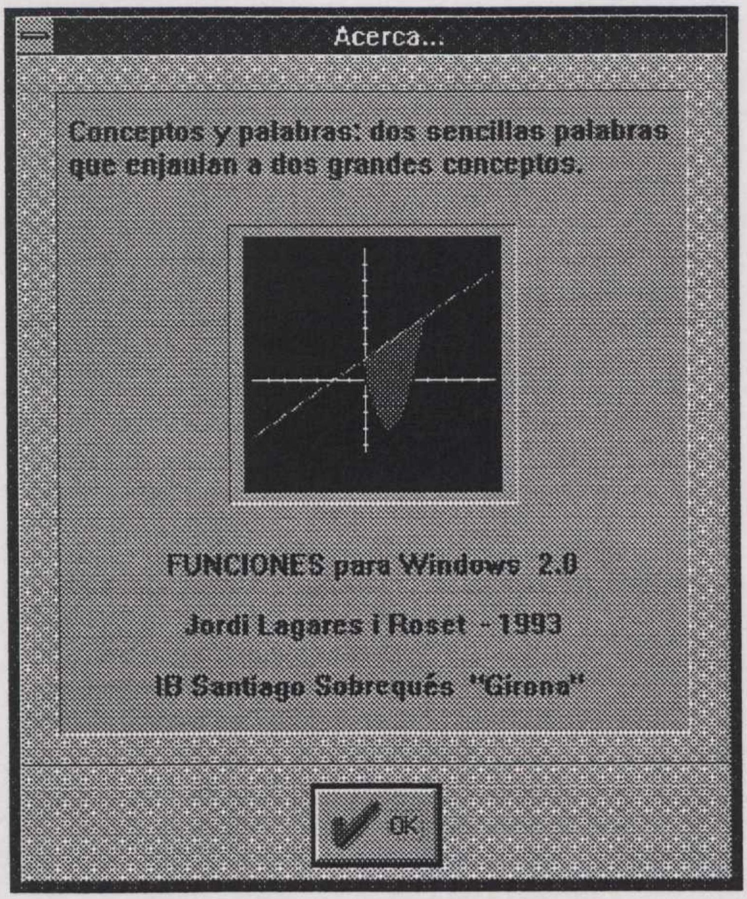
FUNCIONES PARA WINDOWS

Coordinador: Jordi Lagares i Roset

Serie
Software educativo para el aula

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación
N. I. P. O.: 176-93-047-7
Depósito legal: M-19184-1993
Imprime: MARÍN ÁLVAREZ HNOS.


Acerca...
Conceptos y palabras: dos sencillas palabras que enjaulan a dos grandes conceptos.
FUNCIONES para Windows 2.0
Jordi Lagares i Roset - 1993
IB Santiago Sobrequés "Girona"
OK

Conceptos y palabras:
dos sencillas palabras que enjaulan a dos grandes conceptos.

ÍNDICE

0 - PRÓLOGO.

Este programa es el producto de la evolución de FUNCIONES (presentado y premiado en el anterior concurso) hacia el entorno WINDOWS.

La anterior versión (a partir de ahora le llamaremos Funciones para DOS) evolucionó llegando hasta la versión 1.3 con unos cambios que le daban un gran valor añadido. Esta versión es actualmente de dominio público. Se incluye en un disco aparte, entregándola fuera de concurso para que dispongan de ella según crean oportuno.

Las modificaciones de la versión 1.3 respecto la 1.01, que fue la que participó en el pasado concurso, vienen explicadas en un fichero texto denominado LEERME.TXT.

La presente versión **FUNCIONES para Windows** incorpora dichas novedades y muchas más. Las más destacables son:

Funciona en el entorno Windows, que implica facilidad y uniformidad de manejo, y la prelación más interesante es el poder compartir con otras aplicaciones. De hecho las gráficas hechas con este programa pueden ser incluidas en cualquier otro programa Windows (Procesador de texto, hoja de cálculo...) haciendo la simple opción de **CORTAR** en, y **COPIAR** del, **PORTAPAPELES**, que, en la práctica, son tres pulsaciones de ratón. Otra ventaja del entorno Windows es el poder ejecutar una misma aplicación varias veces. Así, si queremos estudiar dos funciones individualmente para compararlas, lo único que tenemos que hacer es ejecutar el programa dos veces.

La otra gran novedad es que puede representar **FUNCIONES NUMÉRICAS**, ofreciéndose para ellas todas las posibilidades de cálculo que ya teníamos para las **EXPLÍCITAS**.

1 - INTRODUCCIÓN. Para los que tengan prisa.

FUNCIONES para Windows es un programa que representa funciones definidas de forma explícita o de forma **numérica** mediante una tabla de doble entrada.

Para arrancarlo desde la unidad de disquete, escriba WIN FW seguido de <RETURN>.

Su campo de aplicación es la asignatura de Matemáticas, en cualquier dominio donde aparezca el tema FUNCIÓN. Incluso puede aplicarse para otras materias en las que se trabaja con dicho concepto, como FÍSICA o ECONOMÍA

Permite estudiar, dada una función, TODO (casi todo), lo que hay en las programaciones oficiales de la asignatura de Matemáticas, durante TODA la enseñanza primaria y secundaria.

Su principal objetivo es ayudar a los alumnos a aprehender una gran mayoría de los conceptos ligados con las funciones. Así, la mayoría de las opciones de los menús son referencias directas ligadas a éstos, es decir: (una función) Imagen, Antiimagen, Raíces, Discontinuidades aisladas, Máximos, Mínimos, Puntos de inflexión, Derivada en un punto, Integral definida, Integral de línea, Intervalos de crecimiento, Intervalos de decrecimiento, Intervalos de concavidad, Intervalos de convexidad, Función derivada, Segunda derivada, Función integral, Cortes y Área entre dos funciones.

También, creemos, puede facilitar el aprendizaje de otros conceptos relacionados con el tema FUNCIÓN, no necesariamente matemáticos y, lo que es más importante, su interrelación. Eso es darse cuenta de lo importante del tema en otros campos y cómo puede ayudar un concepto matemático a resolver problemas no matemáticos. Para una muestra de ello, vea el apartado EJEMPLOS del índice.

AGRADECIMIENTOS.

Desearía agradecer a las personas que con sus consejos, sugerencias y paciente observación del programa, han hecho posible que se enriqueciera considerablemente. También quisiera agradecerles que lo hayan utilizado con los alumnos de sus respectivos grupos.

Mª Jesús Mora Giner, catedrática de Matemáticas.
Julià Vilà Algam, profesor agregado de Matemáticas.
Dolors Masferrer Baqué, profesora agregada de Matemáticas.
Carles Gómez, profesor agregado de Matemáticas.
Rafael López, profesor agregado de Matemáticas.
Manel Cañigueral, profesor agregado de Matemáticas.

Tampoco podría olvidar a Fernando Aisa Milá, profesor agregado de Geografía e Historia, a Jordi Pla Planas, profesor agregado de literatura, y a Antonio Cobos Fajardo, profesor agregado de lenguas clásicas, por su inestimable ayuda en la confección de esta memoria.

2 - DATOS IDENTIFICATIVOS DEL AUTOR Y DEL PROGRAMA.

Título del programa:	FUNCIONES para Windows
Asignatura:	Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Economía...
Nivel educativo:	Primaria, Secundaria 12-16, 17-18 Primer ciclo educación Universitaria
Nombre y apellidos del autor:	JORDI LAGARES ROSET
DNI:	77906458
Dirección:	Passeig de l'11 de Setembre nº 15 17850 BESALÚ (GIRONA)
País:	España
Teléfono:	(972) 590045

3 - DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO. MÉTODOS DE ELABORACIÓN.

El programa ha sido realizado en un ordenador PC compatible. Se ha empleado la versión 3.1 del entorno Windows (Funciona perfectamente mediante la versión 3.0) utilizando el lenguaje BORLAND PASCAL v: 7.0 . Los derechos han sido adquiridos por el autor.

El Boletín Oficial del Estado donde se presenta la RESOLUCIÓN de la convocatoria de este concurso habla de este apartado con los términos siguientes: *Descripción del procedimiento y métodos usados en su elaboración, especificando los problemas surgidos, así como las opciones y soluciones adoptadas, con explicación razonada para ello.* Creo que es aquí donde puedo comentar las razones que me impulsaron a escribir este programa para el entorno Windows.

La primera de ellas surgió el mismo día de la entrega de premios del año anterior, donde, hablando con varios asistentes todos conveníamos la futura preponderancia de este entorno. De hecho creemos que la premonición era bastante acertada. En una revista de informática fechada a finales de verano, se decía que se prevé para final de año que las ventas de aplicaciones Windows superen a las de DOS.

La segunda, y más importante, se dio cuando tuve el primer contacto con el entorno Windows, cuando vi la posibilidad que ofrece de intercambiar datos entre aplicaciones. De hecho, no decidí en firme embarcarme en la elaboración de este programa para presentarlo en la presente convocatoria, hasta que conseguí trasladar los gráficos a otros programas.

Otra de las ventajas es la uniformidad del manejo de aplicaciones. Exagerando un poco, conocida una, conocidas todas.

A nivel de programación, quizás sea algo más complicado que en el entorno DOS, pero las ventajas superan en mucho a las desventajas. En entorno DOS, uno tiene que preocuparse de todo: el tipo de monitor, las impresoras (???)... Recordemos que las grandes aplicaciones llevan uno o dos discos con los "drivers" de impresoras y muchas veces, precisamente, la nuestra no se halla. En entorno Windows esto no sucede. El programa escribe en la pantalla. Windows ya cuidará de que se materialice. Si quiere imprimir, también será Windows quien lo haga. De hecho, la presente aplicación no permite imprimir, pero sí puede pasar sus dibujos a otros programas que sí saben hacerlo, y muy bien.

Esta es, según creo, la ventaja principal que podemos aprovechar los programadores independientes. No se puede competir con las grandes compañías haciendo procesadores de texto, pero sí desarrollando pequeñas ideas que puedan ser interesantes, que hasta los SUPERPROCESADORDETEXTOHOJADECÁLCULO puedan aprovechar y que no sea necesario ser un experto en la infinidad de monitores, placas, impresoras, etc. para que sean realizables .

Windows, creo, lo hace posible.

Diferencias con la versión del concurso anterior.

Debido a que el programa anterior fue realizado en BASIC y éste en PASCAL, utilizando "Programación Orientada a Objetos", y también a causa de precisar el entorno Windows, el programa ha sido enteramente reescrito.

Todo ello obliga a plantearse el análisis y la programación de una forma totalmente distinta a la que podemos llamar programación tradicional..

Algunas de las novedades ya van incluidas en la versión 1.3 del programa **FUNCIONES para DOS**, que se incluye fuera de concurso. Lo indicaremos mediante la nota **(1.3)**.

-Los cálculos se realizan con mayor aproximación, hasta 6 cifras decimales. En la versión del concurso anterior, sólo se conseguían 2.

-Puede representar 6 funciones. En la versión del concurso anterior, sólo se conseguían 5.

-El número de caracteres que puede tener una función explícita es de 200. En la versión del concurso anterior, sólo se conseguían 50.

-Hay importantes diferencias en la **reglas de sintaxis** de escritura de funciones:

Para escribir la exponencial podemos hacerlo **exp()**. Recordemos que antes se debía hacer , aln() .**(1.3)**.

Para escribir pi, podemos hacerlo: **pi** o **p**. Para escribir el número e podemos transcribir: **ne.(1.3)**.

Si a un paréntesis, **x** o función, le precede una **multiplicación** y a ésta un **número**, podemos no escribir el signo de multiplicar. Lo que antes se escribía:

3*x^2+2*sen(2*3.1416*x)-2*(x-3*aln(x))

Puede ahora escribirse:

3x^2+2sen(2px)-2(x-3exp(x)).

-Las opciones, **Imagen** y **Derivada en un punto**, ofrecen la posibilidad, mediante un clic de ratón, de conocer los valores inmediatamente anterior y posterior.**(1.3)**.

-La opción, **Derivada en un punto**, cuando la opción **trazar cálculos** está activa, dibuja la función derivada.

Creemos que estas posibilidades dan un alto valor pedagógico a estas opciones

-La opción, **integral definida**, realiza los cálculos con mayor exactitud **(1.3)**. Se permite calcularla con el extremo inferior mayor que el extremo superior. Así se pueden estudiar todos los casos de integral definida.

-La opción **integral de línea** no se hallaba en la anterior versión **(1.3)**.

-Las opciones **intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad**, han mejorado mucho. De hecho, se señalan en el eje X, que es donde deben estar, mostrando los valores numéricos de los extremos de los intervalos.

-Tenemos la posibilidad de dibujar la **trama** del plano cartesiano. La cuadrícula.

-Tenemos la posibilidad de mostrar los valores numéricos de las divisiones de los ejes.

-Podemos estudiar cualquier punto del gráfico mediante una pulsación de ratón.

-Si en los cuadros de entrada de valores, ejes, imagen, derivada, integral, queremos hacer un cálculo, no precisamos de calculadora. Así, por ejemplo, si como Origen eje X queremos pones menos dos veces pi, escribiremos exactamente eso, -2pi.

-También existe una importante diferencia en las **Unidades de los ejes.** Actualmente significan la separación entre divisiones de los ejes. En la versión anterior, éstas eran fijas. Al cambiar el valor de las Unidades de los ejes, lo que provocaba era un cambio de escala. De hecho, cambiaban los valores de los extremos. Y si el cambio se realizaba en ellos, también variaba el de las unidades. En la versión actual, esto no ocurre. Si quisiéramos realizar un cambio de escala, por ejemplo, el eje X el doble de resolución, lo que debemos hacer es dividir el valor de los extremos por dos.

-Una cosa que la presente versión **no** puede hacer es parar el proceso inicial de dibujar la función mediante la tecla <ESC>. Todos los procesos dinámicos, **raíces, máximos, mínimos, función derivada, cortes...**, sí pueden interrumpirse mediante la tecla <ESC> o bien mediante una pulsación del ratón en la ventana.

Novedades destacadas.

-Se permite representar **funciones numéricas** (!!!) y utilizar todas las posibilidades que ofrece el programa para ellas. Creemos que ofrece un nuevo gran abanico de potencialidades.

-Hay varias formas de representar las funciones numéricas: **interpolación, interpolación lineal,** o mediante ajustes, **regresión lineal, regresión parabólica, regresión exponencial, regresión potencial**.

-Actúa en el **entorno Windows**. Uniformidad y facilidad de manejo. Lo más importante es el poder compartir recursos con otras aplicaciones. La prueba es esta misma memoria, realizada con un procesador de textos, el programa **FUNCIONES para Windows**. Y sin utilizar tijeras(!!!).

-Otra gran virtud del entorno Windows es que permite ejecutar varias copias del mismo programa **simultáneamente**. Podemos trabajar con dos o más **FUNCIONES para Windows** concurrentemente(!!!).

Novedades de la ayuda.

-Es una ayuda totalmente integrada en el entorno Windows.

-En ella, hay prácticamente todo el presente manual y los ejemplos. Todo ello accesible mediante hipertexto.

Novedades de los ejemplos.

-Se ofrece un conjunto de fichas didácticas preparadas como guiones directamente utilizables por los alumnos. También pueden servir como modelo para que los profesores creen las suyas propias.

La primera de ellas, es el estudio de todos los elementos notables de una función.

Otra es el cálculo de la cuota íntegra a partir de la base imponible de la declaración de renta. Puede servir como guía didáctica sobre cómo usar el programa para estudiar funciones numéricas. También, para darse cuenta de lo diversas que pueden ser las posibilidades del presente programa. Y también, por qué no decirlo, ya que creemos que es una de las virtudes del programa, darse cuenta en dónde podemos hallar relaciones entre conceptos matemáticos y objetos "más familiares(??)". Relación entre derivada y el tipo aplicable.

-Se ofrece, también, todo un conjunto de ejemplos, más cortos, que ya se incluían en la anterior versión. El conjunto se ha ampliado, se ha adaptado a las características del presente programa y, sobre todo, se le han corregido los (?) errores.

Como el conjunto es bastante numeroso, da una idea de las muchas situaciones en que el programa es utilizable. También pueden servir como germen de fichas que los propios profesores puedan realizar. Todos los ejemplos son accesibles directamente por el programa mediante la opción **Ayuda**.

4 - DESCRIPCIÓN DE PROCESOS DE VALIDACIÓN EDUCATIVA.

Debido a que todavía nuestros centros no están dotados de sistemas Windows este programa no ha podido probarse en aulas enteras. Pero lleva una gran experiencia heredada de la anterior versión FUNCIONES para DOS, que ha sido usado en múltiples ocasiones y en bastantes centros. Recordemos que dicha versión, actualmente, es de dominio público y todo el mundo puede usarla. Por ello, dentro de un tiempo, esperemos que sea breve, cuando los centros educativos dispongamos de ordenadores con el sistema operativo Windows, este programa podrá ofrecer las *funcion*alidades que ya conocemos de la anterior versión, más las novedades que ahora se ofrecen. De todas maneras, ha sido experimentado con grupos reducidos y parece confirmar las expectativas que fueron depositadas.

5 - REQUERIMIENTOS DE HARDWARE Y SOFTWARE.

El programa se distribuye en un disquete de 3 1/2". Se halla en un fichero FW.EXE. La ayuda se encuentra en el fichero FWAYUDA.HLP. El manual de usuario en el fichero FWMANUAL.TXT.

Se necesita un ordenador PC compatible, con un microprocesador 286 o superior y que disponga del entorno WINDOWS versión 3.0 o posteriores. Precisa de unos 500 K libres.

6 - INSTALACIÓN Y PUESTA EN MARCHA.

Para ejecutar el programa desde el disquete, teclee **INICIO** o **WIN FW**, seguido de la tecla <RETURN>.

Para instalarlo en un disco duro, ejecute desde el disquete INSTALAR, (fichero instalar.bat). Se crea un directorio en la unidad c:, llamado WinFun y copia todos los ficheros en él.

Si quiere cambiar el nombre del directorio, puede hacer la instalación manualmente. El listado de INSTALAR.BAT es el siguiente:

```
ECHO OFF
MD C:\WINFUN
A:\
COPY *.* C:\WINFUN
ERASE C:\WINFUN\INSTALAR.BAT
C:
CD C:\
CD WINFUN
ECHO Proceso de instalación completado.
ECHO Para ejecutar, FUNCIONES para Windows, teclee: INICIO Y RETURN.
```

A partir de aquí, para utilizarlo, puede proceder de tres modos distintos:

1ª Hallándose en el directorio WINFUN, teclee WIN FW.

2ª En el entorno Windows, en la ventana ADMINISTRADOR DE PROGRAMAS, vaya a la opción ejecutar del menú archivo y escriba en **Línea de comando c:\winfun\fw.**

3ª Instalándolo en un grupo de programas o en su propio grupo. En el manual de Windows se explica cómo debe hacerse esta operación. La ventaja consiste en que a partir de aquí, el programa tiene su propio icono y, para ejecutarlo, sólo tendrá que pulsar un doble clic al icono. (Unos ejes con 2 funciones y el área comprendida dibujados, con la leyenda FUNCIONES para Windows. Creemos importante mencionar que este icono fue generado por el propio programa funciones para Windows).

7 - MANUAL DEL USUARIO.

1 - Cómo Dibujar una función.

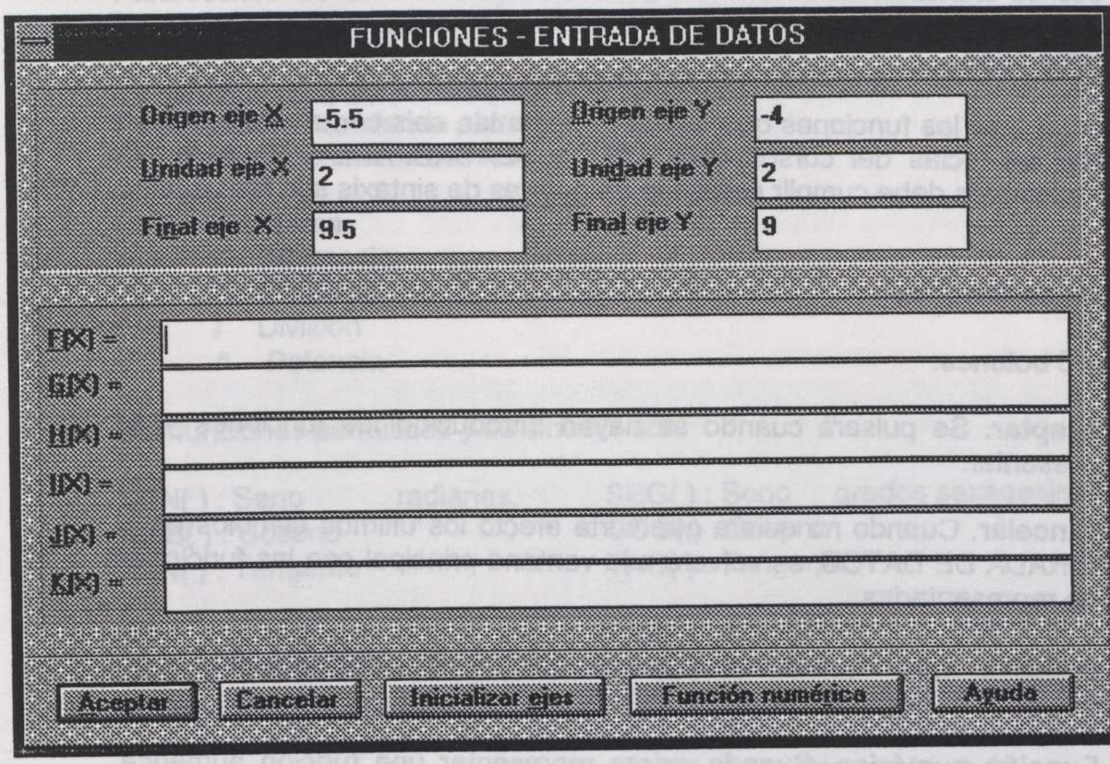
Al arrancar el programa, aparece un cuadro de diálogo denominado FUNCIONES - Entrada de datos. Este es el diálogo de control principal del programa.

Escriba una función, por ejemplo "SEN(X)". Pulse **<RETURN>** o haga clic en el botón **Aceptar**. Inmediatamente aparecerá la ventana **FUNCIONES** y se dibujará la función.

Si pulsa sobre el menú "1 fu.", accederá a toda una serie de opciones que podrá ejecutar sobre la función dibujada: Imagen, Antiimagen, Raíces, Discontinuidades aisladas, Máximos, Mínimos, Puntos de inflexión, Derivada en un punto, Integral definida, Integral de línea, Intervalos de crecimiento, Intervalos de Decrecimiento, Intervalos de concavidad, Intervalos de convexidad, Función derivada, Segunda derivada, Función integral.

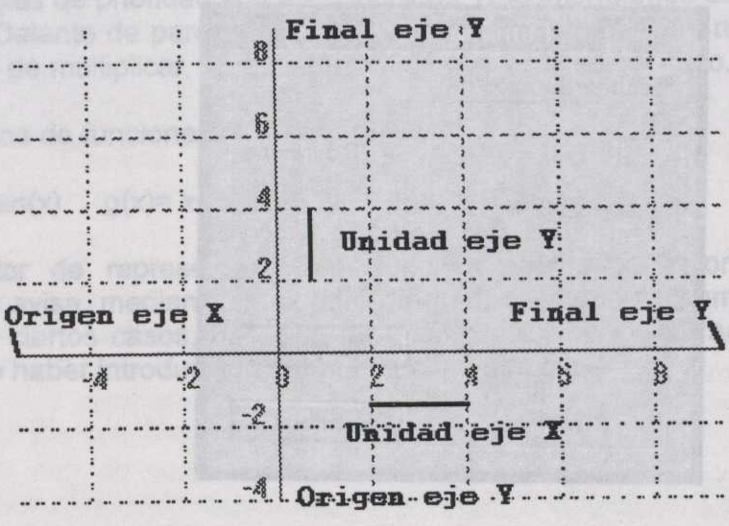
Si quiere cambiar las funciones o los valores de los ejes, escoja dentro del menú **Principal** la opción **Cambiar funciones o parámetros** refiriéndose a los valores de los ejes.

2 - Cuadro de diálogo: Funciones - Entrada de datos.



Es un cuadro de diálogo dividido en tres partes: La superior, sirve para introducir los valores de los ejes. La siguiente, precedidas por F(X)=, G(X)=,... es donde introduciremos las expresiones de hasta seis funciones. A continuación, la zona de botones.

Valores de los ejes



Hay que recordar que cada cuadro de entrada funciona como una calculadora. Así, si quisiéramos, por ejemplo, poner como Unidad eje X: pi/2, podemos escribir exactamente eso.

Expresiones

Escriba aquí las funciones que quiera representar, seis como máximo. Para editar, utilice las teclas del cursor <DELETE> y <BACKSPACE>. La forma de escribir las funciones debe cumplir una serie de normas de sintaxis son las usuales.

Zona de Botones

Hay 5 botones:

1 **Aceptar**. Se pulsará cuando se hayan introducido las funciones y se quieran representar.

2 **Cancelar**. Cuando no quiera que surta efecto los últimos cambios en el cuadro ENTRADA DE DATOS, se volverá a la ventana principal con las funciones previamente representadas.

3 **Inicializar ejes**. Aparecerán éstos con los valores originales, que son : para el eje X, -7.5, 1, 7.5 y para el eje Y, -5, 1, 5.

4 **Función numérica**. Cuando quiera representar una función numérica, pulse esta opción. Aparecerá un cuadro de diálogo en el cual podrá escoger cuál de las seis funciones escoge para representar una función numérica. Pueden representarse hasta un máximo de seis funciones numéricas. A continuación, aparecerá un nuevo cuadro de diálogo, función numérica - Introducir valores, en el cual podrá colocar los X y F(X) mediante números de la función.

Si lo que desea es realizar un ajuste, **regresión**, (Regresión - Introducir valores) active la **casilla de verificación**.

5. **Ayuda**. Accede a esta información.

3 - Normas de sintaxis.

Para escribir las funciones se deben seguir unas normas de sintaxis que, en principio, son las usuales. Las describimos a continuación:

La variable independiente la representaremos mediante X.
Se permite y recomienda el uso de paréntesis.
Las operaciones admitidas son:

+ Suma
- Diferencia
* Producto
/ División
^ Potencia

Las funciones permitidas y su sintaxis son:

SEN( ) : Seno	radianes.	SEG( ) : Seno	grados sexagesimales
COS( ) : Coseno	"	COG( ) : Coseno	"
TAN( ) : Tangente	"	TAG( ) : Tangente	"
ASE( ) : ArcoSeno	"	ASG( ) : ArcoSeno	"
ACO( ) : ArcoCoseno	"	ACG( ) : ArcoCoseno	"
ATA( ) : ArcoTangente	"	ATG( ) : ArcoTangente	"
LN( ) : Logaritmo Neperiano		LOG( ) : Logaritmo en base 10	
EXP( ) : Exponencial e^x		ALO( ):ArcoLogaritmo en base 10. 10^x	
ABS( ) : Valor absoluto			
PI o P : 3.141593		NE : 2.718282	

Recordemos que puede calcularse el logaritmo en cualquier base mediante la siguiente fórmula: $Log_b(x)=LN(X)/LN(b)$.

Las reglas de prioridad son las conocidas. Recomendamos escribir todas las operaciones. Delante de paréntesis y de las funciones anteriores, no es necesario poner el signo de multiplicar, en el supuesto de que éste sea el caso.

Ejemplos de funciones:

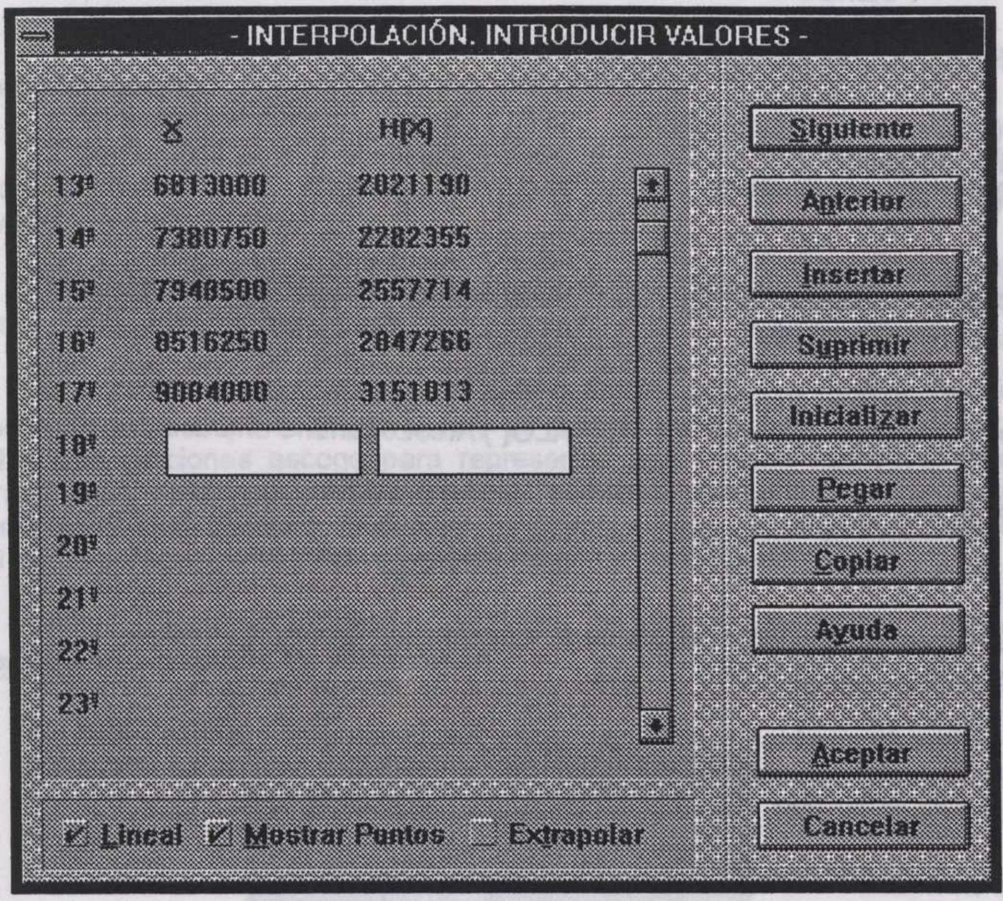
f(x)= sen(x)   g(x)= x^3-4x^2+3x-1   h(x)=(x-1)/((x-1)*(x+3))

Al tratar de representar una función introducida incorrectamente, el programa nos avisa, mediante un cuadro de mensaje, que ha ocurrido un error de sintaxis y, en ciertos casos, nos dice de que tipo es: haber cerrado demasiados paréntesis, no haber introducido ninguna función, etc.

4 - Cuadros de diálogo: Función numérica:

1- Interpolación - Introducir valores.

Este es el cuadro de diálogo más complejo del programa FUNCIONES. Pueden introducirse los valores X e Y de dos formas distintas: directamente de teclado o a través del "Portapapeles", en el cual habrán sido incluidas mediante otro programa, por ejemplo, una hoja de cálculo ,como EXCEL, un procesador de textos , como WRITE, o incluso por este mismo programa. Como máximo podemos alojar 400 valores.



Vemos dos cuadros de entrada en donde podemos introducir los sucesivos valores de X y su correspondiente imagen. Para pasar al siguiente valor, pulsamos <RETURN> o pulsamos el botón **Siguiente**. En el caso de que introdujéramos mal el número, el programa nos avisaría mediante un cuadro de mensaje.

Una vez introducidos unos cuantos valores, en caso de que estuvieran equivocados, podemos volver a editarlos desplazándonos mediante los botones **Anterior**, **Siguiente** (o RETORNO) o bien utilizando la **barra de desplazamiento**. Si quisiéramos incluir un valor entre dos previamente introducidos, pulsaremos el botón **Insertar**. En el caso de que hubiera 400 valores, se perdería el último.

Cuando queramos eliminar un valor, utilizaremos el botón **Suprimir**. Si queremos introducir una nueva función a partir del primer valor, pulsaremos **Inicializar**. Debido a que es una operación peligrosa, aparece un cuadro de confirmación.

Cuando queramos colocar datos procedentes del "Portapapeles", pulsamos **Pegar**. Aparece inmediatamente un cuadro de confirmación. Hay que decir que los números que lee del "Portapapeles" deben estar en formato texto. Para separar dos números, debe haber como mínimo un carácter no numérico como un espacio. Pueden utilizarse dos columnas numéricas creadas con EXCEL y copiarlas en el "Portapapeles". También dos columnas creadas con cualquier procesador de texto, como las del Ejemplo 3. Recordemos que, si hay algún carácter no numérico en medio de un número, podemos tener resultados inesperados.

Copiar. Copia los valores en el "Portapapeles" para cuando se quieran usar en otros programas o en este mismo.

Ayuda. Accede a esta información.

Aceptar. Sirve para validar los datos introducidos y volver al cuadro de diálogo principal **FUNCIONES**. Si escogemos esta opción, se realizan unas comprobaciones: que no haya errores en los números, que haya un mínimo de dos, y que no haya un valor de X menor que el anterior. En caso contrario, se nos informa y se nos devuelve al punto donde se halla el error. Si tenemos éxito, regresamos al CUADRO PRINCIPAL y, en el cuadro de entrada correspondiente a la función escogida, aparecerá la leyenda **FUNCIÓN NUMÉRICA**. Así se indica al programa que no hay una función **explícita** y debe realizar los cálculos de forma distinta. Si borráramos o añadiésemos alguna letra, al tratar de representar se nos informaría de un error de sintaxis. En el caso de que escribiéramos FUNCIÓN NUMÉRICA y no hubiésemos introducido datos, al representar la función saldría la leyenda NO TIENE IMAGEN para todos los puntos. Si borramos la palabra FUNCIÓN NUMÉRICA, podemos utilizar este cuadro de entrada para incluir una nueva función explícita. Los valores numéricos no se pierden, podemos volver a utilizarlos escribiendo de nuevo **FUNCIÓN NUMÉRICA** o mediante el botón **Función numérica** del CUADRO PRINCIPAL.

Cancelar. Cuando queramos olvidar lo que hayamos introducido de nuevo, como es una opción delicada, mediante un cuadro de confirmación deberemos ratificar la opción. En el caso de que así sea, los valores que permanecen son los de la anterior función.

Hay tres **"Casillas de verificación"** que podemos activar o desactivar pulsando en ellas. Por defecto se encuentran las tres desactivadas.

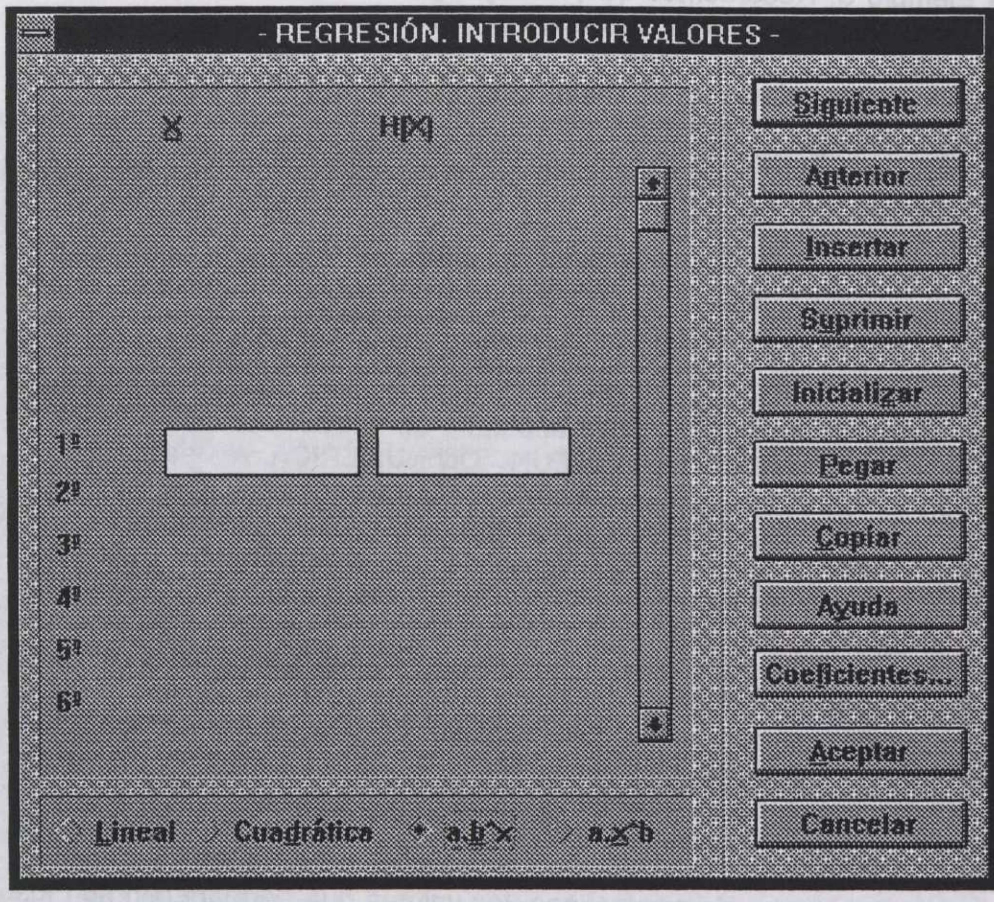
Lineal. Hará que la gráfica, entre cada dos puntos, sea aproximada mediante un segmento de recta. Por defecto aproxima mediante polinomios de tercer grado dando un alto grado de aproximación. Recomendamos comprobarlo mediante valores reales de funciones polinómicas de 2º y 3º grado.

Mostrar puntos. Marca los puntos que definen la función en la gráfica.

Extrapolar. La gráfica será representada más allá de los valores máximo y mínimo de la función.

2- Regresión - Introducir valores.

Este cuadro es similar al anterior. Se ofrece un nuevo botón, **Coeficientes...**, con el cual accedemos a una información: Valores máximos mínimos, medias aritméticas, desviaciones típicas, covariancia, los coeficientes de correlación de los cuatro tipos de ajuste posibles así como los errores medios cometidos en cada uno de los casos.



Para escoger uno de los cuatro tipos de ajuste pulsaremos el botón correspondiente.

Al pulsar el botón **Aceptar** se realizan una serie de comprobaciones: que no haya números erróneos:
-Que haya un mínimo de 3 pares de valores.
-Que no haya valores superiores a 100000000.
-En el caso del ajuste parabólico y exponencial (a.b^x) el mayor número permitido es 100000.
-En el caso exponencial no están permitidos valores de la Y menores o iguales que 0. -En el caso potencial (a.x^b) no están permitidos valores de X ni de Y menores o iguales a 0.
-Finalmente comprueba que dichos valores permiten el tipo de ajuste seleccionado.

En cualquier caso, si no es posible realizar el ajuste se nos informa mediante un cuadro de error. No podremos continuar hasta que éste sea subsanado.

Si un tipo ajuste no es posible, en el cuadro **coeficientes** aparece la leyenda NO.

Cuando queramos conocer el mejor tipo de ajuste para nuestros datos pulsaremos el botón **Coeficientes....** Se considera el mejor ajuste el que de el menor **ERROR MEDIO**.

La información contenida en el cuadro **coeficientes** puede ser copiada en el portapapeles pulsando el botón **Copiar**.

Las fórmulas utilizadas para calcular los distintos tipos de coeficientes son las siguientes:

$$Media\_aritmética = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \qquad Desviación\_típica = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = S_x$$

$$Covariancia = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = S_{xy}$$

Regresión lineal:

$$Coeficiente\_de\_Correlación = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

$$Recta\_de\_Regresión \rightarrow y = ax + b$$

$$a = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Regresión cuadrática:

$$Coeficiente\_de\_correlación = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a x_i^2 + b x_i + c - y_i)^2}{n S_y^2}}$$

Donde *a, b, c,* son los coeficientes de la parábola. El proceso para encontrarlos es un poco largo y aquí no lo mencionamos.

Regresión exponencial:

Se trata de realizar una interpolación lineal con los valores x, ln(y).

Regresión potencial:

Se trata de realizar una interpolación lineal con los valores ln(x), ln(y).

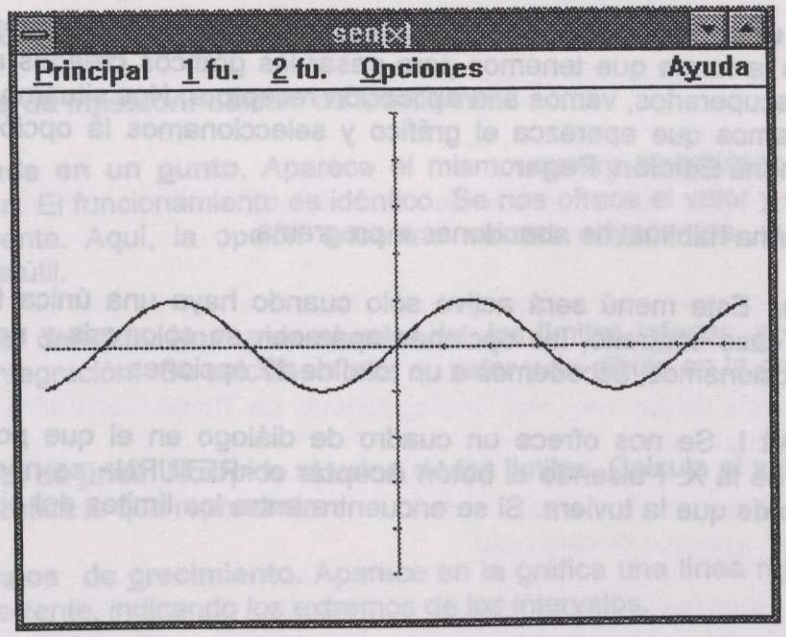
ERROR MEDIO:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} abs(y_i - y_{i,teórico})}{n}$$

Donde ***n*** para todos los casos es el número de pares de valores introducidos.

5 - Opciones de los menús.

Si termina el proceso de dibujar una o más gráficas, por ejemplo la función "SEN(X)", observaremos la ventana FUNCIONES con el siguiente aspecto:



Encontramos los típicos botones:

Minimización. La ventana queda reducida a su icono. Esto es muy útil para despejar el área de trabajo cuando empleamos varias aplicaciones juntas o, incluso, cuando trabajamos con varios programas FUNCIONES para Windows simultáneamente.

Maximización. Muy interesante para utilizar toda la pantalla para representar los gráficos.

La esquina inferior derecha sirve para **dimensionar** la ventana. Con ella podremos dar al gráfico el tamaño que deseemos.

Creemos que la forma habitual de trabajar debe ser con la ventana maximizada. No la utilizaremos cuando queramos ejecutar varias veces el programa o bien cuando queramos darle un cierto tamaño al dibujo, cuando, por ejemplo, queramos incluirlo en algún texto.

Pulsando en cualquier punto de la ventana FUNCIONES, con el botón izquierdo del ratón, aparecen señaladas las coordenadas de dicho punto.

Vemos una **barra de menú** con 5 opciones: **Principal**, **1 fu.**, **2 fu.**, **Opciones**, **Ayuda**.

Menú **Principal**. Si lo seleccionamos, accedemos a tres submenús:

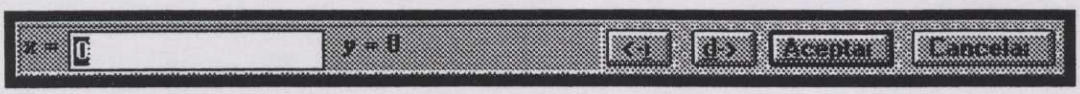
Cambiar funciones o parámetros... Alt F. Sirve para ir al cuadro de diálogo FUNCIONES - Entrada de datos. Cuando queramos cambiar de funciones o los valores de los ejes. <Alt F> es una tecla aceleradora, es decir que, pulsándola, se accede a dicha opción.

Copiar en el portapapeles. Para copiar el contenido de la ventana en el "Portapapeles". Es la forma que tenemos para pasar los gráficos creados a otros programas. Para recuperarlos, vamos a la aplicación receptora. Nos situamos en el lugar donde deseamos que aparezca el gráfico y seleccionamos la opción, que suele estar en el menú **Edición, Pegar**.

Salir. La forma habitual de abandonar el programa.

Menú **1 fu.**. Este menú será activo sólo cuando haya una única función representada. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a un total de 17 opciones.

Imagen Alt I. Se nos ofrece un cuadro de diálogo en el que podemos introducir el valor de la X. Pulsando el botón **Aceptar** o <RETURN> se nos da su imagen en el caso de que la tuviera. Si se encuentra entre los límites del eje X, es dibujada



Los botones **<-i** i **d->** permiten calcular las imágenes de los puntos contiguos. Esto da unas enormes posibilidades a esta opción como, por ejemplo, para explicar el concepto de **máximo** relativo de una función.

Finalmente, si queremos abandonar esta opción, pulsaremos el botón **Cancelar** o la tecla <ESC>.

Antiimagen. Se nos pide un número, mediante un cuadro de diálogo, que ha de hallarse entre los límites del eje Y. De forma dinámica, se nos irán indicando, caso de que las tuviera, todas sus antiimágenes.

Raíces. El programa, de forma dinámica, busca las raíces de la función.

Discontinuidades aisladas. El programa da los puntos singulares donde NO está definida la función. En este caso, nos dará el límite. En el caso "1/(X-2)", nos dirá que en 2 lim= infinito. Si fuera "sen(X)/X", nos escribirá que en el 0 lim=1.

Sólo indica las que ha encontrado por su precisión. Por ejemplo: (x^2-4)/(x-2), que tiene una discontinuidad en x=2, si la unidad del eje X es entera, 1 por ejemplo, sí será encontrada. Pero si representamos (x-3.1234)^2/(x-3.1234), que tiene una clara discontinuidad en 3.1234, no será hallada. Para hacerlo, tendríamos que poner como unidad del eje X 3.1234 o un múltiplo suyo. Esto es debido a que se utiliza un método totalmente numérico y a que se calcula en un cierto número de puntos. Concretamente, entre los valores izquierdo y derecho del eje X, se calcula en 600 puntos. En casos como TAN(X), aunque no encuentre exactamente donde se halla el punto donde no está definida la función y se disparen los valores, nos indica POSIBLE PUNTO DE DISCONTINUIDAD infinito.

Máximos. El programa nos da los máximos locales de la función.

Mínimos. Se nos ofrecen los mínimos.

Puntos de inflexión. Cálculo de los mismos.

Derivada en un punto. Aparece el mismo cuadro de diálogo que en la opción **imagen**. El funcionamiento es idéntico. Se nos ofrece el valor y el dibujo de la recta tangente. Aquí, la opción encontrar valores adyacentes, vuelve a ser especialmente útil.

Integral definida. Nos pide el valor de los límites inferior y superior del intervalo de integración. Se calcula, ofrece su valor y se dibuja en la gráfica lo que representa.

Integral de línea. Nos pide el valor de los límites. Calcula el valor y se nos dibuja en la gráfica lo que representa

Intervalos de crecimiento. Aparece en la gráfica una línea roja, donde la función es creciente, indicando los extremos de los intervalos.

Intervalos de decrecimiento, Intervalos de concavidad, Intervalos de convexidad. Lo mismo que el caso anterior, pero en la zona donde se cumple lo especificado. Para hallar los límites de los intervalos, podemos, asimismo, encontrarlos de una forma distinta calculando máximos, mínimos, puntos de inflexión y discontinuidades.

Función derivada. Se nos ofrece, de forma dinámica, la construcción de la gráfica de la función derivada. Para obtener un valor concreto, podemos escoger la opción derivada en un punto.

Segunda derivada. Construcción de la función derivada segunda.

Función integral. Construcción de la función integral a partir de un punto que, previamente, se nos habrá solicitado mediante un cuadro de diálogo . Para obtener un valor concreto, escoger la opción integral definida.

Ecuación de regresión.... Esta opción sólo aparece activa cuando haya una única función numérica del tipo, **regresión**, introducida. Nos ofrece la ecuación de la función ajustada. También el coeficiente de correlación. Dicha información podemos pasarla al portapapeles pulsando el botón Si.

Menú 2 fu.. Este menú será activo solo cuando haya dos funciones representadas. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a 2 opciones.

Cortes. Busca los puntos de corte entre las dos funciones.

Área. Cálculo del área entre las dos funciones entre dos puntos cualesquiera. Dichos puntos tendrán que ser introducidos previamente mediante un cuadro de diálogo.

Menú **Opciones**.

Limpiar. Cuando hemos realizado una de las anteriores opciones, por ejemplo cálculo de la integral definida, su efecto queda dibujado hasta que una nueva opción sea requerida. Si interesa dejar el estado inicial de la gráfica, debemos utilizar esta opción.

Las siguientes seis opciones son del tipo **Activo/Inactivo**. Cuando están activadas aparece el símbolo ***V*** delante.

Pizarra. Cambia el fondo, generalmente blanco, a negro, que es el color tradicional de FUNCIONES para DOS. Por defecto, aparece desactivada

Trama. Además de los ejes, teje una cuadrícula de líneas discontinuas. Por defecto, aparece desactivada

Valor unidad de los ejes. Cada unidad de los ejes aparece acompañada de su valor. Por defecto aparece desactivada

Mostrar puntos singulares. Cuando el programa encuentra máximos, mínimos, intervalos, etc. aparecen con su valor. Por defecto, esta opción aparece activada. Si la desactivamos estos valores no aparecerán.

Trazar cálculos. Cuando el programa busca máximos, mínimos, intervalos, etc., lo hace de forma dinámica y nos va indicando por dónde anda la búsqueda mediante una línea roja que va cruzando de derecha a izquierda. Esta prelación es muy interesante y da, creemos, al programa un gran valor didáctico. A veces, según como utilicemos el programa, puede interesarnos no visualizar todo el proceso. Desactivando esta opción, lo conseguiremos. El beneficio es un gran incremento de la velocidad. Se recomienda especialmente esta opción para el cálculo de la **Función derivada**. Por defecto, esta opción aparece activada,

Baja precisión. Cuando se representan los puntos singulares, opción **Mostrar puntos singulares** activada, se pueden mostrar los valores con alta precisión, millonésima, o baja , ésta depende de la estimación del error cometido. Por defecto aparece activada, baja precisión, porqué lo creemos más didáctico.

Error en los cálculos. Todos los procesos de cálculo del programa son numéricos. Mediante esta opción podemos conocer una estimación del error de cálculo cometido.

Menú **Ayuda**.

Índice F1. Se accede al índice de la ayuda de este programa. Pulsando <F1> produce el mismo efecto. Es un sistema de ayuda hipertexto. Permite navegar entre los diferentes tópicos, que aparecen coloreados en verde, pulsando con el botón izquierdo del ratón, o mediante la tecla <TABULADOR> confirmando con la tecla <RETURN>. En esta ayuda, prácticamente, se encuentra todo el presente manual

Uso de la ayuda. Se accede a la ayuda general de Windows que explica cómo funciona el sistema de Ayuda Windows.

Acerca.... Aparece el cuadro inicial del programa donde se informa del nombre del autor .

6 - Limitaciones.

-El número máximo de funciones que se puede representar es de seis. Pueden ser explícitas, numéricas, o combinación de ambas.

-Los cálculos se realizan en el rango comprendido entre -10^{19} y 10^{19}. Si se rebasan , el programa nos muestra: Error por desbordamiento, overflow. Durante el cálculo de los valores de las imágenes de una función, el programa nos indica: No tiene imagen.

-La precisión de los cálculos es de 10^{-6}. Valores menores que éstos, son redondeados a 0.

-El número máximo de divisiones en los ejes es de 100. Si damos un valor : Unidad eje X o Y que le corresponda un mayor número de divisiones, estos valores cambian para adecuarse al máximo de 100 divisiones. El programa no avisa de este hecho.

-El número máximo de caracteres que puede tener una función explícita es de 200.

-El número máximo de valores que puede tener una función numérica es de 400.

-El valor absoluto máximo que se puede introducir en las funciones numéricas es 100000000.

-El valor absoluto máximo que se puede introducir en una regresión cuadrática o exponencial es 100000.

-El número de puntos en los cuales se calcula la función, entre el "Origen del eje X" y el "Final del eje X", es de 600.

7 - Fe de erratas.

1-Al calcular puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad en funciones de comportamiento lineal, o casi lineal, puede dar lugar a errores. Las funciones trigonométricas para valores a partir de pi o -pi, si las calculamos con precisión, dan problemas de este tipo. Es decir si estudiamos, por ejemplo, la función seno poniendo origen eje X 0 y final 2pi, al calcular puntos de inflexión o intervalos de concavidad o convexidad puede mostrar resultados extraños. Ello es debido al error en que incurre el ordenador en algunos cálculos, como, por ejemplo, 1-3/3<>0.

__Para evitar este problema__: NO calcular dichos conceptos en las funciones lineales. F(x)=mx+n o casi lineales. Para las funciones trigonométricas la solución si queremos estudiar estos conceptos es dejar los valores de los ejes iniciales o algunos similares.

2-Si se utiliza la función Valor Absoluto, ABS(), podemos encontrar que en algún punto, si calculamos la derivada, puede dar un valor y sabemos que, en realidad, NO existe. Son los puntos angulosos.

Ejemplo en F(x)=ABS(X). En el punto 0.

Cuando se utiliza la función **__Valor Absoluto__** y se quiere calcular la derivada en algún punto. **__Se recomienda, ser cuidadoso y tener presente lo dicho__**.

3-Si calculamos la primera, o segunda derivada de las funciones: SEG(X), COG(X), TAN(X), funciones trigonométricas expresadas en grados sexagesimales, podemos encontrarnos con una sorpresa. Concretando en el caso del seno(x). La primera derivada no parece dar la función coseno(x), sino una función cuyos valores son cercanos al cero. Esto es debido a que la derivada de la función seno(x) en grados, ° vale:

Sabemos que: Sen'(a) = Cos(a) , donde "a "está expresado en radianes, RAD.

Para pasar de RAD a °: x=aK, donde K=PI/180 y x está expresado en °.

Veremos que Sen'(x) = K*Cos(x), donde K vale aproximadamente 0.017.

$$Sen'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \quad *1$$

Para calcular los senos lo pasamos a radianes:

$$*1 = \lim_{h\to 0} \frac{sen[(x+h)K] - sen(xK)}{h} = *2$$

$$*2 = \lim_{h\to 0} \frac{sen(xK)cos(hK)+cos(xK)sen(hK) - sen(xK)}{h} = *3$$

$$*3 = \lim_{h \to 0} \left[sen(xK) \frac{\cos(hK)-1}{h} + \cos(xK) \frac{sen(xK)}{h} \right] = *4$$

Calculemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(xK)}{h} = \lim_{h \to 0} K \frac{sen(xK)}{xK} = K$$

$*4 = sen(xK) \,.\, 0 + \cos(xK) \,.\, K$

O sea volviendo a calcular las razones trigonométricas mediante °:

Sen'(x) = K.Cos(x)

Esto hace que la función COSENO que sale como derivada de la función SENO (expresadas ambas en grados sexagesimales, °), venga afectada por una constante (0.017). En la pantalla, escepto que no aumentemos mucho la escala, NO se ve representada. Se confunde con el eje X.

Para evitar este problema: NO estudiemos las derivadas de las funciones trigonométricas mediante, éstas expresadas en grados. DEBE HACERSE con las equivalentes expresadas en radianes: SEN(X), COS(X), TAN(X).

NOTA DEL AUTOR: Si los usuarios de este programa detectaran algún error o quisieran hacerme alguna sugerencia, les agradeceré que me lo hagan saber.

8 - Diagnosis de problemas.

Hemos hecho todo lo posible para evitar fallos del programa, "buggs". Dichos "errores", no necesariamente, han de ser errores de programación. Pueden ser, también, de concepto matemático o característica pedagógica. Si el usuario detectara alguno y cree oportuno notificarlo al autor, se adjunta un formulario que puede ayudar mucho en la definición del problema.

Si quisieran mandar algunos comentarios, ideas, etc, también serían bien recibidos

Formulario definición de problemas:

1-Características del problema.

¿Pudo reproducirlo?: SI NO

El programa ,¿dejó de funcionar?: SI NO.

En caso afirmativo:

¿Se mostró un mensaje de error: SI NO.

En caso afirmativo ¿Cuál?

¿Afectó al resto de programas que funcionaban en aquel momento?: SI NO

En caso afirmativo , describa los efectos:

¿Quedo el sistema Windows totalmente paralizado, teniendo que reinicializar completamente el ordenador?: SI NO

2-Situación del programa en el momento del problema.

¿Fue al introducir los valores de los ejes en el "Cuadro de diálogo: Funciones - entrada de datos"?: SI NO

¿Fue al introducir funciones en el "Cuadro de diálogo: Funciones - entrada de datos"?: SI NO

¿Fue al introducir los valores el "Cuadro de diálogo: Función numérica - Introducir valores"? SI NO

En caso afirmativo , describa la situación previa:

¿Fue mientras se representaba una función?: SI NO

¿Fue mientras se utilizaba una opción del menú?: SI NO

En caso afirmativo decir cual:

descríbalo:

Valores de:

Origen eje X: ______________ Origen eje Y: ______________

Unidad eje X: ______________ Unidad eje Y: ______________

Final eje X: ______________ Final eje Y: ______________

F(X)=______________________________

G(X)=______________________________

H(X)=______________________________

I(X)=______________________________

J(X)=______________________________

K(X)=______________________________

4-Descripción del entorno en el momento del problema.

Modo de pantalla utilizado: ______.Resolución: ______puntos. ______colores.

¿Había otros programas en funcionamiento?: SI NO.

En caso afirmativo, diga cuáles:

¿Había otros dispositivos conectados y en funcionamiento, impresoras, modems,etc.?: SI NO

En caso afirmativo, diga cuáles:

5-Problemas externos al programa.

¿Fue utilizando la ayuda? SI NO

En caso afirmativo, describa la situación:

¿Se trata del manual? SI NO

En caso afirmativo, describirlo:

¿Se trata de un "BUGG" MATEMÁTICO o PEDAGÓGICO? SI NO

En caso afirmativo, describirlo:

6-Características del sistema del usuario.

Microprocesador: ____________________.
Cantidad memoria Ram: ____________________.
Capacidad Disco Duro: ____________________.
Sistema Operativo: ____________________.
Versión de Windows: ____________________.

Si quiere, puede añadir un escrito describiendo todo el problema y la situación, así como su opinión al respecto.

8 - GUIA DEL PROFESOR.

Para ejecutar el programa, supondremos que está instalado en un grupo de programas. Haga doble clic en el icono **FUNCIONES para Windows**. Para mayor información, consulte el capítulo anterior: INSTALACIÓN Y PUESTA EN MARCHA.

Básicamente, este programa lo que hace es dibujar funciones, definidas de forma explícita o de forma numérica mediante una tabla de doble entrada. Tiene todo un conjunto de opciones, que lo hacen diferente de los que hasta ahora el autor conoce, y, sobre todo, interesante.

Su campo de aplicación es la asignatura de MATEMÁTICAS, en cualquier dominio donde aparezca el tema FUNCION. Incluso puede utilizarse en otras materias en que se trabaja dicho concepto, como FÍSICA , QUÍMICA, ESTADÍSTICA, ECONOMÍA ...

Permite estudiar, dada una función, TODO (casi todo), lo que hay en las programaciones oficiales de la asignatura de Matemáticas, durante TODA la enseñanza primaria y secundaria.

De hecho, una de las primeras aplicaciones del programa sería dejar al alumno solo con él, probándolo. Sin darse cuenta, puede aprender muchos conceptos ligados al de FUNCION, como los de: RAICES, MAXIMOS, MINIMOS, CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, DISCONTINUIDADES, LIMITES en un punto, CONCAVIDAD, CONVEXIDAD, PUNTOS DE INFLEXION, DERIVADA EN UN PUNTO, FUNCION DERIVADA, INTEGRAL DEFINIDA entre dos puntos, FUNCION INTEGRAL, CORTES ENTRE DOS FUNCIONES, AREA ENTRE DOS FUNCIONES, etc. (Ver apartado de EJEMPLOS PRACTICOS).

1 - Formas de utilización.

Puede utilizarse de diferentes formas:

En primer lugar como software educativo tradicional, instalado en todos los ordenadores del aula y los alumnos divididos en grupos, idealmente dos por ordenador, se puede desarrollar una clase dirigida por el profesor o bien por un guión (EJEMPLOS) para cada grupo.

Otra forma de utilizarlo es como ayuda del profesor o alumnos para el dibujo de gráficas. Esta versión para Windows es especialmente potente en este apartado, ya que podemos pasar el dibujo a otros programas del mismo entorno como el PAINTBRUSH (programa de dibujo) para añadirle cosas o también el WRITE (Procesador de textos) que permite incorporar las gráficas entre el texto.

También, con ayuda de una pantalla de vídeo (o un proyector de transparencias) conectada al ordenador , utilizar ésta como una sofisticada pizarra (llamada, a veces, "pizarra electrónica") para mostrar a los alumnos aquellas gráficas y aquellos efectos tan difíciles de conseguir con una tiza y un tablero negro, donde es totalmente imposible si lo que pretendemos es hacer animación.

Por último, por qué no decirlo, puede utilizarse en contextos no directamente relacionados con la didáctica del tema FUNCIÓN. Como herramienta de trabajo, es útil para el cálculo de elementos relacionados con ella o también, por ejemplo, para el dibujo del ajuste de una función numérica. Por ejemplo, si quisiéramos ver la gráfica de temperaturas máximas y mínimas durante un año de una población o estudiar el comportamiento de una o varias empresas en la bolsa, podemos representar, incluso, otros parámetros, como las llamadas medias móviles.

2 - Funcionamiento.

Consultar capítulo 7 <u>MANUAL DEL USUARIO</u>

Modo de trabajo:

El programa puede usarse de diferentes formas. Diremos unos comentarios que, cremos ayudarán al profesor a utlizar la forma más adecuada.

Ventana maximizada o minimizada (Botón superior derecha). Creemos que el modo normal de funcionamiento, debe ser con la ventana maximizada. Si lo que se pretende es, utilizarlo simultáneamente con otros programas o consigo mismo, será mejor utilizarlo en una ventana más pequeña. Podemos cambiar su dimensión mediante el ratón, pulsando y arrastrando la esquina inferior derecha. Esta posibilidad será especialmente útil, cuando queramos trasparar el dibujo a otro programa, ya que le podremos dar el tamaño que creamos conveniente.

Aprovechamos para decirlo siguiente: No sabíamos si el modo inicial de la ventana debía ser, en formato pequeño o pantalla completa, maximizada. En principio la elección parecía ser, maximizada, ya que, como acabamos de decir, es la forma, que creemos, habitual de utilizarlo. Al final decidimos, iniciarlo en una ventana pequeña, para reforzar la idea, de Windows, de utilizarlo juntamente con otras aplicaciones, y recordemos, tambien simultáneamente con varios programas **FUNCIONES para Windows.**

Opciones. ¿Pizarra o no?,es decir, fondo blanco o negro.

Se preguntó a los alumnos que lo utilizaron que, ¿qué opinaban?. La respuesta fue: Las funciones se distinguen mejor en fondo negro, **VPizarra**. Si lo que se pretende es estudiar 5 o 6 funciones, creemos que esta elección parece obligada. Pero en fondo blanco la vista se cansa menos.

Trama, Valor unidad de los ejes. A gusto del usuario, teniendo en cuenta que, si los valores de las unidades de los ejes, cuadro principal, son pequeños comparados con los extremos, la trama puede llegar a ocultar la gráfica y los valores de los ejes superponerse.

Mostrar puntos singulares. En general creemos que debe estar siempre activada.

Trazar Cálculos. Creemos que es una opción, cuando está activada, que da un alto contenido pedagógico al programa. Por ello, creemos que debe estar activa. También, decir que, si el ordenador no es muy rápido, 386SX a 16 por ejemplo, puede hacer que los procesos se realicen muy lentamente. Ésta es la opción que, el profesor debería utilizar con más mesura.

Baja precisión. Creemos que es más didáctica cuando está activa, porque los números no se escriben con muchos decimales. Si interesa mayor precisión, desactivarla.

3 - Ejemplos. Fichas didácticas.

Lo que viene a continuación es un grupo de fichas didácticas, es decir, guiones de trabajo. La lista no pretende ser exhaustiva. Pensamos que pueden ser utilizadas directamente y creemos que pueden servir de modelo para que cada profesor elabore sus propias fichas.

Estas fichas vienen completas y con los gráficos dibujados.

En la guía del Alumno, capítulo 9, vienen las fichas sin realizar. Una metodología de trabajo sería:

-Breve explicación del entorno Windows.
-Breve explicación del funcionamiento del programa.
-Entregarles una ficha para que la rellenen, supervisados por el profesor.

Las fichas de los alumnos vienen también en ficheros independientes, en formato .WRI, para el procesador de texto que viene incluido en Windows. En las prácticas de funciones numéricas para no tener que teclear los valores, se pueden pasar mediante el portapapeles, copiar y pegar.

Cuando en una ficha hay letra cursiva, queremos indicar que es una descripción de una acción que debe realizar el alumno:

En el apartado 4 de este capítulo, -Ejemplos. Ideas-, se ofrece un conjunto bastante numeroso de problemas. No son guías completas, sino esbozos de la gran cantidad de posibilidades que ofrece este programa y pueden actuar como germen de otras fichas.

Ficha 1 - Matemáticas.

Tema:
Estudio general de una función.

Nivel :
3º BUP y COU.

Conocimientos previos:
Resolución de ecuaciones. Cálculo de derivadas.

Objetivo general:
Comprender y saber aplicar las distintas técnicas que ofrece el cálculo diferencial para el estudio y representación de funciones.

Objetivos específicos:
Comprender y saber calcular los siguientes conceptos:
- Raíces.
- Ordenada en el origen.
- Máximos relativos.
- Mínimos relativos.
- Intervalos de crecimiento.
- Intervalos de decrecimiento.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos de concavidad.
- Intervalos de convexidad.
- Asíntota vertical.
- Asíntota horizontal.
- Asíntota oblicua.
- Simetría: par, impar.

Procedimiento:

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**

Condiciones de trabajo:

-Ventana maximizado. *Pulsar en la ventana el botón de maximización, esquina superior derecha.*

-La opción **"Baja precisión"** del menú **"Opciones" activa**. Creemos que es mejor así. Recordar que, por defecto, al arrancar el programa aparece ya activa. Como esta opción sólo afecta a los puntos singulares, máximos, mínimos, intervalos..., puede provocar ligeras diferencias con el cálculo de imágenes. Si quiere evitar estas diferencias, desactive esta opción.

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, creemos que debe estar **activa** (opción por defecto), ya que ayuda mucho a la comprensión de los conceptos. Si el ordenador no es muy rápido se aconseja desactivarla.

1.1 Raíces, ordenada en el origen.

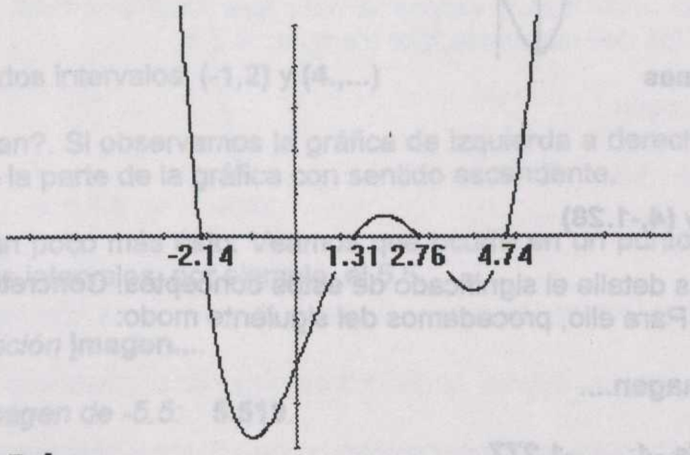
Representemos la siguiente función: **F(x)=1/36(3x^4-20x^3+12x^2+96x-110)**
La llamaremos función 1.

Valores de los ejes:

Origen eje X	-6.5
Unidad eje X	1
Final eje X	8.5
Origen eje Y	-5
Unidad eje Y	1
Final eje X	5

Calcular las raíces.

Menú **1 f.** *.Opción* **Raíces.**



Raíces

Raíces: **-2.14, 1.31, 2.76, 4.74.**

Las raíces son **las intersecciones de la función con el eje de abcisas.**
Calcular la ordenada en el origen.

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen....**

Calcular la imagen de 0: **-3.055.**

La ordenada en el origen es **la intersección de la función con el eje de ordenadas.** O lo que es lo mismo, la imagen de 0.

1.2 Máximos y mínimos relativos.

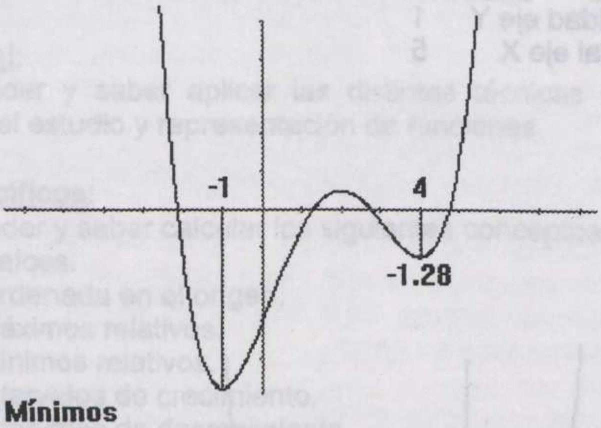
Calcular los máximos.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Máximos.**

Hay un único máximo: **(0.5, 2)**

Calcular los mínimos.

Menú **1 f.** .Opción **Mínimos.**



Hay dos: **(-1, -4.75)** y **(4,-1.28)**

Vamos a ver con más detalle el significado de estos conceptos. Concretaremos en el mínimo (-4,-1.28). Para ello, procedamos del siguiente modo:

Menú 1 **f.** *.Opción* **Imagen....**

Calcular la imagen de -4: **-1.277**.

Pulsar el botón **d->**

La imagen de **4.025** que es **-1.276.**

Pulsar dos veces el botón **<-i**

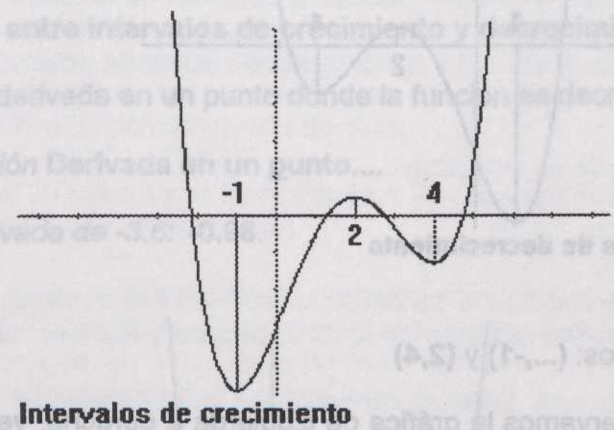
Obtenemos la imagen de **3.975**, es **-1.276.**

Observar que sus imágenes son mayores que la imagen de -4, -1.277 . Si calculamos las imágenes de los puntos alrededor de -4, vemos que todas son mayores. Si nos desplazamos mucho, por ejemplo, buscando la que es imagen del 0 que es -3.055, vemos que no. Este es el concepto de **mínimo relativo. En un punto a** (en nuestro caso -4) **del eje de abcisas diremos que existe un mínimo relativo para la función F(x), si, existe un entorno de a en el cual las imágenes de los valores distintos de a, son mayores que la imagen de a** (-1.277).

1.3 Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Calcular los intervalos de crecimiento.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Intervalos de crecimiento.**



Intervalos de crecimiento

Observamos dos intervalos: **(-1,2) y (4.,...)**

¿Qué significan?. Si observamos la gráfica de izquierda a derecha, vemos que son precisamente la parte de la gráfica con sentido ascendente.

Precisemos un poco más ésto: Veamos qué ocurre en un punto que pertenezca a uno de los dos intervalos, por ejemplo, el 5.5.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Imagen....**

Calcular la imagen de -5.5: **5.519.**

Pulsar el botón **d->**

La imagen de **5.525** que es **5.807**.

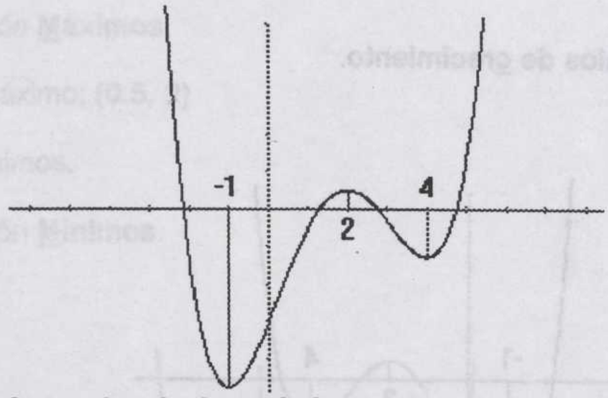
Pulsar dos vecesel botón <-i

Obtenemos que la imagen de **5.975** es **5.238.**

Observamos que la imagen a su derecha (del 5.5) es mayor y menor a su izquierda. Por ello definimos que en un punto la función es **creciente si existe un entorno de este punto**, en nuestro caso 5.5, **en el cual las imágenes a su derecha son mayores y menores a su izquierda.**

Calcular los intervalos de decrecimiento.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Intervalos de decrecimiento.**



Intervalos de decrecimiento

Observamos dos intervalos: **(...,-1)** y **(2,4)**

¿Qué significan?. Si observamos la gráfica de izquierda a derecha, vemos que son precisamente la parte de la gráfica con sentido descendente.

Precisemos un poco más ésto. Vamos a ver que ocurre en un punto que pertenezca a uno de los dos intervalos, por ejemplo, el 3.5.

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen....**

Calcular la imagen de -3.5: **-0.953.**

Pulsar el botón **d->**

La imagen de **3.525**, es **-0.980.**

Pulsar dos vecesel botón **<-i**

Obtenemos que la imagen de **3.475** es **-0.924**.

Observamos que la imagen a su derecha (del 3.5) es menor y mayor a su izquierda (recordar que son números negativos). Por ello definimos que en un punto la función es **decreciente si existe un entorno de este punto**, en nuestro caso 3.5, **en el cual las imágenes a su derecha son menores y mayores a su izquierda.**

Pongamos orden:

(...,-1) decreciente. (-1,2) creciente. (-2,4) decreciente. (4,...) creciente.

1.4 Relación entre los anteriores conceptos y la derivada.

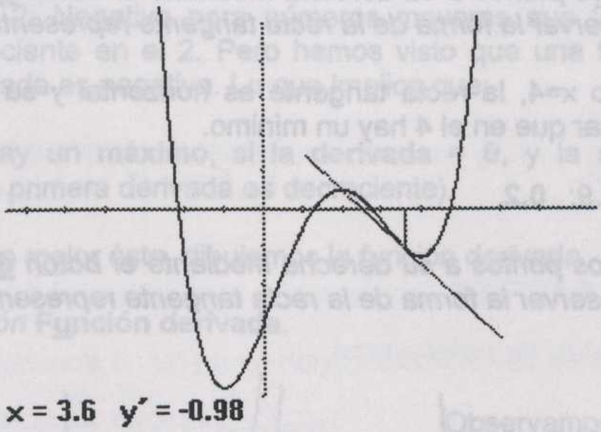
Hemos aprendido los conceptos de máximo, mínimo, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Ahora veremos un método para hallarlos utilizando la derivada.

1.4.1 Relación entre intervalos de crecimiento y decrecimiento y la derivada.

Calculemos la derivada en un punto donde la función es decreciente, 3.6.

Menú **1** f. .*Opción* **Derivada en un punto....**

Calcular la derivada de -3.6: **-0.98.**

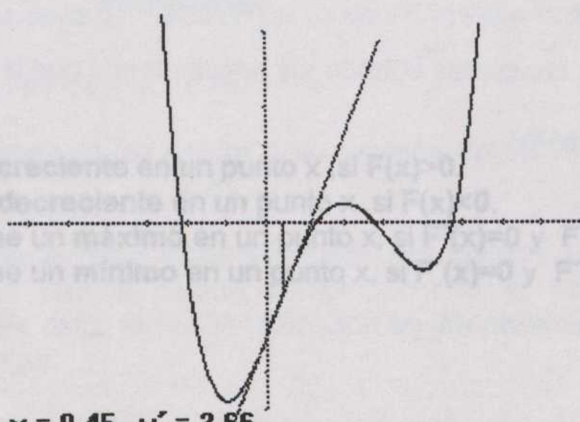


Calcular la derivada en los puntos contiguos mediante los botones **<-i** y **d->**.

Observamos que siempre son valores con signo **negativo.**

Ahora calcularemos la derivada en un punto donde sea creciente.

Calcular la derivada de -4.5: **2.66**



Calcular la derivada en los puntos contiguos mediante los botones **<-i** *y* **d->**.

Observamos que siempre son valores con signo **positivo**.

Con todo ello podemos concluir:
-Una función es decreciente en un punto cuando su derivada es **negativa**.
-Una función es creciente en un punto cuando su derivada es **positiva**.

Veamos qué ocurre en los puntos donde la derivada no es ni positiva ni negativa. Es decir, cuyo valor sea 0.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Derivada en un punto....**

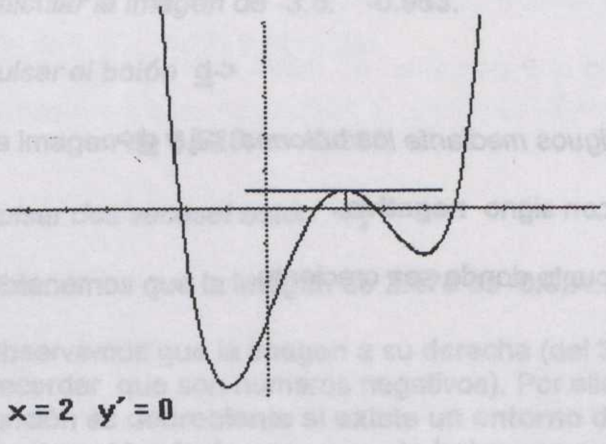
Calcular la derivada de 3.8: **-0.58**.

Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón **d->**. *Hasta que el valor sea positivo. Observar la forma de la recta tangente representada.*

Observamos que cuando x=4, la recta tangente es horizontal y su pendiente (la derivada) vale: **0**. Recordar que en el 4 hay un mínimo.

Calcular la derivada de 1.9: **0.2**.

Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón **d->**. *Hasta que el valor sea negativo. Observar la forma de la recta tangente representada.*



Observamos que, cuando x=2, la recta tangente es horizontal y su pendiente (la derivada) vale: **0**. Recordar que en el 2 hay un máximo.

De todo ello podemos sacar la siguiente conclusión:

En los máximos y mínimos relativos de una función la derivada se anula (0).

También hemos visto cómo diferenciar un máximo de un mínimo. En el primer caso, x=4, mínimo, la derivada era negativa para números menores que 4. Se hacía 0 en el 4. Y positiva para números mayores que 4. Es decir, la función derivada es creciente en el 4. Pero hemos visto que una función es creciente cuando su derivada es positiva. A consecuencia de ésto:

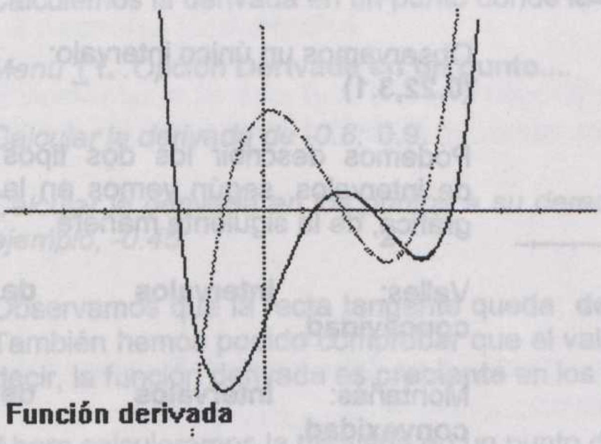
En un punto hay un **mínimo**, si la **derivada = 0**, y **la segunda derivada es positiva** (Así la primera derivada es creciente).

En el segundo caso, x=2, máximo, la derivada era positiva para números menores que 2. 0 en el 2. Negativa para números mayores que 2. Es decir, la función derivada es creciente en el 2. Pero hemos visto que una función es decreciente cuando su derivada es negativa. Lo que implica que:

En un punto hay un **máximo**, si la **derivada = 0**, y la **segunda derivada es negativa** (Así la primera derivada es decreciente).

Para ver un poco mejor ésto, dibujemos la función derivada.

Menú **1 f.** *.Opción* **Función derivada.**



Función derivada

Observamos que los puntos donde se hallan los máximos y mínimos es donde la función derivada (en verde) corta el eje de abcisas .

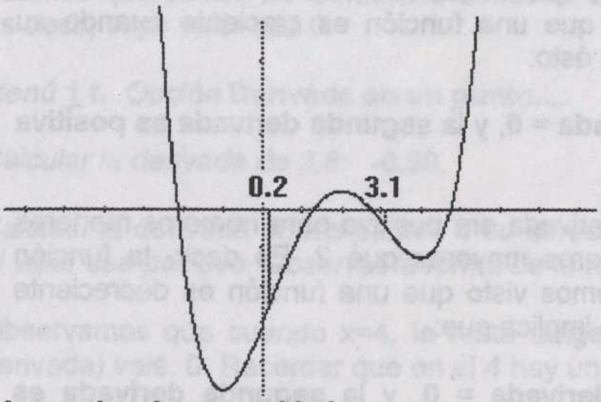
En el máximo, la función derivada es decreciente. En los mínimos, decreciente.

Resumen:
Una función es **creciente** en un punto x ,si **F(x)>0.**
Una función es **decreciente** en un punto x ,si **F(x)<0.**
Una función tiene un **máximo** en un punto x, si **F´(x)=0** y **F´(x)<0.**
Una función tiene un **mínimo** en un punto x, si **F´(x)=0** y **F´(x)>0.**

1.5 Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad y de convexidad.

Calcular los intervalos de concavidad.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de concavidad.**

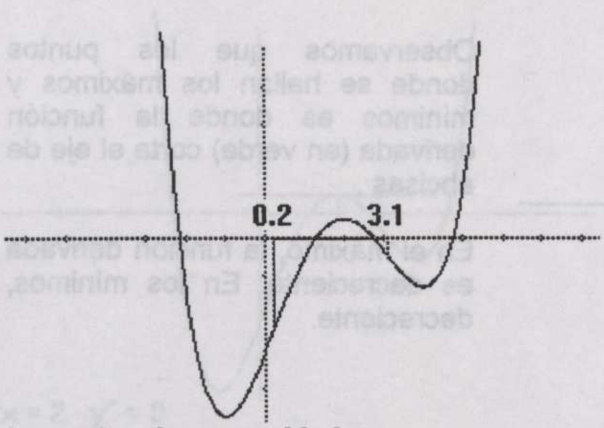


Intervalos de concavidad

Observamos dos intervalos:
(...,0.2) y (3.1,...)

Calcular los intervalos de convexidad.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de convexidad.**



Intervalos de convexidad

Observamos un único intervalo:
(0.22,3.1)

Podemos describir los dos tipos de intervalos, según vemos en la gráfica, de la siguiente manera.

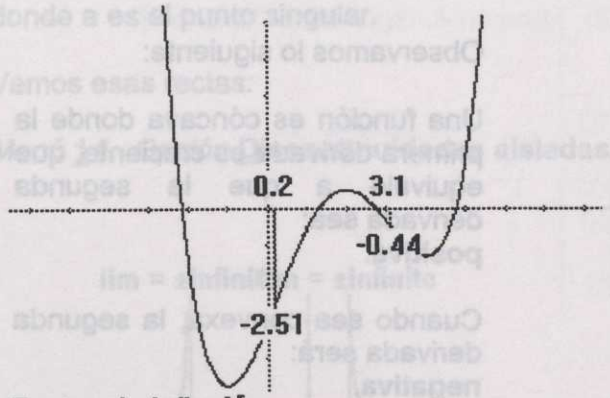
Valles: **Intervalos de concavidad.**

Montañas: **Intervalos de convexidad.**

Precisaremos mejor estos conceptos cuando los relacionemos con la derivada.

Calcular los puntos de inflexión.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Puntos de Inflexión.**



Observamos dos puntos de inflexión: **(0.2,-2.51)** y **(3.1,-0.44)**

Dentro de los márgenes de error, vemos que los límites de los intervalos de concavidad y convexidad son los puntos de inflexión.

Así:
Punto de inflexión, son los puntos donde la gráfica cambia de cóncava a convexa o viceversa.

1.6 Relación entre los anteriores conceptos y la derivada.

Calculemos la derivada en un punto donde la función es cóncava, -0.8.

Menú 1 **f.** *.Opción* **Derivada en un punto....**

Calcular la derivada de -0.8: **0.9**.

Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón d->, *hasta, por ejemplo, -0.45:* **2**

Observamos que la recta tangente queda **debajo** de la curva en todos los casos. También hemos podido comprobar que el valor de la derivada iba aumentando. Es decir, la función derivada es **creciente** en los puntos donde la función es cóncava.

Ahora calcularemos la derivada en un punto donde sea convexa.

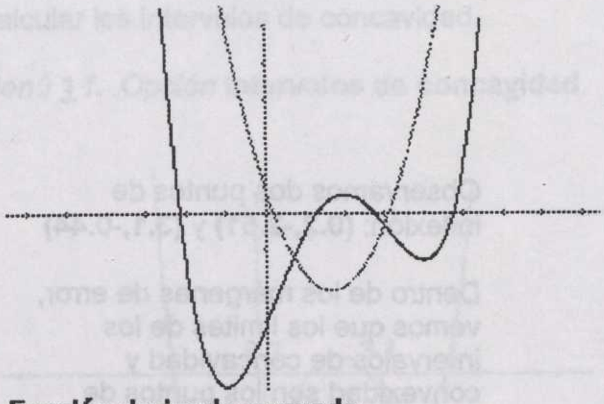
Calcular la derivada de 1.4: **1.25**.

Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón d->, *hasta, por ejemplo, 1.8:* **0.41**

Observamos que la recta tangente queda por **encima** de la curva en todos los casos. También hemos podido comprobar que el valor de la derivada iba disminuyendo. Es decir, la función derivada es **decreciente** en los puntos donde la función es convexa.

Para comprender mejor ésto, proseguiremos con:

Menú **1 f.** *.Opción* **Segunda derivada***.*



Función derivada segunda

Observamos lo siguiente:

Una función es cóncava donde la primera derivada es creciente, que equivale a que la segunda derivada sea:
positiva.

Cuando sea convexa, la segunda derivada será:
negativa.

En los puntos de inflexión la segunda derivada vale: **0.**

1.7 Asíntotas verticales.

Representar la siguiente función: **F(x)=1/((x+3)*(x-1))+1** .
Le llamaremos función **2**.

Valores de los ejes, los iniciales.

Calcularemos las imágenes de los puntos cercanos al -3.

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen...**

Calcular la imagen de -3.1: **3.43902.**

Pulsar sucesivamente el botón **d->**.
Vemos que la imagen de -3.025 vale 10.93789 y -3 no tiene imagen. Si vamos más a la derecha, éstas tienen valores negativos.

Si calculamos imágenes más próximas al -3, por la izquierda.

f(-3.01)= **25.937**
f(-3.001)= **250.93**
f(-3.0001)= **2500.9**

Vemos que los valores son cada vez mayores. Cuando las imágenes de una función, al acercarnos a un punto, se hacen cada vez mayores, (tienden a infinito o a menos infinito) decimos que la función tiene una **asíntota vertical**.

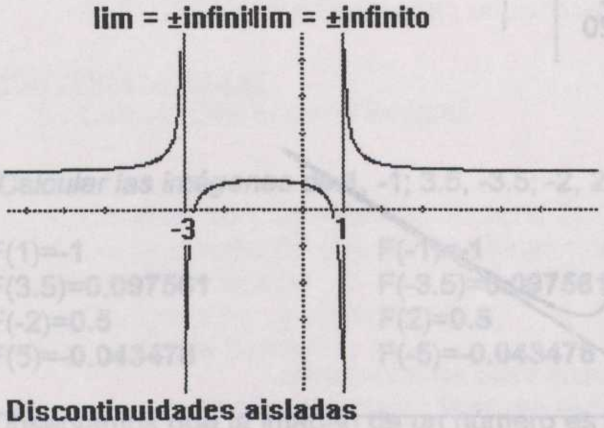
Podemos ver que si nos acercamos a -3 por la derecha, las imágenes tienden a menos infinito.

f(-2.99)= **-24.062**
f(-2.999)= **-249.06**
f(-2.9999)= **-2499.0**
f(-2.999999)= **-249999**

De hecho, se define **asíntota vertical** como la ecuación de una recta vertical, x=a, donde a es el punto singular.

Vemos esas rectas:

Menú **1 f.** *.Opción* **Discontinuidades aisladas.**

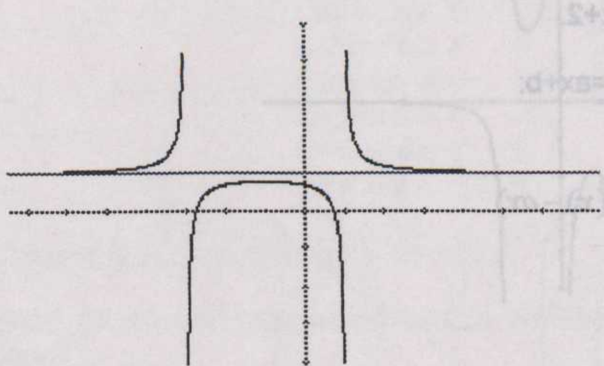


Las ecuaciones de las asíntotas de esta función son:

x=-3, x=1.

1.8 Asíntotas Horizontales.

*Representar la anterior función:***F(x)=1/((x+3)*(x-1))+1**, *juntamente con:* **G(x)=1**. Le llamaremos función 3.



Observamos que, para los valores extremos de la representación, las dos gráficas tienden a confundirse. Cuando esto ocurre, decimos que la función tiene una **asíntota horizontal**. En nuestro caso **y=1**.

En general, la ecuación de una recta se expresa: **y=ax+b** dondea pendiente, que, en nuestro caso, por ser una recta horizontal, siempre vale **0** y donde **b**, la ordenada en el origen (término independiente), se calcula mediante el siguiente límite:

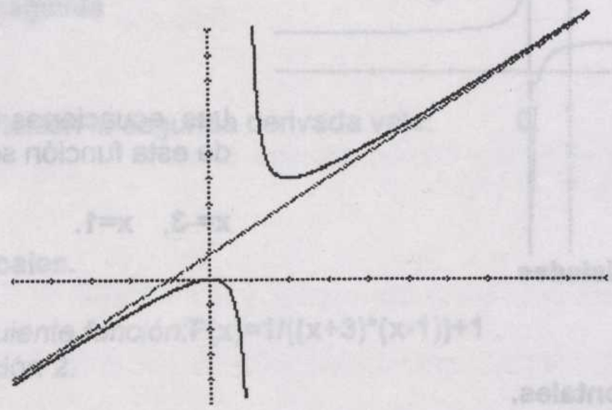
$$b = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

1.9 Asíntotas Oblicuas.

Representar las funciones: **F(x)=x^2/(x-2)**. **Función 4. G(x)=x+2. Función 5.**

Valores de los ejes:

Origen eje X	-10
Unidad eje X	2
Final eje X	20
Origen eje Y	-10
Unidad eje Y	2
Final eje X	20



Observamos que, para los valores extremos de la representación, las dos gráficas tienden a confundirse. Cuando esto ocurre decimos que la función tiene una **asíntota oblícua**. En nuestro caso, **y=x+2**.

Para hallar la ecuación de esta recta, y=ax+b:

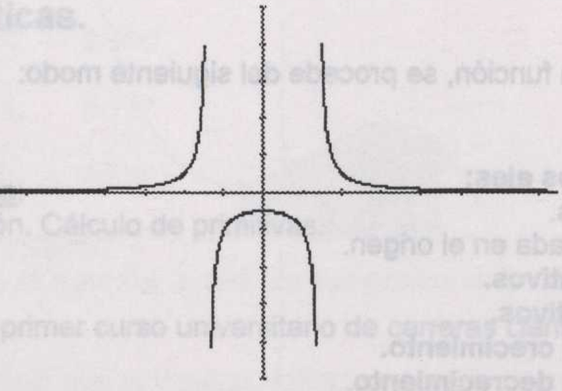
$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

1.8 Simetría: Par, impar.

Decimos que una función tiene simetría par, **función par**, cuando **f(x)=f(x-)**.
Decimos que una función tiene simetría impar, **función impar**, cuando **f(x)=-f(x-)**.

Veamos el significado de ésto.

-Representar la siguiente función: **F(x)=1/((x^2-2). Función 6.**

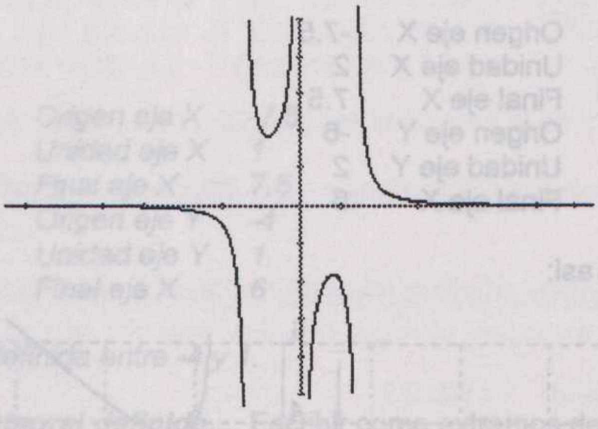


*-Calcular las imágenes de:*1, -1; 3.5, -3.5; -2, 2; 5, -5.

F(1)=**-1**	F(-1)=**-1**
F(3.5)=**0.097561**	F(-3.5)=**0.097561**
F(-2)=**0.5**	F(2)=**0.5**
F(5)=**-0.043478**	F(-5)=**-0.043478**

Observamos que la imagen de un número es igual a la de su opuesto. Cuando una función cumple esta propiedad decimos que es par. También se denomina, **simétrica respecto al eje Y**. El eje Y actúa como un espejo.

*-Representar la siguiente función:***F(x)=2/(x^3-2x)**. Función 7.



*-Calcular las imágenes de:*1, -1; 3.5, -3.5; -2, 2; 0.5, -0.5.

F(1)=**-2**	F(-1)=**2**
F(3.5)=**0.055749**	F(-3.5)=**-0.055749**
F(-2)=**-0.5**	F(2)=**0.5**
F(0.5)=**-2.285714**	F(-0.5)=**2.285714**

Observamos que la imagen de un número es igual a la de su opuesto cambiada de signo. Cuando una función cumple esta propiedad decimos que es **par**. También se denomina, **simétrica respecto al origen de coordenadas.**

Resumen:

Para representar una función, se procede del siguiente modo:
Se calcula:

- **Dominio.**
- **Cortes con los ejes:**
    - Raíces.
    - Ordenada en el origen.
- **Máximos relativos.**
- **Mínimos relativos.**
- **Intervalos de crecimiento.**
- **Intervalos de decrecimiento.**
- **Puntos de inflexión.**
- **Intervalos de concavidad.**
- **Intervalos de convexidad.**
- **Asíntotas verticales.**
- **Asíntotas horizontales.**
- **Asíntotas oblicuas.**
- **Simetrías.**

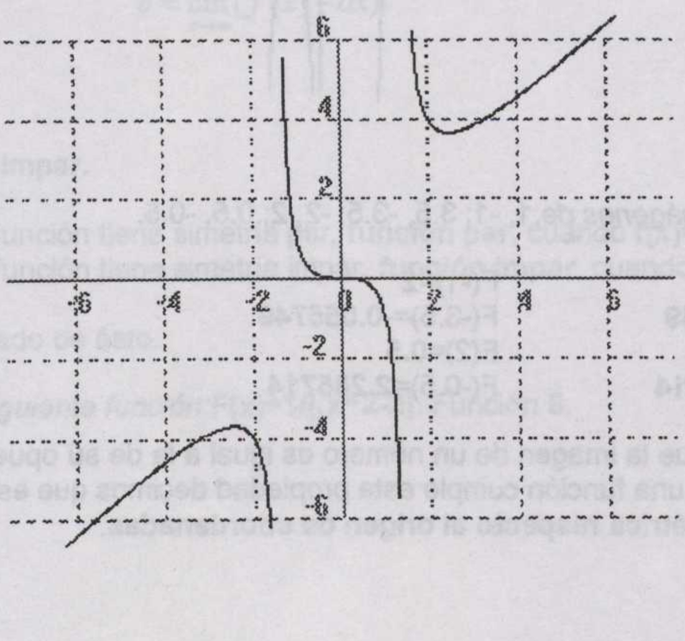
-Para calcularlos, actuamos tal como hemos visto anteriormente.
-Debe tenerse en cuenta que no suele ser necesario calcular todos y cada uno de los puntos.
-Después se traslada todo al dibujo de la gráfica.

Probar con la siguiente gráfica: f(x)=x^3/(x^2-2)

Si escogemos como valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	2
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-6
Unidad eje Y	2
Final eje X	6

Debe salir una cosa así:



Ficha 2 - Matemàticas.

Tema:
Integral

<u>Conocimientos previos</u>:
Áreas. Derivación. Cálculo de primitivas.

<u>Nivel</u> :
3º BUP, COU y primer curso universitario de carreras científico-técnicas.

<u>Inserción Curricular</u>:
Cálculo Diferencial e Integral.

<u>Objetivos</u>:

Conocer los conceptos de: Integral definida. Función área.

Darse cuenta de que las funciones área son funciones primitivas. Teorema fundamental del cálculo.

Comprender, y saber aplicar, el "Segundo teorema fundamental del cálculo", regla de Barrow.

<u>Procedimiento</u>:

2.1 <u>Integral definida</u>

Ejecutar el programa: ***Funciones para Windows***

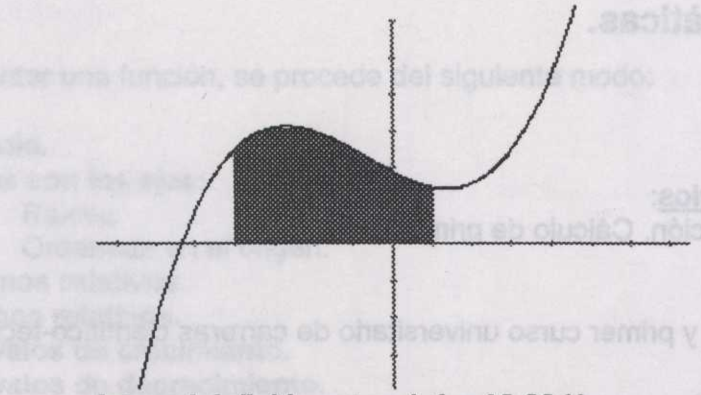
Representemos la siguiente función:***F(x)=1/20(x^3+2x^2-11x+38)*** . *Le llamaremos función1*

Valores de los ejes:

Origen eje X	*-7.5*
Unidad eje X	*1*
Final eje X	*7.5*
Origen eje Y	*-4*
Unidad eje Y	*1*
Final eje X	*6*

Calcular la integral definida entre -4 y 1.

Menú *<u>1</u> f.* .Opción ***Integral definida...*** Escribir como extremos de integración los dados.



Integral definida entre -4, 1 = 12.6041

Observar :
El valor : ***12.60***
Lo que representa: Área limitada por la curva, eje de abscisas, rectas: x=-4 y x=1

Calcular la integral definida entre -4 y -1: ***8.737***

Calcular la integral definida entre -1 y 1: ***3.866***

Suma los resultados: ***12.60***

Observa la siguiente propiedad:
(Int. def. entre -4 y -1) + (Int. def. entre -1 y 1) = (Int. def. entre -4 y 1)

2.2 <u>Función área</u>

Calcular una primitiva de la función anterior: ***1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)***

Ejecutar de nuevo programa ***Funciones para Windows***. *Simultáneamente con el anterior.*

Representemos la función primitiva:***F(x)=1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)***

Calcular la imagen de -4: ***-10.933***

Representemos la función primitiva:
F(x)=1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+10.933. *Le llamaremos función 2 (Hemos escogido una primitiva en la cual la imagen del -4 vale 0).*

Valores de los ejes:

Origen eje X	*-7.5*
Unidad eje X	*1*
Final eje X	*7.5*
Origen eje Y	*-4*4*
Unidad eje Y	*1*4*
Final eje X	*6*4*

Calcular la imagen de -4: *0.000*

Calcular la imagen de -1: *8.737*

Calcular la imagen de 1: *12.60*

Observa la siguiente propiedad:
Las imágenes de x de la función 2 son las integrales definidas entre -4 y x de la función 1.

Anteriormente hemos visto que la integral definida era el área que quedaba debajo de la curva. Esta nueva función (función 2) mide esta área. Le llamamos:
Función área

La función que utilizamos como función área (función 2) es una primitiva de la función 1.
Se puede demostrar que esto ocurre siempre. Es decir:

Dada una función, si tiene funciones primitivas, éstas son funciones área.

Esto se denomina: **Teorema fundamental del cálculo.**
(También se enuncia: Dada una función, si tiene una función área, la derivada de la función área es la función original).

2.3 Cálculo de la integral definida entre dos puntos mediante una función área

Para calcular la integral definida entre, por ejemplo, -1 y 1, podemos hacerlo mediante la función área (función 2). La imagen de 1 es el área entre -4 y 1. La imagen de -1 es el área entre -4 y -1. (ver apartado 2.2).

Restamos estos dos valores: ***3.866***

Que es el valor encontrado en el apartado 2.1, de la integral definida entre -1 y 1 (empleando la función 1)

Esta forma de hallar la integral definida entre 2 valores, restando las imágenes de una función primitiva, se conoce como: **Segundo teorema fundamental del cálculo** o **regla de Barrow.**

2.4 Distintas funciones área

Hemos visto que la función área (función 2) es una primitiva de la primera función (función 1). Pero primitivas de una función hay muchas. Si cambiamos la constante 10.933 por cualquier número, la función resultante también cumple el hecho de ser una primitiva de la función 1. Lo que ahora comprobaremos es que, si utilizamos otra primitiva, podemos seguir calculando la integral definida entre 2 puntos restando sus imágenes, calculadas en la nueva función.

Representemos una nueva función primitiva:

F(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x). Le llamaremos función 3.

Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	1
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-4*4
Unidad eje Y	1*4
Final eje X	6*4

Calcular la imagen de -1: **-2.196**

Calcular la imagen de 1: **1.670**

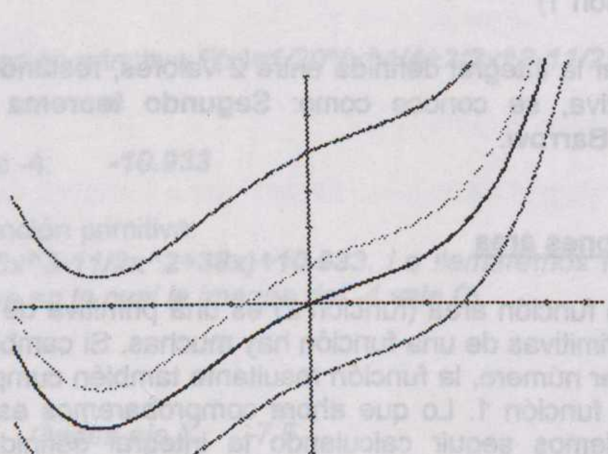
Restamos estos dos valores: **3.866**

Y observamos el mismo resultado. Es decir: para calcular la integral definida entre 2 puntos de una función de la cual conozcamos una primitiva (Para ello se estudia el **cálculo de integrales indefinidas**), se calcula la diferencia de sus imágenes. El resultado no depende de la primitiva escogida.
De hecho las distintas primitivas sólo se diferencian en una constante aditiva. Lo que hace que, al restar 2 imágenes, esta constante se cancele.

Para ver la forma de las distintas primitivas o funciones área, representaremos 4 al mismo tiempo.

Representar:

F(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)
G(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+4
H(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)-8
I(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+16



Observar que tienen la misma forma. Sólo se distinguen por una traslación vertical.

Ficha 3 - Economía.

4.1

<u>Tema</u>: Cálculo de la cuota íntegra de una declaración de renta correspondiente al ejercicio del año 1992 (Declaraciones realizadas durante 1993).

<u>Problema</u>: Supongamos que una persona ha realizado el cálculo de la **base imponible** de su declaración de renta y su valor es de, por ejemplo, 4800000 pts. El problema consiste en calcular la **cuota íntegra**, que es el total que le corresponde pagar a Hacienda.

<u>Procedimiento</u>:

La tabla que relaciona la cuota íntegra en función de la base imponible es lo que se llama **escala de gravamen**.

Base Imponible	Cuota Íntegra
0	*0*
400000	*0*
1000000	*120000*
1570000	*245400*
2140000	*385050*
2710000	*538950*
3280000	*709950*
3850000	*892350*
4420000	*1086150*
4990000	*1291350*
5560000	*1507950*
6130000	*1735950*
6700000	*1978200*
7270000	*2234700*
7840000	*2502600*
8410000	*2781900*
8980000	*3072600*
9550000	*3377550*

*(Fuente: **Guía practica para la cumplimentación de la declaración de renta**, <u>Hacienda Pública.</u>)*

El significado de esta tabla es el siguiente:

Si la base imponible es uno de los valores de la izquierda, la cuota íntegra es el valor de la derecha. En el caso de que esté entre 2 valores, que es lo normal, la cuota íntegra es la interpolación lineal entre los dos valores.

Para calcular el resultado de nuestro problema, procederemos de la siguiente manera:

*Programa: **Write***

-Seleccionamos los valores de la tabla.

-Los copiamos en el portapapeles, menú **Edición**, opción **Copiar**.
-Ejecutamos el programa funciones, en el caso de que no estuviera ya en funcionamiento.

*Programa: **Funciones para Windows***

-Seleccionamos la opción **funciones**, submenú **Cambiar funciones o parámetros**.

-**Clic** en el botón de diálogo **Función numérica**.

-Escogemos una función en el grupo de **Radio-Botones,** por ejemplo F(X), mediante un clic de ratón o con la combinación de teclas **Alt F**, apretamos el botón de **Aceptar**.

-Escogemos la opción **Pegar**, contestamos **Si** al siguiente cuadro de dialogo.

-Activamos la **Caja a chequear**, mediante un clic o Alt L.

-Terminamos el cuadro mediante otro **Aceptar**, volviendo al menú principal.

-Cambiaremos los valores de los ejes por los siguientes:

Origen eje X	-1000000	Origen eje Y	-1000000
Unidad eje X	2000000	Unidad eje Y	1000000
Final eje X	10000000	Final eje X	5000000

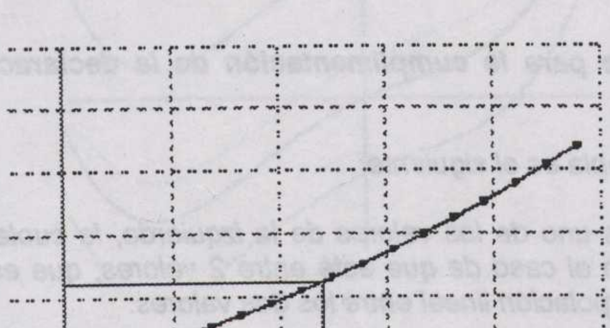
-Pulsamos **Aceptar**.

-Escogemos la subopción **Imagen** dentro del menú **1 f.**

-Escribimos el valor 4800000, **Aceptar** i obtenemos el valor buscado:

Resultado:

1222950 *pts., valor de la* **Cuota íntegra**.



4.2

<u>Tema</u>: Cálculo del tipo aplicable. Porcentaje (%)

<u>Procedimiento</u>:

El **tipo aplicable** no es más que el tanto por ciento que se ha de aplicar al **Resto de la base imponible** para sumar a la **Cuota íntegra.**
Así, por ejemplo, en nuestro caso: La base imponible es de 4800000 que se encuentra entre 4420000 y 4990000. A 4542000 le corresponde una cuota íntegra de 186150. Al resto, hasta llegar a 4800000, que es de 380000 (=4800000-4420000) le corresponde una cuota íntegra de 136800 pts. (=1222950-1086150). El **Tipo aplicable** es el tanto por ciento que representa las 136800 pts. respecto a las 380000, que se calcularía mediante la fórmula siguiente: **Tipo aplicable**=(136800/380000)*100 y da de resultado el **36%.**

Mediante **Funciones** podemos calcular el **Tipo aplicable** mediante una forma mucho más sencilla:

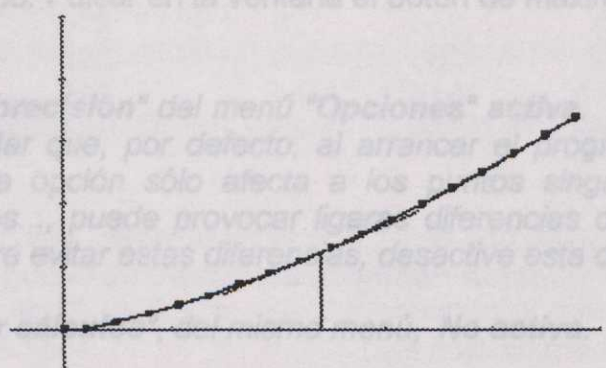
Programa: **Funciones para Windows**

*-Desactivamos la opción **Baja precisión** del menú **Opciones**.*

-Escogemos la opción **Derivada en un punto**, menú **1 f.**, y escribimos el valor 4800000 pulsando la tecla **Aceptar**, nos muestra el valor **0.36** que, multiplicado por 100, nos da el

<u>**Resultado**</u>:

Tipo aplicable = 36%



Creemos interesante poner la tabla del año anterior, ejercicio 1991:

Base Imponible	Cuota Íntegra
0	***0***
681300	***0***
1135500	***113500***
1703250	***261165***
2271000	***414458***
2838750	***573428***
3406500	***743753***
3974250	***925433***
4542000	***1118468***
5109750	***1322858***
5677500	***1541441***
6245250	***1774219***
6813000	***2021190***
7380750	***2282355***
7948500	***2557714***
8516250	***2847266***
9084000	***3151013***

*(Fuente: **Guía practica para la cumplimentación de la declaración de renta,** Hacienda Pública.)*

Puede ser interesante comparar las dos gráficas, por ejemplo, que es lo que debió pagar una persona con la misma Base Imponible, el año anterior.

Ficha 4 - Ciencias Sociales.

El entorno natural de este programa podría creerse que se halla en la asignatura de matemáticas. El hecho de poder representar funciones numéricas amplía mucho su dominio de aplicación. Creemos que en ciencias sociales es donde mejor podrían aplicarse sus potencialidades. Elaboramos esta ficha, estudio de características climatológicas, como muestra de los múltiples usos que puede tener el programa.

Esta ficha la consideramos más como un modelo para otras fichas, que como una ficha ya directamente utilizable.

También es directamente aplicable en otros campos como: estudio de temperaturas, en general, valores climatológicos; estudios demográficos; estudios económicos; estudios de índices; etc.

Tema:
Estudio comparativo de la pluviosidad en diversas zonas de España.

Objetivo general:
Comparar las características pluviométricas de distintas zonas climáticas de España: España lluviosa, España seca y España semiárida.

Procedimiento:

Ejecutar el programa: ***Funciones para Windows***

Condiciones de trabajo:

-*Gráfico maximizado.* Pulsar en la ventana el botón de maximización, esquina superior derecha.

*-La opción **"Baja precisión"** del menú **"Opciones" activa**. Creemos que es mejor así. Recordar que, por defecto, al arrancar el programa aparece ya activa. Como esta opción sólo afecta a los puntos singulares, máximos, mínimos, intervalos..., puede provocar ligeras diferencias con el cálculo de imágenes. Si quiere evitar estas diferencias, desactive esta opción.*

*-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, **No activa**.*

*-Las funciones que vamos a representar son numéricas. Recordemos que podemos copiar los datos en el portapapeles y pegarlos en el cuadro, **FUNCIONES NUMÉRICAS - Introducir valores**.*

*-En todos los casos activaremos la opción **Lineal**. También puede ser interesante activar la opción **Mostrar puntos**.*

Partimos de las siguientes tablas de valores. Hemos hecho la siguiente conversión de meses a valores numéricos:

Enero	15
Febrero	45
Marzo	75
Abril	105
Mayo	135
Junio	165
Julio	195
Agosto	225
Setiembre	255
Octubre	285
Noviembre	315
Diciembre	345

Datos de pluviosidad (en milímetros). Fuente Juan Vilá Valenti, ESPAÑA tomo II, Ed. Océano, 1983. No indica el año.

España lluviosa	Lugo (442 m.)	**España seca**	Valladolid (715 m.)	**España semiárida**	Almería (30 m.)
15	118	15	27	15	23
45	132	45	32	45	21
75	149	75	38	75	20
105	75	105	31	105	27
135	80	135	40	135	23
165	44	165	37	165	7
195	30	195	15	195	0
225	37	225	12	225	4
255	58	255	28	255	16
285	82	285	39	285	24
315	112	315	44	315	33
345	185	355	41	355	27

-Pulsamos el botón ***Función numérica*** del cuadro de diálogo principal.

-Escogemos la primera función F(x).

-Introducimos los valores correspondientes a Lugo, o los pegamos si previamente los seleccionamos y los copiamos en el portapapeles.

-Activamos las opciónes ***Lineal*** y ***Mostrar puntos***.

-Pulsamos el botón ***Aceptar***.

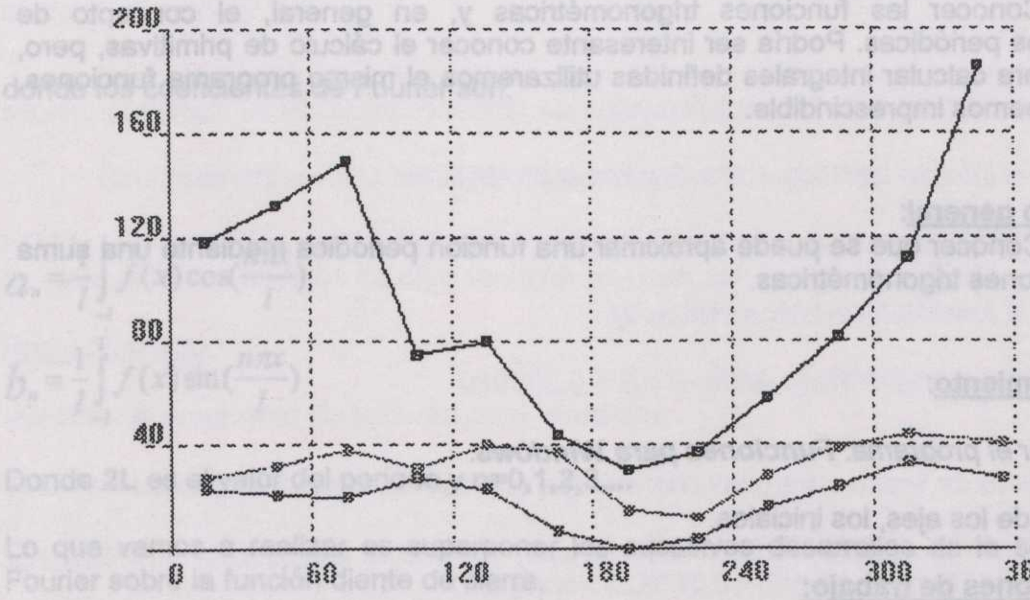
-Repetimos la operación tres veces más para las siguientes poblaciones.Utilizamos para ello las funciones:G(x), H(x), I(x).

Valores de los ejes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	30	Unidad eje Y	20
Final eje X	360	Final eje X	200

-Pulsamos el botón ***Aceptar***.

Se dibujan las gráficas pluviométricas para las tres poblaciones.



Calcularemos ahora sobre el gráfico las diferencias entre los máximos y minimos de pluviosidad para las distintas poblaciones.

La Línea azul corresponde a Lugo.
-Pulsamos con el botón izquierdo en el punto más bajo de la gráfica.

Escribimos el resultado: (195,30) que corresponde al més de **Julio** y una pluviosidad de **30**.

-Pulsamos con el botón izquierdo en el punto más alto de la gráfica.

Escribimos el resultado: (345,185) que corresponde al mes de **Diciembre** y una pluviosidad de **185**.

Así, la diferencia pluviométrica es de 185-30=**155**.
Haremos lo mismo en las dos poblaciones restantes. Previamente, limpiaremos la pantalla.

*-Pulsamos la opción ,**Limpiar** del menú, **Opciones**.*

Las diferencias pluviométricas restantes:

Valladolid= 44-12=**22** Almería= 33-0= **33**

Ficha 5 - Matemáticas.

Tema:

Estudio de las series de Fourier.

Nivel :

COU. Primer y segundo curso universitario, carreras científico-técnicas

Conocimientos previos:

Conocer las funciones trigonométricas y, en general, el concepto de funciones periódicas. Podría ser interesante conocer el cálculo de primitivas, pero, como para calcular integrales definidas utilizaremos el mismo programa funciones, no lo creemos imprescindible.

Objetivo general:

Conocer que se puede aproximar una función periódica mediante una suma de funciones trigonométricas.

Procedimiento:

-Ejecutar el programa: ***Funciones para Windows.***

Valores de los ejes, los iniciales.

Condiciones de trabajo:

-Gráfico minimizado.

-La opción **"Baja precisión"**, del menú **"Opciones"**, **No activa**. .

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, **No activa**. Aquí el programa realiza muchos cálculos y precisamos de la máxima rapidez.

La función que estudiaremos es la de **diente de sierra**. Utilizaremos los siguiente valores:

x	F(X)
-10	-2
-6	2
-5.9999	-2
-2	2
-1.9999	-2
2	2
2.0001	-2
6	2
6.0001	-2
10	2

-Recordemos que podemos copiar los datos en el portapapeles y pegarlos en el cuadro, **FUNCIONES NUMÉRICAS - Introducir valores.**

-Activar la opción ***Lineal***. *Muy importante.*

Es una función periódica de período 4.

La **serie de Fourier** o **desarrollo de Fourier** de F(X) se define por:

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n sen(\frac{n\pi x}{l}) \right)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

Donde **2L** es el valor del periodo y n=0,1,2,3,...

Lo que vamos a realizar es superponer los sucesivos desarrollos de la serie de Fourier sobre la función diente de sierra.

Para ello, debemos calcular previamente los coeficientes de Fourier, **an, bn.** Podemos hacerlo calculando las integrales definidas correspondientes o utilizando la opción, cálculo de **Integral definida**, que nos ofrece el programa.
A continuación, describiremos cómo hacerlo.

-Ejecutar de nuevo el programa: ***Funciones para Windows.***

Valores de los ejes, los iniciales.

Los términos **an** valen 0 en todos los casos. La función Cos(x) es par y la función x es impar. El producto de ambas es impar. Como hemos de calcular la integral definida entre -L y L, ésta será siempre 0. Se puede comprobar calculando la integral definida de la función:
f(x)=x.cos(n.p.x/2), entre -2 y 2, siendo n cualquier número natural.

Calcular el término **b1**.

*-Escribir la función,**f(x)=1/2x.sen(px/2).***

*-Representarla. Botón **Aceptar**.*

*Menú **1 fu..** Calcular la integral definida entre -2 y 2 = **1.273076.***

Repetimos el proceso para calcular los sucesivos coeficientes.

Término **b2**.

*-Escribir la función,**f(x)=1/2x.sen(2px/2)**.*

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 = **-0.636292**.*

Término **b3**.

-Escribir la función,***f(x)=1/2x.sen(3px/2)**.*

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 = **0.423922**.*

Término **b4**.

*-Escribir la función,**f(x)=1/2x.sen(4px/2)**.*

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 = **-0.317655**.*

Término **b5**.

*-Escribir la función,**f(x)=1/2x.sen(5px/2)**.*

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 = **0.253829**.*

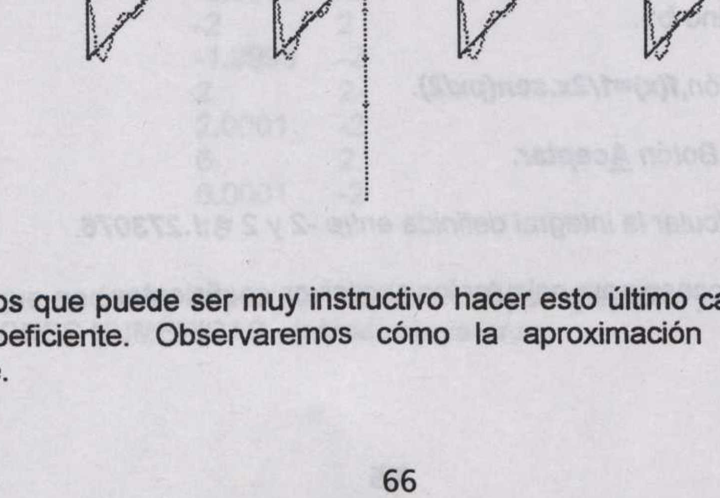
...

El desarrollo de Fourier, para los coeficientes que hemos calculado, queda:

G(x)=1.273076 sen(px/2) -0.636292 sen(2px/2) +0.423922 sen(3px/2)
-0.317655 sen(4px/2) +0.253829 sen(5px/2)

Volvemos a la ventana donde tenemos representada la función diente de sierra. Vamos al cuadro de diálogo: FUNCIONES - Entrada de datos. En el cuadro de entrada G(X), introducimos la anterior función.

-Pulsamos el botón, Aceptar. Se dibujan las dos funciones.



NOTA: Creemos que puede ser muy instructivo hacer esto último cada vez que se calcula un coeficiente. Observaremos cómo la aproximación va mejorando sucesivamente.

Ficha 6 - Economía.

Tema:

Estudio gráfico de las cotizaciones de Bolsa y de las medias móviles.

Objetivo general:

Se dice que cuando la gráfica de las medias móviles corta a la de cotizaciones, es uno de los criterios que puede tenerse en cuenta a la hora de comprar y/o vender.

Concretamente, cuando corta en situación de cotizaciones ascendentes, se sugiere comprar. En situación contraria, se sugiere vender.

Concretaremos estos términos a continuación.

NOTA: Hay que tener en cuenta que los inversores tienen en cuenta una multitud de otros factores, muchos de ellos también gráficos, volúmenes de negocio...

Procedimiento:

*-Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**.*

Valores de los ejes, los iniciales.

Condiciones de trabajo:

-Gráfico maximizado.

-La opción "**Baja precisión**", del menú "**Opciones**", **No activa**. .

-La opción "**Trazar cálculos**", del mismo menú, **No activa**.

-Cambiaremos los valores de los ejes por los siguientes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	2	Unidad eje Y	50
Final eje X	105	Final eje X	600

Las **medias móviles** son una nueva tabla de valores en que cada valor es la media de las cotizaciones de **n** días.

A partir de una tabla de **cotizaciones de Bolsa**, dependiendo del número de días que utilicemos, podemos elaborar diferentes tablas de medias móviles.

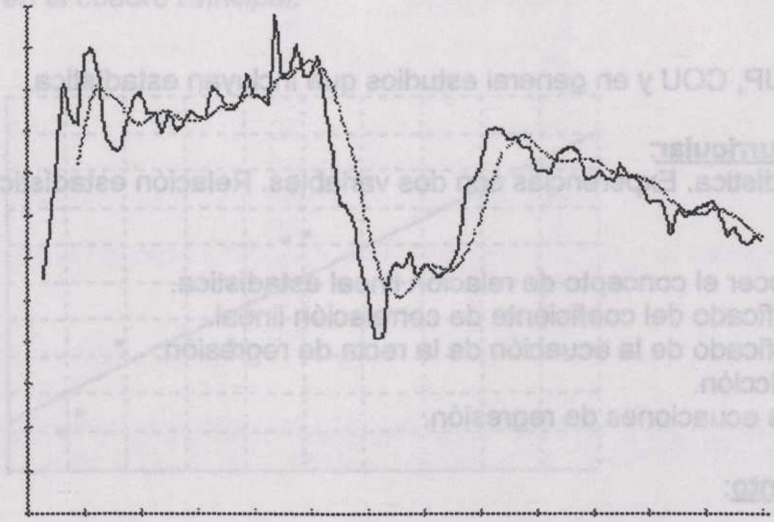
Partiremos de un ejemplo. Son las cotizaciones de los años 1987 y 1988 de una compañía cementera. Los valores son los correspondientes al cierre semanal. Debería hacerse con los valores del cierre diario. Como se trata de un ejercicio, este hecho carece de importancia.

Las medias móviles calculadas son de 6 semanas, es decir , 42 días.

Sem.	Coti.	Medias móv.	Sem.	Coti.	Medias móv.
			53	290	256,3333
2	272		54	309	264,5
3	330		55	280	277
4	400		56	294	291,8333
5	510		57	289	292,8333
6	468		58	278	290
7	456	406	59	285	289,1667
8	541	450,8333	60	294	286,6667
9	549	487,3333	61	316	292,6667
10	520	507,3333	62	386	308
11	442	496	63	391	325
12	430	489,6667	64	406	346,3333
13	425	484,5	65	450	373,8333
14	460	471	66	454	400,5
15	490	461,1667	67	452	423,1667
16	495	457	68	440	432,1667
17	471	461,8333	69	442	440,6667
18	472	468,8333	70	432	445
19	445	472,1667	71	432	442
20	475	474,6667	72	403	433,5
21	450	468	73	402	425,1667
22	458	461,8333	74	400	418,5
23	475	462,5	75	421	415
24	466	461,5	76	428	414,3333
25	465	464,8333	77	432	414,3333
26	504	469,6667	78	424	417,8333
27	496	477,3333	79	392	416,1667
28	475	480,1667	80	395	415,3333
29	475	480,1667	81	402	412,1667
30	485	483,3333	82	393	406,3333
31	520	492,5	83	390	399,3333
32	493	490,6667	84	411	397,1667
33	490	489,6667	85	394	397,5
34	480	490,5	86	396	397,6667
35	590	509,6667	87	384	394,6667
36	515	514,6667	88	365	390
37	522	515	89	367	386,1667
38	555	525,3333	90	365	378,5
39	515	529,5	91	328	367,5
40	518	535,8333	92	360	361,5
41	542	527,8333	93	350	355,8333
42	485	522,8333	94	353	353,8333
43	425	506,6667	95	360	352,6667
44	365	475	96	362	352,1667
45	360	449,1667	97	368	358,8333
46	345	420,3333	98	352	357,5
47	290	378,3333	99	327	353,6667
48	260	340,8333	100	337	351
49	205	304,1667	101	320	344,3333
50	205	277,5	102	316	336,6667
51	283	264,6667	103	328	330
52	295	256,3333	104	318	324,3333

Representamos los valores de las cotizaciones en una **función numérica**, por ejemplo en F(X). Los valores de las medias móviles en una nueva función numérica, G(X). Recordar que podemos **Copiar** y **Pegar**.

El aspecto de la gráfica es el siguiente:



Estudiemos concretamente el segundo año. Parece que las condiciones inversoras son más favorables.

Para ello, cambiar los valores de los ejes:

Origen eje X	52	Origen eje Y	0
Unidad eje X	2	Unidad eje Y	50
Final eje X	105	Final eje X	600

Calcular los puntos de corte. Menú, 2 fu. opción, Cortes.

Fijarse en los 4 primeros. Redondeamos los valores.

Semana	Cotización	modo	acción
51	**266**	**Crece**	**Comprar**
56	**292**	**Decrece**	**Vender**
59	**288**	**Crece**	**Comprar**
69	**441**	**Decrece**	**Vender**

Calcular si hubiéramos tenido algún beneficio en el caso de que hubiéramos comprado 1 acción.

292-266= 26
441-288= 53

En total, 79. No está mal. Puede calcularse durante los 2 años. A lo mejor, el beneficio no hubiera sido tanto.

Ficha 7 - Matemàticas.

Tema:

Regresión.

Conocimientos previos:

Estadística básica. Cálculo de: medias, desviación típica.

Nivel :

3º BUP, COU y en general estudios que incluyan estadística.

Inserción Curricular:

Estadística. Experencias con dos variables. Relación estadística.

Objetivos:

Conocer el concepto de relación lineal estadística.
Significado del coeficiente de correlación lineal.
Significado de la ecuación de la recta de regresión.
Predicción.
Otras ecuaciones de regresión.

Procedimiento:

1- Planteemos el siguiente problema:

Sean 10 alumnos de COU seleccionados al azar. Se nos da los pesos y las alturas en la tabla siguiente:

altura (metros)	Peso (Kg)
1.91	84
1.78	78
1.77	77
1.87	86
1.75	65
1.65	46
1.66	49
1.68	60
1.74	60
1.68	60

Las preguntas que tratamos de contestar son:
1 - ¿Existe alguna relación entre estos datos?
2 - ¿Si existe, en qué medida es cierta?
3 - ¿Cual es la relación?.
4 - ¿Cómo utilizarla para conocer valores no incluidos en la tabla?.

Procedamos de la forma siguiente:

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows.**

Pulsar el botón **Función numérica.**

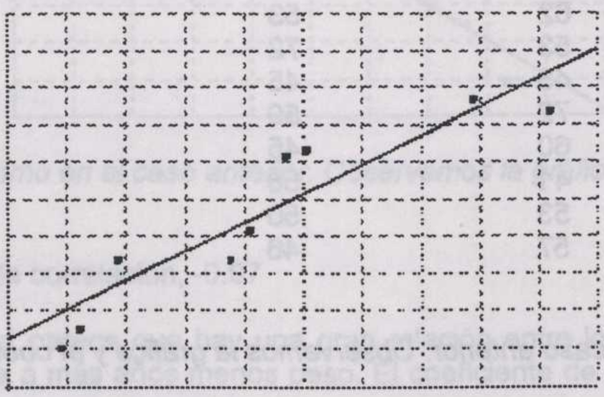
Escoger una función, activando el botón **regresión.**

Introducir los datos de la tabla anterior. Recordar que podemos utilizar el portapapeles.

Pulsar **Aceptar.**

Contestar **Si** *a la modificación de los ejes.*

Pulsar **Aceptar** *en el cuadro Principal.*



Vemos representados los puntos y una recta. De momento sólo nos fijaremos con los puntos:

Observar que hay una cierta tendencia en el sentido de que a valores altos de las alturas corresponde valores mayores de peso, y viceversa. Aclararemos mejor esto con otros ejemplos.

Para contestar a las preguntas 2 y 3:

Escoger menú **1 fu,** *opción* **Ecuación de regresión...**

Observamos que:

Coeficiente de Correlación : 0.926 Y = 148 x - 193

El coeficiente de correlación es un valor entre 1 y -1. Cuando más cerca se encuentre de ellos más alta será la relación entre las dos variables. Más adelalante hablaremos de ello.

La ecuación de la recta es la contestación a la tercera pregunta.

Para contestar a la pregunta nº 4, por ejemplo: ¿Cual es el peso esperado de una persona que mida 1.70 m.?

Escoger menú **1 fu,** *opción* **Imagen...**

Escribir 1.70.

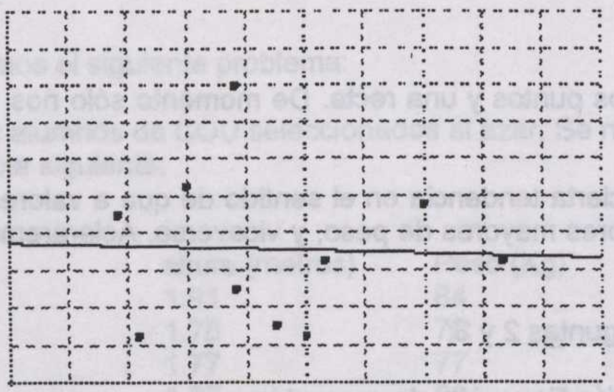
El valor esperado es de unos 59 Kg.

2- Hagamos lo mismo con las dos tablas siguientes, Calcularemos para cada una el **Coeficiente de correlación.**

a- Sean 10 alumnos de COU seleccionados al azar. Se nos da el número de aciertos en dos ejercicios de matemáticas y filosofía:

Matemàticas	Filosofía
80	53
48	61
62	53
53	72
43	45
72	59
60	45
41	58
53	50
57	46

Procedemos como en el caso anterior. Observamos la gráfica y el coeficiente de correlación.

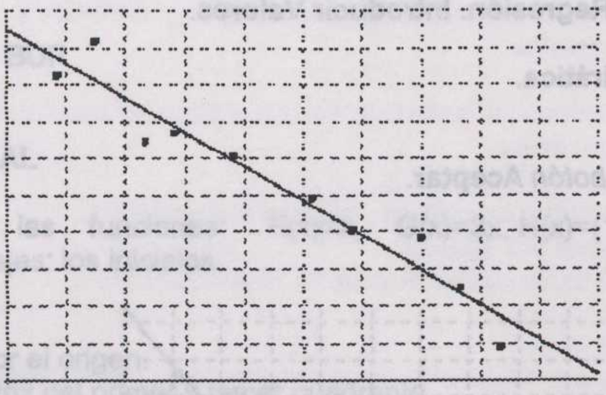


No parece que haya una gran relación entre los dos tipos de valores.

El coeficiente de correlación, -0.039

b- Hemos sacado al azar 10 monedas de una bolsa. Medimos la antigüedad y el peso en gramos. Los resultados son los siguientes:

Antigüedad (años)	Peso (Kg)
5	9.41
9	9.45
14	9.33
17	9.34
23	9.31
31	9.26
35	9.22
42	9.21
46	9.15
50	9.08



Procedemos como en el caso anterior. Observamos la gráfica y el coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación, -0.97

En este caso sí parece que hay una gran relación entre los dos tipos de valores. Pero es distinta a más años menos peso. El coeficiente de correlación es negativo y cercano a -1

c- De todo ello llegamos a la siguiente conclusión si dos variables no tienen absolutamente ninguna relación el coeficiente de correlación tendrá un valor cercano a cero. Si hay mucha relación un valor absoluto cercano a uno. Si el coeficiente es positivo la correlación será directa, es decir más valor *x* mayor *y* , y viceversa. Si el coeficiente es negativo la correlación será inversa, mayor valor de la *x* implica menor valor de la *y*.

3- Puede que dos variables esten relacionadas, pero no necesariamente a través de una relación lineal. lo veremos con el siguiente ejemplo:

Dejamos caer una piedra en un pozo y anotamos en distintos instantes de tiempo el espacio recorrido, obtenemos la siguiente tabla:

Tiempo (segundos)	Espacio (metros)
0	0
0.5	1.25
1	5
1.5	11.25
2	20
3	45
5	125
6	180
8	320

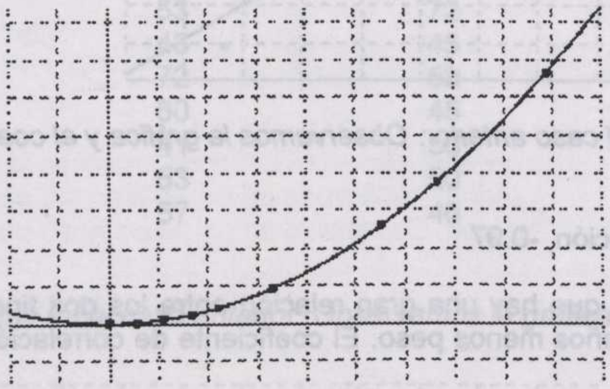
Observamos que hay una cierta relación. De hecho el coeficiente de correlación lineal es muy bueno 0.96.

Probemos otro tipo de ajuste.

Nos dirigimos al cuadro **Regresión. Introducir Valores.**

Pulsamos el botón **Cuadrática.**

Finalmente pulsamos el botón **Aceptar.**



Observamos que una parábola ajusta perfectamente los pares de valores. El coeficiente de correlación parabólico es 1, lo que significa que los datos se ajustan perfectamente a una parábola.

4 - Ejemplos. Ideas.

8º EGB y 1º de BUP

FUNCION LINEAL

1-Representar las funciones: F(x)=x, G(x)=3x, H(x)=(1/3)*x.
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Todas pasan por el origen.
F(x) es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
G(x) Está más inclinada que las otras dos. Idea de pendiente.

2-Representar las funciones: F(x)=x, G(x)=x+2, H(x)=x-3
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Todas tienen la misma pendiente.
G(x) y H(x) no pasan por el origen. Idea de ordenada en el origen.

3-Representar las funciones F(x)=2x-1, G(x)=2x+1.5, H(x)=0.5x-2.
Valores de los ejes: los iniciales.

Indicar:
Las pendientes y ordenadas en el origen respectivas.

4-Representar la función F(x)=2.5x+0.8
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular:
Imagen del 0. Ordenada en el Origen. Intersección eje Y.
Imagen del 1. Calcula la diferencia entre estos valores. Pendiente.
Calcula la raíz. Intersección eje X. Solución de la ecuación 2.5x+0.8=0.

RESOLUCION GRAFICA DE UN SISTEMA DE PRIMER GRADO

5-Representar las gráficas. F(x)= 2x-3 y G(x)=(1/4)*x+(10/4).
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular:
El punto de corte. Es la solución del sistema:

2x-y=3
x+4y=10

Plantear otros casos en que las rectas sean paralelas.

FUNCION DE SEGUNDO GRADO

6-Representar las funciones F(x)=x^2, H(x)=(1/2)*x^2, y G(x)=2x^2.
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Las ramas se dirigen hacia arriba.
Todas pasan por el origen.
El punto más bajo se halla en el origen. Vértice de la gráfica.
Tienen todas un eje de simetría. Eje Y.
Cuanto mayor es el coeficiente, más cerrada es la gráfica.

7-Representar las funciones F(x)=-x^2, H(x)=-(1/2)*x^2, y G(x)=-2x^2.
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Las ramas se dirigen hacia abajo.
Todas pasan por el origen.
El punto más alto se halla en el origen. Vértice de la gráfica.
Tienen todas un eje de simetría. Eje Y.
Cuanto mayor es el coeficiente en valor absoluto, más cerrada es la gráfica.

8-Representar las funciones F(x)=x^2+1, H(X)=-x^2+1 y G(x)=x^2-1.5.
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Tienen las mismas características del caso anterior. Pero el vértice se desplaza en el eje Y tanto como el coeficiente independiente.

9-Representar la función F(x)=x^2-4x+1
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Ramas hacia arriba.
El eje de simetría está desplazado 2 unidades a la derecha.
El vértice está desplazado en horizontal y vertical, punto (2,-3). Para calcularlo, acudir al menú "otras Opciones", escoge "mínimos". F(x) también puede indicarse, F(x)=(x-2)^2-3.

Calcular:
Los puntos de corte con el eje X. Opción "raíces". El vértice está en el punto medio. El punto de corte con el eje Y. Imagen del 0.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO

10-Representar las funciones F(x)=x^2-2x+2 y H(x)= x+2.
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular: Los puntos de corte.
Plantear otros casos: Que no tengan solución. Que la solución sea única.

2 DE BUP

FISICA

11-Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s.
Valores de los ejes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	10
Final eje X	6	Final eje X	40

Calcular:
a/La altura máxima.
b/ El tiempo que tarda en volver a tierra.

Representar F(x)=-5x^2+20x (altura(t)=-(1/2)gt²+Vt)

Para hallar la altura máxima hay que calcular el valor x del máximo.
El tiempo que tarda en regresar a tierra se halla buscando las raíces y restando sus valores.

ESTUDIO DE FUNCIONES

12-Estudio de generalidades: Representar F(x)=x^3/3+x^2/2-2x-1.5
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular:
Imagen 0, 1, 3, -2
Antiimagen 1, 0,-3
raíces
máximos
mínimos
intervalos de crecimiento
intervalos de decrecimiento
puntos de inflexión
intervalos de concavidad
intervalos de convexidad
Calcular la derivada en los puntos 1.5, -2, 1
Calcular la función derivada
Calcular la función segunda derivada
Calcular la integral definida entre -2.5 y -1

LIMITES

13-Representar la función F(x)=SEN(x)/x
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular: Discontinuidades aisladas

DERIVADA EN UN PUNTO

Derivada de f(x) en x° es:

$$f(x^\circ)' = \lim_{x \to x^\circ} \frac{f(x)-f(x^\circ)}{x-x^\circ}$$

14-Calcular, mediante la definición, la derivada de x^2 en el punto x=3.

Representar la función F(x)=(x^2-9)/(x-3).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	7.5	Final eje X	10

Calcular: Discontinuidades aisladas.

Para comprobarlo, representar F(x)=x^2 y calcular la derivada en x=3.

LA FUNCION EXPONENCIAL

15-Representar la función F(x)=2^x
Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	7.5	Final eje X	10

Calcular:
Las imágenes de 0,1,1.4,2,3,-1,-2
Las antiimágenes de 1/16, 0.25, 4, raíz cúbica de 2, raíz quinta de 4.

16-Representar las funciones F(x)=2^x, H(x)=1.5^x, G(x)=(1/2)^x, I(x)=0.3^x.
Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	7.5	Final eje X	10

Observar:
Si la base mayor que uno es creciente. Cuanto mayor es la base, crece más deprisa. Si la base es menor que uno, decrece. Cuanto menor sea, decrece más deprisa. 2^x y (1/2)^x son simétricas respecto al eje Y. Todas pasan por el punto (0,1). Las imágenes son siempre positivas.

17-Si disponemos de un capital de 1000 pts. colocado al 15%, calcular el capital al cabo de 4 años. Calcular cuánto tiempo hay que dejar el dinero para que el capital se quintuplique.

Representar la función F(x)= 1000*1.15^x.
Valores de los ejes:

Origen eje X	-1	Origen eje Y	-1000
Unidad eje X	2	Unidad eje Y	1000
Final eje X	20	Final eje X	10000

Calcular: La imagen de 4. La antiimagen de 5000.

LA FUNCION LOGARITMICA

18-Representar la función F(x)=LN(X) "logaritmo neperiano".
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
No está definida para números negativos. La forma que tiene. Es creciente. Al acercarnos al cero, las imágenes tienden a -infinito.

Calcular:
La imagen de 1, 2, -3, 0.
La antiimagen de 0, 1, -1.

19-Representar las funciones F(x)=2^x, G(x)=x y H(x)=LN(X)/LN(2). Es la función Logaritmo en base 2.
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Son simétricas respecto a la bisectriz, H(x).

20-Representarlas funciones F(x)=LN(X)/LN(2), G(x)=LN(X)/LN(5), H(x)=LN(X)/LN(1/2), I(x)=LN(X)/LN(1/5).
Valores de los ejes: los iniciales.

Observar:
Los logaritmos de base mayor que 1 son crecientes. Los demás, decrecientes. Cuanto mayor es la base, crecen más despacio. Pasan todas por el punto (1,0). Sólo están definidas para números positivos. Log en base 2 y Log en base (1/2), son simétricas respecto al eje X.

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

21-Representar F(x)=SEG(X).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-6*90	Origen eje Y	-5
Unidad eje X	90	Unidad eje Y	1
Final eje X	6*90	Final eje X	5

Observar:
El recorrido está entre -1 y 1.
Es una funcion periódica. El periodo es 360.
Representar F(x)=COG(X).

Observar:
El recorrido está entre -1 y 1
Es una funció periódica. El periodo es 360.

Representar juntas F(x)=SEG(X) y G(x)=COG(X).

Observar:
Son funciones parecidas. La única diferencia es que una está trasladada respecto a la otra 90°.

Puede hacerse el estudio con SEN(X) y COS(X), ángulos expresados en radianes, con los siguientes valores de los ejes:

Origen eje X	-pi*3	Origen eje Y	-5
Unidad eje X	pi	Unidad eje Y	1
Final eje X	pi*3	Final eje X	5

22-Representar F(x)=TAG(X).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-6*90	Origen eje Y	-5
Unidad eje X	90	Unidad eje Y	1
Final eje X	6*90	Final eje X	5

Observar:
El recorrido parece que es todo R.
Hay puntos que no tienen imagen: 90, -90, 270, -270, etc.
Es periódica. El periodo vale 180.

23-Representar F(x)=SEN(x), G(x)=SEN(2X), H(x)=SEN(1/2x).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-pi*3	Origen eje Y	-5
Unidad eje X	pi	Unidad eje Y	1
Final eje X	pi*3	Final eje X	5

Observar:
Que el periodo es inversamente proporcional a la constante.

24-Representar 1/SEN(X), 1/COS(X), 1/TAN(X). Es el estudio de las funciones: Cosecante(x), Secante(x) y Cotangente(x).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-pi*3	Origen eje Y	-5
Unidad eje X	pi	Unidad eje Y	1
Final eje X	pi*3	Final eje X	5

Observar:

Las formas de estas funciones. El periodo. Puntos donde no están definidas.

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

25-Representar ASG(X), ACG(X), ATG(X).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-5	Origen eje Y	-180
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	90
Final eje X	5	Final eje X	180

Observar:
El dominio y el recorrido.

3 BUP

GEOMETRÍA

26-Calcular el punto de corte entre las rectas:
a/La recta que pasa por los puntos (-1,1) y (2, 3).
b/ La recta de ecuación, y= -x/3-2

Valores de los ejes: los iniciales.
Representamos la función numérica que pasa por los puntos:
F(x)=
-1 1
2 3
Activar las opciones: mostrar puntos y extrapolar.

G(x)=-x/3-2

Escogemos la opción, Cortes.

27-Calcular el punto de corte entre las rectas:
a/La recta que pasa por los puntos (-1,1) y (2, 3).
b/La recta perpendicular a la anterior y que pasa por el punto (1,-3)

Para hallar g(x) necesitamos otro punto. El vector, de origen (-1,1) y extremo (2,3), es (3,2). g(x) es perpendicular a f(x), un vector director de g(x) es (-2,3). Si añadimos este vector al punto de g(x) que conocemos (1,-3), obtenemos otro punto de g(x), (-1,0).

Valores de los ejes: los iniciales.
Representamos dos funciones numéricas. Recordar que podemos copiar estos valores y pegarlos en el cuadro de diálogo, Funciones numéricas - introducir valores:
F(x)=
-1 1
2 3

G(x)=
-1 0
1 -3

Activar las opciones: mostrar puntos y extrapolar.
Las representamos y escogemos la opción, Cortes.

28-Calcular el ortocentro del triángulo de vértices A=(-1,1); B=(3,4) y C=(5,-2).
Valores de los ejes:

Origen eje X	-6.5	Origen eje Y	-4
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	8.5	Final eje X	6

En primer lugar, representar las siguientes funciones numéricas. No activar ninguna opción.
F(x)=
-1 1
3 4
G(x)=
3 4
5 -2
H(x)=
-1 1
5 -2
Obtenemos el dibujo del triángulo.
A continuación necesitamos encontrar la ecuación de las alturas.
Para ello utilizamos los vectores:
AB=(4,3)
BC=(2,-6)
AC=(6,-3)

La altura del vértice A, pasa por este punto (-1,1) y el (-1,1)+(6,2)=(5,3)
La altura del vértice B, pasa por este punto (3,4) y el (3,4)+(3,6)=(6,10)
La altura del vértice C, pasa por este punto (5,-2) y el (5,-2)+(-3,4)=(2,2)
Representemos las siguientes funciones:
I(x)=
-1 1
5 3
J(x)=
3 4
6 10
K(x)=
2 2
5 -2
Pulsar con el ratón en el punto intersección de las tres rectas y obtenemos el ortocentro.

ESTUDIO GENERAL DE FUNCIONES

29-Representar F(x)=exp(1/x).
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular:
Imagen 0, 1, 3, -2
Antiimagen 1,2,-3
raíces
máximos
mínimos
intervalos de crecimiento
intervalos de decrecimiento
puntos de inflexión
intervalos de concavidad
intervalos de convexidad
Calcular la derivada en los puntos 1.5, -2, 1

Observar:
El comportamiento asintótico para x tendiendo a +infinito y -infinito, asíntota horizontal. Para x tendiendo a 0 por la derecha, asíntota vertical "x=0". Para x tendiendo a 0 por la izquierda, F(x) tiende a 0.

NOTA: Para observar mejor ésto último, cambiar los extremos de los ejes dividiéndolos por 2.

30-Estudio de generalidades:
Representar F(x)=x^3/3+x^2/2-2x-1.5
Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular:
máximos
mínimos
intervalos de crecimiento
intervalos de decrecimiento
puntos de inflexión
intervalos de concavidad
intervalos de convexidad
Calcular la derivada en los puntos 1.5, -2, 1
Calcular la función derivada

Observar:
En los puntos donde hay máximos y mínimos, la función derivada se anula. En los puntos donde la función derivada es positiva, la función es creciente. En los puntos donde la función es decreciente, la función derivada es negativa.

Calcular la función segunda derivada

Observar:
Los puntos de inflexión corresponden a puntos en los cuales la segunda derivada se anula. Observa que donde la función es cóncava, la segunda derivada es positiva. Donde es convexa, la segunda derivada es negativa.

Calcular la integral definida entre -2.5 y -1

Observar:
Lo que representa la integral definida de una función entre 2 puntos.

Calcular la funcion integral a partir del 0

31-De entre los cilindros de volumen 1 litro, hallar el de menor área total.

Volumen=pi*R²a, Area=2pi*R²+2pi*Ra. Siendo: R:radio, a:altura.

Area(R)= 2pi*R² + 2/R

Hay que representar F(x)=2pi*X^2+2/X. Valores de los ejes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	10
Final eje X	5	Final eje X	50

Buscar el mínimo.

INTEGRALES

32-Calcular el área del círculo de radio 1.

Representar F(x)=(1-X^2)^(1/2). Valores de los ejes:

Origen eje X	-4	Origen eje Y	-2
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	4	Final eje X	2

Calcular la integral definida entre -1 y 1. El resultado hay que multiplicarlo por 2.

33-Calcular el área comprendida entre las curvas de ecuaciones: F(x)=X^2/2-X+2 y G(x)=X+2. Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	1
Final eje X	7.5	Final eje X	10

Buscar los puntos de corte. Hallar el área entre los puntos de corte.

COU

34-Resolver la ecuación: ¦x-2¦=¦x-4¦.

Representar: F(x)=ABS(X-2) y G(x)=ABS(X-4). Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular los puntos de corte, x=3.

35-Hallar los puntos de discontinuidad de la función: F(x)=(X-2)/((x-2)*(x-5)). Valores de los ejes: los iniciales.

Representar dicha función. Calcular los puntos de discontinuidad. En x=2, discontinuidad evitable. En x=5, discontinuidad asintótica.

36-Calcular lim (1/x)sen(x/2).
x -> 0

Representar F(x)=(1/X)*SEN(X/2). Valores de los ejes: los iniciales.

Calcular: Discontinuidades aisladas.

FORMULA DE TAYLOR

37-El desarrollo de Taylor para la función e^(x), en el punto 0, es:

$$e = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

-Para realizar esta práctica, sería interesanta representar la función exponencial con cada uno de los sucesivos expresiones del desarrollo de Taylor en diferentes ventanas (programas funciones para Windows) simultáneamente.
-Representar las siguientes funciones:
-Valores de los ejes: los iniciales.

F(x)=EXP(x) = e^x .
G(x)=1+X
H(x)=1+X+X^2/2
I(x)=1+X+X^2/2+X^3/6
J(x)=1+X+X^2/2+X^3/6+x^4/24
etc.

-Observar que, a medida que tomamos más términos, los desarrollos son más parecidos a F(x).

Podemos realizar una práctica que nos muestre que el desarrollo de Taylor no siempre aproxima a la función original.

38-Estudiemos el desarrollo de Taylor de la función f(x)=1/(x+1), en el punto 0.
P(x) = 1 - X + X^2 - X^3 + .X^4 - x^5 + x^6 - x^7 +...

-Representar la función, f(X)=1/(1+X), y como G(X), los sucesivos desarrollos del polinomio de Taylor P(x).
-Valores de los ejes: los iniciales.

Hay que fijarse en que, para valores mayores que 1, jamás el polinomio de Taylor se acerca a la función. Para valores menores que -1, la situación es peor.

39-Calcular la longitud del arco de curva y=Ln(x) comprendida entre x=1 y x=2.

Representar F(x)=(1+(1/X)^2)^(1/2). Valores de los ejes: los iniciales.
Calcular la integral definida entre 1 y 2.

Representar F(x)=Ln(x) y calcular la integral de linea entre 1 y 2.

40-Calcular una raíz del polinomio en el intervalo]0,1[, con el mínimo error posible.

Representar F(x)=X^4+2X^2-X-1. Calcular las Raíces.

Desactivar la opción "Baja precisión" y cambiar los valores de los ejes:

Origen eje X	0.82	Origen eje Y	-0.5
Unidad eje X	0.001	Unidad eje Y	0.1
Final eje X	0.83	Final eje X	0.5

MATEMATICAS II ESTADISTICA

41-La puntuación media de los exámenes de ingreso en la Universidad de 30000 alumnos ha sido de 5.6 y la desviación típica, 0.6. ¿Cuántos alumnos han tenido una puntuación entre 4.4 y 6.8? Y ¿cuántos alumnos han aprobado?

Representar:
F(X)= 30000/((2*P)^.5*.6)*EXP(-(X-5.6)^2/2/.6^2)

Valores de los ejes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	1	Unidad eje Y	3000
Final eje X	12	Final eje X	24000

Calcular integral definida entre 4.4 y 6.8.
Calcular integral definida entre 5 y 12.

QUÍMICA

42-La siguiente tabla muestra los valores de los potenciales de ionización de los elementos en función del número atómico.

nº Ato.	Pot. ion.	nº Ato.	Pot. ion.	nº Ato.	Pot. ion.	nº Ato.	Pot. ion.	nº Ato.	Pot. ion.
1	313	2	567	3	124	4	215	5	191
6	260	7	336	8	314	9	402	10	497
11	119	12	176	13	138	14	188	15	254
16	239	17	300	18	363	19	100	20	141
21	151	22	158	23	156	24	156	25	171
26	182	27	181	28	176	29	178	30	216
31	138	32	187	33	231	34	225	35	273
36	323	37	96	38	131	39	152	40	160
41	156	42	166	43	167	44	173	45	178
46	192	47	175	48	207	49	133	50	169
51	199	52	208	53	241	54	280	55	90
56	120	57	129	58	159	59	133	60	145
61	133	62	129	63	131	64	142	65	155
66	157							70	143
71	115	72	127	73	138	74	184	75	182
76	201	77	212	78	207	79	213	80	241
81	141	82	171	83	185				
86	248								

Para introducir los datos, podemos copiarlos en el portapapeles y de allí, pegarlos al programa.

Representarla. Utilizar el botón **Función numérica**. La opción, **Lineal**, activada. La ventana, maximizada. Valores de los ejes:

Origen eje X	-5	Origen eje Y	0
Unidad eje X	10	Unidad eje Y	75
Final eje X	95	Final eje X	600

Calcular el potencial de ionización esperado para el Erbio (Er),nº atómico=68, que no aparece en la tabla. Buscar la imagen de 68.

9-GUIA DEL ALUMNO

Para ejecutar el programa, supondremos que está instalado en un grupo de programas. Haz doble clic en el ícono **FUNCIONES para Windows**. Para mayor información consulta el capítulo INSTALACIÓN Y PUESTA EN MARCHA.

Para conocer el funcionamiento, consulta el capítulo 7 <u>MANUAL DEL USUARIO</u>.

A continuación viene un grupo de fichas.

Cuando el profesor te las proponga, siguiendo sus indicaciones, deberás rellenarlas.

Ficha 1 - Matemáticas.

Tema:

Estudio general de una función.

Nivel :

3º BUP y COU.

Conocimientos previos:

Resolución de ecuaciones. Cálculo de derivadas.

Objetivo general:

Comprender y saber aplicar las distintas técnicas que ofrece el cálculo diferencial para el estudio y representación de funciones.

Objetivos específicos:

Comprender y saber calcular los siguientes conceptos:

Raíces.
Ordenada en el origen.
Máximos relativos.
Mínimos relativos.
Intervalos de crecimiento.
Intervalos de decrecimiento.
Puntos de inflexión.
Intervalos de concavidad.
Intervalos de convexidad.
Asíntota vertical.
Asíntota horizontal.
Asíntota oblicua.
Simetría: par, impar.

Procedimiento:

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**

Condiciones de trabajo:

-Ventana maximizado. *Pulsar en la ventana el botón de maximización, esquina superior derecha.*

-La opción **"Baja precisión"** del menú **"Opciones" activa**. Creemos que es mejor así. Recordar que, por defecto, al arrancar el programa aparece ya activa. Como esta opción sólo afecta a los puntos singulares, máximos, mínimos, intervalos..., puede provocar ligeras diferencias con el cálculo de imágenes. Si quiere evitar estas diferencias, desactive esta opción.

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, creemos que debe estar **activa** (opción por defecto), ya que ayuda mucho a la comprensión de los conceptos. Si el ordenador no es muy rápido se aconseja desactivarla.

1.1 Raíces, ordenada en el origen.

Representemos la siguiente función: **F(x)=1/36(3x^4-20x^3+12x^2+96x-110)** .
La llamaremos función **1**.

Valores de los ejes:

Origen eje X	-6.5
Unidad eje X	1
Final eje X	8.5
Origen eje Y	-5
Unidad eje Y	1
Final eje X	5

Calcular las raíces.

Menú **1 f.** *.Opción* **Raíces.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

*-Escribe las raíces*_________________.

Las raíces son **las intersecciones de la función con el eje de abcisas.**
Calcular la ordenada en el origen.

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen....**

-Calcular la imagen de 0: _________________.

La ordenada en el origen es **la intersección de la función con el eje de ordenadas**. O lo que es lo mismo, la imagen de 0.

1.2 Máximos y mínimos relativos.

Calcular los máximos.

Menú **1 f.** *.Opción* **Máximos.**

-Escribe los máximos: _________________.

Calcular los mínimos.

Menú **1 f.** .Opción **Mínimos.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Escribe los mínimos: _________________.

Vamos a ver con más detalle el significado de estos conceptos. Concretaremos en el mínimo (-4,-1.28). Para ello, procedamos del siguiente modo:

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen....**

*-Calcular la imagen de -4:*_________________.

Pulsar el botón d->

La imagen de **4.025** que es ______________.

Pulsar dos veces el botón **<-i**

Obtenemos la imagen de **3.975**, es ______________

Observar que sus imágenes son mayores que la imagen de -4, ______________. Si calculamos las imágenes de los puntos alrededor de -4, vemos que todas son mayores. Si nos desplazamos mucho, por ejemplo, buscando la que es imagen del 0 que es ______________________. vemos que no. Este es el concepto de **mínimo relativo. En un punto a** (en nuestro caso -4) **del eje de abcisas diremos que existe un mínimo relativo para la función F(x), si, existe un entorno de a en el cual las imágenes de los valores distintos de a, son mayores que la imagen de a.**

1.3 Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Calcular los intervalos de crecimiento.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de crecimiento.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Escribir los intervalos: ______________.

¿Qué significan?. Si observamos la gráfica de izquierda a derecha, vemos que son precisamente la parte de la gráfica con sentido ascendente.

Precisemos un poco más ésto: Veamos qué ocurre en un punto que pertenezca a uno de los dos intervalos, por ejemplo, el 5.5.

Menú **1 f.** *.Opción* **Imagen....**

*-Calcular la imagen de -5.5:*______________.

Pulsar el botón **d->**

La imagen de **5.525** que es ______________.

Pulsar dos vecesel botón **<-i**

Obtenemos que la imagen de **5.975** es ______________.

Observamos que la imagen a su derecha (del 5.5) es mayor y menor a su izquierda. Por ello definimos que en un punto la función es **creciente si existe un entorno de este punto**, en nuestro caso 5.5, **en el cual las imágenes a su derecha son . y ______.a su izquierda.**

Calcular los intervalos de decrecimiento.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de decrecimiento.**

-Escribir los intervalos: ________________.

¿Qué significan?. Si observamos la gráfica de izquierda a derecha, vemos que son precisamente la parte de la gráfica con sentido descendente.

Precisemos un poco más ésto. Vamos a ver que ocurre en un punto que pertenezca a uno de los dos intervalos, por ejemplo, el 3.5.

Menú 1 f. .*Opción* Imagen....

Calcular la imagen de -3.5: ________________.

Pulsar el botón d->

La imagen de **3.525**, es ________________.

Pulsar dos vecesel botón <-i

Obtenemos que la imagen de **3.475** es ________________.

Observamos que la imagen a su derecha (del 3.5) es menor y mayor a su izquierda (recordar que son números negativos). Por ello definimos que en un punto la función es **decreciente si existe un entorno de este punto**, en nuestro caso 3.5, **en el cual las imágenes a su derecha son menores y mayores a su izquierda**.

Pongamos orden:

________________. **decreciente.** ________________. **creciente.**
________________. **decreciente.** ________________.**creciente.**

1.4 Relación entre los anteriores conceptos y la derivada.

Hemos aprendido los conceptos de máximo, mínimo, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Ahora veremos un método para hallarlos utilizando la derivada.

1.4.1 Relación entre intervalos de crecimiento y decrecimiento y la derivada.

Calculemos la derivada en un punto donde la función es decreciente, 3.6.

Menú **1 f.** *.Opción* **Derivada en un punto...**

Calcular la derivada de -3.6: ______________.

Calcular la derivada en los puntos contiguos mediante los botones **<-i** y **d->**.

Observamos que siempre son valores con signo ________.

Ahora calcularemos la derivada en un punto donde sea creciente.

Calcular la derivada de -4.5: ______________.

Calcular la derivada en los puntos contiguos mediante los botones **<-i** *y* **d->**.

Observamos que siempre son valores con signo ______________.

Con todo ello podemos concluir:
-Una función es decreciente en un punto cuando su derivada es ____________.
-Una función es creciente en un punto cuando su derivada es ____________.

Veamos qué ocurre en los puntos donde la derivada no es ni positiva ni negativa. Es decir, cuyo valor sea 0.

Menú **1 f.** *.Opción* **Derivada en un punto....**

Calcular la derivada de 3.8: ______________.
Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón **d->**. *Hasta que el valor sea positivo. Observar la forma de la recta tangente representada.*

Observamos que cuando x=4, la recta tangente es horizontal y su pendiente (la derivada) vale: ______________. Recordar que en el 4 hay un ___________.

Calcular la derivada de 1.9: ______________.

Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón **d->**. *Hasta que el valor sea negativo. Observar la forma de la recta tangente representada.*

Observamos que, cuando x=2, la recta tangente es horizontal y su pendiente (la derivada) vale: ______________. Recordar que en el 2 hay un ___________.

De todo ello podemos sacar la siguiente conclusión: ______________

En los máximos y mínimos relativos de una función la derivada se ________.

También hemos visto cómo diferenciar un máximo de un mínimo. En el primer caso, x=4, mínimo, la derivada era negativa para números menores que 4. Se hacía 0 en el 4. Y positiva para números mayores que 4. Es decir, la función derivada es creciente en el 4. Pero hemos visto que una función es creciente cuando su derivada es positiva. A consecuencia de ésto:

En un punto hay un **mínimo**, si la **derivada =** _______________ y la **segunda derivada es** _______________. (Así la primera derivada es creciente).

En el segundo caso, x=2, máximo, la derivada era positiva para números menores que 2. 0 en el 2. Negativa para números mayores que 2. Es decir, la función derivada es creciente en el 2. Pero hemos visto que una función es decreciente cuando su derivada es negativa. Lo que implica que:

En un punto hay un **máximo**, si la **derivada =** _______________. y la **segunda derivada es** _______________. (Así la primera derivada es decreciente).

Para ver un poco mejor ésto, dibujemos la función derivada.

Menú **1 f.** *.Opción* **Función derivada.**

Observamos que los puntos donde se hallan los máximos y mínimos es donde la función derivada (en verde) corta el eje de abcisas.
En el máximo, la función derivada es decreciente. En los mínimos, decreciente.

Resumen:
Una función es **creciente** en un punto x ,si _______________.
Una función es **decreciente** en un punto x ,si _______________.
Una función tiene un **máximo** en un punto x, si _______________. y _______________.
Una función tiene un **mínimo** en un punto x, si _______________. y _______________.

1.5 Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad y de convexidad.

Calcular los intervalos de concavidad.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de concavidad.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Escribir los intervalos: _______________.

Calcular los intervalos de convexidad.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de convexidad.**

-Escribir los intervalos: _______________.

Podemos describir los dos tipos de intervalos, según vemos en la gráfica, de la siguiente manera.

Valles: _______________.

Montañas: _______________.

Precisaremos mejor estos conceptos cuando los relacionemos con la derivada.

Calcular los puntos de inflexión.

Menú **1 f.** *.Opción* **Intervalos de concavidad.**

-*Escribir los puntos de inflexión:* ________________.

Dentro de los márgenes de error, vemos que los límites de los intervalos de concavidad y convexidad son los puntos de inflexión.

Así:

Punto de inflexión, son los puntos donde la gráfica cambia de cóncava a convexa o viceversa.

1.6 Relación entre los anteriores conceptos y la derivada.

Calculemos la derivada en un punto donde la función es cóncava, -0.8.

Menú **1 f.** *.Opción* **Derivada en un punto...**

-*Calcular la derivada de -0.8:* ________________.

-*Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón* **d->**, *hasta, por ejemplo, -0.45:* ________________.

Observamos que la recta tangente queda **debajo** de la curva en todos los casos. También hemos podido comprobar que el valor de la derivada iba aumentando. Es decir, la función derivada es **creciente** en los puntos donde la función es cóncava.

Ahora calcularemos la derivada en un punto donde sea convexa.

-*Calcular la derivada de 1.4:* ________________.

-*Calcular la derivada en los puntos a su derecha mediante el botón* **d->**, *hasta, por ejemplo, 1.8:* ________________.

Observamos que la recta tangente queda por **encima** de la curva en todos los casos. También hemos podido comprobar que el valor de la derivada iba disminuyendo. Es decir, la función derivada es **decreciente** en los puntos donde la función es convexa.

Para comprender mejor ésto, proseguiremos con:

Menú **1 f.** *.Opción* **Segunda derivada.**

Observamos lo siguiente:
Una función es cóncava donde la primera derivada es creciente, que equivale a que la segunda derivada sea:
.
Cuando sea convexa, la segunda derivada será: ________________.
En los puntos de inflexión la segunda derivada vale: ________________.

1.7 Asíntotas verticales.

*Representar la siguiente función:***F(x)=1/((x+3)*(x-1))+1** .
Le llamaremos función **2.**

Valores de los ejes, los iniciales.

Calcularemos las imágenes de los puntos cercanos al -3.

Menú 1 f. .Opción Imagen....

-Calcular la imagen de -3.1: ______________.

Pulsar sucesivamente el botón d->.
Vemos que la imagen de -3.025 vale ______ y -3 ____________. Si vamos más a la derecha, éstas tienen valores negativos.

Si calculamos imágenes más próximas al -3, por la izquierda.

f(-3.01)= ______________.
f(-3.001)= ______________.
f(-3.0001)= ______________.

Vemos que los valores son cada vez mayores. Cuando las imágenes de una función, al acercarnos a un punto, se hacen cada vez mayores, (tienden a infinito o a menos infinito) decimos que la función tiene una **asíntota vertical**.

Podemos ver que si nos acercamos a -3 por la derecha, las imágenes tienden a menos infinito.

f(-2.99)= ______________.
f(-2.999)= ______________.
f(-2.9999)= ______________.
f(-2.999999)= ______________.

De hecho, se define **asíntota vertical** como la ecuación de una recta vertical, x=a, donde a es el punto singular.

Vemos esas rectas:

Menú 1 f. .Opción **Discontinuidades aisladas.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Las ecuaciones de las asíntotas de esta función son:
______________. ______________.

1.8 Asíntotas Horizontales.

Representar la anterior función: **F(x)=1/((x+3)*(x-1))+1**, *juntamente con:* **G(x)=1**. Le llamaremos función 3.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Observamos que,para los valores extremos de la representación, las dos gráficas tienden a confundirse. Cuando esto ocurre, decimos que la función tiene una **asíntota horizontal**. En nuestro caso ______________.

En general, la ecuación de una recta se expresa: **y=ax+b** dondea pendiente, que, en nuestro caso, por ser una recta horizontal, siempre vale **0** y donde **b**, la ordenada en el origen (término independiente), se calcula mediante el siguiente límite:

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

1.9 Asíntotas Oblicuas.

Representar las funciones: **F(x)=x^2/(x-2)**. Función **4**. **G(x)=x+2**. Función **5.**

Valores de los ejes:

Origen eje X	-10
Unidad eje X	2
Final eje X	20
Origen eje Y	-10
Unidad eje Y	2
Final eje X	20

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Observamos que, para los valores extremos de la representación, las dos gráficas tienden a confundirse. Cuando esto ocurre decimos que la función tiene una **asíntota oblícua**. En nuestro caso, **y=x+2**.

Para hallar la ecuación de esta recta, y=ax+b:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

1.8 Simetría: Par, impar.

Decimos que una función tiene simetría par, **función par**, cuando **f(x)=f(x-)**.
Decimos que una función tiene simetría impar, **función impar**, cuando **f(x)=-f(x-)**.

Veamos el significado de ésto.

*-Representar la siguiente función:***F(x)=1/((x^2-2)**. Función **6.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

*-Calcular las imágenes de:*1, -1; 3.5, -3.5; -2, 2; 5, -5.

F(1)= ________________. F(-1)= ________.
F(3.5)= ________________. F(-3.5)= ____________.
F(-2)= ________________. F(2)= ____________.
F(5)= ________________. F(-5)= ____________.

Observamos que la imagen de un número es igual a la de su opuesto. Cuando una función cumple esta propiedad decimos que es **par**. También se denomina, **simétrica respecto al eje Y**. El eje Y actúa como un espejo.

*-Representar la siguiente función:***F(x)=2/(x^3-2x)**. Función **7.**

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

*-Calcular las imágenes de:*1, -1; 3.5, -3.5; -2, 2; 0.5, -0.5.

F(1)= ________________. F(-1)= ________________.
F(3.5)= ________________. F(-3.5)= ________________.
F(-2)= ________________. F(2)= ________________.
F(0.5)= ________________. F(-0.5)= ________________.

Observamos que la imagen de un número es igual a la de su opuesto cambiada de signo. Cuando una función cumple esta propiedad decimos que es **par**. También se denomina, **simétrica respecto al origen de coordenadas.**

<u>**Resumen**</u>:

Para representar una función, se procede del siguiente modo:
Se calcula:

- **Dominio.**
- **Cortes con los ejes:**
  - Raíces.
  - Ordenada en el origen.
- **Máximos relativos.**
- **Mínimos relativos.**
- **Intervalos de crecimiento.**
- **Intervalos de decrecimiento.**
- **Puntos de inflexión.**
- **Intervalos de concavidad.**
- **Intervalos de convexidad.**
- **Asíntotas verticales.**
- **Asíntotas horizontales.**
- **Asíntotas oblicuas.**
- **Simetrías.**

-Para calcularlos, actuamos tal como hemos visto anteriormente.
-Debe tenerse en cuenta que no suele ser necesario calcular todos y cada uno de los puntos.
-Después se traslada todo al dibujo de la gráfica.

Probar con la siguiente gráfica: f(x)=x^3/(x^2-2)

Si escogemos como valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	1
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-6
Unidad eje Y	1
Final eje X	6

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Imprimir este documento.

Ficha 2 - Matemàticas.

Tema:
Integral

Conocimientos previos:
Áreas. Derivación. Cálculo de primitivas.

Nivel :
3º BUP, COU y primer curso universitario de carreras científico-técnicas.

Inserción Curricular:
Cálculo Diferencial e Integral.

Objetivos:
Conocer los conceptos de: Integral definida. Función área.
Darse cuenta de que las funciones área son funciones primitivas. Teorema fundamental del cálculo.
Comprender, y saber aplicar, el "Segundo teorema fundamental del cálculo", regla de Barrow.

Procedimiento:

2.1 Integral definida

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**

Representemos la siguiente función: **F(x)=1/20(x^3+2x^2-11x+38)** . Le llamaremos función1

Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	1
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-4
Unidad eje Y	1
Final eje X	6

Calcular la integral definida entre -4 y 1.

Menú 1 f. .*Opción* **Integral definida....** *Escribir como extremos de integración los dados.*

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Escribir el valor: ______________________.

Lo que representa: **Área limitada por la curva, eje de abscisas, rectas: x=-4 y x=1**

-Calcular la integral definida entre -4 y -1: ______________________.
-Calcular la integral definida entre -1 y 1: ______________________.

-Suma los resultados: ______________________.

Observa la siguiente propiedad:
(Int. def. entre -4 y -1) + (Int. def. entre -1 y 1) = (Int. def. entre -4 y 1)

2.2 <u>Función área</u>

Calcular una primitiva de la función anterior: **1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)**

Ejecutar de nuevo programa **Funciones para Windows**. Simultáneamente con el anterior.

*Representemos la función primitiva:***F(x)=1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)**

Calcular la imagen de -4: ____________________________.

Representemos la función primitiva:
F(x)=1/20*(x^4/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+10.933. Le llamaremos función **2** (Hemos escogido una primitiva en la cual la imagen del -4 vale 0).

Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	1
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-4*4
Unidad eje Y	1*4
Final eje X	6*4

-Calcular la imagen de -4: ____________________________.

-Calcular la imagen de -1: ____________________________.

-Calcular la imagen de 1: ____________________________.

-Observa la siguiente propiedad:
Las imágenes de x de la función 2 son las integrales definidas entre -4 y x de la función 1.

Anteriormente hemos visto que la integral definida era el área que quedaba debajo de la curva. Esta nueva función (función 2) mide esta área. Le llamamos:
Función área

La función que utilizamos como función área (función 2) es una primitiva de la función 1.
Se puede demostrar que esto ocurre siempre. Es decir:

Dada una función, si tiene funciones primitivas, éstas son funciones área.

Esto se denomina: **Teorema fundamental del cálculo.**
(También se enuncia: Dada una función, si tiene una función área, la derivada de la función área es la función original).

2.3 Cálculo de la integral definida entre dos puntos mediante una función área

Para calcular la integral definida entre, por ejemplo, -1 y 1, podemos hacerlo mediante la función área (función 2). La imagen de 1 es el área entre -4 y 1. La imagen de -1 es el área entre -4 y -1. (ver apartado 2.2).

-Restamos estos dos valores: ______________________.

Que es el valor encontrado en el apartado 2.1, de la integral definida entre -1 y 1 (empleando la función 1)

Esta forma de hallar la integral definida entre 2 valores, restando las imágenes de una función primitiva, se conoce como: **Segundo teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow.**

2.4 Distintas funciones área

Hemos visto que la función área (función 2) es una primitiva de la primera función (función 1). Pero primitivas de una función hay muchas. Si cambiamos la constante 10.933 por cualquier número, la función resultante también cumple el hecho de ser una primitiva de la función 1. Lo que ahora comprobaremos es que, si utilizamos otra primitiva, podemos seguir calculando la integral definida entre 2 puntos restando sus imágenes, calculadas en la nueva función.

-Representemos una nueva función primitiva:
F(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x). Le llamaremos función 3.

Valores de los ejes:

Origen eje X	-7.5
Unidad eje X	1
Final eje X	7.5
Origen eje Y	-4*4
Unidad eje Y	1*4
Final eje X	6*4

-Calcular la imagen de -1: ______________________.

-Calcular la imagen de 1: ______________________.

-Restamos estos dos valores: ______________________.

Y observamos el mismo resultado. Es decir: para calcular la integral definida entre 2 puntos de una función de la cual conozcamos una primitiva (Para ello se estudia el **cálculo de integrales indefinidas**), se calcula la diferencia de sus imágenes. El resultado no depende de la primitiva escogida.
De hecho las distintas primitivas sólo se diferencian en una constante aditiva. Lo que hace que, al restar 2 imágenes, esta constante se cancele.

Para ver la forma de las distintas primitivas o funciones área, representaremos 4 al mismo tiempo.

Representar:
F(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)
G(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+4
H(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)-8
I(x)=1/20*(x^3/4+2/3x^3-11/2x^2+38x)+16

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Observar que tienen la misma forma. Sólo se distinguen por una traslación vertical.

-Imprimir este documento.

Ficha 3 - Economía

4.1

<u>Tema</u>: Cálculo de la cuota íntegra de una declaración de renta correspondiente al ejercicio del año 1992.

<u>Problema</u>: Supongamos que una persona ha realizado el cálculo de la **base imponible** de su declaración de renta y su valor es de, por ejemplo, 4800000 pts. El problema consiste en calcular la **cuota íntegra**, que es el total que le corresponde pagar a Hacienda.

<u>Procedimiento</u>:

La tabla que relaciona la cuota íntegra en función de la base imponible es lo que se llama **escala de gravamen.**

Base Imponible	*Cuota Íntegra*
0	**0**
400000	**0**
1000000	**120000**
1570000	**245400**
2140000	**385050**
2710000	**538950**
3280000	**709950**
3850000	**892350**
4420000	**1086150**
4990000	**1291350**
5560000	**1507950**
6130000	**1735950**
6700000	**1978200**
7270000	**2234700**
7840000	**2502600**
8410000	**2781900**
8980000	**3072600**
9550000	**3377550**

(Fuente: **Guía practica para la cumplimentación de la declaración de renta,** <u>Hacienda Pública.</u>)

El significado de esta tabla es el siguiente:

Si la base imponible es uno de los valores de la izquierda, la cuota íntegra es el valor de la derecha. En el caso de que esté entre 2 valores, que es lo normal, la cuota íntegra es la interpolación lineal entre los dos valores.

Para calcular el resultado de nuestro problema, procederemos de la siguiente manera:

Programa: **Write**

-Seleccionamos los valores de la tabla.

*-Los copiamos en el portapapeles, menú **Edición**, opción **Copiar**.*

-Ejecutamos el programa funciones, en el caso de que no estuviera ya en funcionamiento.

Programa: **Funciones para Windows**

*-Seleccionamos la opción **funciones**, submenú **Cambiar funciones o parámetros**.*

*-**Clic** en el botón de diálogo **Función numérica**.*

*-Escogemos una función en el grupo de **Radio-Botones**, por ejemplo F(X), mediante un clic de ratón o con la combinación de teclas **Alt F**, apretamos el botón de **Aceptar**.*

*-Escogemos la opción **Pegar**, contestamos **Si** al siguiente cuadro de dialogo.*

*-Activamos la **Caja a chequear**, mediante un clic o Alt L.*

*-Terminamos el cuadro mediante otro **Aceptar**, volviendo al menú principal.*

-Cambiaremos los valores de los ejes por los siguientes:

Origen eje X	-1000000	Origen eje Y	-1000000
Unidad eje X	2000000	Unidad eje Y	1000000
Final eje X	10000000	Final eje X	5000000

*-Pulsamos **Aceptar**.*

*-Escogemos la subopción **Imagen** dentro del menú **1 f**.*

*-Escribimos el valor 4800000, **Aceptar** i obtenemos el valor buscado:*

<u>Resultado</u>:

___________ pts., valor de la ***Cuota íntegra***.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

4.2

Tema: Cálculo del tipo aplicable. Porcentaje (%)

Procedimiento:

El **tipo aplicable** no es más que el tanto por ciento que se ha de aplicar al **Resto de la base imponible** para sumar a la **Cuota íntegra.**

Así, por ejemplo, en nuestro caso: La base imponible es de 4800000 que se encuentra entre_____ y_______. A ______ le corresponde una cuota íntegra de : :_______. Al resto, hasta llegar a 4800000, que es de ________ le corresponde una cuota íntegra de _______. El **Tipo aplicable** es el tanto por ciento que representa las 92880 pts. respecto a las 258000, que se calcularía mediante la fórmula siguiente: **Tipo aplicable=**__________*100 y da de resultado el_____**%.**

Mediante **Funciones** podemos calcular el **Tipo aplicable** mediante una forma mucho más sencilla:

Programa: **Funciones para Windows**

*-Escogemos la opción **Derivada en un punto**, menú **1 f.**, y escribimos el valor 4800000 pulsando la tecla **Aceptar**, nos muestra el valor ___ que, multiplicado por 100, nos da el*

Resultado:

Tipo aplicable = ____________.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Imprimir este documento.

Ficha 4 - Ciencias Sociales.

El entorno natural de este programa podría creerse que se halla en la asignatura de matemáticas. El hecho de poder representar funciones numéricas amplía mucho su dominio de aplicación. Creemos que en ciencias sociales es donde mejor podrían aplicarse sus potencialidades. Elaboramos esta ficha, estudio de características climatológicas, como muestra de los múltiples usos que puede tener el programa.

Esta ficha la consideramos más como un modelo para otras fichas, que como una ficha ya directamente utilizable.

También es directamente aplicable en otros campos como: estudio de temperaturas, en general, valores climatológicos; estudios demográficos; estudios económicos; estudios de índices; etc.

Tema:
Estudio comparativo de la pluviosidad en diversas zonas de España.

Objetivo general:
Comparar las características pluviométricas de distintas zonas climáticas de España: España lluviosa, España seca y España semiárida.

Procedimiento:

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**

Condiciones de trabajo:

-Gráfico maximizado. *Pulsar en la ventana el botón de maximización, esquina superior derecha.*

-La opción **"Baja precisión"** del menú **"Opciones" activa**. Creemos que es mejor así. Recordar que, por defecto, al arrancar el programa aparece ya activa. Como esta opción sólo afecta a los puntos singulares, máximos, mínimos, intervalos..., puede provocar ligeras diferencias con el cálculo de imágenes. Si quiere evitar estas diferencias, desactive esta opción.

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, **No activa**.

-Las funciones que vamos a representar son numéricas. Recordemos que podemos copiar los datos en el portapapeles y pegarlos en el cuadro, **FUNCIONES NUMÉRICAS - Introducir valores.**

-En todos los casos activaremos la opción **Lineal**. También puede ser interesante activar la opción **Mostrar puntos**.

Partimos de las siguientes tablas de valores. Hemos hecho la siguiente conversión de meses a valores numéricos:

Enero	15
Febrero	45
Marzo	75
Abril	105
Mayo	135
Junio	165
Julio	195
Agosto	225
Setiembre	255
Octubre	285
Noviembre	315
Diciembre	345

Datos de pluviosidad (en milímetros). Fuente Juan Vilá Valenti, ESPAÑA tomo II, Ed. Océano, 1983. No indica el año.

España lluviosa	Lugo (442 m.)	**España seca**	Valladolid (715 m.)	**España semiárida**	Almería (30 m.)
15	118	15	27	15	23
45	132	45	32	45	21
75	149	75	38	75	20
105	75	105	31	105	27
135	80	135	40	135	23
165	44	165	37	165	7
195	30	195	15	195	0
225	37	225	12	225	4
255	58	255	28	255	16
285	82	285	39	285	24
315	112	315	44	315	33
345	185	355	41	355	27

-Pulsamos el botón **Función numérica** *del cuadro de diálogo principal.*

-Escogemos la primera función F(x).

-Introducimos los valores correspondientes a Lugo, o los pegamos si previamente los seleccionamos y los copiamos en el portapapeles.

-Activamos las opciónes **Lineal** *y* **Mostrar puntos**.

-Pulsamos el botón **Aceptar**.

-Repetimos la operación tres veces más para las siguientes poblaciones.Utilizamos para ello las funciones:G(x), H(x), I(x).

Valores de los ejes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	30	Unidad eje Y	20
Final eje X	360	Final eje X	200

*-Pulsamos el botón **Aceptar**.*

Se dibujan las gráficas pluviométricas para las tres poblaciones.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Calcularemos ahora sobre el gráfico las diferencias entre los máximos y minimos de pluviosidad para las distintas poblaciones.

La Línea azul corresponde a Lugo.

-Pulsamos con el botón izquierdo en el punto más bajo de la gráfica.

-Escribimos el resultado: que corresponde al més de ________________ y una pluviosidad de ________________.

-Pulsamos con el botón izquierdo en el punto más alto de la gráfica.

-Escribimos el resultado: que corresponde al mes de ________________ y una pluviosidad de ________________.

Así, la diferencia pluviométrica es de ________________.

Haremos lo mismo en las dos poblaciones restantes. Previamente, limpiaremos la pantalla.

*-Pulsamos la opción ,**Limpiar** del menú, **Opciones**.*

Las diferencias pluviométricas restantes:

Valladolid= ________________.
Almería= ________________.

-Imprimir este documento.

Ficha 5 - Matemáticas.

Tema:

Estudio de las series de Fourier.

Nivel :

COU. Primer y segundo curso universitario, carreras científico-técnicas

Conocimientos previos:

Conocer las funciones trigonométricas y, en general, el concepto de funciones periódicas. Podría ser interesante conocer el cálculo de primitivas, pero, como para calcular integrales definidas utilizaremos el mismo programa funciones, no lo creemos imprescindible.

Objetivo general:

Conocer que se puede aproximar una función periódica mediante una suma de funciones trigonométricas.

Procedimiento:

-Ejecutar el programa: **Funciones para Windows.**

Valores de los ejes, los iniciales.

Condiciones de trabajo:

-Gráfico minimizado.

-La opción **"Baja precisión"**, del menú **"Opciones", No activa.**

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, **No activa**. Aquí el programa realiza muchos cálculos y precisamos de la máxima rapidez.

La función que estudiaremos es la de **diente de sierra**. Utilizaremos los siguiente valores:

x	F(X)
-10	-2
-6	2
-5.9999	-2
-2	2
-1.9999	-2
2	2
2.0001	-2
6	2
6.0001	-2
10	2

-Recordemos que podemos copiar los datos en el portapapeles y pegarlos en el cuadro, **FUNCIONES NUMÉRICAS - Introducir valores.**

-Activar la opción **Lineal**. Muy importante.

*Es una función periódica de período:*________________________.

La **serie de Fourier** o **desarrollo de Fourier** de F(X) se define por:

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n sen(\frac{n\pi x}{l}) \right)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

Donde **2L** es el valor del periodo y **n=0,1,2,3,...**

Lo que vamos a realizar es superponer los sucesivos desarrollos de la serie de Fourier sobre la función diente de sierra.

Para ello, debemos calcular previamente los coeficientes de Fourier, **an**, **bn**. Podemos hacerlo calculando las integrales definidas correspondientes o utilizando la opción, cálculo de **Integral definida**, que nos ofrece el programa.
A continuación, describiremos cómo hacerlo.

-Ejecutar de nuevo el programa: **Funciones para Windows.**

Valores de los ejes, los iniciales.

Los términos **an** valen 0 en todos los casos. La función Cos(x) es par y la función x es impar. El producto de ambas es impar. Como hemos de calcular la integral definida entre -L y L, ésta será siempre 0. Se puede comprobar calculando la integral definida de la función:
f(x)=x.cos(n.p.x/2), entre -2 y 2, siendo n cualquier número natural.

NOTA: Creemos que puede ser muy instructivo hacer esto último cada vez que se calcula un coeficiente. Observaremos cómo la aproximación va mejorando sucesivamente.

Calcular el término **b1**.

-Escribir la función, **f(x)=1/2x.sen(px/2).**

-Representarla. Botón **Aceptar**.

Menú 1 fu.. *Calcular la integral definida entre -2 y 2 =*________________.

Repetimos el proceso para calcular los sucesivos coeficientes.

Término **b2**.

*-Escribir la función,***f(x)=1/2x.sen(2px/2)**.

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 =*________________.

Término **b3**.

*-Escribir la función,***f(x)=1/2x.sen(3px/2)**.

Calcular la integral definida entre -2 y 2 = ________________.

Término **b4**.

*-Escribir la función,***f(x)=1/2x.sen(4px/2)**.

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 =*________________.

Término **b5**.

*-Escribir la función,***f(x)=1/2x.sen(5px/2)**.

*Calcular la integral definida entre -2 y 2 =*________________.

El desarrollo de Fourier, para los coeficientes que hemos calculado, queda:

G(x)=________________.

Volvemos a la ventana donde tenemos representada la función **diente de sierra.** Vamos al cuadro de diálogo: FUNCIONES - Entrada de datos. En el cuadro de entrada G(X), introducimos la anterior función.

-Pulsamos el botón, **Aceptar**. Se dibujan las dos funciones.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

-Imprimir este documento.

Ficha 6 - Economía.

<u>**Tema**</u>:

Estudio gráfico de las cotizaciones de Bolsa y de las medias móviles.

<u>**Objetivo general**</u>:

Se dice que cuando la gráfica de las medias móviles corta a la de cotizaciones, es uno de los criterios que puede tenerse en cuenta a la hora de comprar y/o vender.

Concretamente, cuando corta en situación de cotizaciones ascendentes, se sugiere comprar. En situación contraria, se sugiere vender.

Concretaremos estos términos a continuación.

NOTA: Hay que tener en cuenta que los inversores tienen en cuenta una multitud de otros factores, muchos de ellos también gráficos, volúmenes de negocio...

<u>**Procedimiento**</u>:

-Ejecutar el programa: **Funciones para Windows**.

Valores de los ejes, los iniciales.

<u>**Condiciones de trabajo:**</u>

-Gráfico maximizado.

-La opción **"Baja precisión"**, del menú **"Opciones"**, **No activa**. .

-La opción **"Trazar cálculos"**, del mismo menú, **No activa**.

-Cambiaremos los valores de los ejes por los siguientes:

Origen eje X	0	Origen eje Y	0
Unidad eje X	2	Unidad eje Y	50
Final eje X	105	Final eje X	600

Las **medias móviles** son una nueva tabla de valores en que cada valor es la media de las cotizaciones de **n** días.

A partir de una tabla de **cotizaciones de Bolsa**, dependiendo del número de días que utilicemos, podemos elaborar diferentes tablas de medias móviles.

Partiremos de un ejemplo. Son las cotizaciones de los años 1987 y 1988 de una compañía cementera. Los valores son los correspondientes al cierre semanal. Debería hacerse con los valores del cierre diario. Como se trata de un ejercicio, este hecho carece de importancia.

Las medias móviles calculadas son de 6 semanas, es decir , 42 días.
<u>(La tabla se halla en la guía del profesor)</u>

Representamos los valores de las cotizaciones en una **función numérica**, por ejemplo en F(X). Los valores de las medias móviles en una nueva función numérica, G(X). Recordar que podemos **Copiar** y **Pegar**.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Estudiemos concretamente el segundo año. Parece que las condiciones inversoras son más favorables.

Para ello, cambiar los valores de los ejes:

Origen eje X	52	Origen eje Y	0
Unidad eje X	2	Unidad eje Y	50
Final eje X	105	Final eje X	600

Calcular los puntos de corte. Menú, 2 fu. opción, Cortes.

Fijarse en los 4 primeros. Redondeamos los valores.

-Rellenar la siguiente tabla:

Semana	Cotización	modo	acción
______.	________.	______.	______.
______.	________.	______.	______.
______.	________.	______.	______.
______.	________.	______.	______.

Calcular si hubiéramos tenido algún beneficio en el caso de que hubiéramos comprado 1 acción.

______.-______. = ______.
______.-______. = ______.

En total, ______. No está mal. Puede calcularse durante los 2 años. A lo mejor, el beneficio no hubiera sido tanto.

-Imprimir este documento.

Ficha 7 - Matemàticas.

Tema:
Regresión.

Conocimientos previos:
Estadística básica. Cálculo de: medias, desviación típica.

Nivel :
3º BUP, COU y en general estudios que incluyan estadística.

Inserción Curricular:
Estadística. Experencias con dos variables. Relación estadística.

Objetivos:
Conocer el concepto de relación lineal estadística.
Significado del coeficiente de correlación lineal.
Significado de la ecuación de la recta de regresión.
Predicción.
Otras ecuaciones de regresión.

Procedimiento:

1- Planteemos el siguiente problema:

Sean 10 alumnos de COU seleccionados al azar. Se nos da los pesos y las alturas en la tabla siguiente:

altura (metros)	Peso (Kg)
1.91	84
1.78	78
1.77	77
1.87	86
1.75	65
1.65	46
1.66	49
1.68	60
1.74	60
1.68	60

Las preguntas que tratamos de contestar son:
1 - ¿Existe alguna relación entre estos datos?
2 - ¿Si existe, en qué medida es cierta?
3 - ¿Cual es la relación?.
4 - ¿Cómo utilizarla para conocer valores no incluidos en la tabla?.

Procedamos de la forma siguiente:

Ejecutar el programa: **Funciones para Windows.**

Pulsar el botón **Función numérica.**

Escoger una función, activando el botón **regresión.**

Introducir los datos de la tabla anterior. Recordar que podemos utilizar el portapapeles.

Pulsar **Aceptar.**

Contestar **Si** *a la modificación de los ejes.*

Pulsar **Aceptar** *en el cuadro Principal.*

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Vemos representados los puntos y una recta. De momento sólo nos fijaremos con los puntos:

Observar que hay una cierta tendencia en el sentido de que a valores altos de las alturas corresponde valores mayores de peso, y viceversa. Aclararemos mejor esto con otros ejemplos.

Para contestar a las preguntas 2 y 3:

Escoger menú **1 fu**, *opción* **Ecuación de regresión...**

Observamos que:

Coeficiente de Correlación : ______.

Ecuación de la recta de regresión:______.

El coeficiente de correlación es un valor entre 1 y -1. Cuando más cerca se encuentre de ellos más alta será la relación entre las dos variables. Más adelalante hablaremos de ello.

La ecuación de la recta es la contestación a la tercera pregunta.

Para contestar a la pregunta nº 4, por ejemplo: ¿Cual es el peso esperado de una persona que mida 1.70 m.?

Escoger menú **1 fu**, *opción* **Imagen...**

Escribir 1.70.

El valor esperado es de unos ______. Kg.

2- Hagamos lo mismo con las dos tablas siguientes, Calcularemos para cada una el **Coeficiente de correlación.**

a- Sean 10 alumnos de COU seleccionados al azar. Se nos da el número de aciertos en dos ejercicios de matemáticas y filosofía:

Matemàticas	Filosofía
80	53
48	61
62	53
53	72
43	45
72	59
60	45
41	58
53	50
57	46

Procedemos como en el caso anterior. Observamos la gráfica y el coeficiente de correlación.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

No parece que haya una gran relación entre los dos tipos de valores.

El coeficiente de correlación, ______.

b- Hemos sacado al azar 10 monedas de una bolsa. Medimos la antigüedad y el peso en gramos. Los resultados son los siguientes:

Antigüedad (años)	Peso (Kg)
5	9.41
9	9.45
14	9.33
17	9.34
23	9.31
31	9.26
35	9.22
42	9.21
46	9.15
50	9.08

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Procedemos como en el caso anterior. Observamos la gráfica y el coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación, ______.

En este caso sí parece que hay una gran relación entre los dos tipos de valores. Pero es distinta a más años menos peso. El coeficiente de correlación es negativo y cercano a -1 c- De todo ello llegamos a la siguiente conclusión si dos variables no tienen absolutamente ninguna relación el coeficiente de correlación tendrá un valor cercano a cero. Si hay mucha relación un valor absoluto cercano a uno. Si el coeficiente es positivo la correlación será directa, es decir más valor *x* mayor *y* , y viceversa. Si el coeficiente es negativo la correlación será inversa, mayor valor de la *x* implica menor valor de la *y*.

3- Puede que dos variables esten relacionadas, pero no necesariamente a través de una relación lineal. lo veremos con el siguiente ejemplo:

Dejamos caer una piedra en un pozo y anotamos en distintos instantes de tiempo el espacio recorrido, obtenemos la siguiente tabla:

Tiempo (segundos)	Espacio (metros)
0	0
0.5	1.25
1	5
1.5	11.25
2	20
3	45
5	125
6	180
8	320

Observamos que hay una cierta relación. De hecho el coeficiente de correlación lineal es muy bueno 0.96.

Probemos otro tipo de ajuste.

Nos dirigimos al cuadro **Regresión. Introducir Valores**.

Pulsamos el botón **Cuadrática**.

Finalmente pulsamos el botón **Aceptar**.

-Mediante el portapapeles dibujar la función en este lugar.

Observamos que una parábola ajusta perfectamente los pares de valores. El coeficiente de correlación parabólico es _______., lo que significa que los datos se ajustan perfectamente a una parábola.

Parece mentira. Se acabó.

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación