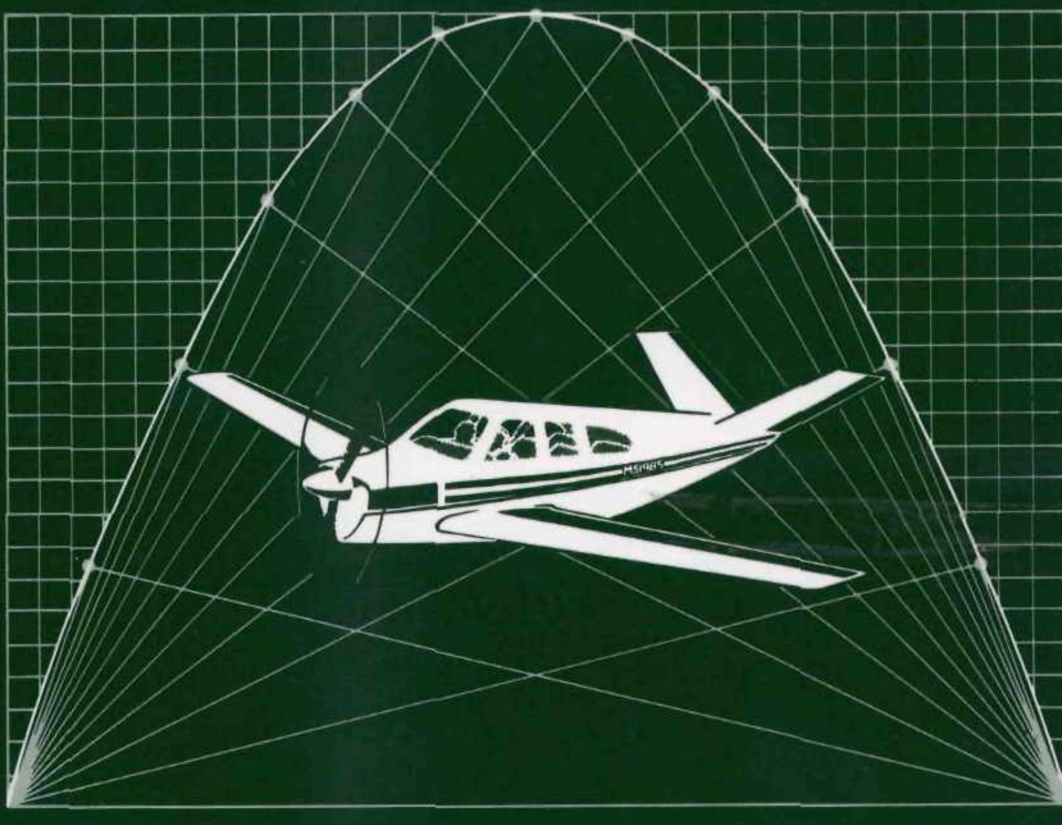
El lenguaje de funciones y gráficas



Shell Centre for Mathematical Education

Ministerio de Educación y Ciencia
Centro de Publicaciones

Servicio Editorial
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

Argitarapen Zerbitzua
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

El lenguaje de
funciones y gráficas

Título original de la obra:
The Language of Functions and Graphs

Publicado en 1985 por el Joint Matriculation Board.
Manchester M15 6EV. England.

Edición en español. 1990

I.S.B.N.: 84-7585-236-X

Depósito legal: BI-901-90

Fotocomposición: Ipar, S.C.L. Particular de Zurbaran, 2-4. Bilbao.

Imprime: Editorial Ellacuría, S.A.L. Ribera de Erandio, 8. Erandio.

El lenguaje de funciones y gráficas

Este módulo es una traducción de:

The Language of Functions and Graphs

Shell Centre for Mathematical Education
Joint Matriculation Board

Traducción y adaptación de Félix Alayo

Ministerio de Educación y Ciencia
Centro de Publicaciones

SERVICIO EDITORIAL
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO
ARGITARAPEN ZERBITZUA
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

Este módulo contiene

Esta unidad se refiere al dibujo e interpretación de gráficas extraídas de situaciones que son presentadas verbal o pictóricamente. No se requieren conocimientos algebraicos. El énfasis está puesto en la interpretación de características globales, como máximos, mínimos, intervalos y gradiantes. Esta unidad ocupará aproximadamente dos semanas y contiene toda una serie de hojas de trabajo y notas para el profesor.

Contiene:
- Introducción
- A1 Interpretación de puntos
- A2 ¿Son las gráficas solamente dibujos?
- A3 Dibujo de gráficas a partir de textos
- A4 Diseño de gráficas a partir de dibujos
- A5 Mirando gradientes
- Cuadernillos suplementarios.

En esta unidad, el énfasis se ha puesto en el proceso de búsqueda de modelos en situaciones realistas, la identificación de relaciones funcionales y su expresión en términos verbales, gráficos y algebraicos. Se acompañan soluciones y notas para el profesor. Esta unidad ocupa aproximadamente otras dos semanas.

Cada una de estas preguntas va acompañada por un esquema completo de calificación, ilustrado con algunos ejemplos.

Esta colección complementa el material presentado en las unidades A y B. Está dividido en dos partes. La primera contiene nueve problemas acompañados por una selección separada de indicaciones que se pueden suministrar a los alumnos en dificultades. La segunda sección contiene una serie de situaciones más cortas que proporcionan una mayor práctica en la interpretación de datos. Este material proporciona un recurso útil que se puede utilizar de vez en cuando, si se ve necesario. Sólo se dan las soluciones de los nueve problemas.

Introducción al módulo

Este módulo pretende desarrollar la capacidad de interpretar y usar información presentada en una variedad de formas familiares matemáticas o no matemáticas. Muchos alumnos están familiarizados con gráficas, tablas de números y expresiones algebraicas, y pueden manipularlas con razonable exactitud, pero son incapaces de interpretar las características globales de la información contenida en ellas. Además, muchos alumnos apenas han tenido la oportunidad de usar representaciones matemáticas autónomamente, sino más bien imitativamente, para describir situaciones de interés.

Las matemáticas son un poderoso lenguaje para describir y analizar muchos aspectos de nuestro entorno económico, físico y social. Como todo lenguaje, supone aprender nuevas notaciones simbólicas, y nuevas «reglas gramaticales» mediante las cuales se pueden manipular estos símbolos. Desgraciadamente, en matemáticas, es posible aprender estas reglas sin entender los conceptos subyacentes a los que se refieren, y esto a menudo convierte a las matemáticas en una materia formal, pesada y virtualmente inutilizable. Al aprender cualquier idioma extranjero, ciertamente se pide a los alumnos que estudien una cierta cantidad de gramática, pero también se les dan oportunidades de expresarse ellos mismos usando el lenguaje, tanto oralmente como a través de redacciones «libres». De la misma forma, a menudo es provechoso dejar aparte el lado mecánico, gramatical, del lenguaje matemático y dedicar unas sesiones a enfatizar en el uso de las matemáticas como medio de comunicación. Usar las matemáticas de esta manera requiere una mayor gama de destrezas que las usualmente evaluadas en los exámenes, y un mayor dominio y fluidez en algunas de las técnicas que sí se incluyen. Este módulo ha sido desarrollado para cubrir algunas de estas necesidades.

El Informe Cockcroft recalca la necesidad de este tipo de habilidades en muchas de sus recomendaciones. También reconoce que de cara a conseguir estos objetivos, es necesaria una mayor gama de actividades en el aula y de estilos de enseñanza.

En los párrafos 34 y 243 hay dos importantes referencias:

«Lo más importante de todo es la necesidad de tener la suficiente seguridad como para hacer un uso efectivo de cualquier destreza y conocimiento matemático que se posea, ya sea poco o mucho.»

«La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir:

— exposición por parte del profesor,
— discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos,
— trabajo práctico adecuado,
— consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas,
— resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana,
— Realización de trabajos de investigación.»

En este módulo, por lo tanto, se pone el énfasis en:

— ayudar a los alumnos a desarrollar una fluidez en la utilización del lenguaje matemático de gráficas, tablas y álgebra de cara a describir y analizar situaciones del mundo real,
— crear un ambiente en clase que anime a una discusión meditada en la que los alumnos intenten comprender o comunicar información presentada en forma matemática.

Esto coloca a la mayoría de los profesores ante algunas actividades de clase relativamente poco familiares. Los materiales del profesor han sido diseñados, y cuidadosamente desarrollados en clases representativas, para ayudar y guiar al profesor en la exploración de estas nuevas demandas de una forma directa y gradual.

La lista de conocimientos y habilidades a evaluar incluye las habilidades para entender y traducir información entre formas matemáticas y no matemáticas, intrepertar resultados matemáticos, y seleccionar y aplicar técnicas apropiadas a problemas en situaciones no familiares u originales.

La importancia de estas destrezas es también subrayada por su prominencia en los Criterios Nacionales para el Certificado General de Educación Secundaria británico, para el que se evalúa la habilidad de los candidatos en:

3.1 Recordar, aplicar e interpretar el conocimiento matemático en el contexto de situaciones cotidianas.
3.3 Organizar, interpretar y presentar información adecuadamente en forma escrita, tabular, gráfica y mediante diagramas.
3.7 Estimar, aproximar y trabajar en niveles de aproximación adecuados al contexto.
3.10 Interpretar, transformar y hacer uso apropiado de relaciones matemáticas expresadas por palabras o símbolos.

3.14 Hacer deducciones lógicas a partir de datos matemáticos dados.

3.15 Responder a un problema relativo a una situación relativamente desestructurada traduciéndola a una forma adecuadamente estructurada.

3.16 Responder oralmente a preguntas sobre matemáticas, discutir ideas matemáticas y realizar cálculos mentales.

Unidad A

INTRODUCCION

La unidad A está orientada hacia el significado cualitativo de las gráficas, más que hacia destrezas técnicas asociadas con la elección de escalas, marcado de puntos y dibujo de curvas. (Estas destrezas ya se tratan a fondo en la mayoría de los cursos.) Esto se debe a que la investigación evidencia que muchos alumnos carecen de una comprensión del significado de las características globales de las gráficas como máximos, mínimos, discontinuidades, cambios cíclicos, incrementos o decrecimientos en un intervalo, y gradientes, cuando éstos están incrustados en contextos realistas.

Esta unidad contiene cinco lecciones, y está pensada para ocupar aproximadamente dos semanas.

A1 contiene una serie de actividades que exigen a los alumnos razonar cualitativamente sobre el sentido de puntos localizados en el plano cartesiano. Las primeras cuestiones incluyen comparaciones de posiciones y gradientes, mientras que las posteriores se refieren a la consideración de correlaciones y de una relación funcional.

A2 está diseñada para exponer y provocar la discusión sobre el error conceptual común de que las gráficas son meros «dibujos» de las situaciones que representan.

A3 contiene actividades que implican a los alumnos en traducciones entre descripciones verbales y gráficas.

A4 y A5 están relacionadas con el dibujo e interpretación de gráficas a partir de dibujos de la situación. Gradualmente se presentan gráficas más sofisticadas. En particular, A4 se refiere a la interpretación de máximos, mínimos, longitudes de intervalo y periodicidad mientras A5 se centra más en la interpretación de gradientes.

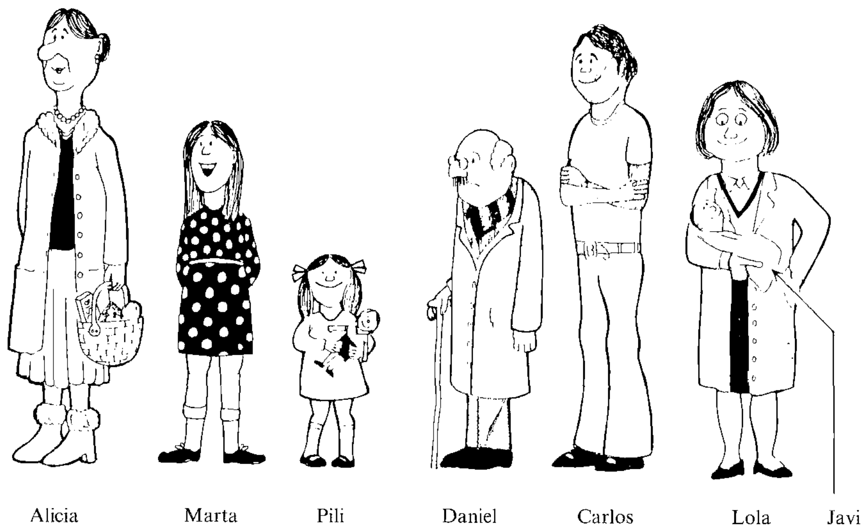
Al final de esta unidad se han incluido más actividades que pueden utilizarse como suplemento de estos cuadernillos. Pueden usarse, por ejemplo, como trabajo para casa.

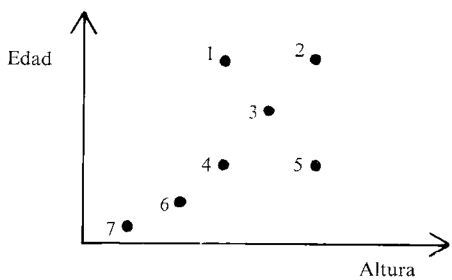
A1. INTERPRETACION DE PUNTOS

Para trabajar en este cuadernillo, discute tus respuestas con tus compañeros y trata de llegar a un acuerdo.

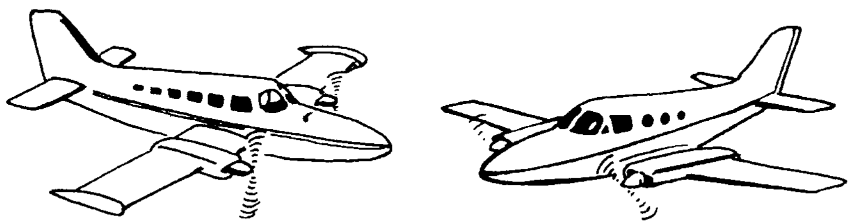
1. La cola de la parada del autobús

¿Quién está representado por cada punto del diagrama inferior?

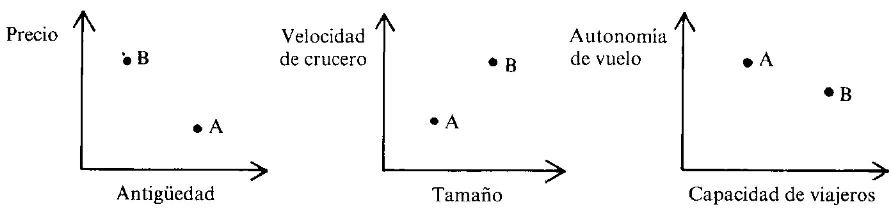




2. **Dos aviones**



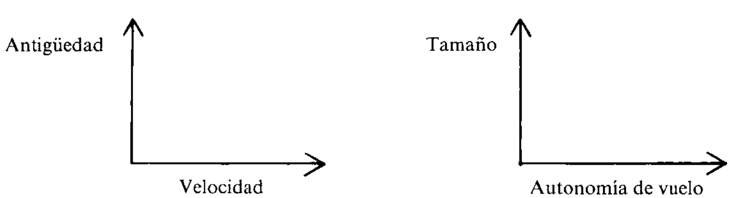
Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).



La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

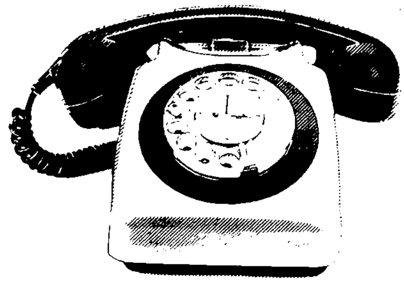
—¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?
«El avión más viejo es más barato»
«El avión más rápido es más pequeño»
«El avión más grande es más viejo»
«El avión más barato transporta menos pasajeros»

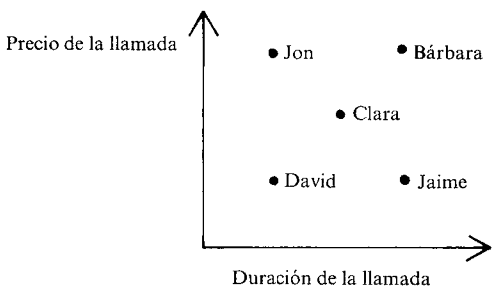
—Copia las gráficas siguientes. En cada gráfica marca dos puntos que representen a A y a B.



3. Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



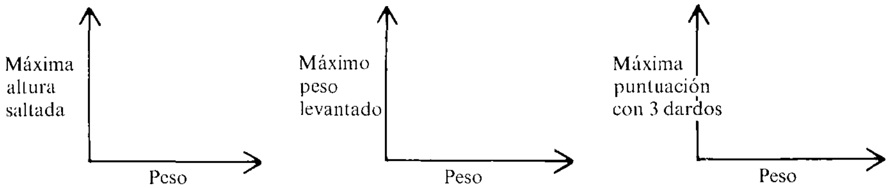


—¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.
—¿Quién realizó una llamada local? Explícalo.
—¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.
—Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.
—Si hicieras una gráfica similar mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Bilbao durante un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica claramente las suposiciones que haces.

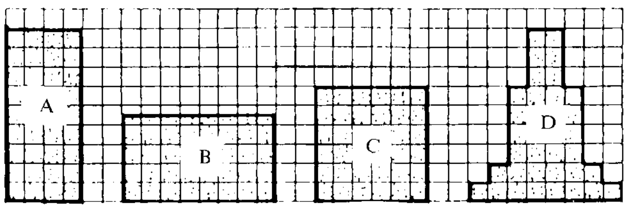
4. Deporte

Supón que tuvieras que elegir al azar 100 personas y medir lo que pesan. Después les pides que realicen tres deportes: salto de altura, levantamiento de peso y lanzamiento de dardos.

Dibuja diagramas de puntos que indiquen cómo esperas que sean los resultados. Indica claramente las suposiciones que hagas.

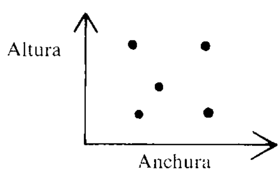


5. **Figuras**



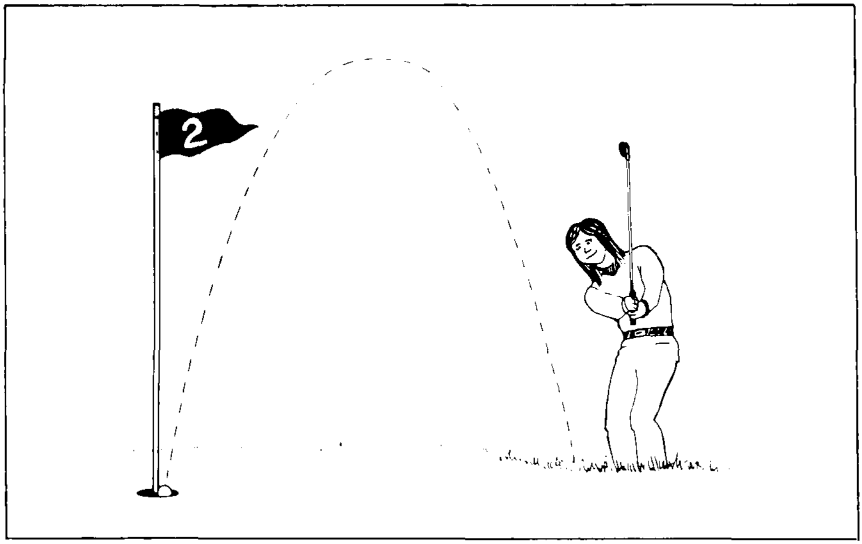
Cada una de estas cuatro figuras tiene un área de 36 unidades cuadradas.

— Marca 4 puntos en el gráfico inferior con las letras A, B, C y D.
— ¿Puedes dibujar una quinta figura de 36 unidades cuadradas que corresponda al 5.º punto? Explícalo.
— Dibuja un diagrama que represente a todos los rectángulos con un área de 36 unidades cuadradas.
— ¿Qué sucede si incluyes en tu gráfica todas las figuras con el mismo área?



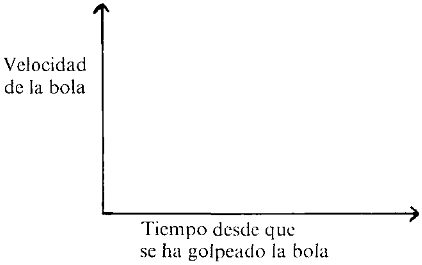
A2. ¿SON LAS GRAFICAS SOLAMENTE DIBUJOS?

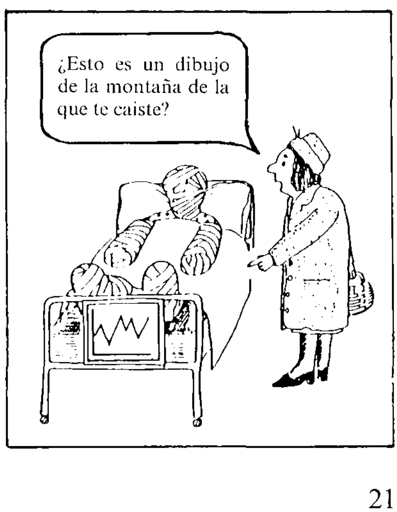
Golpe de golf



¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?

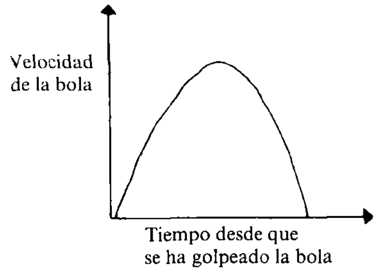
— Discute esta situación con tu compañero y escribe una descripción clara, indicando cómo creéis que varía la velocidad de la bola.
— Ahora haz una gráfica aproximada para ilustrar tu descripción:





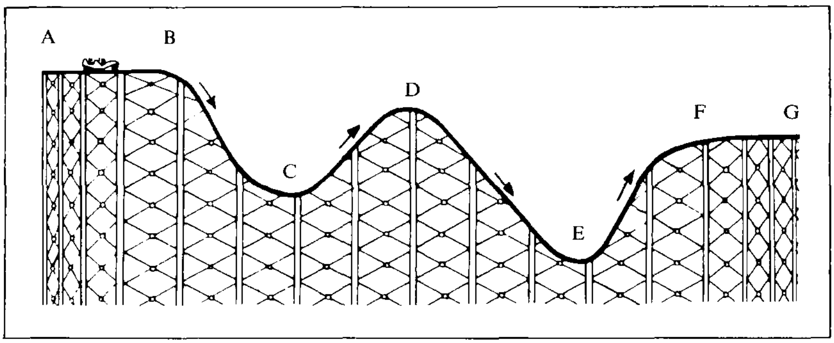
Pedro intentó resolver la cuestión del golf y dibujó una gráfica como ésta:

- —Coméntalo.
- —¿Puedes sugerir por qué hizo la gráfica así?
- —¿Ves alguna relación entre el intento de Pedro y el dibujo de la página 1?



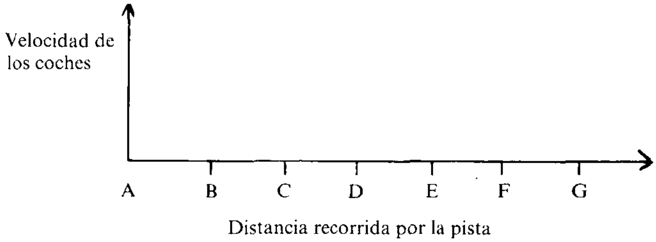
Ahora intenta resolver el siguiente problema:

La montaña rusa



El dibujo superior muestra la pista de una montaña rusa en la que los coches viajan entre A y B a una velocidad lenta y constante. ¿Cómo variará la velocidad de estos coches cuando van de A a G?

Describe tu respuesta por escrito y mediante una gráfica.



La siguiente actividad te ayudará a ver cómo has realizado tu gráfica. Dobla este cuadernillo de forma que no puedas ver el dibujo de la pista de la montaña rusa.

Intenta responder a las siguientes preguntas utilizando sólo la gráfica que has dibujado tú:

—¿En qué partes de la pista viaja rápido el coche? ¿Y despacio?
—¿Dónde va más rápido el coche, en B o en D? ¿En D o en F? ¿En C o en E?
—¿Dónde acelera? ¿Dónde decelera?

Corrige tus respuestas mirando de nuevo el dibujo de la pista de la montaña rusa. Si encuentras algún error dibuja de nuevo tu gráfica. (Es mejor hacer una gráfica nueva que corregir la anterior.)

—Inventa ahora algunas pistas de montaña rusa. En una hoja aparte, dibuja una gráfica para cada una de ellas. Pásale a tu compañero sólo las gráficas.
¿Puede reconstruir la forma de las pistas?
—¿Observas alguna relación entre la forma de una pista de montaña rusa y la forma de su gráfica? Si es así, escribe una explicación.
¿Hay alguna excepción?

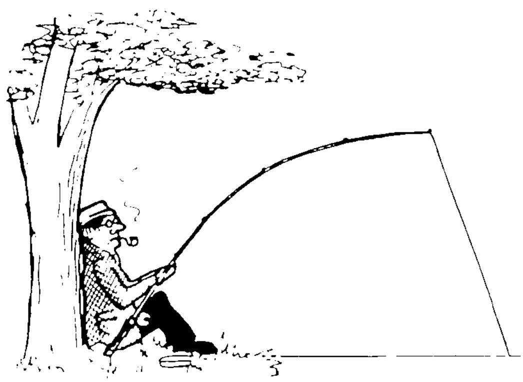
Finalmente, discute y escribe sobre este problema:

¿Qué deporte?

¿Qué deporte producirá una gráfica como ésta?

Elige la mejor de las siguientes respuestas y explica exactamente por qué se ajusta a la gráfica. Escribe las razones por las que rechazas las demás.

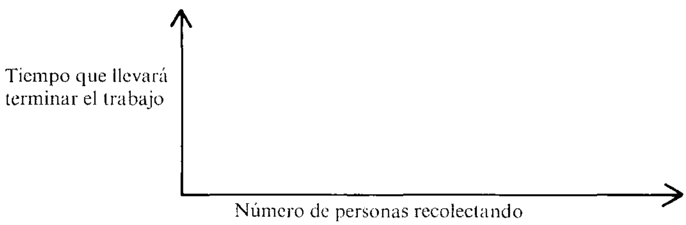
Pesca
Salto con pértiga
100 metros lisos
Paracaidismo
Golf
Tiro con arco
Lanzamiento de jabalina
Salto de altura
Salto de trampolín
Billar
Carrera de obstáculos
Esquí acuático



A3. DIBUJO DE GRAFICAS A PARTIR DE TEXTOS

Recolección de fresas

— Utilizando los siguientes ejes, haz una gráfica que ilustre esta situación.



— Compara tu gráfica con las de tus compañeros. Intenta llegar a un acuerdo sobre la versión correcta.

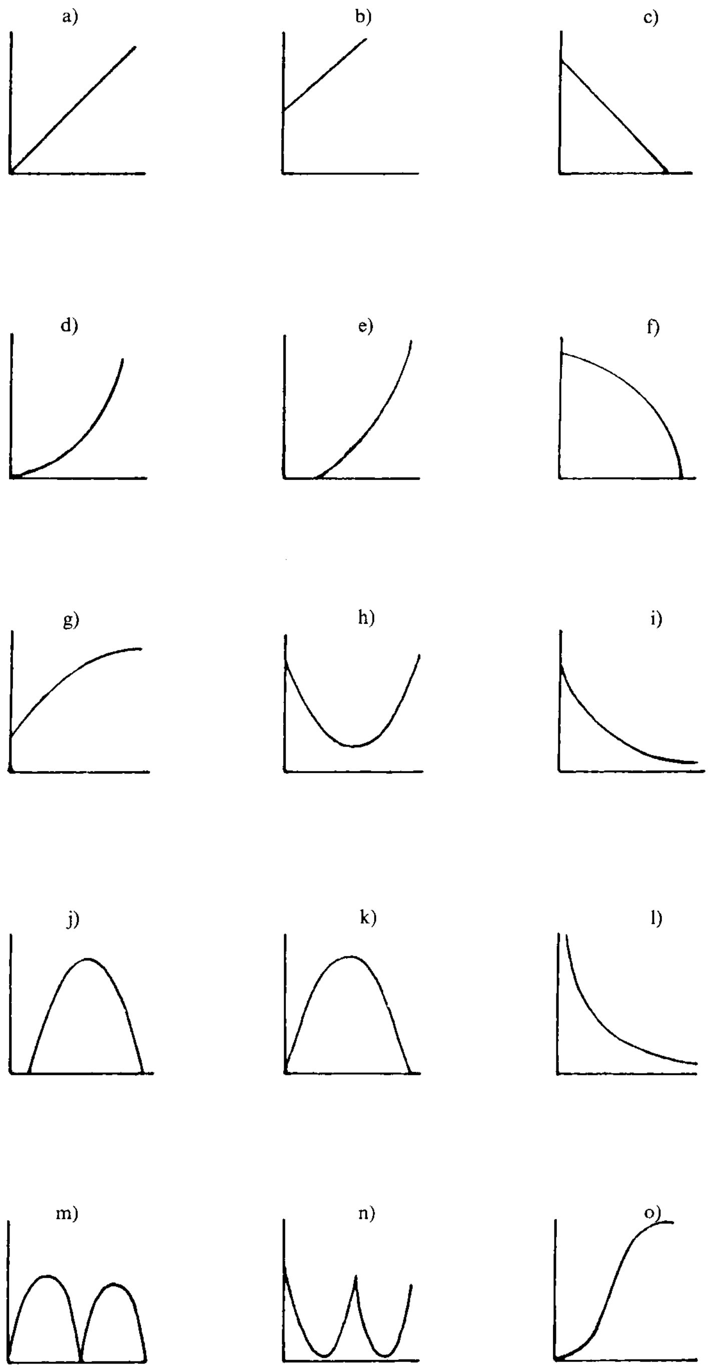
— Escribe cómo has llegado a tu respuesta. En particular responde a las siguientes cuestiones:
¿Debería ir la gráfica «hacia arriba» o «hacia abajo»? ¿Por qué?
¿Debería ser la gráfica una línea recta? ¿Por qué?
¿La gráfica debería cortar los ejes? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué no?

Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las diez situaciones descritas abajo. (Algunas gráficas pueden ajustarse a más de una situación.) Copia la gráfica, pon nombres a los ejes y explica tu elección, indicando todas las suposiciones que hagas. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión.

1. «Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.»
2. «Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero ¡detesto la leche templada!»
3. «Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.»
4. «Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.»
5. «Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.»

En las siguientes situaciones, tienes que decidir tú lo que pasa. Explícalo claramente por escrito y elige la mejor gráfica.

6. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de patatas de su peso?
7. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?
8. ¿Cómo depende la duración de una carrera de su longitud?
9. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?
10. ¿Cómo varía la velocidad de una pelota cuando bota?


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
m)
n)
o)

Dibuja gráficas para ilustrar las siguientes situaciones. Marca los ejes con las variables que aparecen entre paréntesis. En la última situación dibuja dos gráficas en los mismos ejes.

«Durante la primavera mi césped crecía muy rápidamente y había que cortarlo todas las semanas, pero desde que hace este tiempo seco y caluroso, hay que cortarlo con menos frecuencia.»

(Longitud del césped/tiempo)

«Al hacer un puzzle, empleo aproximadamente la primera media hora separando las piezas del borde. Cuando he juntado todas las que he podido encontrar, hago un borde siguiendo el de la mesa. Después comienzo a rellenarlo con las piezas interiores. Al principio, esto va muy lento, pero cuantas más piezas pones, menos hay que seleccionar y se corre más.»

(Número de piezas colocadas en el puzzle/tiempo)

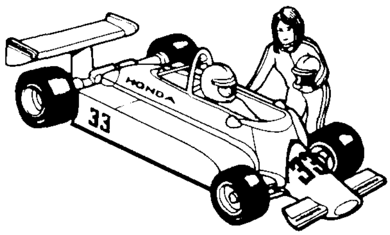
«El insecto cóccido algodonoso australiano fue introducido accidentalmente en América en 1868 y aumentó en número hasta que pareció que iba a destruir los huertos de cítricos californianos. Su predador natural, una mariquita, fue introducida artificialmente en 1889 y esto redujo rápidamente la población del insecto cóccido. Posteriormente se utilizó DDT para intentar reducirla aún más. Sin embargo, el resultado fue que aumentó su número ya que la mariquita era mucho más sensible al DDT que el insecto cóccido, y éste se convirtió de nuevo en un serio problema.

Utiliza los mismos ejes:

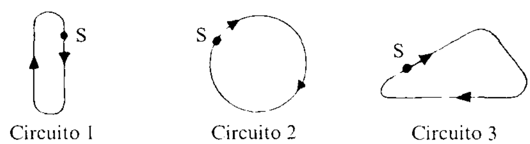
(Población de insecto cóccido/tiempo)
(Población de mariquitas/tiempo)

A4. DISEÑO DE GRAFICAS A PARTIR DE DIBUJOS

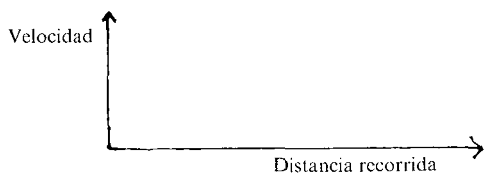
Carreras de coches



¿Cómo crees que varía la velocidad de un coche cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los tres circuitos dibujados abajo? (A = punto de salida).



Explica tus respuestas en cada caso, por escrito y mediante una gráfica. Indica claramente las suposiciones que realices.



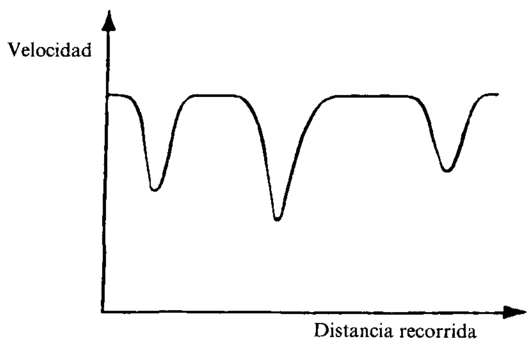
Compara tus resultados con los de tus compañeros. Intentar realizar tres gráficas que todos creáis que son correctas.

Mira de nuevo la gráfica que has dibujado para el tercer circuito. Para ver si es correcta, responde a las siguientes preguntas mirando sólo tu gráfica. Cuando hayas hecho esto, comprueba tus respuestas mirando de nuevo el dibujo del circuito. Si encuentras algún error, dibuja de nuevo tu gráfica.

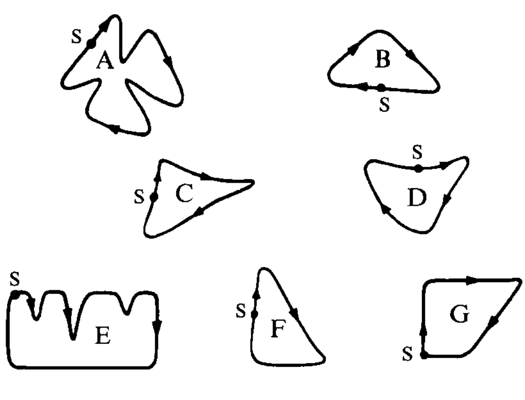
—¿Está el coche en la primera vuelta o en la segunda?
—¿Qué curva es la más peligrosa?
—¿Cuál es la recta más larga del circuito?
—¿El coche empieza la tercera vuelta con la misma velocidad con la que empezó la segunda? ¿Debería hacerlo?

> Ahora invéntate un circuito con cuatro curvas como máximo.
> Dibuja una gráfica en una hoja de papel aparte, que indique cómo varía la velocidad de un coche cuando recorre tu circuito.
> Pásale a tu compañero sólo la gráfica.
> ¿Puede reconstruir la forma del circuito original?

La siguiente gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras durante la segunda vuelta de una carrera:



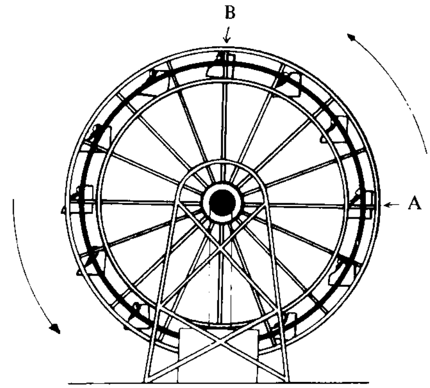
¿Cuál de estos circuitos estaba recorriendo?



Discute el problema con tus compañeros.
Cada vez que descartes un circuito, escribe tus razones.

La noria

La noria del diagrama da una vuelta cada 20 segundos. Utilizando el mismo par de ejes, haz dos gráficas que muestren cómo varía la altura del coche A y la del B durante un minuto. Describe cómo cambiarán tus gráficas si la noria girase más deprisa.



Orbitas

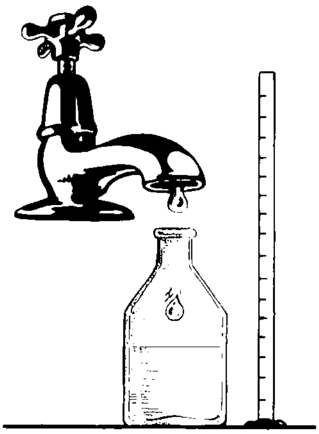
Cada uno de los diagramas inferiores muestra un satélite en órbita a velocidad constante alrededor de un planeta.

Dibuja dos gráficas que muestren cómo varía con el tiempo la distancia del satélite al planeta.

Utilizando una línea punteada muestra, sobre los mismos ejes, cómo cambiarán tus gráficas si aumentara la velocidad del satélite cuando se acerca al planeta.

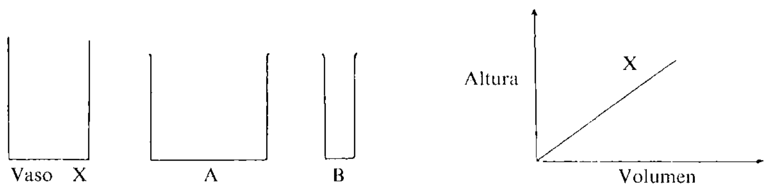
Ahora, inventa tus propias órbitas y realiza sus gráficas en una hoja de papel separada. Dale a tu compañero sólo las gráficas. ¿Puede reconstruir las órbitas?

A5. MIRANDO GRADIENTES

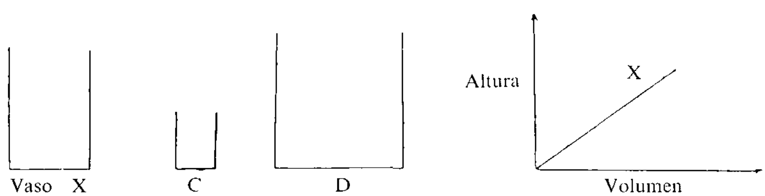


Para calibrar una botella, de forma que se pueda utilizar para medir líquidos, es necesario saber de qué manera la altura del líquido depende del volumen que hay en la botella.

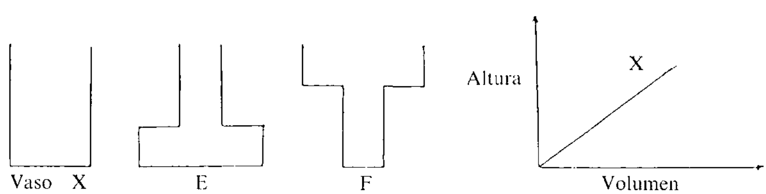
La siguiente gráfica muestra cómo varía la altura del líquido en el vaso X a medida que el agua cae dentro de él goteando de forma continua. Copia la gráfica y, en el mismo diagrama, muestra la relación altura-volumen para los vasos A y B.



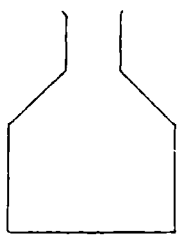
Dibuja dos gráficas más para C y D:



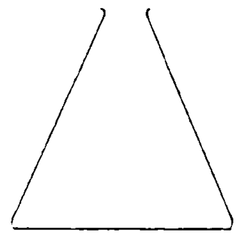
Y dos más para E y F:



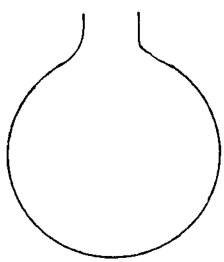
Aquí hay 6 frascos y 9 gráficas. Elige la gráfica correcta para cada frasco. Explica con claridad tu razonamiento. Dibuja cómo deberían ser los frascos que corresponden a las tres gráficas sobrantes.



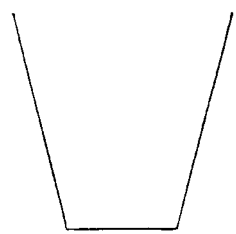
Frasco de tinta



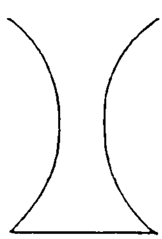
Frasco cónico



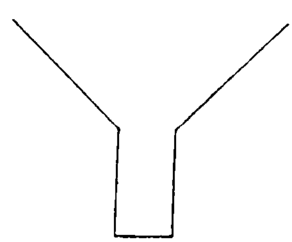
Frasco de evaporación



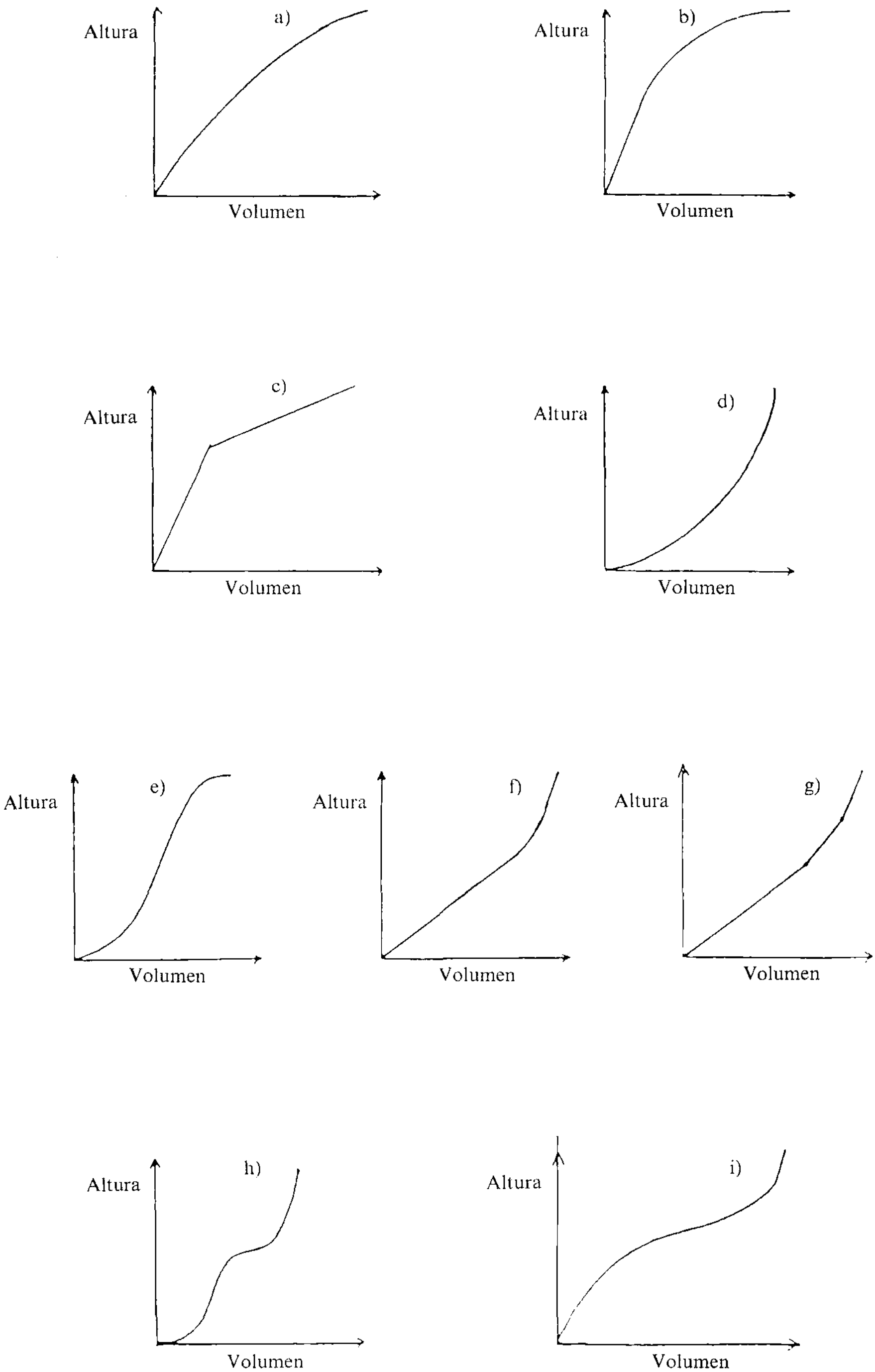
Cubo



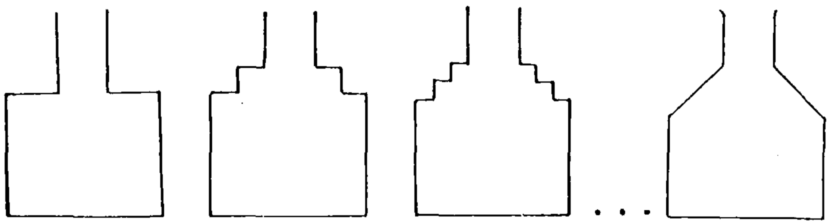
Vaso



Embudo taponado


a)
Altura
Volumen
b)
Altura
Volumen
c)
Altura
Volumen
d)
Altura
Volumen
e)
Altura
Volumen
f)
Altura
Volumen
g)
Altura
Volumen
h)
Altura
Volumen
i)
Altura
Volumen

—Dibuja las gráficas aproximadas para la siguiente secuencia de botellas:



—Utilizando tus gráficas, explica por qué una botella como la última, con laterales rectos, no produce una gráfica de líneas rectas (es decir, explica por qué el tintero no corresponde a la gráfica g).

—Inventa tus propias botellas y haz sus gráficas en una hoja de papel separada. Pásale a tu compañero sólo las gráficas.
¿Puede reconstruir la forma de las botellas originales usando sólo tus gráficas?
Si no, trata de descubrir qué errores está cometiendo.

—¿Es posible dibujar dos botellas diferentes que den la misma gráfica altura-volumen?
Intenta dibujar algunos ejemplos.

A1. INTERPRETACIÓN DE PUNTOS

El objetivo de este cuadernillo es ofrecer a los alumnos una oportunidad de discutir y razonar sobre el significado cualitativo de los puntos en el plano cartesiano. Se presentan cinco situaciones que implican ideas progresivamente más sofisticadas, desde comparaciones de posición (ítems 1 y 2), hasta comparaciones que implican gradientes (ítem 3), y finalmente la consideración de correlaciones (ítem 4) y relaciones funcionales (ítem 5). Tiempo necesario: entre 1 y 2 horas.

Presentación sugerida

1. Distribuir el cuadernillo y explicar brevemente el propósito de esta lección (y de las próximas lecciones), quizá de la siguiente forma:

«¿Qué significa para vosotros el tema *Funciones y Gráficas?* Quizá penséis inmediatamente en poner números en fórmulas, hacer tablas, escoger escalas, dibujar puntos y después unirlos con líneas rectas o curvas. En las próximas lecciones, sin embargo, nuestra aproximación será bastante diferente. En lugar de empezar con álgebra, empezaremos con situaciones de la vida cotidiana (deporte, llamadas de teléfono, etc.) y exploraremos cómo incluso un dibujo rápido puede ser usado para comunicar una gran cantidad de información, y a veces ahorrar muchas palabras de explicación. Para este trabajo necesitareis hablar con vuestros compañeros e intentar decidir conjuntamente qué están diciendo las gráficas.»

2. Ahora, conceder tiempo a los alumnos para intentar los tres primeros problemas («La cola de la parada del autobús», «Dos aviones» y «Llamadas telefónicas») en parejas o en pequeños grupos. Es importante que esto se desarrolle en una atmósfera de discusión tal que los alumnos tengan todas las oportunidades necesarias para explicar y justificar sus propios razonamientos y recibir respuesta (feedback) de los demás. Cada grupo debe esforzarse en discutir sus ideas hasta que lleguen a un consenso. Habitualmente, los dos primeros ítems causan menos dificultades; por el contrario, el tercero crea mucha más discusión.

3. Moverse por la clase, escuchando e invitando a los alumnos a explicar qué están haciendo. Esto les ayudará más tarde cuando intenten escribir sus propias explicaciones. Antes de incorporarse a una discusión de grupo, es conveniente consultar el «guión de discusión en clase» que contiene algunas sugerencias sobre el papel del profesor en el fomento de la discusión. Si los alumnos no hacen progresos entonces puede ser necesario hacer indicaciones, pero hay que intentar evitar dar indicaciones demasiado dirigidas, como para el ítem 1, «mirar los puntos 1 y 2. Estos representan a las dos personas de más edad. ¿Cuál de ellas es más alta?»

Por el contrario, dar indicaciones más estratégicas que animen a los alumnos a pensar por sí mismos, tales como «¿Cómo puedes mirar esta gráfica más sistemáticamente?».

4. Pueden surgir diversas dificultades:

— «¡No hay números en los ejes!». Este problema puede originar dificultades a alumnos cuya única experiencia gráfica previa se refiere a las destrezas técnicas asociadas con el dibujo preciso de puntos. Si hubiéramos incluido escalas en los ejes, los alumnos simplemente habrían leído los valores y resuelto el problema sin considerar el significado de la posición relativa de los puntos. Puede ser necesario recordar a los alumnos la convención normal de que las cantidades aumentan cuando nos movemos por la página de izquierda a derecha, o verticalmente hacia arriba.
— (en ítem 1) «Yo creo que los puntos 1 y 2 son Alicia y Carlos, y que 4 y 5 con Marta y Daniel.» La confusión es causada con frecuencia por el hecho de que el eje de la altura no ha sido colocado verticalmente hacia arriba. Esto es intencionado de cara a forzar a los alumnos a observar la gráfica como una representación abstracta, más que como un mero «dibujo» (es decir, donde los puntos altos son los personajes altos). Este error común es tratado más completamente en A2.
— También puede ser necesario explicar el significado de diversas palabras del folleto. En particular, diagrama (ítem 1) y autonomía de vuelo (item 2) se ha visto que causan alguna dificultad.

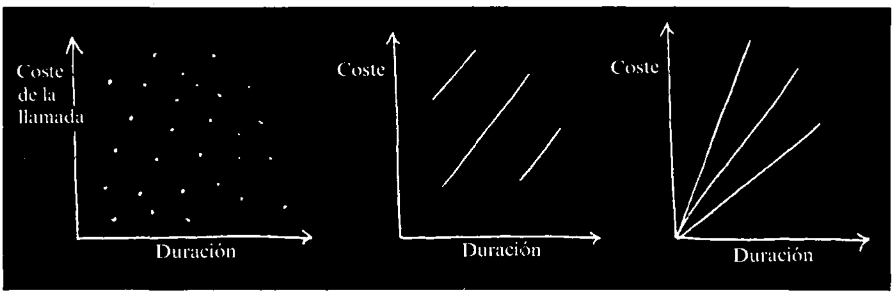
5. Hacia el final de la lección, se puede sentir la necesidad de discutir el ítem 3 «llamadas telefónicas» con la clase en su conjunto. Este es el primer ítem que requiere una comprensión del gradiente y origina, por lo tanto, muchas más consultas. A continuación indicamos una forma en la que se puede hacer esto. Si la clase ha estado trabajando en grupos, pedir un representante de cada grupo que explique sus respuestas a las tres primeras cuestiones. Mientras lo hacen, evitar emitir un juicio inmediato sobre sus opiniones, puesto que puede impedir que otros alumnos contribuyan con ideas alternativas. Por ejemplo, en el diálogo siguiente, el profesor deja a los alumnos continuar exponiendo sus ideas incluso después de haber recibido una respuesta correcta:

Profesor:	«¿Quién estaba llamando a larga distancia?»
Alumno A:	«No se puede decir porque la distancia no está en la gráfica.»
Profesor:	«Sara, ¿qué opinaba vuestro grupo?»
Alumna B:	«Es Jon.»
Profesor:	«Explica por qué pensáis que es Jon.»
Alumna B:	«Porque tiene que pagar mucho por poco tiempo.»

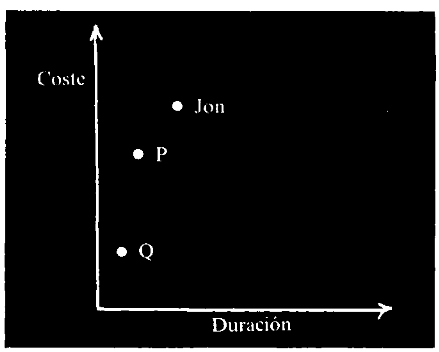
Profesor: «Gracias, Sara, ¿hay otras ideas?»
Alumno C: «Nosotros pensamos que son Bárbara y Jon.»
Profesor: «¿Por qué?»
Alumno C: «Porque son los que más pagan, entonces tienen que estar llamando los que más lejos...»

Esta última concepción errónea podría no haber sido descubierta y discutida si el profesor hubiera reconocido la respuesta de Sara como correcta. Mientras los alumnos explican sus respuestas, pedir a otros alumnos que opinen sobre estas explicaciones.

6. Las dos últimas preguntas del ítem «llamadas telefónicas» originan muchas consultas. Invitar al menos a tres representantes de los grupos a dibujar sus ideas en el encerado y a explicar su razonamiento. Las siguientes gráficas son típicas de lo que puede esperarse:



Invitar a miembros de otros grupos a criticar estas gráficas y a explicar cómo pueden ser mejoradas. Si esto resulta difícil, entonces la siguiente aproximación, adoptada por un profesor durante las pruebas, puede ser una ayuda.



Comenzó por dibujar de nuevo los ejes, marcó y llamó a un punto Jon y, entonces continuó como sigue:

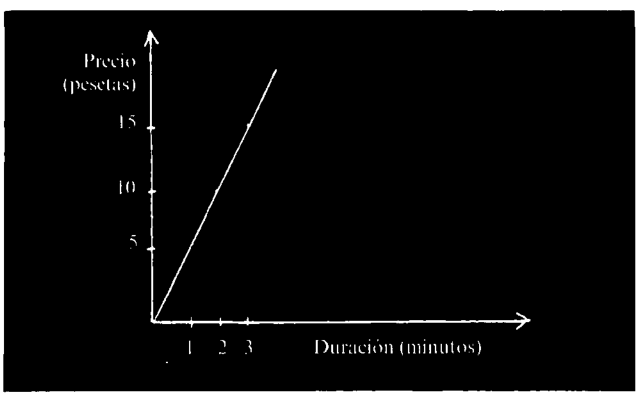
Profesor: «Si tuviéramos que hacer una llamada a larga distancia, dónde colocaríais vuestro punto en el diagrama?»
Alumno A: «Debajo de Jon y más cerca de la línea de coste. (P).»
Profesor: «¿Por qué has puesto el punto ahí?»
Alumno A: «Porque si hablo menos tiempo que Jon, no tengo que pagar tanto como Jon.»
Profesor: «Si hicieras una llamada todavía más corta, dónde pondrías ese punto?»

El alumno A indicó el punto Q.

Profesor: «Estos tres puntos, ¿tienen que estar en línea recta o forman una línea curva?»
Alumno A: «Tienen que formar una línea curva, porque de otra forma la línea se uniría con ésta (el eje vertical), y no hay que pagar un montón de dinero por no hablar.»

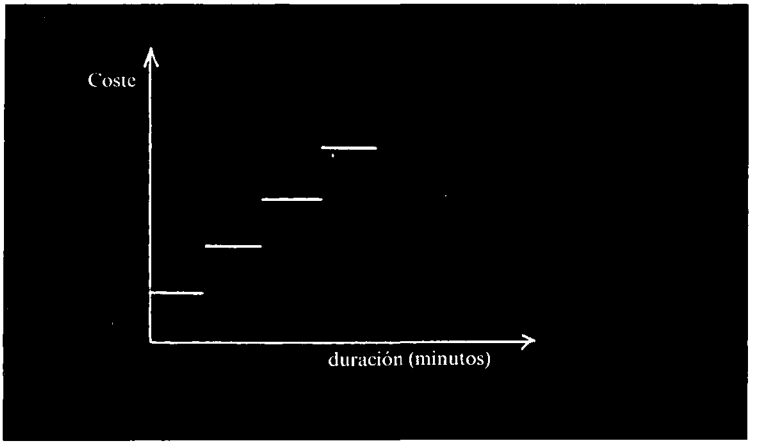
Otros alumnos no estuvieron de acuerdo con esto e insistieron en que la gráfica debería ser recta:

Alumno B: «Es recta porque si pagas 5 pesetas por un minuto entonces pagas 10 pesetas por 2 minutos y...»



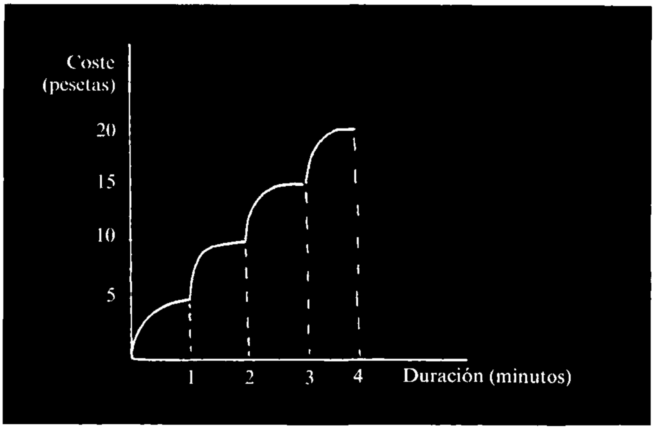
Entonces, un grupo sugirió lo siguiente, más bien por intuición:

Alumno C: «No es así, porque hay que pagar la misma cantidad de dinero cuando descuelgas el teléfono y justo dices una palabra que cuando has hablado tres minutos ... tienes esta gráfica.»



(No deberíamos esperar que muchos alumnos adquieran este nivel de sofisticación espontáneamente, y, en la mayoría de los casos estaríamos en contra de imponer tal modelo a la clase, donde podría causar una considerable confusión innecesaria. Para la mayoría de los propósitos, la gráfica sugerida por el alumno B es perfectamente adecuada. La mayoría de las gráficas son sólo «modelos» de realidad y como tales, habitualmente implican hacer suposiciones simplificadoras, que deberían estar establecidas.)

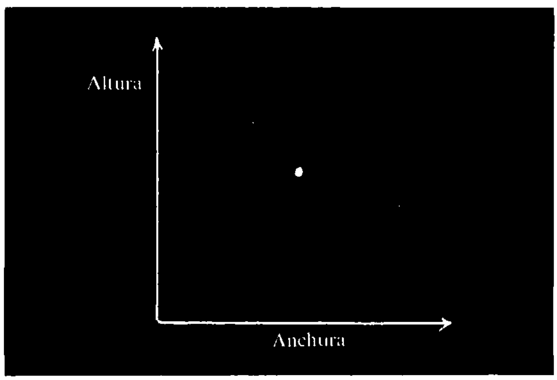
Sobrevino una larga discusión, y, hacia el final de la lección la mayoría de los alumnos acabaron convencidos por la función escalonada. Sin embargo, el alumno A aún prefería una versión curva:



El profesor no impuso la respuesta «correcta» a la clase, ya que no le pareció necesario. Tales discusiones no siempre tienen que ser resueltas enteramente para que resulten experiencias de aprendizaje valiosas. Con todo, en muchas de estas preguntas no hay una simple respuesta «correcta»; todo puede depender de los supuestos subyacentes.

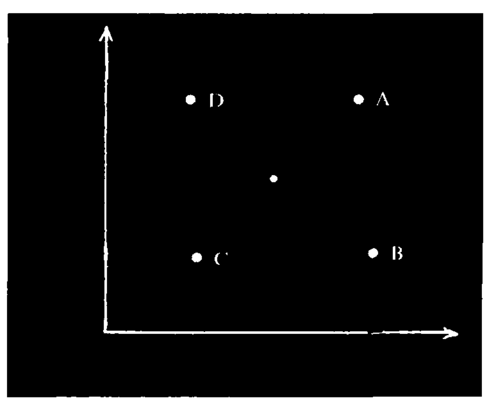
7. Los restantes ítems en el folleto «Figuras» pueden originar también una cantidad similar de debate. A continuación ofrecemos un posible desarrollo del ítem 5:

Pedir a cada alumno de la clase que imagine un rectángulo con un área de, digamos 36 unidades cuadradas. Dibujar la siguiente gráfica en el encerado y colocar un punto en él, explicando que representa uno de esos rectángulos.

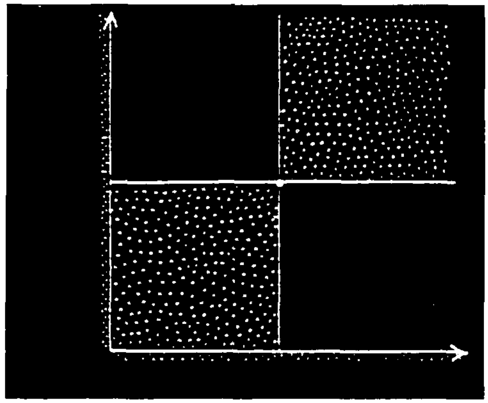


Ahora pedir a varios alumnos que describan dónde colocarían los puntos para representar los rectángulos imaginados por ellos. Las siguientes preguntas pueden ayudar al desarrollo de la discusión:

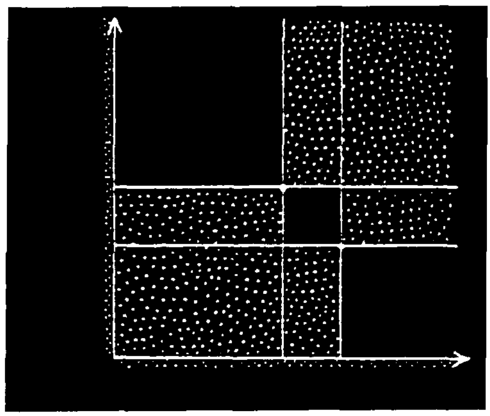
«Suponed que yo marco un punto aquí (indicar la posición A, pero no marcarla en el encerado). ¿Este punto puede representar un rectángulo con el mismo área, 36 unidades cuadradas? ¿Por qué? (Repetir esto para las posiciones B, C, D, E y F)»



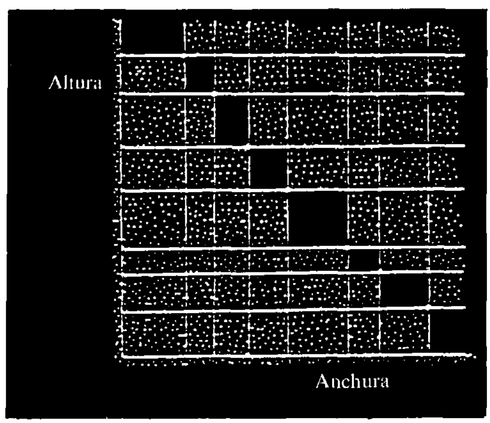
«¿Podeis identificar otros puntos en la gráfica que no pueden representar rectángulos con un área de 36 unidades cuadradas? Suponed que marcamos todos esos puntos; ¿en qué regiones "prohibidas" estarán situados?»



«Marquemos otro punto que puede representar uno de esos rectángulos. ¿Hay alguna nueva región "prohibida"?»



«Suponed que continuamos de esta manera sombreando cada vez regiones "prohibidas".»



Una discusión así puede llevar a una consciencia de que todos los puntos que representan rectángulos con un área de 36 unidades cuadradas, estarán situados en una línea curva y continua. (No puede ser recta, pues cortaría al eje dando un rectángulo de área cero.)

Si la condición rectangular es ahora suprimida (y es admitida alguna figura que tenga un área de 36 unidades cuadradas) la discusión puede aún ir más lejos:

«¿Podemos tener una figura con una base muy larga (¿infinita?) y tal que tenga, sin embargo, un área de 36 unidades cuadradas?»

A1. ALGUNAS SOLUCIONES

Nota: En estas soluciones, como en las demás soluciones de este módulo, hay con frecuencia varias alternativas, correctas, dependiendo de los supuestos subyacentes hechos o del grado de sofisticación deseado. En muchos casos, las gráficas dadas, que sólo pretenden ser modelos aproximados, pueden ser refinados aún más (usando funciones escalonadas, por ejemplo) para dar representaciones más precisas. Estas soluciones sólo pretenden representar una colección de respuestas aceptables, factible para un alumno competente. De ninguna manera están imaginadas para representar análisis definitivos y exhaustivos de los ítems.

1. *La cola de la parada del autobús*

Alicia está representada por el punto 2, Marta el 4, Pili el 6, Daniel (1), Carlos (5), Lola (3), Javi (7).

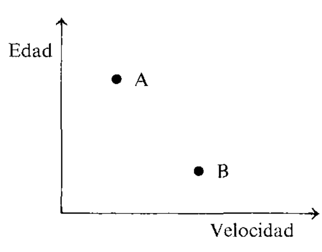
2. *Dos aviones*

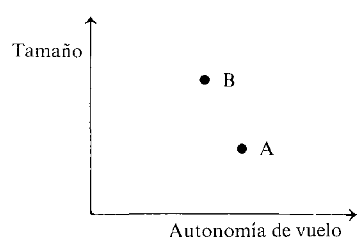
La primera gráfica muestra también que el avión A es más viejo que el B.

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

«El avión más viejo es más barato.»
«El avión más barato transporta menos pasajeros.»

Las dos gráficas finales deben aparecer así:



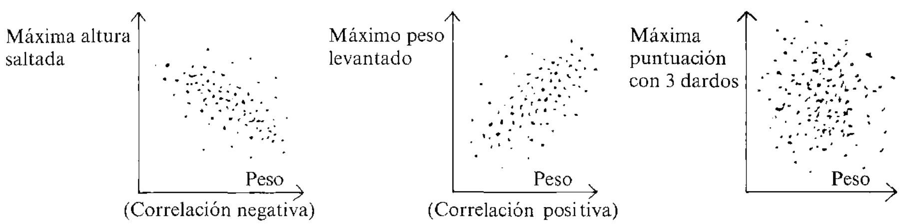


3. *Llamadas telefónicas*

Jon estaba llamando a larga distancia. (Poco tiempo, mucho coste.)
Jaime estaba haciendo una llamada local. (Mucho tiempo, poco coste.)
David, Clara y Bárbara estaban llamando más o menos a la misma distancia (asumiendo que el coste es proporcional al tiempo).

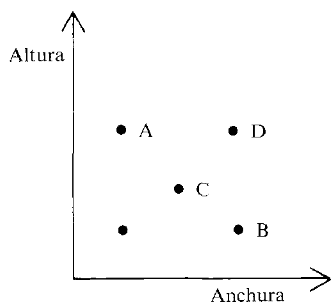
Las demás llamadas locales estarán en una línea recta que pasa por el punto de Jaime y el origen. (Como el coste sólo se puede pagar en cantidades discretas, un modelo más sofisticado supondría una función escalonada.)

4. *Deporte*



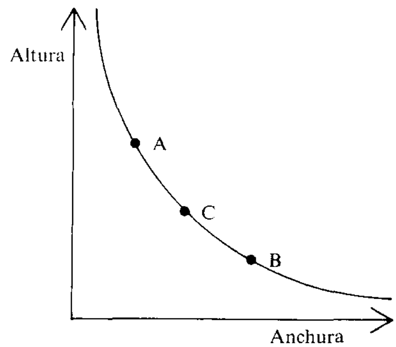
Al dibujar estas gráficas aproximadas, hemos asumido una muestra aleatoria de personas de aproximadamente el mismo grupo de edad adulta. Si, por ejemplo, incluimos niños muy jóvenes, las gráficas serían muy diferentes. Los alumnos también pueden señalar que muchos buenos jugadores de dardos son demasiado gordos, debido quizá a la naturaleza del medio en que se entrenan.

5. *Figuras*

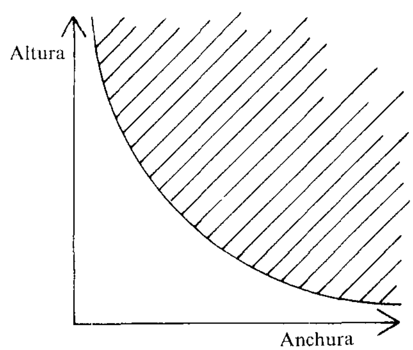


El quinto punto no puede corresponder a ninguna figura con un área de 36 unidades cuadradas. Como sus dos dimensiones son menores que las del punto C, se puede ver que esta figura debe estar situada dentro de un cuadrado 6×6.

Si se dibujan en la misma gráfica todos los rectángulos con un área de 36 unidades cuadradas, obtenemos la hipérbola rectangular:



Si se dibujan todas las figuras con el mismo área, entonces obtendremos la región sombreada por encima de esta hipérbola.



A2. ¿SON LAS GRAFICAS SOLAMENTE DIBUJOS?

Muchos alumnos, incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base. Este cuadernillo está diseñado para exponer y provocar la discusión sobre este concepto frecuentemente erróneo, de forma que los alumnos se den cuenta de los posibles errores que pueden resultar en la interpretación gráfica.

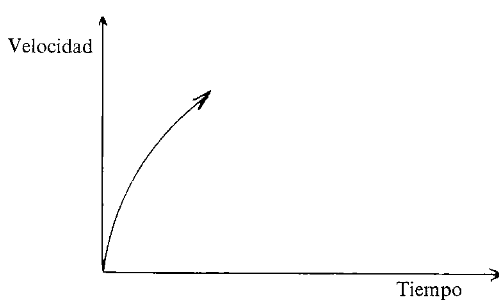
Será necesaria una hora aproximadamente.

Presentación sugerida

1. Repartir el cuadernillo y explicar la situación introductoria. Pedir a la clase que discuta esta situación en parejas o en pequeños grupos, hasta que lleguen a algún consenso. Entonces animar a cada grupo a escribir una descripción clara mostrando cómo piensan ellos que varía la velocidad de la pelota de golf mientras vuela por el aire, y a continuación a ilustrar esta descripción mediante una gráfica.

2. Mientras los alumnos trabajan en el problema, recorrer la clase y escuchar qué están diciendo. Se puede encontrar que algunos alumnos confunden la velocidad de la pelota con la altura de la pelota y producir situaciones cómo:

«La pelota aumenta de velocidad después de ser golpeada por el palo de golf».

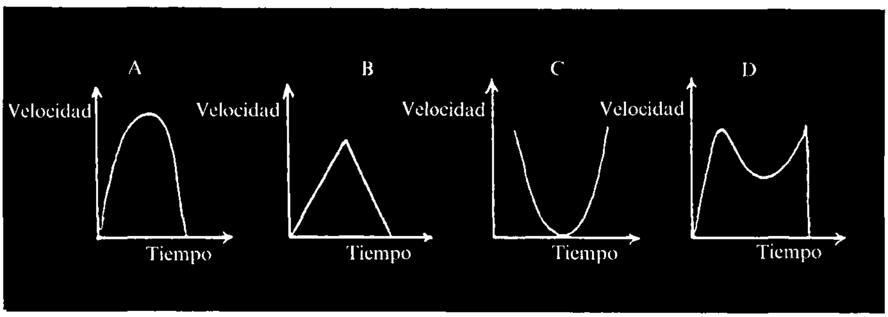


Pueden pensar que si la trayectoria va «arriba y abajo», la gráfica debería ir también «arriba y abajo». (Esto es reforzado además por el hecho de que la pelota comienza y termina en reposo). Evitar rechazar estas respuestas; más bien invitar a que hagan comentarios los demás alumnos e intentar provocar «conflictos» en los que los alumnos se hagan conscientes de las inconsistencias de sus propias creencias, usando preguntas como:

«¿Dónde viajará la pelota más despacio?»
«¿Está la gráfica de acuerdo con esto?»

3. Transcurridos unos 10 minutos, puede ser necesario sostener una breve discusión con la clase. Durante ésta es bastante fácil verse empantanado discutiendo los aspectos «físicos» de la situación, y encontrarse inmerso en largos debates sobre la naturaleza de la gravedad y similares. Intentar evitarlo. No es esencial que todo el mundo llegue a la gráfica perfecta, sólo que todos sean conscientes del peligro de tratar la gráfica como un mero dibujo de la situación. Por lo tanto, no creer que la discusión tiene que estar totalmente resuelta antes de pasar al ítem «Montaña rusa».

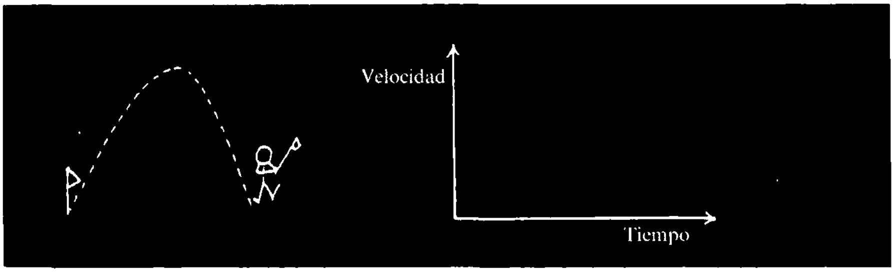
Comenzar la discusión invitando a representantes de dos o tres grupos a dibujar sus gráficas en el tablero, y a explicar su razonamiento. No emitir juicios sobre ellos, sino invitar a comentarlo al resto de la clase.



Alumno A: «Pensamos que es A porque la pelota sube y baja».
Alumno B : «Es B porque la pelota pierde velocidad cuando sube y acelera cuando baja».
Alumnos C : «En C, la pelota sale rápida, después se para por un instante, después va otra vez más rápida».
Alumnos D: «En D, la pelota acelera después de ser golpeada, después pierde velocidad, después gana velocidad otra vez y después cae en el hoyo».

Estas cuatro respuestas (típicas) ilustran el tipo de razonamiento que se puede esperar. Observad que el alumno A tiene nuestro clásico error conceptual «gráfica = dibujo»; el alumno B no puede traducir una explicación perfectamente válida en una gráfica (un hecho común); el alumno C ha asumido que la pelota permanece estacionaria en el punto más alto de la trayectoria y el alumno D ha asumido que la pelota acelera después de dejar el suelo.

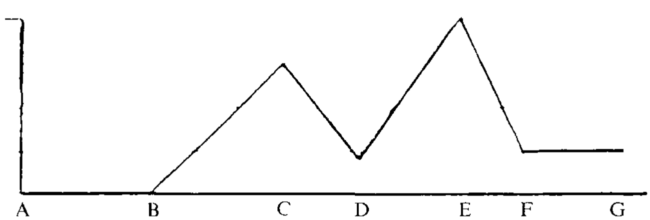
De cara a concluir la discusión, puede ser necesario dibujar un diagrama en el encerado mostrando la trayectoria de la pelota, y un par de ejes.



Trazar la trayectoria de la pelota con la mano y pedir a los alumnos que describan qué le ocurre a la velocidad de la pelota. Cuando hagan sugerencias, preguntarles dónde deberían ir los correspondientes puntos en la gráfica. De esta forma debe ser posible para todos ver que la trayectoria de la pelota y la forma de la gráfica son completamente distintas. No preocuparse si la gráfica resultante no es completamente correcta.

«La montaña rusa» ayudará a clarificar algunos malentendidos que queden.

4. Ahora pedir a los alumnos que continúen trabajando en el cuadernillo, de nuevo en pequeños grupos. «La montaña rusa» refuerza la diferencia entre un «retrato» de la pista y una gráfica. Al dibujar la gráfica velocidad-distancia, algunos alumnos pueden ser todavía incapaces de variar las cosas de una manera continua y preferir marcar unos pocos puntos discretos y unirlos después. Esto a veces desemboca en una especie de «línea-rectitis».



Esto es extremadamente común entre alumnos que han sido introducidos a las gráficas en la forma convencional, marcando puntos.

5. Es importante enfatizar que los alumnos pueden necesitar hacer varios intentos de dibujar una gráfica antes de llegar a una versión correcta. Disuadirles de tachar los errores, más bien pedirles que anoten qué está equivocado en su gráfica y que dibujen una nueva debajo.

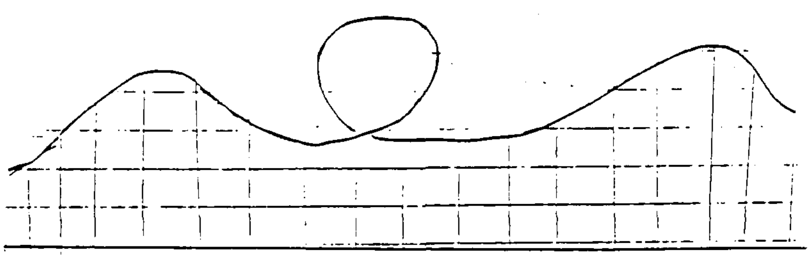
Esto facilitará al alumno y al profesor comprobar el progreso en la comprensión, y ayudará al alumno a tratar cada intento como un paso valioso hacia la solución final.

6. En el cuadernillo se sugiere que se debería dar a los alumnos la oportunidad de inventar sus propias pistas de montaña rusa, dibujar las correspondientes gráficas y ver si su compañero puede reconstruir la forma de las pistas originales sólo con las gráficas. Además de ser divertida, esta actividad también enfatiza la importancia de comunicar la información de forma precisa.

7. Después de un rato, los alumnos pueden llegar a hacer la siguiente generalización:

«La relación entre la gráfica y la montaña rusa es que la gráfica deberá parecerse a la montaña rusa vuelta hacia abajo».

Sin embargo, otros pueden ser capaces de encontrar excepciones:



8. La actividad final en el folleto «¿Qué deporte?», es propuesta de nuevo para provocar una discusión animada. La siguiente colección de respuestas (sacadas de la misma clase) ilustra el tipo de respuesta que se puede esperar:

Joanna:
«Yo creo que esta gráfica muestra lo que haría un saltador de pértiga porque muestra la altura del salto y entonces tendría una pendiente aguda como muestra el dibujo».

Tony:
«Yo creo que el deporte es el fútbol porque al principio del partido todos los jugadores tienen mucha energía pero cuando el partido está casi

terminando la fuerza del jugador decae y permanece a un nivel constante hasta que el partido termina».

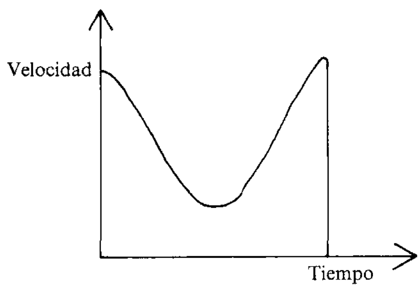
Greg:

«Tengo razones para creer que es un paracaidista porque el avión sube y entonces el paracaidista salta del avión y aterriza, entonces da un paseo. O un buzo que escala un acantilado y se zambulle y entonces empieza a nadar».

A2. ALGUNAS SOLUCIONES

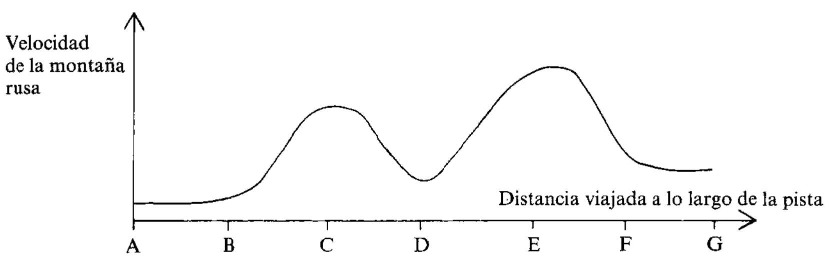
El golpe de Golf

La velocidad de la pelota variará más o menos como se muestra en esta gráfica.



La montaña rusa

Notar que la gráfica parece más bien un retrato boca abajo de la pista. Esto puede crear un poderoso conflicto debido al concepto erróneo «gráfica = dibujo».



¿Qué deporte?

El paracaidismo proporciona una respuesta plausible porque muestra claramente:

— La aceleración mientras cae el paracaidista,
— la velocidad terminal cuando la resistencia del aire se vuelve igual al empuje de la gravedad,
— la rápida deceleración cuando se abre el paracaídas,
— el descenso constante y
— el «porrazo» cuando golpea el suelo.

Algunos pueden argumentar que el paracaidista no comenzará su caída con una velocidad cero debido al movimiento horizontal del avión. La gráfica es adecuada, sin embargo, si la velocidad es tomada en el sentido de la velocidad vertical.

Sin embargo, el paracaidismo puede no ser la única posibilidad correcta. Un alumno sugirió que la gráfica podría representar la pesca, donde se considera la velocidad del anzuelo. Cuando se lanza la caña, el anzuelo acelera, rápidamente baja la velocidad cuando entra en el agua, va a la deriva con la corriente y entonces para repentinamente cuando la caña se pone tirante.

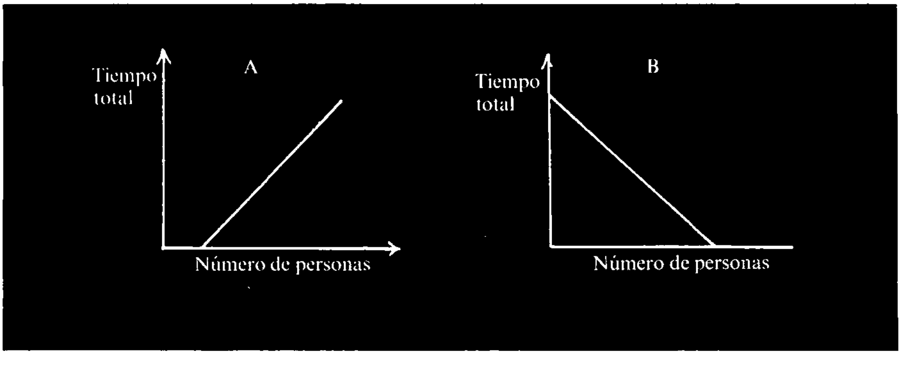
El salto con pértiga, golf, salto de altura y lanzamiento de jabalina no pueden ser porque la velocidad decrece cuando el atleta, pelota o jabalina suben por el aire, y aumenta de nuevo mientras descienden. De esta forma habrá un mínimo local en la gráfica de la velocidad en el punto más alto de la trayectoria.

A3. DIBUJO DE GRAFICAS A PARTIR DE TEXTOS

En este cuadernillo, los alumnos son invitados a traducir entre descripciones verbales y dibujo de gráficas. Se usan dos tipos de formas verbales: «Descripciones completas» que dan cuenta explícita y detallada de cómo se relacionan exactamente unas variables con otras y «Frases-disparador» que piden a los alumnos imaginar una situación y decidir entonces por sí mismos la naturaleza de la relación entre las variables. Dentro de cada tipo de presentación existe una variación considerable en dificultad, dependiendo del contexto, el lenguaje utilizado y los tipos de características gráficas pedidas. Se necesitarán entre 1 y 2 horas.

Presentación sugerida

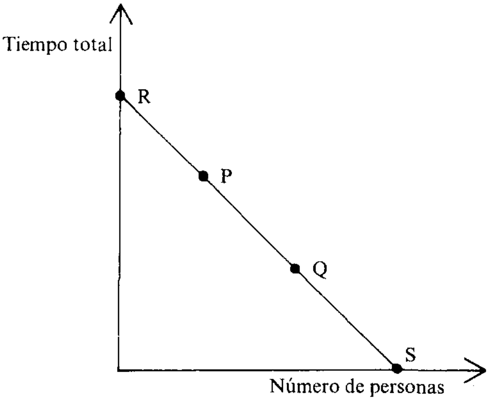
1. Distribuir el cuadernillo y conceder tiempo a los alumnos para discutir la actividad introductoria de dibujo de gráficas en parejas o pequeños grupos, y animarles a que lleguen a un consenso. Enfatizar la necesidad de escribir una explicación de cómo han llegado a su resultado, y dirigir su atención a las tres preguntas al pie de la página. Mientras trabajan en esto, recorrer la clase escuchando y pidiéndoles que expliquen su razonamiento, pero en esta fase es mejor no ayudarles con ninguna respuesta, pues esto puede estropear la discusión posterior de la clase.
2. Se puede pedir a 3 ó 4 representantes de los grupos dibujar sus gráficas en el encerado. Intentar arreglarlo de forma que estén representadas gráficas diferentes, incluyendo las siguientes si fuera posible:



Pedir a los grupos que expliquen sus decisiones e invitar a los demás a comentarlas. Por ejemplo, la gráfica A (o un tipo similar de función creciente) es escogida a veces porque los alumnos han interpretado incorrectamente los ejes:

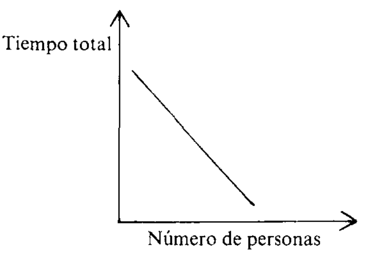
«Al principio, están pocas personas recogiendo fresas, pero a medida que pasa el tiempo, se van añadiendo más y más».

Esta interpretación errónea ha asumido que el eje vertical lee el «tiempo transcurrido» en lugar del «tiempo total para acabar el trabajo». Si ocurre esto, enfatizar que esta situación particular difiere de las presentadas en A2 en que aquí no es posible llevar un dedo a lo largo de la línea de la gráfica e imaginar que está pasando el tiempo, porque cada punto de la gráfica representa un caso distinto. Si los alumnos escogen la gráfica B, entonces puede ser útil el siguiente desarrollo:



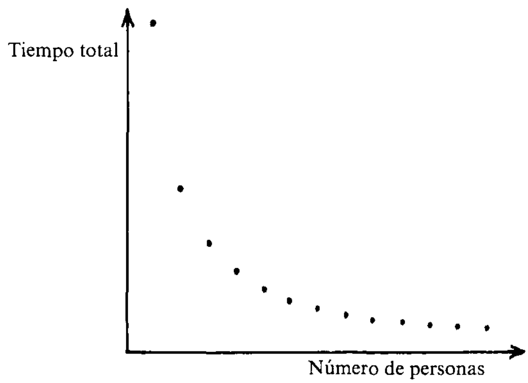
Profesor: «¿Qué significa este punto (P)?»
Alumno: «Si sólo tienes unas pocas personas recogiendo fresas, entonces llevará mucho tiempo».
Profesor: «... y este punto (Q)?»
Alumno: «Si hay montones de gente, no lleva mucho tiempo»
Profesor: «¿Qué ocurre con este punto? (R)... y este punto? (S)»

Esta forma de preguntar debería permitir a los alumnos ver que la gráfica no puede tocar ningún eje. Algunos pueden decidir que la gráfica debería ser por tanto curva. Otros pueden preferir simplemente borrar los dos extremos:



Si se sugiere esto, pedir a los alumnos que consideren qué ocurriría si estuviera muchísima gente recogiendo fresas. Esto debería permitir a la mayoría de los alumnos ver que el extremo de la derecha de la gráfica no puede terminar de esta forma.

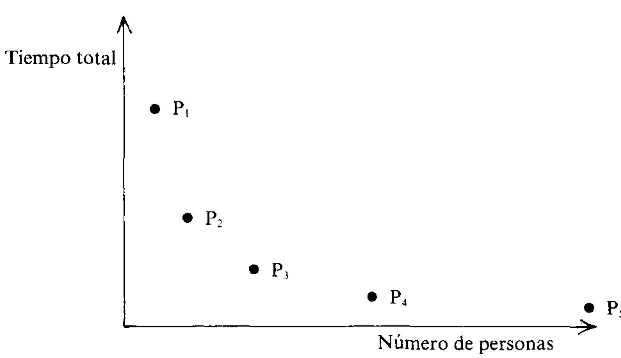
Cuando se considera el extremo de la izquierda, sin embargo, los alumnos pueden argüir que «es tonto tener, digamos media persona recogiendo fresas, por lo tanto la gráfica debe empezar con una persona» (Si «número de personas» se entiende como número de personas que trabajan a un determinado ritmo, entonces se puede pensar que «las personas fraccionarias» podrían ser personas perezosas). Si los alumnos hacen estas argumentaciones, sin embargo, vale la pena mencionar que la gráfica en realidad consiste solamente en puntos discretos:



Como antes, con las funciones escalonadas en A1 por ejemplo, no es esencial desarrollar la gráfica hasta este grado de sofisticación.

Ocasionalmente, los alumnos pueden hacer el siguiente razonamiento:

«Si doblas el número de personas recogiendo fresas, divides por dos el tiempo que lleva».

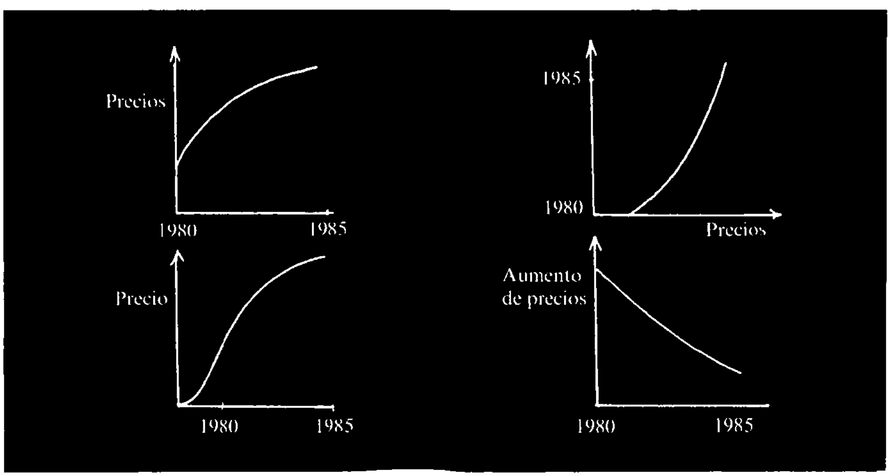


Esto lleva a la siguiente secuencia de puntos (P1, P2, ...) que puede saldar de una vez la cuestión de si la gráfica es recta o curva.

3. Tras la discusión, pedir a la clase que escriba una explicación completa de la gráfica correcta, usando el esquema dado en el pie de la primera página de este folleto.

4. Ahora animar a los alumnos a trabajar las páginas 2 y 3 de este folleto, emparejando las situaciones a las gráficas. Remarcar la importancia de etiquetar los ejes, escribiendo explicaciones y explicando las suposiciones hechas. De nuevo la discusión en grupos es esencial si los alumnos tienen que mejorar su comprensión. Esto llevará tiempo y no hay que preocuparse si el progreso parece lento (Se puede sugerir que los alumnos trabajen por ejemplo las preguntas impares en clase, y dejar las pares para trabajar en casa).

En este ejercicio, los alumnos se pueden dar cuenta pronto, en discusión con sus compañeros, de que pueden hacer varias gráficas distintas que se ajusten a una situación particular, dependiendo del etiquetado de los ejes y de las suposiciones hechas. Por ejemplo, para la primera pregunta, «Los precios están creciendo ahora más despacio que en cualquier otro momento durante los cinco últimos años», las siguientes gráficas son todas soluciones válidas:

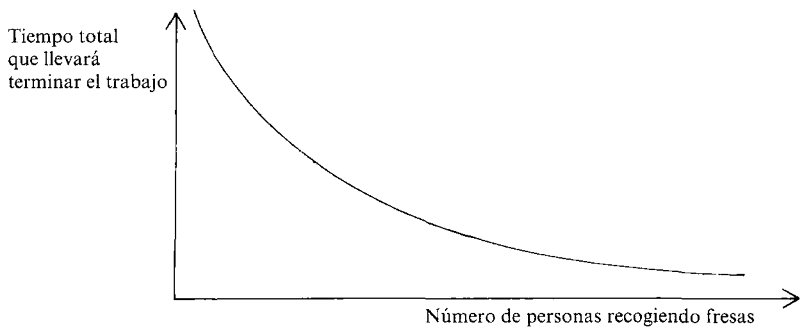


Esta multiplicidad de respuestas puede hacer de la discusión con la clase completa una experiencia aturullada, a menos que esté basada en unas pocas cuestiones, tratada pausadamente y concienzudamente. Probablemente será más provechoso tratarlo sobre una base individual o de grupos. A menudo, es suficiente simplemente leer la pregunta de nuevo con un alumno, y llevar el dedo a lo largo de su gráfica y preguntarle qué se está diciendo. Esto les ayuda frecuentemente a ver discrepancias en su solución.

5. Los restantes ítems del folleto, en la página 4, invitan a los alumnos a tratar de dibujar gráficas con una variedad más amplia de características. Como ahora se especifican los ejes, hay menos soluciones posibles, lo que las hace más manejables para la discusión de la clase, si se considera necesaria.

A3. ALGUNAS SOLUCIONES

Página 1: Una gráfica «correcta» para la situación introductoria tiene la siguiente forma:



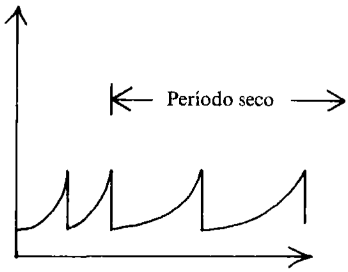
(Tal como se ha mencionado anteriormente, un modelo más refinado debería consistir en una serie de puntos discretos. Además, si el número de gente se vuelve muy grande, existe también la posibilidad de que se mezclen en el camino de los demás y de esta forma la gráfica subiría otra vez. No se debe insistir a los alumnos sobre ninguno de estos refinamientos, salvo que ellos mismos lo propongan).

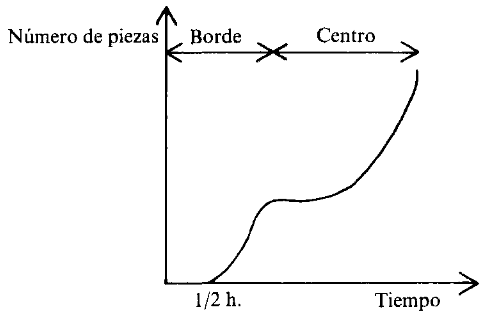
Página 2: Las situaciones pueden ser emparejadas con las gráficas de la siguiente forma (pero como se ha explicado en las notas del profesor, hay muchas más posibilidades y mayores refinamientos).

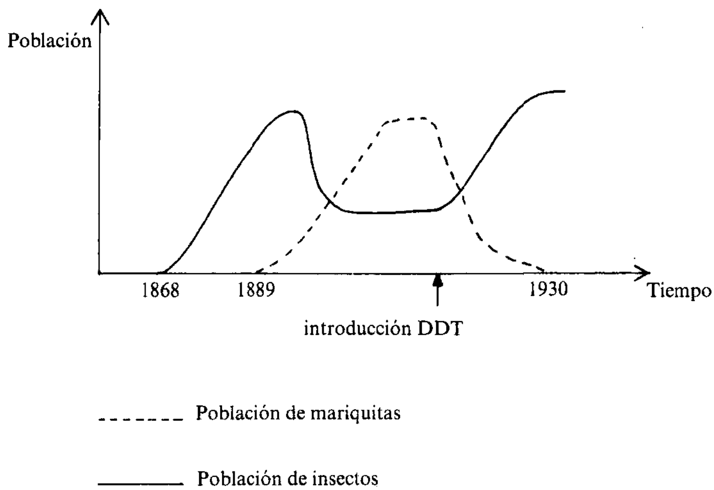
1 y g) (precios-tiempo)
2 y h) (gusto-temperatura)
3 y l) (número-tamaño)
4 y o) (número de aplausos-tiempo)
5 y j) (beneficios-precio de admisión)
6 y a) (precio-peso)
7 y f) (diámetro-tiempo)

8 y d) (tiempo-longitud de la carrera)
9 y m) (velocidad-tiempo)
10 y n) (velocidad-tiempo)

Página 4: Las tres situaciones finales pueden ilustrarse con gráficas como las siguientes:







(Notar que las alturas relativas de estas gráficas no tienen importancia).

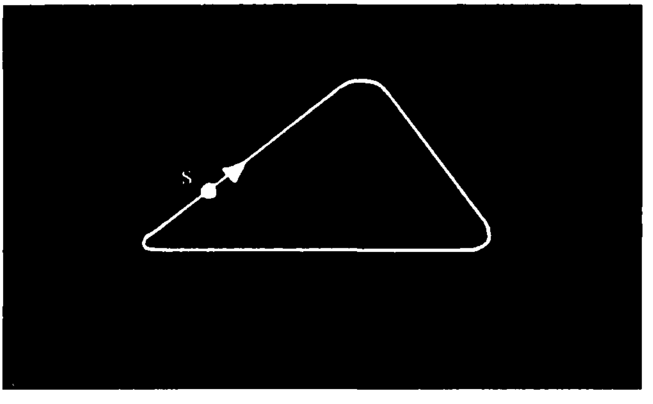
A4. DISEÑO DE GRAFICAS A PARTIR DE DIBUJOS

En este cuadernillo ofrecemos a los alumnos la oportunidad de discutir el significado de varias características de las gráficas (incluyendo máximos, mínimos y periodicidad), en tres contextos reales.

También pretendemos dar a los alumnos una mayor consciencia de cómo llegar a dibujar una gráfica, cuando deben ser tenidos en cuenta muchos factores a la vez. Será necesaria aproximadamente una hora.

Presentación sugerida

1. Dar a los alumnos unos 10 minutos para discutir la situación de la primera página del folleto, en parejas o en grupos pequeños. Mientras tanto, dibujar un circuito sencillo en el encerado (No debe ser el mismo que en el cuadernillo):

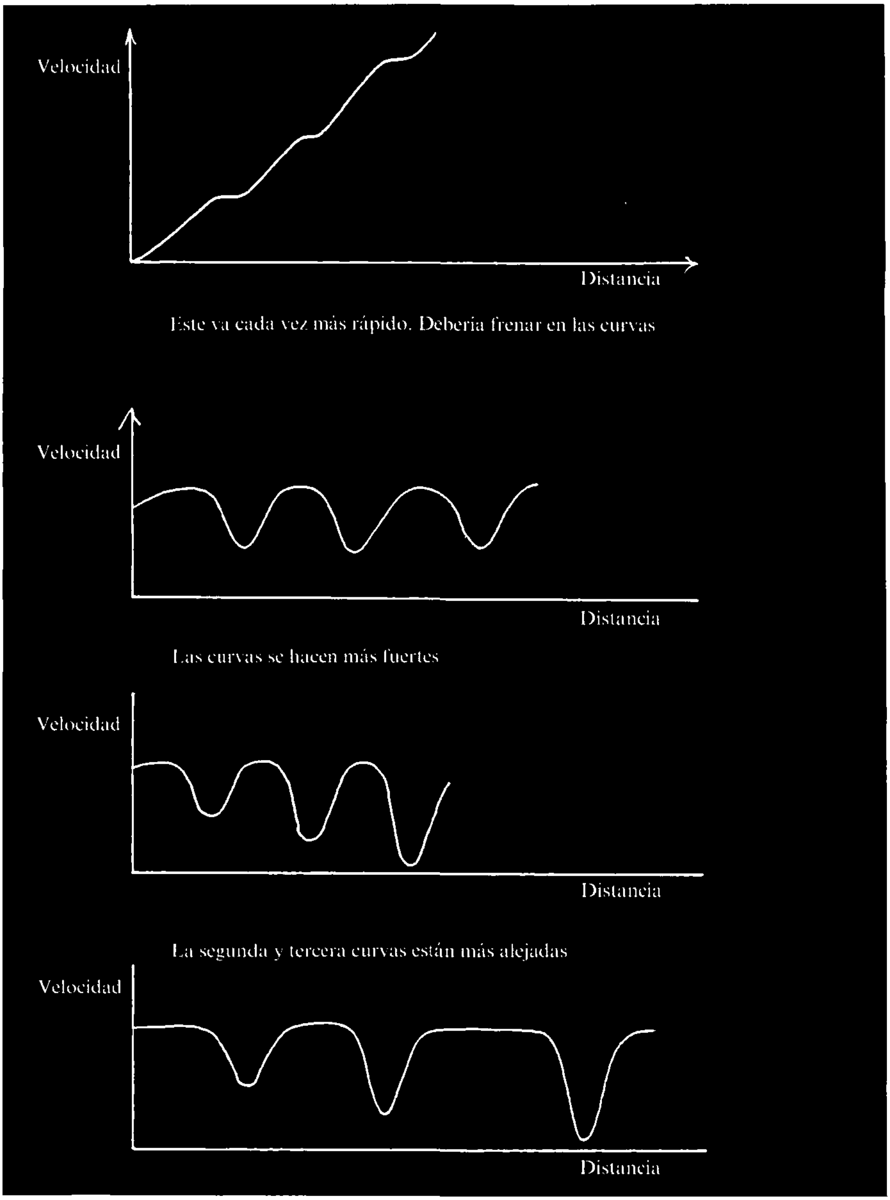


2. Invitar ahora a un voluntario a describir, verbalmente, cómo variará la velocidad del coche mientras viaja alrededor de esta pista. (Disuadirle en esta etapa de introducir demasiados detalles técnicos, como un cambio de neumáticos).

Pedirle al alumno que dibuje una gráfica velocidad-distancia en el encerado, e invitar a la crítica al resto de la clase.

3. Cuando cada alumno plantee un comentario, invitarle a salir y dibujar una nueva gráfica debajo de la anterior, explicando qué nueva consideración ha tenido en cuenta. De esta forma, la gráfica original puede ser sucesivamente mejorada hasta que todos estén convencidos de que describe completamente la situación.

4. Remarcar que al dibujar las gráficas, los alumnos no deberían esperar hacer dibujos perfectos inmediatamente sino que deben esperar tener que hacer varios intentos. Disuadir a los alumnos de borrar los errores; más bien pedirles que escriban qué está mal en su dibujo y dibujen uno nuevo debajo.



Este va cada vez más rápido. Debería frenar en las curvas

Las curvas se hacen más fuertes

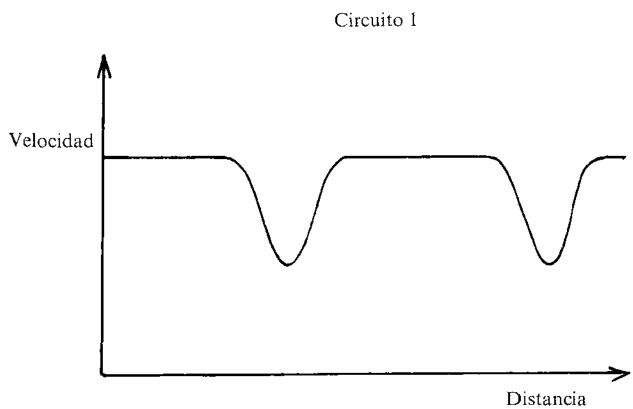
La segunda y tercera curvas están más alejadas

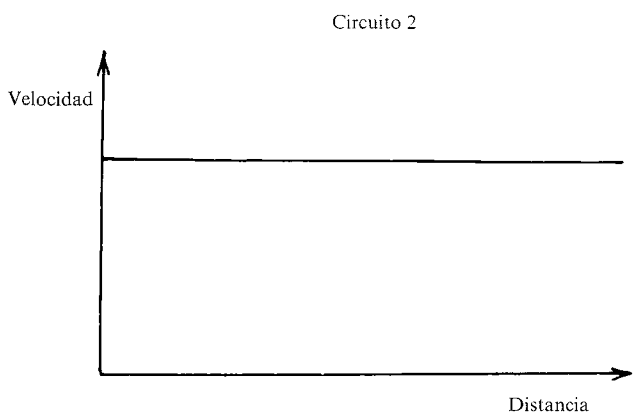
5. Ahora pedir a los alumnos que continúen con el folleto, inventando sus propios circuitos, y escogiendo el circuito correcto para la carrera de la gráfica de la página 3.

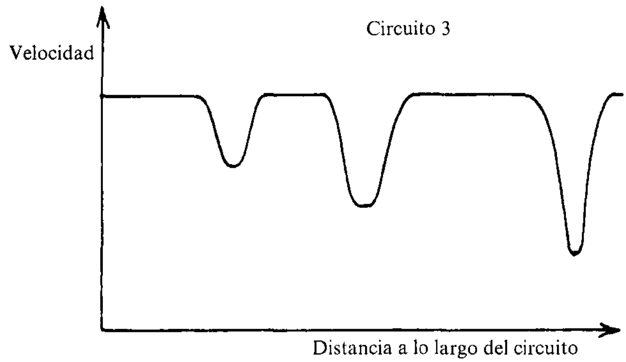
6. La última página del folleto contiene dos situaciones de naturaleza periódica (Si el tiempo es demasiado corto, pueden usarse como material para trabajar en casa.)

A4. ALGUNAS SOLUCIONES

Página 1: *Carrera de coches*

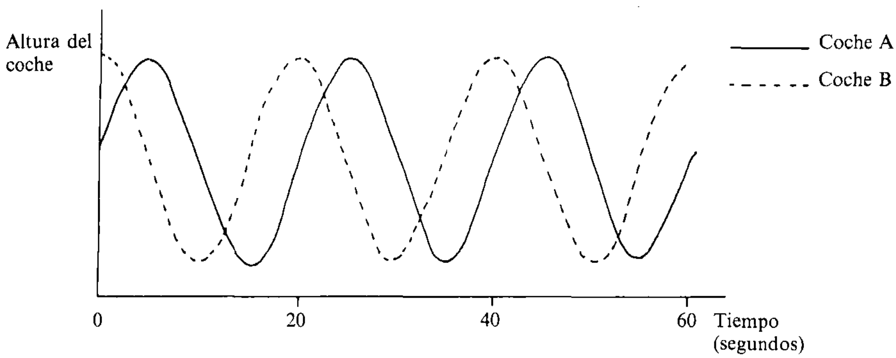




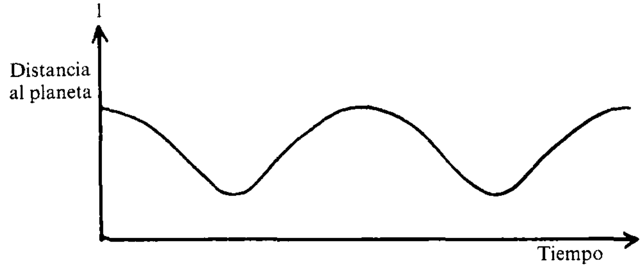


Página 3: El coche estaba viajando alrededor del circuito C. Los circuitos A, E y G tienen demasiadas curvas. Los circuitos B y D están descartados porque la segunda curva debería ser la más pronunciada. El circuito F está descartado porque la recta más larga debería estar entre la segunda y la tercera curvas.

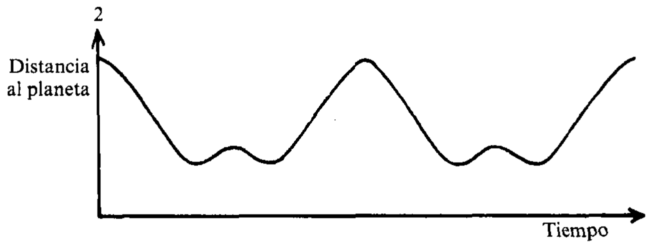
Página 4: *La noria*



Página 4: *Orbitas*



(Estas gráficas dan por supuesto que el satélite está viajando a velocidad constante).



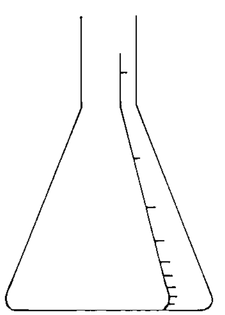
A5. MIRANDO GRADIENTES

La situación «Llenando botellas» proporciona un desafío más duro que la mayoría de los precedentes, porque está enfocado fundamentalmente a dibujar e interpretar gradientes. Será necesaria una hora aproximadamente.

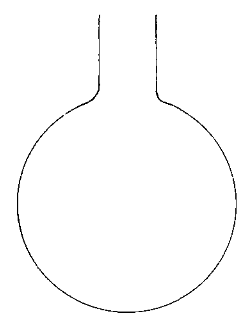
Presentación sugerida

1. Pedir a los alumnos que se imaginen a sí mismos llenando una botella de agua en la fregadera de su casa ¿Qué ocurre? ¿Cuándo sube el nivel del agua más despacio? ¿Por qué es esto? ¿Por qué tiende el agua a salir de la botella en la parte superior? (Si fuera posible, usar una selección de botellas del departamento de ciencias y discutir cómo se llenará cada una de ellas, quizás demostrar esto vertiendo agua de forma constante en cada una y pidiendo a la clase que describa y explique qué ven). De esta manera intentad centrar su atención en cómo el nivel del agua en cada botella depende del volumen de agua vertido en ella.

2. Ahora distribuir el cuadernillo. Puede ser necesario explicar el párrafo inicial; preguntar a la clase si han visto botellas calibradas en la clase de ciencias. Pedir a los alumnos que expliquen por qué, por ejemplo, los calibres de un frasco cónico están más separados hacia la parte superior del frasco ¿Cómo serían los calibres en el frasco de evaporación? ¿Por qué?



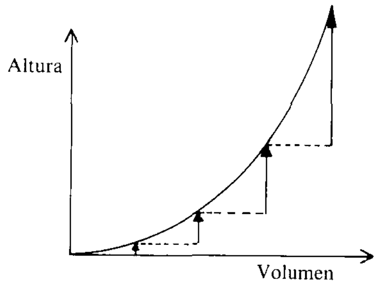
Frasco cónico



Frasco de evaporación

3. Los alumnos deberían trabajar ahora en grupos o en parejas en sus hojas. En el ejercicio en que deben ser relacionados los frascos con las gráficas, cada pareja o grupo debería discutir la situación hasta llegar a un consenso.

4. La siguiente aproximación puede ser de considerable ayuda para aquellos que tengan dificultades.

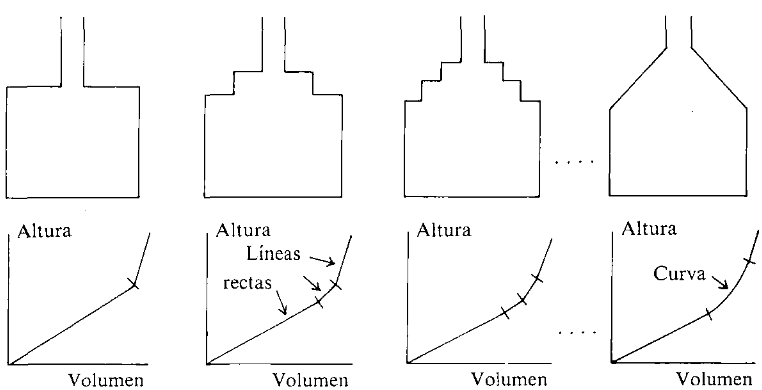


«Imaginaos que aumentais el volumen en cantidades iguales ¿Qué ocurre con la altura del líquido en la botella?»

(En este caso, la altura aumenta una cantidad pequeña al principio —por lo tanto la botella debe ser ancha en esta parte—, y gradualmente sube cantidades más y más grandes— por tanto la botella debe volverse cada vez más estrecha—. Esta gráfica corresponde por tanto al frasco cónico.)

5. Al dar una vuelta por el aula, puede que se observe que muchos alumnos crean que la gráfica (g) corresponde al frasco de tinta, y la gráfica (c) al embudo taponado. Probablemente sea debido a que crean que un extremo «recto» del frasco debe corresponder a una línea recta en la gráfica (nuestro viejo concepto erróneo «gráfica = dibujo»).

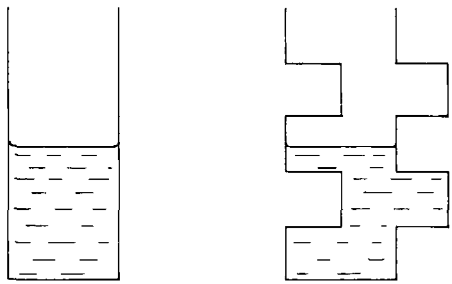
De forma similar, muchos alumnos escogen la gráfica (e), el (h) o incluso el (d) para el frasco de evaporación, porque la curva cóncava en la parte inferior del frasco es identificada con la gráfica cóncava. La última página trata de ayudar a los alumnos a superar tales errores, por lo tanto puede valer la pena retrasar la discusión de las páginas 2 y 3 hasta que todos tengan posibilidades de descubrir y explicar sus propios errores en la página. Esta página pide a los alumnos dibujar gráficas para la siguiente secuencia de botellas:



Esto puede permitirles ver que la gráfica (f) debe corresponder al frasco de tinta antes que la gráfica (g).

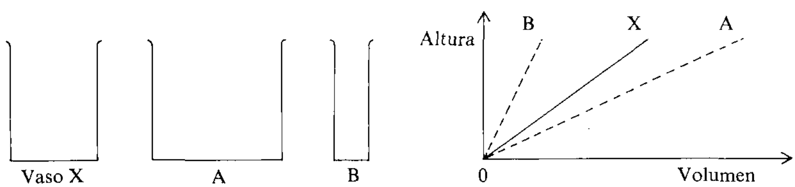
6. Finalmente, animar a los alumnos a que inventen sus propias botellas, y que dibujen las gráficas correspondientes, y ver después si sus compañeros pueden reconstruir las formas de las botellas originales a partir únicamente de las gráficas.

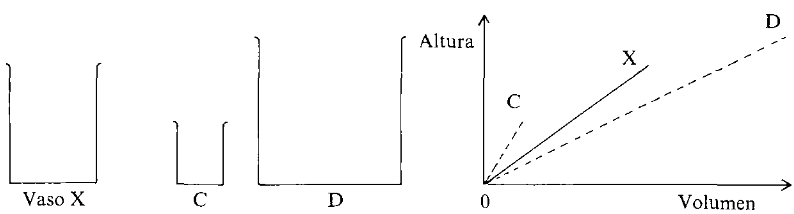
Los alumnos pueden descubrir también que de una misma gráfica pueden resultar diferentes botellas:

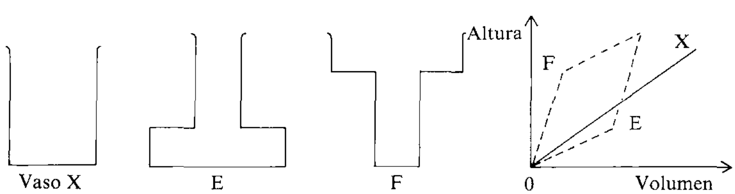


Aquí se da por supuesto que se pueden usar botellas sin simetría axial.

A5. ALGUNAS SOLUCIONES





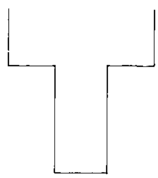


Las parejas son:

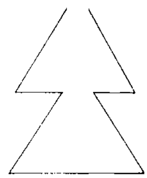
Frasco de tinta.............	f)
Frasco cónico..............	d)
Embudo taponado.........	b)
Cubo	a)
Frasco de evaporación	i)
Vaso	e)

Las tres gráficas sobrantes dan los siguientes frascos:

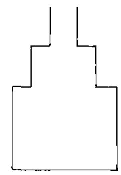
c)



h)



g)



CUADERNILLOS SUPLEMENTARIOS

Los siguientes cuadernillos para los alumnos, proporcionan una mayor práctica sobre las ideas desarrolladas en la Unidad A, y pueden ser usados para repaso, como trabajo para casa o como trabajo adicional en clase.

Interpretando puntos continúa el trabajo introducido en A1, proporcionando material adicional en la interpretación y uso de diagramas. El cuarto ítem ilustra la clásica relación depredador-presa encontrada frecuentemente en el trabajo biológico.

Dibujando gráficas a partir de textos amplía el trabajo iniciado en A3. La situación introductoria invita al alumno a interpretar y discutir el significado de varias gráficas con particular referencia a los cambios en la pendiente. Esto es seguido por una práctica adicional en traducir «descripciones completas» y «frases-disparador» a gráficas. También se invita a los alumnos a que inventen sus propias situaciones para acompañar unas gráficas dadas.

Diseño de gráficas a partir de dibujos introduce un sistema inusual de coordenadas, en el que cada posición en el plano es descrita por un par de distancias (x,y) a dos puntos fijos. Mientras los alumnos exploran trayectorias en el plano y las gráficas cartesianas(referidas a x y a y) que resultan, descubrirán diversos resultados geométricos sorprendentes y al mismo tiempo obtendrán una valiosa práctica en diseño de gráficas y búsqueda de fórmulas algebraicas sencillas. Este cuadernillo se puede usar para completar cualquiera de los cuadernillos de la unidad A.

INTERPRETANDO PUNTOS

1. Informes escolares

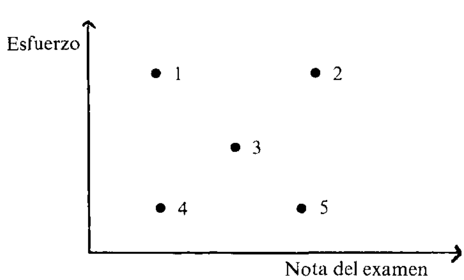
Alex ha sido muy perezoso todo el trimestre y esto le ha hecho obtener una nota muy pobre en el examen.

Susana es una alumna muy capaz, como lo muestra claramente la nota de su examen, pero su concentración y conducta en clase son muy pobres. Con más esfuerzo, podría hacerlo muy bien en esta asignatura.

Nuria ha trabajado bien y merece este maravilloso resultado en el examen.

David ha trabajado razonablemente bien este trimestre y ha conseguido un resultado satisfactorio en el examen.

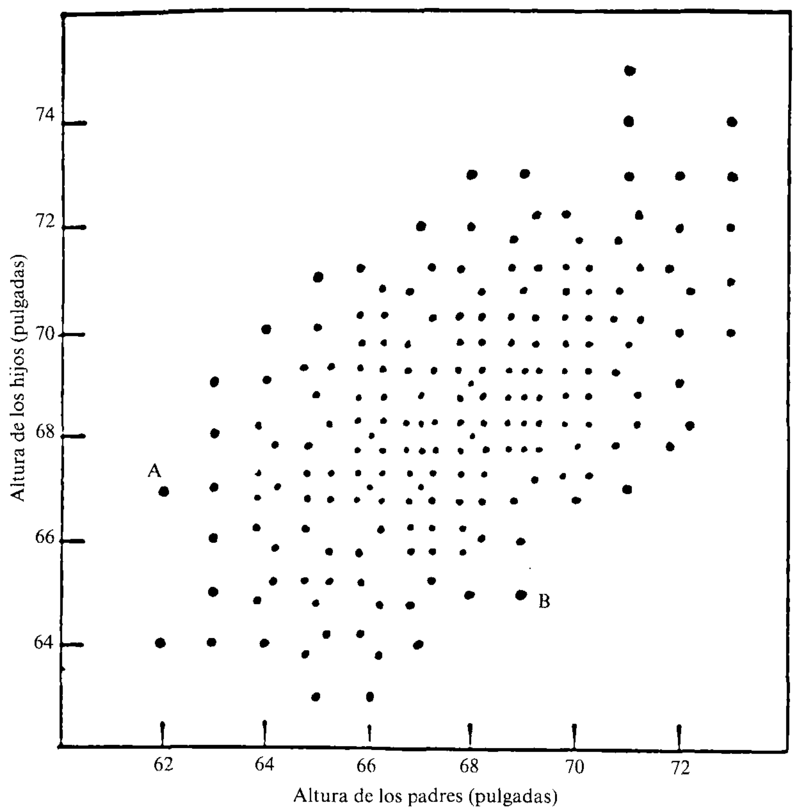
Cada informe escolar está representado por uno de los puntos del gráfico. Marcar cuatro puntos con los nombres Alex, Susana, Nuria y David. Elaborar un informe para el punto sobrante.



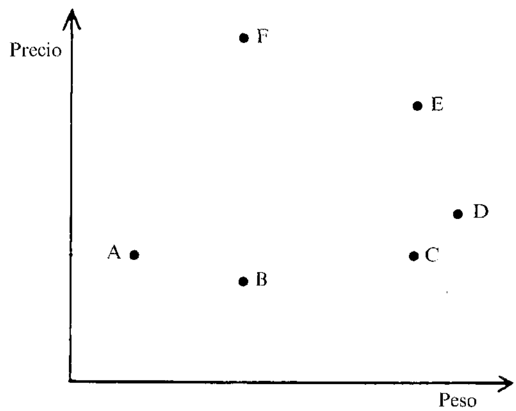
2. ¿Es hereditaria la altura?

En un experimento, se midió a 192 padres y a sus hijos. (Los hijos fueron medidos cuando habían alcanzado su altura adulta).

—¿Qué puedes decir de los puntos A y B?
—¿Qué conclusiones se pueden sacar de este gráfico?



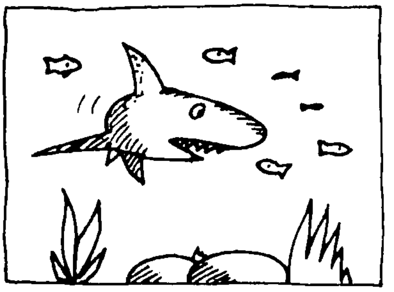
3. Bolsas de azúcar



Cada punto de este gráfico representa una bolsa de azúcar.

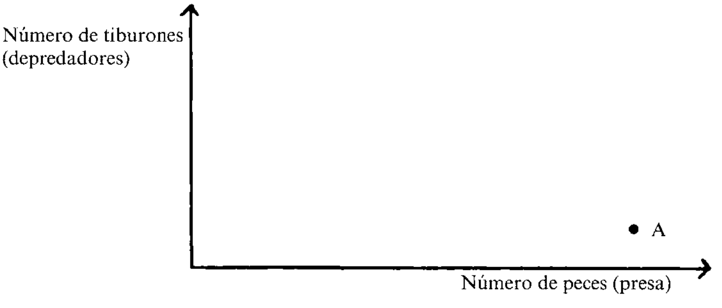
a) ¿Qué bolsa es la más pesada?
b) ¿Qué bolsa es la más barata?
c) ¿Qué bolsas tienen el mismo peso?
d) ¿Qué bolsas tienen el mismo precio?
e) ¿Qué bolsa sale mejor de precio F ó C? ¿Por qué?
f) ¿Qué bolsa sale mejor de precio B ó C? ¿Por qué?
g) ¿Qué dos bolsas salen al mismo precio? ¿Por qué?

4. Tiburones y Peces



A continuación hay una descripción simplificada de lo que ocurre cuando interactúan dos especies. Los tiburones son los depredadores y los peces la presa. La situación en el estado A ha sido representada en el gráfico por un punto.

¿Cómo se moverá este punto con el paso del tiempo?



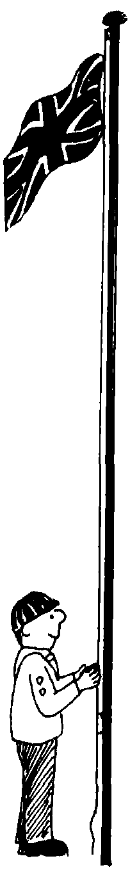
a) Debido a la ausencia de muchos tiburones, hay una abundante provisión de peces en la zona.
b) Notando una abundante provisión de peces para comer, los tiburones entran en la zona.
c) Los tiburones comen muchos peces, hasta que...
d) ... la población de peces es insuficiente para mantener a todos los tiburones. De esta forma muchos tiburones deciden marcharse.
e) Con pocos tiburones alrededor, la población de peces aumenta de nuevo.
f) Ahora la zona contiene suficiente comida para mantener más tiburones, por lo tanto vuelven...
g) ... y empiezan a comer peces... hasta que...

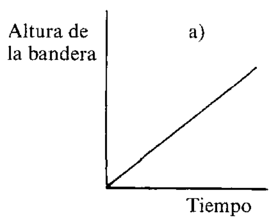
DIBUJANDO GRAFICAS A PARTIR DE TEXTOS

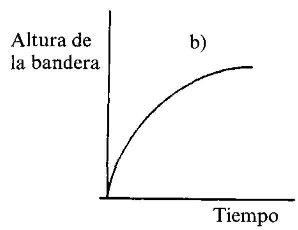
Izando la bandera

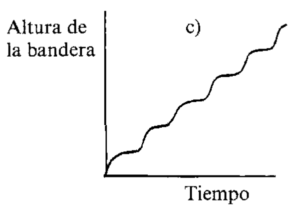
Cada mañana, en el campamento de verano, el boy scout más joven tiene que izar la bandera a lo alto del mástil.

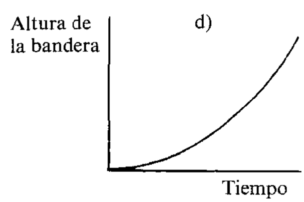
I) Explica en palabras qué significaría cada una de las siguientes gráficas.
II) ¿Qué gráfica muestra la situación de forma más realista?
III) ¿Qué gráfica es la menos realista?

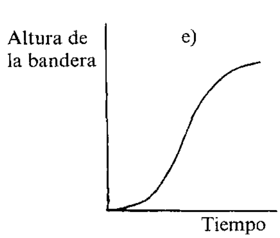


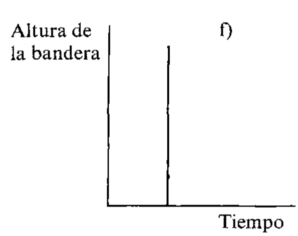






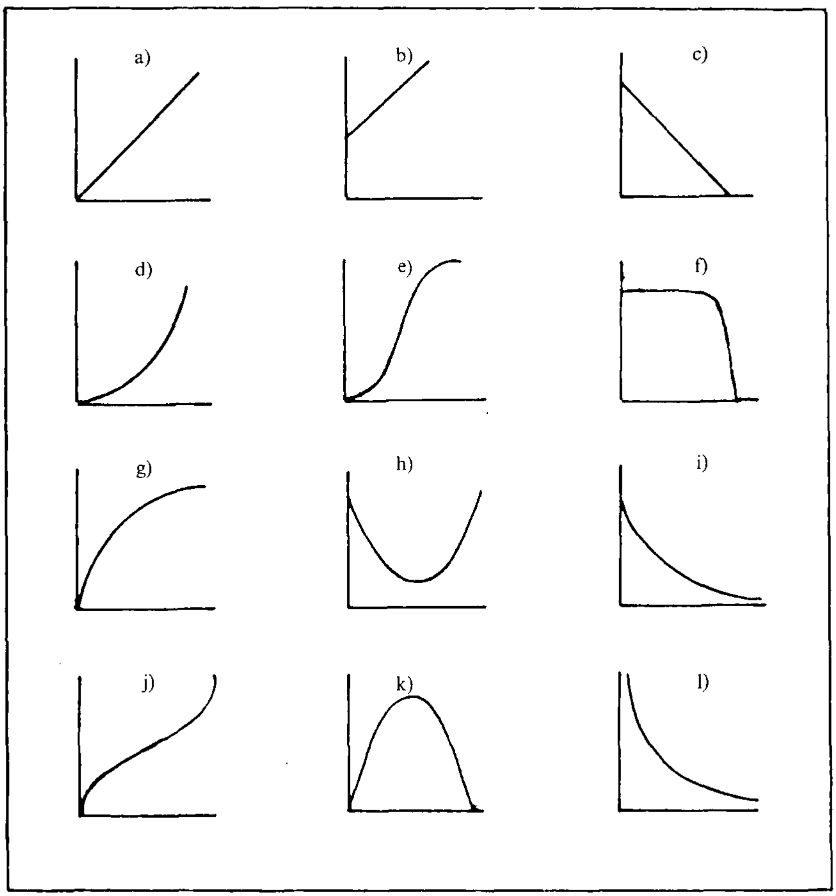






Elige el mejor gráfico para describir cada una de las situaciones indicadas abajo. Copia el gráfico y etiqueta los ejes con las variables mostradas entre paréntesis. Si no puedes encontrar el gráfico que quieres, dibuja tu propia versión y explícala.

1. El levantador mantuvo las pesas sobre su cabeza por unos segundos y luego las dejó caer con un violento estrépito (altura de las pesas/tiempo).
2. Cuando empecé a aprender guitarra, al principio progresaba rápidamente. Pero he comprobado que cuanto más sabes es más difícil mejorar. (pericia/cantidad de práctica).
3. Si el trabajo en la escuela es demasiado fácil, no aprendes nada con ello. Por otra parte, si es tan difícil que no lo puedes entender, tampoco aprendes. Por eso es tan importante trabajar con el nivel adecuado de dificultad. (valor educativo/dificultad del trabajo).



4. Al hacer jogging (al correr), intento empezar despacio, aumentar a una velocidad conveniente y luego ir bajándola gradualmente cuando me voy acercando al final de la sesión (distancia/tiempo).
5. En general, los animales grandes viven más que los pequeños y sus corazones laten más despacio. Con una media de 25 millones de latidos, nos encontramos con que las ratas viven sólo tres años, los conejos siete y los elefantes y las ballenas todavía más. Como la respiración está emparejada con los latidos —normalmente se respira una vez cada cuatro latidos— el ritmo de respiraciones también disminuye al aumentar el tamaño (ritmo cardiaco/años de vida).
6. Como para el 5 excepto que las variables son (ritmo cardiaco/ritmo respiratorio).

Inventa tres historias para acompañar tres de las gráficas sobrantes. Pasa tus historias a tu compañero ¿Puede él elegir las gráficas correctas para acompañar a tus historias?

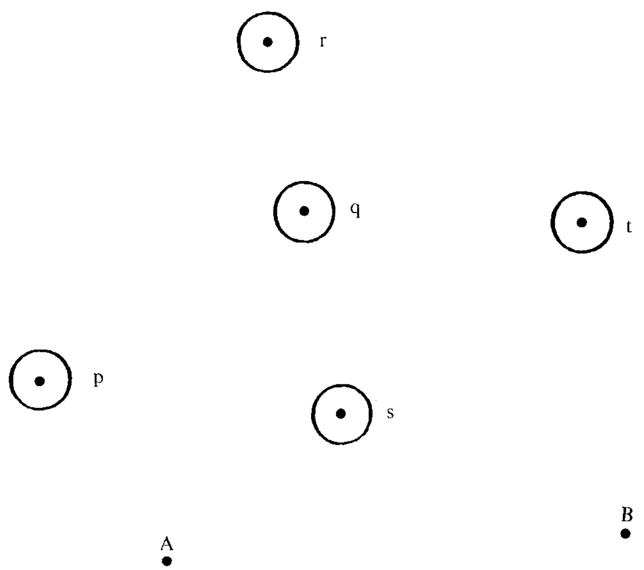
Dibuja gráficas para ilustrar las siguientes situaciones. Tienes que decidir tú mismo las variables y la relación entre ellas. Etiqueta tus ejes con cuidado, y explica tus gráficas con palabras debajo de cada uno de ellas.

¿Cómo varía...

1. Tu altura con la edad?
2. La cantidad de pasta necesaria para hacer una pizza con su diámetro?
3. La cantidad de horas de luz solar con la época del año?
4. Durante un sábado típico el n.º de personas en un supermercado?
5. La velocidad de un saltador de pértiga en un salto típico?
6. El nivel del agua en tu bañera, antes, durante y después del baño?

DISEÑO DE GRAFICAS A PARTIR DE DIBUJOS

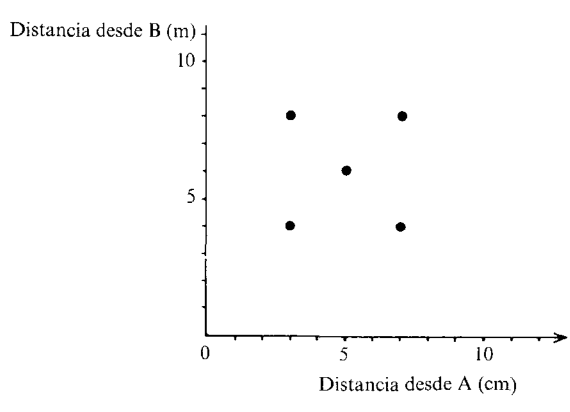
Partículas y Trayectorias

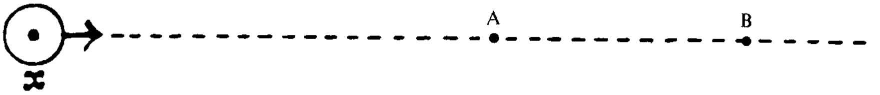


En el diagrama superior, hay cinco partículas marcadas como p, q, r, s y t.

—¿Puedes marcar, sin medir, cada punto del gráfico inferior con la letra correcta?

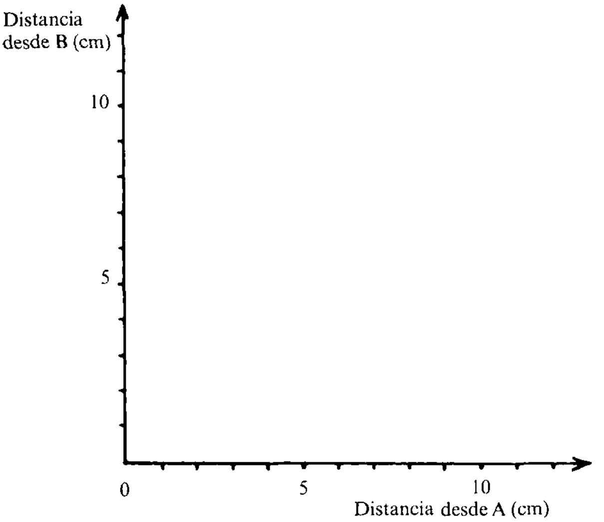
Ahora midiendo corrige tu respuesta (A y B están separados 6 cm).





En este diagrama, la particula x va moviéndose lentamente a lo largo de la trayectoria mostrada por la línea punteada, de izda. a drcha.

— Dibuja un gráfico para mostrar cómo está relacionada la distancia desde B con la distancia desde A durante este movimiento.

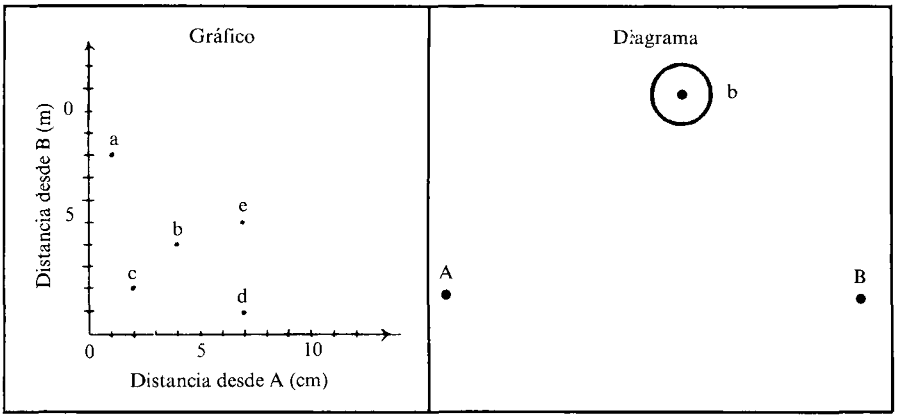


— Corrige tu respuesta midiendo varias posiciones y anotándolas en la tabla:

Distancia desde A (cm)	6	5	4	3	2	1	0	1	2	
Distancia desde B (cm)	12									

Escribe algunas fórmulas que puedas encontrar ajustando tu gráfica.

Intenta marcar las posiciones de las cinco partículas a, b, c, d y e en el diagrama de la drcha (la partícula b la tienes ya marcada).



—¿Qué posiciones son imposibles de marcar? ¿Por qué? Intenta marcar en la gráfica otros puntos que darían posiciones imposibles en el diagrama. Sombrea en la gráfica estas regiones prohibidas.

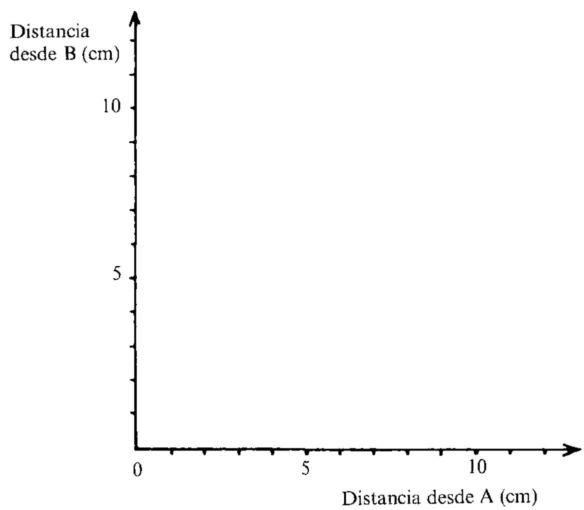
—Está dibujada una posición de la partícula b. ¿Es ésta la única posición que está a 4 cm. de A y de B? Marca otras posibles posiciones para la partícula b.

—¿Qué puntos de la gráfica dan una sola posición posible en el diagrama?

En las hojas que se acompañan, las partículas se están moviendo a lo largo de una serie de trayectorias diferentes.

Para cada situación:

— Dibuja una gráfica aproximada que muestre cómo variará la distancia desde B en relación con la distancia desde A.



— Corrige tu respuesta midiendo varios puntos, recogiendo los resultados en una tabla y marcando con precisión unos cuantos puntos.

— Intenta encontrar una fórmula que describa la relación entre las dos distancias.

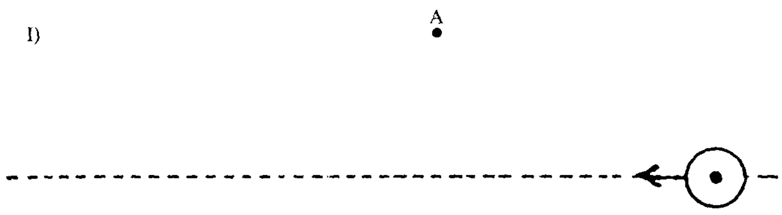
Continúa explorando otras partículas y sus gráficas.

Escribe tus hallazgos.

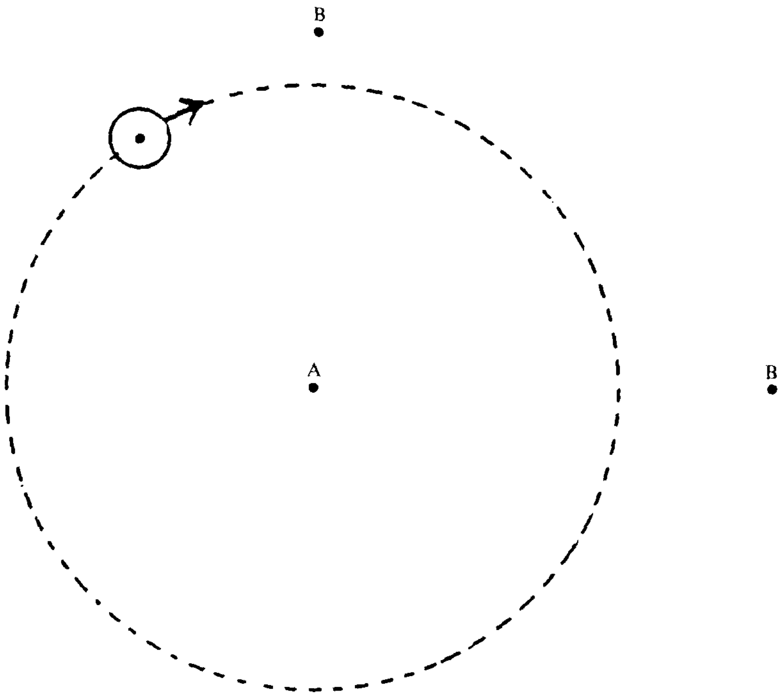
DISEÑO DE GRAFICAS A PARTIR DE DIBUJOS

Partículas y Trayectorias

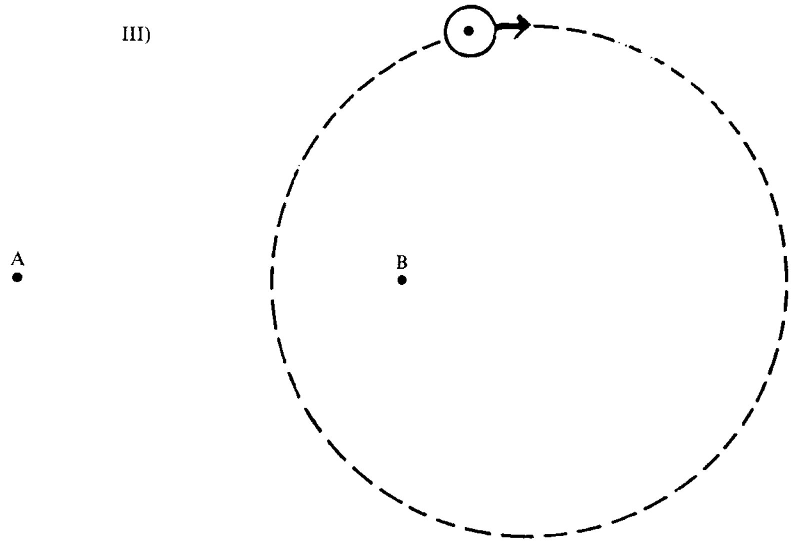
I)



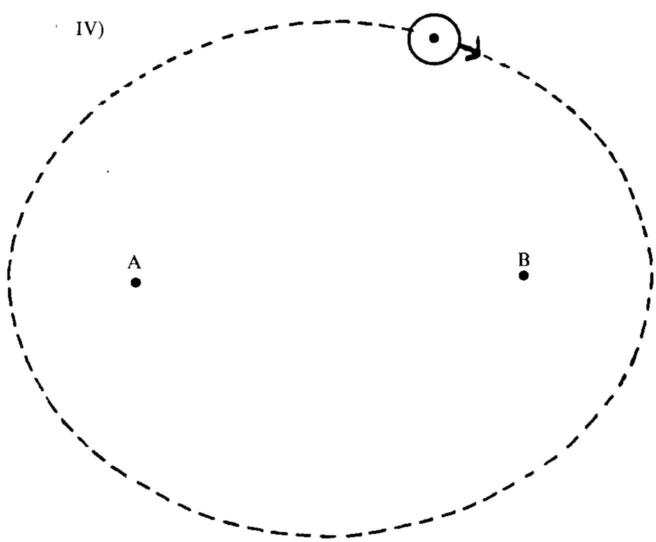
II)



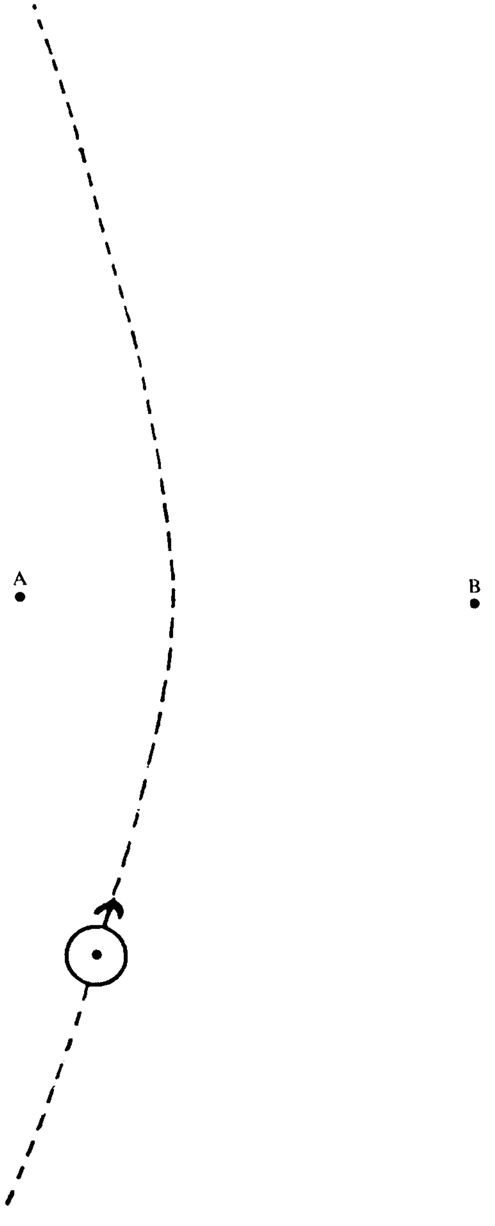
III)



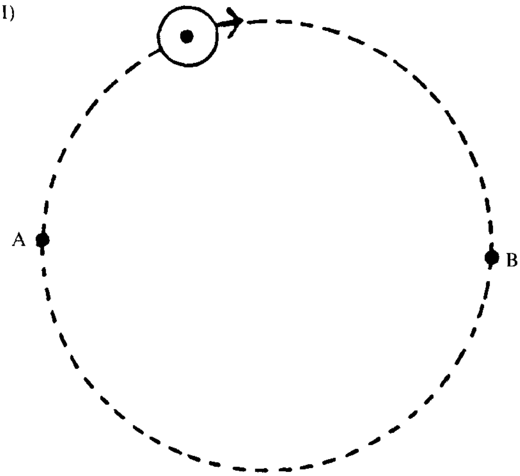
IV)



V)



VI)



Ahora continúa explorando
otras trayectorias y sus gráficas.
Escribe tus hallazgos.

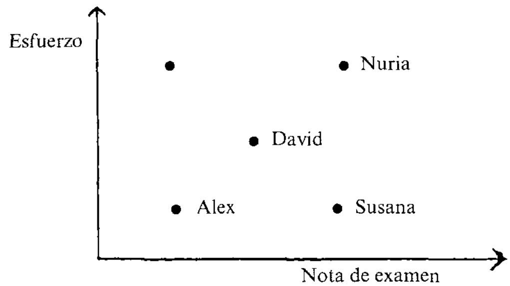
INTERPRETANDO PUNTOS

ALGUNAS SOLUCIONES

1. Informes escolares

La gráfica debería ser etiquetada de la siguiente manera:

El punto sobrante representa a alguien que ha trabajado muy duro, pero no realizó buen examen.



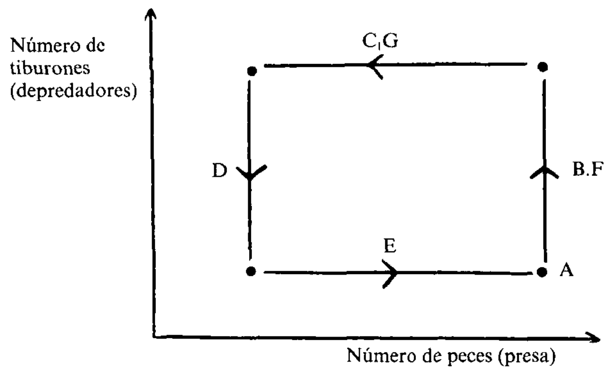
2. ¿Es hereditaria la altura?

Es claro que existe alguna relación entre la altura del padre y la de su hijo: Un padre alto es más probable que tenga un hijo alto. En esta muestra, ningún hombre de 73 pulgadas de altura, tiene un hijo de menos de 70 pulgadas, mientras que ningún hombre de 63 pulgadas tiene un hijo que mida 70 pulgadas. En términos matemáticos existe una correlación positiva entre las dos variables.

3. Bolsas de azúcar

a) La bolsa D es la más pesada.
b) La bolsa B es la más barata.
c) Las bolsas B y F pesan lo mismo.
d) Las bolsas A y C tienen el mismo precio.
e) La bolsa C sale más barata.
f) La bolsa C sale más barata.
g) Las bolsas A y F salen igual de precio.

4. Tiburones y peces



ALGUNAS SOLUCIONES (Dibujando gráficas a partir de textos)

Página 1. *Izando la bandera*

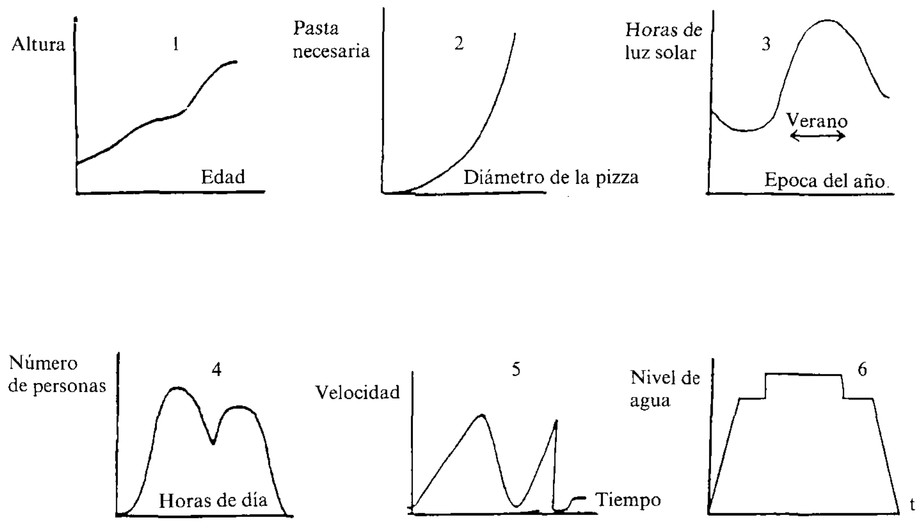
Gráfica a) Significaría que la bandera fue izada a un ritmo constante.
Gráfica b) La bandera fue izada rápidamente al principio, luego cada vez más despacio, en la parte superior.
Gráfica c) La bandera fue izada a tirones, presumiblemente el scout tiraba de la cuerda «mano sobre mano».
Gráfica d) Fue izada lentamente al principio, pero aceleró gradualmente.
Gráfica e) La bandera empezó a subir lentamente, luego aceleró, y finalmente se fue parando en la parte superior del poste.
Gráfica f) ¡Imposible! (Incluso para aquellos que ven la gráfica como un dibujo de la situación más que como una representación abstracta de ella).

Página 2. *Las situaciones pueden ser emparejadas con las gráficas como sigue:*

1 y f) (Altura de las pesas/tiempo)
2 y g) (Pericia/cantidad de práctica)
3 y k) (Valor educativo/dificultad del trabajo)
4 y e) (Distancia/tiempo)
5 y l) (Ritmo cardiaco/años de vida)
6 y a) (Ritmo cardiaco/ritmo respiratorio)

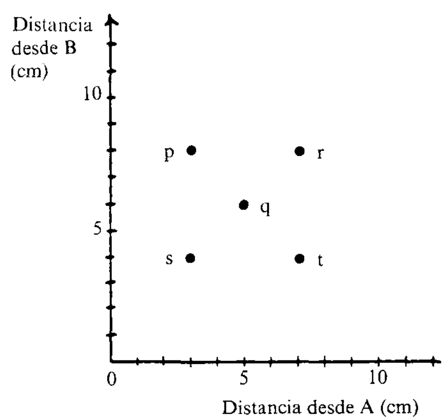
(Sin embargo, estas respuestas no deben ser contempladas como las únicas correctas posibles).

Página 4. *Las gráficas deseables para los seis apartados son:*



ALGUNAS SOLUCIONES (Gráficas a partir de dibujos)

Página 1



Página 2

Las flechas indican la dirección de viaje de la partícula. Por lo tanto, para la primera parte del movimiento (hasta que la partícula alcanza A):

$$y = x + 6$$

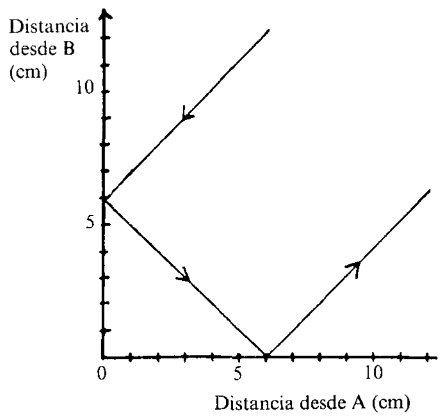
desde A hasta B

$$x + y = 6$$

y desde B en adelante

$$y = x - 6$$

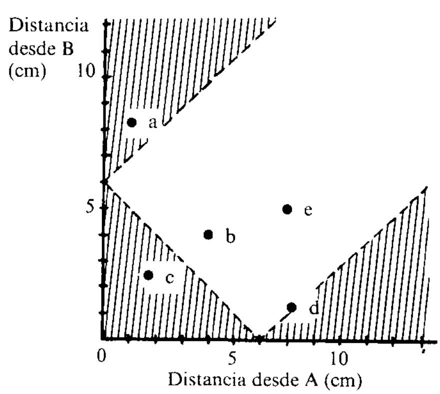
donde x e y son las distancias desde A y B respectivamente.



Página 3

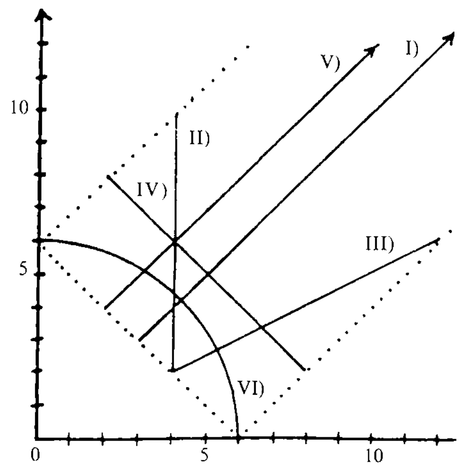
Todos los puntos de la región rayada son imposibles de marcar en el diagrama.

Los puntos situados sobre la línea límite son los únicos puntos que dan una posición posible en el diagrama.



Página 4 y segundo cuadernillo

Cada uno de éstas gráficas debe estar situada dentro del recinto indicado por la línea punteada.



Sus ecuaciones son:

I).	$y=x$	$(x \geqslant 3)$
II).	$x=4$	$(2 \leqslant y \leqslant 0)$
III).	$y=1/2\,x$	$(4 \leqslant x \leqslant 12)$
IV).	$x+y=10$	$(2 \leqslant x \leqslant 8)$
V).	$y=x+2$	$(x \geqslant 2)$
VI).	$x^2+y^2=36$	$(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$

Unidad B

INTRODUCCION

En esta unidad ofrecemos a los alumnos la oportunidad de descubrir y explorar modelos y funciones que surgen de situaciones realistas y de relacionar éstas con expresiones algebraicas que incluyen funciones lineales, recíprocas, cuadráticas y exponenciales.

Esta unidad contiene cuatro lecciones, y está pensada para ocupar aproximadamente dos semanas.

B1 contiene una colección de actividades que están diseñadas para implicar a los alumnos en la traducción directa entre tablas de datos y gráficas. Liberándoles del tiempo que consumen las destrezas técnicas (marcar puntos, etc), se anima a los alumnos a mirar las tablas de una forma más global y cualitativa.

B2 intenta implicar a los alumnos en la búsqueda de funciones a partir de situaciones. Se invita a los alumnos a dibujar gráficas aproximadas, construir tablas de valores y buscar fórmulas donde sea posible.

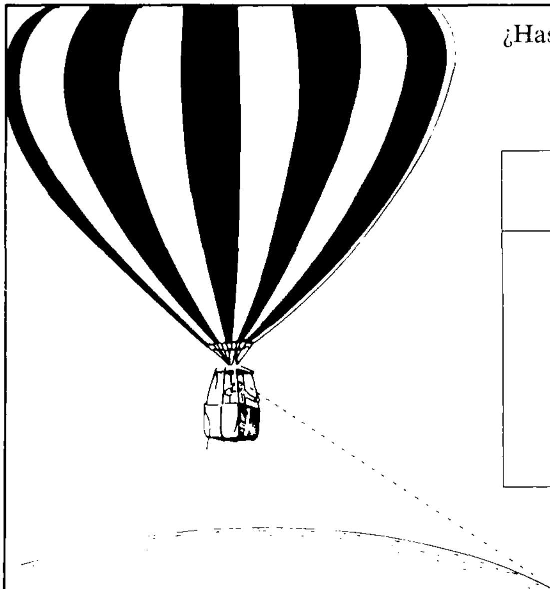
B3 explora funciones exponenciales en el contexto de «Fármacos hipnóticos.» Hemos incluido esta actividad porque muchos libros parecen descuidar estas importantes funciones. Quizá esto sea debido al hecho de que habitualmente su estudio implica una gran cantidad de cálculos difíciles. Sin embargo, con ayuda de la calculadora, las funciones exponenciales pueden ser investigadas por cualquiera.

B4 presenta una situación en la que aparecen tres variables independientes. El cuadernillo del alumno ofrece una colección de datos no clasificados relativos a la resistencia de varios «puentes» con diferentes dimensiones. Manteniendo constantes dos dimensiones (por ejemplo: la longitud y el grosor) se puede descubrir una relación entre la tercera (la anchura) y el máximo peso que puede soportar el puente. Si los alumnos organizan sus esfuerzos de esta manera, pueden descubrir una ley por la cual se puede predecir la resistencia de cualquier puente.

Para concluir esta unidad, ofrecemos de nuevo algunas actividades más que pueden ser usadas como complemento de este material. Estas actividades incluyen más materiales algebraicos.

B1. REALIZACION DE GRAFICAS A PARTIR DE TABLAS

En este cuadernillo se te pedirá que explores varias tablas de datos y que intentes descubrir los esquemas o tendencias contienen.

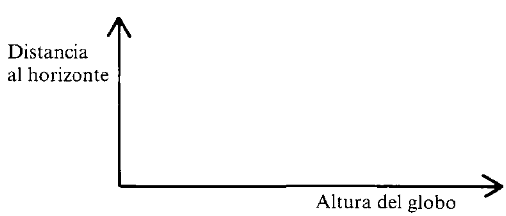


¿Hasta dónde puedes ver?

Altura del globo (m)	Distancia hasta el horizonte (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	33
500	80
1.000	112

Mira con cuidado la tabla anterior.

— Sin marcar los puntos exactamente, intenta realizar una gráfica aproximada que describa la relación entre la altura del globo y la distancia al horizonte.



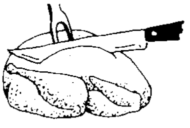
Explica el método que has empleado.

Sin dibujar los puntos, elige (entre las gráficas que te damos, a continuación) la que se ajuste mejor a cada una de las tablas siguientes. Copia la gráfica más conveniente, ponles nombre a los ejes y explica tu elección. Si no puedes encontrar la gráfica que deseas, dibuja tu propia versión.

1. **Café enfriándose**

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (°C)	90	79	70	62	55	49	44

2. **Tiempo de cocción del pavo**

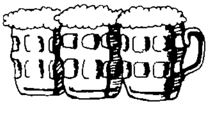


Peso (Kgs)	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (horas)	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6

3. **Cómo crece un bebé antes de nacer**

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	9	16	24	30	34	38	42

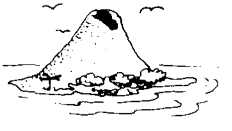
4. **Después de tres pintas de cerveza...**



Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6	7
Alcohol en la sangre (mg/100 ml)	90	75	60	45	30	15	0

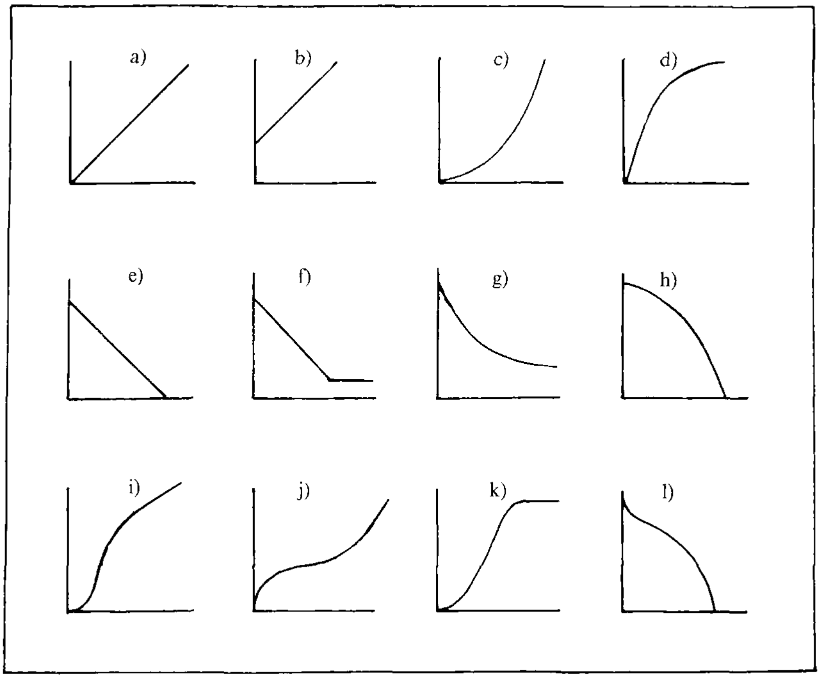
5. **Número de especies de pájaros en una isla volcánica**

Año	1880	1890	1900	1010	1920	1930	1940
Número de especies	0	1	5	17	30	30	30



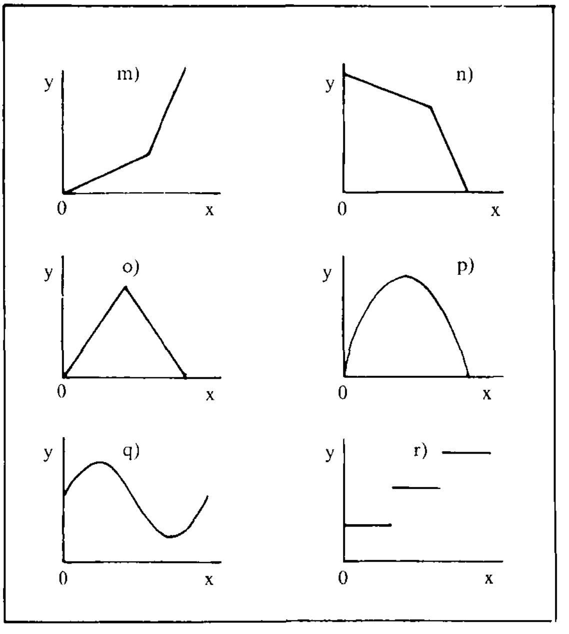
6. Esperanza de vida

Edad (años)	Número de supervivientes	Edad (años)	Número de supervivientes
0	1.000	50	913
5	979	60	808
10	978	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1



Altitud (km)	Temperatura (°C)	Altitud (km)	Temperatura °C)
0	−20	60	−12
10	−48	70	−56
20	−50	80	−80
30	−38	90	−90
40	−18	100	−75
50	6	110	−20

Intenta construir las tablas numéricas correspondientes a las seis gráficas siguientes: (No tienen por qué representar situaciones reales.)



Ahora invéntate algunas tablas y dibuja las gráficas correspondientes en una hoja de papel aparte (nuevamente no tienen por qué representar situaciones reales). Pasa a tu compañero únicamente las tablas. El debe intentar dibujar las gráficas a partir de tus tablas. Comparad vuestras soluciones.

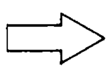
B1. (cont.). ALGUNAS INDICACIONES SOBRE REALIZACIÓN DE GRAFICAS A PARTIR DE TABLAS

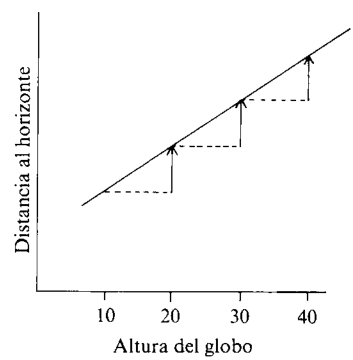
Observa de nuevo el problema del globo, «¿Hasta dónde puedes ver?» La discusión siguiente te debe ayudar a ver cómo puedes realizar gráficas rápidas, a partir de tablas, sin tener que emplear mucho tiempo en marcar puntos.

—Qué sucede con la «distancia al horizonte» cuando la altura del globo aumenta en cantidades *iguales?* ¿Aumenta o disminuye?

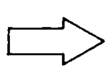
Altura del globo (m)	5	10	20	30	40	50	100	500	1.000
Distancia al hor. (km)	8	11	16	20	23	25	36	80	112

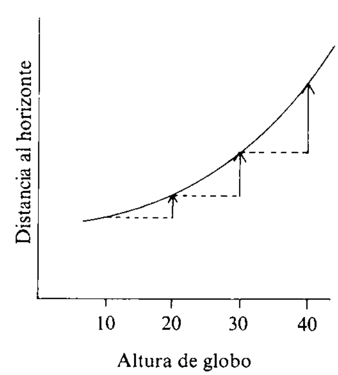
¿Aumenta esta distancia según cantidades constantes?...





...¿o aumenta según cantidades cada vez mayores?

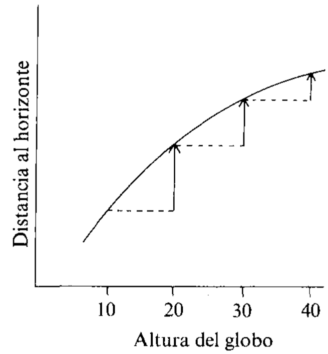




...¿o aumenta según cantidades cada vez menores?

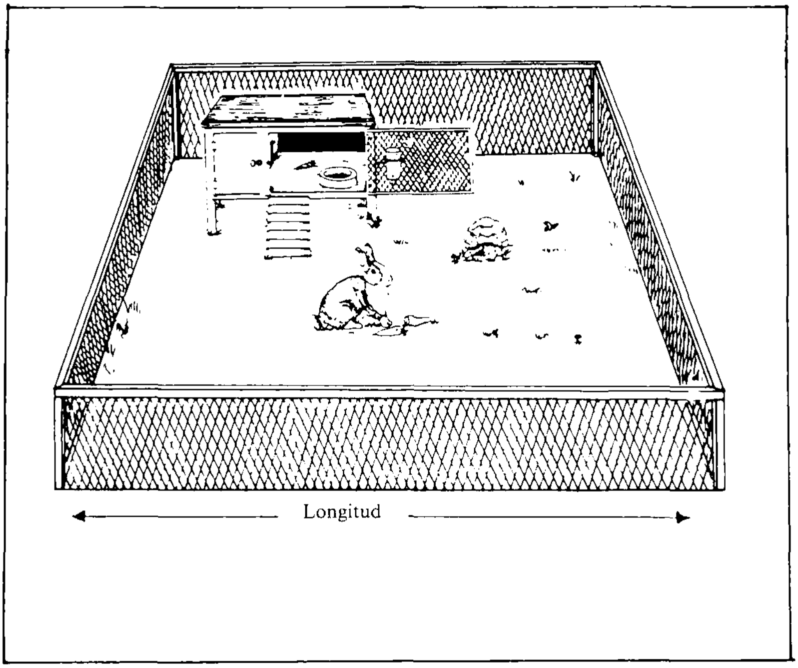
Ahora pregúntate:

—¿Se ajustan los otros números de la tabla a esta tendencia general?
—¿Cortará la gráfica a los ejes? Si es así ¿dónde?



B2. DESCUBRIENDO FUNCIONES EN SITUACIONES

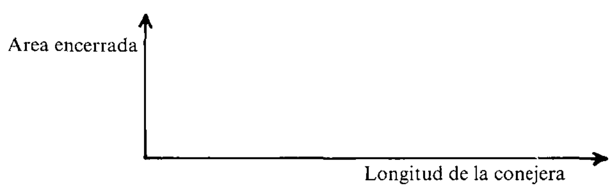
La conejera



Hay que construir una conejera rectangular con 22 metros de valla metálica. El dueño está interesado en saber cómo depende el área cercada por la valla de la longitud de la conejera.

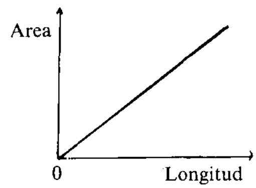
Piensa detenidamente sobre esta situación y discútela con tu compañero.

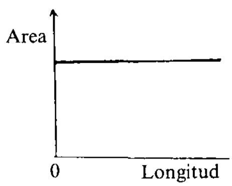
— Describe, por escrito, cómo cambiará el área al aumentar la longitud, tomando todos los valores posibles.
— Ilustra tu respuesta con una gráfica:



Los siguientes alumnos han intentado resolver el problema. Comenta sus respuestas y trata de explicar sus errores:

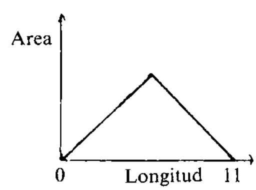
Cuanto más larga es la conejera, mayor es el área.

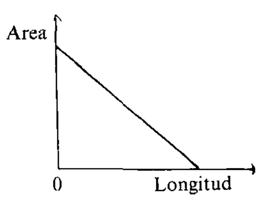




La cantidad de alambre es fija; por lo tanto, cuando la conejera se hace más larga, se vuelve más estrecha en la misma cantidad... luego el área permanece igual.

Si no hay longitud, entonces no hay área... y si la longitud es de 11 metros tampoco hay área, por lo que la gráfica da la vuelta.





Las conejeras más largas son más estrechas, por lo tanto el área disminuye.

— Para ver si tu gráfica es correcta, construye una tabla de valores:

Longitud de la conejera (m)										
Area (m^2)										

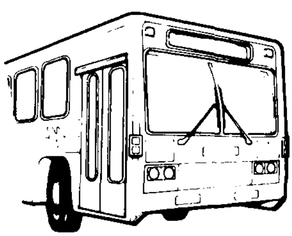
— ¿Observas alguna regla en esta tabla?
Escribe en qué consiste y trata de explicar por qué ocurre eso.

—Ahora, repite tu gráfica utilizando las reglas que has encontrado (No es necesario hacerla con exactitud).
—Utilizando tu gráfica y tu tabla de valores, calcula cuáles deberían ser las dimensiones del recinto para obtener el mayor espacio posible para que se pueda mover el conejo.
—Finalmente, intenta hallar una fórmula algebraica que se ajuste a esta situación.

En cada una de las dos situaciones siguientes:

I). Describe tu respuesta mediante un gráfico aproximado.
II). Explica con palabras la forma de tu gráfico.
III). Comprueba tu gráfico construyendo una tabla de valores y vuelve a dibujarlo si es necesario.
IV). Intenta encontrar una fórmula algebraica.

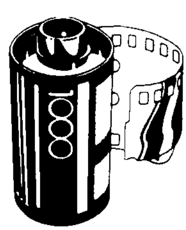
La salida



Una empresa ofrece el alquiler de un autobús de lujo por 30.000 pts. diarias. El organizador de la excursión decide cobrar el mismo precio a todos los viajeros.

¿Como dependerá lo que paga cada uno del número de viajeros?

Revelado de fotografías



El servicio fotográfico «Fotos felices» ofrece el revelado de un carrete por 500 pts. (precio fijo por el revelado) más 70 pts. por cada fotografía. ¿Como variará el coste de revelar un rollo según el número de fotos?

B3. FUNCIONES EXPONENCIALES

Fármacos hipnóticos

Algunas veces los médicos prescriben «fármacos hipnóticos» (p. ej. pastillas para dormir) a pacientes que no pueden dormir a causa de dolor físico o tensión emocional. (Otros son usados como sedantes o anestésicos durante las operaciones.) Hay muchos tipos diferentes de fármacos que pueden ser prescritos. Un requisito importante es que su efecto desaparezca antes de la mañana siguiente; de lo contrario el paciente se encontrará soñoliento durante todo el día siguiente. Esto podría ser peligroso si, por ejemplo, tiene que conducir para trabajar. Por supuesto, para alguien confinado a guardar cama en un hospital esto no sería tan importante.

Imagina que un doctor ha prescrito un fármaco llamado Triazolam (Halcion). Después de tomar algunas pastillas, el fármaco alcanza un nivel* de 4 μg/l en el plasma sanguíneo.

¿Con qué rapidez desaparecerá el fármaco?

* Nota: las dosis y concentraciones en la sangre en este cuadernillo no son las utilizadas en la práctica clínica, y las fórmulas varían considerablemente de un paciente a otro.

Mira la siguiente tabla:

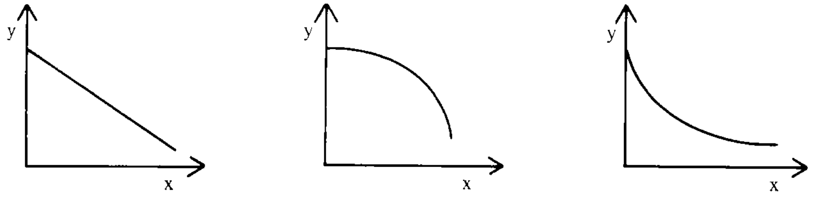
Nombre del fármaco (marca)	Fórmula aproximada
Triazolam (Halcion®) Nitrazepam (Mogadon®) Pentobombitone (Sonitan®) Methohexitone (Brietal®)	$y = A \times (0{,}84)^x$ $y = A \times (0{,}97)^x$ $y = A \times (1{,}15)^x$ $y = A \times (0{,}5)^x$
CLAVE A = tamaño de la dosis inicial y = cantidad de fármaco en la sangre x = tiempo en horas desde que el fármaco llega a la sangre	

Para el Triazolam, la fórmula es $y = A \times (0{,}84)^x$ En nuestro problema la dosis inicial es 4 μg, por lo tanto será $y = 4 \times (0{,}84)^X$

— Continúa la tabla siguiente, usando calculadora, para ver cómo desaparece el fármaco durante las 10 primeras horas. No necesitas hacer una gráfica.

Tiempo (horas)	Cantidad de fármacoo en la sangre
X	Y
0	4
1	3,36 ($= 4 \times 0{,}84$)
2	2,82 ($= 3{,}36 \times 0{,}84$)
.	.
.	.
.	.

— ¿Cuál de las siguientes gráficas describe mejor tus datos? Explica cómo puedes decirlo sin marcar los puntos.



— En el mismo par de ejes, haz cuatro gráficas para comparar cómo desaparece una dosis de 4 μg de cada uno de estos fármacos.
(Haz las gráficas a ojo, no las dibujes exactamente).

— Sólo 3 de los fármacos son reales. ¡El otro era una broma! ¿Cuál? ¿Por qué?
  ¿Qué ocurriría si tomases ese fármaco?
— Comprueba tus respuestas marcando cuidadosamente unos cuantos puntos en papel de gráficas. Reparte este trabajo con tu compañero para que no os lleve demasiado tiempo.
— Haz una de las dos investigaciones siguientes:

> Haz una gráfica exacta para mostrar cómo desaparece el efecto del Triazolam.
> ¿Después de cuántas horas se ha reducido a la mitad la cantidad de fármaco en la sangre?
> ¿Cómo depende esa vida media del tamaño de la dosis inicial?
> Escribe y explica tus resultados.

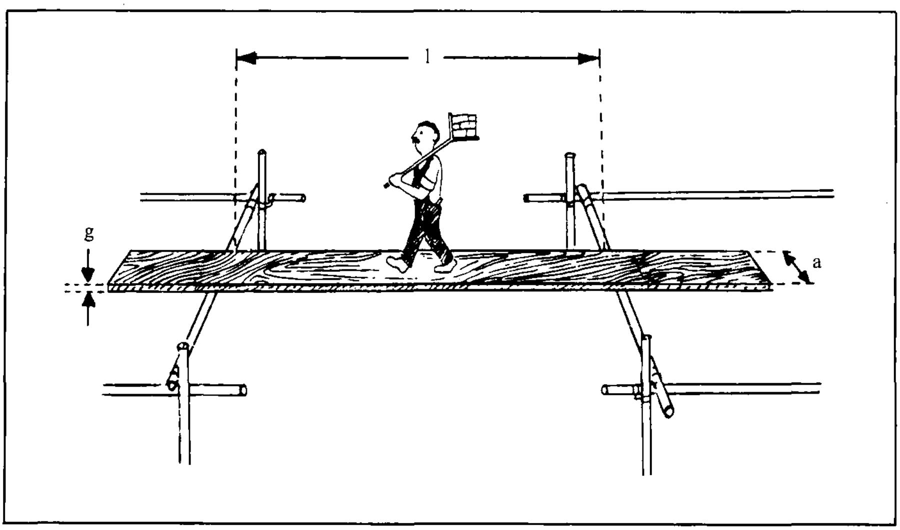
> Investiga el efecto de tomar una dosis de 4 μg de Methohexitone cada hora.
> Dibuja una gráfica exacta y escribe sobre sus implicaciones.

B4. UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

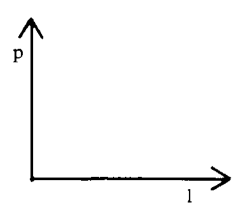
En este cuadernillo consideraremos el siguiente problema:

Puentes

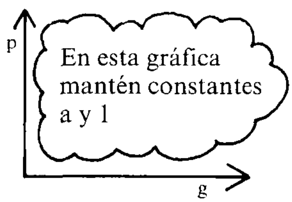
¿Cómo puedes predecir si un puente construido con un tablón se romperá bajo el peso de la persona que lo está atravesando?

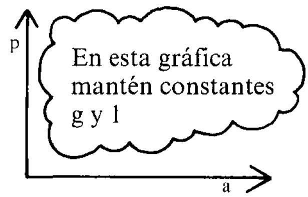


—Imagina que se va cambiando lentamente la distancia entre los soportes del puente (l). ¿Cómo afectará esto al peso máximo (p) que puede atravesarlo de forma segura?
Haz una gráfica para mostrar cómo varía p con l



—Imagina ahora que, por turnos, se modifican el grosor (g) y la anchura (a) del puente. Dibuja dos gráficas que muestren el efecto sobre p.





—Compara tus gráficas con las de tu compañero. Intenta convencerle de que tus gráficas son correctas. No importa demasiado si no os podeis poner de acuerdo en este momento.
—Escribe una explicación de la forma de cada una de tus gráficas.

La siguiente tabla muestra los pesos máximos que pueden cruzar puentes de diferentes dimensiones. Los resultados están escritos en orden, desde el puente más fuerte al más débil.

Distancia entre los soportes l (m)	Anchura a (cm)	Máximo Grosor g (cm)	Máximo peso soportable p (kg)
2	40	5	250
1	20	5	250
2	50	4	200
2	40	4	160
1	20	4	160
2	20	5	125
2	30	4	120
1	20	3	90
2	20	4	80
1	30	2	60
4	40	3	45
1	20	2	40
2	10	4	40
2	30	2	30
3	30	2	20
3	10	3	15
4	30	2	15
5	30	2	12
1	20	1	10
4	40	1	5

—Intenta descubrir modelos o reglas para predecir la resistencia de un puente a partir de sus dimensiones.

Algunas indicaciones: Intenta reorganizar la tabla, de forma que 1, a y g varíen de forma sistemática. Intenta mantener fijas a y g, y mira cómo depende p de 1...

Si estás atascado todavía, tienes más indicaciones a continuación.

De momento tenemos tres variables: longitud, anchura y grosor. Si mantenemos fijas dos de estas variables, podremos descubrir una relación entre la tercera variable y el peso que soportará el tablón.

Por lo tanto...

—Reúne todos los datos relativos a una plancha de 30 cm de anchura y 2 cm de grosor, y realiza una tabla:

Longitud del tablón (1 metros)						
Peso máximo que soporta (p kg)						

Describe todas las reglas que descubras. (¿Puedes predecir, por ejemplo, el valor de p cuando 1 = 6?)

¿Concuerda tu gráfica con esta tabla?

Intenta escribir una fórmula que se ajuste a estos datos.

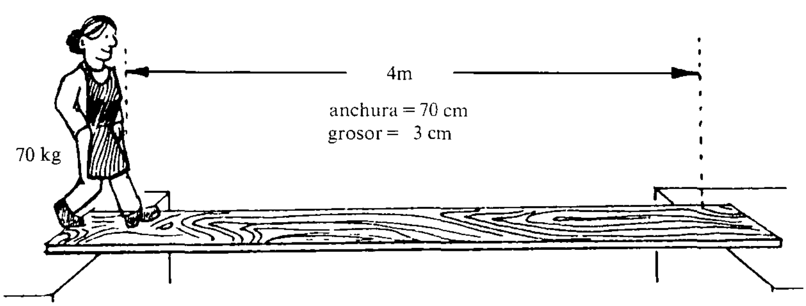
—Mira ahora todos los puentes con una longitud y anchura fijas e intenta encontrar una relación entre el grosor y el peso máximo que soportará.

Describe lo que descubras.

—Mira ahora las planchas con longitud y grosor fijos

¡Sólo para genios! ¿Puedes combinar todos los resultados para obtener una fórmula que se pueda utilizar para predecir la resistencia de un puente de cualquier dimensión?

—Finalmente, ¿qué sucederá en esta situación?



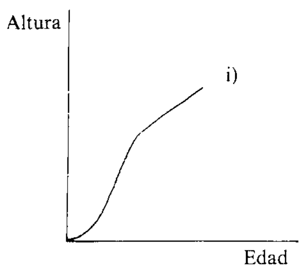
B1. REALIZACION DE GRAFICAS A PARTIR DE TABLAS

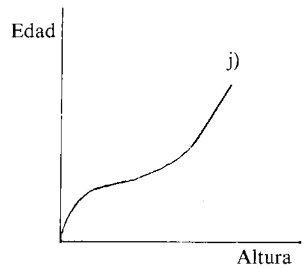
En esta lección, se invita a los alumnos a explorar tablas de datos y a intentar describir los modelos y tendencias que observen al utilizar las gráficas. Liberando a los alumnos del tiempo consumido por destrezas técnicas, como decidir escalas y dibujo exacto de puntos, intentamos capacitar a los alumnos para observar las tablas de una manera más global. Serán necesarias entre una y dos horas.

Presentación sugerida

1. Distribuir el cuadernillo y dejar tiempo a los alumnos para trabajar en el problema del globo, «¿Hasta qué distancia podemos ver?», en parejas o en pequeños grupos. Animar a cada grupo para que intente llegar a un acuerdo sobre una gráfica correcta, y pedirles que escriban una explicación de su método.
2. Recorrer la clase, escuchando y pidiendo a los alumnos que expliquen lo que están haciendo. A pesar de las instrucciones del cuadernillo, unos pocos alumnos pueden sentir un impulso irresistible para marcar cuidadosamente los puntos. Disuadirles, pidiéndoles que intenten describir con palabras cómo van cambiando los números, e invitándoles a traducir esta descripción verbal en una gráfica.
3. Después de darles tiempo para intentar el problema, mantener una breve discusión en clase para descubrir sus diferentes aproximaciones. Después dar a cada alumno una copia de la siguiente hoja: «algunas indicaciones sobre realización de gráficas a partir de tablas.» Esta hoja describe una forma de dibujar una gráfica rápida, examinando diferencias entre las entradas de la tabla. Discutir esta hoja con la clase, remarcando la importancia de incrementar la altura del globo en cantidades iguales para encontrar la forma de la gráfica. Las preguntas finales de la hoja pueden originar algún desacuerdo. Al decidir dónde corta la gráfica a los ejes, alguien puede razonar que cuando el globo está en el suelo, la distancia a la que puede ver el piloto no es cero. Otros pueden decidir que la «altura del globo» es equivalente a «la altura del ojo del piloto» en cuyo caso la gráfica pasará por el origen. No importa que tales cuestiones sean resueltas, sin embargo, hasta que los alumnos entiendan claramente cómo se relacionan las gráficas con sus interpretaciones de la situación.
4. Ahora pedir a los alumnos que continúen trabajando en el cuadernillo, discutiendo cada cuestión en parejas o grupos pequeños. Remarcar la importancia de marcar los ejes y escribir explicaciones cuando relacionen las tablas con las gráficas en las páginas 2 y 3. Mientras los alumnos trabajan en ello, pueden darse cuenta de que se pueden hacer diferentes

gráficas que se acomoden a una tabla en particular, si los ejes están marcados de forma diferente. Por ejemplo, para el ítem 3, «Cómo crece un bebé antes de nacer», las dos gráficas siguientes son soluciones válidas.





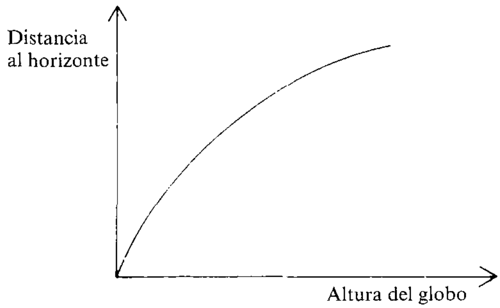
También se puede generar una considerable discusión, al discutir si la gráfica debería cortar a los ejes y en qué punto. Por ejemplo, algunos alumnos pueden descartar la gráfica (b) en favor de la (a) para «Tiempo de cocción para el pavo», porque razonan que «la gráfica debe pasar por el origen porque un ave con peso nulo, no llevará tiempo para cocinar». (Este es un caso particular en el que ninguna de las gráficas sugeridas describe la situación perfectamente). El último ítem de la página 3 pide a los alumnos dibujar una gráfica para ilustrar una tabla que describe cómo varía la temperatura de la atmósfera con la altitud. En este caso, algunos alumnos pueden encontrar difícil decidir si un cambio de $-48°C$ a $-50°C$ es un ascenso o un descenso de temperatura y pueden necesitar ayuda al examinar las diferencias entre sucesivas entradas de las tablas.

5. La primera pregunta de la página 4 invita a los alumnos a construir sus propias tablas de datos, correspondientes a las gráficas dadas. Es una actividad no cerrada con muchas soluciones correctas. Incluso al decir qué entradas deberían aumentar o disminuir en una tabla, los alumnos tendrán que decidir exactamente cómo aumentan o disminuyen los números. La pregunta final pide a cada alumno que invente primero su propia tabla de datos, y después que compare su solución gráfica con una dibujada por su compañero. Este tipo de feedback proporciona a los alumnos una forma de apreciar su propia comprensión y habitualmente genera una provechosa discusión en grupos.

B1. ALGUNAS SOLUCIONES

Página 1: *«¿Hasta qué distancia puedes ver?*

La gráfica deberá parecerse a la siguiente:

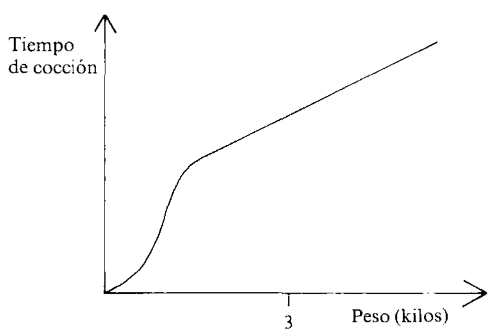


Página 2: *Las tablas pueden ser emparejadas como sigue:*

1. «Café enfriándose» como gráfica g)
2. «Tiempo de cocción del pavo» con gráfica b)
3. «Cómo crece un bebé antes de nacer» con gráfica i)
4. «Después de 3 pintas de cerveza...» con gráfica e)
5. «Número de especies de pájaros en una isla volcánica» con gráfica k)
6. «Esperanza de vida» con gráfica l)

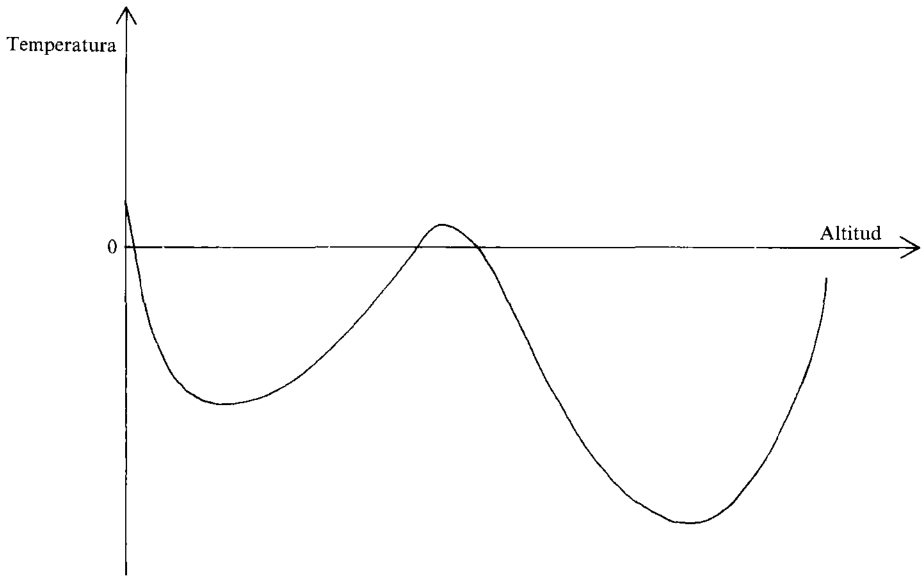
(En cada uno de los casos anteriores, la variable independiente ha sido identificada con el eje horizontal).

Sin embargo, al dar estas respuestas, somos conscientes de que, en varios casos, estas gráficas no corresponden estrictamente a las situaciones. Por ejemplo, la gráfica para la pregunta 2, «Tiempo de cocción del pavo», no es realista para pavos de muy poco peso, ya que implica, por ejemplo, que un pavo con peso cero tardaría una hora en hacerse. Los alumnos pueden preferir elegir la gráfica i):



Página 3: *«Cómo varía la temperatura con la altitud»*

La forma de esta gráfica puede sorprender. Contrariamente a la creencia popular, la temperatura atmosférica desciende constantemente al



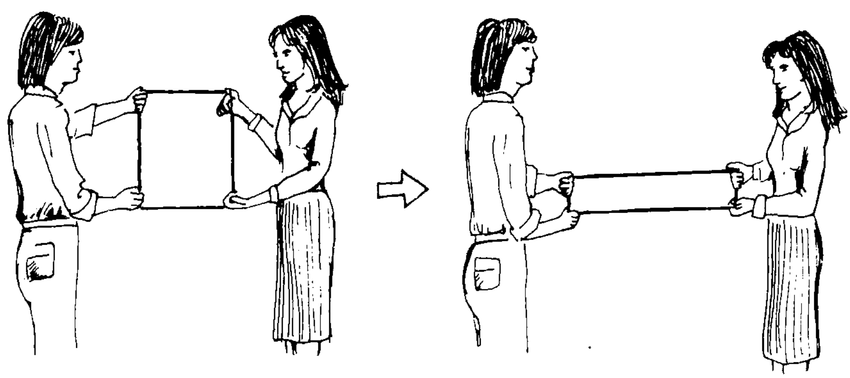
aumentar la altitud. Desciende desde el nivel del suelo hasta lo alto de la «Troposfera», pero aumenta en la «Estratosfera» (afectada por el ozono, una forma termo-absorvente del oxígeno.) En la «Mesosfera» (libre de ozono) el aire se enfría, mientras que en la «Termosfera» aumenta nuevamente de temperatura.

B2. DESCUBRIENDO FUNCIONES EN SITUACIONES

En esta lección, invitamos a los alumnos a explorar varias funciones de cara a descubrir las funciones (cuadrática, recíproca y lineal) que subyacen. Las situaciones son presentadas verbalmente, y a los alumnos se les pide inicialmente describir las relaciones dibujando gráficas aproximadas y escribiendo explicaciones. De esta forma, esperamos que adquieran un sentido cualitativo de la naturaleza de las funciones. Después se pide a los alumnos que corrijan sus gráficas construyendo y observando tendencias y modelos contenidos en tablas de valores, (usando los métodos introducidos en B1). Finalmente desafiamos a los alumnos a que intenten describir las funciones utilizando fórmulas. (Notar cómo se invierte completamente la secuencia tradicional fórmula→tabla→gráfica.) Serán necesarias entre una y dos horas.

Presentación sugerida

1. Distribuir el cuadernillo y presentar el problema «La conejera» a la clase. Es bastante útil usar un lazo de cuerda y con la ayuda de dos alumnos ilustrar cómo cambia la forma de la conejera a medida que aumenta la longitud del recinto:



Algunos alumnos asumen que la palabra longitud significa «la dimensión mayor». Explicar que no es éste el caso, y que en este problema la longitud incluso puede llegar a tomar valores muy pequeños.

2. Invitar ahora a los alumnos a discutir en parejas o en grupos pequeños la relación entre el área encerrada y la longitud del recinto. Pedir a cada grupo que haga una gráfica que describa adecuadamente la situa-

ción, junto con una explicación escrita, tal como se sugiere en el cuadernillo. Remarcar que sólo es necesaria una gráfica aproximada, no es necesario que sea dibujada con precisión.

3. Después de darles tiempo adecuado para hacer esto, se puede decidir poner en común algunas de sus ideas en el encerado y mantener una discusión en clase sobre los procesos mentales que aparecieron en estos intentos. De nuevo, recomendamos actuar más como moderador o abogado del diablo que como juez. Uno puede verse sorprendido de la variedad de respuestas que reciben. La página 2 del cuadernillo del alumno ilustra 4 gráficas y situaciones típicas. Además, los alumnos piensan mucho sobre los aspectos prácticos de la cuestión, (por ejemplo, el problema de poner un cobertizo dentro de un recinto muy pequeño), y a menudo argumentan que «el área encerrada nunca se puede hacer cero, o el conejo estaría aplastado». Además razonan que la gráfica nunca corta al eje horizontal. Tanto si se decide mantener una discusión en clase como si no, recomendamos que todos los alumnos tengan la oportunidad de escribir sus críticas a las 4 soluciones presentadas en la página 2 del cuadernillo del alumno. Un ejercicio así requiere una gran cantidad de reflexión y explicación.

4. Ahora debe animarse a los alumnos a que corrijan sus gráficas completando la tabla de datos:

Longitud de la conejera (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Area (m^2)	0	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10	0

De nuevo desanimadles de marcar todos estos puntos, salvo que sea absolutamente necesario. En lugar de eso, hacedles recordar los métodos que usaban para dibujar gráficas a partir de tablas en el cuadernillo previo (B1). Algunos alumnos pueden razonar que el máximo área posible se tiene cuando la longitud es de «5 ó 6 metros». Recordadles sus gráficas iniciales, (que probablemente no tendrán una meseta), y si esto todavía no les basta, pedidles que consideren valores no enteros de la longitud.

5. Buscar la fórmula algebraica final para esta situación constituirá una costosa tarea para muchos alumnos. A menudo les ayuda que se les pida primero hablar y después escribir una fórmula verbal para hallar el área encerrada para una longitud dada de la conejera. Por ejemplo:

«Halla el doble de la longitud y réstalo de 22 metros para hallar cuánto queda para las dos anchuras. Divide esto por la mitad para hallar el tamaño de cada anchura. Ahora multiplica esto por la longitud para hallar el área».

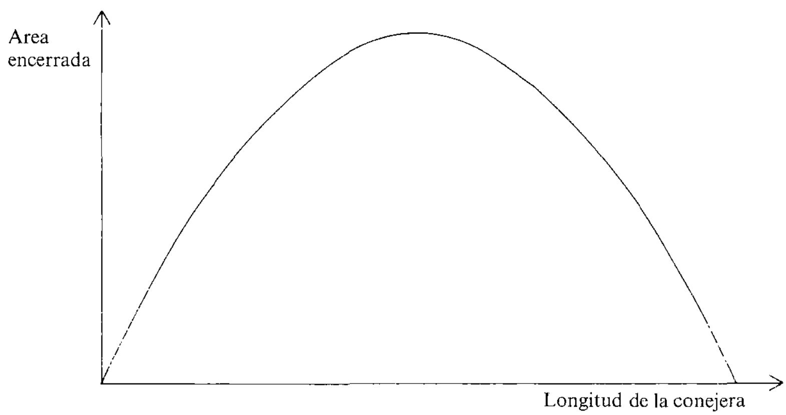
Esto puede ser traducido después en $(22-2L)\times\frac{1}{2}\times L=A$

6. Ahora se pueden intentar las dos situaciones finales. La primera situación origina una parábola rectangular, y la segunda una línea recta. Se pueden generar gran cantidad de argumentaciones mientras los alumnos intentan decidir si las gráficas cortan a los ejes y dónde. (Por ejemplo en la segunda situación, «si no revelas fotografías en papel no costará nada». «¿Puedes revelar un carrete sin tener fotos?», etc.)

7. En la sección suplementaria de este tema, se han incluido algunas situaciones que pueden ser exploradas de manera similar. Se pueden usar como un recurso para una práctica mayor o como trabajo para casa. (Primer cuadernillo suplementario).

B2. ALGUNAS SOLUCIONES

La Conejera



Longitud de la conejera (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Area (m²)	0	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10	0

$A=L\ (11-L)$ donde $A\ (m^2)=$ área encerrada
$L\ (m)=$ longitud de la conejera

El área máxima se da cuando su forma es un cuadrado, cada uno de cuyos lados mide 5,5 metros.

La salida

La fórmula originada es $C = \dfrac{30.000}{N}$ donde
C (pesetas) = precio de cada contribución
N = nº de personas en la excursión.

Revelado de fotocopias

La fórmula es $C = 70\,N + 500$, donde
C (pesetas) = coste de revelar el rollo
N = nº de fotos pedidas

B3. FUNCIONES EXPONENCIALES

Este cuadernillo proporciona un contexto práctico en el cual se pueden discutir las propiedades de las funciones exponenciales. Los alumnos necesitarán tener acceso a calculadoras para evitar así aburrirse en una aritmética innecesaria. También se necesitará papel para gráficas para las dos investigaciones finales del cuadernillo. Serán necesarias entre una y dos horas.

Presentación sugerida

1. Aunque se puede usar sólo el cuadernillo para introducir la situación, probablemente sea mucho mejor discutir las dos primeras páginas con la clase. Las fórmulas de la 2.ª página pueden acobardar a algunos alumnos, y por lo tanto es conveniente recorrer el ejemplo del Triazolam con ellos.

En particular, discutir varias formas de usar la calculadora para hallar la cantidad de Triazolam en la sangre (y) después de horas sucesivas (x), a partir de la fórmula:

$$y = 4 \times (0{,}84)^x$$

La secuencia más obvia es:

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{\times}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{=}\ \cdot\ \ldots$

pero hay ventajas considerables si se usa el factor constante

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \ldots$

ó $\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \ldots$

ó $\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{K}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \boxed{=}\ \cdot\ \ldots$

Aunque calculadoras diferentes efectúan esta función en formas diferentes, creemos que es importante discutir esta cuestión para que los alumnos adquieran soltura para operar con sus propias máquinas. Por supuesto, la cantidad de fármaco en la sangre, después de 5 horas, puede calcularse más rápidamente usando la tecla $\mathbf{x^y}$ si existe.

Por ejemplo $\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{0{,}84}\ \boxed{x^y}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

2. Algunos alumnos se sorprenderán de que multiplicando repetidamente pueda en realidad disminuir una cantidad. Desde sus primeras experiencias con números enteros, la multiplicación era siempre vista como una «suma repetida», y por lo tanto siempre «hace mayores las cosas».

Este error es extremadamente común, y por lo tanto es interesante discutirlo con alguna profundidad.

3. Dejar ahora a los alumnos que continúen trabajando en el cuadernillo en parejas o en grupos pequeños. En la última página del cuadernillo, animar a los alumnos a que repartan el trabajo entre ellos. Por ejemplo, cada uno puede elegir hacer una investigación diferente y luego informar a los otros miembros del grupo de sus hallazgos.

Finalmente, animar a los alumnos a escribir todos sus descubrimientos.

4. Para concluir la lección, se puede optar por generalizar el trabajo del cuadernillo discutiendo respecto a la forma de

$y = 4\,a^x$, $(a > 0)$.

Por ejemplo, las siguientes preguntas son muy incisivas, y pueden llevar a algunas discusiones profundas y valiosas.

«¿Cómo se puede saber si la función aumenta o disminuye?»

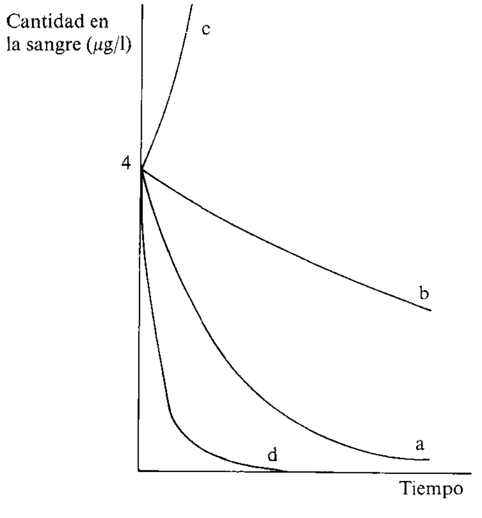
«¿Siempre es y mayor que cero? ¿Por qué?»

«¿Que significa a cuando x no es un número entero? a^2 significa a.a, pero no se puede multiplicar a por sí misma media vez, o menos tres veces... ¿o sí se puede?»

«¿Qué ocurriría si a < 0?»

B3. ALGUNAS SOLUCIONES

La siguiente gráfica muestra aproximadamente cómo se eliminará la misma dosis de cada fármaco.



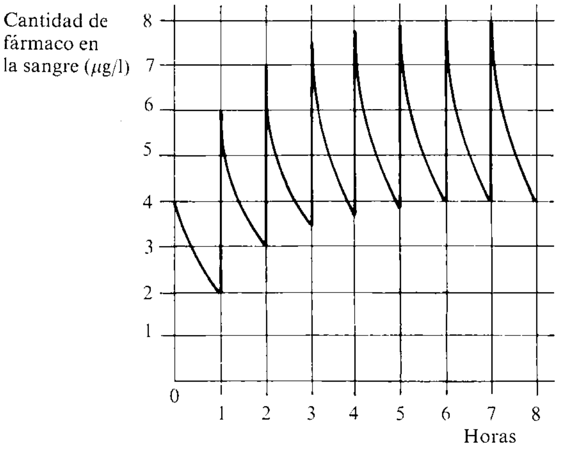
Clave
a = Triazolam
b = Nitrazepam
c = Pentobombitone
d = Methohexitone

(Inmediatamente se puede ver que el Pentobombitone era el fármaco de broma).

La primera de las investigaciones finales debería llevar a las dos siguientes conclusiones:

— la vida media de Triazolam $\approx$4h.
— la vida media es independiente de la dosis inicial.

La segunda investigación pide a los alumnos investigar el efecto de tomar una dosis de 4μ de Methohexitone cada hora. Esto producirá la siguiente gráfica, suponiendo que el fármaco entra en la sangre de forma instantánea.



De la gráfica se desprende que el nivel máximo de fármaco en el cuerpo tiende al valor límite de $8\mu/l$.

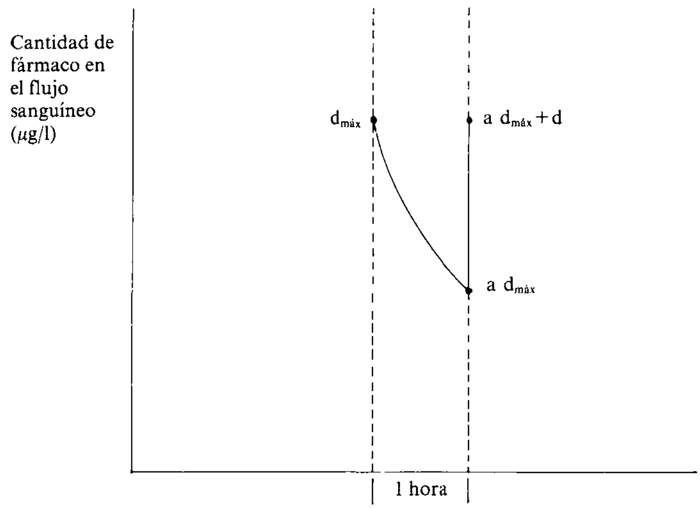
Para los médicos es vital conocer con exactitud cuál es el efecto del fármaco en la sangre; demasiado puede ser peligroso, y demasiado poco puede ser ineficaz. Por lo tanto, tienen que intentar mantener las oscilaciones entre estos dos límites (Por ejemplo, de cara a reducir el tamaño de las oscilaciones, un médico puede prescribir que se tomen dosis menores pero con más frecuencia.)

En general, supongamos que se administra cada hora una dosis de tamaño «d». La cantidad de droga en la sangre justo antes de la segunda dosis será ad (para algún a <1) y justo después de esta dosis será ad + d.

Al final, la cantidad de droga eliminada de la sangre durante una hora se hará igual al tamaño de cada dosis, y el nivel del fármaco en la sangre alcanzará su valor máximo, dmax.

Entonces $d_{max} = a\ d_{max} + d$ (ver el diagrama inferior)

y por lo tanto $d_{max} = \frac{d}{1-a}$



Alternativamente, tras horas sucesivas, la máxima cantidad de fármaco en las sangre será:

$$d,\ d\,(1+a),\ d\,(1+a+a^2),\ d\,(1+a+a^2+a^3)\ldots\ \frac{d\,(1-a^{n+1})}{1-a}$$

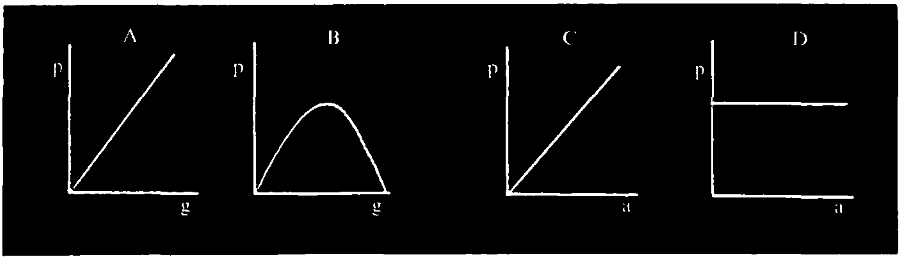
y cuando $n \to \infty$, esto tiende a $\frac{d}{1-a}$, con $a < 1$

B4. UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Este cuadernillo proporciona una oportunidad para que los alumnos descubran un modelo que sirva de base en una tabla de datos no clasificados. Al estar presentes 3 variables independientes (longitud, anchura y grosor) se requerirá considerar que dos de ellas necesitan mantenerse constantes de cara a hallar una relación entre la 3.ª variable y la resistencia del tablón. Las relaciones consideradas son inversa, lineal y cuadrática respectivamente y deberían formar parte de la experiencia de la mayoría de los alumnos. Se necesitarán entre una y dos horas.

Presentación sugerida

1. Repartir el cuadernillo y dar a la clase tiempo suficiente para dibujar y discutir tres gráficas relacionando la longitud, anchura y grosor del tablón con el máximo peso que puede soportar. (También se puede decidir mantener una discusión con la clase para comprobar sus ideas). Las opciones pueden variar mucho. Por ejemplo



Alumno A:	«Los puentes más gruesos son más fuertes»
Alumno B:	«No es así, porque los tablones muy pesados tienen que soportar un mayor peso propio, esto quiere decir que se vuelven más débiles, como la gráfica B»
Alumno C:	«Los puentes más anchos son más fuertes»
Alumno D:	«Si el tablón se hace más ancho eso no afecta a cuánto peso puede soportar hasta que lo haces muy ancho y el peso está más repartido»

2. Cuando la mayoría haya adquirido idea de la situación, dadles tiempo abundante para intentar descubrir una regla por la cual se pueda predecir la resistencia de cualquier puente a partir de sus dimensiones

usando la tabla de datos dada en la 2.ª página del cuadernillo. El método más eficaz consiste en mantener constantes dos variables y descubrir cómo repercute el cambio de la 3.ª variable en el máximo peso soportable. Una indicación a este respecto aparece en la parte superior de la página 2 del cuadernillo. Aconsejad a los alumnos que no miren la guía más detallada de la última página, hasta que hayan explorado sus propias estrategias para resolver problemas.

Esto llevará tiempo, y no es prudente meterles prisa a los alumnos, pues el poder de una proximación sistemática sólo se dejará ver intentando y viendo el fracaso de distintas estrategias. Decidles que la lean, sin embargo, si los alumnos se empiezan a desanimar.

3. Hacia el final de la lección, puede ser interesante dedicar algún tiempo a discutir las observaciones o reglas que los miembros de la clase han descubierto. Si se sigue la aproximación reseñada en el cuadernillo, algunos alumnos pueden haber descubierto que el máximo peso soportable es proporcional a la anchura y al cuadrado del grosor, e inversamente proporcional a la distancia entre los soportes del puente (Estos resultados pueden ser comparados con las gráficas originales).

De hecho,

cuando $l = 2$ y $g = 4$
entonces $p = 4a$ (alguno puede hacer $p = a.g$)

cuando $l = 1$ y $a = 20$
entonces $p = 10g^2$

cuando, $a = 30$ y $g = 2$
entonces $p = \frac{60}{l}$ (alguno puede hacer $p = \frac{a.g}{l}$)

De cara a predecir la resistencia de cualquier puente, estas tres expresiones necesitan ser combinadas en una sola:

$$p = \frac{kag^2}{l} \text{ (donde k es una constante).}$$

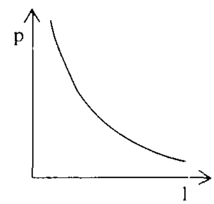
(Sustituyendo valores para a, g, l y p, se puede ver que $k = \frac{1}{2}$)

Esta idea final origina muchas preguntas y probablemente sólo esté al alcance de unos pocos alumnos muy capacitados. No es necesario que lo entiendan todos en este momento.

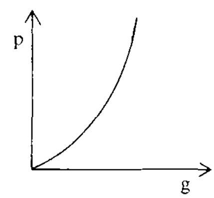
B4. ALGUNAS SOLUCIONES

Las tres gráficas deberían mostrar que:

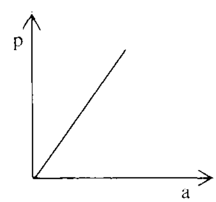
«Los puentes más largos son más débiles.»



«Los puentes más gruesos son más fuertes» (Al doblar el grosor, el peso máximo soportable se hace mayor que el doble.)



«Los puentes más anchos son más fuertes» (El hecho de que esta relación es lineal se puede deducir observando que dos tablones idénticos colocados uno junto a otro, serán capaces de soportar dos veces el peso de un tablón sencillo.)



Examinando sistemáticamente la gran tabla de la página 3 se pueden extraer los siguientes datos:

Long. del tablón (l metros)	1	2	3	4	5	(anch. = 30 cm)
Máx. peso soportable (p Kg)	60	30	20	15	12	(grosor = 3 cm)

Grosor del tablón (g cm)	1	2	3	4	5	(long. = 1 m)
Máx. peso soportable (p kg)	10	40	90	160	250	(anch. = 20 cm)

Anch. del tablón (a cm)	10	20	30	40	50	(long. = 2 m)
Máx. peso soportable (p kg)	40	80	120	160	200	(grosor = 4 cm)

De estas tablas se pueden deducir las relaciones

$$p=\frac{60}{l},\quad p=4\,a \quad y \quad p=10\,g^2$$

Combinándolas obtendremos

$$p=\frac{a\,g^2}{l}\cdot \text{constante}$$

y sustituyendo valores para cada a, g, l y p en esta ecuación obtenemos que

$$p=\frac{a\,g^2}{2\,l}$$

Finalmente, de acuerdo a esta fórmula, el peso límite seguro para el puente de la última página es 78,75 kg., por lo tanto la mujer puede atravesarlo con seguridad.

Cuadernillos suplementarios

Los siguientes cuadernillos del alumno proporcionan un material adicional que permite una práctica mayor y completa las ideas presentadas en la unidad B.

Buscando funciones en situaciones. Este cuadernillo continúa el trabajo iniciado en B2. Se presentan 6 situaciones, y se invita a los alumnos a dibujar gráficas, construir tablas de valores y, finalmente hallar fórmulas algebraicas. (Las funciones implicadas son lineal, cuadrática, exponencial e inversa.) Hallar una fórmula resultará la parte más complicada, y puede ser una gran ayuda si se pide a los alumnos que cuenten y luego escriban con palabras el método que han utilizado para construir la tabla de valores. Esta descripción verbal puede ser traducida posteriormente a la forma algebraica, como se describía en B2. Para algunos alumnos la parte algebraica de las preguntas puede resultar demasiado difícil, pero pueden aprender mucho del dibujo de gráficas y la tabulación si se omite esta parte.

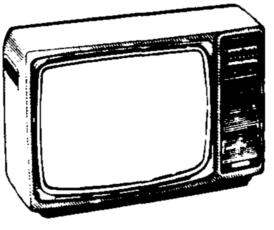
Buscando funciones en tablas de datos. Este cuadernillo amplía el trabajo empezado en B1, introduciendo actividades referidas a la adecuación de fórmulas algebraicas a tablas de datos. Empezando con una tabla, se pide a los alumnos dibujar gráficas aproximadas para ilustrar los datos, y relacionar su gráfica con la «Chuleta» de funciones estándar. Estas funciones pueden ser utilizadas para adecuar los datos usando el método ensayo-error con una calculadora, o con una pequeña manipulación algebraica. Finalmente se les pide a los alumnos que usen sus funciones para producir datos adicionales. De nuevo, es una actividad que suscita muchas consultas, pero los alumnos deberían encontrar valioso el esfuerzo.

BUSCANDO FUNCIONES EN SITUACIONES

Para cada una de las situaciones siguientes:

I) Describe tu respuesta dibujando una gráfica aproximada.
II) Explica en palabras, la forma de tu gráfica.
III) Comprueba tu gráfica construyendo una tabla de valores y vuelve a dibujarla si es necesario.
IV) Si puedes, intenta hallar una fórmula algebraica, pero no te preocupes demasiado si resulta difícil.

1. **Alquilando una televisión**



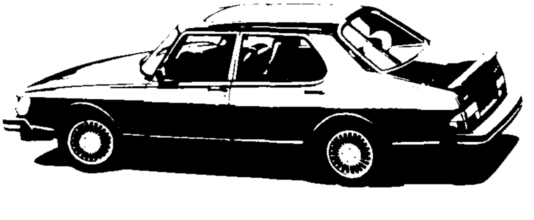
Una compañía de alquiler de TV cobra 3.000 pts. al mes por un aparato en color. Una oferta de lanzamiento te invita a tener gratis el aparato, durante el primer mes.

¿Cómo cambiará el coste total al aumentar el período de alquiler?

2. **La depreciación del coche**

Cuando era nuevo mi coche me costó 1.000.000 pts. Su valor se esta depreciando a un ritmo del 20 % anual. Esto quiere decir que después de un año su valor era:

$$1.000.000 \text{ pts.} \times 0{,}8 = 800.000 \text{ pts.}$$



y después de dos años su valor era

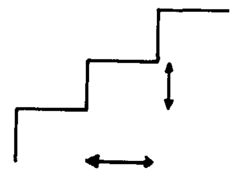
$$800.000 \text{ pts.} \times 0{,}8 = 640.000 \text{ pts.}$$

¿Cómo continuará cambiando su valor?

3. **Escaleras**

«La longitud de un paso normal es de 60 cm y disminuye 2 cm por cada 1 cm que el pie asciende al subir escaleras.»

Si se diseñan unas escaleras de acuerdo con este principio, ¿cómo dependerá la longitud de cada escalón de su altura?

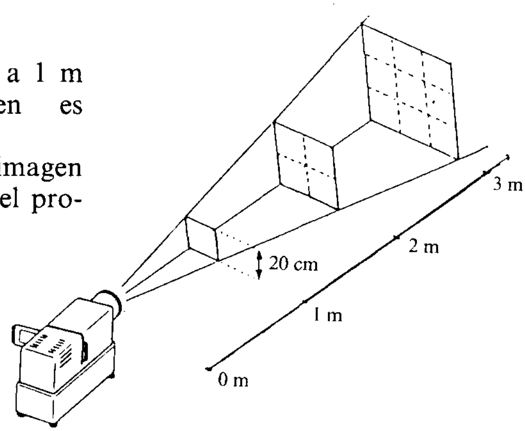


4. **La proyección de diapositivas**

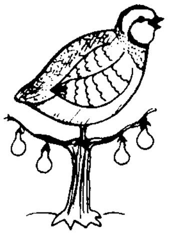
Cuando se proyecta una diapositiva sobre una pantalla el área de la imagen depende de la distancia del proyector a la pantalla como se ilustra abajo.

(Cuando la pantalla está a 1 m del proyector, la imagen es 20 cm × 20 cm).

¿Cómo varía el área de la imagen cuando se aleja la pantalla del proyector?



Los doce días de Navidad



Una antigua canción de Navidad dice así:

«El primer día de Navidad mi amor me envió: Una perdiz sobre un peral.

El segundo día de Navidad mi amor me envió: dos tórtolas y una perdiz sobre un peral.

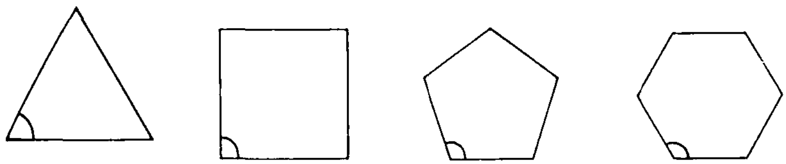
El tercer día de Navidad mi amor me envió: tres pulardas, dos tortolas y una perdiz sobre un peral...

El décimo día de Navidad mi amor me envió: 12 tamborileros redoblando, 11 gaiteros tocando, 10 lores saltando, 9 damas danzando, 8 granjeras ordeñando, 7 cisnes nadando, 6 gansos poniendo huevos, 5 anillos de oro, 4 reclamos, 3 pulardas, dos tórtolas y una perdiz sobre un peral.»

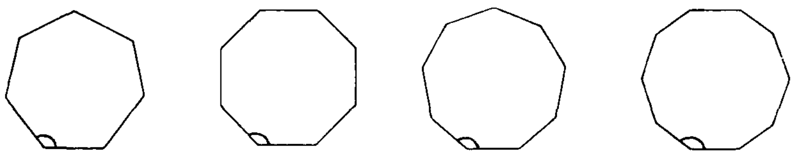
Pasados los nueve días la señora cuenta todos sus regalos.

—¿Cuántas tórtolas recibió en total?
—Si llamamos a «una perdiz sobre un peral» el primer tipo de regalo, «dos tórtolas» el segundo tipo de regalo, etc... ¿Cuántos regalos del tipo n fueron recibidos durante doce días? Dibuja una tabla para mostrar tus resultados.
—¿Cúal fue el regalo que más recibió?
—Intenta hallar una fórmula que se ajuste a tus datos.

Polígonos Regulares



Triángulo equilátero | Cuadrado | Pentágono regular | Hexágono regular



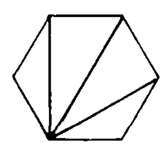
Heptágono regular | Octógono regular | Nonágono regular | Decágono regular

¿Cómo depende el tamaño de los ángulos interiores del número de lados del polígono?

— Describe tu respuesta por escrito y por medio de un gráfico aproximado.

— Escribe una tabla de valores y revisa tu gráfica.

(Si lo encuentras difícil, te puede ayudar calcular primero la suma total de todos los ángulos interiores de cada polígono, subdividiéndolo en triángulos, por ejemplo:



suma de ángulos

$4 \times 180° = 720°$

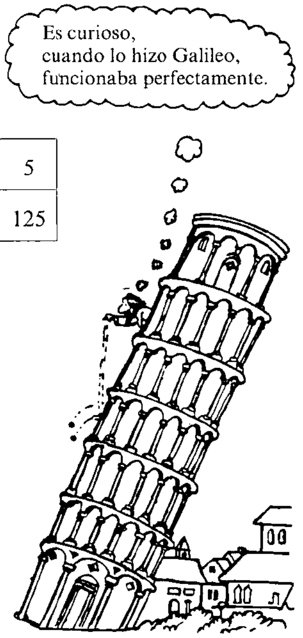
por lo tanto cada ángulo mide...)

— Explica, en palabras, cómo calcularías el tamaño de un ángulo interior para un polígono regular de n lados.

¿Puedes escribirlo con una fórmula?

BUSCANDO FUNCIONES EN TABLAS DE DATOS

Intenta resolver el siguiente problema. Cuando lo termines, o te atasques, continúa leyendo.



Caída de una piedra

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia caída (metros)	0	5	20	45	80	125

—Dibuja una gráfica aproximada para ilustrar estos datos.
—¿Observas alguna regla en esta tabla? Descríbela con palabras y, si es posible, con fórmulas.
—Se lanza una piedra desde un avión. ¿Cuántos metros caerá en 10 segundos?

Las tablas de datos ocultan a menudo una simple regla matemática o «función» que, una vez conocida, se puede usar para predecir valores desconocidos.

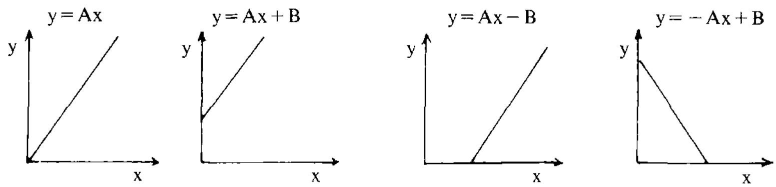
Esta función puede ser muy difícil de hallar, especialmente si la tabla contiene valores aproximados o errores experimentales.

Te ayudará mucho si puedes reconocer una función a partir de la forma de su gráfica. En la siguiente página tienes una «chuleta» de algunas de las funciones más importantes.

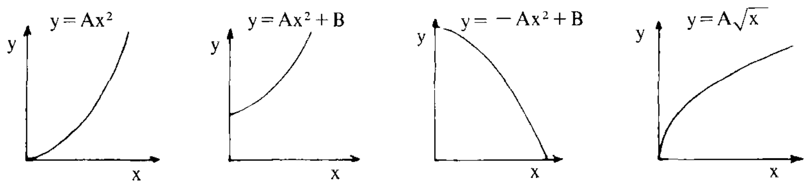
¿Cuál es la gráfica que se parece más al problema «caída de una piedra»?

«Chuleta»

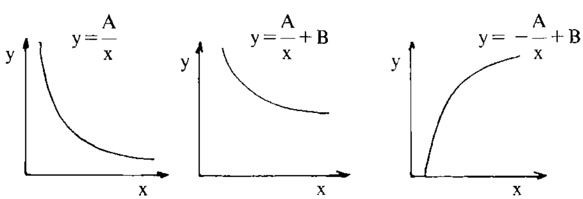
Lineal

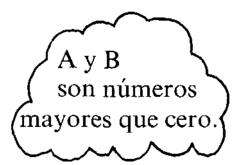


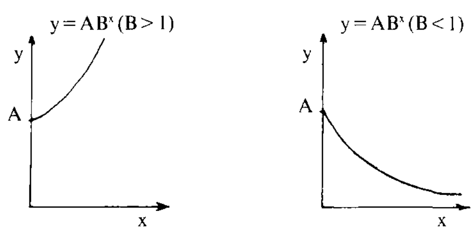
Cuadrática

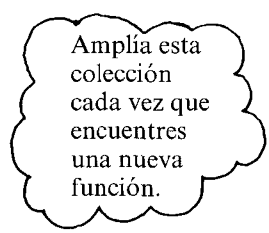


Inversa









AJUSTANDO UNA FORMULA A LOS DATOS

Te habrás dado cuenta ya de que la gráfica marcada como $y = Ax^2$ es la única que se ajusta a los datos de la «caída de la piedra».

En nuestro caso.

y = distancia caída (metros)
x = tiempo (segundos)
A es un número positivo constante.

— Intenta hallar el valor de A que hace que la función se ajuste a los datos, ya sea por ensayo y error o sustituyendo para valores de x e y, y resolviendo la ecuación resultante.
— Usa la fórmula resultante para hallar cuántos metros caerá la piedra en 10 segundos.

Ahora mira las siguientes tablas.

— Dibuja una gráfica aproximada para mostrar el tipo de función de cada tabla (No necesitas marcar los puntos con exactitud).
— Intenta hallar modelos o reglas en las tablas y escríbelos.
— Usa la chuleta para hallar la función que se ajuste a cada tabla.
— En las tablas han caído algunos borrones de tinta. Calcula lo que debería de haber.

1. **Tabla de conversión de velocidades**

Millas por hora	10	20	30	40	50	60	70	80
Kilómetros por hora	16,1	32,2	48,3	64,4		96,6	112,7	128,7

2. **Frecuencias de radio y longitudes de onda**

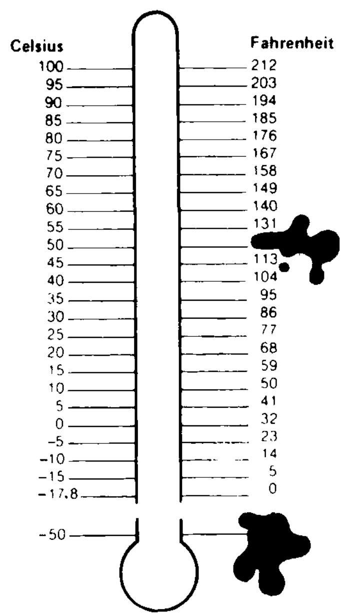
		Radio 4						
Frecuencia (kHz)	100	200	300	400	500	600	700	800
Long. onda (m)	3.000	1.500	1.000	750	600	500	429	375

		Radio 2		Radio 1			Radio 3
Frecuencia (kHz)	900	909	1.000	1.089	1.100	1.200	1.215
Long. onda (m)	333		300		273	250	

3. Reloj de péndulo

Longitud del péndulo (cm)	Tiempo para 100 oscilaciones (segs)
0	0
5	45
10	63
15	77
20	89
25	100
30	110
35	118
40	126
45	134
50	141
60	[illegible]

4. Temperaturas

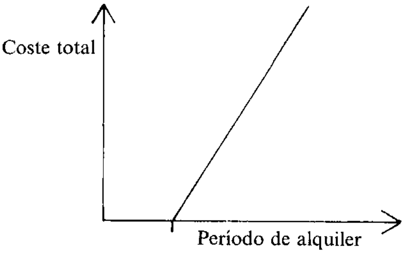


ALGUNAS SOLUCIONES

1. *Alquilando una televisión*

$$C = 3.000\,t - 3.000$$

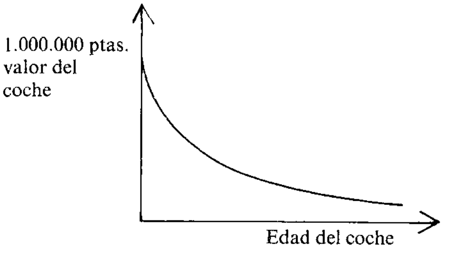
donde C es el coste total del alguiler y t meses = tiempo de alquiler.



2. *Depreciación del coche*

$$V = 1.000.000 \times (0{,}8)^{a}$$

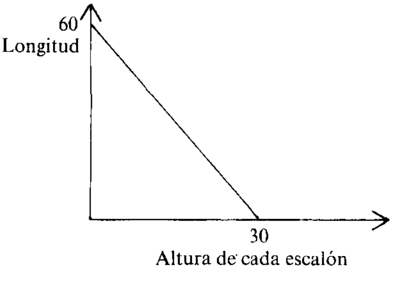
donde V pts = valor del coche y a años = edad del coche.



3. *Escaleras*

$$l = 60 - 2\,h$$

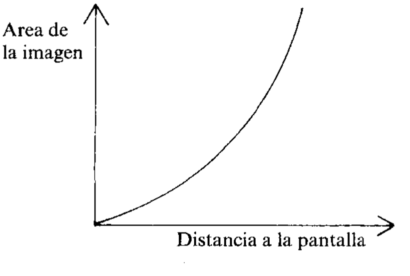
donde l cm = longitud de escalón y h cm = su altura.



4. *La proyección de diapositivas*

$$A = 400\,d^2$$

donde A cm^2 = área de la imagen y d m = la distancia del proyector a la pantalla.



En total recibió 22 tórtolas (2 tórtolas en 11 ocasiones).
En el conjunto de los 12 días se recibió:

		Total
1	perdiz en 12 ocasiones	$1 \times 12 = 12$
2	tórtolas en 11 ocasiones	$2 \times 11 = 22$
3	pulardas en 10 ocasiones	$3 \times 10 = 30$
12	tamborileros en 1 ocasión	$12 \times 1 = 12$

Esto lleva a la siguiente tabla:

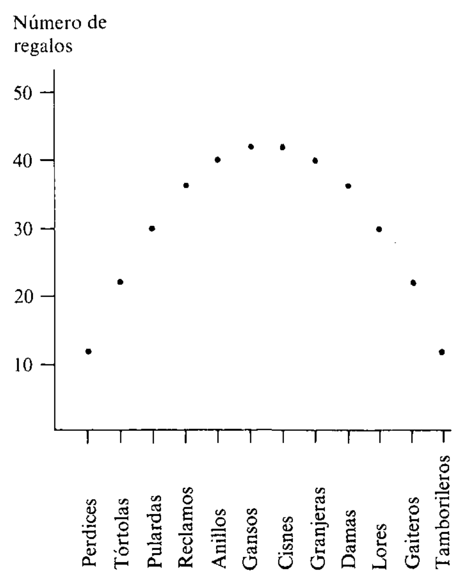
n-simo regalo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N.º total de regalos recibidos	12	22	30	36	40	42	42	40	36	30	22	12

La gráfica resultante será:

Se reciben más cisnes y gansos que ningún otro regalo. Una fórmula que se ajusta a esta gráfica es:

$$y = x(13 - x)$$

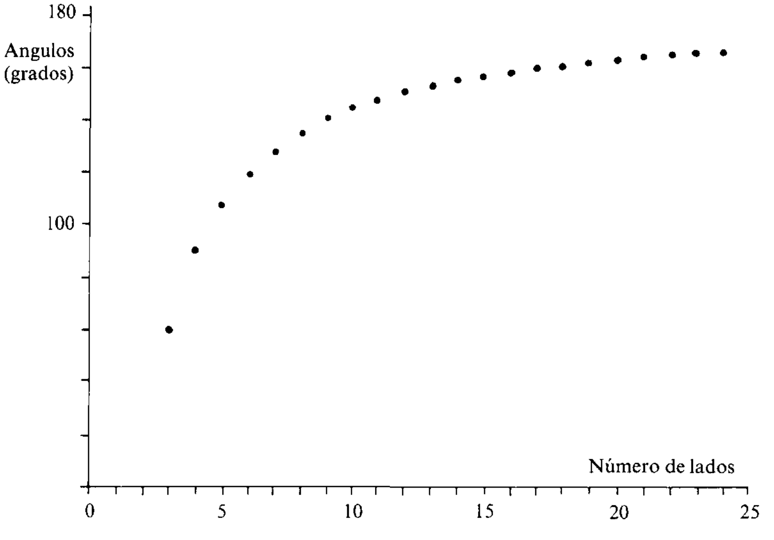
donde $y =$ n.º regalos recibidos
$x =$ n.º dado a cada regalo



(Los puntos de esta gráfica no deberían estar unidos, en sentido estricto, ya que los valores intermedios no tienen sentido. Sin embargo, al haber pedido a los alumnos que hagan sólo una gráfica aproximada, pueden haber ilustrado perfectamente los datos con una línea continua.)

Polígonos regulares

La gráfica y la tabla siguientes muestran cómo depende el ángulo interior de un polígono regular del n.º de lados del polígono.



Número de lados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valor de cada ángulo (°)	60	90	108	120	128,6	135	140	144	156	162

Número de lados	30	40	60	72	90	120	180	360	720	∞
Valor de cada ángulo (°)	168	171	174	175	176	177	178	179	179,5	180

La fórmula correspondiente a estos datos es:

$$a = 180 - \frac{360}{n}$$

donde a grados = medida de cada ángulo
n = el n.º de lados.

De nuevo, en un sentido estricto, no podemos unir los puntos de la gráfica con una línea continua, ya que no existe algo como un polígono regular con 2 ½lados, o π lados, etc.

En un artículo fascinante David Fielker*, explica cómo surgió una investigación inesperada cuando se tomó en serio esta cuestión:

«Para completar la serie, discutieron el caso de un polígono de 2 lados. Debía de tener un ángulo de 0°. Dedujeron la fórmula.

$$n \rightarrow 180 - 360/n$$

la cual verificó su intuición. Pareció también natural que, al hacerse n cada vez más grande el ángulo se acercase, cada vez más a 180°.

Era una gráfica atractiva. Podían «adivinar» la curva. ¿Debían rellenarla?

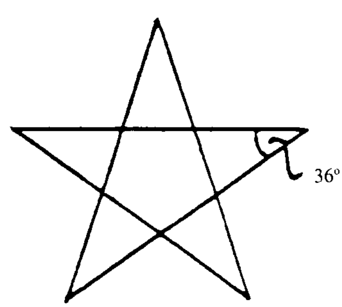
Pues, no. No, a menos que los puntos racionales (no enteros) significasen algo. ¿Podíamos concebir un polígono regular, por ejemplo, de 2 ½lados?

Forma parte de la esencia de las Matemáticas tomar en serio preguntas como ésta. Esta es una de las cosas que distinguen las Matemáticas, por ejemplo, de la Física. Y, aunque la Geometría parece depender tanto de la intuición y la representación mental, no se debe desfallecer, cuando la intuición falla, si es posible continuar de forma más analítica.

Después de todo, podíamos ver dónde estaba el punto, en la gráfica: 2 ½lados correspondería a un ángulo de unos 40°. El cálculo nos demostró que era 36°.

(Nótese que estoy hablando ahora de «nosotros», con preferencia a «ellos». A este nivel, también yo estaba explorando territorio desconocido).

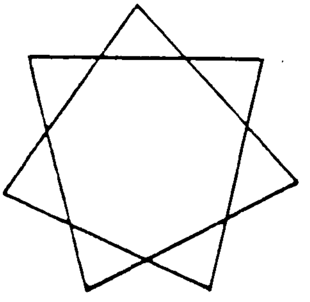
Sin dejarnos disuadir por la intuición, decidimos construir este polígono usando la única información utilizable: que era regular, es decir, que todos los lados eran iguales, y que su ángulo valía 36°. El resultado aparece a continuación y así el lector podrá escoger el modo de ser sorprendido.



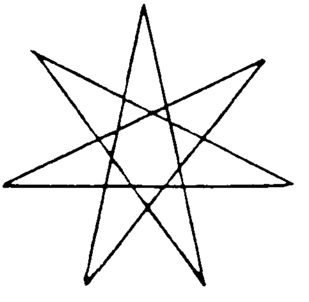
* David Fielker. Rompiendo las cadenas de Euclides.

Hicieron falta algunos ejemplos más y cierto grado de racionalización, (sin juegos de palabras) más que una explicación completa. Tenía más sentido si nuestro 2½lo escribíamos como 5/2 y así podíamos establecer una interpretación para el numerador y para el denominador.

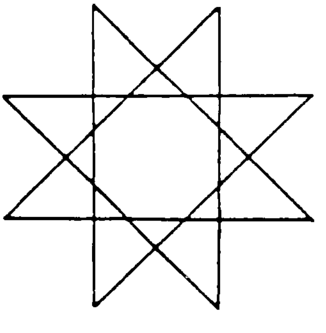
Estudiamos el caso 7/2



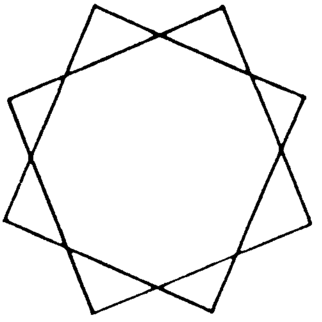
y el 7/3



Y vimos que el 7/4 tenía el mismo aspecto que 7/3. Podíamos dibujar el 8/3



e incluso el 8/2.



Pero nos dimos cuenta de que un 8/2 no era igual que un 4/1, que es cuadrado, aunque el ángulo es igual... Evidentemente, cada punto de la gráfica representa un conjunto de fracciones equivalentes, a su vez representan un conjunto de polígonos en estrella que tienen iguales todos los ángulos interiores.

Así, ¿podíamos volver al gráfico y juntar los puntos, ya que sabíamos, ahora, el significado de los puntos racionales?

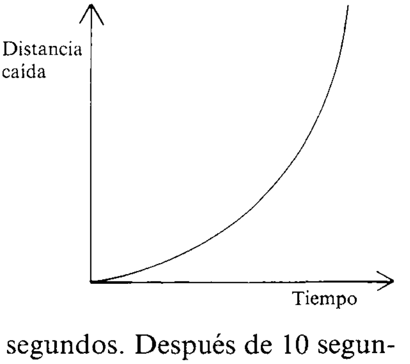
—Sí —dijeron.

—No —dijo John— porque esto incluiría también los puntos irracionales, para los que no tenemos aún un significado.

Y no lo hicimos, porque incluso yo mismo pensé que nos habíamos apartado bastante del tema, y que ya era tiempo de pasar a otras cosas, tres meses antes de los exámenes... Tampoco extendimos la gráfica hacia atrás para tratar de interpretar los ángulos negativos (por ejemplo, el polígono con 1 ½lados que debe tener un ángulo de 90°) . Pero alguién debería hacerlo.»

ALGUNAS SOLUCIONES

Caída de una piedra



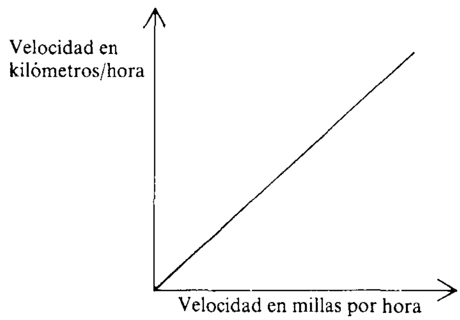
$d = 5t^2$

donde d metros es la distancia caída en t segundos. Después de 10 segundos la piedra habrá caído 500 metros.

Tabla de conversión de velocidades

$$y = 1,61\ x$$

donde x es la velocidad en millas por hora e y la velocidad en km/hora.. Una velocidad de 50 mph corresponde a una velocidad de 80,5 km/h.



Frecuencias de radio y longitudes de onda

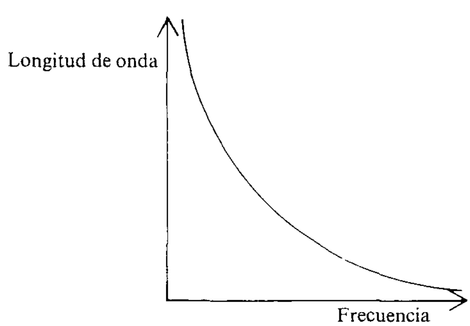
$$xy = 300.000$$

donde x kHz es la frecuencia e y metros es la longitud de onda.

(Observar que frecuencia x longitud de onda = la velocidad de la luz.)

Las longitudes de onda ocultas son:

Radio 2   330 m
Radio 1   275 m
Radio 3   247 m

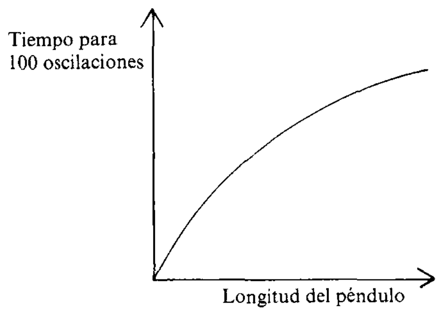


Reloj de péndulo

$$t = 20\sqrt{l}$$

donde l cm = longitud del péndulo y t segundos = tiempo para 100 oscilaciones.

Un péndulo con longitud 60 cm tardará aproximadamente 155 segundos para realizar 100 oscilaciones.

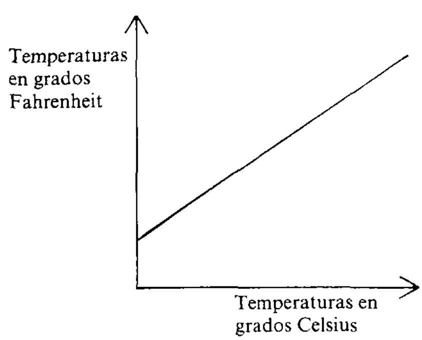


Temperaturas

$$f = 1{,}8\,c + 32$$

donde c es la temperatura en grados Celsius, y f es la temperatura en grados Fahrenheit.

$$50°C = 122°F \text{ y } -50°C = -58°F$$



Modelos de preguntas de examen

INTRODUCCION

Los esquemas de calificación están diseñados para evaluar las siguientes destrezas:

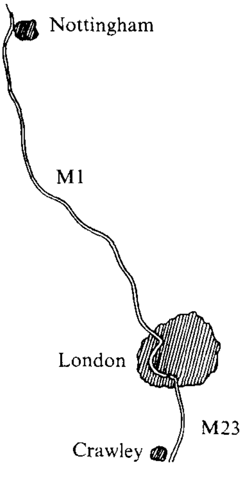
1. Interpretación de representaciones matemáticas* mediante palabras y dibujos.
2. Traducción de palabras o dibujos a representaciones matemáticas.
3. Traducción entre representaciones matemáticas.
4. Descripción de relaciones funcionales utilizando palabras o dibujos.
5. Combinación de informaciones presentadas en diversas formas, y extracción de inferencias donde corresponda.
6. Utilización de representaciones matemáticas para resolver problemas extraidos de situaciones realistas.
7. Descripción o explicación de los métodos utilizados y de los resultados obtenidos.

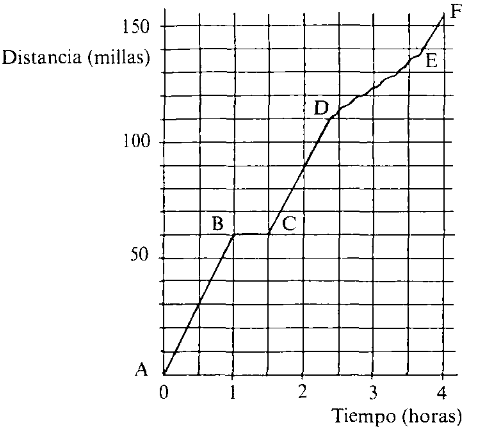
Los modelos de respuestas que siguen a las preguntas están pensados para ilustrar distintos aspectos del esquema de calificación. El número de puntos concedidos a cada cuestión varía según su longitud, pero, como indicación, una pregunta valorada con 15 puntos debería llevar unos 20 minutos del tiempo de examen.

* Por «representaciones matemáticas» nos referimos a información presentada en forma gráfica, algebraica o tabular.

El Viaje

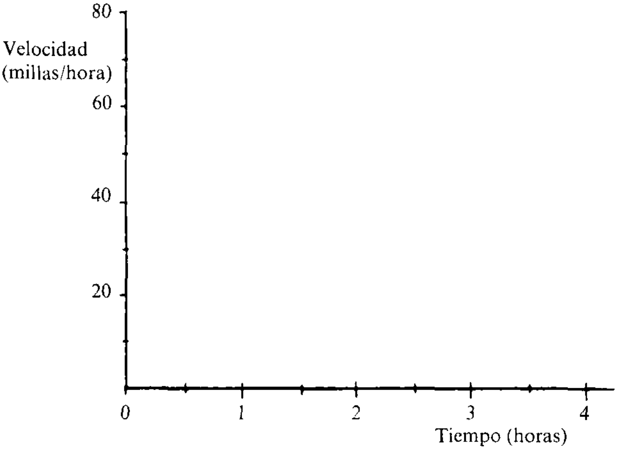
El mapa y la gráfica siguientes describen un viaje en coche de Nottingham a Crawley utilizando las autopistas M1 y M23.





I). Describe cada parte del viaje, haciendo uso de la gráfica y del mapa. En particular, describe y explica qué ocurre de A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F.

II). Usando la información anterior, haz una gráfica que muestre cómo varía la velocidad del coche durante el viaje.



El viaje ..... esquema de calificación

I). *Interpretación de representaciones matemáticas mediante palabras y combinando información de dibujos diferentes.*

Viaje de A a B	«Viajando por la M1»	1 punto
	«Viajando a 60 mph» (± 5 mph) o «Recorre 60 millas en una hora»	1 punto
Viaje de B a C	«Se para» o «En la gasolinera» o «En un atasco» o equivalente	1 punto
Viaje de C a D	«Viajando por la autopista»	1 punto
	«Viajando a la misma velocidad que antes» o «Viajando a 60 mph» (± 5 mph) o «Recorre 50 millas en 50 minutos (+ 5 minutos)	1 punto
Viaje de D a E	«Viajando por Londres»	1 punto
	«La velocidad fluctúa», o equivalente; ej: «hay muchos semáforos». No aceptar «el coche va más lento»	1 punto
Viaje de E a F	«Viajando por la autopista» o «viajando de Londres a Crawley»	1 punto

II). *Traducción a y entre representaciones matemáticas*

Para la forma general de la gráfica:

1 punto si la primera parte de la gráfica muestra una velocidad de 60 mph (± 10 mph) reduciéndose a 0 mph.

1 punto si la parte final muestra que la velocidad aumenta a 60 mph (± 10 mph) luego disminuye a 20 mph (± 10 mph) y luego aumenta de nuevo.

Para aspectos más detallados:

1 punto si la velocidad de la sección AB es mostrada como 60 mph y la de CD como 60 mph (± mph).

1 punto si los cambios en la velocidad al cabo de 1 hora y $1\frac{1}{2}$ horas se representan por líneas verticales (o próximas)

1 punto si la parada está correctamente representada de 1 hora a $1\frac{1}{2}$ horas.

1 punto si la velocidad a través de Londres se muestra como algo entre 20 y 26 mph o como fluctuante.
1 punto si la gráfica es correcta en todos los demás aspectos.

Para esta cuestión se pueden conceder 15 puntos.

I.) *Corrección de descripciones*

Jayne

«A→B = recorres mucho camino en poco tiempo porque estás en la M1
B→C = te has parado media hora para comer.
C→D = viajas el resto de la M1 hasta llegar a Londres.
D→E = disminuyes la velocidad porque vas a través de Londres.
E→F = aumentas otra vez la velocidad en la M23 hasta que llegas a Crawley.»

La descripción de Jayne depende casi enteramente del mapa. No especifica la velocidad del coche en ningún momento (aunque se incluye la parada). De esta forma, no obtuvo los puntos relativos a las secciones AB, CD y DE. Fue puntuada con 5 puntos de 8 posibles.

Sarah

«A a B → En la primera hora el coche viajó 60 millas (velocidad de 60 mph)
B a C → Luego entre 1 hora y $1\frac{1}{2}$ horas, el coche permaneció quieto.
C a D → Entre $1\frac{1}{2}$ horas y 2 ⅓ horas va a la velocidad original de 60 mph.
D a E → Luego, entre 2 ⅓ horas y $3\frac{2}{3}$ horas el coche viajó aproximadamente 28 millas a velocidad variable.
E a F → Luego entre $3\frac{2}{3}$ horas y 4 horas el coche viajó a aproximadamente a 50 mph.»

La descripción de Sarah, en contraste con la de Jayne, se refiere totalmente a la gráfica. No se hace referencia a la M1, Londres o la M23. De esta forma sólo obtiene puntos por la descripción de la velocidad en AB, BC, CD y DE. Obtuvo 4 puntos de 8 posibles.

Philip

«El coche arranca de Crawley a lo largo de la M23 aumentando gradualmente la velocidad y luego continuando a Londres (B) a una velocidad constante de 60 mph. Entre B y C, el coche está quieto durante media hora y luego empieza su viaje de C a D después de una hora y media de empezar, ahora viaja a una velocidad constante de 60 mph durante 50 minutos hasta alcanzar D, donde baja a una velocidad de 20 mph y luego desde E a Nottingham, otra vez acelera yendo a una velocidad constante durante $\frac{1}{4}$ de hora en que frena porque llega a Nottingham.»

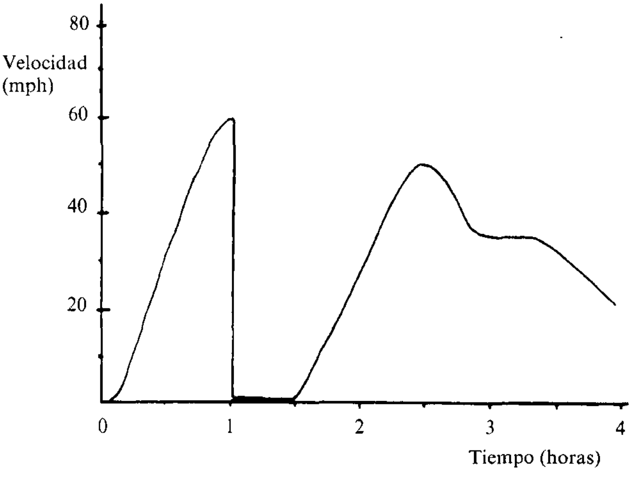
Philip ha invertido el viaje, por eso describe un viaje de Crawley a Nottingham. De todas formas, aunque pierde los puntos del mapa, consigue los puntos de la velocidad para AB (60 mph), BC (cero) y CD (60 mph). Por lo tanto, tiene 3 puntos de 8 posibles.

II). *Calificación de descripciones*

Forma general

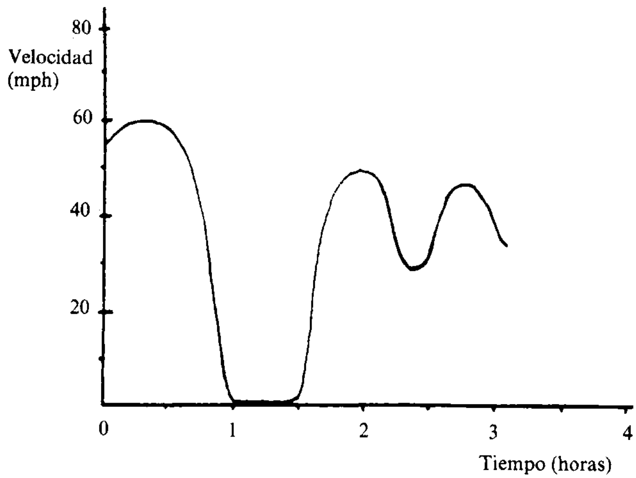
Angela

Angela ha mostrado una disminución en la velocidad en la primera parte de su gráfica desde 60 mph a 0 mph. Sin embargo, en la segunda parte de la gráfica, aunque la velocidad aumenta y luego disminuye, no aumenta otra vez. De esta forma Angela fue calificada con uno de los puntos posibles.



Theresa

La gráfica de Theresa consigue los dos puntos por la forma. Disminuye de 60 mph a 0 mph, y luego aumenta correctamente, disminuye y aumenta de nuevo. Sin embargo, cuando la gráfica es puntuada en detalle, sólo habría obtenido un punto (por representar correctamente la parada) de los 5 posibles.

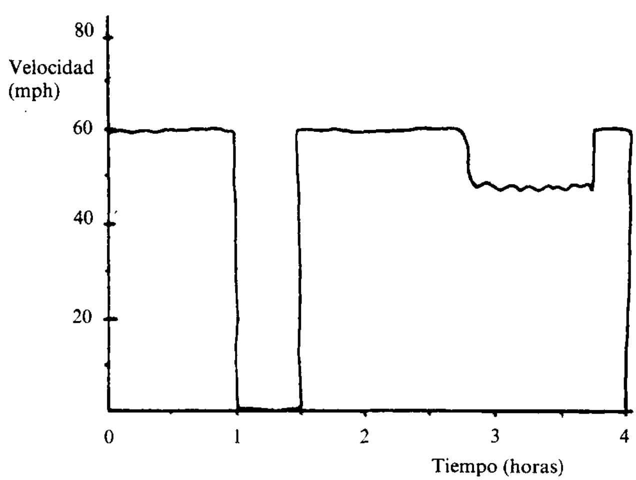


Detalle

Robert

La gráfica de Robert fue calificada con 3 puntos de los 5 posibles por detalles. Fueron dados por:

—AB y CD mostrados commo 60 mph.
—Líneas casi verticales en 1 h. y $1\frac{1}{2}$ horas.
—La parada mostrada correctamente.

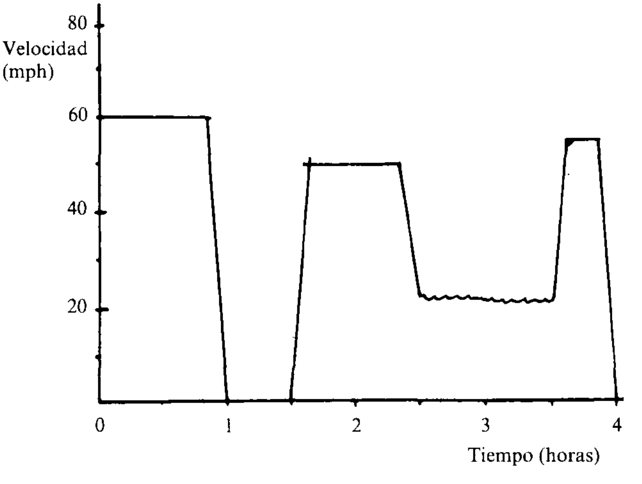


Robert no obtuvo el punto final porque había otro error no penalizado todavía— la sección CD debería ser representada desde $1\frac{1}{2}$ hasta menos de $2\frac{1}{2}$ horas, Robert la ha mostrado de $1\frac{1}{2}$ a $2\frac{3}{4}$ horas.

Michael

La gráfica de Michael fue calificada con 4 puntos de los 5 posibles por detalles. Fueron dados por:

— La parada mostrada correctamente.
— Líneas casi verticales en 1 y $1\frac{1}{2}$ horas.
— El viaje a través de Londres mostrado correctamente.



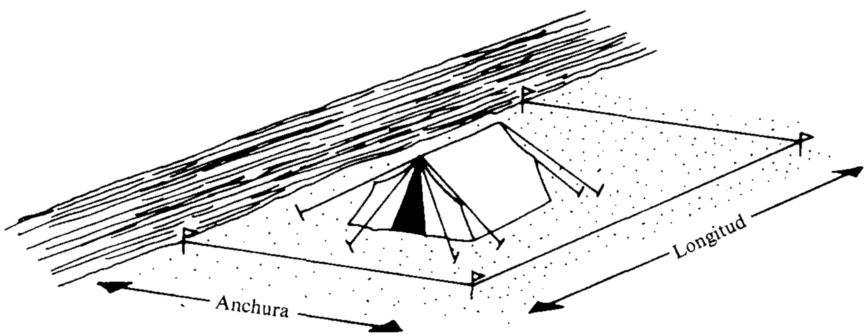
Michael fue calificado con el cuarto punto por no tener otros errores que los ya penalizados.

Camping

A su llegada a un camping, a un grupo de campistas les dan una cuerda de 50 metros de largo y cuatro estacas con los cuales deben marcar un recinto rectangular para su tienda.

Deciden colocar la tienda junto a un río, tal como se muestra abajo. Esto supone que la cuerda sólo se tiene que usar para tres lados del recinto.

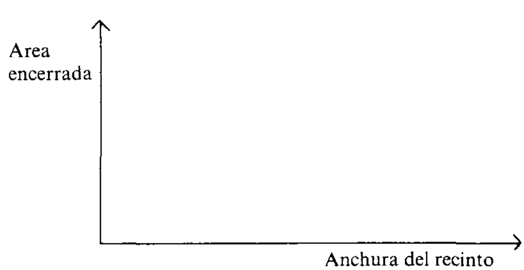
I). Si deciden hacer un recinto con una anchura de 20 metros, ¿Cuál será su longitud?



II). Describe con palabras, lo más completamente posible, cómo cambia la longitud del recinto cuando la anchura toma todos los valores posibles. (Considera valores grandes y pequeños de la anchura)

III). Halla el área encerrada por el recinto para una anchura de 20 metros y para algunas otras anchuras.

IV). Dibuja una gráfica aproximada para mostrar cómo varía el área encerrada cuando la anchura va tomando todos los valores posibles. (Considera valores grandes y pequeños de la anchura).



Los campistas están interesados en buscar cuáles deberían ser la longitud y la anchura del recinto para obtener la mayor superficie posible.

V). Describe, mediante palabras, un método que te permita hallar estas medidas.

VI). Usa el método que has descrito en la parte anterior para calcular la longitud y la anchura.

Camping.... esquema de calificación

I) y II). *Descripción mediante palabras de una relación funcional*

I).
1 punto para longitud = 10 m.

II).
3 puntos para «Cuando la anchura aumenta de 0 a 25 m, la longitud disminuye linealmente (uniformemente) de 50 m a 0 m».
o para «Cuando la anchura aumenta, la longitud disminuye al doble de velocidad».

Puntuaciones parciales:

2 puntos para «Cuando la anchura aumenta la longitud disminuye linealmente (uniformemente)»
ó 2 puntos para «cuando la anchura aumenta de 0 a 25 m la longitud disminuye de 50 m a 0 m»;
ó 1 punto para «Cuando la anchura aumenta la longitud disminuye».

III) y IV). *Traducir información a representación matemática*

III).
1 punto para área = 200 m^2.
2 puntos para obtención de áreas correctas para otras tres anchuras.

Puntuación parcial:

1 punto para el área correcta con otras dos anchuras.

IV).
2 puntos para una gráfica que muestre una curva continua que muestre un solo punto máximo.

Puntuación parcial:

1 punto por una gráfica total o parcialmente recta o de dos puntos discretos, pero que muestre que el área aumenta y luego disminuye.

V. *Describir el método a utilizar en la resolución de un problema*

3 puntos para una descripción clara y completa de cómo hallar dos dimensiones.

Puntuaciones parciales:

2 puntos para una descripción clara y completa de cómo hallar sólo una dimensión.
1 punto si la explicación no es clara pero es aparentemente correcta.

VI). *Uso de representaciones matemáticas para resolver un problema*
2 puntos para anchura = 12,5 m para el área máxima.

Puntuación parcial:

1 punto para una anchura comprendida en el intervalo:

12 m $\leq$ anchura $\leq$ 13 m
ó 1 punto para «la anchura podría ser 12 o 13 metros»
1 punto para «Longitud = 25 m para el área máxima» (o resultado de una anchura incorrecta en el intervalo 12 m $\leq$ anchura $\leq$ 13 m)

Para esta cuestión se puede conceder un máximo de 15 puntos.

II). *Corrección de descripciones*

Julian

II). «Si la anchura aumenta, la longitud se haría más pequeña. Es decir, si la anchura de cada lado se aumenta 1 metro, entonces la longitud sería 2 metros más corta.

Si la anchura disminuye 1 metro entonces la longitud del recinto sería dos metros más.»

La descripción de Julián fue calificada con los tres puntos. Ha descrito correctamente la relación, incluyendo el hecho de que la longitud disminuye al doble de la velocidad a la que aumenta la anchura.

Steven

II). «Empezando por lo más pequeña que puede ser la anchura, la longitud será muy larga. Cuando la anchura se hace más grande entonces la longitud se debe hacer más pequeña:

Esto es:

	anchura	longitud	
pequeña	1 m	48 m	grande
	10 m	30 m	
	15 m	20 m	
grande	24 m	2 m	pequeña ».

Steven, mostrando valores de 1 m a 24 m para la anchura, ha demostrado numéricamente la relación. Por lo tanto, fue calificado con dos puntos. (Es claro que no considera que 0 m sea una dimensión realista)

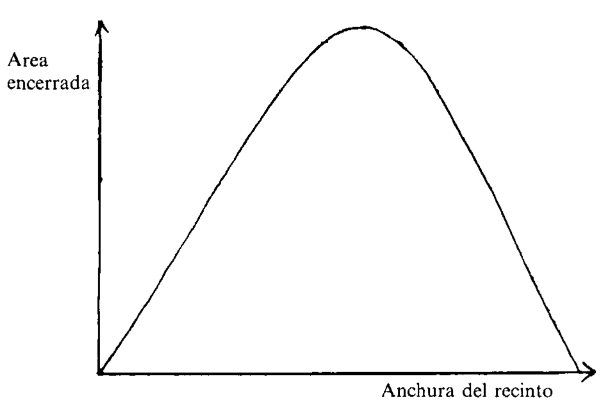
Debbie

II). «Cuando la anchura aumenta, la longitud se haría más corta porque sólo hay 50 metros de cuerda, por lo tanto cuanto más larga es la anchura, más corta es la longitud.»

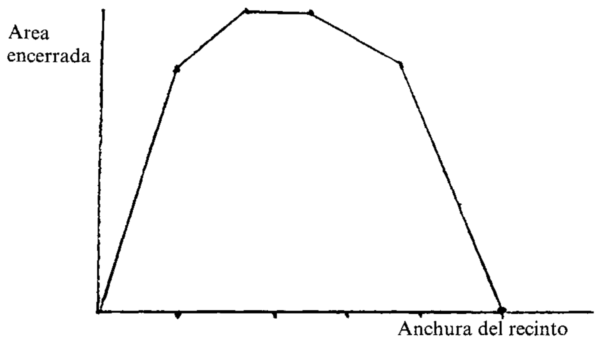
Debbie simplemente ha explicado que cuando la anchura aumenta, la longitud disminuye. Por esto sólo fue calificado con un punto.

IV). *Corrección de gráficas*

Catherine



Andrew



El dibujo de Catherine marca un punto máximo sencillo, mientras que el de Andrew está formado por varías líneas rectas, aunque muestra que el área aumenta y luego disminuye.

Catherine por lo tanto fue calificada con los dos puntos por su gráfica mientras Andrew sólo obtuvo un punto.

V). *Corrección de descripciones*

Emma

V). «Para hallar la longitud y la anchura miraría en mi gráfica para hallar el punto más alto y lo usaría para calcular la anchura. Luego haría x 2 y − de 50.»

La respuesta de Emma al apartado V) describe claramente el método que va a usar para hallar la anchura y la longitud correspondientes al área máxima. Fue calificada con los tres puntos.

Katherine

V). «Dibuja una gráfica como en IV) y busca el punto más alto. Mira abajo y tienes la anchura. Entonces es fácil hallar la longitud.»

La respuesta de Katherine, sin embargo, sólo describe un método para hallar la anchura. Por lo tanto sólo fue calificada con dos de los tres puntos posibles.

VI). *Corrección de las soluciones numéricas*

Karen

A = 12
L = 26

S = 26
×12
260
52
312 m²

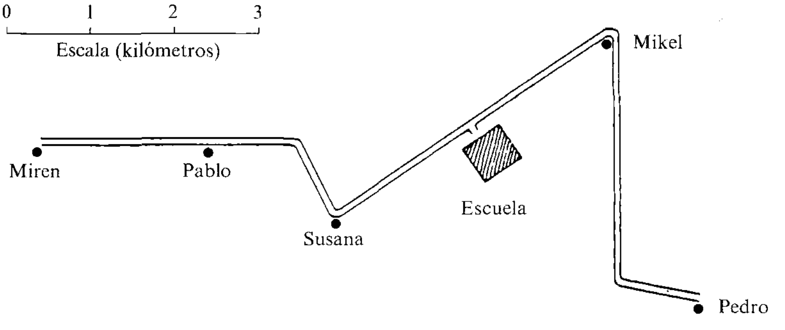
A = 13
L = 24
S = 312 m²

S = 24
×13
240
72
312

Son lo mismo

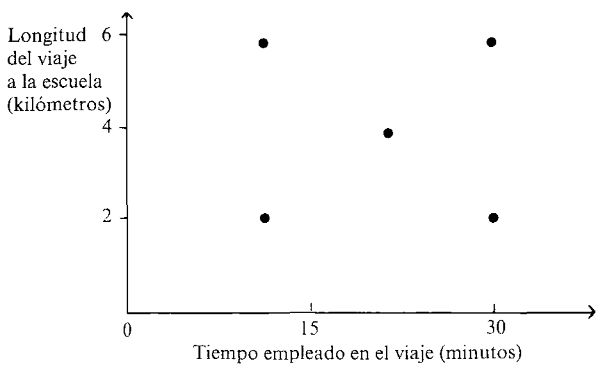
Karen ha calculado el área obtenida para anchuras de 12 m y 13 m, y ha dado las dos en su respuesta el apartado VI). Por esto fue calificada con un punto y con otro punto más por haber dado correctamente las larguras correspondientes. De esta forma Karen obtuvo 2 puntos de los tres posibles por las respuestas numéricas.

Yendo a la escuela



Miren, Mikel, Susana, Pablo y Pedro van a la escuela por la misma carretera comarcal todas las mañanas. Pedro va en el coche de su padre, Miren en bicicleta y Susana andando. Los otros dos van cada día de una forma. El mapa anterior muestra dónde vive cada uno.

La siguiente gráfica describe el viaje a la escuela de cada uno el lunes pasado.



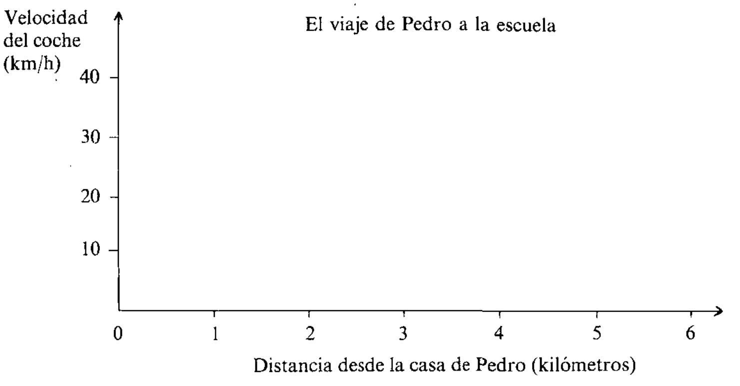
I). Marca cada punto de la gráfica con el nombre de persona a la que representa.

II). ¿Cómo viajaron Pablo y Mikel ese día?........................

III). Describe cómo has llegado a la respuesta del apartado II)

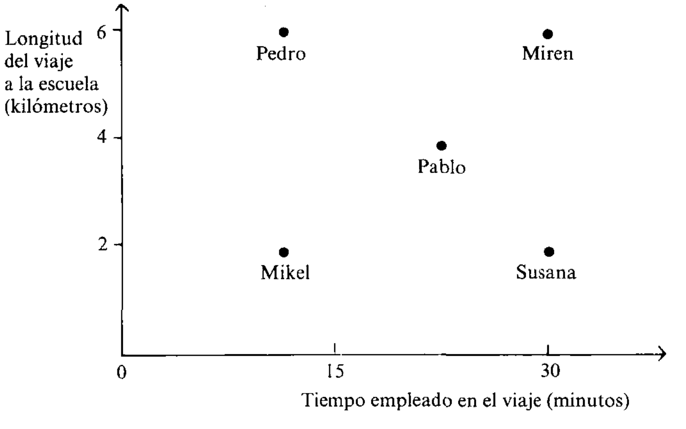
....
....
....
.... (continúa)

IV). El padre de Pedro puede conducir a 40Km/h en los tramos rectos de la carretera, pero tiene que frenar en las curvas. Dibuja una gráfica en los ejes que aparecen a continuación para mostrar cómo varía la velocidad del coche a lo largo de su recorrido.



Yendo a la escuela....... esquema de calificación

I). *Combinación de informaciones presentadas pictórica y verbalmente, y traducción a representaciones matemáticas*



1 punto si Pablo está situado correctamente.
1 punto si Pedro y Miren están a 6 kilómetros.
1 punto si Mikel y Susana están a 2 kilómetros.
1 punto si Pedro y Miren están colocados correctamente o si Mikel y Susana están colocados correctamente.
1 punto si el diagrama está bien del todo.

II). *Combinación de informaciones presentadas en varias formas e inferencias gráficas*

Si la parte I) es correcta,

2 puntos por «Pablo y Mikel fueron en bici» o «corriendo» (o usaron un método más rápido que andar pero más lento que el coche).

Puntuación parcial:

1 punto por «Pablo fue en bici (o corriendo, etc), o «Mikel fue en bici (corriendo, etc) o «Pablo y Mikel usaron el mismo método»

Si la parte I) es incorrecta,

2 puntos si las respuestas dadas para Pablo y Mikel son consistentes con el diagrama realizado. En caso contrario no dar puntos.

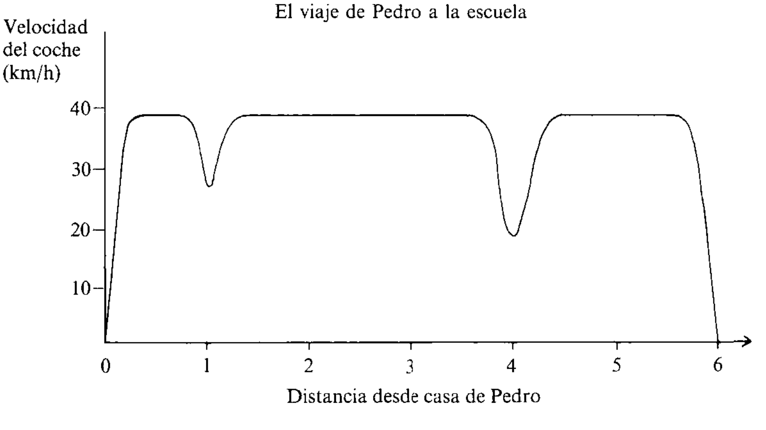
III). *Explicación del método utilizado en el apartado II)*

2 puntos si la descripción del argumento utilizado en el apartado II) es clara y completa.
(Esta descripción debe referirse a la velocidad o a distancia y tiempo)

Puntuación parcial:

1 punto por una descripción no demasiado completa o por una descripción no demasiado clara pero aparentemente correcta, o por alguna explicación referida a la velocidad.

IV). *Traducción de información de una representación pictórica a una gráfica*

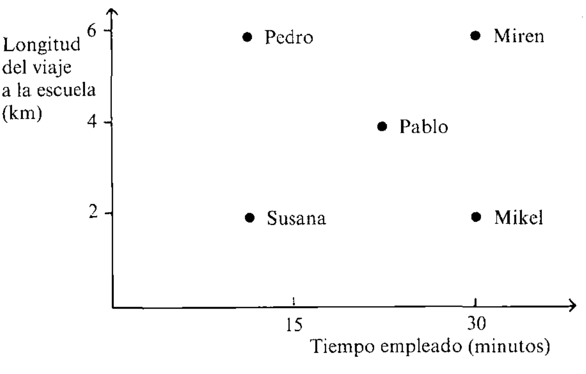


1 punto si la gráfica comienza en (0,0) y/o termina en (6,0)
1 punto si la gráfica tiene dos mínimos correspondientes a las dos curvas.
1 punto si el segundo mínimo no es mayor que 30 km/h pero es menor que el primer mínimo.
1 punto si la distancia entre los mínimos es correcta (representando 3 km aproximadamente)
1 punto si la velocidad se muestra como 40 km/h durante al menos un kilómetro en el tramo intermedio y entre 0 y 30 km/h (ambos inclusive) en el resto.
1 punto si la gráfica es correcta en todos los otros aspectos.

La puntuación máxima para esta cuestión son 15 puntos.

Corrección del apartado II) cuando el I) es incorrecto

Kelly

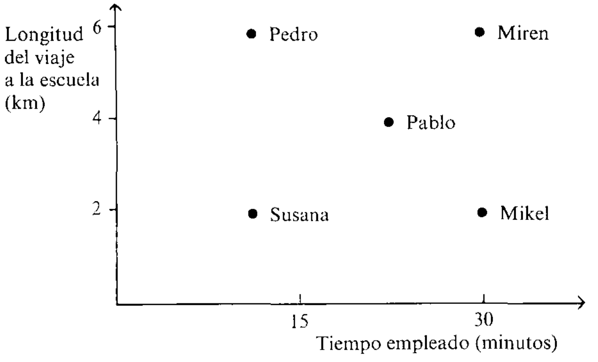


Pablo y Mikel fueron en bici los dos a la escuela

La respuesta de Kelly al apartado II) parece que es correcta, pero no corresponde a su respuesta al apartado I), por lo tanto no obtiene ningún punto por la respuesta a la parte II).
Para el apartado I) había obtenido 4 puntos.

Leigh

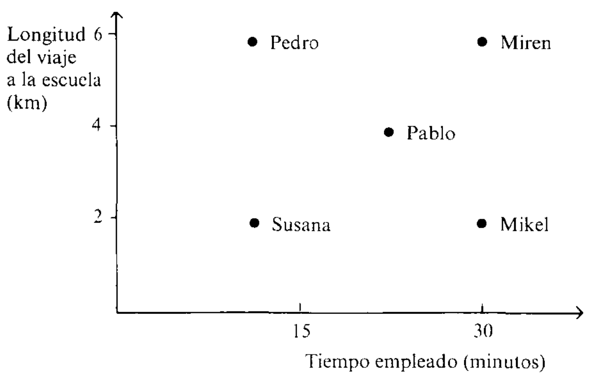
Leigh fue calificado con 4 puntos por su respuesta al apartado I). Pablo estaba correctamente situado en el diagrama de Leigh y por lo tanto la deducción correcta sería que Pablo no fue andando a la escuela. Por otro lado, Mikel estaba colocado de tal forma que la deducción correcta sería que fue a la escuela andando. Sin embargo, tenían que ser correctas *las dos* respuestas del apartado II) para adjudicarle la puntuación.



(ii) Pablo y Mikel fueron a la escuela andando

Jason

Jason fue calificado con 4 puntos por su respuesta a I). En el apartado II) las respuestas dadas para Pablo y Mikel reflejan correctamente la respuesta dada en I). Por lo tanto, fue calificado con los dos puntos correspondientes a II).



Pablo fue en bici y Mikel andando

III). *Corrección de las descripciones*

Jackie

«Si Mikel hubiera ido andando a la escuela, habría tardado tanto como Susan.

Si hubiera ido en coche le habría ganado a Pedro, por lo tanto tuvo que ir en bici.

Si Pablo hubiera ido andando, habría tardado más que Susan, si hubiera ido en coche habría sido más rápido que Pedro que tenía que ir desde más lejos.»

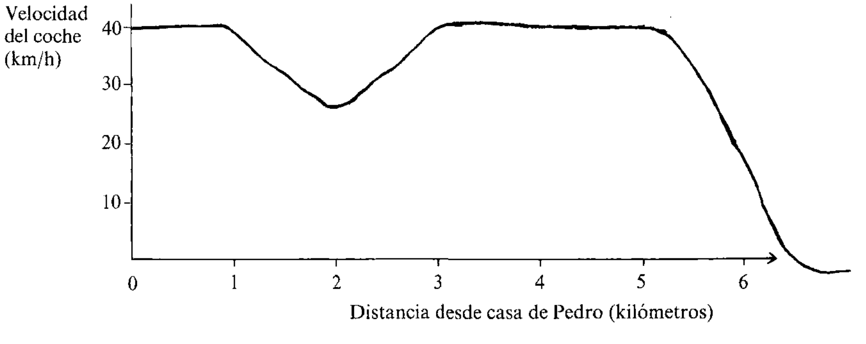
Steven

«He llegado a la respuesta al número 2 porque Miren, Pablo y Mikel están todos en una línea y sus kilómetros y tiempo aumentan de la misma forma. Miren fue en bici, luego los otros dos también.»

Es interesante comparar la respuesta de Steven con la de Jackie. Jackie ha adoptado una descripción muy verbal, comparando el viaje a cada uno con los demás. Steven por el contrario, ha observado el hecho de que los puntos correspondientes a Miren, Pablo y Mikel están alineados y por lo tanto tienen que haber utilizado el mismo medio de transporte. De todas formas, ambas descripciones son claras y correctas y fueron calificadas con los dos puntos.

IV). *Corrección de las gráficas*

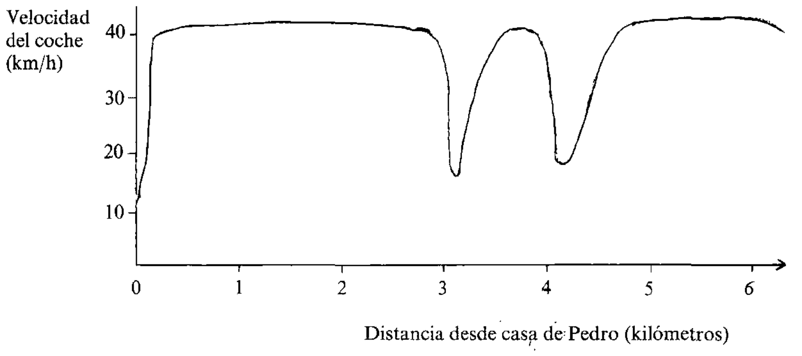
Joanne



Joanne sólo ha demostrado una curva en su gráfica. De todas formas se le ha dado un punto por representar correctamente el tramo recto a 40 km/h durante al menos un kilómetro. No se le concedió el punto final porque tarda 2 km en llegar a la curva, otro error. Obtuvo 1 punto sobre 6 posibles en esta parte IV).

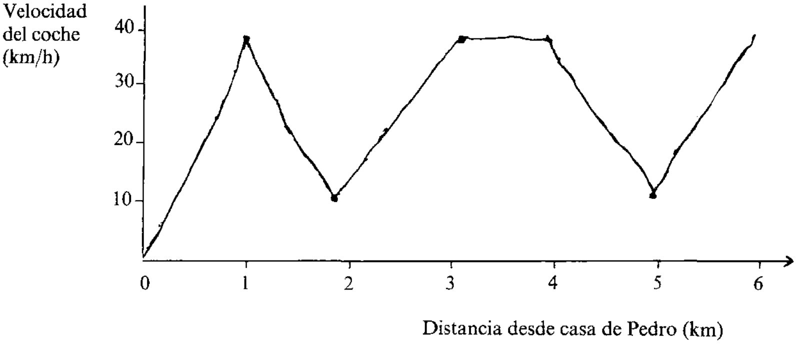
Jane

Jane fue calificada con 1 punto de los 5 puntos específicos relativos a la gráfica (ha representado las dos curvas como dos mínimos). También



obtuvo el punto final porque todos los errores cometidos se refieren a los puntos específicos mencionados en el esquema de corrección y consecuentemente ya han sido penalizados. Por lo tanto, Jane obtiene en total 2 puntos de los 6 posibles.

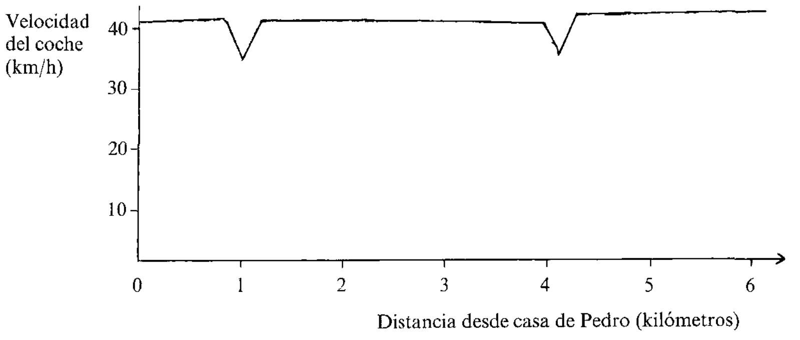
Stephen



Stephen obtuvo 3 de los 5 puntos específicos relativos a la gráfica (mostrando las dos curvas como dos mínimos; estando separadas éstas 3 km; y por el tramo intermedio a 40 km/h durante al menos 1 km) Sin embargo, como ha representado el coche frenando desde que se acercaba a 1 km de las curvas, no obtuvo el punto final. Por lo tanto obtuvo 3 puntos de los 6.

Jason

Jason había obtenido de la misma forma 3 puntos de los 5 para puntos específicos referidos a la gráfica. Pero Stephen no obtuvo el punto final,



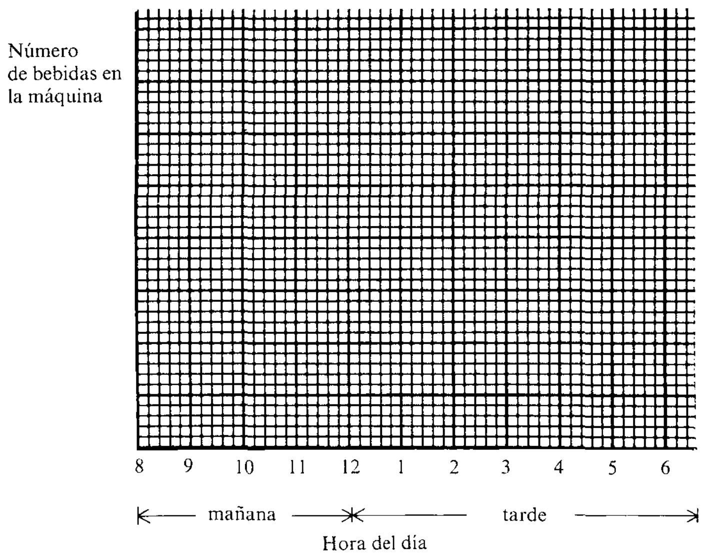
Jason sí lo consiguió. Si Jason hubiera mostrado la gráfica desde (0,0) y (6,0) y la segunda curva más fuerte que la primera, la gráfica habría sido correcta. Por lo tanto consiguió 4 de los 6 puntos.

La máquina de vender bebidas

La cafetería de una fábrica tiene una máquina que vende bebidas. En un día típico:

— la máquina comienza medio llena.
— no se venden bebidas antes de las 9 am o después de las 5 pm.
— las bebidas se venden a un ritmo lento durante el día, excepto en los descansos de la mañana y de la comida (10,30-11 am y 1-2 pm) en que hay mayor demanda.
— la máquina se llena justo antes del descanso de la comida (lleva unos 10 minutos llenarla).

Dibuja una gráfica que muestre cómo varía el número de bebidas que hay en la máquina desde las 8 am hasta las 6 pm.



La máquina de vender bebidas...... esquema de calificación

Traducción de palabras a representaciones matemáticas

1 punto si la gráfica es horizontal de 8 a 9 am y de 5 a 6 pm.
1 punto si la pendiente de la gráfica $\leq$ 0 desde las 9 hasta mediodía (no aceptar una pendiente cero a lo largo de todo el período).
1 punto si el llenado de la máquina se hace en algún momento entre las 12 del mediodía y la 1 pm, y este llenado no lleva más de 24 minutos (esto es, dos cuadritos del papel de gráficas).

1 punto si el pico de la gráfica está al doble de altura que el punto inicial.

1 punto si la gráfica es notablemente más pronunciada de 10,30 am a 11 am y de 1 pm a 2 pm que en cualquier otro sitio.

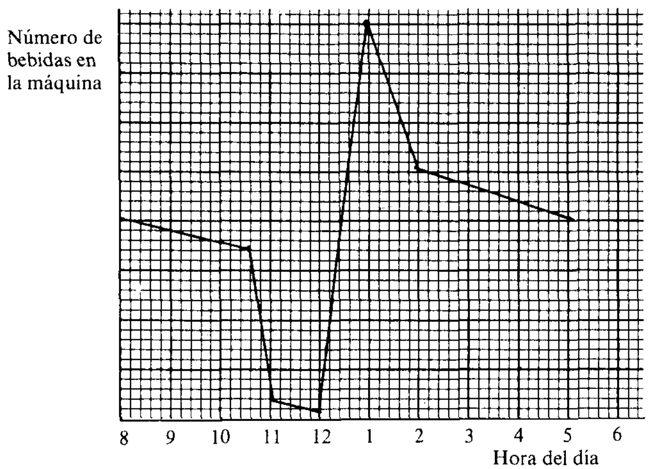
1 punto si la pendiente de la gráfica es $\leq$ 0 de 1 pm a 5 pm (no aceptar pendiente cero en todo el período).

1 punto si la gráfica es correcta en todo lo demás.

Esta cuestión puede ser puntuada con un máximo de 7 puntos.

Corrección de las gráficas

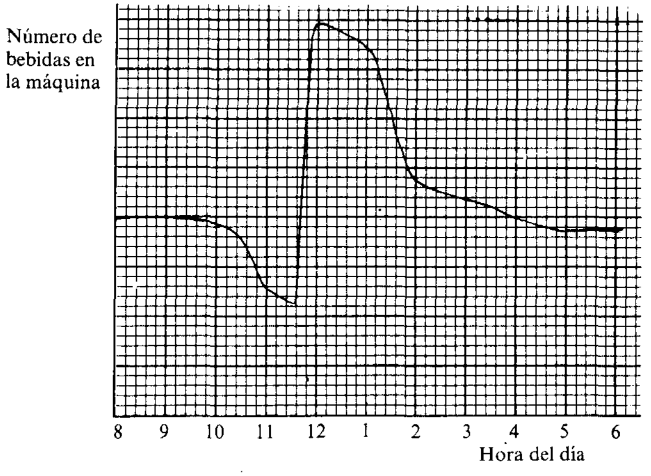
Kevin



En la gráfica de Kevin la máquina empieza a servir bebidas a las 8 am por lo tanto la representación desde las 8 a las 9 am no es correcta y ha perdido este punto. También muestra que la máquina tarda 1 hora en llenarse y al ser más de los 24 minutos permitidos en el esquema también se pierde este punto. Estos son los dos únicos errores y por lo tanto Kevin fue calificado con 5 de los 7 puntos posibles.

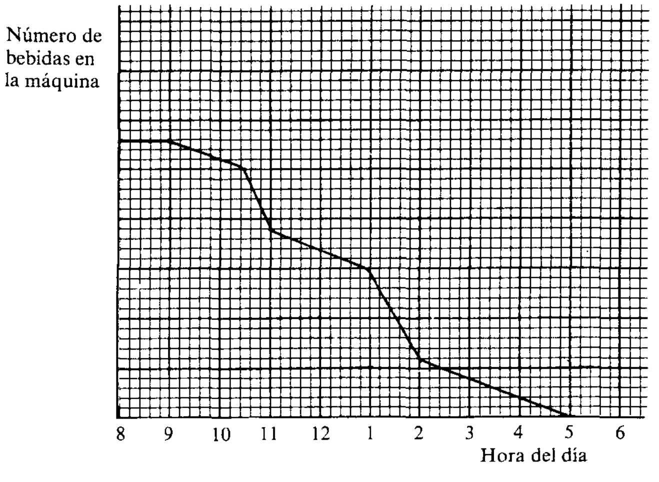
Paul

En la gráfica de Paul la máquina se llena a las 11,35 am, que no se considera como «justo antes de la comida» y así pierde este punto. Ha mostrado claramente pendientes más marcadas entre 10,30 am y 11,00 am y entre 1 pm y 2 pm. Ha tratado correctamente el período entre las 12 del mediodía y la 1 pm. De esta forma fue calificado con 6 puntos.

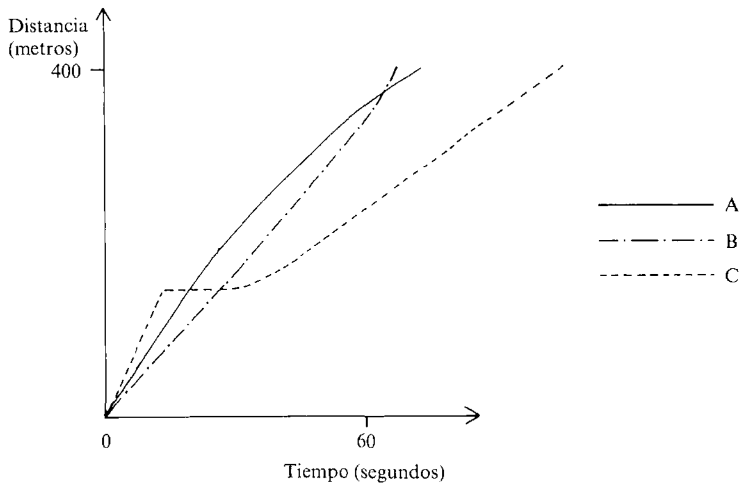


Cheryl

Cheryl ignora completamente el llenado de la máquina. Sin embargo ha mostrado claramente un gradiente negativo entre 9 am y 12 del mediodía y de 2 pm a 5 pm, y también la pendiente más pronunciada en las secciones adecuadas. Se debería observar también que en un día típico la máquina no terminaría vacía. Cheryl fue calificado con 3 puntos de los 7 posibles.



La carrera de vallas



La gráfica anterior describe aproximadamente lo que ocurre cuando tres atletas A, B y C participan en una carrera de 400 metros vallas.

Imagina que tú eres el comentarista de la prueba. Describe lo que ocurre de la forma más cuidadosa que puedas. No necesitas hacer medidas exactas.

La carrera de vallas .... esquema de calificación

Interpretación mediante textos de una representación matemática

1 punto por «C toma el primer puesto».
1 punto por «C deja de correr».
1 punto por «B supera a A».
1 punto por «B gana».
2 puntos por cualesquiera cuatro de los siguientes:

> «A y B pasan a C»
> «C empieza a correr de nuevo»
> «C corre a menos velocidad»
> «A frena» o «B acelera»
> «A termina el segundo» o «C termina el último».

Puntuación parcial:

1 punto por dos o tres cualesquiera de los puntos mencionados.
2 puntos por un comentario animado que mencione las vallas.

Puntuación parcial:

1 punto por un comentario animado que no mencione las vallas o por un informe que mencione las vallas.

En total se pueden conceder 8 puntos para esta cuestión.

Corrección de las descripciones

Martin

«Y ya salen. C aumenta su velocidad muy rápidamente en los primeros 150 metros y cubre una gran distancia en muy poco tiempo. B lo toma con tranquilidad y marchando a su ritmo iba razonablemente rápido y A iba más rápido que B pero más lento que C al principio, pero luego C se paró para un descanso y continuó despacio yendo el último. A iba más rápido, pero fue sobrepasado por B que adelantó a A y llegó el primero, B venció, A fue segundo y C fue tercero.»

Martin ha mencionado los cuatro primeros factores y también tres de los adicionales. Por esto consiguió 5 puntos. El comentario de Martin parece más un informe que un comentario, y como no menciona las vallas, no obtuvo puntos por comentario. Por lo tanto obtiene 5 puntos de los 8 posibles.

Stephen

«Aquí al empezar la carrera los tres atletas están preparados para empezar. Salen. El atleta C toma una ligera delantera, el atleta A va próximo en 2.° lugar y el atleta B hace una mala salida. Se aproximan a los 100 metros. C todavía va por delante de A y B les va alcanzando. Oh, no! C se ha caído. Se levanta va tras A y B. A mitad de carrera A tiene una pequeña delantera, pero B le va alcanzando progresivamente y parece que C no tiene muchas probabilidades de ganar. Están ahora en los 100 metros finales, A y B van codo con codo, C acaba de pasar por la mitad de la carrera. El atleta A cruza la línea el primero, B justo detrás de él. C está a unos 100 metros. Creo que quizá habría ganado C si no se hubiera caído.»

Stephen sólo ha mencionado 2 de los 4 primeros factores y dos de los adicionales, por lo tanto tiene tres puntos. Sin embargo el comentario de Martin es muy vivo e interesante aunque ha ignorado el hecho de que es una carrera de vallas. Fue calificado con un punto por el comentario, haciendo un total de 4 de los 8 posibles.

Wendy

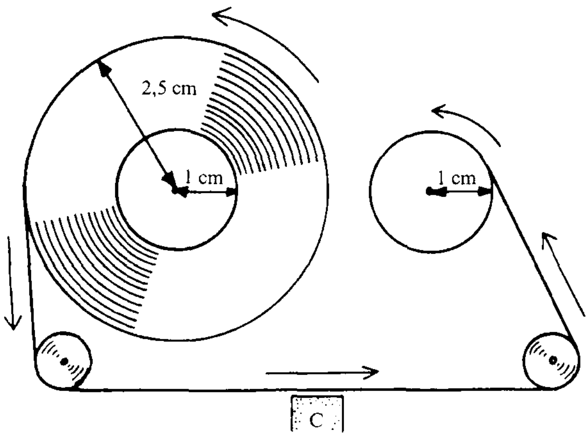
«*El atleta A* llegó al segundo. Salió bastante rápido y fue perdiendo velocidad suavemente a lo largo de la carrera.

El atleta B llegó el primero. Salió a un ritmo constante y cogió velocidad a lo largo de toda la carrera.

El atleta C llegó tercero. Salió yendo rápido, luego se cayó y no corrió durante unos segundos, luego comenzó a correr de nuevo, yendo cada vez más lento.»

Wendy también ha mencionado 2 de los primeros 4 puntos, así como tres de los adicionales. Fue calificada con 3 puntos por ello. Sin embargo no obtiene puntos por comentario, ya que ha descrito a cada atleta separadamente, más que comentado la carrera en su conjunto.

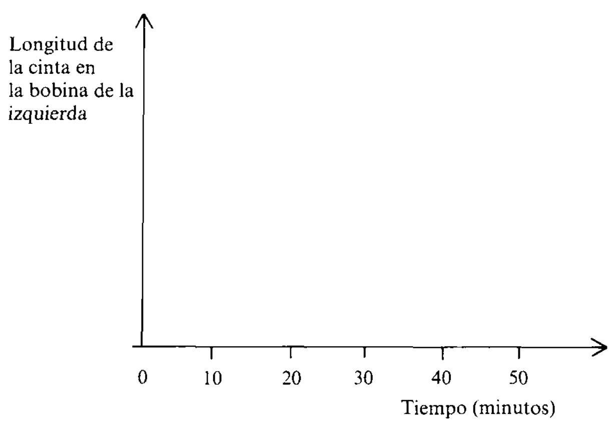
La cassette



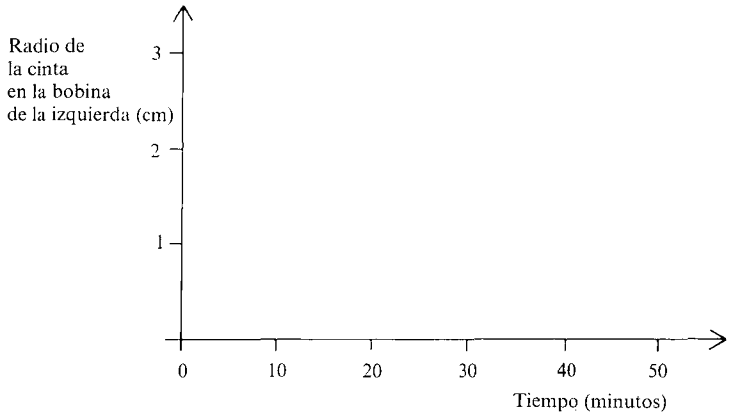
Este diagrama representa un magnetofón justo cuando está empezando a sonar una cinta. La cinta pasa por la «cabeza» (marcada como C) a una velocidad constante, pasando de la bobina de la izquierda a la de la derecha.

Al principio, el radio de la cinta en la bobina de la izquierda es 2,5 cm. La cinta dura 45 minutos.

I). Dibuja una gráfica que muestre cómo varía con el tiempo la longitud de la cinta en la bobina de la izquierda.



II). Dibuja una gráfica que muestre cómo varía con el tiempo el radio de la cinta en la bobina de la izquierda.



III). Describe y explica cómo varía con el tiempo el radio de la cinta en la bobina de la *derecha.*

....

....

....

....

....

....

....

....

La cassette..... esquema de calificación

I) y II). *Traducción de textos y dibujos a representaciones matemáticas*

I). 1 punto por una gráfica que muestre una línea recta con pendiente negativa.
1 punto por una gráfica que termine en (45,0).

II). 1 punto por una gráfica que comience en (0, 2,5) termine en (45,1).
1 punto por una gráfica curva.
1 punto por una curva cóncava hacia abajo.

III). *Descripción y explicación mediante palabras de una relación matemática*

2 puntos por una descripción completa y correcta p. ej. «el radio aumenta rápidamente al principio pero luego va más lento».

Puntuación parcial:

1 punto por «el radio aumenta».

2 puntos por una explicación completa y correcta. p. ej. «la cinta va a una velocidad constante, pero la circunferencia aumenta» o «cuanto mayor es el radio, más cinta hace falta para envolverlo».

Puntuación parcial:

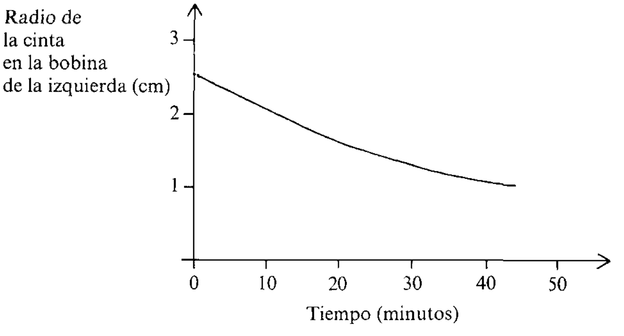
1 punto para una explicación aparentemente correcta pero no clara.

Para esta cuestión hay 9 puntos.

II). *Corrección de las gráficas*

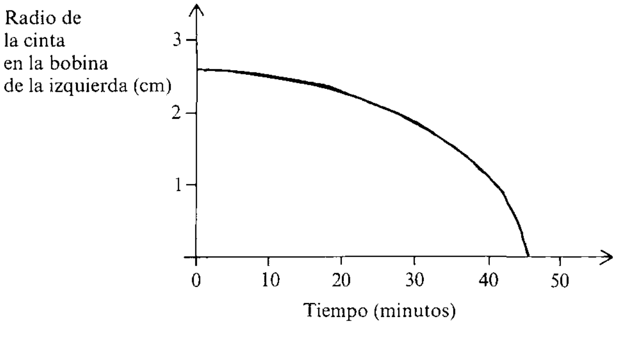
Stephanie

El dibujo de Stephanie muestra una curva que empieza en (0, 2,5) y termina en (45,1). Sin embargo al no ser cóncava hacia abajo, obtuvo 2 de los 3 puntos posibles.



Mark

El dibujo de Mark es una curva cóncava hacia abajo, pero no termina en (45,1). También obtuvo 2 puntos en esta sección.



III). *Corrección de descripciones y explicaciones*

Paul

«El radio de la cinta en la bobina de la derecha aumentará rápido al principio y luego empezará a ir más lento ya que el radio se hace más grande porque la velocidad de la cinta es constante.»

Julie

«El radio de la cinta se hace más en el lado de la derecha. Al principio el radio se hace más a gran velocidad porque la cinta va más rápido alrededor de la bobina. El radio va siempre aumentando aunque lo hace cada vez más lentamente porque la cinta se va haciendo más larga alrededor de la bobina.»

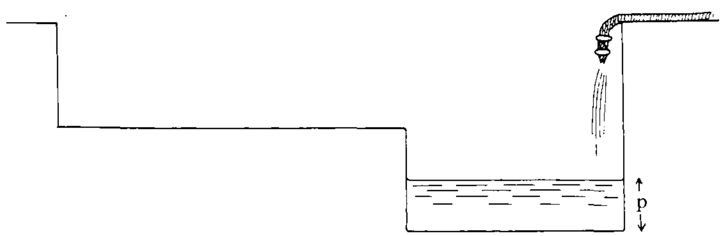
Brian

Al principio tiene que tener un radio de O. Como la circunferencia se va haciendo más grande, la cantidad de cinta necesaria para darle la vuelta aumenta y como la cinta va pasando por la cabeza a la misma velocidad, el radio aumentará a gran velocidad al principio, pero gradualmente más despacio.

Las descripciones y explicaciones de cómo cambia el radio en la bobina de la derecha con el tiempo a menudo son inseparables en las respuestas de los alumnos. Para ilustrar esto, y también para mostrar el tipo de respuestas aceptables, se acompañan 3 guiones, todos los cuales fueron calificados con los 4 puntos de la parte III).

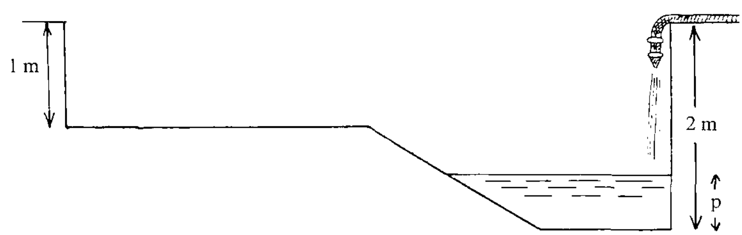
Rellenando una piscina

I). Se está rellenando una piscina rectangular con una manguera que vierte agua a una velocidad constante. A continuación se muestra una sección transversal de la piscina:

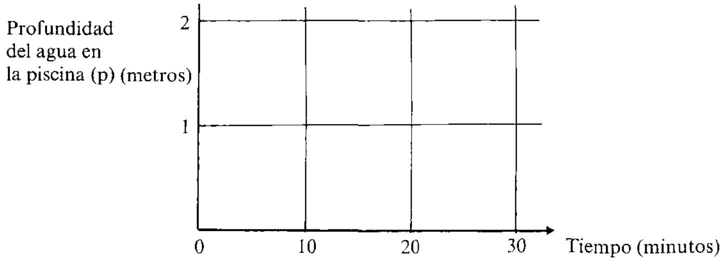


Describe completamente, con palabras, cómo varía con el tiempo la profundidad del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que comienza a llenarse la piscina vacía. ....
....
....
....

II). Una piscina rectangular diferente se rellena de una forma similar:



Haz una gráfica que muestre cómo varía con el tiempo la profundidad (p) del agua en el extremo más profundo de la piscina, a partir del momento en que la piscina vacía comienza a ser rellenada. Supón que la piscina tarda 30 minutos en llenarse hasta el borde.



Rellenando una piscina....... esquema de calificación

I). *Descripción mediante palabras de una relación funcional*

1 punto por afirmar que aumenta «constantemente» o «regularmente» para la primera parte del llenado.
1 punto por decir que hay un cambio en la velocidad a la cual aumenta.
1 punto por afirmar que p aumenta más lentamente en la segunda parte del llenado.
1 punto por afirmar que aumenta «uniformemente» o «regularmente» en la segunda parte del llenado.

II). *Traducción a forma gráfica de una función presentada pictóricamente*

1 punto si la primera parte de la gráfica es una curva.
1 punto si la primera parte es cóncava hacia abajo.
1 punto si la segunda parte es una recta con pendiente positiva.
1 punto si la gráfica comienza en (0,0), termina en (30,2) y hay un cambio en (x,1) donde $5 \leq x \leq 10$.

Si la gráfica consiste en más de dos partes, corregir la primera parte y la última y restar un punto del total obtenido.

Ignorar cualquier parte final que sea una recta horizontal mostrando un desbordamiento.

Para esta cuestión hay un máximo de 8 puntos posibles.

I). *Corrección de descripciones*

Paul

«Se hace en lo más profundo a una velocidad rápida y constante hasta que llega al trozo más ancho, luego comienza a rellenarse a una velocidad constante menor.»

La descripción de Paul no sólo considera el hecho de que aumenta a dos velocidades sino que además cada velocidad es constante. Fue calificado con los puntos correspondientes a esta parte.

Christopher

«Se llenará a una velocidad constante hasta el desnivel en que se llenará menos rápido.»

La descripción de Christopher considera de nuevo el cambio de velocidad. Sin embargo, aunque ha explicado que para la primera parte de la piscina, p aumenta a un ritmo constante, lo ha omitido para la segunda parte. Por lo tanto fue calificado con 3 puntos.

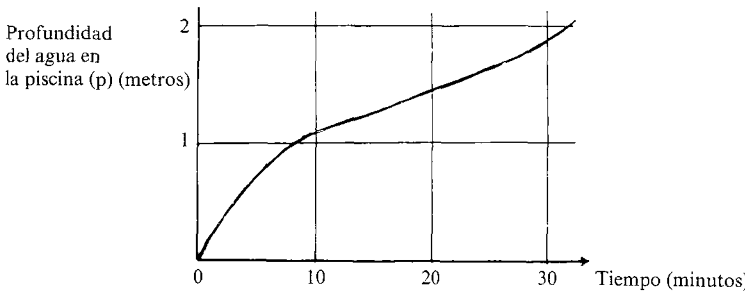
Mark

«Al principio la piscina se rellenará relativamente rápido hasta que entra agua en la otra parte, entonces irá tremendamente más lento.»

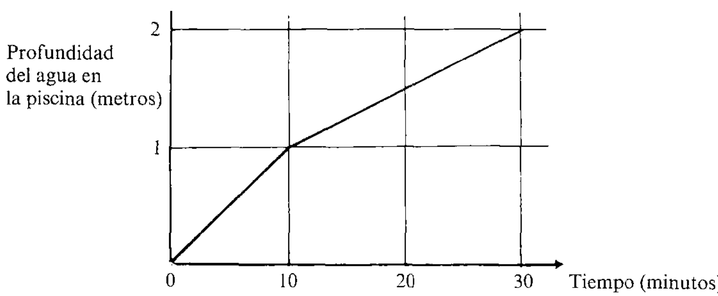
Mark ha observado el hecho de que aumenta a dos velocidades, pero no ha mencionado el hecho de que estas velocidades son lineales. Obtuvo 2 puntos.

II). *Corrección de gráficas*

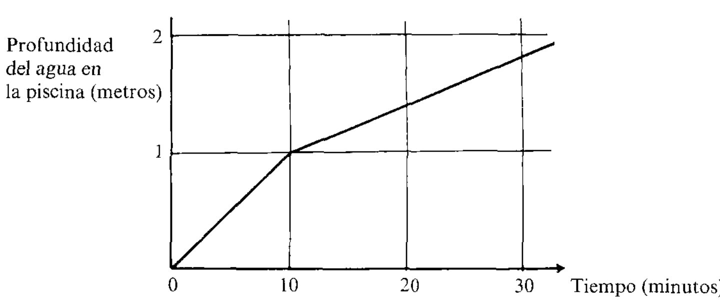
Simon



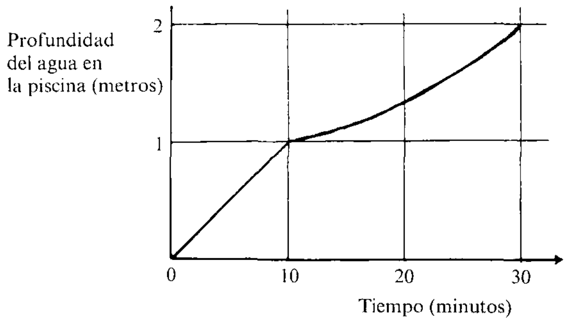
Mandy



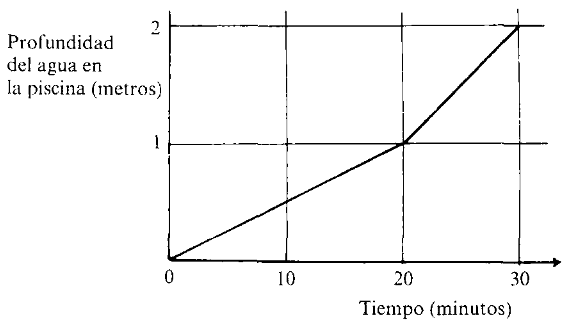
Beverley



Katrina



Andrew



La gráfica de Simon fue calificada con 3 puntos de los 4 posibles. Su gráfica no termina en (30,2) y muestra que el cambio ocurre después de 1 metro. Por lo demás, su gráfica es correcta.

Mandy fue calificada sólo con dos puntos, ya que en la primera parte de su gráfica no era una curva cóncava hacia abajo.

Beverley, Katrina y Andrew fueron calificados con 1 punto cada uno. La gráfica de Beverly es similar a la de Mandy pero no termina en (30,2). Katrina obtuvo su punto por empezar en (0,0), acabar en (30,2) y mostrar un cambio en (10,1). Andrew obtuvo su punto mostrando la segunda parte como una línea recta con pendiente positiva.

Una colección de problemas

INTRODUCCION

Esta colección está concebida como complemento de los materiales de clase presentados en los temas A y B. Está dividida en dos secciones, «Problemas» y «Gráficas y otros datos para interpretar».

La primera sección contiene 9 problemas que pueden ser resueltos gráficamente. Todos los problemas, excepto uno, van acompañados de una selección de indicaciones que pueden ayudar a los alumnos que necesiten una guía más detallada. Estos problemas son un reto y los alumnos deberían contar con que van a tener que esforzarse con cada uno de ellos durante algún tiempo antes de lograr resolverlos. No se pretende que los alumnos tengan que resolver todos los problemas, sino que se deberían seleccionar dos o tres y trabajarlos con alguna profundidad. Más adelante se dan algunas guías sobre la realización de esta selección.

La segunda sección presenta una colección de situaciones más cortas pensadas para proporcionar más práctica directa en la interpretación de datos, y en consecuencia estos ítems tienden a ser más fáciles que las situaciones presentadas en la resolución de los problemas de la primera parte. Esta sección no debería ser tratada como una colección que se tiene que trabajar de una forma concentrada y ordenada, sino más bien como una selección de ideas que se puede hojear y usar de vez en cuando, cuando se considere adecuado. No se dan soluciones para esta sección.

PROBLEMAS

Presentación sugerida

Como estos problemas originan bastantes consultas, es conveniente invitar a los alumnos a trabajar en parejas o grupos pequeños, de forma cooperativa y distendida. Es mucho más probable que los alumnos obtengan éxito con los problemas si se seleccionan con un nivel adecuado de dificultad y referidos a situaciones de algún interés. De esta forma es deseable ofrecer a cada grupo de alumnos una selección de problemas de los cuales ellos puedan elegir unos pocos (p. ej., tres) para trabajarlos en un período determinado (p. ej., una semana). La tabla siguiente debería ayudar a seleccionar los problemas adecuados, pero es conveniente leer cuidadosamente cada problema antes de tomar una decisión final.

Cada situación comienza con una «exposición del problema» que es seguida por una «lista de indicaciones» que ofrece una guía más detallada paso a paso. («El planeta desaparecido» es una situación más larga y complicada y no nos ha parecido aconsejable el formato problema-indicación.) Sugerimos que, inicialmente, sólo se presente el planteamiento del problema. Esto animará a los alumnos a explorar y discutir *sus propias ideas* para resolver los problemas. Si se quedan sin ideas o completamente atascados, entonces pueden suministrarse las indicaciones ya sea verbalmente o por escrito.

Se dan las soluciones completas de los problemas, pero estas soluciones no deberían ser contempladas como definitivas. (Muchos problemas se pueden resolver sin usar gráficas o álgebra). No se debería desanimar a los alumnos por conseguir una solución diferente de las propuestas.

Sumario de problemas

Diseñando un depósito de agua

Maximizar el volumen de un depósito que pueda ser construido a partir de una pieza cuadrada de metal. Esto implica maximizar la función cúbica $v = 4 \times .(1 - x^2)$ (donde $0 < \times < 1$), gráficamente.

El punto de no retorno

Hallar el tiempo y la distancia a la que puede volar un piloto antes de verse obligado a volver, suponiendo que sólo dispone de una cantidad de fuel limitada y que sopla un viento constante. Generalizar estos resultados para diferentes velocidades del viento. Esto implica dibujar parejas de gráficas lineales (utilizando el conocimiento de sus gradientes) y hallar sus puntos de intersección.

Vendiendo ventanas

Descubrir un modelo a partir de datos no clasificados y usarlo para descubrir un error y una regla detrás de los datos. Es útil una aproximación gráfica. La función tiene dos variables y es de la forma $p = a + 2l$, donde p es el precio de una ventana que tiene l pies de madera para el marco y contiene a pies cuadrados de cristal.

Elaborando una revista

Considerar las importantes decisiones que se deben tomar cuando se elabora una revista casera y decidir el precio de venta de cara a maximizar dos funciones cuadráticas: $b = (100 - p) \cdot p$ y $b = (100 - p)\,(p - 20)$.

El ferrocarril de Ffestiniog

Diseñar un cuadro horario factible que cumpla una lista de condiciones prácticas. El mejor método consiste en ajustar varias gráficas lineales espacio-tiempo juntas y leer los tiempos de llegada a varias estaciones.

Fechando el carbono

Descubrir el significado del término «vida media», y cómo debe ser fechado un descubrimiento arqueológico. Esto supone resolver una ecuación exponencial $a = 15{,}3 \times 0{,}886^t$ en la que se dan varios valores de a.

Como se supone que no se conocen logaritmos, se debe resolver gráficamente.

Diseñando una lata

Minimizar la superficie (y el coste) de metal utilizada al fabricar una lata cilíndrica con un volumen dado. Esto supone minimizar la función $s = 1.000/r + 2\pi r^2$ gráficamente.

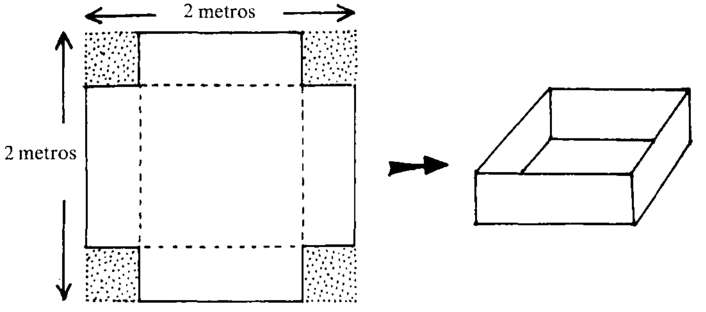
Fabricando ordenadores

Optimizar el beneficio obtenido por una pequeña empresa que ensambla y vende dos tipos de ordenadores. Este es un desafiante problema de programación lineal.

El planeta desaparecido

Una situación más amplia que requiere una variedad de destrezas en la resolución de problemas. El reconocimiento de modelos (usando gráficas) y el ajuste de fórmulas son una parte importante en la elaboración de hipótesis sobre las características de un planeta que, quizás, estaba situado entre Marte y Júpiter hace millones de años.

Diseñando un depósito de agua



Una pieza cuadrada de metal (2 × 2 m) debe ser convertida en un depósito de agua sin tapa superior, cortando cuadrados en sus cuatro esquinas, y levantando los cuatro rectángulos resultantes, para formar los laterales del depósito (como se muestra en la gráfica superior).

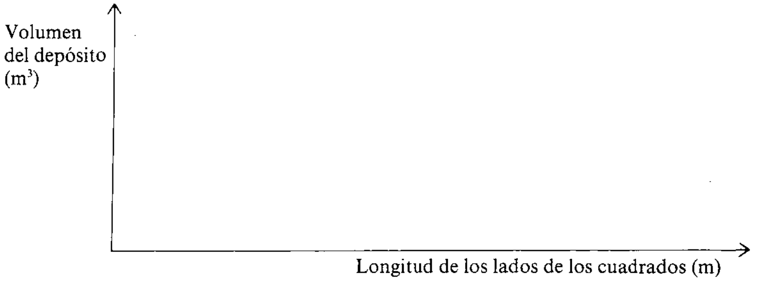
—¿Cómo dependerá el volumen final del depósito del tamaño de los cuadrados cortados de las esquinas?
Describe tu respuesta:
a) Dibujando una gráfica aproximada.
b) Explicando con palabras la forma de tu gráfica.
c) Intentando hallar una fórmula algebraica.

—¿De qué tamaños deberían cortarse las cuatro esquinas para que el volumen del depósito resultante fuera el mayor posible?

Diseñando un depósito de agua. Algunas indicaciones

— Imagínate que cortas unos cuadrados muy pequeños de las esquinas de la pieza de metal. Pliégala mentalmente. El volumen resultante, ¿será grande o pequeño? ¿Por qué?
Ahora imagina que cortas cuadrados cada vez más grandes ...
¿Cuáles son los cuadrados más grandes que puedes cortar?
¿Cómo será el volumen resultante?

— Dibuja una gráfica aproximada para describir tus ideas y explícala a continuación en palabras:



— Para hallar la fórmula, imagina que cortas un cuadrado de x metros por x metros de cada esquina. Busca una expresión para el volumen resultante.

— Ahora intenta dibujar una gráfica más precisa.
(Una escala adecuada es que 1 cm represente 1 m en el eje horizontal y que 1 cm represente 0,1 m^3 en el eje vertical.)
¿Qué tal era tu primer dibujo?

— Usa tu gráfica para hallar el tamaño con el que se deben cortar las esquinas para que el volumen resultante sea máximo.

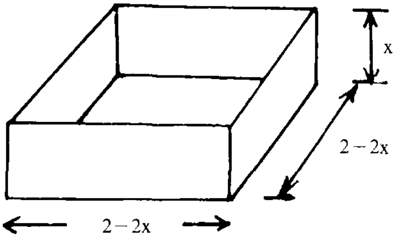
SOLUCIONES A «DISEÑANDO UN DEPOSITO DE AGUA»

Este problema es mejorado considerablemente si se adopta una aproximación práctica. El uso de tijeras y cartulinas cuadradas de 20 × 20 cm permitirán a los alumnos construir modelos a escala (1:10) de una serie de depósitos de agua diferentes. (Se necesitarán calculadoras para ayudar a calcular los volúmenes.) Retar a cada grupo de alumnos a que haga el depósito más grande (el de mayor capacidad) con la pieza de cartulina suministrada.

Inicialmente, es probable que pocos alumnos adopten una aproximación algebraica. Usualmente, los alumnos prefieren empezar por una serie de experimentos aleatorios hasta que han adquirido un fuerte sentido intuitivo de la situación, y sólo entonces toman en consideración la adopción de un método más sistemático. Esto no debería preocuparnos.

Abajo damos una solución gráfica del problema.

La relación entre el volumen de la caja (v m^3) y el tamaño del cuadrado ($x \times x$ m) cortado de cada esquina viene dado por



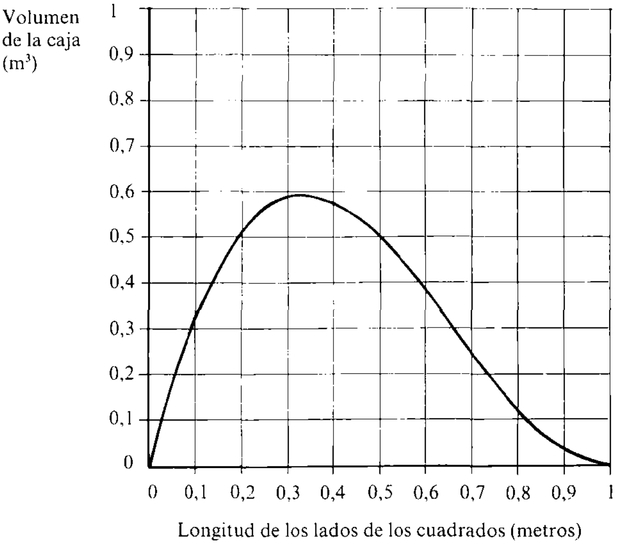
$$v = (2-2x)(2-2x)x = 4x(1-x^2)$$

$$(0 < x < 1)$$

Una tabla de valores sería:

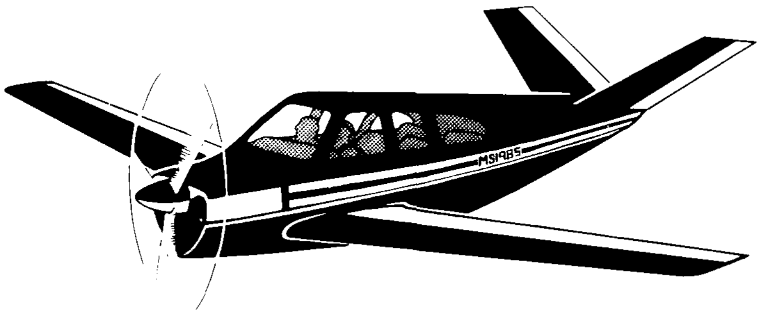
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
v	0	0,324	0,512	0,588	0,576	0,5	0,384	0,252	0,128	0,036	0

De la tabla resulta la siguiente gráfica:



El máximo volumen de 0,593 m^3 ocurre cuando $x = 0,33$ m.

El punto de no retorno



Imagina que eres el piloto de la avioneta del dibujo, que es capaz de viajar a una velocidad constante de 300 km/h en aire tranquilo (sin viento). Tienes combustible suficiente para cuatro horas.

Despegas del aeropuerto y, en el viaje de ida, eres ayudado por un viento de 50 km/h que aumenta tu velocidad de crucero con respecto a tierra a 350 km/h.

De repente, te das cuenta de que en el viaje de vuelta estarás volando contra el viento y por lo tanto bajarás a 250 km/.

—¿Cuál es la máxima distancia a la que puedes volar desde el aeropuerto, y estar seguro de que tienes combustible suficiente para hacer el viaje de regreso?

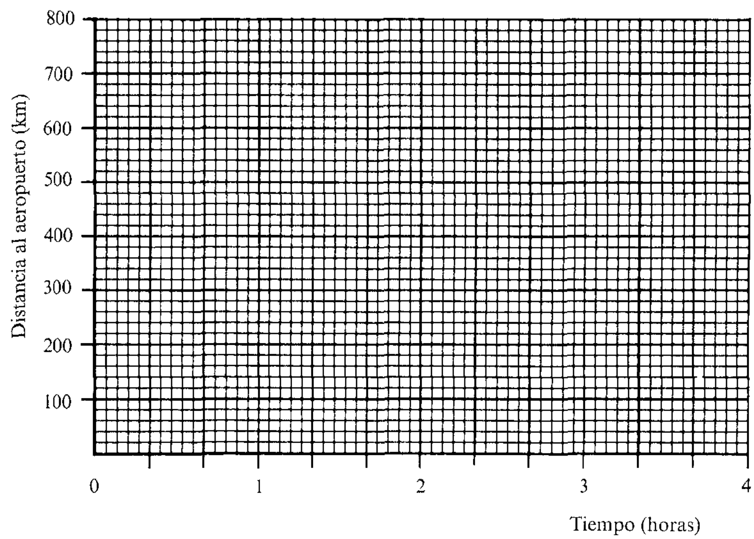
—Investiga estos «puntos de no retorno» para distintas velocidades del viento.

El punto de no retorno. Algunas indicaciones

Dibuja una gráfica que muestre cómo variará la distancia desde el aeropuerto con el tiempo.

¿Cómo puedes mostar una velocidad de ida de 350 km/h?

¿Cómo puedes mostrar una velocidad de regreso de 250 km/h?



— Usa tu gráfica para hallar la máxima distancia a la que puedes viajar desde el aeropuerto, y el momento en que deberías dar la vuelta.
— En la misma gráfica, investiga los «puntos de no retorno» para diferentes velocidades del viento. ¿Qué tipo de dibujo originan estos puntos en el papel? ¿Puedes explicar por qué?
— Supón que la velocidad del viento es v km/h, el punto de no retorno está a d km del aeropuerto y que el momento en el que debes dar la vuelta es t horas.

Escribe dos expresiones para la velocidad de ida de la avioneta, una referida a v y otra referida a d y t.

Escribe dos expresiones para la velocidad de regreso de la avioneta, una relacionada con v y otra relacionada con d y t.

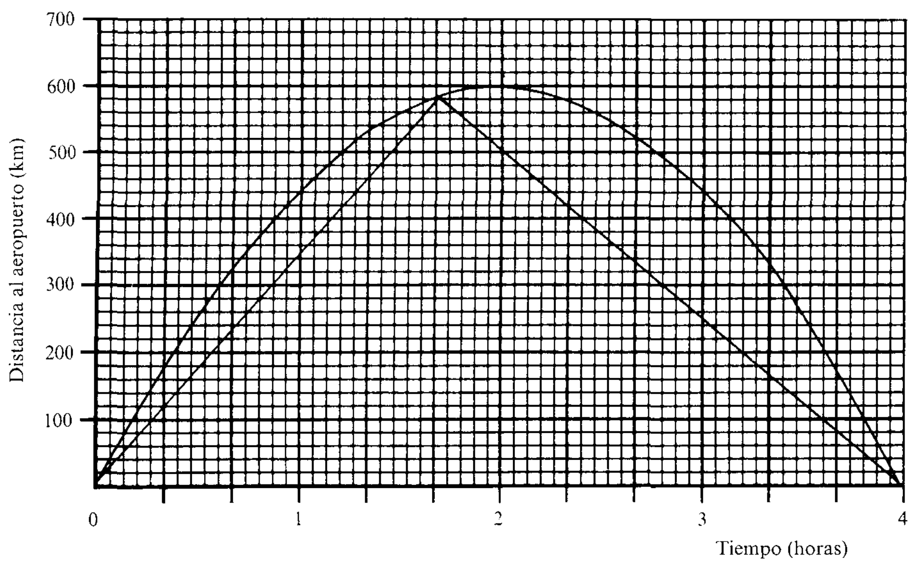
Intenta expresar d únicamente en función de t, eliminando v de las dos ecuaciones resultantes.

¿Explica esto el dibujo formado por tus puntos de no retorno?

SOLUCIONES A «EL PUNTO DE NO RETORNO»

Una aproximación gráfica a este problema es probablemente la más accesible. Con un viento de 50 km/h, el punto de no retorno puede ser hallado buscando la intersección de dos líneas rectas, una que pasa por el origen con un gradiente de 350 (km/h) y la otra por el punto (4,0) con un gradiente de -250 (km/h).

La máxima distancia a la que se puede viajar es aproximadamente 580 km (o más exactamente 583 km) y el piloto debe regresar después de 1 h 40 min.



Cuando se han hallado varios puntos de no retorno para distintas velocidades del viento, se puede ver que están situados en sobre la parábola

$$d = 150\,t\,(4 - t)$$

donde d km = máxima distancia recorrida desde el aeropuerto y t horas = momento en el que el avión debe dar la vuelta.

A continuación se deduce esta fórmula:

Supongamos que la velocidad del viento es v km/h.

La velocidad de ida de la avioneta será $= 300 + v = \dfrac{d}{t}$ (km/h) (1)

La velocidad de regreso $= 300 - v = \dfrac{d}{4-t}$ (km/h) (2)

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$600 = \frac{d}{t} + \frac{d}{4-t} \qquad d = 150\,t\,(4-t)$$

Otros resultados que se pueden obtener:

$$t = 2 - \frac{v}{150}$$

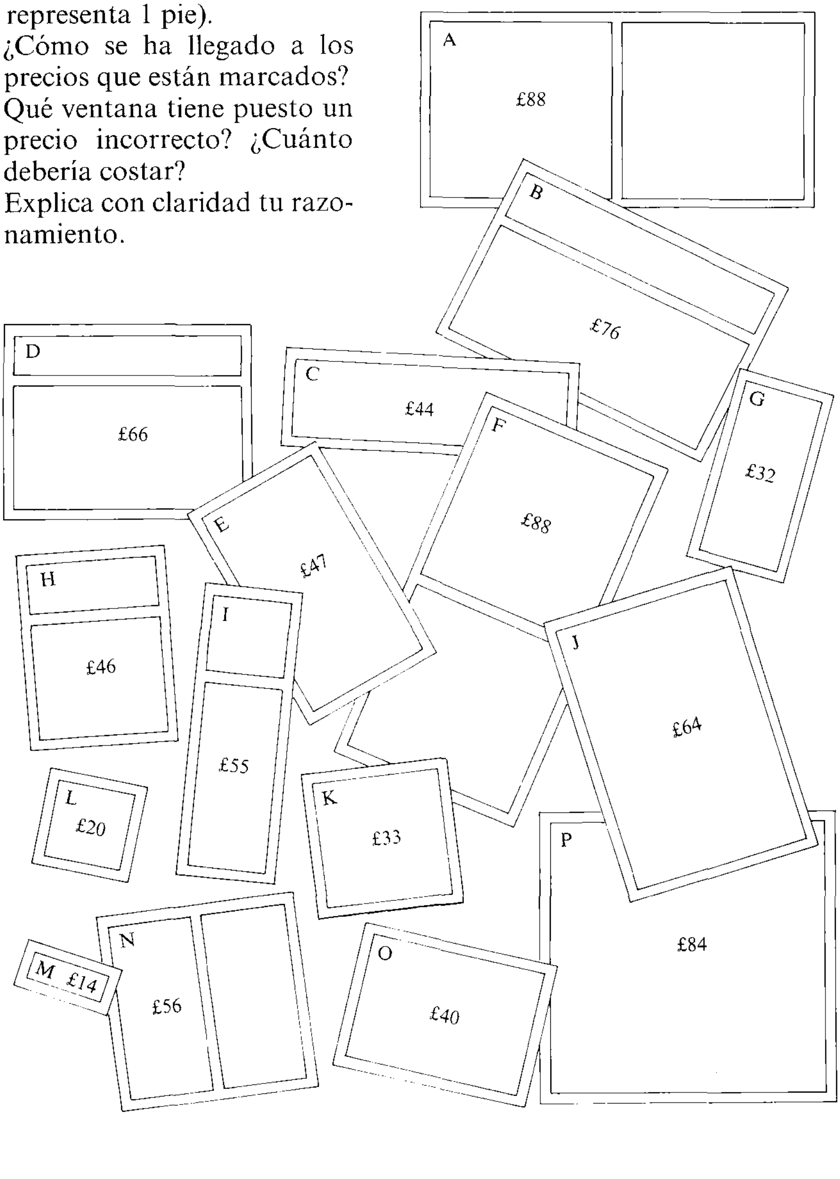
$$d = \frac{1}{150}(300+v)(300-v)$$

Estas fórmulas se pueden usar para determinar la hora a la que el avión debe dar la vuelta y la autonomía de vuelo del aparato para cualquier velocidad del viento.

Vendiendo ventanas

(Todas las ventanas de esta hoja están dibujadas a escala: 1 cm representa 1 pie).

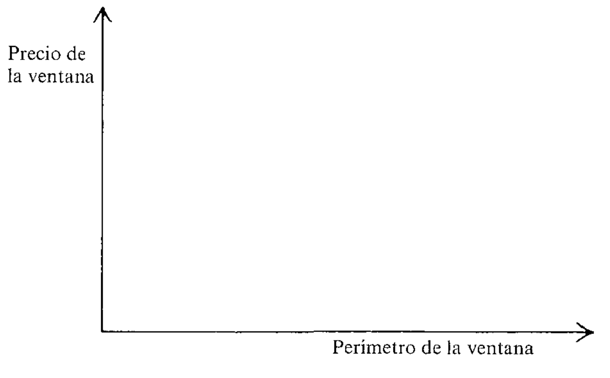
—¿Cómo se ha llegado a los precios que están marcados?
—Qué ventana tiene puesto un precio incorrecto? ¿Cuánto debería costar?
—Explica con claridad tu razonamiento.



Indicaciones a «Vendiendo ventanas»

— Escribe una lista de los factores que podrían afectar al precio de una ventana cualquiera:
por ejemplo: perímetro,
superficie de cristal necesaria,
....
....

— Usando tu lista, examina los dibujos de las ventanas de una forma sistemática.
— Haz una tabla mostrando todos los datos que creas que puedan ser relevantes. (Podeis repartir este trabajo entre los miembros del grupo.)
— ¿Qué factor o combinación de factores son los más determinantes en la determinación del precio?
Dibuja gráficas para comprobar tus ideas. Por ejemplo, si piensas que el perímetro es el factor más importante, puedes dibujar una gráfica del tipo:



— ¿Confirma la gráfica tus ideas? En caso contrario, mira otros factores.
— Intenta hallar un punto que no siga la tendencia general en tu gráfica. ¿Se ha puesto el precio de la ventana de forma incorrecta?
— Intenta hallar una fórmula que se ajuste a tu gráfica, y que sirva para predecir el precio de cualquier ventana a partir de sus dimensiones.

SOLUCIONES A «VENDIENDO VENTANAS»

En esta actividad, se invita a los alumnos a indagar en una colección de datos sin clasificar en un intento de descubrir alguna regla o modelo subyacente, que puedan ser usados posteriormente para descubrir errores y predecir nuevos resultados. La colección inicial de datos puede consumir bastante tiempo, pero si un grupo de alumnos trabaja cooperativamente, y divide tareas entre sus miembros, se pueden ahorrar mucho tiempo y esfuerzo. (A menudo los alumnos encuentran duro trabajar cooperativamente de forma que cada miembro del grupo presente una colaboración diferente al producto final. Es más corriente ver a cada miembro del grupo trabajando en todas las tareas.)

La tabla que se muestra a continuación recoge la información que se puede extraer de la hoja de trabajo.

Ventana	Anchura (pies)	Altura (pies)	Area de cristal ($pies^2$)	Perímetro (pies)	Longitud de madera del borde (pies)	Precio (libras)
A	8	4	32	24	28	88
B	6	4	24	20	26	76
C	6	2	12	16	16	44
D	5	4	20	18	23	66
E	3	5	15	16	16	47
F	4	8	32	24	28	88
G	2	4	8	12	12	32
H	3	4	12	14	17	46
I	2	6	12	16	18	55
J	4	6	24	20	20	64
K	3	3	9	12	12	33
L	2	2	4	8	8	20
M	2	1	2	6	6	14
N	4	4	16	16	20	56
O	4	3	12	14	14	40
P	6	6	36	24	24	84

Las gráficas pueden ser utilizadas para comprobar la validez de las relaciones entre estos factores y los precios totales. En realidad, el área de cristal utilizada y la longitud de la madera del borde dan correlaciones fuertes a partir de las cuales es posible identificar la ventana I como aquella que probablemente ha sido valorada de forma incorrecta.

Parece lógico pagar por la longitud de madera y por el área del cristal. De esta forma, si intentamos ajustar el modelo:

$$\text{Precio} = k_1 \times \text{área} + k_2 \times \text{longitud de madera usada}$$

Por sustitución obtendremos que $k_1 = 1$ y que $k_2 = 2$, en las unidades correspondientes. Por lo tanto, el cristal cuesta 1 libra por pie^2 y la madera del borde 2 libras por pie.

La ventana I tiene asignada por lo tanto un precio incorrecto, debería ser 48 libras, en lugar de 55 libras.

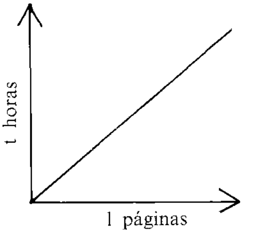
Elaborando una revista

Un grupo de amigos, aburridos y sin dinero, quieren sacar algún dinero elaborando y vendiendo su propia revista casera. Un profesor amable se ofrece a ayudar dando facilidades y papel gratis, al menos para los primeros números.

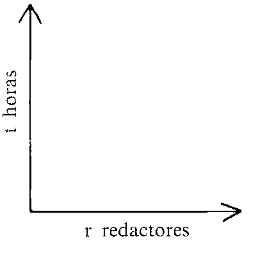
1. a) Haz una lista de todas las decisiones importantes que deberían tomar. Aquí tienes tres para empezar:

   ¿Cuál debe ser el tamaño de la revista? (l páginas).
   ¿Cuántos redactores harán falta? (r redactores)
   ¿Cuánto tiempo llevará escribirla? (t horas)

   b) Algunas de las cuestiones de tu lista dependerán de otras. Por ejemplo: Para un número fijo de personas, cuanto más larga sea la revista más se tardará en escribirla,



   Para un tamaño fijo de revista, cuantos más redactores haya...



   Completa el informe y haz una gráfica para ilustrarlo.

   Escribe otras relaciones que veas y haz gráficas en cada caso.

2. El grupo decide investigar cuántos compradores potenciales hay en el instituto, produciendo una revista de prueba y realizando una encuesta entre 100 alumnos preguntándoles: «¿Hasta cuánto dinero estarías dispuesto a pagar por esta revista?». Sus datos fueron los siguientes:

Precio de venta (p ptas.)	Gratis	20	40	60	80
Gente dispuesta a pagarlo (n personas)	100	82	58	40	18

   ¿A qué precio deberían cobrar la revista para conseguir el máximo beneficio?

3. Después de unos cuantos números, el profesor decide que debe cobrar a los alumnos 20 ptas. por revista por el papel y la reproducción. ¿A cuánto deberían cobrar ahora la revista?

Elaborando una revista. Algunas indicaciones

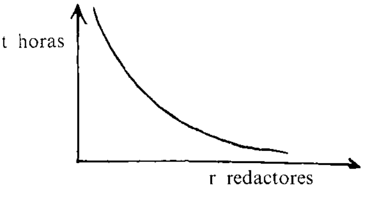
1. Esta es una lista más completa de los factores que deben ser tenidos en cuenta:
   ¿A quién va dirigida la revista? (¿a los compañeros del instituto?)
   ¿Sobre qué debe tratar? (deportes, noticias, humor...).
   ¿Cuántas páginas debería tener? (l páginas).
   ¿Cuántos redactores harán falta? (r redactores).
   ¿Cuánto tiempo llevará escribirla? (t horas).
   ¿Cuánta gente la comprará? (n personas).
   ¿Qué precio se debería fijar? (p pesetas).
   ¿Qué beneficio se obtendrá? (b pesetas).
   ¿Cuánto deberíamos gastar en publicidad? (a pesetas)
   —¿Puedes encontrar algún factor importante que no haya aparecido?
   —Haz gráficas para mostrar cómo depende t de r, r de l, n de p, b de p, n de a.
   —Explica con palabras la forma de cada una de tus gráficas.
2. —Dibuja una gráfica de la información dada en la tabla de datos.
   —Explica la forma de la gráfica.
   —¿Qué clase de relación hay?
   —¿Puedes hallar una fórmula que relacione n con p?.
   —A partir de este dato, haz una tabla de valores y una gráfica que muestre cómo el beneficio (b ptas.) depende del precio de venta (p. ptas.). (¿Puedes hallar una fórmula que relacione b y p?).
   —Usa tu gráfica para hallar el precio de venta que hace máximo el beneficio obtenido.
3. Elaborar cada revista cuesta 20 ptas.
   —Supón que fijamos el precio de venta en 40 ptas.
   —¿Cuánta gente comprará la revista? ¿Cuánto dinero ingresaremos por la venta de la revista? ¿Qué beneficio obtendremos en este caso?
   —Haz una tabla de datos que muestre cómo varían los ingresos, los costes de producción y el beneficio al variar el precio de venta de la revista.
   —Dibuja una gráfica a partir de tu tabla y úsala para decidir el mejor precio de venta de la revista.

SOLUCIONES A ELABORANDO UNA REVISTA

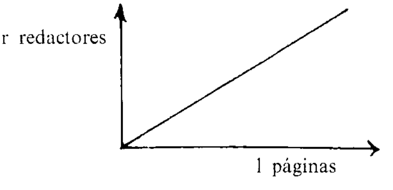
Esta situación comienza con una actividad bastante abierta de dibujo de gráficas, que debería ayudar a los alumnos a implicarse en la situación, y lleva a considerar dos problemas económicos específicos: cómo se puede sacar el máximo beneficio sin costes de producción y con ellos.

1. A continuación se dan algunas de las posibles relaciones que se pueden describir:

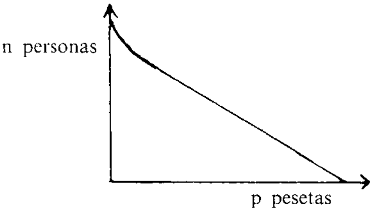
«Cuantos más redactores hay, menos tiempo llevará.»



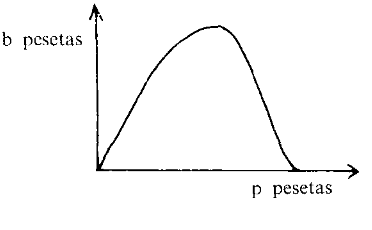
«Cuanto más larga sea la revista más redactores se necesitarán.»



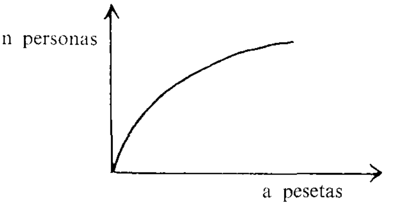
«Cuanto más se cobre, menos se venden.»



«Si la revista es gratuita o tan cara que no la compra nadie, no se obtendrán beneficios. El punto óptimo estará situado entre estos extremos.»

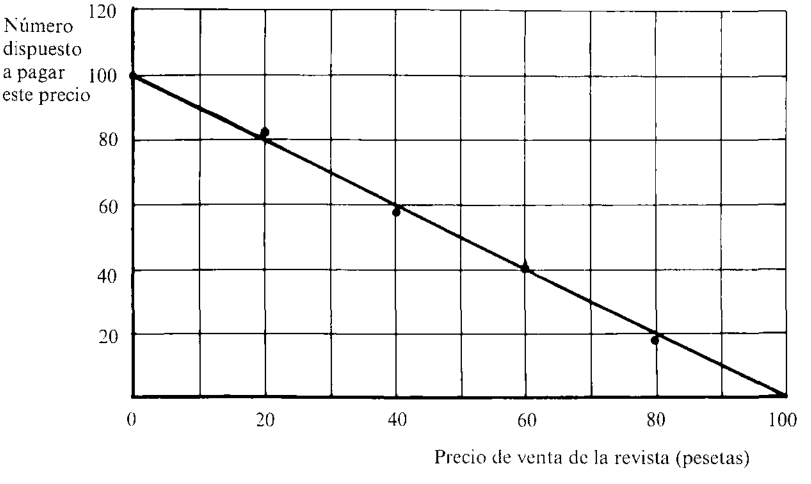


«Una pequeña cantidad de publicidad puede afectar a las ventas considerablemente, pero mayores cantidades tendrán un efecto relativamente menor debido a la saturación.»



Por supuesto, existen más posibilidaes.

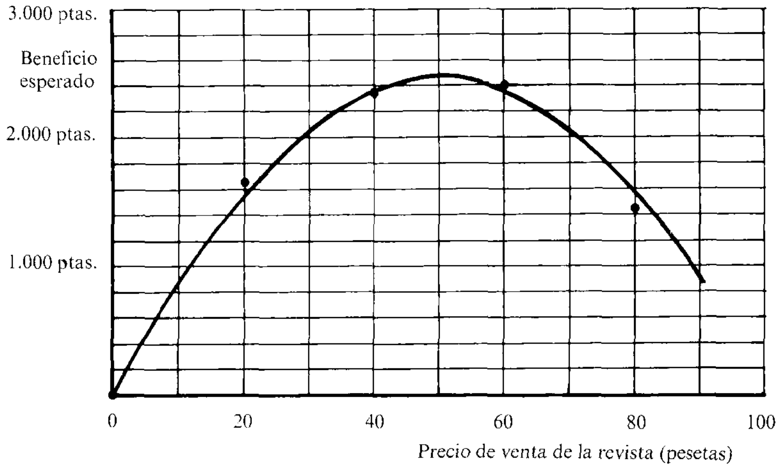
2. Cuando los alumnos hacen una gráfica para ilustrar cómo varía el «número de personas dispuestas a comprar la revista» cuando varía el precio de venta, deberían obtener una gráfica que se aproxima a la recta $n = 100 - p$ (n personas, p precio)



El beneficio obtenido para distintos precios de venta se puede obtener multiplicando valores de n por los correspondientes valores de p.

Precio de venta (p pesetas)	Gratis	20	40	60	80
N.º dispuesto a pagar ese precio (n personas)	100	82	58	40	18
Beneficio obtenido (b pesetas)	0	1.640	2.320	2.400	1.440

Esto debería llevar a la gráfica siguiente, de la cual se puede obtener el precio óptimo de venta (50 ptas.) y el correspondiente beneficio (2.500 ptas.).



(Algebraicamente, el beneficio obtenido (b ptas.) viene dado aproximadamente por:

$$b = n\,p = (100 - p)\,p$$

Esto se puede derivar para hallar el precio de venta óptimo).

3. El problema final implica tener en cuenta los costes de producción. La tabla anterior puede ser adaptada para dar:

Precio de venta (p pesetas)	Gratis	20	40	60	80
N. dispuesto a pagar (n personas)	100	82	58	40	18
Ingresos (i pesetas)	0	1.640	2.320	2.400	1.440
Costes de producción (c pesetas)	2.000	1.640	1.160	800	360
Beneficio ($b = i - c$ pesetas)	− 2.000	0	1.160	1.600	1.080

Algebraicamente ahora tenemos:

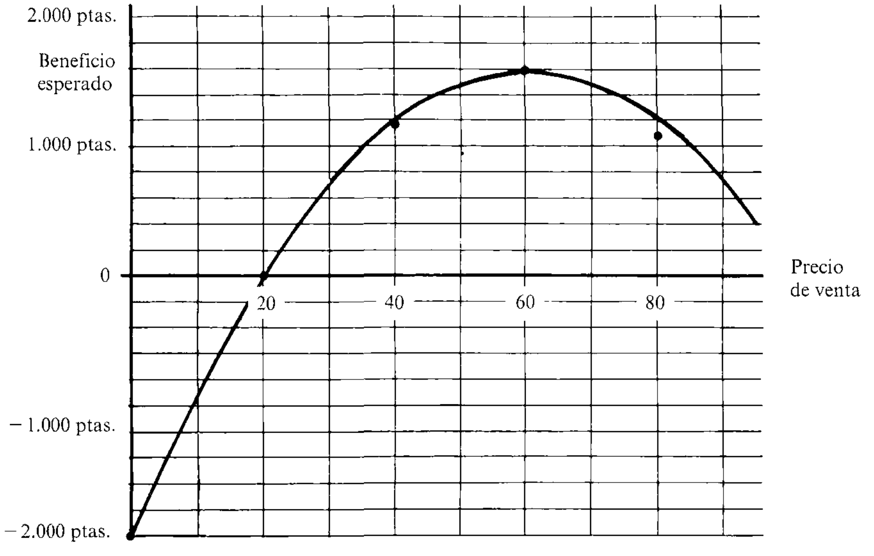
$n = 100 - p$	(como antes)
$i = n\,p$	(los ingresos se calculan multiplicando el precio de cada revista por el número de revistas vendidas a ese precio)
$c = 20\,n$	(publicar cada revista cuesta 20 ptas., por lo tanto la producción de n revistas costará 20 n)
$b = i - c$	(el beneficio obtenido = ingresos − costes de producción)

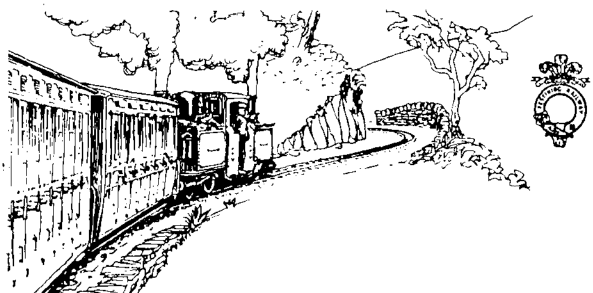
Esto se puede combinar para dar:

$b = n\ p - 20\ n = n\ (p - 20) = (100 - p).\ (p - 20)$

Lo cual nos lleva a la gráfica de la siguiente página.

A partir de esta gráfica, aparecería que el precio de venta de cada revista debería ser ahora de 60 ptas., resultando un beneficio de 1.600 ptas.





El ferrocarril de Ffestiniog

Esta línea de ferrocarril es una de las más famosas de Gales. Vuestra tarea consistirá en elaborar un cuadro horario factible para esta línea durante la temporada alta de turismo.

Se deben tener en cuenta las siguientes cuestiones:

— Hay 6 estaciones a lo largo de las 13½ millas del recorrido. (Las distancias entre ellas están marcadas en millas.)

— Tienen que operar tres trenes de vapor en un circuito cerrado. Esto significa que viajarán en ambos sentidos por la línea de Porthmadog a Blaenau Ffestiniog con una parada de 10 minutos en cada final de recorrido. (Esto permitirá a los conductores cambiar, etc.)

— Los tres trenes deben empezar y terminar cada día en Porthmadog.

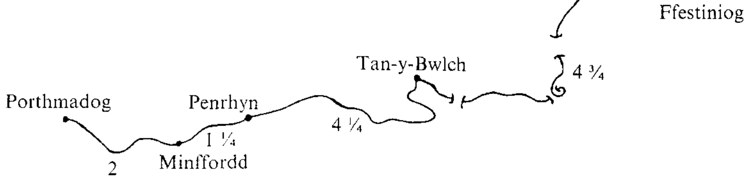
— La línea es de una sola vía. Esto supone que los trenes no pueden cruzarse, excepto en los lugares especialmente preparados para ello. (Deberás saber dónde son necesarios estos lugares. Intenta utilizar el menor número posible de lugares.)

— Si es posible, los trenes deben salir de las estaciones a intervalos regulares.

— El viaje de Porthmadog a Blaenau Ffestiniog es de 65 minutos (incluidas las paradas en las estaciones intermedias. Estas paradas son muy cortas y se pueden despreciar en el cuadro horario.)

— El primer tren del día sale a las 9.00 am de Porthmadog.

— El último tren debe volver a Porthmadog para las 5.00 pm. (Estas horas son más reducidas que las que operan de hecho.)



El ferrocarril de Ffestiniog... Algunas indicaciones

Usa una copia del papel para gráficas que tienes y dibuja una gráfica distancia-tiempo para el tren que sale a las 9.00 am de Porthmadog.

Muestra con cuidado:

— El viaje de ida desde Porthmadog a Blaenau Ffestiniog.
— El tiempo de espera en Blaenau Ffestiniog.
— El viaje de regreso desde Blaenau Ffestiniog a Porthmadog.
— El tiempo de espera en Porthmadog... y así sucesivamente.

¿Cuál es el intervalo entre los tiempos de salida desde Porthmadog para el tren anterior?

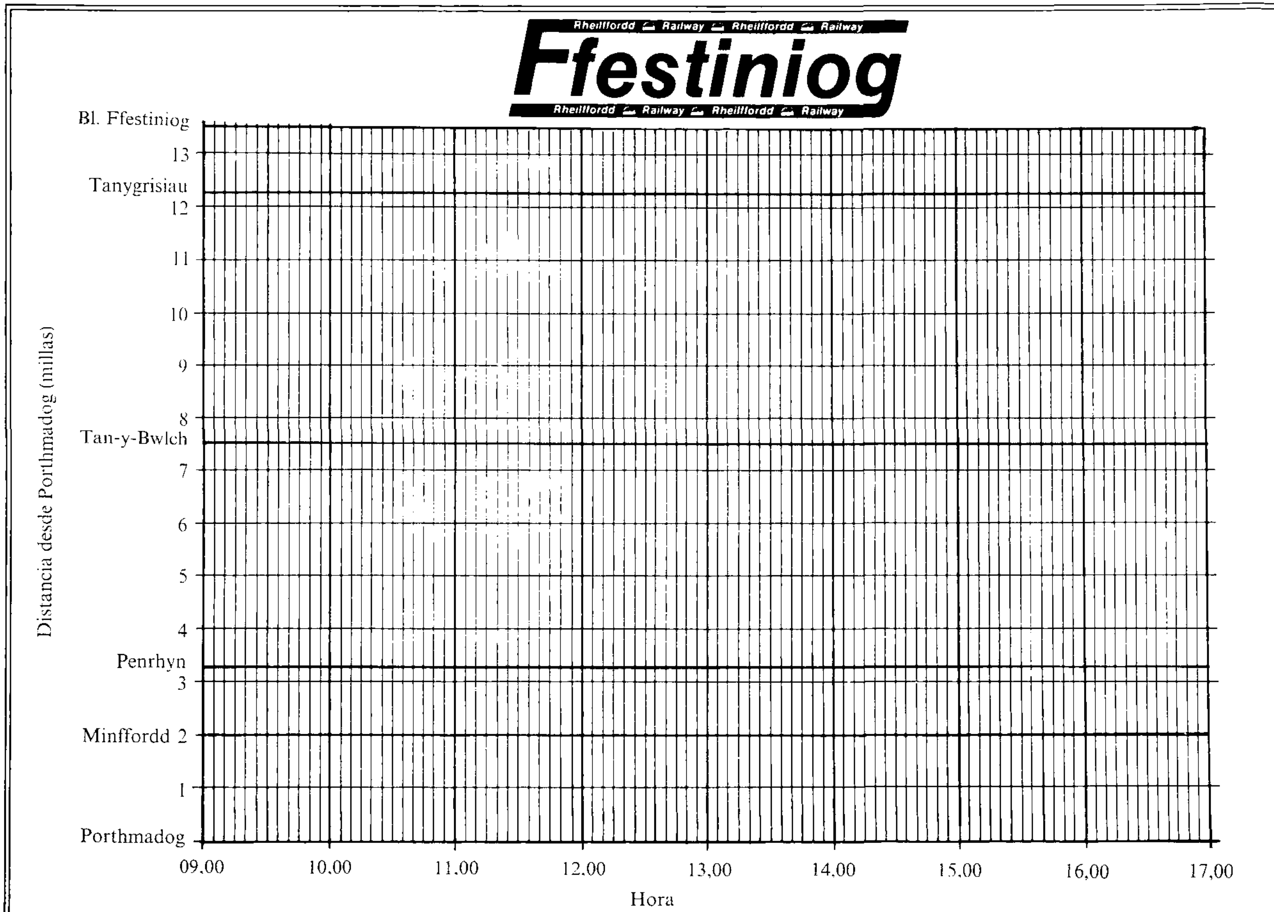
¿Cómo podemos intercalar los otros dos trenes entre estas horas de salida?

Dibuja gráficas similares para los otros dos trenes.

¿Cuántos lugares de cruce hacen falta? ¿Dónde tienen que estar?

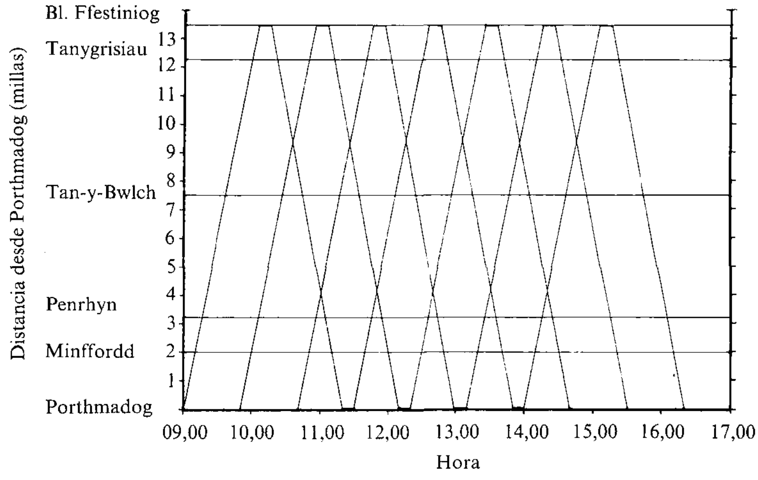
A partir de tu gráfica, completa la siguiente tabla horaria:

Millas	Estación		Cuadro Horario						
0	Porthmadog	s	09,00						
2	Minffordd	s							
3 ¼	Penrhyn	s							
7 ½	Tan-y-Bwlch	s							
12 ¼	Tanygrisiau	s							
13 ½	Blaenau Ffestiniog	ll							
0	Blaenau Ffestiniog	s							
1 ¼	Tanygrisiau	s							
6	Tan-y-Bwlch	s							
10 ¼	Penrhyn	s							
11 ½	Minffordd	s							
13 ½	Porthmadog	ll							


Rheilffordd Railway Rheilffordd Railway
Ffestiniog
Rheilffordd Railway Rheilffordd Railway
Bl. Ffestiniog
13
Tanygrisiau
12
11
10
9
8
Tan-y-Bwlch
7
6
5
4
Penrhyn
3
Minffordd 2
1
Porthmadog
Distancia desde Porthmadog (millas)
09.00
10.00
11.00
12.00
13.00
14.00
15.00
16.00
17.00
Hora

SOLUCIONES A «EL FERROCARRIL DE FFESTINIOG»

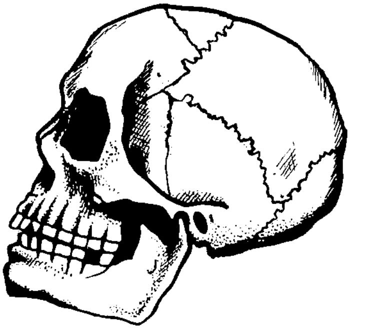
El gráfico inferior satisface todas las condiciones. Son necesarios dos cruces, situados aproximadamente a 4,2 y 9,4 millas de Porthmadog. Los trenes salen de las estaciones a intervalos regulares de 50 minutos.



Esto nos da el siguiente cuadro horario:

Millas	Estación		Cuadro horario						
0	Porthmadog	s	09,00	09,50	10,40	11,30	12,20	13,10	14,00
2	Minffordd	s	09,10	10,00	10,50	11,40	12,30	13,20	14,10
3 ¼	Penrhyn	s	09,15	10,05	10,55	11,45	12,35	13,25	14,15
7 ½	Tan-y-Bwlch	s	09,35	10,25	11,15	12,05	12,55	13,45	14,35
12 ¼	Tanygrisiau	s	10,00	10,50	11,40	12,30	13,20	14,10	15,00
13 ½	Blaenau Ffestiniog	ll	10,05	10,55	11,45	12,35	13,25	14,15	15,05
0	Blaenau Ffestiniog	s	10,15	11,05	11,55	12,45	13,35	14,25	15,15
1 ¼	Tanygrisiau	s	10,20	11,10	12,00	12,50	13,40	14,30	15,20
6	Tan-y-Bwlch	s	10,45	11,35	12,25	13,15	14,05	14,55	15,45
10 ¼	Penrhyn	s	11,05	11,55	12,45	13,35	14,25	15,15	16,05
11 ½	Minffordd	s	11,10	12,00	12,50	13,40	14,30	15,20	16,10
13 ½	Porthmadog	ll	11,20	12,10	13,00	13,50	14,40	15,30	16,20

Fechando el Carbono



Esta es una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto antiguo (como un hueso, un mueble, una tabla), midiendo la cantidad de Carbono 14 que contiene.

Mientras están vivos, los animales y plantas tienen una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando mueren disminuye por la radiactividad.

La cantidad a de Carbono 14 en un objeto t miles de años después de muerto viene dada por la fórmula:

$$a = 15{,}3 \times 0{,}886^t$$

(La cantidad «a» mide la velocidad de desintegraciones de átomos de Carbono 14 y se mide en «desintegraciones por minuto por gramo de carbón [dmg]».)

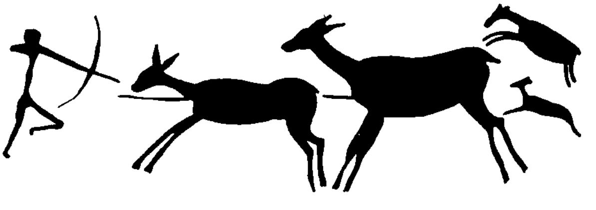
1. Imagina que tienes dos muestras de madera. Una está cogida de un árbol reciente y la otra de una muestra de carbón de leña hallado en Stonehenge y que tiene 4000 años.

¿Cuánto Carbono 14 contiene cada muestra? (Responde en dmg.)

¿Cuánto tardará la cantidad de Carbono 14 de cada muestra en hacerse la mitad?

Estas dos respuestas deberían ser iguales, (¿por qué?) y se llama vida media del Carbono 14.

2. El carbón vegetal de las cuevas de Lascaux en Francia dio una cantidad de 2,34 dmg. Estima la fecha de formación del carbón y da una fecha para las pinturas encontradas en la cueva.

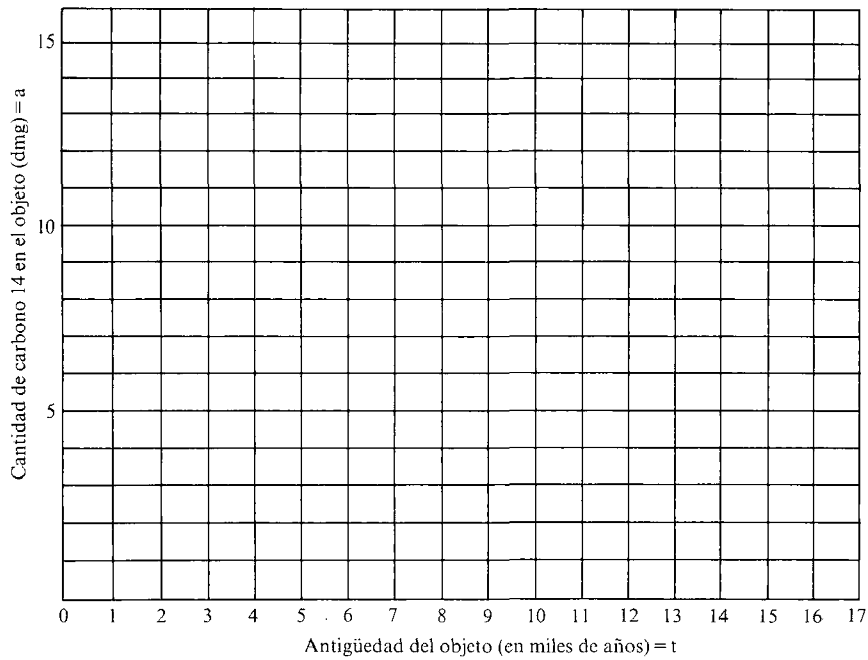


3. Los huesos A y B son x e y miles de años antiguos respectivamente. El hueso A contiene el triple de Carbono 14 que el hueso B. ¿Qué puedes decir sobre x e y?

Fechando el Carbono. Algunas indicaciones

Usando una calculadora, dibuja una tabla de valores y haz una gráfica para mostrar cómo varía la cantidad de Carbono 14 con el tiempo.

t (miles de años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	17
a (dmg)													



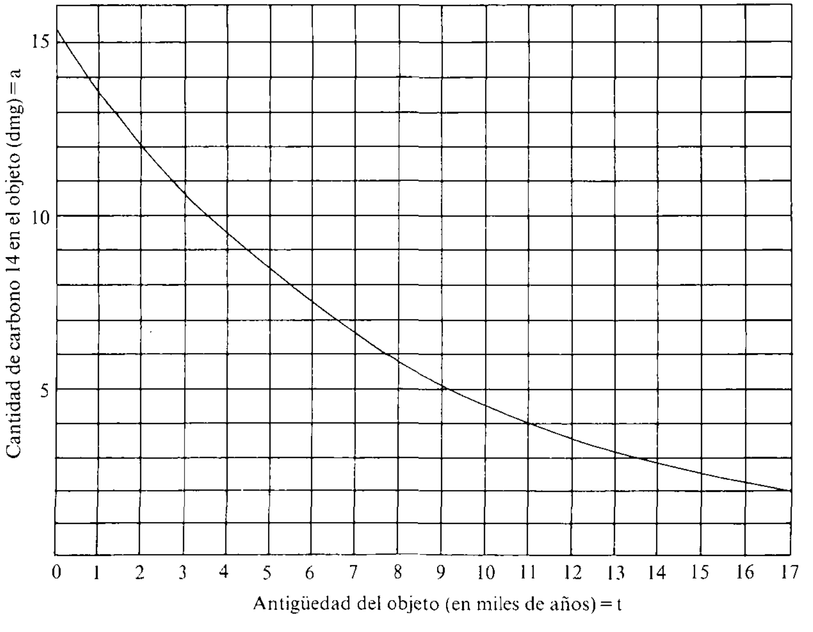
Usa tu gráfica para responder a las preguntas.

SOLUCIONES A «FECHANDO EL CARBONO»

Si los alumnos tienen dificultades con la notación exponencial utilizada, remitirles al cuadernillo B3, «Funciones exponenciales», donde aparecen cuestiones similares en el contexto de «Fármacos hipnóticos».

La siguiente tabla y gráfica ilustran cómo disminuye la cantidad de Carbono 14 en un objeto.

Antigüedad del objeto (miles de años)	Cantidad de C14 (dmg)	Antigüedad del objeto (miles de años)	Cantidad de C14 (dmg)
0	15,30	9	5,15
1	13,56	10	4,56
2	12,01	11	4,04
3	10,64	12	3,58
4	9,43	13	3,17
5	8,35	14	2,81
6	7,40	15	2,49
7	6,56	16	2,21
8	5,81	17	1,95



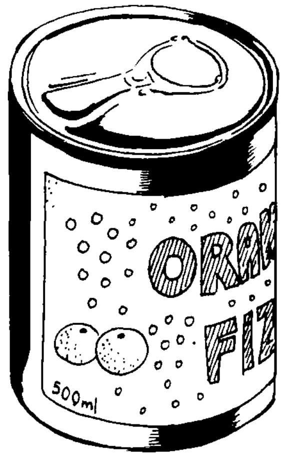
1. La madera reciente contendrá 15,3 dmg de Carbono 14. La muestra de Stonehenge contendrá 9,43 dmg de Carbono 14.

En ambos casos, la cantidad de Carbono 14 se reducirá a la mitad al cabo de 5.700 años aproximadamente. (Los alumnos sin conocimientos de logaritmos tendrán que descubrir esto gráfica o numéricamente mediante ensayo y error.)

2. El carbón vegetal de las cuevas es de hace aproximadamente 15.500 años, y por lo tanto las pinturas datan de 13.500 AC aproximadamente.

3. La relación $y = x + 9$ es aproximadamente correcta. (En otras palabras, el Carbono 14 se reduce a la tercera parte en 9.000 años aproximadamente.)

Diseñando una lata



Se tiene que fabricar una lata cilíndrica de aluminio capaz de contener medio litro de líquido. El volumen de la lata debe ser por lo tanto de 500 cm^3.

—Hallar el radio y la altura de la lata que utilice menos aluminio, y, por lo tanto, la que sea más barata de fabricar. (Esto es, busca cómo hacer mínima la superficie exterior de la lata).

Explica claramente las suposiciones que hagas.

—¿Qué forma tiene tu lata? ¿Conoces algunas latas que estén hechas con esta forma? ¿Puedes pensar en alguna razón práctica por la cual la mayoría de las latas no tienen esta forma?

Diseñando una lata... Algunas indicaciones

— Sabes que el volumen de la lata debe ser 500 cm^3.
Si haces la lata muy alta, ¿tendrá que ser ancha o estrecha?
Si haces la lata muy ancha, ¿tendrá que ser alta o baja? ¿Por qué?
Haz una gráfica aproximada que describa cómo tienen que estar relacionados la altura y el radio de la lata.

— Sea r cm el radio de la lata y h cm la altura.
Escribe expresiones algebraicas que den:
- el volumen de la lata,
- la superficie exterior de la lata en función de h y r (no olvides incluir la base y la tapa).

— Usando el hecho de que el volumen de la lata debe ser 500 cm^3 puedes intentar:
A Hallar algunos posibles pares de valores para r y h (hazlo de un modo sistemático si puedes). Para cada uno de estos pares, halla la superficie correspondiente.
B Intenta hallar una expresión simple para la superficie en términos de r, eliminando h de tus ecuaciones.

— Ahora dibuja una gráfica para mostrar cómo varía la superficie de la lata cuando aumenta el radio r, y usa esa gráfica para hallar el valor de r que haga mínima esa superficie.

— Usa el valor de r para hallar el correspondiente valor de h ¿Qué observas de tus resultados? ¿Qué forma tiene la lata?

SOLUCIONES A «DISEÑANDO UNA LATA»

La mayoría de los alumnos probablemente encontrarán lo más natural comenzar evaluando posibles pares de valores para el radio (r cm) y la altura (h cm) de la lata usando:

$$V = \pi r^2 h \qquad - \qquad 1)$$
$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

y luego evaluar las superficies resultantes utilizando:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad 2)$$
$$A = 2\pi r (r + h)$$

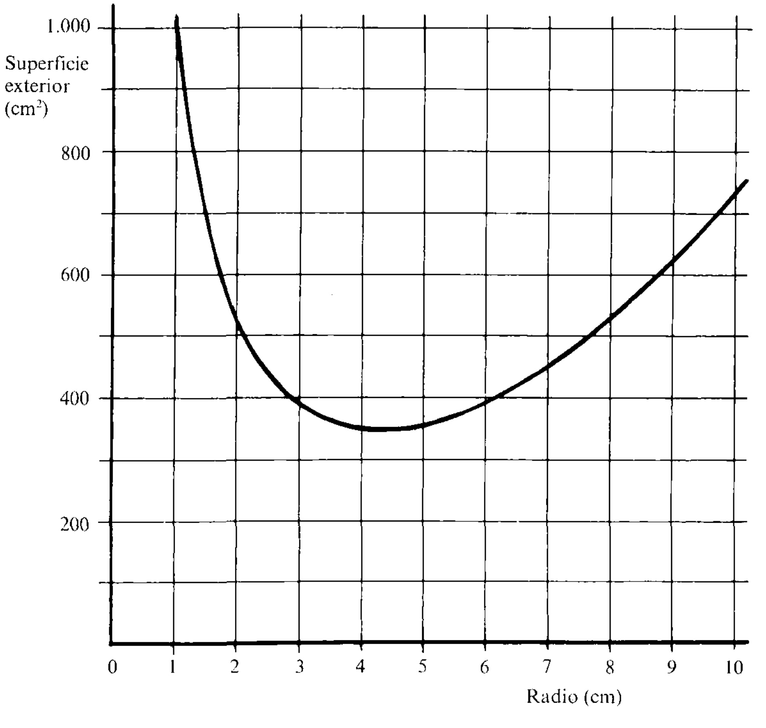
Esta aproximación llevará al siguiente tipo de tabla:

r (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h (cm)	∞	159	39,8	17,7	9,9	6,4	4,4	3,3	2,5	2	1,6
A	∞	1.006	525	390	350	357	393	450	527	620	728

Una aproximación más sofisticada con más manipulación algebraica pero menos cálculo numérico, constituye en sustituir
$\pi\,\mathrm{rh} = \dfrac{500}{\mathrm{r}}$ (de 1) en (2), obteniendo:

$$A = \frac{1000}{r} + 2\pi\, r^2$$

(Esto lleva a la necesidad de calcular valores intermedios para h en la tabla).
Esta tabla origina la gráfica que se muestra en la página siguiente.



La superficie mínima es por lo tanto aproximadamente 350 cm^2 (más exactamente, 349 cm^2) y esto ocurre cuando el radio es 4,3 cm y la altura es 8,6 cm. Esto significa que, cuando se mira de lado, la lata es «cuadrada». (Observar que es muy pequeña la variación de la superficie de la lata si el radio varía entre 3 cm y 6 cm.) Las latas más estrechas son más fáciles de sujetar y ésta puede ser la razón por la que se comercializan tan pocas latas «cuadradas».

Fabricando ordenadores

Imagina que llevas una pequeña empresa que ensambla y vende dos tipos de ordenadores: el modelo A y el modelo B (la versión más barata). Sólo tienes capacidad para fabricar 360 ordenadores en total en una semana.

La siguiente tabla da todos los datos relevantes relativos a los empleados de tu compañía:

Profesión	Número de personas	Descripción del trabajo	Sueldo	Horas de trabajo
Ensamblador	100	Unir las distintas partes de los ordenadores	20.000 pts. p. semana	36 horas semanales
Inspector	4	Examinar y corregir los defectos en los ordenadores antes de la venta	24.000 pts. p. semana	35 horas semanales

La siguiente tabla muestra todos los datos relevantes relativos a la fabricación de los ordenadores.

	Modelo A	Modelo B
Tiempo total de ensamblaje en horas de trabajo por ordenador	12	6
Tiempo total de inspección y corrección en minutos de trabajo por ordenador	10	30
Coste de los componentes para cada ordenador	16.000 pts	12.800 pts
Precio de venta de cada ordenador	24.000 pts	17.600 pts

Actualmente, estais fabricando y vendiendo semanalmente 100 ordenadores del modelo A y 200 del modelo B.

—¿Qué beneficio estáis obteniendo actualmente?

—¿Cuántos ordenadores de cada clase deberíais fabricar para mejorar esta situación?

—¿Te ayudaría el que hicieras desaparecer algún empleo innecesario?

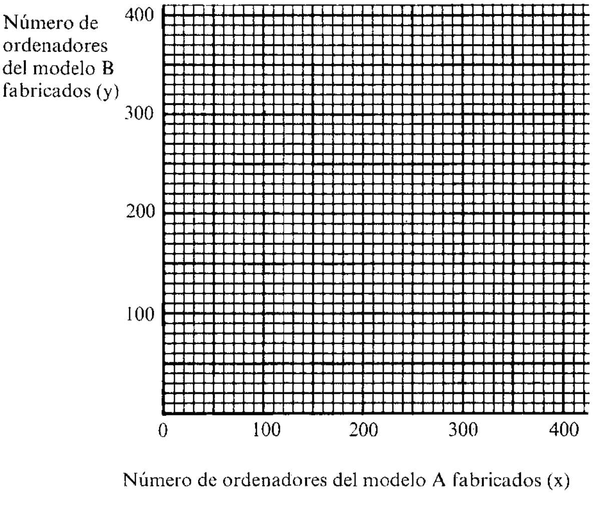
Fabricando ordenadores... Algunas indicaciones

1. Supongamos que fabricas 100 ordenadores del modelo A y 200 del modelo B semanalmente:

   —¿Cuánto pagas en sueldos?
   —¿Cuánto pagas por los componentes?
   —¿Cuáles son tus ingresos semanales?
   —¿Qué beneficio obtienes?

2. Ahora supongamos que fabricas x del modelo A e y del modelo B cada semana.
   —Escribe tres inecuaciones de x e y:
   - considerando el tiempo que lleva ensamblar los ordenadores y el tiempo total que tienen disponible los ensambladores.
   - considerando el tiempo que lleva inspeccionar y corregir los defectos en los ordenadores y el tiempo total que tienen disponible los inspectores.

Dibuja una gráfica y marca la región que satisface las tres inecuaciones:



3. Encuentra una expresión que te dé el beneficio obtenido con x ordenadores del modelo A e y del modelo B.
4. ¿Qué puntos de tu gráfica hacen que tu beneficio sea el máximo?

SOLUCIONES A «FABRICANDO ORDENADORES»

1. La factura salarial de una semana es:

$$20.000 \times 100 + 24.000 \times 4 = 2.096.000 \text{ ptas.}$$

Los gastos para los componentes de 100 modelos A y 200 modelos B es:

$$16.000 \times 100 + 12.800 \times 200 = 4.160.000 \text{ ptas.}$$

Los ingresos semanales por la venta de los ordenadores son:

$$24.000 \times 100 + 17.600 \times 200 = 5.920.000 \text{ ptas.}$$

El beneficio total es:

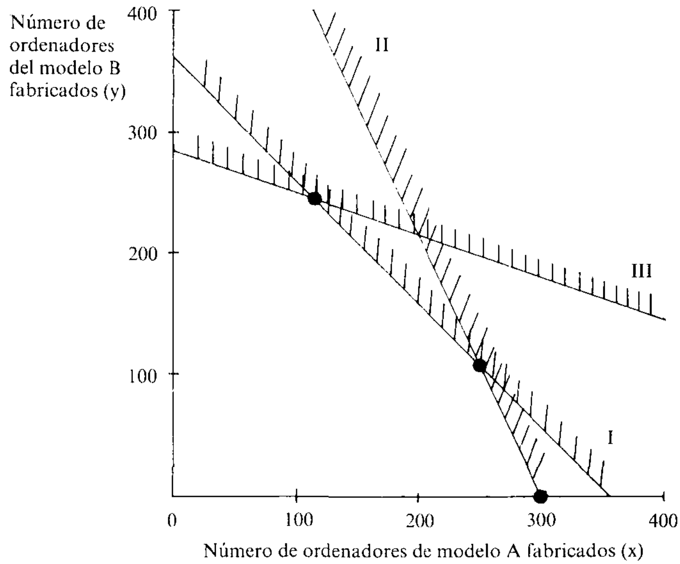
$$5.920.000 \text{ ptas} - 2.096.000 \text{ ptas} - 4.160.000 \text{ ptas} = -336.000 \text{ ptas.}$$

¡Por lo tanto en la situación actual el negocio está perdiendo 336.000 ptas. semanales!

2. Si se hicieran x modelos A e y modelos B, como únicamente se puede fabricar un máximo de 360 ordenadores semanales:

	$x + y \leqslant 360$	I)
El tiempo en horas que lleva ensamblar los ordenadores es $12x + 6y$.	$12x + 6y \leqslant 3.600$	
El tiempo disponible por los ensambladores es $100 \times 36 = 3.600$	$2x + y \leqslant 600$	II)
El tiempo en minutos que lleva inspeccionar los ordenadores es $10x + 30y$	$10x + 30y \leqslant 8.400$	
El tiempo disponible para la inspección es $4 \times 35 \times 60 = 8.400$	$x + 3y \leqslant 840$	III)

En la gráfica de la página siguiente, están sombreadas las regiones que *no* nos interesan:



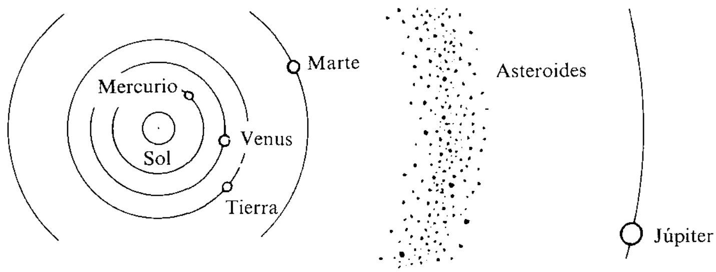
3. El beneficio b ptas., obtenido con x modelos A e y modelos B viene dado por:

$$b = (24.000\ x + 17.600\ y) - (16.000\ x + 12.800\ y) -$$
$$- (100 \times 20.000 - 24.000 \times 4) = 8.000\ x + 4.800\ y - 2.096.000$$

4. El máximo beneficio de 400.000 ptas., semanales se obtiene con 240 modelos A y 120 modelos B semanales. (En este caso, es interesante observar que un inspector no es necesario. Si se prescinde de él, el beneficio aumentará en 24.000 ptas. semanales.

El planeta desaparecido

En nuestro sistema solar hay nueve planetas mayores y muchos otros cuerpos como cometas y meteoritos. Los cinco planetas más próximos al Sol están representados en el siguiente diagrama:



Entre Marte y Júpiter hay un cinturón de fragmentos rocosos llamados asteroides. Podrían ser los restos de un décimo planeta desintegrado hace muchos años. Le llamaremos planeta X. En estas hojas, intentarás descubrir todo lo que puedas sobre el planeta X buscando los modelos que siguen los otros planetas.

¿A qué distancia del Sol estaba el planeta X antes de desintegrarse?

La tabla inferior compara las distancias al Sol de algunos planetas con la de la Tierra. (Así, por ejemplo, Saturno está 10 veces más lejos del Sol que la Tierra. Los científicos escriben esto habitualmente como 10 U.A., 10 Unidades Astronómicas).

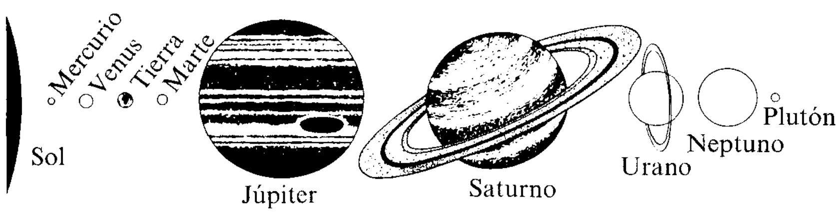
Planeta	Distancias relativas al Sol aproximadamente (las exactas figuran entre paréntesis)	
Mercurio	?	
Venus	0,7	(0,72)
Tierra	1	(1)
Marte	1,6	(1,52)
Planeta X	?	
Júpiter	5,2	(5,20)
Saturno	10	(9,54)
Urano	19,6	(19,18)
Neptuno	?	
Plutón	?	

—¿Puedes descubrir algún modelo en la secuencia de distancias relativas aproximadas?

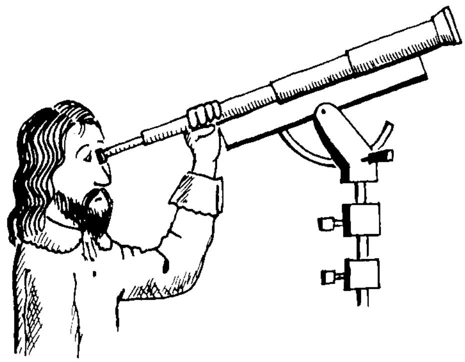
—¿Puedes usar este modelo para predecir las figuras desaparecidas?
—¿A qué distancia crees que estaba el planeta X del Sol? (La Tierra está a 93 millones de millas)
—Comprueba tu tabla, una vez completada, con los de la hoja de datos planetarios. ¿Dónde parece que se rompe el modelo?

HOJA DE DATOS PLANETARIOS

Planeta	Distancia media al Sol (millones de millas)	Diámetro en millas	Velocidad a la que viaja por el espacio (mph)	Velocidad a la que gira un punto del ecuador (mph)	Tiempo que tarda en dar una vuelta al Sol (años)	Tiempo que tarda en girar una vez sobre sí mismo	Número de lunas
Tierra	93	7.926	66.641	1.040	1	23,9 horas	1
Júpiter	484	88.700	29.216	28.325	11,86	9,9 horas	12
Marte	142	4.217	53.980	538	1,88	24,6 horas	2
Mercurio	36	3.032	107.132	7	0,24	58,7 días	0
Neptuno	2.794	30.800	12.147	6.039	164,8	15,8 horas	2
Plutón	3.674	3.700	10.604	77	248	6,3 días	0
Saturno	887	74.600	21.565	22.892	29,46	10,2 horas	10
Urano	1.784	32.200	15.234	9.193	84,02	10,7 horas	5
Venus	67	7.521	78.364	4	0,61	243 días	0



El planeta desaparecido ..... alguna información histórica



En 1772, cuando las distancias planetarias sólo eran conocidas en términos relativos, un astrónomo alemán llamado David Titius descubrió el mismo modelo que tú has estado mirando. Esta «ley» fue publicada por Johann Bode en 1778 y es comúnmente conocida como «Ley de Bode». Bode utilizó el modelo, como lo has hecho tú, para predecir la existencia de un planeta a 2,8 U.A. del Sol (2,8 veces la distancia de la Tierra al Sol) y hacia finales del siglo XVIII comenzaron a buscarlo de forma sistemática. Esta búsqueda resultó infructuosa hasta el día de Año Nuevo de 1801, en que el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi observó un asteroide muy pequeño, al que llamó Ceres, a una distancia de 2,7 U.A. del Sol —sorprendentemente próxima a la prevista por la Ley de Bode—. (Desde entonces, miles de pequeños asteroides han sido descubiertos a distancias entre 2,2 y 3,2 U.A. del Sol.)

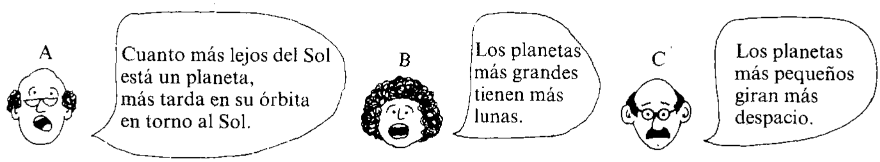
En 1781, la ley de Bode fue aparentemente confirmada de nuevo cuando William Herschel descubrió el planeta Urano, orbitando alrededor del Sol a una distancia de 19,2 U.A., nuevamente muy próxima a los 19,6 U.A. que predice la ley de Bode. Animados por esto, otros astrónomos usaron la «ley» como punto de partida en la búsqueda de otros planetas lejanos.

Sin embargo, cuando finalmente fueron descubiertos Neptuno y Plutón, a 30 U.A. y 39 U.A. del Sol respectivamente, se comprobó que, a pesar de su utilidad pasada, la ley de Bode no gobierna realmente el diseño del sistema solar.

El planeta desaparecido (2)

Mira la hoja de datos planetarios que contiene siete estadísticas de cada planeta.

Los siguientes científicos están haciendo hipótesis sobre las relaciones existentes entre estas estadísticas:

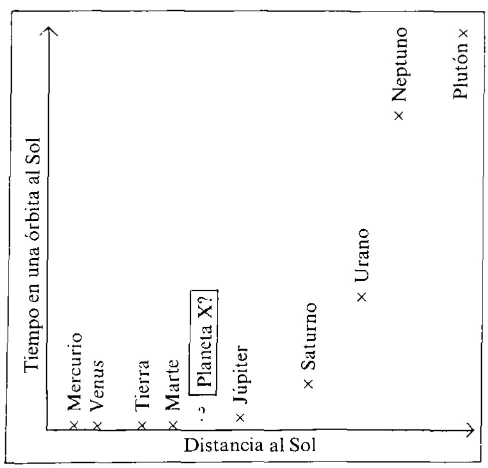


—¿Estás de acuerdo con estas hipótesis? ¿Qué tienen de ciertas? (Usa la hoja de datos.)

—Inventa una lista con tus propias hipótesis. Haz una gráfica para ilustrar cada una de ellas.

Una forma de comprobar una hipótesis es dibujar un diagrama. Esto te dará alguna idea de la fuerza que tiene la relación entre las dos variables.

Por ejemplo, aquí hay un diagrama para examinar la hipótesis del científico A:



Observa que:

Aquí parece haber una relación entre la distancia del planeta al Sol y el tiempo que lleva dar una órbita. La hipótesis parece ser confirmada.

De esta forma, podemos predecir el tiempo orbital para el Planeta X. Debería estar entre el de Marte (2 años) y el de Júpiter (12 años). (Para un planteamiento más exacto sería necesaria una gráfica más exacta.)

— Dibuja diagramas para comprobar tus propias hipótesis. ¿Qué más se puede decir sobre el Planeta X? ¿Qué es lo que no se puede saber?

El planeta desaparecido (3)

Tras muchos años de observación, el famoso matemático Johann Kepler (1571-1630) encontró que el tiempo que tarda el planeta en dar una órbita en torno al Sol (T años) y su distancia media al Sol (R millas) están relacionadas por la fórmula:

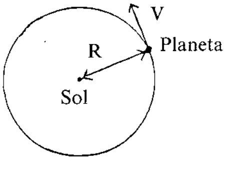
$\frac{R^3}{T^2} = K$ donde K es un valor constante

— Usa una calculadora para comprobar esta fórmula a partir de la hoja de datos, y halla el valor de la constante K.
Usa tu valor de K para hallar una estimación más exacta del tiempo orbital (T) del planeta X. (Halla el valor de R para el planeta X en la primera de estas hojas.)

— Decimos que las órbitas de los planetas son «casi circulares». Asumiendo que esto es así, puedes hallar otra fórmula que relacione:

- La distancia media del planeta al Sol (R millas).
- El tiempo para una órbita (T años).
- La velocidad a la que el planeta viaja a través del espacio (V millas por hora)?

(Indicación: Hallar cuánto se mueve el planeta durante una órbita.
Puedes hacerlo de dos formas distintas usando R, T y V.)
(Advertencia: T está en *años* y V en millas por *hora.)*



— Usa una calculadora para comprobar tu fórmula a partir de la hoja de datos.
Usa tu fórmula, junto con lo que ya sabes de R y T, para encontrar una estimación más exacta de la velocidad del planeta X.

— Asumiendo que los planetas son esféricos, puedes hallar una relación entre:

- El diámetro de un planeta (d millas).
- La velocidad a la cual gira un punto en el ecuador (v millas por hora).
- El tiempo que tarda un planeta en girar una vez sobre sí mismo (t horas).

Comprueba tu fórmula con la hoja de datos.

SOLUCIONES A «EL PLANETA DESAPARECIDO»

Hoja 1

Se puede utilizar el siguiente modelo para predecir las distancias relativas de los planetas al Sol:

0,55		0,7		1		1,6		2,8		5,2		10		19,6		38,8		77,2
	+0,15		+0,3		+0,6		+1,2		+2,4		+4,8		+9,6		+19,2		+38,4	

Este modelo predice que el planeta X está a 2,8 × 93 millones de millas (= 260,4 millones de millas) del Sol. La hoja de información histórica describe cómo se utilizó originalmente este modelo para predecir las posiciones de los asteroides y otros planetas.

La secuencia actual más precisa es:

0.39, 0.72, 1, 1.52, 2.9, 5.20, 9.54, 19.18, 30.1, 39.5

Esto muestra que el modelo parece romperse para Mercurio, Neptuno y Plutón. Es interesante observar que si no existiera Neptuno, el modelo se ajustaría mejor.

Hoja 2

El científico A está haciendo una hipótesis que siempre es correcta. La científica B está haciendo una hipótesis que es cierta con frecuencia.

El científico C está haciendo una hipótesis que no es cierta nunca.

Si llamamos a las 7 variables de la hoja de datos R, d, V, v, T y t, respectivamente, existirán fuertes correlaciones en el grupo de variables R, V y T y en el grupo de d, v y t, pero no existirán entre miembros de grupos distintos. La variable m no está estrechamente relacionada con ninguna de las otras variables.

Sólo hemos hallado datos referentes a R para el planeta X. El método gráfico sólo produce información adicional mirando V y T.

Hoja 3

De la hoja de datos, se puede ver que para cualquier planeta:

$$\frac{R^3}{T^2} = 8{,}06 \times 10^{23} \; (\pm 0{,}5\ \%)$$

Donde $R=$ la distancia media en millas de un planeta al Sol

y $T=$ el tiempo en años que tarda un planeta en dar una órbita en torno al Sol.

Usando 260,4 millones de millas ($=2{,}604\times10^8$ millas) como la distancia estimada del planeta X, obtenemos que su período orbital será:

$$T=\sqrt{\frac{(2{,}604\times10^8)^3}{8{,}06\times10^{23}}}=4{,}68 \text{ años ó } 4 \text{ años } 8 \text{ meses}$$

(El trabajo hubiera sido más fácil si R se hubiera tomado en millones de millas, dando $k=806000$).

Suponiendo que las órbitas planetarias son casi circulares, obtendríamos:

$$C=2\pi R$$
$$C=8760\ VT$$

donde $C=$ circunferencia de una órbita, en millas

$V=$ velocidad a la que se mueve el planeta por el espacio en millas por hora.

(El número 8760 es un factor de conversión de millas por hora a millas por año.)

Una forma de comprobar esta fórmula a partir de la hoja de datos es calcular $\frac{8760VT}{2\pi R}$ para cada planeta. Si las órbitas fueran circulares deberíamos encontrar que todas nuestras respuestas son iguales a la unidad. (De hecho, obtenemos que los valores están en torno a 0,998.)

La velocidad del planeta X se puede obtener ahora sustituyendo $T=4{,}68$, $R=2{,}604\times10^8$ en

$$V=\frac{2\pi R}{8760T}\ 40000 \text{ (mph)}$$

Suponiendo que los planetas son esféricos, obtendremos que $\pi d=vt$ donde $d=$ diámetro del planeta, $v=$ velocidad a la que gira un punto del ecuador, $t=$ tiempo para que el planeta rote una vez.

Esto se corresponde bastante bien con la información presentada en la hoja de datos.

GRAFICAS Y OTROS DATOS PARA INTERPRETAR

La siguiente sección contiene una variada colección de situaciones más cortas dedicadas a proporcionar una práctica adicional en la interpretación de datos.

Esperamos que este material proporcione un recurso útil para ser utilizado de vez en cuando. No se dan soluciones para esta sección.

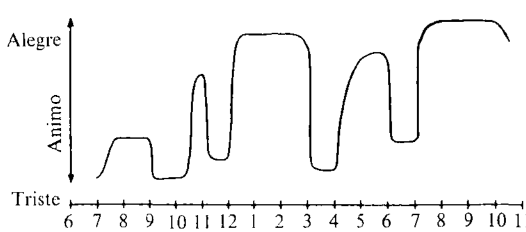
Sentimientos

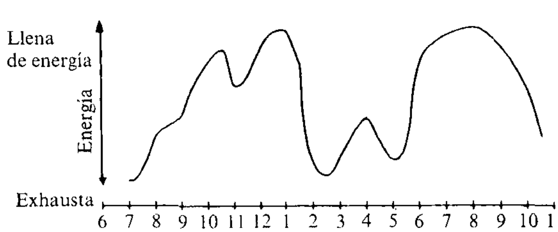
Estas gráficas muestran la variación de los sentimientos de una chica inglesa durante un día típico.

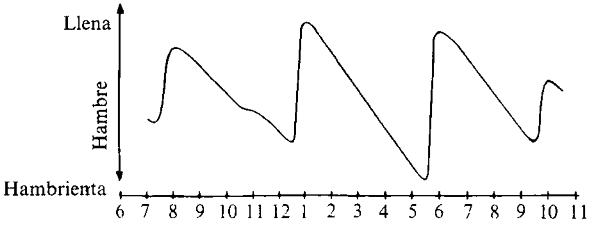
El cuadro horario de sus actividades en ese día es el siguiente:

7,00 am Despertarse
8,00 am Ir a la escuela
9,00 am Asamblea
9,30 am Ciencias
10,30 am Descanso
11,00 am Matemáticas
12,00 am Comida
1,30 pm Juegos
2,45 pm Descanso
3,00 pm Francés
4,00 pm Volver a casa
6,00 pm Hacer los deberes
7,00 pm Jugar a la pelota
10,30 pm Ir a la cama

a) Intenta explicar la forma de cada gráfica lo más completamente posible.
b) ¿Cuántas comidas hace?
¿Cuál es la principal?
¿Come en los descansos?
¿Cuánto tarda en la comida de mediodía?







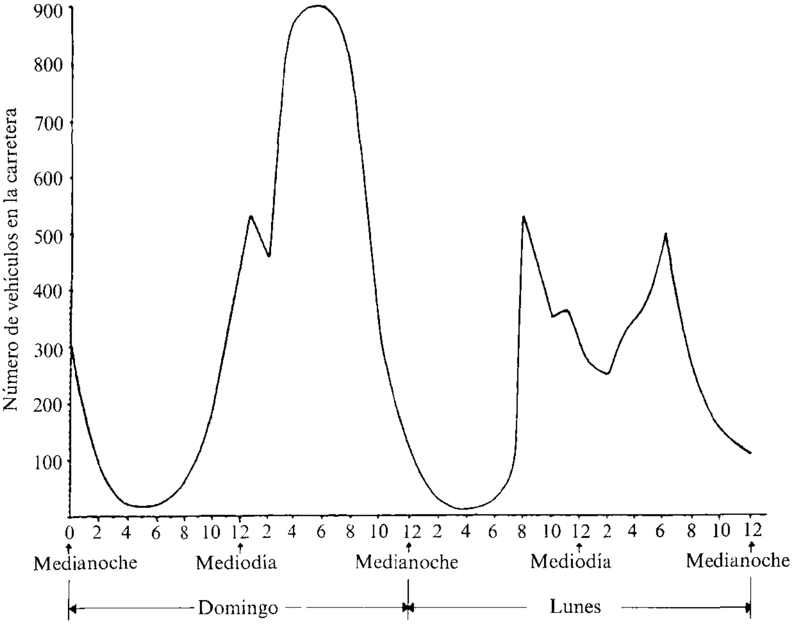
¿Qué asignatura es la que más le gusta?
¿Cuándo está cansada y deprimida? ¿Por qué?
Haz más preguntas como éstas y dáselas a tu compañero para que las resuelva.

c) Haz un cuadro horario con tus actividades de un día y las gráficas que muestren cómo cambian tus sentimientos durante ese día. Comprueba si tu compañero puede interpretarlos correctamente.

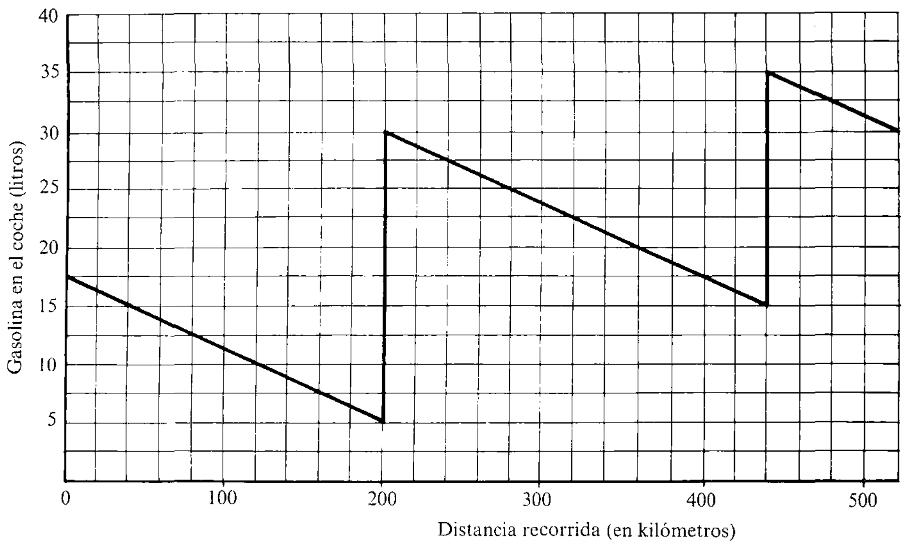
El informe sobre tráfico

Se realizó un informe para estudiar el volumen del tráfico que circula por una carretera concreta. Los resultados se publicaron mediante la gráfica que muestra el número de coches que usa la carretera en cada momento durante un domingo y un lunes típicos de junio.

1. Intenta explicar, lo más completamente posible, la forma de la gráfica.
2. Compara la gráfica del domingo con la del lunes. ¿Hay algo que resulte sorprendente?
3. ¿Dónde crees que podría estar situada esta carretera? (Da un ejemplo de una carretera que conozcas, que pueda dar una gráfica como ésta.)



El viaje por autopista



La gráfica anterior muestra cómo varía la gasolina que hay que el depósito de mi coche durante un viaje por una autopista.

Escribe un párrafo para explicar la forma de la gráfica. En particular, responde a las siguientes cuestiones:

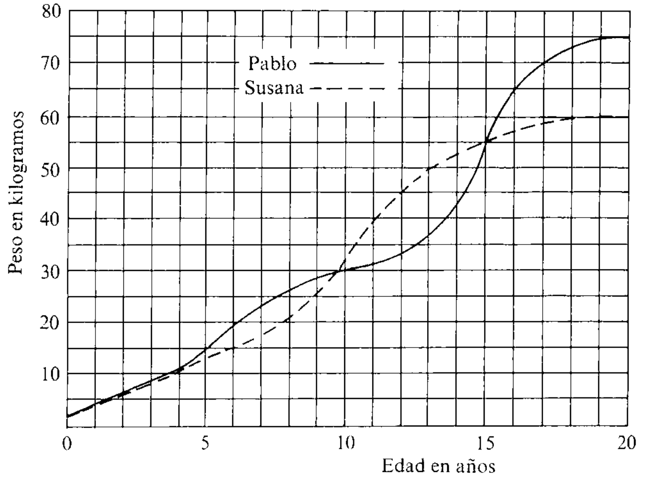
1. ¿Cuánta gasolina tenía en el depósito después de 240 km?
2. En mi depósito caben unos 40 litros. ¿Cuándo estaba lleno más de medio depósito?
3. ¿En cuántas gasolineras paré?
4. ¿En qué gasolinera eché más gasolina? ¿Por qué lo sabes?
5. Si no hubiera parado en ninguna parte, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?
6. Si sólo hubiera parado una vez, ¿dónde habría ocurrido?
7. ¿Cuánta gasolina usé para los primeros 200 km?
8. ¿Cuánta gasolina usé para todo el viaje?
9. ¿Cuántos litros consume mi coche cada 100 km en esta autopista?

   Después de 520 km, abandono la autopista y conduzco 80 km por carreteras comarcales y luego 20 km por ciudad, donde tengo que estar parando y arrancando. En las carreteras comarcales mi coche consume 9 litros por 100 km y en ciudad 12,5 litros por 100 km.

10. Haz una gráfica que muestre el resto de mi viaje.

Curvas de crecimiento

Pablo y Susana son dos personas más o menos típicas. Las siguientes gráficas comparan cómo han variado sus pesos durante sus primeros 20 años.



Compara la forma de las dos gráficas. Escribe todo aquello que consideres importante.

Ahora responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo aumentó de peso cada uno entre los 11 y los 18 años?
2. ¿Cuándo era mayor el peso de Pablo que el de Susana? ¿Cómo lo sabes?
3. ¿Cuándo tenían los dos el mismo peso?
4. ¿Cuándo estaba engordando Susana más rápidamente?
   ¿Cómo puedes decirlo a partir de la gráfica?
   ¿A qué velocidad engordaba entonces? (Responde en kg por año).
5. ¿Cuándo engordaba Pablo más rápidamente? ¿Con qué rapidez lo hacía?
6. ¿Quién crecía más rápidamente a los 14 años? ¿Cómo lo sabes?
7. ¿Cuándo crecía Pablo más rápidamente que Susana?
8. ¿Las chicas tienden a tener novios mayores que ellas. ¿Por qué crees que es? ¿Cuál es la relación con la gráfica?

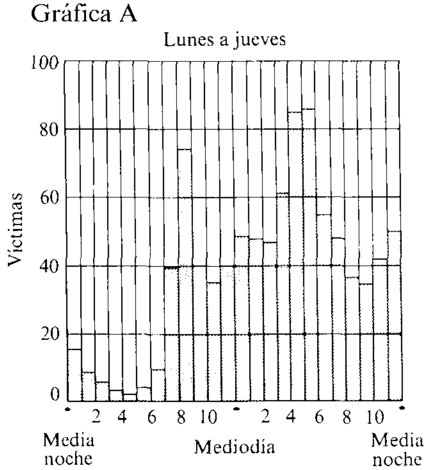
Estadísticas de accidentes de carretera

Las cuatro gráficas siguientes muestran cómo varía el número de víctimas en accidentes de carretera por hora durante una semana típica en Inglaterra.

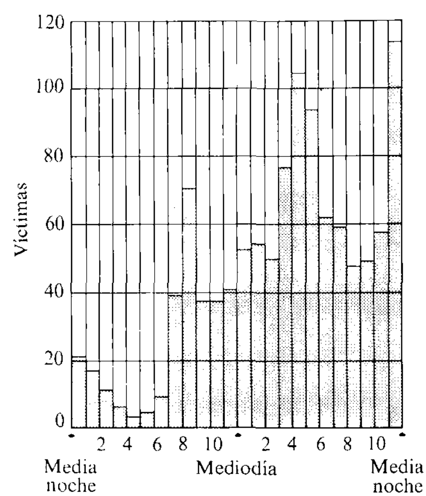
La gráfica A muestra el modelo normal para lunes, martes, miércoles y jueves.

— ¿Qué gráficas corresponden a viernes, sábado y domingo?
— Explica las razones de la forma de cada gráfica.
— ¿Qué evidencia hay de que el alcohol es la causa mayor de accidentes de carretera?

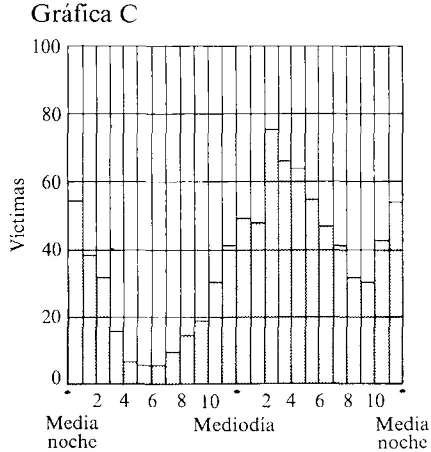
Gráfica A



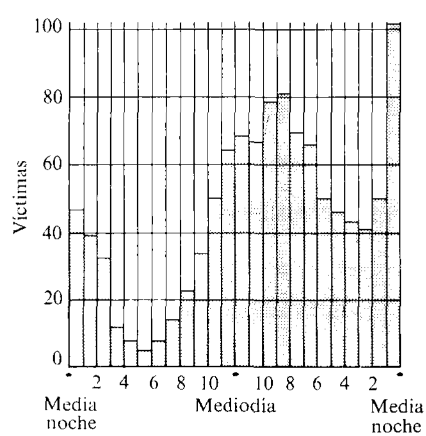
Gráfica B



Gráfica C



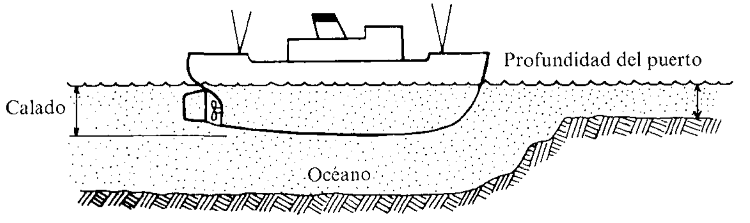
Gráfica D



Las mareas del puerto

La gráfica de la página siguiente muestra cómo varía la profundidad del agua de un puerto a lo largo de un miércoles particular.

1. Describe en detalle, por escrito, lo que dice la gráfica:
   ¿Cuándo hay pleamar/bajamar? ¿Cuándo está subiendo/bajando el nivel del agua?
   ¿Cuándo sube/baja más rápidamente el nivel del agua?
   ¿Con qué rapidez está subiendo/bajando en ese momento?
   ¿Cuál es la profundidad media del agua? ¿Cuánto varía la profundidad desde ese valor medio?
2. Los barcos sólo pueden entrar al puerto cuando el agua es lo suficientemente profunda. ¿Qué factores determinarán cuándo puede entrar o salir del puerto un barco determinado?
   El barco del diagrama inferior tiene un calado de 5 metros cuando está cargado y sólo 2 metros cuando está descargado.
   Discute cuándo puede entrar y salir sin peligro del puerto.



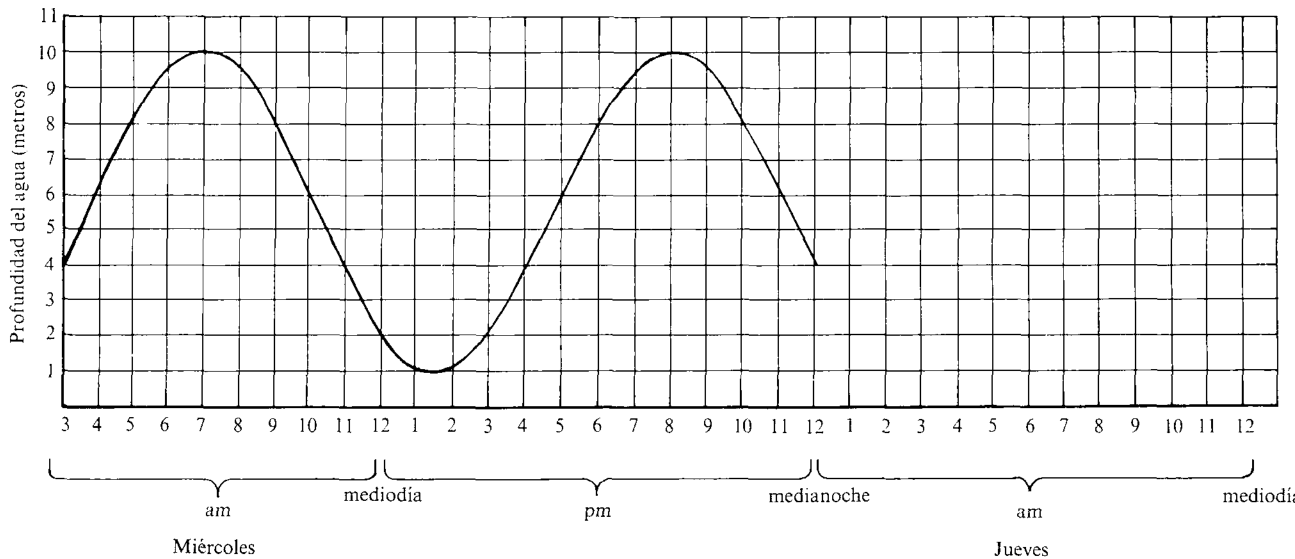
   Haz una tabla mostrando cuándo pueden entrar y salir del puerto sin peligro barcos de distintos calados, durante ese miércoles.
3. Intenta completar la gráfica para predecir cómo variará la marca el jueves. ¿Cómo habrá que ajustar para el jueves la tabla que has hecho en la pregunta 2? ¿Y para el viernes?
4. Suponiendo que la fórmula que se ajuste a esta gráfica sea

$$p = A + B \cos (28t + 166)^\circ$$

(donde p = profundidad del agua en metros
t = tiempo en horas desde las 12 de la noche del martes)

¿Puedes calcular los valores de A y B?
¿Cómo puedes hacerlo sin sustituir valores de t?

Las mareas del puerto



Materiales de apoyo

INTRODUCCION

Los siguientes materiales de apoyo ofrecen una serie de ideas, puntos de debate y actividades basadas en el módulo. Pueden ser usados de forma individual, pero quizá sea más provechoso utilizarlos como base para una serie de encuentros con colegas en los que se puedan compartir experiencias de clase.

Este módulo, «El lenguaje de funciones y gráficas», como su título sugiere, está orientado hacia destrezas comunicativas. Se espera que los alumnos traduzcan información extraída de un contexto a formas matemáticas (gráficas, tablas, fórmulas, etc.), que pasen de unas de estas formas a otras y que las reinterpreten en el contexto de la situación. La principal ventaja del uso de gráficas, tablas o fórmulas es que pueden proporcionar gran cantidad de información en poco espacio, y cambios comparativamente pequeños en ellas pueden representar cambios significativos de sentido. Desafortunadamente, esta «densidad» de información también puede dificultar su interpretación. La mayoría de los profesores estarán de acuerdo en que la habilidad para interpretar y usar estos modelos de información es importante para los alumnos de todas las edades y habilidades y muchas otras áreas del curriculum escolar, como la biología y la geografía, usan gran número de gráficas y tablas.

De cara a desarrollar destrezas interpretativas, los alumnos necesitan muchas oportunidades para discutir sus ideas y errores conceptuales, presentar pruebas y discutir explicaciones. Para algunos alumnos ésta será una nueva forma de aproximación a las matemáticas y vale la pena explicar esto a la clase antes de empezar con el módulo. De hecho una discusión sobre «cómo discutir» puede ser una introducción válida al trabajo.

Las habilidades lingüísticas juegan un papel importante a lo largo del trabajo. La adquisición de estas destrezas sólo es factible si el individuo está implicado activamente; esto está bien ilustrado por el siguiente diagrama de Clive Sutton, extraído de «Communicating in the Classroom»*.

---

* «Communicating in the Classroom», editado por Clive Sutton, y publicado por Hodder and Stoghton. Londres, 1981.

Debate

Discusión bien dirigida.
Preguntando los alumnos tanto como el profesor.

Escritura

Tareas que provocan una reorganización activa de aquello que sabe el estudiante.

Mejor comprensión de la materia que se está estudiando.

Lectura

Preguntas activas de los libros

Escucha activa

Cuestionamiento mental del que habla.

Es útil distinguir dos usos del lenguaje:

— *Lenguaje para hablar a los demás:* Capacidad para comunicar verbalmente o por diagramas, de forma que entienda otra persona.
— *Lenguaje para uno mismo* (o lenguaje de aprendizaje): «El esfuerzo para comunicar lo que uno quiere decir es una de las más poderosas provocaciones para clasificar lo que entiendes».

Este último uso del lenguaje exige al estudiante una gran cantidad de reflexión activa en la cual reorganiza sus propias creencias mientras intenta comunicarse con los demás. Las ventajas de afrontar esta aproximación en el aula están resumidas en la siguiente tabla, nuevamente extraída de la introducción de Sutton (1981):

1. *El conocimiento reformulado por el propio estudiante* es
   a) más fácilmente recordado;
   b) está ligado a otro conocimiento, y por lo tanto es accesible desde otros puntos de sus estructuras mentales;
   c) más fácilmente usado en la vida diaria, o en la resolución de un problema en algún otro campo de pensamiento;
   d) influyente sobre futuras percepciones, y una ayuda para ulteriores estudios en la materia.

2. *El conocimiento que el estudiante no reformula* es
   a) más fácilmente olvidado;
   b) habitualmente recordado sólo en situaciones muy similares a aquellas en las que fue aprendido;
   c) no aplicado o usado en ningún otro caso.

3. *La reformulación debe ser provocada*
   a) mediante discusiones en pequeños grupos;
   b) mediante escritos redactados por el propio alumno.

Los materiales del módulo están escritos con el objetivo de provocar la reformulación de las ideas de los alumnos sobre gráficas, etc.; las lecciones contienen habitualmente la siguiente secuencia de actividades:

I) *Una corta discusión introductoria* dirigida a introducir el material, y a equipar a los alumnos de expectativas correctas. (Esto incluye establecer la relación referida anteriormente en 3(b).)

II) *Trabajo de los alumnos en parejas o pequeños grupos.* Aquí, deben explorar la tarea, consultar y discutir con los demás, trabajar hacia un consenso del grupo y quizá presentar sus hallazgos a los otros grupos. (Esto se relaciona con 3(a).)

III) *Una puesta en común,* con el profesor dirigiendo o facilitando una discusión de toda la clase, a menudo es apropiada. (Esta larga discusión también puede provocar reformulación, por lo tanto la incluiríamos en 3.)

IV) *Una recapitulación* del estado actual del conocimiento. Esto puede dejar todavía abierta la situación para una futura discusión, pero debería hacerse un esfuerzo por asegurar que los alumnos se sienten seguros, con el conocimiento de que están caminando en la dirección correcta. (Es también útil mirar atrás a las experiencias recogidas en las lecciones previas.)

De este modo, los materiales de clase introducen nuevos conceptos a entender para los alumnos y a la vez sugieren formas de trabajar que pueden ser nuevas tanto para profesores como para alumnos. Estos materiales de apoyo ofrecen algunas ideas y comentarios tanto sobre los conceptos matemáticos como sobre el tipo de estilo de enseñanza que debe ser adoptado.

Estos materiales de apoyo están divididos en 4 secciones:

Sección 1: Abordando un problema en grupo

Aquí, se dan tres actividades que dan a los profesores una oportunidad de adquirir experiencia personal en el tratamiento de problemas en un pequeño grupo y posterior discusión de sus ideas con un grupo mayor.

Sección 2: Errores y falsas concepciones de los alumnos

Esta sección contiene una discusión de las dificultades y falsas concepciones más comunes que han experimentado los alumnos en el trabajo sobre funciones y gráficas. (En los materiales de clase, varias hojas están escritas específicamente para sacar estas dificultades y falsas concepciones a la luz y están claramente referidas a esta sección.)

Sección 3: Formas de trabajar en el aula

Esta sección trata de la necesidad de equilibrar las actividades en el aula entre la exposición del profesor, la discusión en pequeños grupos y la discusión con el conjunto de la clase.

Sección 4: Evaluación de las preguntas de examen

Esta sección nos lleva a la evaluación de las respuestas de los alumnos a unas cuantas posibles preguntas de examen. Se muestra cómo se pueden elaborar esquemas de calificación para otras preguntas y se proporciona un guión para una sesión práctica utilizando escritos de alumnos.

Finalmente, tal como dice el informe Cockcroft*:

«La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debería incluir oportunidades para la discusión entre profesor y alumnos y entre los propios alumnos.»

Estos materiales de apoyo intentan seguir esa recomendación.

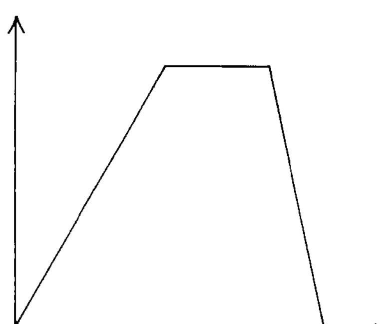
1. **Abordando un problema en grupo**

El módulo sugiere que los alumnos aborden las distintas tareas en parejas o pequeños grupos. La discusión efectiva en grupo es un arte que necesitará un desarrollo gradual con ayuda del profesor.

Las actividades que siguen han sido utilizadas por profesores para conseguir una mayor experiencia personal en lo que se siente al abordar un problema en un grupo e informar luego a otros grupos. Se puede intentar trabajar con algunos colegas, trabajando inicialmente en grupos de dos o tres.

Un paseo por el campo

Los ejes de esta gráfica no han sido etiquetados. Eligiendo diferentes etiquetas, las gráficas pueden representar muchos paseos diferentes.



* «Las matemáticas sí cuentan». Informe Cockcroft. Estudios de Educación. MEC 1985.

Actividad 1

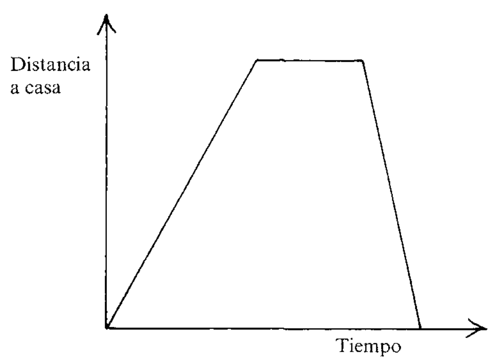
(Si es posible, grabad algunas de vuestras discusiones en grupo y analizadlas después.)

La primera actividad consiste en decidir sobre cinco diferentes paseos por el campo que puedan ser ilustrados por la gráfica dada. Por ejemplo, las etiquetas podrían ser «distancia a casa» para el eje vertical y «tiempo transcurrido» para el eje horizontal. Un segundo juego de etiquetas podría ser «nivel de ansiedad» frente a «hambre», y similares. Para cada idea, copiad la gráfica superior, etiquetad los ejes, poned un nombre al paseo y escribir una corta descripción del paseo por el campo concreto que está ilustrando la gráfica.

Por ejemplo:

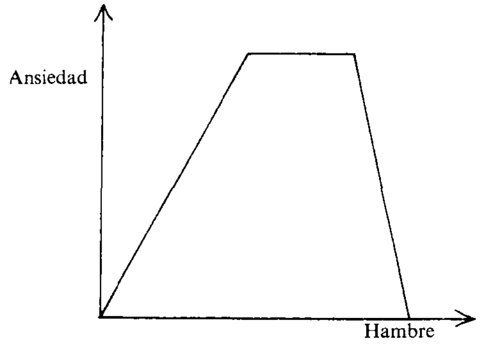
El Caballo y Los Perros

Salimos de casa y caminamos tranquilamente durante un rato. Al final llegamos a «El Caballo y Los Perros»; estaba bien para sentarse en el jardín y disfrutar de un bien ganado descanso y unas jarras de cerveza. Pasó el tiempo y de repente nos dimos cuenta de que debíamos apresurarnos si queríamos llegar a casa antes del anochecer: estábamos preocupados de estar mucho tiempo fuera a causa de los niños.



El Sendero Desconocido

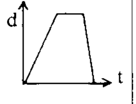
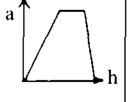
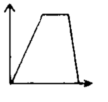
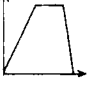
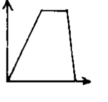
Teníamos que seguir una ruta bastante difícil y no era fácil encontrar los mojones. Estábamos cada vez más preocupados, pero al cabo de un rato Claude descubrió que la lejana colina debía ser Beacon's Hang y pensamos que estábamos en la dirección correcta. El camino se fue haciendo más familiar y estuvimos seguros de estar en el sendero correcto. Desgraciadamente, habíamos olvidado traer nuestros bocadillos.



Una vez completadas las cinco descripciones, intentad la Actividad 2.

Actividad 2

Construid una matriz con cinco columnas encabezadas con los nombres de los cinco paseos y cinco filas marcadas con los ejes que hayan sido elegidos para cada paseo (ver el ejemplo inferior). Los cinco huecos de la diagonal principal contendrán la gráfica original. Copiadlas en la ma-

Etiquetas en los ejes	Paseo 1 El Caballo y Los Perros	Paseo 2 El Sendero Desconocido	Paseo 3	Paseo 4	Paseo 5
Distancia a casa frente a Tiempo					
Ansiedad frente a Hambre					
					
					
					

* También son posibles muchas otras gráficas.

triz. Ahora, en el orden que considereis conveniente, dibujad, si es posible, una gráfica utilizando la descripción del paseo dada por el encabezamiento de la columna y marcando los ejes de la gráfica como indica la fila de la matriz. Así, en el ejemplo que se ve en (1,2), tenemos una gráfica para nuestro «Sendero desconocido» en la que los ejes se han marcado «Distancia a casa» frente a «Tiempo». Anotad cualquier suposición adicional que hagais para completar los huecos de la matriz. Una vez completados los 25 huecos de la matriz, pasad a la actividad 3.

Actividad 3

La última actividad consiste en informar de vuestras ideas y soluciones a los otros grupos. Algunas cuestiones pueden surgir inmediatamente:

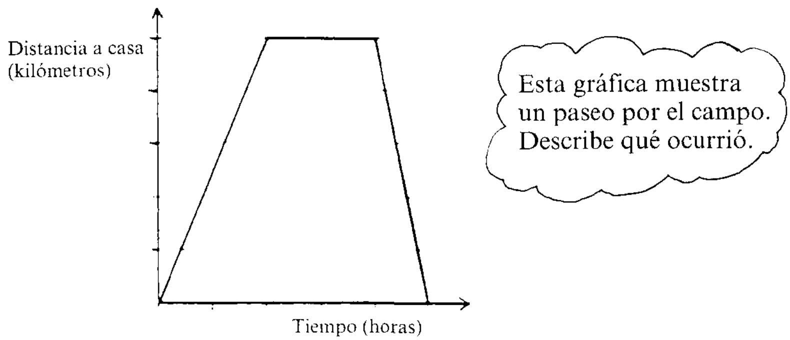
1. ¿Hubieras preferido pensar sobre las actividades individualmente antes de discutirlas con tu grupo?
2. ¿Cómo se ha organizado el grupo...
   I) ... para registrar sus decisiones?
   II) ... para preparar su presentación a los otros grupos?
3. ¿Qué papel jugó cada miembro del grupo en la discusión?
   ¿Hubo alguien que...
   ... dominó?
   ... trabajó independientemente de los demás?
   ... hizo un montón de preguntas?
   ... ofreció sugerencias?
   ... recogió o rebatió sugerencias ofrecidas por los demás?
4. ¿Cómo se organizó la sesión de puesta en común? ¿Cada grupo tuvo la oportunidad de explicar sus hallazgos?

2. Errores y falsas concepciones de los alumnos

A continuación examinamos algunos errores y falsas concepciones exhibidos por los alumnos mientras trabajan el módulo. Nuestras investigaciones nos llevan a sostener que los estilos de enseñanza que incluyen la discusión con los alumnos sobre los errores comunes son más efectivos que aquellos que evitan la exposición de errores siempre que sea posible. En este módulo hemos adoptado este punto de vista y los materiales de enseñanza están diseñados para confrontar más que para evitar las áreas más comunes de dificultad.

1. *Interpretación de una gráfica como si fuera un dibujo de la situación*

El paseo por el campo



Respuesta de Susan: «En el paseo por el campo, la gente estaba subiendo un monte muy empinado. Cuando finalmente llegaron a lo alto, estuvieron andando bastante despacio porque estaban cansados. Continuaron andando un poco y entonces volvieron a bajar el monte por el otro lado. Como iban cuesta abajo, fueron a bastante velocidad».

Susan ha interpretado la gráfica como si fuera justamente el dibujo de un monte. Ha interpretado erróneamente la pendiente de la gráfica como si indicara la inclinación del monte y ésta se ha visto confundida con su otra interpretación referente a la velocidad. Este tipo de errores es muy común y explica gran parte de los errores de interpretación.

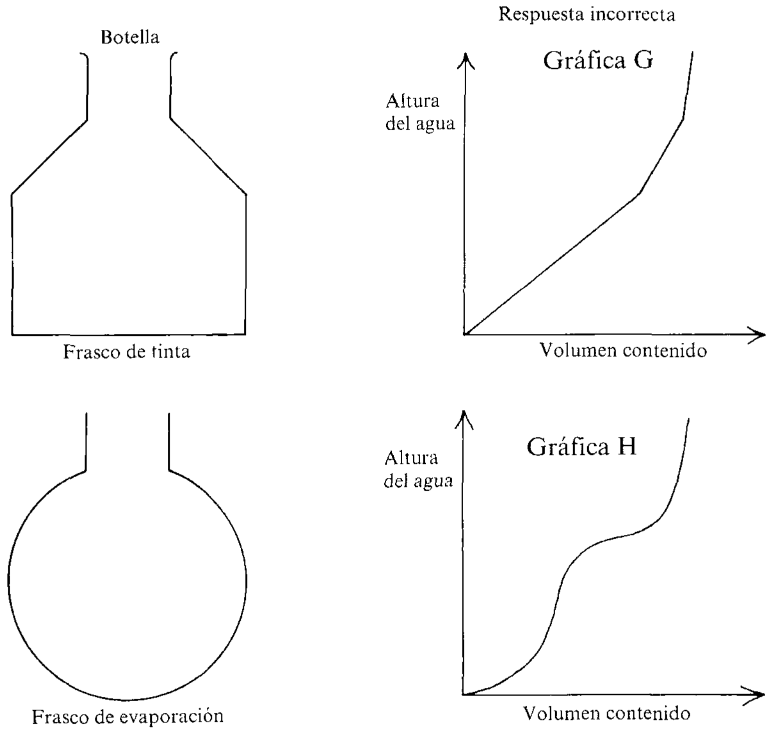
Alumnos (e incluso adultos) que han trabajado más en la interpretación de gráficas complejas también pueden caer de vez en cuando en esta clase de error.

Llenando botellas

Escoger una gráfica (entre nueve alternativas; ver A5) para mostrar cómo la altura del líquido en cada botella depende de la cantidad de agua vertida en ella.

En el primero de estos ejemplos, el alumno ha elegido la gráfica G, quizá suponiendo que un lateral recto del frasco siempre producirá una línea recta en la gráfica. En ocasiones es difícil explicar por qué esto no es cierto. En el otro caso, el alumno posiblemente ha elegido la gráfica H porque identifica la curva cóncava de la parte inferior del frasco de evaporación con la curva cóncava de la parte inferior de la gráfica.

Este módulo permite considerar este tipo de error en alguna profundidad (A2 está orientado a este particular).



2. *Respuestas a cuestiones que dependen de dos o más variables*

Consideremos la siguiente cuestión extraída de los folletos suplementarios al final de la sección A.

Bolsas de azúcar

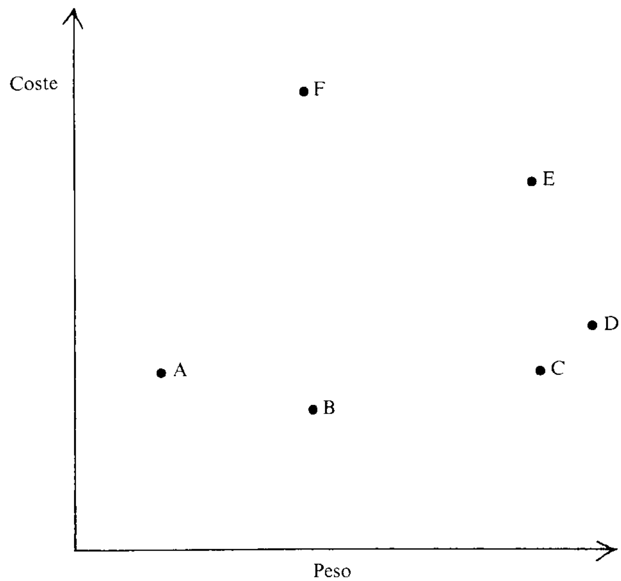
Cada punto de la gráfica de la siguiente página representa una bolsa de azúcar.

e) ¿Cuál sale mejor de precio F o C? ¿Cómo lo sabes?
f) ¿Cuál sale mejor de precio B o C? ¿Cómo puedes decirlo?
g) ¿Qué dos bolsas salen igual de precio? ¿Por qué?

Algunos alumnos encuentran difícil considerar las dos variables a la vez, y a menudo responden a las cuestiones como si sólo dependieran de una variable.

Leonard: e) C. C es menos dinero.
f) B. Porque cuesta menos.
g) A, C. Los dos el mismo peso y precio.

Abby: e) C porque C es pesada y no cuesta tanto como F.
f) C porque C pesa más.
g) E, C porque las dos pesan lo mismo.



Los dos, Leonard y Abby, son conscientes de ambas variables, pero mientras Leonard considera fundamentalmente el precio, Abby se centra sobre todo en el peso. Estas preguntas originan bastantes consultas, y los alumnos necesitan adoptar algún tipo de razonamiento proporcional para responderlas correctamente, por ejemplo:

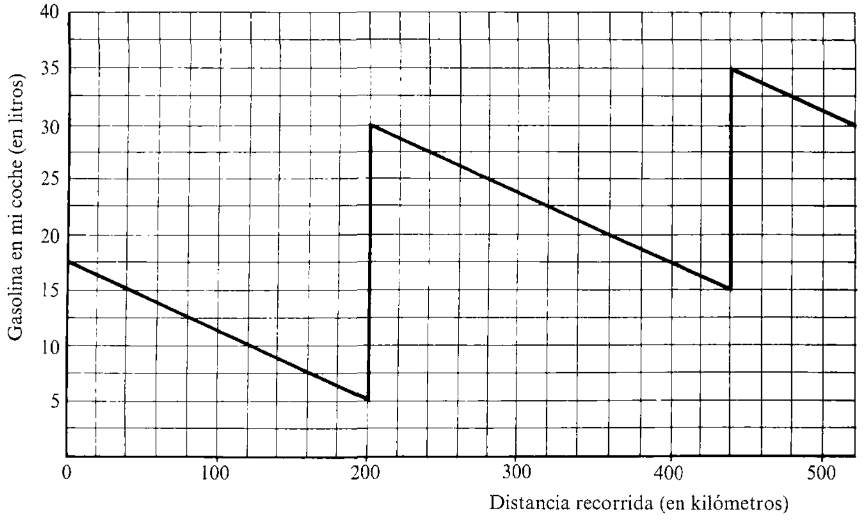
Summi: f) C. C pesa aproximadamente dos veces más que B pero cuesta sólo un poco más.

El material del módulo ofrece bastantes cuestiones que requieren tal razonamiento. En «Las llamadas telefónicas» (A1), por ejemplo, los alumnos deben relacionar el coste y la duración de una llamada con la distancia a la que se ha hecho. (Uno no puede concluir que porque la llamada sea cara deba ser a larga distancia). Más adelante (ver «Puentes», B4), los alumnos necesitan determinar la relación entre un gran número de variables. Aquí necesitarán considerar constantes algunas variables mientras buscan relaciones entre las demás.

3. *Interpretación de intervalos y gradientes*

La mayoría de los alumnos parecen encontrar dificultades en la interpretación de intervalos y gradientes y a menudo los confunden con valores en puntos particulares. Los dos siguientes ejemplos, sacados de la colección de problemas, ilustran esto:

El viaje por la autopista

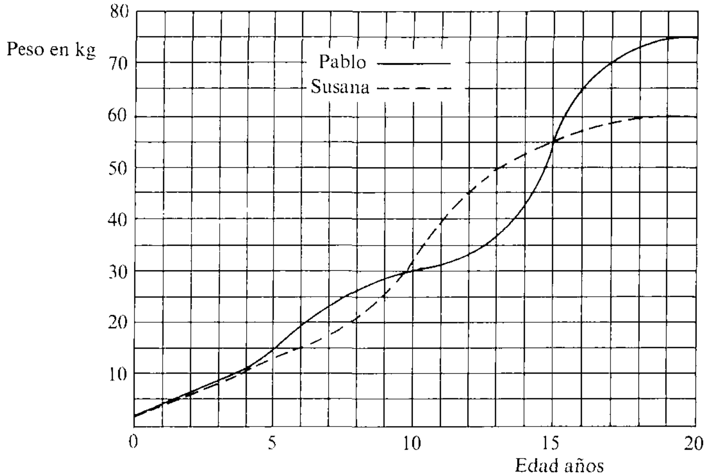


«¿En qué gasolinera eché más gasolina?»
«En la segunda porque la gráfica sube más»

Curvas de crecimiento

(Ver la gráfica de la página siguiente.)
«¿Quién estaba creciendo más rápidamente a los 14 años?»
«Susana, porque la gráfica de Susana es más alta cuando tiene 14 años»

Otros errores comunes ocurren porque los alumnos son incapaces de comparar grandes segmentos de una gráfica, aunque puedan hacerlo bien con segmentos pequeños. Los alumnos que interpretan las gráficas desde la óptica de los puntos son particularmente vulnerables a este tipo de errores y necesitan que se les muestre cómo se pueden comparar directamente segmentos en una gráfica sin tener que recurrir a ningún tipo de lectura de escalas. A menudo, los alumnos medirán un intervalo por lectura de



escalas, es decir, tomarán dos lecturas y hallarán la diferencia aritmética entre ellas. Una aproximación alternativa consiste en medir la longitud de un intervalo usando las cuadrículas y utilizando luego la escala a lo largo de los ejes para decidir sobre el significado de esa longitud. Cuando se ha de hacer una comparación cualitativa entre dos intervalos, este último paso es, por supuesto, innecesario. Muchos aspectos de la interpretación gráfica son facilitados por la «lectura de la cuadrícula». Permite a los alumnos leer la gráfica de una forma «relativa» y les libera de la necesidad de estarse refiriendo a los ejes y asignando valores absolutos a todas las lecturas realizadas.

Por ejemplo, en respuesta a la pregunta «¿En qué gasolinera eché más gasolina?», un «lector de escalas» razonaría: «En la primera gasolinera la gráfica sube de 5 a 30 litros, y aumenta 25. En la segunda, la gráfica sube de 15 a 35 litros, y aumenta 20. Por lo tanto, se compra más gasolina en la primera gasolinera».

Por el contrario, un «Lector de cuadrículas» razonaría: «El primer incremento es mayor que el segundo, porque la línea vertical es más larga». La lectura de cuadrículas tiene así poderosas ventajas, pero según nuestras observaciones los alumnos no siempre adoptan adecuada y espontáneamente este método.

4. *Situaciones que no dependen del tiempo*

Muchas gráficas incluyen el tiempo como una variable independiente o como una variable implícita. Sin embargo, cuando esto no ocurre, la función tiene que ser visualizada como el resultado de un gran (o infinito) número de experimentos. He aquí ejemplos de ambas categorías:

«Dependiente del tiempo»

«Dibuja una gráfica que muestre cómo varía la velocidad de un atleta durante una carrera de 1.500 metros lisos.» Aunque la palabra «tiempo» no aparecerá en ninguno de los ejes (sino la velocidad y la distancia recorrida), uno puede imaginarse tomando medidas de la velocidad y la distancia en distintos momentos durante una carrera. El tiempo es así una variable implícita.

«Independiente del tiempo»

«Dibuja una gráfica que muestre cómo depende el tiempo empleado en una carrera de la longitud de ésta.» Aquí debemos imaginar que se han realizado un gran número de carreras (en cualquier orden), y que se han medido la longitud y el tiempo de cada carrera. Cada punto de la gráfica representará una carrera diferente, y no puede imaginarse el tiempo transcurrido en la misma forma que antes. En este sentido, aunque la palabra «tiempo» aparece en el eje vertical, la situación es esencialmente independiente del tiempo.

Las situaciones «independientes del tiempo» son habitualmente más difíciles de visualizar, y a menudo causan a los alumnos una considerable dificultad.

3. **Formas de trabajar en el aula**

Establecer un sistema

Hay tres tipos de actividades fundamentalmente para llevar en el aula:

I) Exposición, en la que el profesor introduce la tarea a abordar, explica, sitúa la escena, organiza la estructura de la lección, resume los resultados y similares.

II) Discusión en pequeños grupos, en donde los alumnos trabajan cooperativamente, estando el profesor disponible para asesorar y discutir cuando sea requerido.

III) Discusión de clase, donde los grupos hacen una puesta en común, con el profesor como moderador.

Antes de ver estas actividades en detalle y las exigencias que conllevan para el profesor, es interesante considerar los diferentes ritmos que aparecen con distintas tareas y grupos. La observación de los materiales muestra que el tiempo utilizado trabajando en estas formas diferentes varía mucho. Puede ser interesante tomar nota del ritmo de las clases con diferentes actividades y compararlo con lo obtenido por otros profesores.

Este es un registro de un profesor trabajando con el cuadernillo A5, «Botellas»:

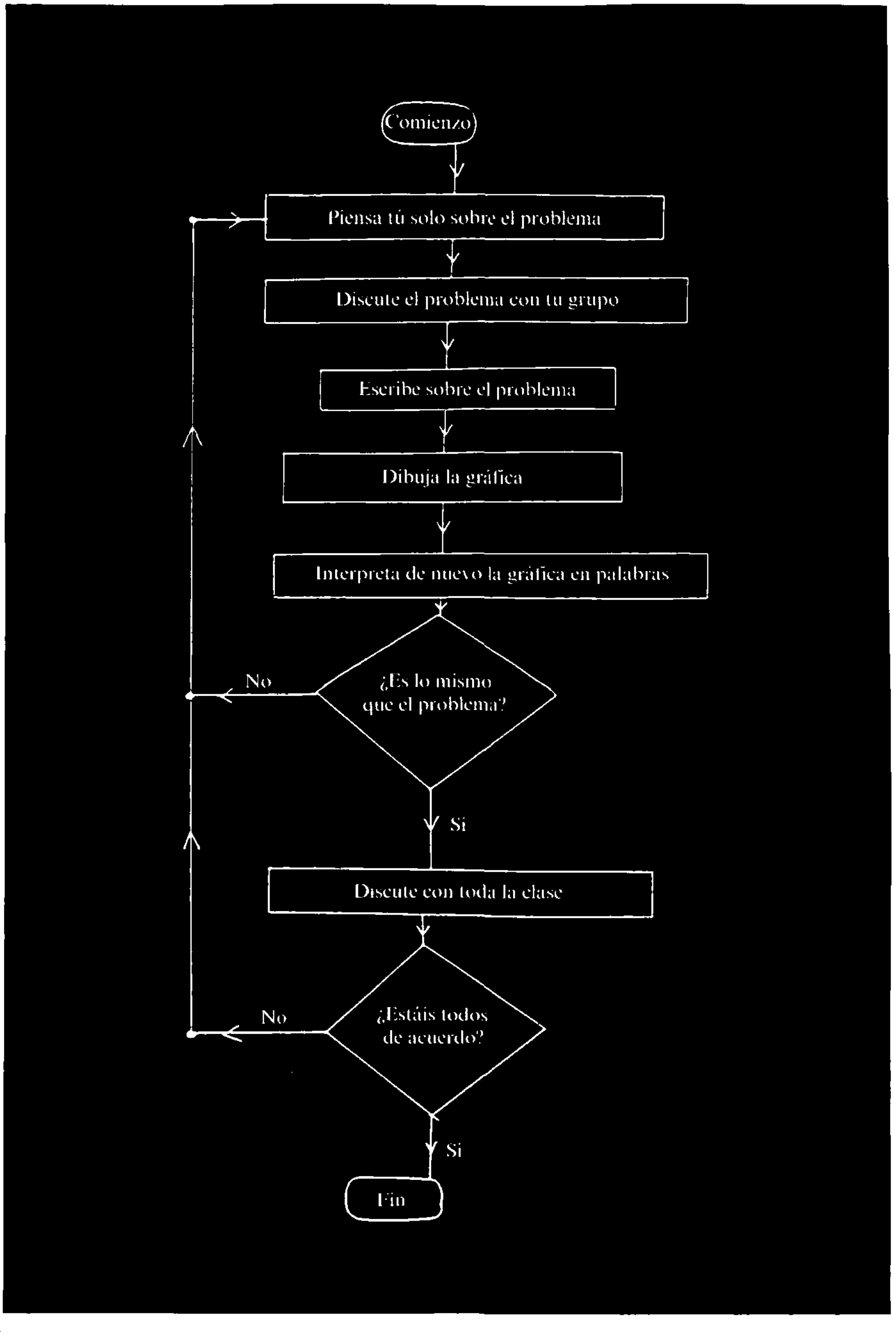
Hora	Duración	Actividades	Comentarios
11,34	8 min.	Discusión en clase	Introducir la situación a través de un problema. La clase ya está organizada.
11,42	6 min.	Trabajo en grupo	Dibujar gráficas para botellas cilíndricas (pág. 1).
11,48	8 min.	Discusión en clase	Los grupos comparan los dibujos.
11,56	18 min.	Trabajo en parejas	Asignar botellas a las gráficas (págs. 2-3).
12,14	7 min.	Discusión en clase	Los grupos comparan resultados.
12,21	4 min.	Trabajo en grupo	Dibujar gráficas para las botellas dadas (pág. 4).
12,25	5 min.	Discusión en clase	Los grupos comparan los dibujos; se propone trabajo para casa.

En este ejemplo, la clase contenía la misma cantidad de discusión en clase y de trabajo en pequeños grupos, con poca o ninguna exposición del profesor. (Se puede comparar esto con otros profesores que preferían un trabajo mucho mayor en pequeños grupos.) ¿Qué tipo de ritmo sueles adoptar normalmente?

I) *Exposición del profesor*

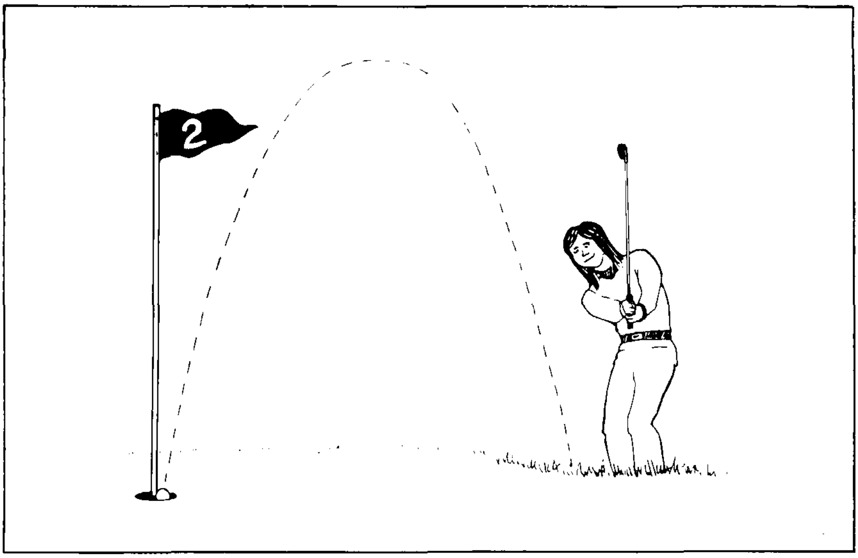
En ciertos momentos el profesor puede desear hablar al conjunto de la clase. Si tiene que introducirse un nuevo concepto, será necesario explicar la nueva idea, quizá empleando una técnica de preguntas-respuestas que impliquen e interesen a los alumnos. Es importante reconocer que esta parte de la clase es diferente de una discusión de clase, en la que el profesor actúa como moderador y facilita la comunicación entre los alumnos.

A menudo también es necesario un período de exposición cuando el profesor está intentando organizar y estructurar la forma en que trabajarán los alumnos. Por ejemplo, el siguiente diagrama fue desarrollado con una clase con una exposición del profesor al principio del cuadernillo A2. «¿Las gráficas son sólo dibujos?»


Comienzo
Piensa tú solo sobre el problema
Discute el problema con tu grupo
Escribe sobre el problema
Dibuja la gráfica
Interpreta de nuevo la gráfica en palabras
¿Es lo mismo que el problema?
No
Sí
Discute con toda la clase
¿Estáis todos de acuerdo?
No
Sí
Fin

El golpe de golf

¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?



En esta clase, y en muchas de las siguientes, los alumnos encontraron que este esquema les ayudaba considerablemente a la hora de abordar discusiones provechosas.

II) *Discusión en pequeños grupos*

Una vez introducido el problema, habitualmente se pide a los alumnos que trabajen en parejas o pequeños grupos. Al comenzar una nueva tarea, a menudo se tarda algún tiempo en absorber toda la información e ideas. Al principio las discusiones de grupo pueden ser fragmentarias, usando palabras clave, medias frases, preguntas y similares. Esta es la fase de discusión exploratoria. Aunque a veces parezca algo inconexo y pobremente articulado, si se deja al grupo trabajar tranquilo, es aquí donde pueden emerger la organización y reformulación.

Si pueden grabarse algunas discusiones en pequeños grupos, se pueden analizar de la siguiente manera*:

---

* Las categorías 1, 2 a, b, c, d y 3 están sacadas de «Communicating in the Classroom», cap. 4, de Trevor Kerry, editado por Clive Sutton, y publicado por Hodder and Stoughton. Londres 1981.

1. Dividir la discusión en una serie de episodios lo más autónomos posible.
   Identificar al iniciador del episodio, y descubrir si el iniciador es un miembro del grupo o un líder (profesor).
2. ¿Puedes encontrar ejemplos de participantes:
   a) proponiendo una idea provisional o hipotética, y pidiendo comentarla?
   b) defendiendo sus propias asertaciones con datos?
   c) aportando pruebas en favor de una asertación de otro?
   d) señalando fallos en los argumentos o cuestionando «hechos» propuestos por los demás?

   ¿Están todos los miembros del grupo:
   e) participando?
   f) apoyando la discusión?
3. ¿Qué tipo de procesos intelectuales se estaban utilizando? Cuenta los siguientes, poniendo los casos dudosos en más de una categoría si fuera necesario:
   a) contribuciones al nivel de información específica (datos)
   b) contribuciones orientadas sobre ideas o conceptos (clases de sucesos, objetos o procesos)
   c) el número de abstracciones o principios que implican más de un concepto

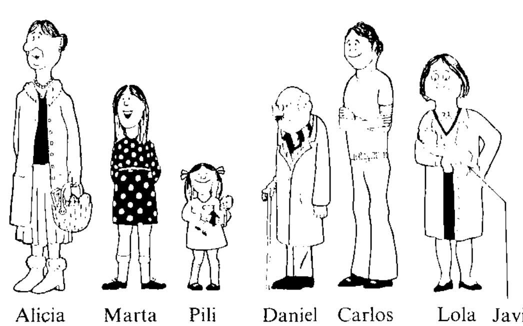
A continuación se da una transcripción de tres chicos trabajando en el cuadernillo A1, anotada con estas categorías de discusión:

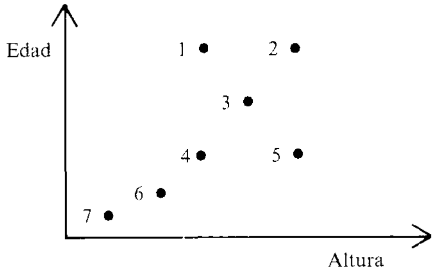
A1. INTERPRETACION DE PUNTOS

Para trabajar en este cuadernillo, discute tus respuestas con tus compañeros y trata de llegar a un acuerdo.

1. *La cola de la parada del autobús*

¿Quién está representado por cada punto del siguiente diagrama?



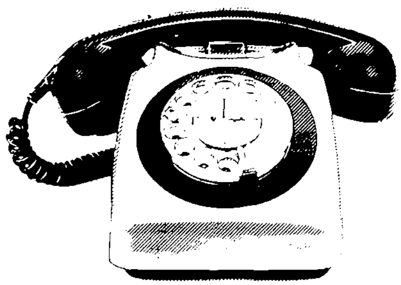


Cuadernillo A1 1. La cola de la parada del autobús.
(Tres chicos: A1, A2, A3).

Transcripción	Categoría y comentario
A1 Bien. Obviamente los dos más altos son Alicia y Carlos.	1 El iniciador es A1, no el profesor. 3a Información específica.
A2 Sí, los números 1 y 2 son los más altos. A1 Sí. A2 Por lo tanto son Alicia y Carlos.	2b A2 hace una afirmación, pero está basada en falsa idea de que «puntos altos» = «personas altas».
A1 ¡Espera! ¡No! 1 y 2 son los dos más viejos. Son Carlos y Alicia. A2 Sí. Eso es lo que yo digo.	2d A1 señala un fallo en el razonamiento de A2, pero luego se equivoca él
A1 Perdona... Creo que podrían ser Daniel y Alicia.	2a A1 propone una idea provisional (correcta).
A2 Pero Daniel es más bajo.	2d A2 cuestiona la conclusión de A1.
A1 ¿Cómo sabes entonces que Lola no es más vieja? A2 No seas tonto. Usa tu sentido común.	2d A1 parece estar intentando encontrar fallos en el argumento de A2 haciendo preguntas.
A1 Um... entonces Alicia será la más vieja. Así que Alicia será la número 2. ¿De acuerdo?	2a A1 vuelve a su propia aproximación y pide comentarla.
A2 ¿Qué? ¿Es la más vieja y la más alta?	2d A2 insinúa que hay un fallo en el razonamiento de A1.
A1 El otro más viejo es bajo, así que ese es el número 1 y ése es Daniel. Oye, ¿vosotros vais a hacer algo? A2 Bueno, él está de acuerdo y creo que yo también.	2b A1 defiende su afirmación con evidencia. 3b A1 considera las dos variables a la vez. 2e A1 siente que está haciendo casi todo el trabajo él. 2f aunque A3 estaba callado durante el episodio, estaba atento y opinando.

Puede resultar interesante intentar analizar las siguiente transcripción, que muestra cómo esos tres mismos chicos abordaron la página 3 del cuadernillo A1.

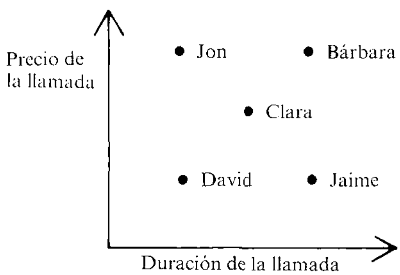
3. *Llamadas telefónicas*



Un fin de semana.

Cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país.

Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



—¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.
—¿Quién realizó una llamada local? Explícalo.
—¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.
—Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.
—Si hicieras una gráfica similar mostrando todas las llamadas telefónicas realizadas desde Bilbao durante un fin de semana, ¿cómo sería? Dibuja un esquema e indica claramente las suposiciones que haces.

Cuadernillo A1 3. Llamadas telefónicas (los mismos tres chicos A1, A2 y A3)

Transcripción	Categoria y comentario
A1 David y Jaime están haciendo llamadas locales... porque fueron las más baratas, ¿no?	
A2 Abajo.	
A1 ¿Cómo puedes decir abajo? ¿Eres tonto?	
A2 Abajo en la gráfica.	
A3 Podía ser abajo en el estanque.	
A1 Bueno. Si Bárbara estuviera llamando a larga distancia, costaría mucho más.	
A2 ¡Sí!	
A3 Sí, bueno. Mira. Si la llamada es corta, va a costar tanto. Si hace el doble, costará dos veces más.	
A2 Sí, bien.	
A3 Cuanto más tiempo estás en el teléfono, más te cuesta.	
A2 No creo que duración signifique distancia.	
A1 No, quiere decir cantidad de tiempo.	
A3 Ah, Jon y Bárbara en realidad han tenido las dos llamadas más caras, pero Jon... pero Jon estaba llamando a larga distancia.	
A2 Sí, pero tienes que explicarlo.	
A1 Jon estaba llamando a larga distancia porque su llamada fue la más corta y la que más cuesta. David estaba haciendo una llamada local...	
A3 No, era Jaime el que estaba haciendo la llamada local.	
A2 ¿Cómo puede ser Jaime?	
A1 Porque habla mucho tiempo y todavía es muy barato.	
A2 Ah, suena... raro.	

Los tres alumnos parecen haber estado implicados e interesados en estas tareas, y se encuentran suficientemente seguros en su grupo para dar sus opiniones y sugerencias. (Es interesante observar que el alumno 3 entró en la discusión cuando el grupo llegó al problema del teléfono.)

Cuando los alumnos están trabajando en parejas o pequeños grupos, el equilibrio de la comunicación es extremadamente sensible a la intervención del profesor. Cuando hay presente una «audiencia», el grupo puede intentar proporcionar «respuestas» para el profesor más que argumentos razonados para convencer al grupo. El profesor es además una audiencia «informada» que, según asumen los alumnos, conoce y entiende el trabajo. Así, algunos pueden no ver la necesidad de persuadir al profesor de una forma razonada porque «el profesor sabe lo que quiero decir». Otros, al contrario, pueden decidir presentar sus argumentos de un modo más formal ante la presencia de una figura con autoridad. Durante una discusión con toda la clase y, en menor medida, durante una discusión de grupo con el profesor presente, puede haber un desplazamiento hacia el modo de «audiencia distante» tal como es definido en el cuadro inferior*:

	Audiencia Intima	Audiencia Distante
Tamaño	Grupo pequeño	Toda la clase
Fuente de autoridad	El grupo	El profesor
Relaciones	Intimas	Públicas
Ordenación de ideas	No implícita	Implícita
Planificación del discurso	Improvisado	Preparado
Función del discurso	Exploratorio	Versión definitiva

Al tener la naturaleza de la audiencia unos efectos tan profundos en los procesos mentales de los alumnos, el profesor debería cuidar el tiempo y frecuencia de tales «intervenciones» o «interrupciones». En su momento el grupo estará en condiciones de ofrecer sus ideas al conjunto de la clase, pero antes necesitará tiempo y espacio para trabajar sus propias ideas en el interior del grupo.

III) *Discusión con toda la clase*

En la última página se acompaña una «Guía para la discusión en el aula» que proporciona algunas indicaciones tanto para el desarrollo de discusiones con toda la clase como para estimular las discusiones en pequeños grupos.

Esta tabla no está concebida para indicar que «juzgar» o «evaluar» la respuesta de un alumno sea siempre algo inadecuado; más bien intenta hacer ver que si el profesor actúa de esta forma, la naturaleza de la discusión cambiará. Por lo tanto, si es necesario emitir juicios, debería hacerse hacia el final de la discusión.

Barnes* utiliza dos categorías para describir distintos estilos de enseñanza a los que llama «Contestar» y «Evaluar»:

> «Cuando un profesor contesta a sus alumnos, por implicación, está tomando en serio la visión que éstos tienen de la materia, incluso si quiere ampliarla y modificarla. Esto refuerza la confianza del alumno en una

* «From Communication to Curriculum», Douglas Barnes, publicado por Penguin, 1976.

interpretación activa de la materia-problema; profesor y alumno están en una relación de colaboración. Cuando un profesor evalúa lo que dicen sus alumnos se distancia de los puntos de vista de éstos, y se alía con modelos externos que implícitamente pueden devaluar lo que el propio alumno ha construido. Ambas, contestar y evaluar, son partes esenciales de la enseñanza; la evaluación va dirigida hacia los modelos públicos con los que los alumnos se tendrán que medir finalmente, mientras que contestar va dirigido hacia el alumno como es él, y hacia sus propios intentos, aunque primitivos, de interpretar el mundo.

»Si un profesor acentúa la función evaluadora a expensas de la función de respuesta, incitará a sus alumnos a resultados externamente aceptables, más que a intentar relacionar nuevos y antiguos conocimientos. En este caso, los aspectos exteriores de comunicación —procedimientos aceptados, el vocabulario y estilo de la materia, incluso la forma estándar de escribir— tienen probablemente más peso que los intentos del alumno de formular significados. Un diálogo en clase en el que la puesta en común predomina sobre la presentación, en el que el profesor responde a la clase más que evalúa, anima a los alumnos cuando hablan y escriben a sacar a la luz conocimientos previos para ser reformulados desde nuevos puntos de vista. Esto probablemente resultará difícil para el profesor y también para el alumno.»

La presentación de las ideas del grupo al conjunto de la clase puede organizarse de varias formas. Muy a menudo se convierte en una discusión dirigida por el profesor. Adelman, Elliot et al* ofrecen las siguientes hipótesis sobre las discusiones dirigidas por el profesor, que merecen ser consideradas:

1. Hacer muchas preguntas... puede sacar a la luz muchas de las ideas propias del profesor y no dejar sitio para las de los alumnos. Responder a las preguntas de los alumnos con muchas ideas puede ahogar la expresión de sus propias ideas.
2. Reformular problemas en palabras del profesor puede impedir que los alumnos los clarifiquen para sí mismos.
3. Cuando el profesor cambia la dirección de la pregunta o punto de discusión, los alumnos pueden dejar de aportar sus propias ideas. Interpretarán tales acciones como intentos de hacerles aceptar la línea de razonamiento del profesor.
4. Si el profesor hace siempre una pregunta a continuación de la respuesta de un alumno a una pregunta suya anterior, puede hacer que los alumnos no introduzcan sus propias ideas.
5. Cuando el profesor responde a las ideas de los alumnos con expresiones como «bien», «sí», «de acuerdo», «interesante», etc., puede

* «Implementing the Principles of Inquiry/Discovery Teaching: Some Hypoteses», Adelman, C., Elliot, J. et al, Centre for Applied Research in Education, University of East Anglia, 1974.

impedir que otros expresen ideas alternativas. Tales expresiones pueden ser interpretadas como recompensas por dar las respuestas pedidas por el profesor.

Pedir a los alumnos que presenten sus trabajos o expliquen sus ideas al conjunto de la clase precisa una conducción muy cuidadosa. Es esencial intentar crear una atmósfera en la cual los errores y las ideas pobremente expresadas sean bien recibidas y discutidas más que criticadas y ridiculizadas. Los intentos de adquirir este tipo de atmósfera pueden tomar muchas formas. Por ejemplo, el profesor puede:

- —recoger unas cuantas sugerencias de los alumnos, escribirlas en el encerado y discutirlas anónimamente;
- —pedir a un representante de cada grupo que describa el consenso al que ha llegado su grupo. De esta forma, las soluciones vendrán asociadas a grupos más que a individuos.

También es posible reordenar las mesas (en forma de U, por ejemplo) para que aparezca con claridad que la actividad es más discusión que exposición. Una vez establecida la atmósfera adecuada, la mayoría de los alumnos parece apreciar y beneficiarse de una discusión ordenada y bien dirigida del conjunto de la clase.

¿Qué opinan los alumnos?

La siguiente transcripción es la parte final de una entrevista en la que se pidió a unos alumnos que discutieran sus experiencias de discusión en clase con este módulo. (Había 9 alumnos, elegidos por sus compañeros para representar sus opiniones.)

(E = entrevistador, A = alumno, AA = dos alumnos, etc.).

AA	Sí, estaba bien... se trabaja bien en clase.
A	Es bueno discutir.
A	Yo creo que normalmente no hacemos ninguna discusión con los grupos... fue un cambio.
A	A mí me gustaría más discusión en clase de mate.
A	Era bueno el método ... Mr. T. era un poco falso porque se movía hablando con la gente y normalmente se sienta en su mesa y corrige el trabajo de la gente... pero estarías discutiendo en tu grupo ... y luego quizá 10 minutos al final de la clase discutiendo las preguntas con la clase y la gente contaría sus opiniones.
A	Sí.
E	¿Qué tal entonces con la pequeña discusión con la clase... era buena o mala?
AA	Buena, buena.

E Bien, vamos a ver... ¿qué hace buena una discusión en clase?

A Bueno, no tienes a todo el mundo gritando al mismo tiempo... y tú escuchas las ideas de los demás... luego dices las tuyas...

E ¿Pasaba eso?

AA Sí, sí.

A La gente sale y dibuja sus ideas en el encerado y entonces la gente puede criticarlo y comentarlo... y como decís... estáis en vuestros grupitos, se proponen tal vez 3 ó 4 ideas y al final os decidís por una y en clase se proponen quizá 7 u 8 ideas y entonces puedes... lo tuyo es lo mejor y te quedas con ello.

E Entonces la discusión en clase permite a un grupo comparar sus resultados con otro grupo.

AAA Sí, sí.

E Algunas veces Mr. T comenzaba la lección, por ejemplo, con una introducción... ¿era útil?

AA Sí, te hacía recordar.

E ¿Así que era útil?

A Yo creo que deberías empezar discutiéndolo tú mismo; luego tener 10-15 minutos al final de la clase para discutir las ideas juntos...

AA Sí, sí.

A Cuando te metes en la clase, en realidad no quieres sentarte y oírle a alguien delante hablando... quieres ponerte a trabajar, y luego discutirlo.

A Porque entonces puedes cometer errores... y aprender de tus errores, ¿no?

E Entonces desde el punto de vista de las clases, tendríais que tener más bien un breve comienzo del profesor, trabajar por vuestra cuenta o en vuestro grupo y luego una discusión de 10 minutos al final.

AA Sí, sí.

A Porque Mr. T no para cuando empieza a hablar. ¡No puedes pararle!

E ¿Así que eso no os parece tan bueno entonces?

A Sí, no paraba en un buen rato cuando empieza a hablar.

E De acuerdo, eso es parte de la vida... cada profesor es diferente, tenéis que enfrentaros con los profesores, ¿no?

A Es un buen profesor, pero no para de hablar.

E De acuerdo... así que si fuéramos a escribir notas para un profesor recomendaríais un corto comienzo y...

AA Sí.

E ¿Hay más cosas que diríais o recomendaríais?

A Yo creo que está bien... no necesitas saber mucho... Pienso que necesitas experiencia y lo que haces es... cuentas tus experiencias y así creo que desarrollas tu inteligencia no sólo tus conocimientos.

A Sí... si no eres muy listo entonces... la gente puede ir tan lejos como quiera... si te gustan las preguntas puedes hacerlas todas. Puedes dibujar gráficas y compararlas con las de otra gente, pero si no estás muy interesado puedes dibujar justo una gráfica, decir «creo que está bien» y seguir con la siguiente pregunta.

4. Evaluación de las preguntas de examen

Las preguntas de examen pretenden evaluar y reconocer los siguientes procesos:

1. Interpretación de representaciones matemáticas mediante palabras o dibujos.
2. Traducción de textos o dibujos a representaciones matemáticas.
3. Traducción entre representaciones matemáticas.
4. Descripción de relaciones funcionales mediante palabras o dibujos.
5. Combinación de información presentada en varias formas, y extracción de inferencias donde corresponda.
6. Uso de representaciones matemáticas para resolver problemas surgidos de situaciones realistas.
7. Descripción o explicación de los métodos utilizados y de los resultados obtenidos.

Los siguientes apartados describen procesos subrayados en el módulo. Cada problema implica al menos uno de estos procesos y puede implicar hasta cinco. Por ejemplo, en «La máquina de vender bebidas» se pide traducir un texto a una representación matemática (proceso 2), mientras «El viaje» conlleva los procesos de interpretar representaciones matemáticas mediante palabras, combinar información y extraer inferencias y, en el apartado II) traducir a y entre representaciones matemáticas (procesos 1, 5,2 y 3).

Esta sección ofrece un conjunto de actividades diseñadas para clarificar lo que se entiende por estos objetivos de evaluación que obviamente cubren un campo más amplio que los apartados habituales «método» y «exactitud» utilizados en la evaluación de la técnica matemática. Estas actividades pretenden ayudar a los profesores en una mejor comprensión de las preguntas y esquemas de corrección y en la evaluación informal del trabajo de sus alumnos en el aula.

Una actividad de calificación

1. Considera las preguntas «Camping», «Yendo a la escuela» y «Carrera de vallas» e intenta decidir qué proceso se está examinando en cada parte del problema. Luego rellena la siguiente tabla:

		Proceso que se está examinando						
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Camping	I) II)							
	III) IV)							
	V)							
	VI)							
Yengo a la escuela	I)							
	II)							
	III)							
	IV)							
La carrera de vallas								

Esta actividad es una estrategia útil a menudo para idear un esquema de calificación.

2. Considera ahora el problema del «Camping». Decide cuántos puntos deberían asignarse a cada parte. (La puntuación total para esta pregunta es de 15 puntos). Discútelo con tus colegas. ¿Discrepais en el peso de cada parte? Intentad resolver las discrepancias. Haced lo mismo para «Yendo a la escuela» (que también vale 15 puntos).

Podeis comparar vuestras asignaciones con las que se dan en el libro.

Si tienes tiempo, puedes mirar las respuestas de alumnos dadas para estas dos preguntas en la sección «Modelos de preguntas de examen». Intenta calificarlas siguiendo tus esquemas de calificación.

3. Como es más difícil diseñar un esquema de calificación para «La carrera de vallas», sugerimos dedicar el resto de la sesión de calificación a este problema. La estrategia anterior no es aplicable a esta pregunta. Las respuestas de los alumnos pueden ser extremadamente variadas. Si aún no lo has hecho, responde tú mismo al problema y luego discute qué puntos consideras que son más importantes de mencionar. Haz una lista. Puede ser algo larga —y sólo hay 8 puntos para esta pregunta; por lo tanto, intenta decidir qué factores consideras de mayor importancia.

A continuación se dan seis textos de alumnos para esta pregunta. Léelos todos una vez antes de intentar evaluarlos. Sobre la base de tu impresión general ordénalos de mejor a peor. (Todavía no discutas con tus compañeros este orden.) Escribe tu clasificación en la columna C_0 del siguiente cuadro:

	Calificador 1				Calificador 2				Calificador 3				Calificador 4			
Texto	C_0	C_1	P_1	P_2	C_0	C_1	P_1	P_2	C_0	C_1	P_1	P_2	C_0	C_1	P_1	P_2
A Sharon																
B Sean																
C Simon																
D David																
E Jackie																
F Nicola																

Claves: Clasificación según la impresión general............ C_0
Puntuación provisional............................ P_1
Clasificación según la puntuación.................. C_1
Puntuación definitiva .... P_2

A continuación, compara la lista de factores que consideras importantes con las listas elaboradas por tus compañeros y con el esquema de calificación de la página 118. Discute las discrepancias.

Utiliza nuestro esquema de calificación para puntuar los seis textos y escribe tu puntuación en P_1. Escribe también la nueva clasificación que surge según la puntuación en la columna C_1.

Ahora compara tus resultados con los de tus colegas, considerando cada uno de los seis escritos. Tratad de eliminar diferencias y escribid la puntuación definitiva en la columna P_2.

Finalmente, podéis comparar vuestras calificaciones con las que se dan en la página 269.

Texto A: Sharon

El competidor A sale con buen ritmo y va cada vez más rápido y empieza a reducir la velocidad al final pero no drásticamente.

El competidor B está haciendo una buena velocidad pero no está yendo tan rápido como A la mitad de la carrera. Ya cerca del final decide aumentar su ritmo. Está tardando más tiempo en acabar la carrera.

El competidor C sale con una carrera realmente rápida, pero se cansa y tiene que mantenerse a la misma velocidad durante un rato. Creo que se ha parado, no está recorriendo ninguna distancia pero para de correr otra vez. Pero ha hecho el mayor tiempo.

Texto B: Sean

En los primeros segundos de la carrera C hace la mejor salida seguido de A y yendo B en la cola pero después de unos segundos C ha golpeado una valla y se ha caído, lo que le deja a A en cabeza seguido de B. Cuando se levanta C empieza de nuevo pero no les puede coger. En el último tramo de la prueba A está empezando a cansarse y B en una explosión final de aceleración corta el primero la cinta seguido de cerca por A y C llegó el último.

Texto C: Simon

La carrera de vallas. C sale el primero seguido por A y luego B. ¡Oh tragedia! C se ha caído aproximadamente a los 120 metros: Por lo tanto A está en cabeza acercándose al final seguido de B y luego C. ¡Oh! y B está realizando un último desafío y el resultado es 1.º, B; 2.º, A, y 3.º, C.

Texto D: David

Salen yendo todos bien. Cuando se aproximan a la señal de los 100 metros B va delante de A con C detrás. ¡Oh no!, C ha golpeado mal la valla pero sí, está bien y está en pie otra vez.

Acercándose a la señal de 200 metros A ha adelantado a B. C todavía se está quedando atrás.

A los 300 metros está todavía A delante de B. C está fuera de carrera porque está muy lejos por detrás.

A se está cansando. Sí, B ha sobrepasado a A. En la meta es B luego A con C todavía cojeando por la pista.

Texto E: Jackie

El atleta A está en segunda posición en los primeros 100 metros. Cuando pasa la señal de 100 metros su tiempo es de alrededor de 10 segundos. Su velocidad se mantiene aproximadamente igual durante los siguientes 100 metros y cuando pasa la señal de 300 metros el tiempo es de unos 50 segundos. Termina la carrera en aproximadamente 1 minutos 10 segundos.

El atleta B en los 100 primeros metros es más lento que el atleta A. Su tiempo, después de los 100 metros, es de unos 20 segundos. Su velocidad se mantiene parecida en los siguientes 100 metros y cuando pasa la señal de 300 metros el tiempo es de unos 60 segundos.

Termina la carrera en 1 minuto 5 segundos aproximadamente. Por lo tanto aceleró cerca del final.

El atleta C es más rápido que el atleta A, B en los primeros 100 metros. Aproximadamente en la señal de 150 metros se para gradualmente pero acelera otra vez en los últimos 200 metros pero termina la carrera en aproximadamente 1 minuto 40 segundos.

Texto F: Nicola

C corre rápido al principio con A un poco más lento y B el más lento de todos. Entonces A coge velocidad y B está yendo casi igual de rápido, pero C ahora frena bastante. A y B están codo con codo cuando se acercan al final de la carrera pero B gana, justo por unos pocos segundos. C es tercero, bastante después de A.

Sugerencia de esquema de calificación aplicado a los seis textos:

		Texto					
		A	B	C	D	E	F
1 punto para cada uno de estos datos	Al principio, C va en cabeza		1	1		1	1
	Al cabo de un rato, C se para	1	1	1	1	1	
	Cerca del final, B adelanta a A		1	1	1		1
	B gana		1	1	1		1
2 puntos para 4, ó 1 punto para 2 de estos datos	A y B pasan a C		X	X			
	C empieza a correr otra vez		X		X	X	
	C corre a menos velocidad				X		
	A pierde velocidad o B acelera	X	X	X	X	X	
	A es segundo o C es último		X	X	X		X
	Calidad de comentario	0	2	1	2	0	1
	TOTAL	1	8	6	7	3	4

5. **Guía para la discusión en el aula**

Estas sugerencias pretenden ser útiles para promover discusiones útiles y animadas en las que los alumnos se sientan capaces de intercambiar ideas y examinar hipótesis. Normalmente, los alumnos sólo son capaces de participar si han hablado previamente sobre las cuestiones en parejas o pequeños grupos. No olvidar dar tiempo para ello.

Durante las discusiones en el aula, el papel del profesor debería:

Ser fundamentalmente un Moderador o Facilitador que:

— Dirige el curso de la discusión y da a todos la oportunidad de participar.
— No interrumpe ni permite a los demás interrumpir al que habla.
— Valora todas las opiniones y no impone su propio punto de vista.
— Ayuda a los alumnos a clarificar sus ideas en sus propios términos.

> «Oíd lo que dice Marta.»
> «Gracias, Pablo, tú que opinas, Susana?»
> «¿Qué te parece eso, Andrés?»
> «¿Hay alguna otra idea?»
> «Belén, ¿puedes repetir eso, por favor?»

Ser ocasionalmente un Interrogador o Provocador que:

— Introduce una nueva idea cuando la discusión decae.
— Investiga un punto de vista.
— Hace de abogado del diablo.
— Enfoca a un concepto importante.
— Evita realizar preguntas múltiples, dirigistas, retóricas o cerradas, que sólo requieran respuestas monosilábicas.

> «¿Qué ocurriría si...?»
> «¿Qué puedes decir sobre el punto en que la gráfica corta a los ejes?»

No ser nunca un Juez o Evaluador que:

— Valora todas las respuestas con un «sí», «bien», «interesante», etc. (A menudo esto dificulta que a los demás aporten ideas alternativas, y predispone más hacia resultados exteriormente aceptables que hacia un diálogo exploratorio.)
— Resume prematuramente.

> «Eso no es lo que estaba pensando.»
> «Estás casi en ello.»
> «Sí, de acuerdo.»
> «No, deberías haber dicho...»
> «Puede decir alguien lo que está mal en la respuesta de Iratxe?»

ISBN 84-7585-236-X
9 788475 852362

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
HEZKUNTZ ZIENTZIEN INSTITUA