Estudiar las proporciones en los trazados de las figuras *(Figura 151)*:

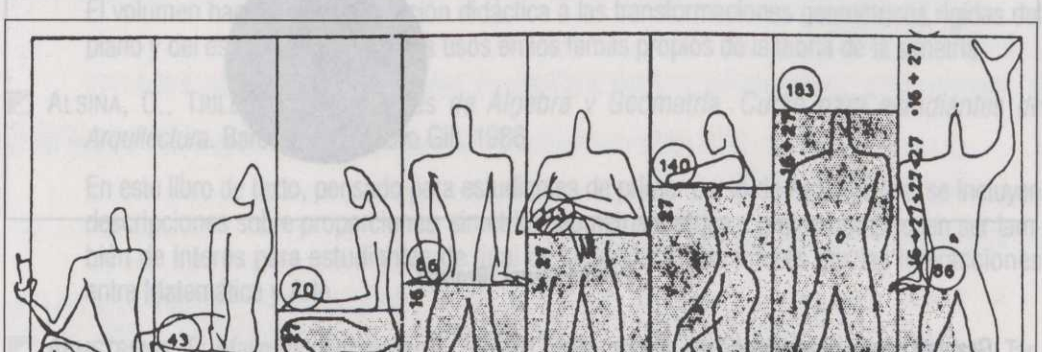
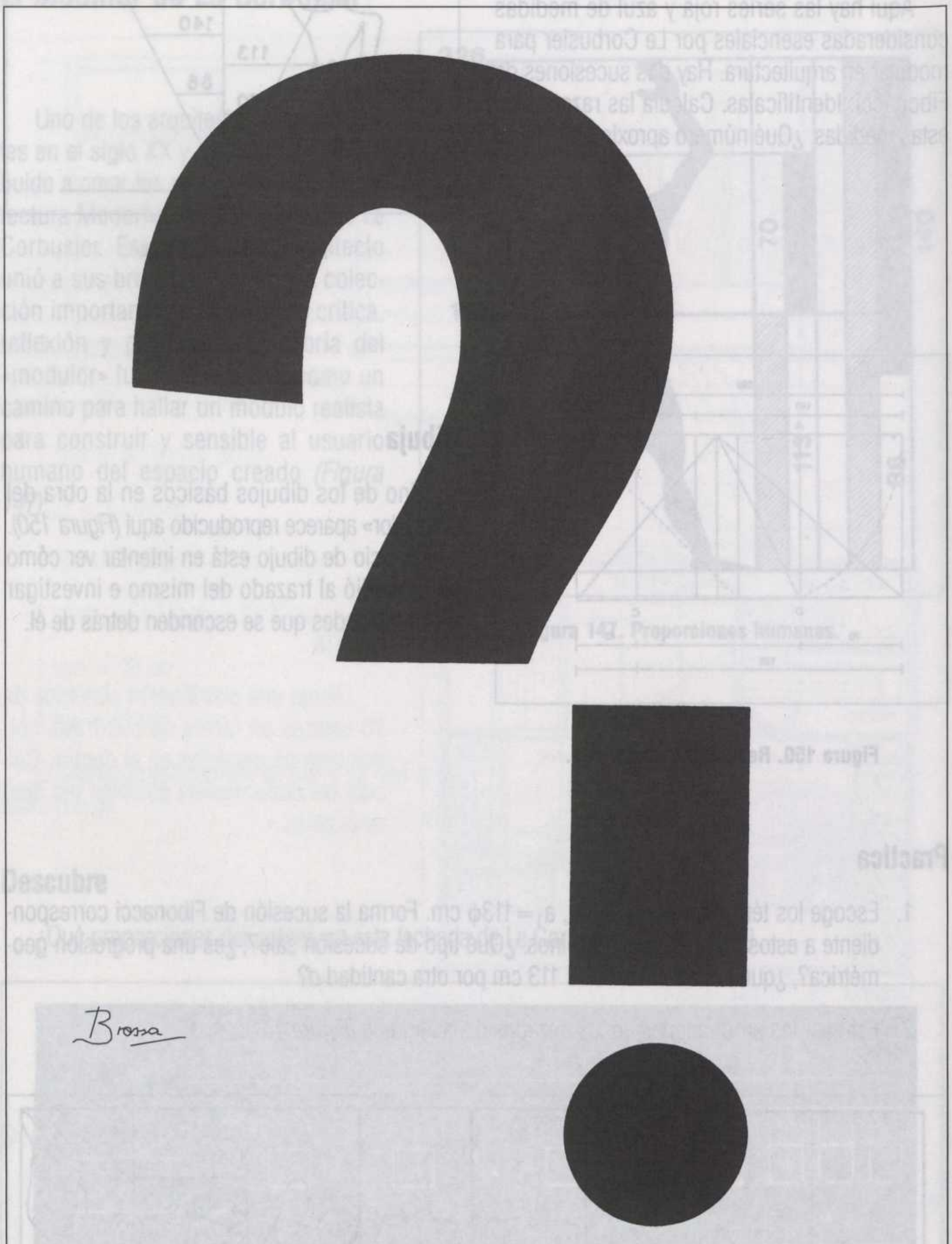


Figura 151.

Epílogo

¿Hay un lugar para las Matemáticas en tu creatividad?



Poema visual (Brossa).

¡Gracias por tu respuesta!

Bibliografía

- Alsina, C. «Diseño, Arte y Geometría: vivir y crear en 3D». *Actas II Enc. Exp. Plástica de Galicia*, Pub. Univ. Santiago de Compostela. 1991.

  Artículo donde se analizan las relaciones entre Geometría, Arte y Diseño, haciendo ver la riqueza docente que resulta de dicha interacción e incluyendo propuestas concretas de talleres a través de los cuales afrontar este reto.

- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. Mª.: *Materiales para construir la Geometría.* Madrid, Síntesis. 1990.

  Presentación sistemática y clasificada de todos los materiales integrables en un taller de Geometría de nivel secundario o de formación de profesores. Se describe la construcción de los propios materiales, sus usos y se dan ejemplos de utilización en clase.

- Alsina, C., Fortuny, J. Mª.: *Fascinant Simetria*. Barcelona, Pub. Museo de la Ciencia. Fund. La Caixa. 1988.

  Libro de divulgación correspondiente a la exposición itinerante del mismo título y donde, a través de imágenes, se hace un recorrido completo por el mundo de la simetría en sus aspectos técnicos, artísticos y científicos.

- Alsina, C., García, J. L., Jacas, J.: *Temes clau de Geometria* (en catalán). Barcelona, Pub. Univ. Politècnica Catalunya. 1992.

  Publicación para fijar niveles de Geometría en los meses previos a la entrada universitaria, estructurada en base a la resolución de problemas métricos, trigonométricos, analíticos y de transformaciones. Todos los ejercicios están resueltos.

- Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C. *Simetría Dinámica*. Madrid, Síntesis. 1990.

  El volumen hace una aproximación didáctica a las transformaciones geométricas rígidas del plano y del espacio, así como sus usos en los temas propios de la teoría de la simetría.

- Alsina, C., Trillas, E.: *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*. Barcelona, Gustavo Gili. 1986.

  En este libro de texto, pensado para estudiantes de primer curso de Arquitectura, se incluyen descripciones sobre proporciones, simetría, geometría métrica y grafos que pueden ser también de interés para estudiantes de final de secundaria con interés por las interacciones entre Matemática y Arte.

- Armstrong, T.: *Make moving patterns. How to make optical illusions of your own.* Norfolk, Tarquin Pub. 1982.

  Manual para hacer uno mismo experimentos con imágenes que se mueven por el efecto óptico de superponer figuras a bandas negras y transparentes.

BOLES, M., NEWMAN, R.: *Universal Patterns (1) and The surface plane (2).* Bradford, Pythagorean Press. 1990.

Dos libros, fruto de la celebración de talleres de Geometría, llenos de propuestas educativas interesantes. Los enunciados de temas para hacer proyectos, las ilustraciones y la extrema claridad de las presentaciones deben tenerse en cuenta.

COXETER, H. S. M.: *Fundamentos de Geometría.* México, Limusa Wiley. 1971.

Este popular libro de nivel universitario es referencia obligada para el profesor. H. S. M. Coxeter es uno de los grandes geómetras del siglo y la relación de temas tratados en el libro es altamente sugestiva.

COXETER, H. S. M. *et al.: M.C. Escher: Art and Science.* New York, North-Holland. 1986.

Este compendio, como otros anteriores, aporta una presentación y análisis del gran artista M. C. Escher, uno de los grandes ejemplos de cómo el Arte y la Matemática pueden fundirse en una beneficiosa colaboración.

EVES, H.: *Estudio de las Geometrías* (2 vol.) México, Uteha. 1963.

Estos volúmenes contienen una enorme cantidad de información sobre los aspectos geométricos más fundamentales incluyendo problemas de difícil localización en otros tratados.

GARFUNKEL, S. *et al.,* COMAP:. *For all practical purposes.* Lexington, COMPA. 1987.

Se trata de un programa educativo, montado en torno a un libro y una serie de veintiseis videos de media hora cada uno, dedicado a paresentar una visión amplia, amena e impecable de ternas fundamentales (tamaño y forma, gestión, elección, estadística, computación,...). Los vídeos sobre tamaño y forma son un precioso material para la clase de Matemáticas de la forma.

GHYKA, M. C.: *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes.* Barcelona, Poseidón. 1977.

Un clásico en proporciones geométricas y sus usos, con especial atención a la divina proporción y a ejemplos naturales y artísticos.

GOMBRICH, E. H.: *Arte e Ilusión. Estudio sobre psicología de la representación pictórica.* Barcelona, Gustavo Gili. 1979.

Referencia obligada en el estudio, desde la óptica artística, de los temas de representación y su percepción.

GRUNBAUM, B., SHEPHARD, G. C.: *Tiling and Patterns.* New York, W. H. Freeman. 1986.

El libro más clásico en el tema de mosaicos y patrones, obra de dos grandes figuras de la Geometría del siglo XX.

GUILLÉN, G.: *Poliedros.* Madrid, Síntesis. 1990.

El libro contiene una interesante descripción de los principales tipos de poliedros y los problemas de su clasificación así como los teoremas fundamentales en este campo. Se dan indicaciones sobre materiales y actividades para la clase.

GUZMÁN, M. De:. *Aventuras Matemáticas.* Barcelona, Labor. 1987.

Interesante libro para practicar con gusto la resolución de problemas.

- Guzmán, M. De.: *Para pensar mejor.* Barcelona, Labor. 1991.

  Obra extraordinaria de reflexión, análisis y propuestas sobre la resolución de problemas. Ineludible en cualquier centro donde haya profesores de Matemáticas.

- Holt, M.: *Mathematics in Art.* Londres, Studio Vista. 1971.

  El pequeño libro fue en su día una aproximación pionera a cómo los recursos matemáticos han servido a la creación artística, siendo todos los ejemplos de enorme interés.

- Malkevitch, J. *et al. Geometry's Future.* Lexington, COMAP. 1991.

  Propuestas sobre los nuevos contenidos de Geometría. Un documento que marcará el futuro de la Geometría en la enseñanza.

- Mandelbrot, B.: *The Fractal Nature of Geometry.* New York, W.H. Freeman. 1982.

  Libro fundador y sugerente sobre fractales. Aunque contiene aproximaciones matemáticamente duras se complementa con ejemplos sugestivos. Imprescindible en cualquier biblioteca.

- Martín, G. E.: *Polyominoes. A guide to puzzle and problems in tiling.* Washinghton, MAA. 1991.

  Una de las publicaciones más sugestivas de los últimos años al presentar los problemas (resueltos o abiertos) de los poliominos de forma sistemática. Es una magnífica fuente de ejercicios y propuestas de proyectos.

- Millington, I.: *Curve stitching. The art of rewing beautiful mathematical patterns.* Norfolk, Tarquin Pub. 1989.

  Manual práctico sobre todos los procedimientos para hacer un taller de bordado de curvas. Claro, completo y muy bello.

- Moscovich, I.: *The magic cylinder book.* Norfolk, Tarquin Publications. 1988.

  Manual para descubrir los secretos y ser creativos en el mundo de las imágenes anamórficas basadas en la «simetría» sobre espejos cilíndricos.

- Pedoe, D.: *La Geometría en el Arte.* Barcelona, Gustavo Gili. 1982.

  Publicación sugestiva y muy completa cuyo título cumple con lo que promete y de la cual pueden extraerse numerosas propuestas de investigación. Ideal para proponer trabajos usando algunos de sus capítulos básicos.

- Peitgen, H., Richter, P.: *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems.* Berlin, Springer-Verlag. 1986.

  Un libro con maravillosas imágenes computacionales que ilustran la belleza descubrible a través de los fractales y la posibilidad de simular imágenes reales a partir de dicha técnica.

- Pólya, G.: *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Trillas. 1985.

  El libro pionero en el tema de la resolución de problemas que se ha convertido en referencia imprescindible. A menudo el estilo narrativo de Pólya constituye una inspiración para la propia actuación educativa del lector-profesor.

- Puig Adam, P.: *Curso de Geometría Métrica* (2 vol.) Madrid, Bib. Matemática. 1970.

  Estos clásicos dos volúmenes de Geometría Métrica no deben faltar en la biblioteca de Matemáticas de ningún centro. El carácter enciclopédico de la publicación permite encontrar la mayoría de construcciones métricas, una enorme cantidad de problemas y todo ello con el estilo claro y didáctico que siempre caracterizó a Don Pedro Puig Adam.

SCHATTSCHNEIDER, D., WALKER, W.: *M.C. Escher Kaleidocydes.* Norfolk, Tarquin Pub. 1991.

Manual, con modelos para recortar, sobre los principales modelos de caleidocidos y poliedros con decoración basada en la obra gráfica de Escher.

SENECHAL, M. *et al.*: *Shaping space. A polyhedral approach.* Boston, Birkhäuser. 1988.

Deliciosa colección de artículos en torno del mundo de los poliedros en una aproximación básica a la tridimensionalidad. Contiene propuestas sugerentes para talleres de poliedros.

WEYL, H.: *La Simetría.* Barcelona, Prom. Cultural. 1975.

Un libro clásico, pionero en la visión interdisciplinaria de la simetría, que se ha convertido en referencia obligada tanto por su calidad expositiva como por ser obra de uno de los grandes matemáticos de este siglo.

Anexo: Currículo oficial(*)

Introducción

Para desenvolverse en el medio artístico es necesario conocer y saber manejar todos los elementos y componentes geométricos de las formas que han sido y son utilizados por artistas y diseñadores para crear sus obras La importancia de la Geometría radica precisamente en su utilidad para el estudio y manejo de las formas, tanto las que aparecen en la naturaleza, como las de creación humana. En las creaciones artísticas o de diseño el componente matemático es un factor más que aparece junto con la luz, el color, o el volumen. Es la conjunción de todos estos elementos lo que proporciona un resultado final logrado o malogrado. Se perfilan así los centros de interés de esta materia:

Los poliedros regulares o sólidos platónicos y los arquimedianos o semirregulares sirven en la mayoría de los casos como estructura básica en arquitectura, escultura o diseño tridimensional.

Diversos estudios sobre la teoría de proporciones son fundamentales para la adecuada creación y combinación armónica de las partes de una obra.

La medida de longitudes, superficies y volúmenes. Cualquier diseñador necesitará tener un buen dominio en medir formas, o en saber estimar certeramente su área o volumen, para elaborar presupuestos o necesidades de material.

Las transformaciones permiten estudiar la regularidad o simetría de las formas y el orden gráfico, y también son utilizadas para crear la ilusión del movimiento. La simetría y las proporciones, ambas en concordancia, dan idea de equilibrio y armonía.

La construcción de curvas tales como círculo, elipse, parábolas, diversas espirales, todas ellas muy usadas en las construcciones, en el diseño y en las artes en general.

Los estudios numéricos han de ayudar a un conocimiento más completo de los materiales a partir de sus propiedades cuantitativas y así se podrá decidir más críticamente sobre su uso.

Objetivos generales

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que las alumnas y los alumnos adquieran las siguientes capacidades:

1. Comprender y utilizar el lenguaje geométrico y su representación matemática adecuada para describir formas, clasificarlas y esquematizarlas.

(*) Resolución de 29 de diciembre de 1992, de la Dirección General de Renovación Pedagógica, por la que se regula el currículo de las materias optativas de Bachillerato («BOE» nº 25 de 29 de enero de 1993).

2. Identificar y comprender los procesos matemáticos de pensamiento, aplicándolos a la resolución de problemas.

3. Reconocer formas y realizar medidas en el plano y en el espacio, formulando y contrastando conjeturas sobre propiedades geométricas, desarrollando la intuición espacial.

4. Aplicar el conocimiento matemático a la explicación de los quehaceres artísticos, apreciando las cualidades estéticas y creativas de las formas y su presencia en la naturaleza y el arte.

5. Hacer uso de los sistemas de proporcionalidad para el estudio y construcción de formas, creando y diseñando modelos geométricos.

6. Utilizar los movimientos para buscar propiedades, regularidades y relaciones en las figuras geométricas.

7. Utilizar la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de elementos geométricos para utilizarlos u obtener otros nuevos.

8. Valorar el uso del lenguaje geométrico aplicándolo a la comunicación artística y al diseño, apreciando la utilidad de aparatos e instrumentos específicos de medida y de cálculo.

9. Plantear el trabajo con una actitud flexible y crítica, abordándolo y revisándolo desde distintos ángulos.

Contenidos

Elementos y movimientos en el plano

Elementos que intervienen en el plano:

Puntos, rectas, figuras y configuraciones planas.

Teselaciones. Mosaicos.

Isometría: Caracterización.

Traslación: Definición y caracterización, propiedades, producto de traslaciones, transformadas de las figuras elementales.

Giro: Definición y caracterización, propiedades, producto de giros, transformadas de las figuras elementales.

Simetría central y axial: definición y caracterización, propiedades, composición de simetrías, transformadas de figuras simples.

Composición de isometrías.

Frisos.

Elementos y movimientos en el espacio

Elementos que intervienen en la configuración espacial: Punto, rectas, planos y ángulos diedros.

Cuerpos sólidos: Poliedros regulares e irregulares, truncamientos, teselaciones espaciales, inscripciones de cuerpos sólidos, empaquetamientos, medidas de longitud, áreas y volúmenes.

Isometrías en el espacio: Rotación alrededor de una recta y con un ángulo conocido, traslación según un vector, reflexión especular y central, composición de isometrías: movimiento helicoidal, reflexión en deslizamiento y reflexión rotatoria.

Curvas y superficies

Lugares geométricos elementales:

Mediatrices y bisectrices. Circunferencia y círculo: Secantes, tangentes y ángulos en la circunferencia. Eje radical. Espiral de Arquímedes. Plano mediador y plano bisector. Superficie esférica y cilíndrica.

Envolventes de rectas:

Trazado de la elipse como envolvente.

Trazado de la parábola e hipérbola: Estudio de sus propiedades, diferentes construcciones.

Análisis de la astroide.

Estudio de la cicloide.

Envolventes de círculos y de curvas:

Construcción y análisis de la cardioide, envolvente de la parábola, caracoles y nefroide.

Curvas fractales.

Proporciones y medidas

Razones y proporciones: Definiciones y propiedades.

Clases: Geométrica, aritmética y armónica.

Homotecia y semejanza:

Relaciones entre los perímetros, áreas y volúmenes en las figuras semejantes.

Razones trigonométricas.

Proporciones notables:

Proporción áurea. Construcciones.

Proporciones antropomórficas. Escalas. El modulor. El ken.

Criterios de evaluación

1. *Resolver problemas de cubrimientos en el plano a partir de figuras simples y localizar en un friso o en un mosaico un motivo mínimo que lo pueda generar.*

   Este criterio pretende averiguar si el alumno o alumna ha adquirido un conocimiento suficiente de las configuraciones planas y de las técnicas necesarias para llegar a uno de los más bellos recursos de la decoración artística: la simetría del diseño geométrico reflejada en frisos y mosaicos. Con ello se pretende conocer si saben combinar movimientos para crear nuevas figuras y clasificarlas.

2. *Obtener la transformada de una figura bi o tridimensional mediante movimientos y semejanzas y describir estas transformaciones cuando se conocen la figura original y la resultante*

   Este criterio pretende comprobar que los alumnos saben aplicar los movimientos en el plano y en el espacio, conociendo los elementos que los definen. También comprobar que saben reconocer cuáles se han utilizado para transformar una figura dada. Conviene limitar el tratamiento analítico a traslaciones y simetrías de ejes verticales y horizontales; para el resto se utilizarán métodos gráficos y descriptivos.

3. *Construir poliedros, en especial los regulares, truncar éstos para obtener poliedros semirregulares, describiendo, en su caso, cómo han sido manipulados, codificar y clasificar.*

   Este criterio va dirigido a verificar que los alumnos conocen los poliedros regulares y las relaciones numéricas que en ellos subyacen. Esto se puede comprobar en su capacidad para generar nuevos poliedros mediante cortes en los anteriores. Conviene que se ejercite la intuición espacial, el cálculo de medidas y el conocimiento de las relaciones plano-espacio.

4. *Utilizar los conocimientos sobre las proporciones en la construcción de formas y estructuras, analizando y cuantificando la dependencia que las partes guardan entre sí y con el todo.*

   Con este criterio se pretende comprobar si los alumnos son capaces de elaborar composiciones artísticas y de diseño, utilizando las proporciones, en especial las dinámicas y la sección áurea. Para ello deberán conocer la reiterada aparición a lo largo de la historia en las Artes y en algunas formas de la Naturaleza del «número de oro". Con la proporción el alumno adquirirá las ideas de ritmo y equilibrio, necesarias para toda composición artística armónica.

5. *Identificar y construir lugares geométricos a partir de elementos matemáticos conocidos, y describir las proporciones matemáticas que verifican.*

   En este criterio el énfasis se pondrá en la obtención gráfica y descripción de lugares geométricos como cónicas, espirales, cardioide, astroide, cicloide, etc. Se conocerán y utilizarán sus propiedades matemáticas sin recurrir a manipulaciones algebraicas complicadas.

6. *Resolver problemas de medición de segmentos, superficies y volúmenes en figuras y cuerpos regulares o que se puedan descomponer en éstos.*

   Este criterio pretende comprobar que el alumno o alumna es capaz de calcular distancias usando el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas en aquellos casos que lo requieran. Pretende también evaluar si los alumnos son capaces de estimar y calcular las características de volumen y superficie de algunos proyectos artísticos o de diseño, a partir de formas regulares.

7. *Aplicar estrategias de resolución de problemas, utilizando los recursos que ofrece la particularización, la generalización y la analogía, para buscar un camino, un proceso, con el que llegar a una solución.*

   En este criterio el interés se centra en la capacidad del alumno o alumna para aplicar correctamente los conceptos y destrezas que ha aprendido y para hacer frente a la interpretación, obtención y predicción de resultados geométricos, siendo importante la comprobación habitual de las soluciones.

nocer cuáles se han utilizado para transformar una figura dada. Conviene limitar el tratamiento analítico a traslaciones y simetrías de ejes verticales y horizontales; para el resto se utilizarán métodos gráficos y descriptivos.

3. *Construir poliedros, en especial los regulares, truncar éstos para obtener poliedros semirregulares, describiendo, en su caso, cómo han sido manipulados, codificar y clasificar.*

   Este criterio va dirigido a verificar que los alumnos conocen los poliedros regulares y las relaciones numéricas que en ellos subyacen. Esto se puede comprobar en su capacidad para generar nuevos poliedros mediante cortes en los anteriores. Conviene que se ejercite la intuición espacial, el cálculo de medidas y el conocimiento de las relaciones plano-espacio.

4. *Utilizar los conocimientos sobre las proporciones en la construcción de formas y estructuras, analizando y cuantificando la dependencia que las partes guardan entre sí y con el todo.*

   Con este criterio se pretende comprobar si los alumnos son capaces de elaborar composiciones artísticas y de diseño, utilizando las proporciones, en especial las dinámicas y la sección áurea. Para ello deberán conocer la reiterada aparición a lo largo de la historia en las Artes y en algunas formas de la Naturaleza del «número de oro". Con la proporción el alumno adquirirá las ideas de ritmo y equilibrio, necesarias para toda composición artística armónica.

5. *Identificar y construir lugares geométricos a partir de elementos matemáticos conocidos, y describir las proporciones matemáticas que verifican.*

   En este criterio el énfasis se pondrá en la obtención gráfica y descripción de lugares geométricos como cónicas, espirales, cardioide, astroide, cicloide, etc. Se conocerán y utilizarán sus propiedades matemáticas sin recurrir a manipulaciones algebraicas complicadas.

6. *Resolver problemas de medición de segmentos, superficies y volúmenes en figuras y cuerpos regulares o que se puedan descomponer en éstos.*

   Este criterio pretende comprobar que el alumno o alumna es capaz de calcular distancias usando el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas en aquellos casos que lo requieran. Pretende también evaluar si los alumnos son capaces de estimar y calcular las características de volumen y superficie de algunos proyectos artísticos o de diseño, a partir de formas regulares.

7. *Aplicar estrategias de resolución de problemas, utilizando los recursos que ofrece la particularización, la generalización y la analogía, para buscar un camino, un proceso, con el que llegar a una solución.*

   En este criterio el interés se centra en la capacidad del alumno o alumna para aplicar correctamente los conceptos y destrezas que ha aprendido y para hacer frente a la interpretación, obtención y predicción de resultados geométricos, siendo importante la comprobación habitual de las soluciones.

Dirección General de Renovación Pedagógica

Subdirección General
de Programas Experimentales