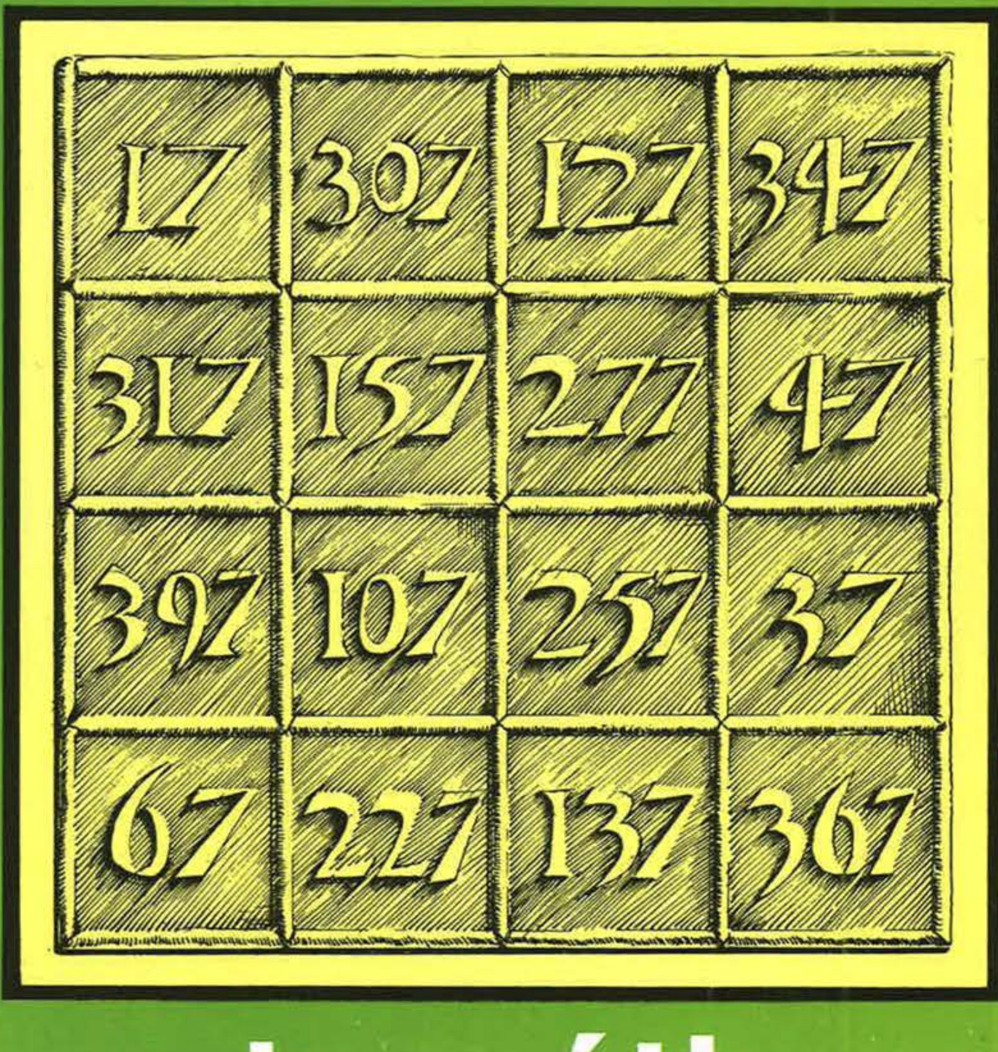
Revista de BACHILLERATO

cuaderno monográfico 5

Suplemento del núm. 13 de R/B.—Enero-Marzo 1980



matemáticas

- Humanizar la enseñanza de la Matemática
- El problema de los problemas: análisis de una experiencia
- Seminarios conexión EGB-BUP en Matemáticas

REVISTA DE BACHILLERATO
Dirección General
de Enseñanzas Medias

CUADERNO MONOGRAFICO, 4
Suplemento del n.º 13 de R/B.
Año III. Enero-marzo 1980

REDACCION:
Paseo del Prado, 28, planta 7.ª
MADRID-14

EDITA:
Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación
Ciudad Universitaria
Madrid-3

IMPRIME:
Héroes, S. A.
Torrelara, 8 (Madrid)

D. L.: M.22.906-1977
I.S.B.N.: 84-369-0211-4

SUMARIO

Págs.

Este cuaderno Monográfico ha sido coordinado por José Ramón Pascual Ibarra.

Portada:

Cuadrado mágico, de orden cuatro, en el que todos sus elementos son números primos terminados en siete. Puede verse un cuadrado mágico de orden trece, con ciento sesenta y nueve números primos diferentes, en «Recreational Mathematics Magazin», octubre, 1961, pág. 28.

¿Para cualquier *n* existe un cuadrado mágico formado exclusivamente por números primos? Se piensa que existe una infinidad de ellos.

PRESENTACION

La cantidad de originales disponibles en la Redacción de la Revista relativos a la enseñanza de la matemática, esperando turno para su aparición en los números ordinarios, nos ha inducido, para no demorar en demasía su publicación, a preparar con algunos de ellos el presente número monográfico.

No busque, pues, el lector en él —lo que había sido inicialmente nuestro propósito— una exposición sistemática de los problemas que la actualidad educativa presenta en relación con la enseñanza de la matemática, problemas surgidos, por una parte, del cambio de rumbo en los objetivos del bachillerato, como consecuencia de la invasión masiva de los centros —creación de tantos nuevos, improvisación de profesores sin formación y selección adecuadas— y, por otra, de las reformas de contenidos en los programas, sin la experimentación previa necesaria y estudio de su metodología, y sin olvidar tampoco las secuelas arrastradas por la implantación de la Ley General de Educación de 1970: reducción del Bachillerato, engarce con la E.G.B., con el COU, de éste con la Universidad, etcétera. ¿Se ha conseguido la pretendida mejora de la calidad de la enseñanza? Las quejas son unánimes en todos los sectores implicados: alumnos, profesores, sociedad... Los alumnos, en particular, siguen acusando actitudes de rechazo frente a la matemática, que continúa siendo, como afirma el profesor Servais en su trabajo, la asignatura más temida del plan de estudios. Quizá, a pesar de los esfuerzos de muchos, no sea la mejor enseñada.

La solución, si la hay, a los graves problemas planteados —como lo atestiguan recientes encuestas realizadas en diferentes niveles de la enseñanza— tiene que encontrarse en la acción de los profesores. Fiel a este principio, la «Revista de Bachillerato» ha entendido, desde su nacimiento, que su función no es la de proponer modelos rígidos de enseñar ninguna materia, más bien ha asumido el papel de abrir horizontes, presentar experiencias, contrastar diferentes criterios, recoger críticas constructivas, en definitiva, servir de cauce para estimular al profesorado en su trascendental tarea para que, superando tantos obstáculos que se oponen a ella, vivan su enseñanza —en frase de Gattegno— como el investigador vive su ciencia. El peligro para la acción docente sigue siendo el dogmatismo y la rutina, que inevitablemente conducen al desaliento y el desánimo, en unos y otros, alumnos y profesores. Rutina y dogmatismo que igualmente pueden aparecer en la denominada matemática moderna que en la enseñanza tradicional.

En esta línea de apertura —matemática abierta a la realidad—, la Revista respeta integralmente los originales publicados, aún en el caso de que los autores expresen criterios distintos sobre una misma cuestión, y hasta quizá aparentemente contradictorios. La unidad que buscamos no es la uniformidad: nuestro deseo es que cada profesor encuentre por sí mismo, con autenticidad, los medios de mejorar su clase en contacto vivo con la realidad concreta de los alumnos que la componen. A ellos nos debemos y ellos son el objetivo esencial de nuestra labor.

Es la ocasión de expresar aquí nuestra gratitud a todos los autores por la entusiasta respuesta a nuestra demanda de colaboraciones, que esperamos seguir mereciendo. Muy especialmente se nos ha de permitir que la dirijamos al profesor Santaló que tan gentilmente nos ha autorizado la publicación de su ponencia presentada en el último Congreso de la Comisión Interamericana de Educación Matemática (Campinas, 1979). Tampoco podemos dejar de consignar nuestra pena por la reciente desaparición del ilustre profesor Willy Servais, que ya no podrá leer la traducción de su trabajo. Sirvan, pues, estas líneas de homenaje a su memoria.

JOSE RAMON PASCUAL IBARRA

ESTUDIOS

Humanizar la enseñanza de la Matemática

Por Willy SERVAIS

WILLY SERVAIS

Nota biográfica

Cuando gentilmente el profesor Servais nos hizo entrega del presente trabajo —original de la conferencia pronunciada por él en las Jornadas Nacionales de A.P.M.E.P., Rennes 1976— para su traducción y posterior publicación en la «Revista de Bachilletato», ¡qué lejos estábamos de sospechar que estas líneas de obligada presentación —a la vez que de gratitud— del autor, estarían teñidas de tristeza!

Willy Servais, el ilustre profesor belga, durante tantos años profesor y prefecto de estudios del Ateneo del Centro (Morlanwelz) y Profesor de Lógica en la Universidad de Mons, falleció súbitamente en Budapest el 25 de agosto de 1979.

Había asistido al XXXI Encuentro de la C.I.E.A.E.M., de la que casi desde su fundación era Secretario, que acababa de tener lugar en Vésprem. En esta reunión, sin cuidar de su fatiga, con total entrega, había participado activamente tanto en su organización —con la ayuda abnegada de su esposa Renée— como en el curso de los debates. En estos había hecho brillar, como siempre, la claridad de sus concepciones pedagógicas y la ponderación de sus juicios.

Pionero en los movimientos de reforma en la enseñanza de la matemática, la presencia del Profesor Servais era solicitada como imprescindible en cuantas reuniones y congresos se han celebrado en el mundo entero durante las últimas décadas. En cuatro ocasiones estuvo en España, a la que —nos consta— amaba profundamente.

Sus trabajos en el campo de la pedagogía matemática vieron la luz en todas las revistas especializadas. Señalemos unicamente su participación con los profesores Puig Adam (con quien le unía fraternal amistad) y Ana S. Krygowska, en las Recomendaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas, *formuladas conjuntamente por el B.I.E. y la U.N.E.S.C.O, así como en la publicación por este último organismo, de la obra* Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática.

De su impresionante humanidad, mejor que lo que nosotros pudieramos decir, juzgará el lector por el trabajo que hoy tenemos el honor de publicar.

Sirvan estas líneas, que bien hubieramos querido evitar, para expresar nuestro dolor por la pérdida, y honrar la memoria de uno de los hombres más admirables que vivieron intensamente consagrados a una gran obra como fin único: Willy Servais.

J. R. Pascual IBARRA

1) Entre todas las Ciencias, la Matemática se sitúa en una posición singular y paradójica.

Sin duda, es la obra más elaborada por las propias fuerzas del espíritu humano, y, por ello, la que mejor refleja su estructura funcional.

Mas, por sorprendente contraste, resulta ser ajena a un número demasiado grande de inteligencias.

Sucede, pues, que una creación de lo más humana en su esencia se presenta para tantas y tantas personas como inhumana y hasta deshumanizante.

La ficción, o la realidad de los hechos, hace creer que los que poseen una predisposición para las matemáticas, todos los elegidos para entrar en su reino, llevan su frente marcada con el signo de la inteligencia.

Para los no predestinados, en cambio, no hay más promesa que un trabajo sin alegría, un hartazo de amarguras, una frustracción sin remedio, una injusticia congénita.

2) De todas las ramas enseñadas, el estudio de la matemática es quizá el más jalonado de lágrimas y de rechinar de dientes.

Para demasiados alumnos y demasiadas familias, las matemáticas son el aguafiestas, motivo de enconadas reuniones familiares, la causa de las vacaciones frustradas.

¡Y, sin embargo!

3) Sin la matemática no se puede comprender el mundo natural, ni hay posibilidad de sacar partido de él.

En el mundo cultural y técnico no hay construcción, cualquiera que sea, que no deba a la matemática su forma, su belleza y su eficacia funcional.

La matemática es una componente señera del poder creador y realizador de los hombres. Como tal es un bien y un derecho de todos, pues constituye una de las dimensiones necesarias para su realización personal.

4) Desde que se reconoció la potencia de comprensión y acción de la matemática, esto es, desde la

aurora de las civilizaciones, se ha venido haciendo un esfuerzo incesante, cada vez más amplio y más consciente, para promover su conocimiento y su utilización.

Los resultados logrados, en su aspecto general, y quizá también en las adquisiciones relevantes, ¿han correspondido a los esfuerzos realizados?.

Ni siquiera los más optimistas se atreverían a responder afirmativamente.

He aquí, pues, las cuestiones planteadas: «sería posible mejorar este rendimiento y aproximarlo al nivel de nuestros anhelos? ¿Cómo podríamos intentar hacerlo?

Si no en su totalidad, al menos en su mayoría, los esfuerzos dirigidos a mejorar la enseñanza se han consagrado siempre a una mejor puesta a punto del contenido matemático y de su presentación pedagógica específica. Vía de progreso evidente, y, al parecer, inmediata por su relevancia, ¿es la única cuando de lo que se trata es de introducir a jóvenes inteligencias en la actividad matemática habituándolas a ella, hacérsela familiar, a fin de que sea mejor asimilada y más eficaz?

5) De una manera general, el lado psicológico, afectivo y, en definitiva, humano, ha sido descuidado cuando no inexistente.

Nuestro propósito es examinar la cuestión juntos precisamente con este enfoque; querría hacerlo sobre la base de nuestras experiencias cotidianas, y con todo el impulso de nuestros mejores deseos. Nuestra reflexión discurrirá por cinco apartados, cuyos títulos son ya por si mismos una crítica y un programa:

La disciplina matemática; los maestros; los alumnos; los profesores; la educación matemática abierta.

I. LA DISCIPLINA MATEMATICA

1) En los diversos sentidos de la palabra disciplina, la matemática es, entre todas las ramas científicas, la que más posee este carácter.

Primero es un conjunto de conocimientos y de métodos que se aprenden bajo un maestro, para más adelante, si uno puede, llegar a ser artesano de su desarrollo.

En el sentido corriente, es un conjunto de reglas de conducta normalmentete acompañadas de sanciones impuestas a los miembros de una misma colectividad.

Por extensión, puede llegar a ser un marco de vida que se imponga uno a si mismo (1).

La matemática es una disciplina exigente. Lo es incluso para los que la practican con soltura. Y mucho más todavia —¿será necesario decirlo?— para aquellos que la sufren como una tarea impuesta y a la que permanecen ajenos.

2) El carácter coactivo de la matemática es el resultado de un haz de propiedades que posee en mayor grado que las otras ciencias.

La Matemática es la más abstracta de las actividades mentales, la más virtual respecto a lo concreto

Es la más lógica, la más relacional, vacia de contenido.

La más esquemática, la más formal, por sus figuras, sus diagramas, su formalismo, sus algoritmos.

La más sistemática y más organizada de forma hipotético deductiva, a partir de las axiomáticas que definen sus estructuras.

Todas estas propiedades superlativas hacen de la matemática, a pesar de ser tan abierta a la creación intelectual, una fortaleza cerrada, severa y temible.

El terror matemático

3) Tanto los alumnos como sus familias consideran a la matemática como la rama más apremiante y más exigente.

Opinión que viene reforzada por el papel de criba selectiva que se le adjudica. Se presta bien la matemática a este servicio por el carácter de objetividad de sus pruebas, y por exigir, además, cualidades de inteligencia racional, principalmente la de dominar una vasta materia fuertemente organizada.

4) La matemática es la rama más acumulativa que existe. En las otras ciencias, digamos en física, es posible conocer una parte, la calorimetría, ignorando, por ejemplo, la óptica.

En la matemática todo se sostiene y, desde sus elementos, es indispensable un esfuerzo de memoria sintética.

Este carácter global y acumulativo viene acentuado aún más por la presentación moderna y más estructurada de las materias, tratamiento que confiere a la matemática una sólida unidad. Por otro lado, si bien esta fuerte conexión de las partes entre sí, asegurada por las nociones fundamentales de conjuntos, relaciones y funciones, es una ayuda para dominar mejor la abundancia de los hechos, ¡es necesario también haber alcanzado un cierto nivel desde el que sea posible una visión sinóptica!

5) Muchos alumnos, por carencia de memoria, por incapacidad de organización racional, o por falta de tiempo y ejercicio, se ven desbordados y muy pronto perdidos en la abundancia de la matemática.

Es bien conocido el pánico de los alumnos que sienten el vacío abierto bajo sus pies ([1] p. 67). Jaques NIMIER *Mathématique et affectivité.*

— En «quatrième», después de recuperar mis lagunas en matemáticas, bien o mal, he podido seguir. Reconozco que he intentado trabajar en «Troisième». Mis padres me han hecho dar clases particulares, que no me han servido para recuperar todos mis fallos, y, ahora, ya en «seconde», estoy convencido de que me voy a encontrar con dificultades en los problemas de física, debido a mis lagunas en álgebra...

— Tengo lagunas en matemáticas que jamás llegaré a recuperar, porque si, en matemáticas se tienen casi tres años con defectos, es imposible rehacer todo eso...

El problema puede no ser cuestión de trabajo y buena voluntad ([1] p. 58):

— El ano pasado, ciertamente, estaba desorientado. Y este ano, por eso, todavia más, porque lo entiendo bien en clase, si, lo comprendo todo, pero después cuando se trata de rehacerlo, siento como un vacío y ya no consigo reconstruirlo.

6) No es lo mismo en las otras ramas; con algo de parloteo se puede inflar lo que se dice. Además, en estas materias no pasa lo que en matemáticas, en las que un error siempre se propaga y una falta de cálculo o de razonamiento compromete todo el desarrollo ulterior ([1] p. 69):

— Te equivocas en una minucia ¡y se acabó! todo queda en el aire.

---

(1) Ver diccionario de la lengua filosófica de P. FOULQUE y R. SAINT-JEAN.

Al alumno poco seguro, el éxito le parece un golpe de suerte ([1] p. 71):

— Por ejemplo, estoy ante un ejercicio de matemáticas que debo resolver... ¡pues bien!, inmediatamente tengo la impresión de que no lo lograré, y, que si lo logro, será por pura casualidad.

7) En las letras, en las artes, las obras llevan la marca del artista, que son testimonio de su personalidad subjetiva.

Las ciencias positivas, en cambio, exigen de sus practicantes la renuncia voluntaria a toda subjetividad, deberán olvidarse de sí mismos.

Por eso, la matemática es para la mayoría la disciplina más alienante de todas.

Lo es así porque procede por abstracción y esquematización sucesivas. Se llega a cada nivel por abandono del contenido del nivel inferior.

Por pérdida progresiva de contenido, las nociones, en una especie de ascesis, se depuran, se multiplican, se vacían de contenido semántico para acceder a un estadio lógico que puede reducirse a una sintaxis.

He aquí cómo se expresa esto: ([1] p. 59).

A.—*Pienso que mejor que estudiar una materia como las matemáticas, que nos turban la mente, debería uno instruirse en las lenguas.*

N.—*¿Por qué las matemáticas son perturbadoras?*

A.—*Sí, perturban porque las matemáticas no son más que lógica. Hay que tener lógica. En tanto que en las lenguas, para aprender las lenguas, se necesita tener una cierta sensibilidad, es decir, que la mente va mejor con las lenguas, lo que no sucede con las matemáticas... Por eso digo que terminan perturbando la mente.*

8) En el caso de un alumno flojo, el formalismo, lejos de contribuir a poner mayor claridad y concisión y a favorecer los cálculos, es fuente de incomprensión ([1] p. 52).

— Pues no lo sé, pero me parece que se podría muy bien escribir la matemática en nuestra lengua en vez de poner signos, y creo que si se hiciera así las comprenderían muchos más. Son muchos los que se equivocan después de aprender montones de signos y de expresiones matemáticas.

9) ¿Qué le pasa al muchacho asediado por la selva de signos, cuando estos en lugar de introducirse con una significación precisa, se convierten en una tipografía en la que el automatismo de las manipulaciones ha sustituido a la misión de comprender el sentido de las operaciones algebraicas?

¡Escuchad! ([1] p. 47).

— En matemáticas todo es repetición, verdaderamente es un lavado del cerebro.

— Era más bien una especie de mecánica, era necesario hacer un deber y había que hacerlo.

— Sí, lo hacía mecánicamente.

— Y además, en las matemáticas, si he encontrado una especie de poesía, no lo sé, pero, si Vd. lo quiere, habrá sido en todo caso la poesía de las... máquinas.

— Cuando se trata de un problema, aprendo mis teoremas y todo eso. Ya los sé, sé mis definiciones, pero mi problema lo hago como una máquina.

— En matemáticas se hace todo como una máquina.

10) La matemática aisla del mundo y de los demás ([1] p. 55).

— Y además la prueba de que las matemáticas nos separan del mundo, es que ahora que ya trabajo, las matemáticas no me sirven de nada; de las ideas que retengo de otras cuestiones puedo hablar con cualquiera. Si hablase en la oficina con una chica de la suprayectividad ni ella ni yo veríamos en ello ningún interés, y más bien tendríamos la impresión de habernos hecho unos tontos, por hablar de esto. ¡Es la pura verdad!

— Por ejemplo, al compararlas con la literatura, puedes referirte a las obras o a los personajes de novela o a los autores que puedan... no sé... animarte, digamos... sostenernos, pero, con las matemáticas no hay nadie, uno está sólo.

11) El rigor disciplinario de la matemática, la deshumanización alienante de su abstracción, la mecanización de los ejercicios y de las clases, el vacío de su objetividad despersonalizante, sobre todo sufridos por los alumnos más vulnerables, aquellos que poseen una afectividad inclinada a la ternura y con capacidades lógicas reducidas. Tiemblan y se llenan de pánico ante ella que les acosa como una pesadilla. Como dice Jacques NIMIER ([1], p. 63).

Las presentaciones más rigurosas, más claras, de tal teorema ¿qué podrán cambiar en la comprensión de aquellos para quienes las matemáticas están asociadas a un fantasma de destrucción y de muerte?

Las defensas contra las matemáticas

12) No todos los alumnos incapaces de hincar el diente a la matemática parecen sufrir por ello. Algunos tienen mecanismos psicológicos de defensa.

Olvidar y dejar de lado es una manera de guardar las distancias ([1], pp. 80, 82, 83).

— Por ejemplo, lo que ahora estamos haciendo: los conjuntos, los entiendo, los hago, es así. Pienso en las matemáticas, en el tema en general y después, ¡puf!, se acabó.

— Es como si hubiera una cortina que me separa de lo que hay... lo que veo... no lo veo... está lejos. He tenido esta misma sensación... evidentemente enseguida esto me ha recordado las matemáticas.

— Me estudiaba la lección la víspera del examen y después se acabó. A veces iba mejor y después, al final de «troisième», me encontré en una situación de desinterés completo. Había abandonado las matemáticas totalmente.

13) Tomar partido es también una protección ([1], p. 109, p. 113):

— Eso está muy lejos, pasa a tres millas de mí.

— Para mí, las matemáticas, verdaderamente pertenecen a otro mundo; siempre me han desbordado.

— Considero a la matemática, además, como algo superfluo; no es porque yo sienta un poco de admiración por los que las hacen por lo que yo vaya a decir que también, para parecerme a ellos, me voy a dedicar más a las matemáticas, no, no lo creo. Sinceramente no valgo para ellas, pero eso no me deprime. El no saberlas no me importa, no me causa el menor malestar... eso depende.

14) Un buen remedio es la compensación ([1], página 83).

Incluso se llega a un cierto orgullo.

— Soy malo en matemáticas y eso me causa una cierta satisfacción. Por ejemplo me digo: Yo soy para las letras y las abandono completamente.

— A los que no les gustan las matemáticas, las rechazan. No vale la pena obligarles, las desprecian.

5) La mejor cqmpensación es infravalorar la matemática para no sentir su carencia ([1], p. 107):

— Nunca he conseguido hacerme a la idea de que esto pudiera ser algo importante.

— A mí lo que me gusta es el francés, y, desde un punto de vista ideológico, pienso que hay problemas

mucho más importante que las matemáticas. En clase de literatura puedes hablar de muchas cosas; no sé cómo podrías hacer lo mismo en las matemáticas.

Es cierto, que en nuestra enseñanza, la matemática no se utiliza para estudiar importantes problemas vitales. Este hecho conduce a los alumnos a opiniones radicales ([1], p. 107).

— Para mí las x y las y no representan nada; son algo totalmente abstracto.

— Era preciso copiar teoremas completamente estúpidos.

Se llega hasta el ataque personal ([1], p. 108).

— Vd. como profesor de matemáticas, ¿cree de verdad en ellas, en todos estos teoremas?

16) La agresividad hacia las matemáticas no es cosa de hoy. Sin duda es mayor en nuestra sociedad tecnológica, porque los padres alaban hasta la exageración los méritos, el prestigio y la potencia de la reina de las Ciencias ([1], p. 110).

— Mis padres piensan que es una asignatura importante. Más aún, cuando se dice las matemáticas se las considera, en general, como la más importante, a la que se debe uno dedicar con preferencia. Además, se imaginan que la matemática es la materia más difícil, la más ambiciosa, la que más se desea.

— Cuando se sabe de alguien que es bueno en matemáticas se dice: ese sí que es bueno en matemáticas. Debido a que se piensa que en ellas está el porvenir de la época de los ordenadores; por eso los padres «¡qué pena que no seas bueno en matemáticas!», ¿qué tienen de particular para que tú no las comprendas?

En este clima de prestigiar las matemáticas, ser negado para ellas, viene a ser una tara ([1], p. 142):

— Siempre... Desde la escuela primaria, siempre lo mismo: siempre marcado, nulo en matemáticas, inepto... y más lejos ([1], p. 147):

A.—*Justamente el peligro es que tengo miedo, me he acostumbrado... es un estado de ánimo que dura ya años. Tengo confianza en francés y en lenguas; pero en matemáticas nunca me siento seguro..., vivo en un clima de inseguridad y no me hago a la idea de que esto pueda cambiar; si me siento un poco más confiado, ¿qué va a pasar?, ¿qué sucede?, eso...*

N.—*Entonces, ¿cuál es el peligro?*

A.—*Pues eso precisamente, que tengo miedo de perder...*».

La alegría matemática

17) Hasta ahora, hemos abierto todo el gran pliego de cargos de la disciplina matemática. Era necesario para probar toda la carga soportada por los alumnos que la sufren. Por razón de equidad, es justo hacer oír también la voz de los alumnos que son buenos en matemáticas.

Este testimonio servirá para alivio de los profesores de matemáticas; algunos de ellos podrían no tener quizá buena conciencia de sí mismos. Se sentirán felices al oír alabar las alegrías que las matemáticas suscitan ([1], p. 90).

A.—*En el fondo no se crea un problema, se crea la solución. O sea, nace de nosotros, son como objetos que uno hace.*

N.—*En el fondo construís algo.*

A.—*Sí, en las matemáticas se construye algo. Entonces por eso me gustan. A todo el mundo le gusta crear algo, digo yo... Porque si no llegáramos a construir ese algo, o sea, a encontrar... a encontrar la paz, a tener la satisfacción de haber hecho algo, creo que lo dejaría (lo dejaría, en fin, creo... o por los menos intentaría dejarlo).*

Si no se consigue encontrar algo es que a uno no le gustan y se las deja, porque uno se encuentra atrapado sin saber qué hacer. Y es enervante, molesto. Es preferible hacer algo en lo que uno se sienta realizado. Si uno solo no encuentra la solución tiene que pedírsela a los demás.

N.—*Tenéis la sensación de construir, pero algo que surge de vosotros.*

A.—*Ah, sí, sí surge de nosotros, como algo en lo que se ha pensado, que uno ha encontrado, que luego ha expuesto. Porque un razonamiento matemático se expone, yo creo. Entonces, algo que se ha expuesto, que ha sido hecho por nosotros... Sí, porque un problema, naturalmente, tiene un enunciado que se nos dá, pero después, lo más importante lo tenemos que hacer nosotros. Eso es lo que nos dá la satisfacción personal de haber hecho algo.*

Semejante testimonio, con la espontaneidad del lenguaje hablado que se afana por expresarse mejor describe en forma maravillosa la satisfacción del que «al hacer algo» se afirma uno ante sí mismo y ante los demás.

La alegría narcisista del creador no está en la cosa creada. Radica en la creación del yo.

18) No se trata aquí de amar, de manera contemplativa y platónica la matemática hecha, sino de querer el quehacer de la matemática. En realidad, el móvil psicológico profundo ¿no es, como en todas las cosas, amarse a través de la obra bien hecha?

Como lo subraya J. NIMIER, la matemática proporciona muchas alegrías ([1], p. 126):

Alegría de ver claro.

— Ayer llegué a comprender un capítulo del que antes no entendía nada. Ahora sí ahora lo comprendo... hasta ayer, no, es decir, había sobre todo un punto oscuro, y he logrado, por mí mismo, ponerlo en claro. Me ha producido esta satisfacción.

Alegría de lo imprevisto, orgullo de superarse.

— Sí, de lo imprevisto. Porque no sabía si lo iba a lograr. No se sabe si se va a encontrar. Por eso, cuando se ha llegado viene la alegría..., poder decir que uno lo ha hecho, poder explicárselo a los otros... Esto es lo que empuja, lo que impulsa a la acción. En fin, eso es lo que se nos exige, superarse y clarificar las ideas.

19) Para aquellos alumnos a los que su capacidad hace combativos, la matemática ya no es una amenaza, un peligro, una barrera. Es sí un obstáculo, un adversario al que hay que vencer ([1], pp. 86-87).

— Hay dos posibilidades: se hace o no se hace. Es una cuestión temperamental. Si no lo hago me siento verdaderamente vencido, hasta desgraciado; sí, ciertamente desgraciado por no haber logrado la solución. Pero, si consigo encontrarla, entonces me considero verdadero vencedor... Cuando resuelvo un problema... lo que es, por lo demás, bastante normal... un problema con alguna dificultad que he conseguido superar, es evidente que tengo derecho a sentirme como un vencedor.

El mismo grito de triunfo:

— Me siento vencedor verdaderamente cuando he encontrado... Cuando os proponéis un objetivo y llegáis a alcanzarlo, es prácticamente evidente que encontrais una cierta felicidad... Si triunfo al hacerlo, verdaderamente me siento dichoso.

II LOS MAESTROS

Una maestría difícil de adquirir

1) Son tales la variedad y la abundancia de la proliferación matemática que es humanamente imposible dominar con suficiente profundidad los numerosos campos de su creación.

Tener una cultura matemática puesta al día exige un esfuerzo considerable. Es más asequible, al precio de un esfuerzo huamanamente posible, tener una buena información y un dominio razonable de las materias del nivel secundario.

Tal esfuerzo es sobre todo rentable gracias a las estructuras fundamentales que aseguran al conjunto de estas materias la mayor unidad, la cohesión, y, como consecuencia, la inteligibilidad.

Es sabido que la enseñanza matemática no está siempre garantizada por un número sufiente de profesores con la formación adecuada.

De cualquier manera, el maestro, cualquier maestro, debería haber tenido ocasión de realizar el esfuerzo para la adquisición de su bagaje de matemática moderna, y también el necesario para poder estar suficientemente próximo al alumno que aborda

Desgraciadamente no es siempre así.

2) Sabemos que uno de los rasgos de carácter del que enseña es el narcisismo, que nos conduce a hacer lo mejor que podamos nuestras clases. Si somos conscientes de este hecho, podremos limitar sus efectos al evitar la consideración de las deficiencias o las ignorancias de los alumnos como si fueran injurias personales.

La imposición de los maestros

3) Quedan, empero, adultos que hacen pesar sobre sus alumnos su superioridad matemática.

Escuchad este testimonio ([1], p. 53).

— Llega un muchacho con las manos en los bolsillos, plantea en el tablero un problema de veinte líneas y lo resuelve como si nada en cinco minutos; para nosotros..., en cambio, nos deja pegados durante horas, lo que me hace pensar en el juego del gato y el ratón. El gato es el «profe» y ¡yo el otro!... ¡Muy bien chavales! Hay chicos que lo han resuelto enseguida y vosotros ¿qué? ¡no hacéis nada!... En fin, esto no es así generalmente. Pero, yo, en todo caso, esa es la experiencia matemática que tengo ¿no es así?

¿Qué pensar también de esta confidencia? ([1], página 70).

— Una cosa me sorprendió: había una muchacha que al comienzo del curso tenía buenas notas, pero después, más adelante, ya no se destacaba. Entonces el «profe» le dijo: ¡Te creía inteligente y resulta que no lo eres, pequeña! A esto reaccioné: Si la matemática es la inteligencia, entonces la mía no debe ser mucha. Por el momento me sentía un poco descorazonada, pero despuées me dije: «Si voy bien en francés, en lenguas, esto no tiene razón de ser, debe de haber varias clases de inteligencia.

Caso feliz el de una muchacha que encuentra en ella misma la compensación necesaria frente a un juicio sobre su inteligencia, que podría dejarla marcada de una manera definitiva.

4) Se sabe toda la importancia de una buena relación afectiva entre un alumno y su maestro, y cómo un lazo de simpatía con el profesor puede hacerle amar la materia, trabajarla con convicción y llegar a conocerla.

La autoridad en matemáticas

5) En matemáticas, cuando se produzca una situación de protesta a propósito de una propiedad o de una demostración, es la matemática misma la que debe ser y decidir como árbitro. No tiene derecho el maestro a erigirse como autoridad para hacer prevalecer su punto de vista. Y, todavía más, es menester que tenga la sencillez y la prudencia de reconocer, en su caso, que es el alumno el que tiene razón.

6) Hay profesores que, en lugar de habituar al alumno a recurrir a las propiedades matemáticas, se limitan a responderse a sí mismos a multiplicidad de preguntas.

— ¿Se puede hacer esto? ¿Se debe hacer aquello? El conocimiento de la matemática se convierte así en un código de obligaciones, de autorizaciones y de prohibiciones.

Por ejemplo, la distributividad de la multiplicación sobre la adición que se puede expresar: cualesquiera que sean los números *a*, *b*, *c*, se tiene:

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

se traduce en estilo de *obligación*:

—Para multiplicar una suma por un número, se multiplica cada uno de los términos de la suma y se hace la suma de los productos obtenidos.

Regla imperativa que es una tontería, como lo muestra el ejemplo siguiente:

$$(47 + 53) \times 7 = 100 \times 7 = 700$$

Un enunciado en forma de *autorización*:

— Para multiplicar una suma por un número, se puede multiplicar cada término de la suma por ese número y sumar los productos obtenidos.

No es falso, pero esta regla polariza la lectura de izquierda a derecha de la igualdad simétrica.

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

Silencia la lectura de derecha a izquierda, relativa a la posibilidad de sacar factor común *a*. ¿Por qué no enunciar simplemente la distributividad, no como una regla, sino como una proposición lógica?:

— El producto de una suma por un factor es igual a la suma de los productos, por este factor de los términos de la suma inicial.

7) En lugar de interponer entre el alumno y la matemática, su propia barrera autoritaria, el profesor debe mostrar al alumno que él mismo está sometido a la autoridad de la matemática. De esta forma, a la vez que evita al alumno el impacto de su dominación de adulto, se coloca de su lado ante la jurisdicción matemática.

8) Si bien no se debe mecanizar al aprendiz matemático mediante un sistema teledirigido de órdenes y de prohibiciones, tampoco conviene abandonarle a sí mismo, solo y sin ayuda, frente a la matemática, cuando la tarea es demasiado pesada para una inteligencia joven.

Los maestros que tienen un contacto pedagógico y humano adaptado a cada alumno, saben intuitivamente lo que conviene decir, a uno para darle seguridad, a otro para estimularle, a un tercero para desafiarle, a un último para sostenerle en su esfuerzo que hasta el momento ha sido poco provechoso.

Los maestros del pensar

9) Los verdaderos maestros de matemáticas son, cada uno a su manera, con los medios que les dan su ciencia y su personalidad, maestros del aprendizaje de pensar. Cercanos a sus jóvenes discípulos, saben guiarles cordialmente y hacerles descubrir cómo se busca, cómo se plantean cuestiones, cómo se adivina, cómo se comprueba, cómo se construye una demostración o se resuelve un problema.

Su saber-hacer, su arte, está mucho más hecho de psicología, de contacto humano, que de matemática y de lógica.

10) Que cada uno de nosotros se remonte al recuerdo de sus profesores y maestros.

Ahora, mientras os hablo, estoy viendo emocionado sus rostos desfilando en mi memoria, reencontrándome con ellos como si aún estuvieran vivos. Son recuerdos muy antiguos.

11) El primero, el más digno de lástima suscita siempre la misma conmiseración. Preparaba cuidadosamente sus clases. Tenía un encerado modelo en el que, durante los recreos, dibujaba las figuras en colores. Desencadenaba un alboroto épico y despiadado por parte de los alumnos alborotadores, por su falta de autoridad. En ocasiones el tumulto cesaba de repente ante la aparición del prefecto de estudios que aplicaba un castigo general. Este profesor pretendía haber descubierto una demostración del postulado de Euclides y jamás comprendió que no valía nada.

12) Nuestro profesor de la sección científica era la humanidad sonriente, de una elegancia innata moral, matemática y hasta en su atuendo. Trabajabamos todos juntos en un debate, que sabía guiar con tal soltura natural que pasaba inadvertida. Admiraba la belleza de ciertas propiedades y nos hacía compartir la alegría de comprenderlas. Para indagar si lo habíamos comprendido bien no hacia preguntas. Nos iba mirando a cada uno, sin abandonar su luminosa sonrisa designándonos avanzando la barbilla al tiempo que dejaba oir un afectuoso carraspeo de asentimiento; después nos preguntaba: «¿Y, ahora?» La respuesta, establecida como un ceremonial, era: «Ahora, señor, hay que recordarlo.» Con frecuencia, al recordarlo, me hace pensar en la frase de Pascal: *Después de habérseme dado la alegría de comprender, tengo que tomarme el trabajo de aprenderlo.*

13) En la Universidad los profesores eran muy diferentes unos de otros. Nuestro «gran maestro» nos quería tanto como amaba la matemática. Durante cuatro años nos hizo exponer a nosotros mismos todas sus clases: geometría analítica, mecánica, geometría proyectiva, geometría diferencial. Permitía la crítica, una crítica afectuosa, ¡pero sin piedad! Nos enseñó el arte de presentar y demostrar las proposiciones matemáticas.

Nuestros maestros del rigor fueron dos: el de análisis y un lógico metido en las controversias de Brouwer. Los profesores de física eran dos sabios; uno tenía la precisión propia del experimentador, el otro, el entusiasmo sonriente y comunicativo de su convicción einsteniana.

14) Los maestros de «stage», muy diferentes entre sí, nos marcaron todos muy fuertemente, cada uno a su manera. Uno de ellos, un tipo jovial «bon vivant» nos mostraba los enlaces entre la matemática y la física y la manera de llevar con convicción y firmeza una clase de «quatrième» correspondiente a la edad de la pubertad. El segundo hacia la clase ataviado con una levita negra y cuello de puntas redondas. Tan limpio de espíritu como de moral y de físico, era a la vez amado y temido de sus jóvenes discípulos. Solía encontrarse con ellos en el campus del ateneo, vistiendo un «short» como un «master scout» inglés, y les ayudaba con mano firme a montar una tienda o a vadear un arroyo. El último flaqueaba un poco, pero tenía una inteligencia brillante, una bella voz atrayente y una cultura más vasta que la de un profesor de letras.

15) Si me he permitido evocar a los maestros que tuve la buena fortuna de tener, no ha sido sólo para expresar la gratitud que les debo, sino más bien para mostrar cuán diferentes eran en su humanidad. Porque más que las matemáticas que me enseñaron, el verdadero mensaje que recogí de ellos fue el de su humanidad tan diversa.

III. LOS ALUMNOS

Conocimiento de los alumnos

1) Frente a la matemática, frente al maestro, frente al entorno, frente a nuestro mundo, los alumnos son a menudo niños desamparados.

Muchachos que nos preocupan o nos alegran, nos aburren o nos consuelan, nos desesperan o nos conforman.

Sus hechos y sus gestos, sin inquietudes, sus alegrías, su desorientación, su confianza, sus problemas, todos surgen de los nuestros. Ellos no hacen, por lo general, más que expresarlos y reflejarlos ante nosotros.

Hasta tal punto son producto de nuestra sociedad y de nosotros mismos, que únicamente a ellos los tenemos como depositarios de nuestras esperanzas.

¡A nosotros nos toca consagrarles, para su bien, todo el aliento que nos quede!

2) Nuestra misión es la de hacerles adquirir, al mayor número posible, el instrumento incomparable de pensamiento y de acción que es la matemática.

Pero nuestro saber científico, por vasto y sólido que sea, será vano si no conocemos suficientemente a los alumnos, que son nuestros compañeros de trabajo.

Nuestra enseñanza no se dirige al alumno, concepto abstracto, sino a los alumnos, niños o adolescentes concretos, presentes en una clase.

Necesitamos un conocimiento plástico que se modele bien sobre cada muchacho, que nos permita entrar en relación con él, ganar su confianza, tener un intercambio humano.

Es ahí donde la pedagogía se revela como un arte en el que la intuición, como siempre, parece el único recurso. La intuición pedagógica no es, segumente, la cosa del mundo mejor repartida. Hay que contar con los errores de apreciación del profesor que, con toda su buena fe, no ve hasta qué punto juzga de la personalidad de un alumno a través de la suya propia. Proyección de la que muchas veces no es consciente. Sabe, sin embargo, que casi siempre las reacciones de un mismo alumno respecto a diferentes maestros distan mucho de ser semejantes.

La caracteriología

3) Para ayuda del profesor en sus relaciones personales con un alumno, es menester, además del conocimiento de las funciones comunes a la psico-

logía de todos los hombres, en general, el conocimiento de lo que caracteriza la psicología de un alumno considerado en particular. Bien seguro, no se trata de seguir los mil detalles de la psicología individual, sino de investigar el carácter, es decir, por definición, el conjunto de las maneras habituales de sentir, obrar y pensar de un individuo [2].

4) Desde siempre, los caracteres humanos han sido observados y descritos con arte por los moralistas, los dramaturgos y los novelistas.

Para que el conocimiento de los caracteres llegara a ser una ciencia, la caracteriología, fue preciso que tomara una forma metódica, objetiva y positiva.

La caracteriología ha dado lugar a varias corrientes de estudios:

a) Determinación de algunas propiedades suficientemente generales de las conductas humanas capaces de permitir la caracterización en su conjunto de la conducta individual.

b) Estudio de las relaciones entre los diferentes rasgos del carácter.

c) Investigación de las causas constitucionales o psicológicas que provocan las conductas individuales.

5) La escuela francesa de caracteriología de Le Senne ha escrito una serie de obras destinadas a los profesores; esta caracteriología se interesa, en efecto, por el estudio de los caracteres generales de las conductas observables directamente en la vida corriente, en particular, en una clase, lo cual permite a los profesores aprovecharse de ella para comprender y prever los comportamientos de sus alumnos.

Otras caracteriologías, que pretenden mayor profundidad, exigen exámenes más penetrantes del psicólogo y del psicoanalista.

6) En su tratado de caracteriología, R. Le Senne distingue entre carácter y personalidad. Según él, el carácter es el esqueleto permanente de las disposiciones congénitas que constituye la estructura mental de un hombre. La personalidad es la totalidad psicológica, la cual comprende, además del carácter innato, todos los elementos adquiridos en el curso de la existencia [3].

Esta distinción de un núcleo caracterial invariable en el seno de una personalidad evolutiva, muy clara en su aspecto conceptual, no puede hacerse en la práctica por los métodos usuales de análisis del carácter.

Las encuestas caracteriológicas que hemos realizado durante años, sucesivamente con los alumnos de las clases superiores del Ateneo del Centro (Morlanwelz), han revelado una variabilidad de los rasgos caracteriales. Esta variación, más sensible en el curso de la pubertad, se atenúa en los dos años superiores, sobre todo en el último. En la mayoría de los casos, presenta una evolución hacia la estabilidad.

De hecho, por una parte, los caracteres aparecen suficientemente permanentes como para que se pueda fundamentar sobre ellos una relativa fijación de las conductas previsibles, mas, por otra parte, ofrecen en la infancia y adolescencia, una plasticidad suficiente para permitir una acción educativa.

De una manera general, si bien puede decirse que el carácter condiciona las conductas, el afirmar que las determina de una manera absoluta no dejaría de ser una extrapolación gratuita.

Los factores caracteriales de estructura

7) Los trabajos de la Escuela francesa se hicieron tomando como punto de partida las investigaciones emprendidas por el psicólogo G. HEYMANS y el psiquiatra E. WIERSMA de Groeningen.

Estos dos científicos holandeses formularon un cuestionario en relación con la presencia o ausencia de múltiples aspectos caracteriales, cuestionario que sirvió de base para dos encuestas:

a) Una encuesta estadística enviada a tres mil médicos holandeses y alemanes, a los que se les pidió respuestas obtenidas por la observación de una familia, padres e hijos, sobre diferentes preguntas.

b) Otra biográfica, consistente en poner de relieve los rasgos de carácter de las biografías de ciento diez personas, de uno u otro sexo, y de diversas nacionalidades.

Los resultados pusieron de manifiesto que los múltiples rasgos de carácter no están distribuidos al azar en un individuo. Presentan entre sí ciertas afinidades, que permiten agruparlos bajo un rasgo más general o factor caracterial de estructura. Los tres factores fundamentales de estructura revelados por las encuestas son: la emotividad, la actividad y la repercusión de las representaciones.

Para los que no conozcan la cuestión, me voy a permitir recordar sus grandes líneas. Puede serviros, con espíritu crítico, para contrastar vuestro propio carácter.

8) La emotividad

Todo acontecer del que tomamos conciencia produce en nosotros una emoción más o menos fuerte. La intensidad de esta turbación en razón al objeto que produce permite tener una referencia de la mayor o menor emotividad.

Un emotivo, es, en determinadas circunstancias, más violentamente afectado que la media. Se turbará por motivos banales que no afectan a la mayoría de los hombres, y es él mismo el primero en saber que no valdría la pena preocuparse por ellos. Las reacciones exteriores del emotivo son frecuentemente muy vivas (gritos, lágrimas, explosiones de alegría, rubores, palidez, agitación). El emotivo se entusiasma o se indigna por cualquier cosa, pasa fácilmente de la alegría a la tristeza, frecuentemente tiene el sentimiento de ser desgraciado; es susceptible, fácilmente vulnerable. Obsesionado por la duda a propósito de actos irrelevantes, se siente angustiado frente a una tarea nueva. La timidez, el miedo, pueden inhibirle completamente.

Los emotivos están fuertemente ligados al medio que los rodea. Es tal su permeabilidad, y consiguiente vulnerabilidad, que lo mismo pueden encontrar en él una fuente de energía que resentirse dolorosamente.

El no emotivo, por el contrario, se mantiene en calma, sólo se turba por sucesos realmente graves; acepta con tranquilidad las cosas como son; de humor constante, es más razonable. Está más aislado de la realidad, más resguardado, más autónomo.

La emotividad se atenúa en el transcurrir de la vida, o, por lo menos, reduce sus manifestaciones. La mayoría de los adolescentes son emotivos. Es justamente su emotividad el origen de sus impulsos y de sus entusiasmos. Sin embargo, sobre todo, es la causa de que por su sensibilidad sean más vulnerables. Sin excepción, los estudiantes que han respondido a mis encuentros, incluidos los no emotivos, deseaban ver disminuida su emotividad. Seguramente hay que ver en ello el deseo de llegar a ser más dueños de sí mismos, como el adulto.

¿No es también la emotividad, cuyo papel dinámico es tan importante en la investigación, la que los hace muy sensibles a la menor perturbación, impidiéndoles concentrarse con facilidad?

9) La actividad

La actividad aparente es el comportamiento del que actúa y se agita en demasía; debe distinguirse con cuidado de la actividad en el sentido caracteriológico. Esta es la natural disposición para obrar con soltura por si mismo.

El activo vive para hacer; el inactivo obra de mal grado. No hay que confundirse: el inactivo caracterial, si es emotivo, podrá tener una actividad exterior desbordante impulsada por su emotividad; pero, a continuación de su esfuerzo, quedará abatido, incapaz de reaccionar durante largo tiempo. El activo, por el contrario, se recupera prontamente, tiene un sueño tranquilo, reparador, puede estar en vigilia sin gran fatiga: la acción no le es costosa. Siempre está ocupado, sin más obligación que su necesidad de obrar; controla el trabajo que encarga hacer a otro. Le estimulan las dificultades, toma inmediatamente decisiones que ejecuta sobre la marcha. Ver trabajar a otro le estimula a pasar a la acción.

En el inactivo, las formas más agradables de emplear su tiempo son la ensoñación, la distracción pasiva, la contemplación inmóvil del trabajo de los demás. Pasar de la decisión a la ejecución le resulta penoso. Se siente empujado a diferir lo que tiene que hacer. Se desilusiona fácilmente a la menor dificultad.

¿Será necesario decirlo? La actividad caracteriológica es una disposición preciosa, una garantía de éxito en los estudios, y, especialmente, en el estudio de las matemáticas. Los que no la posean deberán aportar un esfuerzo enorme para obtener un pobre resultado. Frecuentemente, se trata de alumnos que trabajan mucho, pero sin fruto; esos, cuyos padres, dejándose llevar por las apariencias, dicen: *¡Si supiera usted, señor, cuánto trabaja; no sale jamás!*

10) Repercusión de las representaciones

Todas nuestras representaciones y nuestras impresiones ejercen sobre nosotros dos acciones. Una inmediata, que tiene lugar mientras que las representaciones están efectivamente presentes con claridad en nuestra conciencia; es su función primaria. Otra acción diferida o secundaria que se prolonga cuando las representaciones han desaparecido ya del campo de la conciencia.

Estas dos funciones se llaman, respectivamente, la primariedad y la secundariedad. Según que un individuo se mueva, principalmente por una u otra, será primario o secundario.

El primario, ante un dato mental actualmente presente, rechaza los efectos de los datos pasados. Vive intensamente el instante presente. Es espontáneo, sin rencor, rápido y superficial. Sus alegrías, sus penas, sus cóleras, sus buenas resoluciones son todas pasajeras, exteriores y sin continuidad.

En el secundario, hay remanencia del dato mental. Realiza su acción presente en el pasado y la proyecta en el futuro. Es hombre de recuerdos y de precisiones, olvida difícilmente lo mismo las injurias que los beneficios, elabora planes y programas. Sus emociones, canalizadas al instante, son más interiores y se escalonan en el tiempo. Sus reacciones son lentas, profundas y organizadas.

La primariedad, ligada a la actividad, proporciona alumnos reactivos, brillantes, rápidos en las respuestas, dispuestos siempre para intervenir, a tomar la palabra, lo mismo para decir una tontería que para proponer una buena idea.

En matemáticas, son los primarios caracteriales los que animan las clases inferiores por la vivacidad de sus respuestas.

La secundariedad, sobre todo en ausencia de la emotividad, hace alumnos reflexivos, que se callan, se concentran y se quedan como mirando la cuestión planteada, con gesto firme. Sus conocimientos están bien organizados y guardados por una memoria fiel. Si su actividad es suficiente, saben desarrollar una idea, seguir el hilo de una demostración sin perder de vista los datos, lo que se pide, lo que se ha adquirido, lo que queda por hacer.

El primario puede tener, en momentos felices, un buen golpe de vista, pronto y seguro, pero más raramente tendrá el arte de explotar los hallazgos, en tanto que el secundario sacará buen partido de sus recuerdos con la intención de seguir adelante. Esto explica, al parecer, que al pasar de las clases inferiores a las superiores, alumnos primarios que ocupaban los primeros puestos se queden rezagados. Tanto más, por que las motivaciones pasadas, la consideración del porvenir y de la carrera, que actúan sobre los secundarios, a ellos les dejan indiferentes.

Un secundario no olvida un estímulo o una advertencia. Debemos saber que las palabras del maestro serán bien guardadas en su interior y que, por ello, es necesario ni incrementarlas ni repetirlas; en tanto que el primario precisa de pacientes repeticiones. Sin poner en ello la malicia que el profesor imagina, se desliga a veces de toda promesa, olvida los consejos, deja de lado los trabajos cuya realización puede esperar. Los estudios, sobre todo los de las matemáticas, desarrollan una secundariedad adquirida, mas sin hacer desaparecer la primariedad esencial.

Siempre recuerdo a esos alumnos, bohemios de las matemáticas, que, a pesar de todos mis esfuerzos y estímulos, jamás llegaron a gozar de un descubrimiento.

11) Los tipos fundamentales

Cada uno de los factores caracteriales: emotividad, actividad, retención, puede presentar grados de mayor o menor intensidad. Todo individuo es, en cierto grado, primario o secundario.

Si consideramos solamente los extremos, estos factores no presentarán más que dos intensidades:

Emotivo:	E	No emotivo:	nE
Activo:	A	No activo:	nA
Secundario:	S	Primario:	P

Si asociamos de todas las maneras posibles, una intensidad extrema de un factor con cada una de las intensidades de los otros dos, obtenemos ocho casos:

Emotivo, activo, secundario:	EAS
Emotivo, activo, primario:	EAP
Emotivo, no activo, secundario:	EnAS
Emotivo, no activo, primario:	EnAP
No emotivo, activo, secundario:	nEAS
No emotivo, activo, primario:	nEAP
No emotivo, no activo, secundario:	nEnAS
No emotivo, no activo, primario:	nEnAP

A cada una de estas asociaciones corresponde un tipo de carácter perfectamente definido. Tipos caracteriales que son conceptos abstractos, resultantes de una clasificación dicotómica. No hay que esperar encontrarlos realizados rigurosamente por individuos concretos. De hecho, estos pueden situarse relativamente respecto de aquéllos, que constituyen, por tanto, un sistema de referencia para representar los caracteres reales.

El sistema de tipos de HEYMANS, WIERSMA se muestra en la práctica como una referencia cómoda. Para facilitar el lenguaje, los autores han introducido denominaciones particulares. Son éstas:

Apasionado:	EAS
Colérico:	EAP
Sentimental:	EnAS
Nervioso:	EnAP
Flemático:	nEAS
Sanguíneo:	nEAP
Apático:	nEnAS
Amorfo:	nEnAP

Las fórmulas caracteriales precedentes son, pues, las definiciones de los nombres empleados. De esta suerte, estos adquieren un sentido preciso, que puede ser bastante diferente del significado confuso que las mismas palabras tienen en el uso corriente. Por ejemplo, un colérico caracterial (EAP) no es necesariamente pronto a la cólera, un sanguíneo (nEAP) no es forzosamente apoplético, no se debe confundir un apático (nEnAS) con un amorfo (nEnAP). A cada designación no se debe asociar ninguna connotación peyorativa: muchas personas complacientes y que tienen «buen carácter» son amorfos. Para evitar los malentendidos será suficiente, como aconseja Pascal, reemplazar cada palabra por su definición.

12) Para representar comodamente las componentes de la referencia psicológica constituida por los ocho tipos fundamentales, podemos recurrir a una configuración geométrica.

Sobre las tres aristas de un cubo, concurrentes en uno de sus vértices, situamos los ejes correspondientes, respectivamente, a los tres factores E, A, S. Convenimos en que el vértice origen representa el amorfo, nE nA P, y que los segundos vértices sobre los ejes E, A, S, corresponden, respectivamente, a E nAP (nervioso), nE A P (sanguíneo), nE nA S (apático). En los extremos de una misma diagonal del cubo, colocamos los carácteres antagónicos, esto es, que son opuestos en cada uno de los factores, tales como:

EAS	(apasionado)	y	nEnAP	(amorfo)
EAP	(colérico)	y	nEnAS	(apático)
nEAS	(flemático)	y	EnAP	(nervioso)
nEAP	(sanguíneo)	y	EnAS	(sentimental)

En este modelo, debido a la significación cualitativa atribuida a los factores, no hay que considerar evidentemente más que relaciones topológicas.

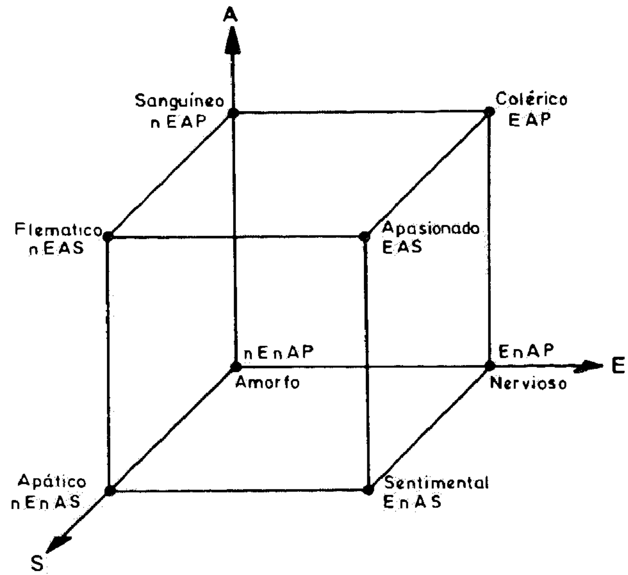


Fig. 1

Los pares de caras opuestas corresponden a las intensidades extremas de cada uno de los factores:

E y nE A y nA S y P

En cada par de vértices opuestos del cubo se representan un tipo caracterial, y su antagónico. En menor grado lo son los situados en vértices opuestos de las caras. Los tipos situados en los extremos de cada arista se dicen contiguos. Entre dos caracteres contiguos se sitúa un tipo mixto, representado por el punto medio de la arista correspondiente. Por ejemplo, un activo secundario con emotividad media será un apasionado flemático. Evidentemente, hay doce carácteres mixtos.

Un individuo concreto, cuyos factores E, A, S, presentan, en escalas cualitativas dadas, intensidades determinadas, vendrá representado por un punto del cubo. De esta suerte, puede verse cómo se sitúa respecto a los tipos de referencia.

13) El estudio de la correlación entre los rasgos del carácter, ha permitido determinar cuales son más frecuentes en cada tipo, y ha suministrado una base estadística para el diagnóstico de cada uno.

La escuela francesa de caracteriología ha establecido estos diagnósticos con mucho cuidado, de forma tal que es directamente utilizable por el profesor. Varias obras de caracteriología relativas a la educación revelan hasta qué punto son precisos los conocimientos de esta materia para comprender a los alumnos y sus problemas ([4], [5], [6] y [7]).

14) Predisposición para las matemáticas

Después de la descripción de la actividad y de la secundariedad, se comprende que son los factores caracteriales cuya posesión proporciona inteligencias con mayor inclinación natural para hacer la matemática con facilidad y éxito.

Es interesante que los profesores de matemáticas que se consideren dotados para esta ciencia, examinen con objetividad en qué medida poseen estos dos factores. Podríamos también releer, con este mismo objeto, las declaraciones hechas por los alumnos.

De hecho, los dos tipos caracteriales en que se encuentran la mayoría de los matemáticos son los apasionados y los flemáticos ([2]).

Daremos constancia de ello ([10]).

15) Los apasionados (EAS)

La conjunción de la emotividad y de la actividad da al carácter una tensión máxima, potencia que se prolonga en vida interior por la secundariedad.

Los apasionados acentuados poseen los tres factores con la mayor intensidad: Son carácteres fuertes. Ambiciosos, dominadores, aptos para el mando, tienen el sentido profundo de la grandeza. Entre ellos se encuentran la mayor parte de los hombres célebres que vivieron intensamente consagrados a una gran obra como fin único:

Richelieu, Napoleón, Foch;
Miguel Angel, Dante, Racine, Corneille, Molière;
Goethe, Tolstoy, Nietsche, Flaubert, Zola, Claudel;
Pascal, Descartes, Newton, Ampère, Cuvier, Pasteur.

Los apasionados acentuados son escasos. Por el contrario, los apasionados medios o reflexivos son más corrientes. Si bien no alcanzan las cotas de intensidad de los ejemplos históricos, son siempre carácteres notables, llenos de cualidades.

Desde el final de su infancia, el apasionado manifiesta ya un conjunto de rasgos: impresiones fuertes, dotes de observación, acción decidida y vigorosa, constancia, amor a la independencia y gusto por la puntualidad, ausencia de vanidad no reñida con una fuerte estimación de sí mismo, buena fe, espíritu de servicio, bondad para los débiles, amistad para los animales, amor a la familia y a la patria.

Llegado a la adolescencia, el apasionado tiene una actividad que anima su razón, y una razón rectora de sus actos elegidos libremente, guiado por el sentido de la rectitud y de la justicia.

Bien adaptado, casi siempre, a sus condiscípulos y al maestro, puede, de manera reflexiva y sin ostentación, por una causa noble, lo mismo oponerse a un grupo de alborotadores que mantenerse firme frente a la autoridad.

La rapidez y el vigor de su inteligencia, su sentido de lo concreto, su reflexión, su memoria organizada hacen de él un buen alumno, a menudo un excelente estudiante en las letras, las ciencias naturales y las matemáticas. Trabaja concienzudamente y gusta de hacerlo solo para experimentar el placer de poner en juego sus juveniles fuerzas. Le gusta la geometría que satisface su gusto por el concreto y porque le exige usar tanto de la imaginación como de la lógica.

16) Los flemáticos (nEAS)

La emotividad no es ya un elemento motor. La actividad sólo está animada por la secundariedad.

El flemático es apto para la reflexión. Relarivamente aislado de la realidad, tiende al pensamiento abstracto. Es, por inclinación natural, teórico o pensador.

En la historia, los flemáticos han dado:

— *filósofos y moralistas*: Bergson, Hamelin, Hume, Kant, lucke, Condillac, Montaigne;
— *historiadores-pensadores*: Renan, Taine;
— *hombres de Estado*: Turgot, Franklin, Washington;
— *matemáticos filósofos*: Leibniz, d'Alembert, Condorcet, Gauss;
— *grandes naturalistas*: Darwin, Buffon.

El joven flemático muestra bastante pronto su capacidad para razonar. Su inteligencia es conceptual, metódica, a veces un poco lenta, pero segura. Su sentido del orden, su puntualidad, sus hábitos metódicos hacen del flemático el más escolar de los alumnos: regular, dócil y trabajador. Muy objetivo, desprovisto de afectación, digno de confianza, dotado del sentido del humor, y con humor constante. Lleno de paciencia y tenacidad. Gusta de los sistemas abstractos, de los principios de las reglas y de las leyes. Coge las matemáticas con verdadero placer. Su sentido moral es elevado, su civismo profundo. Si bien la docilidad del flemático sea para los profesores un buen motivo de satisfacción, conviene, no obstante, que no se olviden de cultivar su débil emotividad a fin de evitar que se atasque en las tareas escolares.

17) La oposición a la matemática

Los caracteres más naturalmente cerrados, si no hostiles, a la matemática son: en general, los amorfos (nE, nA,P) y los nerviosos (E,nA,P), carentes a la vez de actividad y de secundariedad. Los coléricos (E,A,P) y los sentimentales (E,nA,S) suelen mostrar poco gusto natural, porque su emotividad no está servida por la primariedad, en los coléricos, y por la falta de actividad en los segundos.

Por último, entre los sanguíneos (nE,A,P) y los apáticos (nE,nA,S), cuya emotividad es débil, se encuentran algunos alumnos que manifiestan cierta disposición para las matemáticas, sobre todo en las

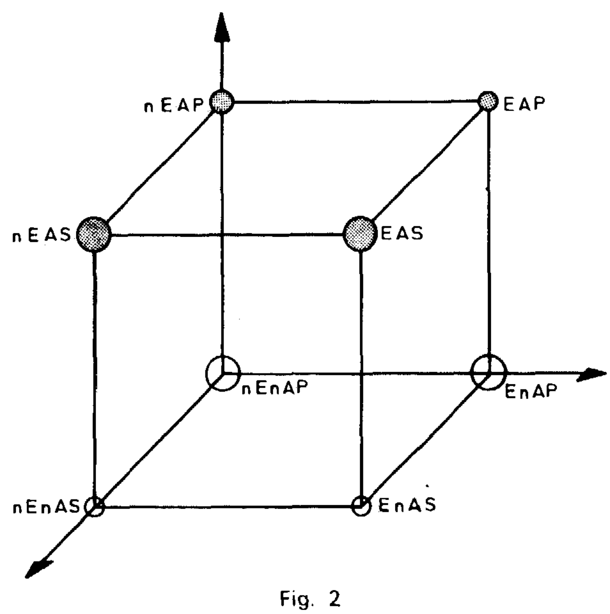


Fig. 2

clases inferiores. Pero en las siguientes, la falta de secundariedad en los sanguíneos, y de actividad en los apáticos, no les permite mantener las promesas de los primeros años.

Hemos señalado en la figura las disposiciones caracteriales para las matemáticas por discos colocados en los vértices del cubo de referencia, estos discos (grandes o pequeños) indican, respectivamente, una mayor o menor disposición

La figura 2 muestra claramente cómo juega la oposición de los caracteres antagónicos.

18) Capacidad para aprender la matemática

La caracteriología confirma la existencia de tipos más capaces para la matemática y acredita así la existencia de la disposición congénita.

No se puede concluir por ello que la capacidad de aprenderla le sea negada a los que no la posean. Nuestro sistema de enseñanza dedica, en general, el mismo tiempo a todos para adquirir el mismo volumen de conocimientos. Si un alumno se descuelga y fracasa, repite el curso con el mismo programa, y al mismo ritmo, práctica que no favorece y humilla a los alumnos más lentos. ¿Son, sin embargo, menos reflexivos y menos inteligentes? Recuerdo, a este propósito, al más lógico de mis maestros. Era incapaz de responder inmediatamente a una objeción. La anotaba cuidadosamente y, al día siguiente, nos traía una respuesta escrita, definitiva.

Un psicólogo y educador americano, John Carrol, sugirió, hace algunos años, la idea de no admitir que la falta de habilidad matemática, o su debilidad, impidan a muchos estudiantes aprenderla con igual profundidad que aquellos mejor dotados en los comienzos.

Adelantó la hipótesis de que todos, o por lo menos casi todos, pueden ser llevados al mismo grado de conocimientos en cualquier rama, pero que la cantidad de instrucción necesaria para que un estudiante alcance un nivel señalado deberá variar de un estudiante a otro.

Con este objeto, la School Mathematics Study Group, organizó una experiencia que confirmó la hipótesis ([8], p. 105).

Se formaron dos grupos de estudiantes, uno experimental y otro de control, de séptimo año (12-13 años), y otros dos del noveno (14-15 años).

Los dos grupos experimentales tenían una habilidad por debajo de la media (del 25° al 50° percentil), mientras que los de control la tenían por encima (50°, 75° percentil). En ambos casos el grupo experimental y el de control tuvieron el mismo programa de matemática y utilizaron el mismo libro. La única diferencia fue que los grupos experimentales dispusieron de dos años para estudiar la misma materia que lo grupos de control cubrieron en un año en la forma habitual, comenzando estos últimos un año después que los grupos experimentales.

Al final de la experiencia, los resultados de los tests realizados mostraron que, en séptimo año, los estudiantes del grupo experimental respondían casi, pero no totalmente, tan bien como los estudiantes del grupo de control. Pero, además, se comprobó que los estudiantes del grupo experimental habían aprendido mucho más en dos años de lo que habrían logrado en un año ordinario.—

En la batería final de tests, los estudiantes del grupo experimental del noveno año tuvieron mejores calificaciones que los del grupo de control.

La experiencia revela, por tanto, cómo es posible que un alumno flojo alcance un buen nivel, siempre que se le permita consagrar, para un programa previsto para un año, los dos que él necesita. Este sistema de dos años de estudio en lugar de uno, es más eficaz que el sistema de repetición del curso, que humilla al alumno al obligarle a recomenzar, al mismo ritmo, todas las materias.

IV. LOS PROFESORES

El compromiso con el alumno

1) Enseñar la matemática no es presentarla a un auditorio en lecciones, por magistrales que sean.

Enseñar la matemática es comprometerse con los alumnos en su aprendizaje, guiándoles y estimulándoles en las mejores condiciones posibles.

2) Se sabe que las condiciones materiales: programas, horarios, número de alumnos en la clase, material didáctico, locales... con frecuencia no son los ideales, y, hasta en ocasiones ¡están muy lejos de serlo!

¿Qué hacer?, ¿cruzarse de brazos?, ¿elaborar un repertorio de críticas y de quejas, desde luego fundadas, para transferir a otro la responsabilidad de una situación desfavorable desde el principio?

A pesar de todo, ¿no será mejor hacerla frente, pensando en el porvenir de los alumnos? Ellos, como nosotros, padecen igualmente la situación presente. ¿Tendrán que vivir una vida hipotecada ya por su causa?

3) Cualesquiera que sean las medidas adoptadas fuera de la escuela para ponerla a la altura de sus responsabilidades, quedará siempre para cada uno de nosotros, en nuestra clase, la obligación de cumplir el compromiso contraído con nuestros alumnos, mucho más todavía que con la sociedad.

Dicho compromiso nos obliga a tomarlos de la mano en el lugar en que se encuentren, y, con humanidad, esforzarnos en caminar juntos, como puedan, lo más lejos posible, por la vía de su formación de hombre.

Rendimiento del profesor

4. Cómo apreciar nuestro rendimiento como profesor de matemática. Esta evaluación no es nada fácil ([8]).

¿Es suficiente observar a un profesor en acción, desde el fondo de la clase? Este juicio fragmentario podrá ser muy diferente si se hace por un director, un inspector o un colega.

Además, la presencia de un observador extraño es un elemento de perturbación en el comportamiento de los alumnos y en el del profesor.

Sin embargo, la eficacia de un profesor es una cuestión capital, pues en ella reposan, o deberían reposar muchas de las decisiones referentes a su formación, empleo, promoción y «recyclaje», sin hablar de la puesta a punto de los programas, de la utilización de los manuales, etc....

5) Debido a la importancia del problema, la la School Mathematics Study Group, uno de los equipos que en Estados Unidos ha desplegado más

medios para la modernización de la enseñanza, llevó a cabo desde 1962 una vasta encuesta durante cinco años ([8]).

Puesto que los juicios sobre la eficacia de un profesor hay que tomarlos con cautela, se decidió medir esta eficacia únicamente a través de las adquisiciones demostradas por los alumnos, y apreciarlas sólo sobre dos puntos: la capacidad para el cálculo y la comprensión de conceptos matemáticos.

Estos elementos —hay que decirlo— aún siendo fundamentales, no constituyen más que una pequeña parte de los objetivos de una enseñanza de la matemática.

6) Las comparaciones se llevaron de acuerdo con todas las reglas del «testing» a la americana.

¡Sus resultados fueron decepcionantes!

En cada caso, hubo diferencias significativas y, en la mayor parte de ellas, fuertes variaciones en la eficacia de los profesores. Sobre cada uno de ellos se había recogido previamente una gran cantidad de información, proveniente de dos fuentes. La primera, formada por datos reales; edad, sexo, experiencia en la enseñanza, formación superior al mínimo requerido para la función docente, «recyclaje» reciente, etc.

La segunda, que no tenía en cuenta el rendimiento de los alumnos, recogía informaciones sobre la personalidad del profesor y sus actitudes frente a la enseñanza de la matemática y a los alumnos. Esta última información, se obtuvo como resultado de las preguntas dadas por el profesor a extensos cuestionarios.

El análisis de la regresión mostró, que, en todos los casos, esta amplia información relativa a los profesores, intervenía muy debilmente en la varianza, menos del 10 por 100 en la mayoría, con relación a la eficacia de un profesor.

7) Hay que hacer constar que los resultados decepcionantes de esta amplia encuesta, obtenidos con la ayuda de medios considerables, sólo se referían a la habilidad de los alumnos en el cálculo y a la comprensión de conceptos matemáticos.

Ahora bien, los objetivos de la enseñanza son mucho más vastos, pues abarcan toda la formación en los conocimientos y en los métodos de la matemática propiamente dicha, y también en las capacidades de aplicación de los modelos matemáticos al mundo real. Además, por encima de los objetivos precedentes que le son específicos, la matemática participa de manera importante en los objetivos generales de la educación, esto es, concernientes a la formación intelectual, estética y moral de la juventud.

De todos estos numerosos y variados objetivos, únicamente los más primarios pueden ser objeto de una prueba de control: exámenes o tests. Los demás objetivos, más complejos y más elevados, no se dejan captar con una vara de medir tan rudimentaria. Su evaluación, esencialmente cualitativa, requiere un plazo más largo.

Los buenos jueces

8) ¿Quién puede ser buen juez del rendimiento y de la calidad de una enseñanza? En primer lugar, el propio profesor, supuesto que tenga, en su trabajo, suficiente espíritu crítico, sentido común, exigencia y conciencia para no engañarse a sí mismo.

9) Los mejores jueces son siempre nuestros alumnos: siempre bajo su mirada inquisitiva, tanto en nuestros días buenos como en los malos, saben descubrir, con su intuición de niño, a veces implacable, al hombre —o a la mujer— que realmente somos. En lo que a mí concierne —«el yo detestable»— cuando era profesor de las clases de «scientifique», con un horario de siete, ocho y hasta diez horas de clase por semana, para hacer honor a un programa torrencial de preparación para las «Grandes Ecoles» me preguntaba por el mote que me habrían otrorgado mis discípulos. Supe que no tenía ninguno, pero que según los días y el clima de la clase, era designado por tres apelaciones diferentes y significativas. Al terminar algunas clases era, un tanto secamente «Servais». En mejores ocasiones se me llamaba «Willy». Y, después, llegué a ser «el padre», con todo el afecto y sentido psicoanalítico que puede tener este nombre en la cabeza de un adolescente. He procurado siempre, lo mejor que he podido, ser las más de las veces «el padre».

El juicio sobre nosotros mismos y sobre nuestra acción educativa se precisará y se fijará en el espíritu de nuestros alumnos cuando, en su día, lleguen a ser adultos. Entonces su apreciación será definitiva, como lo son ahora nuestras opiniones sobre los que fueron nuestros maestros.

Testigos del hombre

10) Enseñar es un oficio difícil, tal vez despiadado, pues no podemos dar a nuestros alumnos lo que nosotros no somos.

Lo mejor de nuestra enseñanza es, en fin de cuentas, la humanidad que haya en nosotros.

Si no proponemos nada humano, nuestro papel es irrisorio.

Pero mejor escuchad: ([1] p. 50).

A.—*Por ejemplo el señor x..., para mí no es el señor x..., es un libro. Me gustaría conocerlo mejor, fuera de la clase, de su trozo de tiza y de su bata blanca...*

N.—*¿Y quién te lo impide?*

A.—*Pues bien, es que tiene que ser así el hecho de que le considere como un libro, creo yo, es que ha llegado a ser sólo eso. He borrado la personalidad que pudiera haber detrás del libro. Para mí es un libro ambulante, y nada más.*

11) Para enseñar la matemática es menester ciertamente conocerla bien. Pero esta condición necesaria está lejos de ser suficiente, cuando se quiere aportar a la enseñanza la humanidad, sin la cual, sólo se puede hecer un trabajo seco, esterilizante e improductivo.

Sentido de adaptación

12) Sobre el plano del contenido mismo de la enseñanza, es necesario ser bastante psicólogo para adaptar lo que se hace a las capacidades reales de los alumnos. Veamos lo que dicen las instrucciones pedagógicas belgas: ([9]).

El profesor tiene, y deberá sacar partido de ella, libertad para organizar las materias en el orden que mejor se preste a la adquisición conceptual y práctica de las nociones matemáticas.

Cuidará de mostrar, mediante aplicaciones bien elegidas, el interés y el alcance de la teoría. En lo que a ésta se refiere, aunque las posibilidades de abstracción de los alumnos sean mayores que en los años precedentes, el profesor matizará sus exigencias *en cuanto al conocimiento de las demostraciones. Algunas pueden ser encontradas por los alumnos; otras, más sútiles, aún siendo comprensibles, no deben ser memorizadas, y otros desarrollos teóricos, que el profesor desearía presentar para tranquilizar sus escrúpulos matemáticos, serán reemplazados con mayor utilidad por trabajos en que la actividad de los alumnos lleve la mejor parte.*

Tales precauciones psicológicas han sido tomadas para evitar que determinados profesores, por narcisismo, cometan en sus clases «el pecado teórico» al perder de vista que la matemática es, en primer lugar, un saber-hacer, que sólo se adquiere por compromiso personal.

La formación psicológica

13) Es indispensable que los profesores, en particular los responsables de la matemática, tengan una formación psicológica adaptada a su función y a su responsabilidad.

En primer lugar, pondríamos unas nociones suficientes de psicología general, pero, sobre todo, de psicología diferencial. La primera permite comprender el desarrollo genético de los adolescentes, desde el punto de vista afectivo, intelectual y moral, en tanto que la segunda proporciona conocimientos caracteriales necesarios para el acercamiento y la comprensión humana de los seres en su propia individualidad.

La caracteriología

14) ¿Será necesario resaltar el interés del estudio del carácter en el ejercicio cotidiano de la enseñanza?

En primer lugar, importa que el profesor conozca su propio carácter. Esto le permitirá precisar la parte de subjetividad psicológica que se manifiesta en todos los juicios emitidos sobre los alumnos y sobre las materias enseñadas.

Basta asistir a una junta de evaluación para poder observar hasta qué punto las apreciaciones relativas a un mismo alumno varían de un profesor a otro. Es verdad que las disciplinas enseñadas pueden revevelar aspectos diferentes, pero hay que contar la parte importante que, en toda apreciación, juega la proyección del carácter del profesor sobre el alumno.

Imaginad una profesora de francés, colérica, uno de matemáticas, flemático, y otro de música, nervioso. Veamos cómo juzgan del mismo alumno.

—*Alumno inteligente, concienzudo, pero más bien aniñado, infantil en sus comentarios de texto, por falta de temperamento.*

—*Alumno muy dotado para la matemática, con un espíritu lógico superior a su edad, muy abierto a la abstracción. De natural dulce, apenas le gusta ser jefe del equipo.*

—*Alumno vulgar, incoloro, que no lleva nada dentro.*

Estos tres juicios de los profesores podría explicarlos quien conociera el perfil completo del alumno en cuestión (2) pues vería de hecho la parte con que cada uno de ellos supervalora en el carácter del muchacho, los rasgos que son coincidentes con el suyo personal y rechaza los otros.

---

(2) Perfil que comprende, además de los tres factores fundamentales E, A, S, seis factores complementarios: amplitud del campo de la consciencia, pasión intelectual, polaridad ternura, interés sensorial, avidez (10).

15) En el conjunto de los profesores de matemáticas predominan naturalmente, desde el punto de vista caracteriológico, los apasionados y los flemáticos; hay algunos sanguíneos y otros pocos coléricos y apáticos, profesores que están en oposición con los alumnos nerviosos, amorfos o sentimentales. Este hecho explica buen número de las tensiones en las clases. Tanto más, porque la mayoría de los profesores fueron buenos alumnos en matemáticas, y, por ello, no están en la mejor disposición para comprender sin esfuerzo a aquellos alumnos que no tienen las mismas disposiciones naturales.

Adaptación de las conductas

16) El profesor debe conocerse y conocer individualmente al alumno, con objeto de adaptarse mejor a él en busca de un mejor rendimiento. Una observación, un estímulo, como se sabe, no deben ser los mismos para todos los alumnos.

Un sentimental y un flemático son sensibles a una amonestación o a un estímulo de orden moral, que, debido a su secundariedad, meditarán largamente.

Un colérico preferirá ser alentado por una observación más viva.

Un nervioso necesita ser estimulado constantemente; podrá endurecerse bajo una avalancha de reproches; si llega a estar contento y seguro de sí mismo, puede llegar al enfrentamiento revistiéndose de un cierto prestigio a los ojos de toda la clase. En las mismas circunstancias, el amorfo permanecerá impasible y sonreirá dulcemente. A éste habrá que hablarle de notas y de resultados.

Adaptación en los grupos

17) La misma diversidad que en el comportamiento individual se revela en la senseñanza colectiva.

Los flemáticos y los sentimentales, lo mismo que los apáticos, trabajan y juegan aislados.

Los coléricos y los amorfos gustan de los equipos, los primeros para ser sus guías, los segundos para compararse en una corriente que los lleve.

Los apasionados pueden, según las ocasiones, ser solitarios o dominadores.

Los sanguíneos, buenos oportunitas, secarán partido de todos.

Adaptación de las pruebas

18) Según su naturaleza, nuestros métodos de apreciación favorecen a uno o a otro tipo.

Los flemáticos y los amorfos tienen la paciencia necesaria para los exámenes escritos, en tanto que los apasionados tienen que refrenarse y los nerviosos habrán de ser llamados al orden.

Los coléricos y los sanguíneos destacarán por su soltura en los exámenes orales, exámenes que para los sentimentales constituyen sesiones de tortura.

Los tests, deconcertantes para algunos flemáticos por su novedad, constituirán para los nerviosos un juego original al que podrán aplicarse por poco tiempo. Se comprende, pues, que, independientemente de las aptitudes, los tests, las pruebas escritas, los exámenes orales, no pueden dar resultados concordantes.

Pronósticos caracteriales

19) Los tests de aptitudes intelectuales, en la medida en que detectan la mera inteligencia, no

pueden suministrar más que pronósticos aventurados, puesto que, en el trabajo intelectual, se trata siempre de la inteligencia vinculada a un carácter y subordinada a él. En esta perspectiva, P. GRIEGER ha descubierto correlacciones significativas entre la inteligencia y el carácter [6].

La caracteriología permite, quizá, un pronóstico más seguro, por cuanto está basado sobre maneras de sentir, de obrar y de reflexionar, actitudes que están profundamente enraizadas en el individuo.

20) El Psicoanálisis

Más profunda que la descripción caracteriológica de las maneras habituales de comportarse un individuo es la explicación psicoanalítica de este comportamiento.

En este campo, el profesor debe tener también una información adecuada que le explique las raíces subconscientes de actitudes, a veces extrañas, de bastantes alumnos.

En las ciencias positivas, sobre todo en las matemáticas, una forma de higiene racional consiste en dejar de lado, conscientemente, los aspectos psicológicos y afectivos. Pero tal actitud excluyente, de gran comodidad metodológica aparente, no elimina los elementos perturbadores: los relega en las profundidades del subconsciente.

Principalmente en matemáticas, como lo señala J. NIMIER [1], no puede dejarse de prestar atención a estos aspectos, si se quiere descubrir algunas de las razones de los fracasos, los rechazos y los odios.

Por la naturaleza apremienta e impersonal de la matemática, algunos individuos la ven como una disciplina alienante y dominadora, que alimenta en ellos los fantasmas de lo imaginario.

21) Los profesores de matemáticas, que, como los alumnos bien dotados, han regulado bastante pronto los problemas subconscientes, creen con frecuencia que su disciplina se sitúa enteramente al nivel de la consciencia, a la luz de la razón.

Sin embargo, meras cuestiones de vocabulario, generan ya impulsos subconscientes.

Algún profesor se siente relajado cuando habla de «factorizar un polinomio». Y lo prefiere a «descomponor en factores». La descomposición tiene en él una reminiscencia macabra.

¡Qué decir de la voracidad de los elementos absorbentes, que provoca este sentimiento en los alumnos!

Término tan apacible como el de elemento neutro de una operación, ¿no conlleva en la acción del verbo neutralizar una connotación homicida parecida a liquidar?

En la resolución de ecuaciones, se puede observar la agresividad con que los alumnos tachan un término en uno de sus miembros neutralizándolo por la adición del opuesto en ambos miembros de la ecuación. Igualmente neutralizan un factor, no nulo, multiplicando ambos miembros por el inverso de este factor. (No es infrecuente todavía oír; términos opuestos se «destruyen» N. del T.).

Al hacerlo así, esta neutralización es más negativa y menos mecánica que el pasar un término de un miembro a otro con cambio de signo.

Es conveniente que los profesores de matemáticas estén advertidos de los juegos subterráneos del subconsciente, pero la cuestión no es hacerlos psicoanalistas aficionados, lo que equivaldría a transformarlos en «aprendices de brujo».

22) De igual manera que los elementos de psicología diferencial, de las técnicas de grupo, no se enfocan para convertirlos en psicólogos de vía estrecha.

Lo que sí es conveniente es proporcionarles informaciones prácticas, utilizables en su oficio.

Lo que importa realmente es que los útiles psicológicos que se pongan a su disposición-de los cuales algunos son potentes instrumentos de condicionamiento y manipulación— usados con pureza y generosidad, puedan servir para bien de la juventud, sin olvidar el respeto a las personalidades en devenir a su cargo.

23) Psicología de la inteligencia

En este vasto campo, lo más importante para el profesor de matemáticas es la parte más relacionada con su disciplina.

La obra de PIAGET, de BRUNER y otros aporta elementos útiles ([11], [12], [13]).

Los trabajos hechos a partir de la matemática, en heurística por G. GLAESER ([14] y en lenguaje matemático por J. ADDA ([15]), son directamente utilizables.

Y también, las investigaciones sobre el problema de reeducación en matemáticas realizado por F. JAULIN-MAMONI ([16]) han puesto de relieve toda la importancia del inconsciente lógico-cognoscitivo. Explican cómo se borra el proceso que el sujeto ha seguido para llegar a la comprensión de una estructura, cuando ésta ha sido ya instaurada. Por eso, el profesor que ha comprendido una noción olvida el camino recorrido. Y este olvido es la causa de que no sepa cómo el niño puede acceder a comprenderla.

V. EDUCACION MATEMATICA ABIERTA

1) Todo lo que acabamos de ver debe convencernos de una verdad evidente: la enseñanza de la matemática tiene mucho que ganar si se hace más humana.

2) La enseñanza, sea tradicional o moderna, sufre la misma indigencia: se reduce a proponer una matemática descarnada, encerrada en sí misma.

Sus programas son puramente internos, que hay que dar completos ignorando casi siempre a los niños.

El profesor se ve obligado así a condicionarlos lo más deprrisa posible sin tener en cuenta su afectividad y su desarrollo personal.

¿Cómo mejorar semejante situación, que no puede satisfacernos?

3) El cambio no vendrá por nuevas reformas. Sólo puede venir de los profesores, de nuestra propia naturaleza de hombres y mujeres que somos.

Debemos ante todo, contar con todos y cada uno de nosotros.

Nuestro único y generoso querer puede hacer la revolución.

Ante nosotros tenemos las grandes líneas de progreso. Las veis en vosotros mismos, en todo lo que podéis hacer y cambiar en vuestra acción de cada día.

Indicaré algunas. Vuestra reflexión os revelará otras.

Tener un buen contacto psicológico adaptado a cada alumno

4) La matemática hecha es un edificio lógico. El aprendizaje de la matemática y su enseñanza son, en primer lugar, cuestión de psicología.

El profesor, como adulto, debe ser consciente de su carácter y del de sus alumnos.

Debe superar las oposiciones caracteriales, sin dejarse seducir por concordancias agradables y no comportarse como un adolescente atrasado en medio de jóvenes púberes en crecimiento.

5) Su madurez debe permitirle darse cuanta de las reacciones afectivas de sus alumnos, de sus precipitaciones, de sus temores y de sus rechazos. Debe acoger y respetar las personalidades en formación de sus alumnos. Sin llegar a ser un protector, debe saber darles la seguridad que pueda ayudarles a alcanzar, en lo posible, las más altas cotas.

Debe poner el mayor afecto para hacerles compartir la matemática como un bien ofrecido a todos los jóvenes. Sabiendo que el amor a la matemática radica en la alegría de hacerla, que no es posible imponerla por la fuerza, pondrá todo el cuidado que pueda para presentir los bloqueos afectivos e intentar desvelarlos.

6) Pero —me diréis— no hay que ser ingenuos e idealizar demasiado la realidad de nuestros alumnos, entre los cuales los hay que desbordan todos los límites.

Es cierto, los tiempos han cambiado y los alumnos también. Los profesores, como la matemática, están en tela de juicio.

Los adolescentes rebeldes, los que protestan por todo, y aún sin motivo, desesperadamente hasta el absurdo, ¿no son en su mayoría alumnos faltos de cariño?

¿No es demasiado rudimentario y demasiado brutal afrontarlos con una represión coactiva cuando muchos lo que están pidiendo y deseando es que se les escuche acogedoramente, de forma abierta, sin crítica, sin idea de recuperación para el sistema?

¿Tan maltratados han sido ya por la vida que han llegado a franquear para siempre esas rejas sin retorno que hacen imposible todo diálogo y todo entendimiento en el futuro?

Debemos escuchar para comprender y correr el riesgo de pecar, en ocasiones, de cándidos, para no ser, con toda seguridad, inhumanos.

La comprensión asegura el aprendizaje

7) Es necesario que la matemática sea para cada alumno una construcción personal vivida.

La matemática no es como otras ciencias un conjunto de conocimientos exteriores organizados; es un sistema de pensamiento coherente que se construye en sí.

Hay necesidad, por tanto, de distinguir bien entre actividad matemática exterior y comprensión.

Escuchad este vehemente testimonio ([1], p. 31).

—Yo estudiaba mis matemáticas porque había que estudiarlas. No las entendía; tampoco trataba de hacerlo; simplemente las estudiaba. Bueno, pues bien, Tenía buenas notas. Aprendía mis lecciones, hacía mis deberes, obtenía buenos resultados y esto bastaba. Pero, al final, no entiendo nada.

Eso es lo que no admito. No admito que otros alumnos puedan hacer lo mismo que yo hago, es decir, que hagan cosas sin tener idea de lo que se hace.

Hacía eso porque era lo que hacía habitualmente. Se hacían enormidad de ejercicios, y a esto se reducía todo, pero no entendía nada. Y me rebelo contra eso.

8) La enseñanza que sustituye la comprensión real, profunda, por reflejos rutinarios obtenidos por condicionamiento, es considerada por R. SKEMP ([16], p. 117) como una injuria a la inteligencia.

— El hecho de intentar la comprensión de algo implica la acomodación de nuestros esquemas. Cuando en cierta medida la comunicación recibida no es inteligible, el receptor intenta acomodar sus esquemas para poder asimilar algo para él desprovisto de sentido. Hacer esto equivaldría a la destrucción de los propios esquemas, es decir, el equivalente mental de una injuria corporal.

Visto de esta manera, se comienza a comprender por qué ciertos estudiantes experimentan, no una falta de entusiasmo por la matemática, sino una auténtica repulsión. Lo más significativo, en estas circunstancias, es que tienen toda la razón para obrar de esta forma, toda vez que una de sus más elevadas facultades, su inteligencia en desarrollo, está expuesta a una influencia perniciosa.

Hay alumnos que se acomodan perfectamente al hecho de no entender en profundidad lo que hacen en matemáticas. Para ellos es más fácil, y más económico, atenerse a la aplicación mecánica de las reglas.

Durante cierto tiempo pueden dar el pego al profesor, hasta que éste no arañe bajo el barníz de las palabras. Sin embargo, cuando las materias se complican, la memoria y la ciega reproducción ya no bastan. Es entonces cuando se descubren las incomprensiones reales, y tan extensas que hacen ya imposible recuperar los fallos.

10) La matemática hay que comprenderla en profundidad.

No puede uno contentarse con escuchar atentamente lo que dice, ni simplemente con aprender lo que está ya hecho, es imprescindible saber por qué se dice así y se hace de esta manera.

Esto es lo que dice un alumno ([1], p. 128):

—Era igual. La segunda vez tampoco se le entendía, pero tampoco él se daba cuenta de ello. Decía pués es fácil, y ¡hay que saberlo!

— Puede ser que uno trate de profundizar en una cuestión en la que se dice que es como es, y que no hay lugar para intentar entenderla: no es más que un símbolo. Pero, de todas formas, uno quería saber algo más. Uno quiere saber el porqué de su introducción. ¿Por qué es necesario decir eso? ¡Porque se nos dice! ¡Pues quizá no sea verdad!

—¿Cómo se puede demostrar? A esto, siempre nos respondía: Pues es así, porque sí, y hay que aceptarlo como és. Esto entonces nos bastaba, pero ahora ya no. ¿Por qué tiene que ser así? ¿por qué es así? Eso me fastidia... No poder buscar el origen de las cosas, no se puede. Es decir, en clase, se podría quizá profundizar, buscar la verdad, ¡pero habría que remontarse demasiado lejos! Pero te dicen: esta es la fórmula, hay que aceptarla... ¡nada se nos dice de dónde ha salido la tal fórmula!

El ejemplo del comportamiento de este profesor, ¿es raro? ¿es excepcional?

¿No comprende lo que hay que comprender? ¿Habrá llegado a un nivel en el que no se recuerda ya el camino que se ha tenido que recorrer?

¿Podría la clase ofrecer ocasión de mostrar la necesidad de que no se puede remontar indefinidamente y que es preciso admitir algunos axiomas como puntos de partida?

11) ¡Nadie piensa que los alumnos, al reconstruir la matemática, vayan a rehacer por sí mismos el trabajo de dos mil años!

Pero los profesores, bien pertrechados con las armas aportadas por las modernas ideas clarificadoras, pueden guiarles en la comprensión de la matemática «por dentro».

12) Desde este punto de vista, los cursos, tradicionales o nuevos, contienen demasiadas definiciones y demostraciones «parachutadas», esto es, presentaciones «ex-abrupto», que, seguramente correctas en su aspecto lógico, no son, al mismo tiempo, inteligibles en el contexto de una construcción matemática que no da ninguna razón para hacerla comprensible.

Bastaría recordar la antigua presentación de los logaritmos con la ayuda de las progresiones aritméticas y geométricas, sorprendentemente introducidas. Todo allí era misterio y magia. ¡Qué decir de la nueva

$$\int_1^x \frac{K}{t}\, dt \text{ caída del cielo!}$$

Y sin embargo, es posible llegar a esta integral buscando un isomorfismo entre los grupos $(R_0^+,\cdot)$ y $(R,+)$.

Nosotros hemos mostrado cómo, en el seno de la teoría matemática elemental, pueden tratarse de una forma natural estas y otras nociones ([18]).

Querríamos considerar aquí sólo un ejemplo, el de los casos de isometría de los triángulos.

Los famosos «casos de igualdad» han sido tan desprestigiados, tan ridiculizados, que muchos programas no se atreven ya ni siquiera a mencionar.

Pues bien, en las isomrtrías del plano, tienen una profunda significación.

Se sabe, en efecto, que una isometría está determinada cuando se dan los vértices de un triángulo, y sus respectivas imágenes, y que, por otra parte, cualquier triángulo no es isométrico a otro cualquiera.

Es, pues, perfectamente natural preguntarse en qué condiciones un triángulo es isométrico con otro. Los casos de isometría responden a la cuestión con la ayuda de los invariantes fundamentales: longitudes y ángulos.

Los casos de semejanza corresponden a una cuestión análoga respecto al grupo de las semejanzas del plano [19] II y III.

En las afinidades del plano, dos triángulos cualesquiera son equivalentes, y la cuestión no tiene interés.

En todas las situaciones en que intervenga un caso de isometría o de semejanza de triángulos, éste puede eludirse mediante la construcción, con la ayuda de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias, de la transformación que sea necesaria. Es un agradable juego de composición. Pero los físicos no tienen ni tiempo ni gusto para dedicárselo a él, y es por esta razón, quizá, por la cual emplean el útil sencillo y cómo que les ofrecen los «casos» y, por tanto, la necesidad de preparárselos.

Sacar partido favorable del error

13) Aprendemos, sobre todo, por nuestros errores: nos obligan a reflexionar.

¡Somos tan indulgentes en lo tocante a nuestros errores, cualquiera que sea su precio!

¿Por qué no serlo también respecto a los errores de nuestros alumnos? Si lo hiciéramos, frecuentemente sabríamos disculpar a los más vulnerables y más escrupulosos.

Hay una pedagogía, bien intencionada, que pretende obtener siempre una respuesta exacta y segura del alumno a toda pregunta que se le haga. El error es acechado, para ser denunciado, borrado, extirpado, lo más rápidamente posible, como una falta impura.

Sucede que este culto por la buena respuesta conduce a un condicionamiento que es un verdadero adiestramiento. En matemática, no es suficiente disponer, bajo un estímulo, de una respuesta exacta; es necesario también comprender la razón de la respuesta que se da.

14) Hasta que un alumno no nos ponga en guardia por una respuesta equivocada, sólo tenemos la presunción de que su comprensión es la correcta.

Respuestas o afirmaciones inexactas pueden provenir simplemente de que el alumno dice cualquier cosa, lo primero que le ha pasado por la cabeza; pero puede suceder también que tales afirmaciones se deban a que el alumno tiene una forma de comprensión, un marco de pensamiento, diferentes de los nuestros. En este caso, captar el porqué de lo que ha dicho es comprender cómo ha pensado.

15) Desde muy pronto, me he servido de los errores de los alumnos para llegar a un mejor conocimiento de ellos y de mí mismo.

He aquí algunos ejemplos:

1.°) En una discusión, un alumno dijo, plenamente convencido y con toda tranquilidad: *cero no es un número.*

Ante esto, uno se puede quedar estupefacto, alzarse de hombros, considerar su afirmación como una burrada, reprochársela y sancionarle con una mala nota.

Es más útil explotar el error.

La manera de proceder en estos casos era bien conocida por mis alumnos.

—*¿Habéis oído lo que ha dicho vuestro camarada?*

Tomad una hoja de papel y escribid la pregunta ¿cero es un número? Reflexionad sobre ello, y *en los próximos días traedme escrito lo que penséis sobre esta cuestión... Si queréis, podéis anotar vuestros datos personales nombre, edad y la clase en que estáis.*

Bien sabían lo que yo quería. Les tenía dicho: *mi intención es tratar de mejorar la enseñanza matemática. Podéis ayudarme si me explicáis libremente lo que vosotros pensáis de verdad. No es un deber escrito para poner notas. Todo queda entre nosotros.*

Llegado el día, les leía las respuestas una por una ante toda la clase, sin citar los autores, aunque todos habían firmado.

¡Habíamos aprendido muchas cosas!

A propósito del cero, por ejemplo, toda una patología:

— *Desde muy pequeño se me ha dicho: Cero no es absolutamenta nada.*

— *Cuando se añade cero a un número es como si no se añadiera nada.*

— *Cuando se multiplica un número por cero, es cero.*

— *No se puede dividir por cero.*

— *Cero sobre cero no quiere decir nada.*

Después les interrogué: *¿Qué quiere decir la pregunta, cero es un número? ¿cómo se demostraría si lo es realmente o si no lo es?*

Después de discutirlo: *Calculando con él y con los otros números.*

La conclusión fue: *cero es un número, pero un número raro.*

2.°) Otro día la curiosidad me llevó a preguntarles:

— *Cuando en la clase de geometría, yo pronuncio la palabra espacio ¿De qué creéis que hablo?*

El inventario de las respuestas fue asombroso.

— *El espacio con sus estrellas y las nebulosas.*

— *El interior de la clase.*

— *Algo que uno piensa en su cabeza.*

3.°) Una vez descubierto y convenido que se trataba del espacio abstracto inventado a partir del espacio físico, estudiamos la traslación.

Nueva cuestión: *¿Se puede hacer una traslación del espacio?*

El espacio sideral, con su cortejo de nebulosas, hizo por breve tiempo su reaparición en escena.

Un alumno excelente, buen lógico, me dijo categóricamente, *Es imposible.* Le argumenté: *dada una traslación.*

1. *Si tomo un punto del espacio, ¿su imagen por la traslación es un punto del espacio?*
2. *Si tomo un punto del espacio, ¿es la imagen, por la traslación, de un punto del espacio?*

Me interrumpió inmediatamente *ya veo, me dijo, lo que Vd. quiere es meterme en los lugares geométricos.*

Le entiendo, pero no creo en ello.

En una recta, la cosa funciona, puedo hacerlo así.

Puso sus índices uno junto a otro, y los separó después manteniéndolos paralelos. *Pero si lo hago así,* añadió, haciendo deslizar sus dedos uno contra el otro, *¿Qué pasa en el infinito?*

Reanudó las operaciones con planos, valiéndose de las palmas de sus manos, primero separándolas y después deslizando una sobre la otra.

— *Pero en el espacio, no tengo sitio para separar. ¿Qué es lo que pasa en el infinito?*

Entonces le propuse:

—*¿Cómo se puede demostrar la posibilidad de hacer una traslación del espacio abstracto?*

Se quedó sin decir nada y se marchó con el ceño fruncido.

Al día siguiente sonreía: *Ya lo he entendido.*

16) Una respuesta de un alumno, una pregunta de otro, que nos dejan desconcertados, raramente son tontas.

Fue un joven alumno quien me hizo comprender que la definición del triángulo isósceles no era buena.

Cuando le pregunté: *¿un triángulo equilátero es isósceles?* la respuesta fue rotunda: *no. —¿Por qué?— Porque tiene los tres lados iguales.*

En consecuencia, adopté la definición: *un triánulo isósceles es un triángulo que tiene, por lo menos, dos lados iguales* —como se decía ya en aquel tiempo.

Desde entonces me gusta la definición: *Un triángulo es isósceles si, por lo menos, tiene un eje de simetría.*

Habría mucho que decir sobre nuestra manera de expresarnos, a pesar de que nuestros alumnos nos entienden.

Construir un triángulo, conociendo los tres lados, ¡pero entonces el triángulo ya está dado!

Dosificación equilibrada de la matemática

17) La matemática, gracias a los puntos de vista modernos, puede ser presentada de una manera unificada y clara.

No es necesario perderse en mil detalles para introducir y utilizar las ideas claves concernientes a los métodos y a las estructuras.

Cada alumno, en la medida de toda su capacidad de asimilación, debe recibir un alimento matemático sopesado. Es el mejor método para que cada uno encuentre así lo que le agrade y mejor convenga a su tipo de inteligencia.

A veces, bien por seguir las instrucciones o por sus propios gustos personales, hay profesores que dan una materia demasiado algebráica, demasiado geométrica o demasiado numérica; excesivamente lógica o intuitiva en demasía.

Al perder de vista la unidad fundamental de la matemática, se llegará a romper, a causa de una presentación unilateral, la simbiosis entre el álgebra y la geometría, bien por hacer de ésta un juego de imágenes o bien por presentarla exclusivamente bajo el aspecto vectorial o analítico.

Pueden así instalarse carencias, con las consiguientes lagunas, orígenes de repulsiones y hastíos.

A los alumnos no se le debe enseñar solamente a reproducir y buscar demostraciones de los teoremas, a enseñarles definiciones y a resolver problemas totalmente elaborados.

Para que tengan un papel más creador, es importante que aprendan también a encontrar los enunciados de las proposiciones, a expresar las definiciones, a descubrir y formular problemas. El profesor marchará con sus alumnos por el camino de la exploración matemática, para que aprendan a experimentar sobre ejemplos, a construir un contraejemplo en los casos de enunciados dudosos.

Abandonando las experiencias rectilíneas, el maestro inculcará a sus discípulos el gusto por la caminata a través de la selva de la matemática, como el cazador que sabe cobrar una pieza después de varios rodeos.

Las fuentes: manuales y obras de consulta deben ser variados, con objeto de que les permitan elegir y hacer comparaciones.

19) Cada programa debe ser apropiado y con la debida ponderación de los diversos componentes indispensables. En este punto de vista, conviene anotar que los programas de las secciones superiores, con horario reducido, tienen que dar cabida a los elementos de análisis y de las probabilidades.

Sobre la base de un esquema de los temas importantes, los programas deben dejarse con cierta flexibilidad. Son guías y no anteojeras ni obstáculos para la enseñanza.

He aquí lo que a este propósito dice un alumno ([1], p. 93).

— *Hay una palabra que no me gusta absolutamente nada: es la palabra «programa». Muchos profesores dicen: bueno, esto está en el programa, y eso no lo está. Ahí está la barrera, donde uno se detiene.*

— *Y de tal manera no me gusta, porque, aunque comprendo que evidentemente las cosas deben tener un límite, no puede uno superarse en todo, pero tampoco que sistemáticamente te detengas siempre en el límite del programa.*

Esta situación me fastidia bastante. Me gustaría más que, en algunas cuestiones, se fuera hasta el final.

N.—*¿Qué es lo que te molesta?*

A.—*Pues precisamente eso,, que se cierre la puerta, que se cierren las matemáticas. Es por eso por lo que estoy molesto.*

N.—*¿Qué es lo que te sucede?*

A.—*Bien..., ¡Es algo asl como si a un hombre se* *le mete en la cárcel, sí! Se pierde su libertad, la libertad que tiene, no puede estar contento. A mí me gustan las matemáticas, precisamente porque todo viene enlazado, porque se puede seguir. En definitiva, porque uno es libre.*

Pero, si se comienza por encerrar, por limitar las matemáticas, se acabó, las matemáticas pierden su libertad.

Desarrollar un espíritu democrático

20) La dificultad inherente a la matemática hace de ella una vara para medir un tipo de inteligencia y para clasificar a los alumnos, a la vez que puede afirmar una supermacía dominante del maestro.

La clase de matemáticas suele ser, en pequeño, una sociedad que reproduce diferencias y jerarquías, cuando debería ser una comunidad de trabajo, organizada democráticamente.

El profesor no puede, como se le aconseja, marchar con la media de la clase, debe velar porque cada uno progrese, en la medida de sí mismo, con ayuda de todos.

21) Los grupos de trabajo no pueden reducirse a pequeñas formaciones creadas al azar, que se limitan a rellenar fichas en torno de una mesa. Deben ser equipos de alumnos, formados libremente, para llevar a buen término tareas de las que se han hecho responsables. En ellos, los más fuertes ayudan a los más débiles, y éstos prestan los servicios adecuados a su capacidad.

22) El maestro ya no es el dispensador único de la ciencia, es ahora el coordinador, el guía, el consejero, la autoridad reconocida por su eficacia.

Buen animador, sabe conducir todo el esfuerzo de la clase, en convergencia, sobre un problema que se resiste. Sin dejar de alentar también a los alumnos imaginativos, que, por vías divergentes, investigan sobre el problema.

23) Se aprende a discutir, a practicar una lógica viva guiada más por la autoridad de la prueba matemática que por la del maestro. Se descubren argumentos falaces en las demostraciones, como los que se pueden encontrar en la publicidad o en la información. Se ejercitan en sacar conclusiones tanto de lo probable como de lo seguro.

24) El profesor no siente el temor de arriesgarse, de mostrarse ante los alumnos en situación de búsqueda, y hasta llegar a reconocer con sencillez sus posibles errores en cuyo propósito los alumnos pueden llegar a ser muy vigilantes (Tenía yo la costumbre de recompensar con una buena nota a todo alumno que me señalaba cualquier deficiencia observada en una demostración mía).

25) En matemática, más que en otra rama en la que los contactos humanos son más afectivos, el maestro debe velar por mantener un clima de cooperación fraterna, en la que cada uno debe sentirse más comprendido, más valorado, más libre.

En tal atmósfera, los alumnos sienten por instinto lo que la razón puede aportar de mesura y de equidad en las relaciones humanas.

Estimular la expansión del ánimo

26) En la escuela secundaria, los adolescentes, a veces hasta los más huraños, están muy interesados en afirmarse a sí mismos, en su propio desarrollo.

Por esta razón, en caso de fracaso, los que tienen mejor concepto de su personalidad abandonan frecuentemente la matemática.

27) En todos los casos, es conveniente que tengan algún éxito. No se trata de otorgarles, porque sí, calificaciones engañosas, sino de hacerles experimentar la alegría de descubrir algo, aunque no sea más que un problema sencillo, de acuerdo con sus posibilidades. La mejor motivación para su trabajo es el placer que el alumno pueda sentir en el despliegue de su propia actividad matemática. En estas condiciones, resolver un problema viene a ser un desafío consigo mismo.

Otro factor de interés es también la elección personal de un determinado trabajo matemático.

(28) Para proporcionar todo su alcance al curso de matemática, el profesor no puede limitarse a dar una formación teórica y aplicada. Debe participar en el desarrollo humano más amplio de sus alumnos, en la expansión de sus capacidades potenciales.

En todas las ocasiones, en el trabajo o en el comportamiento de un niño o de un adolescente, deberá fomentar la aparición de aquellas cualidades con mayor proyección en los objetivos generales de la educación para cuya adquisición la matemática presenta una gran ayuda.

La educación matemática, en efecto, supera en todo a la mera instrucción matemática en sentido estricto. Contribuye en gran medida a la formación general de la personalidad, mediante el desarrollo de actitudes intelectuales, y el gusto por la belleza y del fomento de los rasgos morales ([22]). Estos objetivos, de naturaleza cualitativa, susceptibles de transferencia, deben alcanzarse progresivamente a lo largo de los estudios al mismo tiempo que los fines específicos que les sirven de soporte.

I. Formación intelectual

1. Ejercitarse en el juicio, distinguir lo verdadero de lo falso (aplicables a los hechos reales), lo demostrado de los no demostrado (aplicables a un enunciado en el seno de una teoría deductiva).
2. Adiestrar en la organización lógica del pensamiento. Ordenar las ideas, reconocer las hipótesis, las consecuencias, las causas, los medios, los efectos.
3. Aprender a reflexionar sobre los diversos aspectos de una situación, separar lo esencial de lo accesorio, afimar el espíritu de análisis, reforzar el poder de la síntesis.
4. Desarrollar la actividad mental y favorecer así la imaginación, la intuición y la invención creadora.
5. Lograr la adquisición de un sentido crítico constructivo.
6. Formar el espíritu científico: objetividad, precisión, gusto por la investigación.

II. Formación estética

1. Despertar y afirmar el gusto por la belleza matemática presente en ciertas relaciones, fórmulas, figuras, demostraciones y teorías.
2. Cultivar el gusto por la expresión del pensamiento: claridad, orden, concisión, elegancia.
3. Hacer presente y apreciar las relaciones entre la matemática y la belleza formal de las artes:

— equilibrio arquitectónico;

— comparación de las artes plásticas (dibujo, pintura, escultura);
— ritmo y estructuras en las artes (música, cine);

4. Sensibilizar en la belleza de las formas y de organización en la naturaleza y en la técnica.

III. Formación moral

1. Amor a la verdad objetiva y a la equidad.
2. Necesidad del rigor, del discernimento y de la claridad en la verificación y en las pruebas.
3. Cuidado por conocer y comprender los principios de las cosas, los fundamentos y los a priori de las doctrinas y de las opiniones.
4. Hábito de investigar las preguntas y las justificaciones de las afirmaciones.
5. Probidad y lucidez acerca de sus propias observaciones, de sus opiniones y de sus deducciones personales.
6. Capacidad de atención, de concentración y de esfuerzo.
7. Voluntad de terminación y de perfeccionamiento.

Mantener todos los lazos con la vida

29) Los alumnos viven en un entorno donde coexisten, con frecuencia, como concurrentes o antagonistas, un universo natural y un mundo creado por el hombre.

Ahí está la historia para dar testimonio de toda la participación que corresponde a la matemática en el descubrimiento, la comprensión y el dominio parcial del universo, así como en la invención y en la realización del mundo tecnológico.

En la enseñanza secundaria, la matemática, el más potente de nuestros instrumentos de pensar, durante muchos años ha estado frecuentemente reducida a no pensar en nada que estuviera fuera de sí misma.

A todos los alumnos atraídos por la vida, les ha parecido la matemática como una lengua muerta, sin conexión significativa con el mundo.

Por mucho cuidado que se ponga en decirles «esto os servirá más adelante».

Por falta de ganas, por temor, por desaliento, son muchos los jóvenes que, llegado de sopetón el momento de las aplicaciones significativas, han perdido ya, más o menos, su interés por la matemática.

La potencia de la matemática, de la que tanto se habla, es para ellos una promesa para cuya realización falta demasiado tiempo.

Hay ahí un desfase que los cursos de Ciencias son los primeros en padecer. Para suprimir este retraso es posible iniciar al mismo tiempo, como lo hace la enseñanza renovada belga, el aprendizaje de las ciencias y de la matemática siguiendo la vía abierta por el doctor Decroly hace ya tantos años [20].

30) Pero si se quiere humanizar la enseñanza de la matemática no es suficiente con darle como campo de acción las ramas científicas: física, química, biología, geografía, informática. Es menester también conectarla con la enseñanza de la lengua materna [15].

Y, más, ampliamente es con la vida entera con la que la matemática está en relación. Así lo revela la obra pedagógica de Emma CASTELNUOVO [21]. La vida es la mejor motivación de la enseñanza de la matemática y la fuente inagotable de temas pedagógicos, variados y atractivos, para los jóvenes alumnos que descubren al mismo tiempo que los hechos su matematización.

Un matemático que ha consagrado lo mejor de sí mismo a la educación matemática, H. FREUDENTHAL [22], en su última publicación *Mathematical instruction in the year 2.000*, se expresa en estos términos:

— *Para afianzarse como matemático, no hay necesidad de hacer complejos de interioridad en los demás por medio de la teoría de conjuntos, del cálculo de las proposiciones, de la teoría de grupos, de los espacios vectoriales y de las teorías intelectuales más indigestas. Podéis descubrir las matemáticas por todas partes, a simple vista y con sentido común, pues la matemática es precisamente la única cosa tan evidente que, sin esfuerzo por nuestra parte, cualquiera puede convencerse que vale la pena conocer, aprender, ensenar.*

Por ser la matemática tan verdadera y convincente, estoy seguro que seguirá ensenándose en el futuro. Pero al mismo tiempo y por la misma razón, es algo que no puede ensenarse como una cuestión aparte. Debe surgir de la acción como la lectura, la escritura, el «bricolage», el dibujo, el canto, la respiración, en una educación integrada. En la educación general, se aprenderá más matemática de la que se ha estudiado hasta ahora; sin embargo, no será ensenada como una materia aislada, excepción hecha evidentemente, de los niveles más elevados, en la educación especializada, que, de hecho, se seguirá por un número de alumnos superior al de hoy. Pero no preguntéis jamás cuánta matemática puede aprender un nino. Preguntad, más bien, cuánta matemática, en la educación, puede contribuir a la dignidad humana del nino [23].

BIBLIOGRAFIA

[1]. Jacques NIMIER, *Mathématique et affectivite*, Stock, 1976.
[2]. Willy SERVAIS, «Présentation de la Caractérologie», Mathematica à Pedagogia 7 (1955-56).
[3]. R. LE SENNE, *Traité du caractère*, P.U.F. (9 y siguintes).
[4]. *Analyse du caractère*, P.U.F. (1952).
[5]. André LE GALL, *Caractérologie des enfants et des adolescentes*, P.U.F. (1951).
[6]. Paul GRIEGER, *L'intelligence et d'éducation intellectuelle*, P.U.F. (1950).
[7]. R. VERDIER, *La caractétologie dans l'enseignement secondaire*, P.U.F. (1957).
[8]. E. G. BLEGE, *The role of research in the improvement of mathematics education. Actas du Premier Congrès international l'Enseignement mathématique* (1969). D. Reidel publishing Company. Dordrecht.
[9]. W. SERVAIS, *L'enseignement de la mathématique diversifié dans les classes superieures des écolas secondaires*. Educación matemática en las américas-IV (1975). U.N.E.S.C.O.
[10]. W. SERVAIS, «Tendances caracterielles», *Mathematica K Pedagogia* (1955-56).
[11]. P. C. WASON, P. N. Johnson LAIRD, *Thinking and reasoning*, 1968. Penguin Books.
[12]. J. BRUNER, J. GOODNOW, G. AUSTIN, *Astudy of thinking*, Sciencie Editions, inc New York (1962).
[13]. Robert BLANCHE, *Le raisonement*, P.U.F. (1973).

[14]. Georges GLAESER, I.R.E.M. de Strasbourg, *Le livre du problème*, Cedic (1973).
[15]. Josette ADDA, *Initiation au largage mathématique*, Régionale parisienne de l'Association des Professeurs de Mathématique (A.P.M.), 1975.
[16]. F. JAULIN-MANNONI, *Le pourquoi en mathématique*, Ed. E.S.F. (1975).
[17]. R. SKEMP, *The psycology of learning mathematics*, Tenguin Books, 1971.
[18]. W. SERVAIS, «Problemátique dans l'apprentissage de la mathemátique». *Educational studies in mathematics* vol. 7, n.° 1/2, 1976. D. Reidel Publi. Company.
[19]. W. SERVAIS y otros, *Mathématique 2*, Ed. Labor (1971). *Mathématique 3*, Ed. Labor (1976).
[20]. A. PELTIER, «A la découverte de la physique experimentale», Ed. Labor.
[21]. E. CASTELNUOVO y M. BARRA, *Matematica nella realta* (Paolo Boringhieri 1976).
[22]. H. FREUDENTHAL, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publ. Company, 1973.
[23]. H. FREUDENTHAL, Allocution prononcéeà Utrech le 14 août i976 à l'ocassion de son départ de l'IOWO.

PRIMER SEMINARIO PREPARATORIO DEL SIMPOSIO SOBRE «DIDACTICA DE LA FISICA Y LA MATEMATICA, SU INTERRELACION»

Organiza: **Instituto** Nacional de Ciencias de la Educación (I.N.C.I.E.).

Lugar de realización: **I.N.C.I.E.**, Ciudad Universitaria, s/n.—Madrid-3.

Fecha: Diciembre, 1979.

Director del Seminario: **Luis Rosado.**

1. Organizado por el I.N.C.I.E., se ha celebrado en la sede de este Organismo el Primer Seminario del Simposio sobre «Didáctica de la Física y la Matemática, su interrelación».

2. En el mes de diciembre, en que ha tenido lugar la reunión en el I.N.C.I.E., se han reunido más de 40 profesores de física y matemática de todos los niveles educativos procedentes de toda España, para analizar los resúmenes de las 50 comunicaciones presentados hasta la fecha.

3. Estos trabajos, que responden a los objetivos planteados para el Simposio, han quedado encuadrados en la siguiente clasificación:

   Grupo I: Fundamentos de la interrelación (12 comunicaciones).

   Grupo II: Aspectos pedagógicos y didácticos (20 resúmenes).

   Grupo III: Temas concretos (17 resúmenes de comunicaciones).

4. En el mismo se han fijado las normas de estructuración de las comunicaciones, a ser posible modulares, con el fin de dar homogeneidad a los trabajos.

5. Asimismo se ha determinado como fecha del Segundo Seminario Preparatorio del Simposio la semana del 17 al 22 de marzo de 1980. En éste se presentarán para su estudio y posibles relaciones entre los mismos, *las comunicaciones totalmente desarrolladas, así como un extracto de las mismas en un folio a espacio sencillo o doble*, con el fin de difundir éste a los interesados en participar en el Simposio. (Este material debe enviarse al director del Simposio en la primera semana de marzo, para proceder a su reproducción y posterior distribución a los participantes del Segundo Seminario Preparatorio.)

6. El desarrollo del Seminario ha transcurrido según el esquema y los objetivos previstos, con la plena satisfacción de los asistentes por el resultado alcanzado.

7. Los asistentes agradecen al I.N.C.I.E. la invitación y la posibilidad de participar en estas reuniones de trabajo, para la mejora de la enseñanza de la física y la matemática en todos los niveles del sistema educativo y en la totalidad del ámbito nacional. Asimismo, extienden el reconocimiento a la U.N.E.S.C.O., por el alto interés que se toma en apoyar la organización y la realización de este Simposio por el I.N.C.I.E. y por proporcionar asesores especialistas y material bibliográfico al mismo.

Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática

Por Luis Antonio SANTALO

Nota biográfica

Luis Antonio Santaló y Sors nació en Gerona el día 9 de octubre de 1911.

Estudió en Madrid las Licenciaturas en Ciencias Exactas y en Ciencias Físicas.

Continuó sus estudios en Hamburgo con el profesor W. Blaschke.

Inicia la docencia en el Instituto Velázquez, de Madrid, como «cursillista» —número uno de los cursillos— en 1933 y como Profesor auxiliar de la Universidad Central.

Obtiene el doctorado en esta Universidad, en 1936, con una brillante tesis sobre Geometría integral. Sus trabajos posteriores en esta especialidad, y en otros campos, le han colocado en los primeros lugares de la investigación matemática contemporánea.

Desde 1939 reside en la República Argentina, donde muy pronto llegó a ocupar una Cátedra en la Universidad de Buenos Aires.

Actualmente es Vicepresidente de la academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de aquella República y académico correspondiente de la Real Academia de Madrid.

Desde 1972 a 1979 ha sido Presidente del Comité Internacional de Educación Matemática, en el que continúa como vocal.

Autor de importantes libros en sus dos vertientes: científica y pedagógica: «Geometría integral», «Geometría proyectiva», «Geometría Espinorial»..., «La educación matemática, hoy»...

1. EL PROBLEMA

Cuando se trata de establecer nuevos curricula para la enseñanza media, aparece siempre el problema de la Geometría. Al nivel elemental, el problema no aparece, pues en general hay asentimiento en que debe ser una geometría intuitiva o geometría física, más o menos extendida, pero cuyos contenidos son prácticamente aceptados por unanimidad; puede haber cambios en la metodología y la didáctica, pero muy pocos en los contenidos.

Al nivel terciario, tampoco el problema es grave. Como a este nivel ya se ha dividido la población estudiantil en especialidades, cada una de ellas tiene su geometría. En general, la geometría en coordenadas es la base común a todas las especialidades. Para los estudiantes de la licenciatura en Ciencias Matemáticas o para los futuros Profesores de Enseñanza Media, el tratamiento de la Geometría a partir de los espacios vectoriales y el álgebra lineal, no ofrece problemas. Este estudio se suele completar, además, con algún curso o seminario sobre Fundamentos de la Geometría, siguiendo los clásicos *Fundamentos* de D. Hilbert [8], el Programa de Erlangen de F. Klein [10] o algún tratamiento más moderno como el de F. Bachmann [1] o L. M. Blumenthal [2], o los escelentes y bien conocidos libros de G. Choquet [4] o J. Dieudonné [5].

Pero respecto de los contenidos y metodología de la geometría en la enseñanza secundaria, sobre todo en el primer ciclo, entre las edades de 12 y 16 años, no se consigue criterios que logren un consenso medianamente general. En las *Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, vol. III, publicado por la U.N.E.S.C.O. en 1972, se dice: («La concepción moderna de la enseñanza de la Geometría sigue sujeta a nuevas investigaciones pedagógicas y el establecimiento de un programa aceptable para ella es actualmente uno de los problemas curriculares más difíciles». Transcurridos siete años, la situación sigue más o menos la misma.)

2. LAS CAUSAS

El problema ha hecho crisis en la Geometría, por ser donde presenta las características más agudas, pero la esencia del mismo se encuentra en todas las ramas de la Matemática.

(Se trata de una confusión, difícil de clarificar, entre la Matemática como creación superior, como materia de investigación entre matemáticos profesionales, para la cual hay que buscar y exigir una total coherencia, sistematización y rigor, y la Matemática como disciplina formativa e informativa, que debe ser enseñada a alumnos de una edad variable entre 12 y 16 años, que tienen vocaciones distintas y capacidades de comprensión y raciocinio limitadas por su edad y condicionadas por su vocación.)

Se ha pretendido que las exigencias de rigor y coherencia se mantuvieran en igual grado para cualquier edad y cualquier alumno, lo que no es posible. Los alumnos de Enseñanza Media son muy variables y hay que buscar un denominador común que sea útil y comprensible para la mayoría, sin perjuicio de que, cuando sea posible individualizar la enseñanza, se vayan develando a los alumnos de mayor temperamento matemático las falencias de algunas definiciones y las posibles críticas a algunos axiomas adoptados.

Se han confundido obras de investigación, a veces de innegable valor matemático, escritas para matemáticos y a veces tan solo comprensibles por ellos en su verdadero significado, a pesar de llamarse «elementales» y no suponer conocimientos previos, con libros de texto para «aprender» matemática, destinados a alumnos que quieren iniciarse en la matemática.

(Es muy común el error de creer que los «fundamentos» de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que deben ser el punto de partida para su estudio. La realidad no es así, la fundamentación suele ser la parte más difícil de una ciencia y, en general, ha sido siempre hecha por especialistas de larga experiencia y no ha tomado forma hasta etapas muy avanzadas de la teoría. Para poder descender el estudio de los fundamentos a los primeros niveles de la enseñanza hace falta adaptar los mismos a la capacidad de aprendizaje juvenil, adaptación siempre difícil y en el caso de la geometría prácticamente imposible de realizar.)

El problema viene de antiguo. Los *Elementos* de Euclides estuvieron dirigidos a especialistas, los únicos que podían entender la genialidad de su sistema axiomático. (A la gran mayoría, incluidos científicos y aún matemáticos no demasiado abstractos, interesaban, más que la construcción de Euclides, teoremas como los de Thales o de Pitágoras, los poliedros de Platón, la trigonometría de Ptolomeo o las cónicas de Apolonio.)

Sin embargo, encandilados por la aparente sencillez de los *Elementos*, los matemáticos de los siglos que siguieron, los tomaron como textos para aprender Geometría. El resultado fue que, salvo excepciones de precoces genialidades, la mayoría aprendia de memoria el «pons asinorum» y se quedaba sin comprender la necesidad de las elaboradas complicaciones para demostrar teoremas que eran para ellos evidentes de entrada. El eximio prurito de Euclides de no salirse de los cinco postulados y aún de retrasar el uso del quinto de ellos lo más posible, aunque ello le obligara a complicar y alargar las demostraciones, es admirable creación de un genio y motivo de placer y admiración para los temperamentos matemáticos. Pero en la enseñanza, dirigida a alumnos normales y a formar individuos de una sociedad heterogénea, en que el genio y aún el matemático profesional es excepción, hacen falta textos normales y didácticas adaptadas a la mayoría.

Es una experiencia universal que los textos «malos» se venden más que los «buenos». Ello es una lamentable, pero lógica consecuencia de confundir «bondad» con exquisitez o preciosismo. El secreto está en buscar libros buenos para la edad de los alumnos a los que van dirigidos y para los fines de la enseñanza, no libros buenos para los matemáticos investigadores que los miran a través de la lupa de sus muchos conocimientos. En este caso, cabe juzgarlos como trabajo de investigación, no como obra de texto.

Lo mismo sucedió, veintitrés siglos más tarde, con los *Grundlagen* de Hilbert, obra magistral, llena de ideas que dieron lugar a numerosos trabajos de investigación, para aclarar y discutir las muchas geometrías posibles en base a la elección, añadidos y supresión de algunos postulados. También en este caso, se quiso adaptar la obra a la enseñanza secundaria y aparecieron textos con postulados a lo Hilbert, formando mescolanzas pesadas e indigestas, sin utilidad y sin rigor, pues al recortar la obra de Hilbert se destruía toda su magistral concepción. Nuevamente se confundió la investigación con la didáctica. La palabra «fundamentos», como la palabra «elementos» en el caso de Euclides, hizo creer que lo superior era elemental y que las ideas dirigidas a matemáticos profesionales podían ser transferidas, con algunos recortes al voleo, a los centros de enseñanza secundaria. El resultado fue una Geometría en cuya pseudofundamentación se perdía tiempo y se confundía a los alumnos. Pero, por lo menos, se conservaron algunos teoremas y propiedades y algunos razonamientos y deducciones «locales» que mantenían el interés y educaban en el juego del quehacer matemático.

3. LA REVOLUCION DE LOS AÑOS SESENTA

(Cuando se extendió por el mundo la entonces llamada Matemática Moderna, alrededor de 1960, se quisieron introducir en la enseñanza secundaria cuestiones que habían resultado extraordinariamente útiles al nivel terciario. Fue una necesidad evidente y, en promedio, se puede decir que la reforma fue un éxito en todas partes. Se introdujeron ideas y metodologías básicas que prepararon a los alumnos mucho mejor que antes, para poder enfrentar las novedades científicas y tecnológicas que desde los claustros universitarios fueron descendiendo a las escuelas secundarias.)

(En toda la parte algebraica, la reforma anduvo bien y si hubo pequeños abusos, ellos fueron fácilmente subsanables. Pero en la geometría volvió a ocurrir el fenómeno tradicional. Se intentó hacer el imposible de una construcción rigurosa e impecable de la Geometría sin salirse del nivel elemental ni de la capacidad de aprendizaje de los alumnos y, como esto resulta imposible, se optó, drásticamente, para suprimir la Geometría o trasladarla al álgebra lineal, con pérdida total de sus características de belleza y armonía propias, que la habían ido adornando desde la antigüedad.)

4. ALGUNOS EJEMPLOS

Para poner el fenómeno de manifiesto, vamos a aclararlo con algunos ejemplos.

a) *La línea recta.* Desde Euclides se intentó «definir» la línea recta. Las definiciones resultaron siempre inaceptables y se optó por considerar la idea de recta como una «idea primitiva», que los alumnos tienen intuitivamente desde la infancia y con la cual no se equivocan nunca al utilizarla.

Por suerte, esta posición ha prevalecido con bastante generalidad en la Enseñanza Media, pero siempre con cierto desagrado de los profesores o autores de programas, que lo han considerado como un defecto que había que ocultar o subsanar, procurando de alguna manera introducir en la Enseñanza Media alguno de los caminos que se utilizaban en la universidad (en ella, con plena razón), por ejemplo: (*a*) Seguir a Hilbert y decir que «existen alementos llamados rectas», o bien, para seguir la ortodoxía conjuntista («un plano es un conjunto provisto de una estructura dada por un conjunto de partes del mismo llamadas rectas») (Choquet [4]). *b*) Esperar hasta que se estudien los espacios vectoriales sobre los reales y entonces definir las rectas como (las «variedades lineales cuya dirección es una recta vectorial» (Dieudonné [5]).)

Para evitar los espacios vectoriales se han dado otras definiciones, por ejemplo la siguiente, que dio lugar a muchas discusiones en las escuelas francesas alrededor de 1970 («Se llama recta a un conjunto D de elementos, llamados puntos, provisto de una biyección g de D sobre los reales R y de todas las biyecciones f que se deducen de g de la siguiente manera: cualquiera que sea el número real a, se tiene, o bien f(M) = g(M) + a, o bien f(M) = = — g(M) + a (M es un punto arbitrario de la recta). La familia de biyecciones se llama una estructura euclidiana».)

(Nuestra pregunta es: al nivel de la escuela media cualquiera de estas definiciones ¿sirven para aclarar en el alumno la idea que ya tiene de recta? ¿le enseñan a razonar? Pensemos en alumnos en pleno desarrollo intelectual, ávidos de novedades y deseosos de entender el mundo y aún los mecanismos del razonamiento lógico, pero sin formación previa para comprender las sutilizas de los matemáticos formados.)

b) *Definición de ángulo*. Un grave problema que ha atemorizado a los profesores de matemática de enseñanza secundaria y a los responsables de sus curricula ha sido la noción de ángulo. Se señalan, esencialmente, dos dificultades.

i) Supongamos ángulos menores de 360. Si se quiere ser consecuente con la opción conjuntista de la enseñanza, hay que definirlos como intersección de semiplanos. Pero cuando aparece el producto escalar de vectores y la trigonometría, es necesario definir una orientación y entonces se pasa a la definición de ángulo como par ordenado de semirectas. Es necesario, entonces, o bien dejar ambigua la situación y no escarbar en la diferencia (lo cual es malo) o bien dar nombres diferentes a las dos cosas. En general se llaman «ángulos sectoriales» o «sectores angulares» a los primeros y «ángulos orientados» o simplemente «ángulos» a los segundos (ver, por ejemplo, W. Servais [14] o Dieudonné [5, págs. 81]). Esto es, lógica y matemáticamente correctísimo, pero ¿no hará que el alumno cada vez que se encuentre con un ángulo (ángulo de dos rutas en un mapa, ángulo de las manecillas del reloj, ángulo en una figura o dibujo geométrico, ángulo visual o de incidencia y reflexión de los que le habla el profesor de física) sienta la duda de si se trata de un ángulo orientado o de un ángulo sectorial? Con esta distinción, nacida del prurito de no salirse de la ortodoxia conjuntista, ¿se habrá aclarado en la mente del alumno la idea que él necesita de ángulo para su vida en la calle y para la comprensión de las demás disciplinas científicas de la escuela y aún de la misma matemática? ¿Se le habrá enseñado a razonar mejor?

ii) Más grave es la segunda dificultad, referente a la «medida» de ángulos. Es evidente que desde el punto de vista geométrico puro, dibujado un ángulo, si no se dice nada más, es imposible asignarle una medida superior a 360. Como dice Dieudonné [54 pág. 19] una recta no puede recordar si ha dado varias vueltas al tener una determinada posición. Por tanto, los ángulos deben «medirse» módulo 360°. En consecuencia, hay que aceptar afirmaciones como «la suma de los ángulos interiores de un cuadrado es nula y la más general de Papy [13, pág. 314] «La suma de los ángulos interiores de un polígono ordenado es igual a cero, si el número de lados es par, e igual a 180 si el número de lados es impar».

Todo esto es correcto y posiblemente necesario desde el punto de vista puramente geométrico y aún algebraico (Dieudonné [5, pág. 162]). (La noción precisa de ángulo y su medida va ligada a la función exponencial compleja y a su superficie de Riemann de infinitas hojas. Todo ello el profesor lo debe saber, pero también debe saberlo callar cuando se dirige a alumnos de la escuela secundaria.) El alumno sabe muy bien que los lados de un ángulo no tienen memoria, pero entiende también muy bien que uno de ellos puede haber dado muchas vueltas y que estas pueden darse por múltiplos enteros de 360°. Así procede el profesor de física y así se actúa en la vida común. Decir al alumno que lo mismo vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo que los de un pentágono, no creemos que ayude mucho a aclarar sus ideas ni su modo de razonar. A lo sumo lo entenderá y lo tomará como un juego que repetirá en los exámenes, pero que estará bien seguro de no aplicar jamás, si tiene alguna vez que sumar los ángulos del polígono que delimita un campo o una habitación de su casa.

En la escuela media, la matemática no puede formar un compartimento estanco, aislado del mundo, como una torre en la que solo caben elucubraciones para exquisitos. Al alumno le interesa más aprender cosas para la vida y agilizar su razonamiento para resolver situaciones reales que se le pueden presentar o que puede entender dentro de la matemática, que no finas sutilezas, obligadas por el empeño de no salirse de una determinada opción y hacer una ordenación lineal perfecta de toda la geometría. Las reglas «de los tres dedos» o «del sacacorchos» para definir una orientación en el espacio, no son matemáticas, pero enseñan mucha matemática y sirven para adelantar conceptos que dentro de la matemática pura aparecen mucho más adelante, de manera sofisticada y que no hay que pretender que estén al alcance de la mayoría de los alumnos, que no van a ser matemáticos profesionales.

Estas dificultades en la definición de ángulo, importantes a un nivel superior, han hecho que al programar curricula de Enseñanza Media se procediera con temor. En la mayoría de los textos se procura no mencionar ángulos superiores a 360° y aún de aislar toda mención a los ángulos bajo un cinturón de seguridad. Como dice Choquet [4]: ...observemos que hemos podido construir comodamente gran parte de la Geometría sin hablar nunca de ángulos» y Dieudonné [5, pág. 19] «Se verá en este libro que todo lo que pertenece propiamente a la Geometría euclidiana del plano, desde el punto de vista algebraico es enteramente independiente de toda «medida» de ángulos por números reales». Magníficos *tours de force* que han de ser, seguramente, admiración y deleite de matemáticos entendidos, pero que difícilmente tengan valor pedagógico al nivel que estamos considerando. Es como el caso de Euclides, que en sus *Elementos* retrasó lo más posible el uso de su quinto postulado, dando ejemplo de profunda sagacidad matemática, pero el hecho fue de poca importancia, más bien perjudicó, a quienes querían iniciarse en el estudio de la Geometría.

c) *Area del triángulo esférico*. El concepto de área de una superficie (no desarrollable) solamente se puede definir con rigor cuando se dispone de los conocimientos del cálculo avanzado. Lo mostraron bien los matemáticos de fines del siglo pasado, principalmente H. Lebesgue en su fundamental memoria de 1902 [11].

Se trata de estudios profundos, que el profesor de matemáticas debe conocer, pero que pueden y deben ignorarse al nivel secundario por ser difícil, o imposible, que sean comprendidos a esa edad. Si las dificultades para definir el área de una superficie pasaron inadvertidas durante más de veinte siglos a los matemáticos más ilustres, es difícil que puedan ser comprendidas por los alumnos de escuela media. Sin embargo, ellas han ahuyentado de sus curricula algunos tópicos sobre geometría de la esfera, que antes se daban y que son importantes tanto desde el punto de vista formativo como del informativo del alumno.

Por ejemplo, el valor del área del triángulo esférico, ha desaparecido de la mayoría de los programas. No cabe dentro del álgebra lineal y la definición precisa de área es difícil, por tanto, hay que suprimir el tema. Sin embargo, se trata de un resultado bien simple, de demostración ingeniosa y casi trivial, que enseña a razonar sobre la esfera como primer ejemplo de espacio no plano, que atrae la atención del alumno por su inesperada sencillez y que le hace ver que no toda la matemática es lineal. El hecho de que el área quede determinada por la suma de los ángulos y que, por tanto, sobre la esfera no pueda hablarse de semejanza, es sumamente instructivo y es el mejor camino para que el alumno vislumbre la posibilidad de una geometría no euclidiana, tema sobre el cual, culturalmente al menos, es necesario que el alumno reciba un mínimo de información.)

d) *¡El teorema de Euler sobre los poliedros.* Con el prejuicio de pensar siempre en mantener un rigor a ultranza y una consecuencia inflexible con la teoría conjuntista, la definición de poliedro o de superficie poliédrica en el espacio, tropieza con dificultades. El desarrollo de la topología algebraica las puso de manifiesto.

Estas dificultades, claras e inevitables a nivel superior, repercutieron desfavorablemente al nivel secundario. Como no se podían evitar, se optó por suprimir toda la geometría del espacio, o reducirla a sus primeras propiedades afines, que son las más obvias y menos interesantes. Ha desaparecido de los programas, por ejemplo, el teorema de Euler sobre los poliedros, que en los casos comunes es de demostración elemental y tanto interés tiene desde los puntos de vista estético, cultural y utilitario. Su vinculación con la conexión de los poliedros y por ser el primer ejemplo de invariante topológico, justifican su introducción en los programas desde el punto de vista estrictamente matemático y su uso en la teoría de grafos lo justifica desde el punto de vista utilitario. Sin embargo, ha sido prácticamente excluido de todos los programas por el temor de que en la definición de poliedro (concepto que es evidente al alumno) se escape alguna falla que, nuevamente, aparezca bajo la lupa inquisitoria del matemático profesional.)

Algo análogo ha ocurrido con los poliedros regulares, una de las adquisiciones más hermosas de la matemática griega, cuyo estudio aparece actualmente trasladado al nivel superior, para los especialistas o estudiantes de los grupos finitos de rotaciones en el espacio. Esto, como diría F. Klein, ayuda a la comprensión «desde un punto de vista superior» y debe ser conocido por el profesor, pero el punto de vista superior debe ser centro de proyección sobre otros niveles, donde se encuentran los alumnos de enseñanza secundaria, que no pueden elevarse a tales alturas, pero que no por ello deben dejarse en la ignorancia de teoremas culturalmente básicos.

d) *Geometría afín y geometría métrica.* No hay duda de que pensando en la matemática como una construcción intelectual, edificada bajo un estricto orden de complejidad creciente (la geometría afín aparece antes que la métrica.) Sus reglas son más simples y se conservan más fácilmente en las deducciones y, además, el posterior o simultáneo paso a los espacios vectoriales es más fácil. (La geometría afín se algebriza linealmente.)

(Pero, ¿es útil aferrarse a esta ordenación para postergar y considerar como una especie de «tabú» el uso en la clase de las propiedades métricas que el alumno usa constantemente en la calle?)

La mente no adquiere los conocimientos por estricto orden creciente de dificultad. Pretender seguir una ordenación perfecta en la enseñanza, es como querer iniciar la alimentación de los niños con los productos químicos más simples, para seguir el orden lógico con que se estructutan en la química. Tanto el estómago como la mente actúan a saltos, y en el caso de la enseñanza de la matemática, lo que hay que hacer es seguir el orden con el cual los conceptos se asimilan más fácilmente y el alumno practica más a gusto y con más intensidad la gimnasia de la deducción lógica, que puede ser distinto del orden con que los matemáticos ya formados han estructurado su ciencia. Es un problema en que debe pesar más la opinión de los psicólogos que la de los matemáticos.

No es evidente que la perpendicularidad, que es «local», sea más difícil de entender para el alumno, que el paralelismo, que necesita del plano infinito. El alumno entiende más la circunferencia, que puede dibujar y depende de menos parámetros, que la elipse. Es difícil, para el alumno, considerar como de una misma clase todas las figuras afínmente equivalentes. La congruencia, en cambio, la utiliza constantemente en su vida de relación.

Por tanto, aunque la geometría métrica es cuadrática y más difícil de axiomatizar que la geometría afín, una obsesión para mantenerse dentro de esta última para ser coherente y «consecuente», es sin duda muy interesante para matemáticos, pero cuesta creer que sea un buen método didáctico.

Hay transformaciones geométricas, como la inversión, que no son afines y que por ello han desaparecido de la escuela media, a pesar de su utilidad, aunque sólo sea para mostrar que la geometría no termina con las transformaciones lineales.

5. RESUMEN

Con los ejemplos anteriores hemos querido exponer la opinión de que las dificultades en la enseñanza de la Geometría al nivel secundario, que han motivado la supresión casi total de la misma (provienen del prurito de que la enseñanza tenga una estructura lineal) con bases impecablemente sentadas, a partir de las cuales todo se desarrolle lógicamente, sin posibilidades de subirse de la «línea general» elegida. La construcción de la Geometría de esta manera puede tener mucha importancia, y muchas veces la tiene, desde el punto de vista académico, pero no está tan claro que sea igualmente importante desde el punto de vista del aprendizaje. Entre las edades de 12 a 16 años el alumno debe aprender muchas cosas, y no es malo que conozca distintos métodos y distintos puntos de partida. No hay que polarizarse en ninguna opción. En cualquiera de ellas se puede aprender a razonar y ejercitar la deducción lógica. La complicación excesiva para no salirse de un camino prefijado dudamos de que sea pedagógicamente recomendable, sin discutir su valor matemático, que puede ser grande.

6. FRASES MODERNAS

Sin pretender involucrar a los autores en las opiniones anteriores, pero por tener cierta vinculación con ellas, vamos a citar unas frases de dos ilustres matemáticos franceses, René Thom, crítico de la llamada matemática moderna, y Jean Dieudonné, ferviente partidario de la misma y uno de sus principales propulsores, y de un prestigioso especialista alemán en didáctica de la matemática, Arnold Kirsch, quien tuvo a su cargo una de las conferencias principales en el Congreso de Karlsruhe en 1976.

Dice René Thom [16]: «Se llega al rigor absoluto, solo eliminando significado... y si se debe elegir entre rigor y significado, elegiré este último. Es la elección que se ha hecho en matemática, en donde casi siempre se trabaja en una situación semi-formalizada, con un metalenguaje que es el habla ordinaria, no formalizada». «La tendencia modernista representa un aumento de la cultura en detrimento de la naturaleza, es, en el estricto significado del término, una preciosura. Pero si la preciosura tiene a veces encanto en arte y en literatura, puede no tenerlo en matemática».

Dice J. Dieudonné [6]: «El profesor de matemámática que debe enseñar a este nivel (se refiere al secundario superior o primer año de Universidad) debe frenar en lo posible sus gustos y tendencias de matemático puro, y procurar que los resultados y métodos que trata estén próximos a la realidad sensible y susceptibles de aplicaciones lo más inmediatas posible. Se puede deplorar este aspecto «utilitario» pero es exigido por la composición misma de los alumnos». Y refiriéndose al Análisis, pero con palabras igualmente aplicables a la Geometría, dice: «Un abuso de la axiomática, es el de querer deducir de un sistema inmutable de axiomas, los teoremas más intuitivos del análisis. Para los principiantes, creo que basta limitarse a enunciar estos teoremas de la manera más precisa posible e indicar que pueden ser demostrados a partir de los axiomas de los números reales, pero sin intentar dar estas demostraciones que, a este nivel, nada útil pueden aportar a los estudiantes.»

Arnold Kirsch, en el Congreso de Karlsruhe (1976), dijo [9]: «Estamos en contra de la tendencia, muy extendida, de desarrollar la matemática *ab ovo*, o de retroceder al principio y empezar de nuevo sin suponer nada conocido, tendencia que se encuentra no solamente en matemáticos sistematizadores (cuando, por ejemplo, dicen a sus alumnos que se olviden de todo lo que han aprendido en la escuela), sino también en didácticos de orientación genética... Nosotros preferimos alentar a los alumnos a hacer uso de sus conocimientos previos, aun de los que proceden de campos ajenos a la matemática... Los alumnos tienen una experiencia considerable que puede ser usada en la geometría elemental. En particular, pensamos en su familiaridad con la existencia y propiedades de las medidas de longitud, ángulo y área. Esta familiaridad procede de afuera de las clases de matemática y a veces de afuera de la escuela, lo que debemos considerar como una situación particularmente afortunada. Hoy en día no se debe insistir más en querer desarrollar la geometría elemental de manera completamente rigurosa, y va entrando la costumbre de hacer uso de estas medidas sin ningún comentario sobre ellas.»

7. HISTORIA ANTIGUA

Cuenta la leyenda que los pitagóricos (siglo VI antes de J.C.) al descubrir la existencia de los irracionales, se juramentaron para que tal conocimiento no trascendiera al público, bajo pena de muerte para quien lo delatara.

Una manera de interpretar la leyenda es suponer que los pitagóricos, celosos custodios de los números, creyeran que tal conocimiento, puesto en manos de los hombres comunes, que hacían sus transacciones comerciales, sus medidas topográficas y sus construcciones arquitectónicas o navieras usando tan sólo números racionales, sintieran de pronto la angustia y el temor por la inexactitud de sus procedimientos y paralizaran por ello la acción.

Comprendieron que era un descubrimiento para iniciados y no intentaron exponerlo a niveles inferiores donde se cultivaba la matemática práctica de la época.

Pasaron mas de veinte siglos hasta que se dieron definiciones rigurosas del número real, pero ello no impidió que la matemática progresara y llegara a los niveles a que la elevaron matemáticos como Euler, Grauss y Cauchy, para no citar más que los modernos.

Los matemáticos actuales han puesto de manifiesto muchas exquisiteces en los fundamentos de su ciencia. Ello significa un inmenso progreso. Pero hay que pensar, como los pitagóricos, que la pretensión de poner estos descubrimientos en conocimiento de los principiantes, puede perjudicarles más que ayudarles. Igual que la matemática siguió, después de haber descubierto los irracionales, aún sin haberlos definido bien, también la Geometría actual, en sus niveles elementales, puede seguir saltando sus fundamentos, con la confianza de que ellos son guardados celosamente por los matemáticos profesionales, quienes se cuidarán de evitar todo desvío.

La dificultad de exponer elementalmente los fundamentos de la Geometría, no puede ser motivo para que ella desaparezca o se traslade íntegramente a los espacios vectoriales. La geometría, en el sentido clásico de la palabra, construyendo si es preciso puentes que eviten sus grietas iniciales, tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática y las ciencias naturales. Citemos, como ejemplo, el libro de múltiples enfoques de H.S.M. Coxeter [3] o el más específico de H. W. Guggenheimer [7], de los cuales se pueden sacar excelentes tópicos para tratar en la escuela secundaria.

BIBLIOGRAFIA

[1] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungsbegriff*, Springer, Berlin, 1959.

[8] BLUMENTHAL, L. M., *A modern view of Geometry, W. H. Freeman and Co.* San Francisco and London, 1961.

[3] COXETER, H. S. M., *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961.

[4] CHOQUET, G., *L'Enseignement de la Géométrie*, Hermann, Paris, 1967.

[5] DIEUDONNE, *Algebre Lineaire et Géométrie Elementaire*, Hermann, Paris, 1969.

[6] DIEUDONNE, L'enseignement des mathématiques dans les classes superieures de l'école secondaire et ses rapports avec l'enseignement des mathématiques a l'université, IV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Caracas, 1975, Volumen

titulado *Educación Matemática en las Américas IV* Unesco, Montevideo, 1976, págs. 39-43.

[7] GUGGENHEIMER, H. W., *Plane Geometry and its Groups*, Holden Day, San Francisco, 1967.

[8] HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie, Leipzig*, 1899. Traducción Castellana *Fundamentos de la Geometría*, Instituto Jorge Juan. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1953.

[9] KIRSCH, Arnold, *Aspects of simplification in Mathematics Teaching*, «*Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, Karlsruhe, 1976, págs., 98-120.

[10] KLEIN, F., *Vergleichande Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1877. Publicado también en los Mathematische Annalen, vol. 43, 1893, págs. 63-100.

[11] LEBESCUE, H., *Integrale, longueur, area*. «*Annali di Mat. Pura Appl*»., vol. 7, 1902, págs. 231-309.

[12] *New Trends in Mathematics Teaching*, vol. III, UNESCO, Paris, 1972. Existe traducción castellana publicada por la Oficina Regional de UNESCO para América Latina, Montevideo, 1974.

[13] PAPY, *Matemática Moderna*, vol. III. Traducción castellana EUDEBA. Buenos Aires, 1970.

[14] SERVAIS, W., L'enseignement de la mathématique diversifié dans les classes superieures des écoles secondaires, *Educación Matemática en las Américas* IV, págs. 67-96. Oficina Regional de U.N.E.S.C.O. para América Latina, Montevideo, 1976 (Actas de Conferencia Interamericana de educación Matemática de Caracas, 1975).

[15] La enseñanza comprensiva y moderna de la Geometría, *Conceptos de Matemáticas*, núm. 37, Buenos Aires, 1976.

[16] THOM, R., *¿Existe la matemática moderna?* Conferencia pronunciada en el 2.º Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática, Exeter, 1972. Traducido en *Conceptos de Matemática*, Buenos Aires, núm. 31, 1974, págs. 5-12.

PREMIO 1980 SOBRE «INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA»

Convoca la

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

de acuerdo con las siguientes

BASES:

1.—Pueden aspirar a él los profesionales de la enseñanza de cualquier centro docente, a nivel nacional.

2.—El trabajo ha de ser inédito, de extensión libre, mecanografiado y con la condición de que ha de versar sobre DIDACTICA DE LA MATEMATICA. Los trabajos deberán ser enviados a la dirección de esta Sociedad (I. N. B. de Tejina-Tenerife), ANTES DEL DIA 15 DE OCTUBRE DE 1980.

3.—Se establecen dos premios:

Primero: de 80.000 pesetas. Segundo: de 40.000 pesetas.

El Jurado se reserva el derecho de declararlos desiertos si lo considera oportuno. La Junta Directiva de la Sociedad estudiará la posibilidad de subvencionar los posibles gastos habidos en los trabajos presentados (premiados o no).

4.—El Jurado estará integrado por cinco personas designadas por la Junta Directiva. Su constitución se dará a conocer oportunamente. El fallo emitido será inapelable.

5.—El dictamen del Jurado se dará a conocer en la segunda quincena del mes de Noviembre de 1980.

6.—Los trabajos se presentarán firmados con un pseudónimo. En sobre cerrado y aparte (en cuyo exterior figurará el pseudónimo), se consignarán el nombre, dirección y Centro de trabajo del autor o autores. Cada participante podrá enviar el número de trabajos que desee.

7.—Los trabajos premiados quedarán en poder de la Sociedad, pudiendo proceder a su publicación si así lo estimara. Los no premiados podrán ser retirados por sus autores, a no ser que sean subvencionados por la Sociedad.

La Laguna-Tenerife-Febrero de 1980

La enseñanza de las matemáticas

Por Miguel de GUZMAN OZAMIZ(*)

LA ENSEÑANZA EN LOS AÑOS CINCUENTA

Alrededor del año cincuenta la enseñanza matemática a nivel elemental en nuestro país parecía razonablemente sana. La Geometría ocupaba un lugar dominante, el cálculo infinitesimal estaba bien representado, la información matemática general de nuestros estudiantes era incluso superior a la de muchos otros países de Europa. El gusto y el equilibrio matemáticos de Rey Pastor y Puig-Adam produjeron una colección de textos de enseñanza media de un indudable acierto tanto en su contenido como en su forma.

Es cierto que a nivel de enseñanza primaria una gran parte de la actividad transcurría en monótonas repeticiones de tablas de sumar, restar, reglas de tres directas, inversas, ejercicios puramente repetitivos, escasamente formativos y ciertamente poco adecuados para fomentar el interés. Es aquí tal vez donde haya que buscar la raíz del hastío prematuro por las matemáticas que tanto abunda. Es cierto también que los contenidos de la Enseñanza Media no correspondían a los enormes avances efectuados en los últimos siglos por los matemáticos. No aparecían por ninguna parte conceptos tales como el de grupo, anillo, etc. El tratamiento de la Geometría se parecía mucho más al de Euclides (siglo IV a. de C.) que al de Hilbert (siglo XX). No se mencionaba explícitamente la teoría de conjuntos, que fundamenta la matemática actualmente.

CAMBIO DE RUMBO

El movimiento fue bastante general. Comenzó por U.S.A. y Francia hacia 1960. A algunos países con una fuerte tradición de didáctica matemática, como Rusia y Hungría, nunca llegó tan radicalmente. Aunque con algún retraso, llegó a España. Se llamó «Matemática Moderna» o «Nueva Matemática». Algunas de sus ideas directrices fueron: Que los niños entiendan desde el principio todo lo que están haciendo; ¡Fuera tablas, memorizaciones, automatismos!; Es necesario empezar por donde se debe: Teoría de conjuntos; Matemáticas de hoy y no las de Euclides ni las de Newton.

Las consecuencias, plasmadas legalmente en nuestros programas y de modo efectivo en el espíritu y textos de muchos de nuestros profesores, han sido rotundas. A nuestros niños se les enseña las operaciones con conjuntos casi antes de que sepan hablar, se les inculca rápidamente las nociones matemáticas de grupo, anillo, cuerpo, operador, ... y se trata seriamente de hacerles comprender la importancia de la idea de estructura matemática, isomorfismo, homomorfismo, etc.

¿PARA QUE?

En la mayor parte de los países donde el sistema se ha implantado, el movimiento de vuelta ha comenzado ya hace bastante tiempo. En nuestro país aún se están haciendo los últimos esfuerzos por ponerlo en práctica. En Francia y en U.S.A. pronto comenzaron las críticas serias, incluso antes de que se hubiera podido constatar el resultado. Para muchos, entre ellos matemáticos de primera categoría, era claro que aquello tenía que conducir a un enorme empobrecimiento.

Para conducir un coche con destreza no es necesario conocer la teoría de los motores de explosión. Asimismo, para un matemático activo en matemáticas propiamente dichas (no en lógica ni en la fundamentación de las matemáticas), y estos son casi todos los matemáticos actualmente, la teoría de conjuntos carece de importancia. Para la formación matemática del ciudadano normal, es claro que la teoría de conjuntos es totalmente superflua, si no perjudicial. ¿A qué viene entonces el hincapié de nuestros programas oficiales, de nuestros textos elementales y de nuestra enseñanza real sobre las nociones de teoría de conjuntos?

La substitución de la Geometría por las nociones elementales del álgebra moderna en los programas actuales se ha considerado sumamente perjudicial. La motivación profunda de tal substitución tal vez consista en que la introducción de la geometría euclídea de modo riguroso es incomparablemente más difícil que la del álgebra abstracta. Sin embargo, parece claro que no aporta ningún beneficio, sino más bien perjuicios, el tratar de implantar un rigor desmesurado en una etapa inicial de la formación matemática. A cada día le basta su propio rigor. Con la desaparición de la Geometría el contenido de nuestros programas se ha vaciado casi enteramente de la rica gama de problemas con profundo significado intuitivo en que antes abundaba. En cambio, los desarrollos lógicos, conjuntistas y algebraicos, al nivel al que se puede llegar en la enseñanza elemental sólo conducen a meros ejercicios tautológicos y rutinarios de escaso valor formativo.

No es claro tampoco que nuestros programas se hayan enriquecido con aplicaciones que les presten interés. Es en cambio muy evidente que los textos

---

(*) Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid.

actuales abundan extraordinariamente e inútilmente en nombres y terminología que sólo contribuye a fomentar la pedantería de nuestros estudiantes.

¿QUE HACER?

El mal ya está hecho y sus consecuencias las seguiremos sufriendo por algún tiempo. La corrección de rumbo de los organismos oficiales no suele ser un proceso rápido y, lo que es tal vez peor, el furor conjuntista y abstraccionista de tantos de nuestros enseñantes no se frena ni se corrige fácilmente. Pero se puede tratar de catalizar la superación de esta etapa, lo que se va realizando ya con éxito en otros países más ágiles que el nuestro. Tal vez nuestros Institutos de Ciencias de la Educación deberían ser uno de los instrumentos más adecuados para ello. Que no nos cueste diez años más el tratar de llegar oficialmente a una situación razonable en nuestra enseñanza. No se trata de desandar lo andado, aunque haya sido por mal camino, sino de aprender de la experiencia, nuestra y de los demás países.

Tal vez se puedan sugerir algunas líneas correctivas. El pensamiento geométrico moderno, por ejemplo, lejos de agotarse con la geometría del triángulo, presenta facetas tales como la geometría de cuerpos convexos, teoría de grafos, geometría combinatoria,... de un contenido muy importante y rico, capaz a la vez de estimular la intuición espacial, que la formación actual deja atrofiada, y de proporcionar un sinfín de aplicaciones interesantes en muchos campos de la técnica y de las ciencias. Así mismo es claro que la formación matemática elemental debería ir de la mano con la enseñanza de las otras ciencias, desempeñando el doble papel que le corresponde como auxiliar de ellas y como matriz de estructuras de pensamiento útiles y bellas. No se ve razón alguna para que elementos tales como la teoría de la probabilidad, la investigación operativa, los instrumentos actuales de computación, no sean aprovechados más eficazmente para la formación matemática de nuestros estudiantes.

Y mientras llega la corrección oficial se puede sugerir a nuestros profesores que practiquen la virtud de la interpretación. Que se informen suficientemente para saber lo que convendría subrayar y soslayar en nuestros programas y textos. Que piensen que la abstracción anticipada y el rigor prematuro, aparte de ser inútiles y perjudiciales, conducirán necesariamente al hastío, tanto de ellos mismos como, lo que es más importante, de sus propios alumnos.

La muerte de la Geometría

Por Javier de LORENZO(*)

Algunos medios ligados más o menos estrechamente a lo que vino en llamarse la «inteligencia», los medios intelectuales, de pensamiento, han puesto en primer plano, muy de moda, un cementerio viviente. Desde «Schönberg ha muerto» lanzado por Pierre Boulez, hasta «Marx ha muerto» de los nuevos filósofos franceses; no se ha salvado ni el creador del psicoanálisis a quien también le ha tocado su turno, el consabido «Freud ha muerto». Toda una lista de personajes que, como tales, bien habían muerto, aunque lo que se prentende, al parecer, es indicar que son sus connotaciones las que han desaparecido del pensamiento y cultura en general actuales. Frases indicativas no sé si de autopublicidad de quienes las lanzan para señalar que rompen muy revolucionariamente con el pasado —para lo cual toman una frase del pasado—, o mero reflejo de que lo que está si no en desaparición sí en decadencia es, precisamente, el pensamiento racional crítico al que dicen representar. Lo que no reflejan, en modo alguno, es una auténtica preocupación por la muerte, dado que los miembros de la sociedad actual viven radicalmente marginados, no como estadística, a la problemática vivencial de la muerte, de «su» muerte como individuos.

A tanto ha llegado la preocupación esteticista mortuoria que en próximo Congreso Internacional de Educación Matemática —California 1980— se plantea como uno de los temas, y a buen seguro que de los polémicos desde el el «A bas Euclides!» de Dieudonné —quien debía estar al tanto de las actuales corrientes, porque su frase equivalía al «Euclides ha muerto»—, nada menos que el de *La muerte de la Geometría*. Enunciado algo más suave, porque queda en el aire si la Geometría se ha muerto, está muriéndose, va a morirse..., si se trata de festejar sus responsorios o analizar causas de su enfermedad... En principio, y según otras manifestaciones, cabe inferir que se trata de que la Geometría *ha* muerto, de modo efectivo. Y ello porque hay quienes vienen reclamando por «resucitarla» en los programas de Bachillerato y en los primeros años de la Facultad de Matemáticas. Y toda resurrección me parece que entraña una previa muerte de aquello por lo que se reclama que resucite. Y es el mismo proceso de peticiones de quienes exigen una resurrección del psicoanálisis freudiano, del marxismo de Marx, de unas vueltas a la naturaleza, a la religión...

Admitido que la Geometría haya muerto, me entra una pregunta, mera curiosidad de dato: ¿Cuándo murió la Geometría? Y buscando, no encuentro fecha alguna de defunción; buscando, lo que encuentro es que existen muchas geometrías actualmente y que han existido muchas otras geometrías en el pasado. Se me ha presentado tan amplio el término «Geometría» que no sé a qué Geometría se le da el certificado de defunción, si es que puede atribuírsele certificado de defunción alguno a un término conceptual.

En esa búsqueda sí observo en los momentos presentes una ausencia de preocupación por la imagen conceptual, en beneficio de una imagen estrictamente sensorial y perceptiva, apoyada en la tecnología contemporánea. Recientemente Jorge Luis Borges llegaba a señalar, en una entrevista, cómo le molestaba Pérez Galdós por su detención en la descripción de todos los detalles de, por ejemplo, una habitación. Borges posee una imaginación especial sorprendente, como ha puesto de relieve en alguno de sus escritos; no requiere del detallismo de cada uno de los múltiples objetos que se encuentran en una biblioteca para que el lector tenga la impresión de encontrarse en su interior, si es que la misma llega a tener interior. Pero no todos somos ciegos. Necesitamos algunos rasgos que indiquen cómo es ése espacio en el que el relato nos sumerge. Ahí, ciertamente, está la capacidad del escritor. Sin embargo, la técnica actual es tan maravillosa que incluso hace prescindir de cualquier tipo de descripción: basta mirar la pantalla y se ve la habitación, cómo es el personaje, su vestimenta... Sobran las palabras y cualquier tipo de términos. Es presencia de imagen en la que algunos quieren ver una de las causas de la pobreza terminológica, de vocabulario que hoy se deja sentir. No sólo pobreza de vocabulario, sino pobreza de imagen verdadera, no estrictamente sensorial, directa, porque en esa imagen en la pantalla tampoco se ven los elementos que hay en ése pretendido espacio; la atención queda prendada en el engaño, y sigue a la acción, al movimiento de personajes y de sus «diálogos»... En cualquier caso no requiere del esfuerzo de pasar de esa fugaz captación sensorial a una descripción lingüística que, por el empleo imprescindible del lenguaje y el tiempo, tiene que ser analítica, diseccionadora pero, a la vez, fijadora de la auténtica imagen que de otra manera fluye y se escapa de quien se dice, observador.

Bromas aparte, un tema como el papel de la Geometría en el momento actual, y más en relación con su pretendida defunción, plantea muchas y muy diversas cuestiones. Voy a limitarme a alguna de las que hacen referencia a ese posible papel en la enseñanza y más en concreto, al nivel que aquí puede preocupar. Y como los metodólogos de la enseñanza parecen exigir que no se den clases magistrales —lejos de mí la funesta manía del magisterio— sino que más bien se plantean problemas, voy a tratar de seguir la línea y más que resolver cuestiones voy a

---

(*) Catedrático de Matemáticas e Inspector de Enseñanza Media.

dejarlas esbozadas, y con la mayor brevedad y esquematismo posibles.

Y una primera distinción se me presenta. Por un lado, a qué llamar «Geometría». Búsqueda del contexto semántico de un término, equivale a penetrar en la problemática de los cambios de connotación de conceptos en las disciplinas científicas. Problemática metodológica que hoy se encuentra muy en primer plano en lo que se califica de Filosofía de las ciencias y en la cual se generaliza la aceptación de que los conceptos, de modo efectivo, varían de significado tanto en el tiempo como en el contexto en el cual se manejan. En nuestro caso, averiguar a qué responde un término como el de «Geometría» puede equivaler a dar certificado de defunción a algo que ya lo tuvo desde hace siglos o a darlo a algo que, por el contrario, posee una vitalidad total... En este sentido puede observarse que hoy sí se explica Geometría en Bachillerato, un cierto tipo de Geometría, naturalmente: la incluida tras el epígrafe de Algebra lineal. Después de caracterizar la estructura de Espacio vectorial, se particulariza al Espacio afín y, tras la introducción de una métrica —que se particulariza, a su vez, en la métrica euclídica—, se estudia el Espacio Métrico euclídeo. Dado este espacio —normalmente en dos y tres dimensiones— se estudian, en él, las posiciones de rectas, de rectas y planos, cónicas... También hay un estudio de curvas ligado al capítulo de funciones de variable real. Poco, ciertamente, pero nociones geométricas, y en cierta unidad, existen. El certificado de defunción dado a la Geometría es, por ello, inexacto, al menos no puede referirse a este tipo de geometría que es el que permite, por otra parte, generalizaciones a métricas no euclídeas y hasta leves introducciones a geometrías no euclídeas a nivel de C.O.U. —y basta seguir alguno de los capítulos de un libro de Golovina, por ejemplo—. Es claro que puede discutirse si el término «Geometría» conviene o no a esta acepción. Desde mi punto de vista, y radicalmente, no es cuestionable, creo que es una acepción que pertenece al contexto semántico del término «Geometría».

Aquí viene el segundo elemento de la distinción: No se trata, ya, de uno de los problemas de la Filosofía de la ciencia como el de variaciones del significado de conceptos. Lo que entra en juego en el certificado de defunción no es un elemento estrictamente conceptual, sino un haz de creencias que soportan la brubuja conceptual y que mantienen querencias por un cierto tipo de Geometría. que no identifican con el tipo antes mencionado. Lo que para algunos parece haber desaparecido es la Geometría sintética, al viejo modo euclídeo. Una geometría en la que se realizan construcciones de ciertas figuras, con algunas transformaciones convenientes, en la que se siguiera explicando el teorema de las tres perpendiculares o el de la recta de máxima pendiente, pongo por caso... Lo que algunos parecen querer resucitar es este tipo de geometría. Es lo que puedo inferir en el correspondiente rechazo del «Euclides ha muerto»...

Me viene, inmediata, otra pregunta: ¿Es euclídeo este tipo de geometría, que se añora? Añoranza en la cual se pretende una vuelta a lo «concreto» contra los riesgos de la abstracción que se ven personificados en el tipo de geometría apoyado en espacios vectoriales n-dimensionales y en los que el alumno nada «ve», frente a las escelencias de las construcciones de la vieja Geometría euclídea y sintética, donde la visión concreta no estaba alejada del rigor necesario que toda obra matemática debe requerir. Por otro lado, y desde el punto de vista de la didáctica, daba satisfacción a los que ven dicha enseñanza como un paso de lo concreto real, del hecho puro hacia lo abstracto, mediante sucesivas generaciones, frente al procedimiento de la geometría vectorial que marcha de lo general a lo concreto... En este punto, mi respuesta a la pregunta anterior es clara: este tipo de construcciones que se añora ni es euclídeo ni se encuentra en el espíritu de la construcción geométrica euclídea. De manera informal y esquemática desarrollo la justificación de esta respuesta, adelantada como conclusión.

Al igual que hay que admitir, pese a las continuas afirmaciones en contra, que sí se enseña Geometría, para algunos puede ser sorprendente la afirmación de que la Geometría euclídea surge frente al concepto de medida intuitivo y, fundamentalmente, como la creación de un espacio conceptual opuesto y contrario al espacio perceptivo, al espacio de nuestras representaciones. Sorprendente, porque se mantiene como cuadro acrítico del pensamiento, como un artículo de fe en el que todos, creyentes o no, creen, la vieja afirmación de que la Geometría *nace* en Egipto como consecuencia de las inundaciones del Nilo y que no tiene otro objeto que la medida de la tierra; la Geometría, como cualquier otra disciplina tiene que surgir, por real decreto, de la experiencia directa. Sin embargo, las cosas no suelen ser tan fáciles como este esquematismo acrítico y dogmático sostiene. La creación pitagórico-platónica, reflejada en los *Elementos* de Euclides, es la de un espacio intrafigural estrictamente conceptual que nada tiene que ver con la experiencia, y de aquí el papel que juega en esta creación el elemento demostrativo. El espacio euclídeo es *homogéneo*, y en sus dos aspectos: de relatividad de posición o invariabilidad de figuras en los desplazamientos por lo que no hay puntos privilegiados; de relatividad de magnitud o posibilidad de construir figuras semejantes. Homogeneidad establecida en los postulados 4 y 5 respectivamente. Es un espacio *isotropo* en el que no existen direcciones privilegiadas. Es *continuo* en el sentido de Poincaré de que si A está relacionado con B y B lo está con C, entonces A tiene que estar en relación con C... Y estas características quedan establecidas en los postulados y nociones comunes, en los primeros principios, cuyo papel estriba, precisamente, en caracterizar el marco en el que se van a situar las figuras objeto de estudio por parte del geómetra. Frente a estas características, el espacio representativo, el perceptivo o de las imágenes visual, táctil, auditiva, etcétera, es radicalmente opuesto, porque ni es homogéneo, ni isotropo, ni continuo... Características del espacio conceptual euclídeo que obligaron a la creación de métodos aptos para manejar dicho espacio conceptual, porque los dados por la experiencia eran impotentes para dicho manejo. Método que no es otro que el hipotético-deductivo como algunos lo han calificado cuando más correcto es el nombre de método demostrativo o axiomático. Aunque, y aquí vuelve a interferir el mundo de creencias, la impotencia del hombre le lleva al manejo de unas construcciones geométricas, de puntos que no son puntos, de rectas que no son rectas..., pero que «recuerdan» en cierta medida los puntos, las rectas, las figuras del espacio conceptual.

He indicado, ése espacio eidético, de formas puras, es un espacio conceptual intrafigural, por lo que requiere del auxiliar de la construcción, construcción como mero auxiliar porque la clave se centra en dar la demostración —no la mera deducción— de las propiedades que se descubren en las figuras que se encuentran inmersas en dicho espacio. La construcción es inútil si no va acompañada de la demostración de todas y cada una de las etapas, con su justificación correspondiente. De ahí que la Geometría euclídea vaya ligada, como auténtico paradigma, al método axiomático.

Intrafigural, el espacio euclídeo es un espacio estático. No aparece el movimiento en él. Y cuando el movimiento se hace problema, su descripción, su manejo, requiere el concepto de función. Y es la revolución cartesiana, la «geometría analítica». Función y curva para expresar el movimeinto, creando nueva connotación al término «Geometría». En lugar de mantener el método euclídeo se prescinde de él —y en algún otro lugar he discutido el papel de la vuelta a los antiguos, al método axiomático en los coetáneos de Descartes—. Salvo Newton, que como buen neoplatónico distinguió con radical nitidez el espacio y el tiempo absolutos —geométricos o conceptuales— de los espacio y tiempo perceptivos, se llevó a una identificación del pretendido espacio euclídeo con el representacional y, más allá, se le identificó con el espacio de la «verdadera» realidad, con la naturaleza. Identificación que no hace cosa que anular el método con el que se tenía que desarrollar la geometría euclídea, porque no se hace preciso demostrar lo que es evidente, ni lo que se muestra como más claro que los principios de los que tiene que realizarse la demostración. Y son afirmaciones de los matemáticos enciclopedistas, entre los que ya se pierde totalmente el significado que el conjunto de postulados y primeros principios presentaba. A partir de entonces la geometría sintética se convierte en el mero juego de construcciones con regla y compás o, posteriormente, construcciones geométricas que algunos hemos sufrido y que en mi memoria represento por la magnífica colección de problemas de Petersen. Construcciones en las cuales el factor demostrativo euclídeo es nulo, aunque se pretenda cubrir con algunos barnices de justificación de pasos o de construcciones, pero en las cuales nunca se completaba dicha demostración porque nunca se especificaban, totalmente, los postulados de los que se partía, las definiciones intermedias, etc. Eran construcciones ciertamente muy concretas, como las maravillas de Mascheroni que estusiasmaban a Napoleón, pero que se encontraban tan alejadas del espíritu geométrico euclídio que el mismo Euclides necesitó de vindicadores, al modo de Saccheri.

Y precisamente una vuelta a Euclides y al espíritu geométrico es la que dieron los acusados de formalismo, desde Pasch a Hilbert pasando por Peano y su escuela tras los esfuerzos de algunos geómetras proyectivos de abolir cualquier llamada a la figura en beneficio de la componente demostrativa. Sistema completo de axiomas, que permite, a la vez, no sólo caracterizar el espacio euclídeo y en él una determinada geometría, sino todo un haz de ellas según los espacios que se vallan obteniendo por las modificaciones correspondientes de los axiomas de entrada. Todo un haz de geometrías diferentes, en espacios diferentes, aunque sean irrepresentables en el papel o el encerado, o en la imaginación sensorial del matemático. Pero la Geometría volvía a sus orígenes, a ser construcción conceptual, marginada al espacio perceptivo, incluso contrapuesta al mismo. Línea en la cual la primera obra de Peano, hace ya casi un siglo, con su introducción vectorial, marcará la ruta que todavía hoy sigue la Geometría.

Y en este sentido, y enlazando con la pregunta últimamente formulada, ¿se explicó alguna vez la Geometría euclídea? Si uno busca en sus recuerdos de estudiante, en los textos que se autotitulaban de Geometría, observa que en ellos se contenía una mrzcla de postulados en la primera lección, de imágenes y de construcciones geométricas y de frases como «en cuyo caso es evidente». Los sistemas de postulados nadie sabía si eran completos, pero tampoco importaba mucho: no se volvían a manejar... Se pretendía, además, que era una disciplina que ayudaba mucho a la imaginación y captación del espacio «real» porque ayudaba a «ver» en dicho espacio. Sólo contemplar las paredes del aula eliminaba tales pretensiones, o mirar las figuras que alguien trazaba en la pizarra cerrando alternativamente los ojos... Las rectas no eran rectas; los puntos no eran puntos nunca porque siempre eran gordos... Y si se pasaba a la Descriptiva, la primera afirmación que uno ha escuchado era: «un punto son dos puntos; una recta, dos rectas»... Los teoremas se enunciaban sin mucho rigor y, francamente, se demostraba como se podía. Lo cual era natural y hasta lógico, porque nadie decía qué era una demostración y cuáles eran las reglas de demostración que se manejaban para que como alumno uno las pudiera manejar... Se daba un texto, se repetía y lo que iba seguido de *dem.* era la demostración. Nadie decía en qué consistía una demostración a pesar de que parecía ser el personaje fundamental. Pero no necesito volver a mis recuerdos de años atrás. En gran medida todo sigue igual, aunque sin este tipo de geometría, porque es muy bonito afirmar «Quien dice matemática, dice demostración», y como luego no se dice qué es «demostración» resulta que quien dice afirmaciones de este tipo dice sinsentidos. (Y aquí se encuentra una vieja cuestión, que dejo para otra posible nota: el hecho de que una demostración matemática no es otra cosa que lo que algunos dicen que es una demostración matemática o, en otras palabras, que toda demostración matemática no estriba en otra cosa que en un acto social de aceptación —en lo que me encuentro de acuerdo con Yuri Manin—. Y con este problema, otro tópico: el de que la Geometría, su enseñanza —en el híbrido que he esquematizado— era una disciplina excelente para el aprendizaje y ejercicio del razonamiento. Quiero decir, todo alumno, sometido a teoremas como el de las tres perpendiculares, aprendía a razonar. Tema psicológico, qué sea el razonamiento, en el que no quiero entrar porque nadie me ha aclarado nunca, en los terrenos mateméáticos, qué sea un razonamiento.)

Desde luego, según sus declaraciones, lo que a Hobbes, a Espinosa, a Russell atrajo de la Geometría euclídea fue la existencia de proposiciones independientes a la experiencia y que podían demostrarse por los solos principios de la Lógica. Por supuesto, estos autores estudiaron directamente los *Elementos* de Euclides y no los textos que los demás sufrimos y hemos hecho sufrir en nuestra enseñanza. Pero a Euclides, a Euclides, por mucho que se haya dicho, no creo que lo hayan leído casi ninguno de los que defienden la vuelta a una pretendida geometría que califican de euclídea. Si lo leyeran es muy posible que atenuaran sus afirmaciones. De leerlo pasarían, creo, a los sistemas geométricos a lo Hilbert o, más adecuados a la enseñanza, a lo Peano. En otras palabras, a lo que de Geometría se está dando ahora, realmente, aunque admito que pudiera desarrollarse más, en detrimento de otras materias con las que ciertamente se sobrecarga a nuestros alumnos —y a nosotros como profesores—.

Creo que no es a Euclides a quien se quiere volver, sino a una Geometría mezcla de un atisbo de deductivismo y constructivismo concretos con regla y compás y con pretendidas ventajas de visiones espaciales. Pero aquí incide la problemática que he indicado como haz de creencias asociado al pensamiento. Que la construcción axiomática euclídea, conceptual, como paradigma, constituye una de las líneas maestras que orienta el pensamiento y la cultura occidental. Una tendencia iconoclasta absoluta. Tendencia contra la imagen, contra el papel de la memoria radical, que es sinestésica, a favor del papel analizador del lenguaje, con sus implicaciones racionalistas —y no sólo racional logicista, que hay muchos tipos de racionalidad—. En este sentido, a la geometría de problemas, de construcciones, le ha ocurrido lo mismo que a la Aritmética que sufrimos de niños, «viejos» problemas hoy desaparecidos de nuestra enseñanza. Se han convertido en juegos matemáticos o de entretenimiento. Han quedado marginados porque la tendencia iconoclasta occidental los ha marginado; tendencia que se refleja en esa ausencia de preocupación por la imagen conceptual a que antes hice referencia, con su fijeza asociada, así como en los sucesivos planes de enseñanza, pero que ningún nuevo plan puede hacer resucitar. como tampoco podía adaptarse a la sociedad la persona estudiada y analizada durante más de veinte años por Luria y que éste describe en su magistral *Pequeño libro de una gran memoria.*

Una vuelta a este tipo de ejercicios mentales, de construcciones geométricas, de problemas aritméticos, puede ser un elemento muy positivo para una enseñanza que se margine de lo que hoy día es el hacer matemático y, más en profundidad, el hacer del pensamiento cultural occidental. Constituiría un regreso a una línea no seguida desde siglos. Que valga la pena esa vuelta para empezar otras líneas de pensamiento y consecuente transformación social, quizá más positivas, es un elemento contrafáctico en el que no entro aquí. Lo que sí considero necesario es que al emitir certificados de defunción geométricos y los intentos de resurrección asociados, se tenga presente, muy claramente, que las añoranzas suelen ser peligrosas. Quiero decir, lo que no se puede pretender es una explicación de la teoría de la relatividad en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones mediante figuras y construcciones geométricas pictóricas en un encerado o papel. O se hace geometría de cuatro dimensiones —y ello exige una vuelta al método euclídeo, axiomático y el previo estudio de los espacios vectorial, afín...— o se hace figura imaginativa o construcción en una pizarra o papel; pero teniendo presente que el encerado o papel no es el espacio de cuatro dimensiones, el espacio de la teoría, que es irrepresentable, sino una sección del mismo. Puede hacerse, es claro, tanto una geometría n-dimensional como una labor de construcciones gráficas —o en aspecto recreativo o en aspecto de posterior aplicación a terrenos como el arquitectónico o el técnico—, pero siempre que se sea consciente de que son dos cosas distintas. Y aunque el término «Geometría» las ha cubierto a las dos, su campo contextual se ha venido delimitando hacia la aceptación algebrizadora y no sólo por una dinámica interna al mundo conceptual en el que se encuentra el pensamiento y la Geometría, sino por una dinámica externa impuesta por otras disciplinas —y he mencionado, en concreto, una teoría física—. Todo ello, y por la afirmación realizada antes de que sí se da un cierto tipo de Geometría, me conduce a la afirmación de que, actualmente al menos, la Geometría no ha muerto. Y también a que es posible potenciarla, en la línea auténticamente euclídea: demostrativamente. Y lo mismo me vale para un recuerdo a Euclides quien, si bien muerto, no ha muerto en el sentido euclídeo del término y no en el que se le dio a partir de la «ciencia nueva».

Los métodos de la lógica

Por Maximiliano FARTOS MARTINEZ (*)

Agrupamos los métodos de la lógica en tres grandes rúbricas:

— Métodos sintácticos.
— Métodos semánticos.
— Métodos algorítmicos.

Entre los primeros estudiaremos el método axiotico y los sistemas de deducción natural. Dentro del segundo apartado consideraremos el método de las tablas semánticas y la utilización de interpretaciones y modelos para pruebas de independencia, y en general la importancia decisiva y la fecundidad del enfoque semántico para la demostración de los principales metateoremas. Bajo la tercer clase de métodos nos referiremos a los métodos de decisión y los problemas conectados con la decibilidad.

1. METODOS SINTACTICOS

La sintaxis es aquella parte de la semiótica o ciencia general de los signos que se ocupa de las relaciones de los signos entre sí, prescindiendo de lo que designan y significan. Las otras dos partes, la semántica y la pragmática, se ocupan respectivamente de las relaciones de los signos con los objetos a que se refieren y de las relaciones de los signos con los sujetos que los usan. Esas tres dimensiones de los signos están sin duda alguna vinculadas entre sí. «La relación pragmática supone la semántica y la sintáctica; la semántica supone la sintáctica. Una palabra sin sentido no puede servir para entenderse, y para que una palabra tenga sentido debe estar en determinadas relaciones con las otras palabras. En cambio, la relación sintáctica no supone las otras dos y es posible estudiar la semántica sin atender a la pragmática» (1).

Aunque esta famosa división de la semiótica es generalmente aceptada, el acuerdo ya no es tan unánime cuando se trata de dividir a su vez en pura y descriptiva cada una de las partes. Y en particular hay lógicos actuales que consideran deseable «una nueva definición de algunos conceptos semióticos básicos», puesto que, según ellos, «la distinción entre sintaxis y semántica no es en modo alguno tan clara como puede parecer por las definiciones respectivas. En la práctica, tal como se usan esos términos, no sólo son un tanto vagos, sino que, sin duda alguna, se solapan en sus significaciones»; solapamiento que «está reconocido por Tarski» (2). Sin emprender ahora análisis pormenorizados al respecto, nos limitaremos a emplear aquí los términos «sintaxis» y «semántica» en un sentido amplio como marcos para encuadrar los diferentes métodos lógicos.

1.1. El método axiomático

La característica fundamental de toda teoría axiomatizada es la división de todos los enunciados del campo del saber que en ella se trate en dos clases:

a) La de los *axiomas o postulados* aceptados en principio, en razón de su evidencia o por simple convención razonable.
b) La de los *teoremas*, que son los enunciados deducimos a partir de los axiomas por inferencia lógica.

Puede decirse que la silogística aristotélica fue «axiomatizada» por su fundador al conseguir «reducir» el resto de los modos silogísticos válidos a unos pocos de ellos tomados como primitivos. Sabemos también que los estoicos axiomatizaron las propias reglas de su lógica. No obstante, la axiomatización considerada como modélica durante siglos fue la contenida en los *Elementos* de Euclides. En los siglos XVII y XVIII no sólo la «filosofía natural» se fijaba en ese modelo, sino que incluso la filosofía *ut talis* pretendió presentar sus demostraciones *more geométrico*. Recuérdese la *Etica* de Espinoza. Vieta y Leibniz con su preocupación por la formalización del lenguaje matemático y lógico fomentaron sin duda el desarrollo del estilo axiomático. Pero el hecho decisivo para el despliegue sistemático que después había de conocer dicho método fue el descubrimiento de las geometrías no euclidianas. En el presente trabajo nos veremos forzados a referirnos varias veces a este acontecimiento trascendental de la historia de la ciencia. Entonces los matemáticos se vieron abocados a suplir cada vez más la antigua confianza en la intuición por el rigor lógico de las demostraciones. Siguiendo esta nueva dirección se vio la necesidad de llegar a sustituir las teorías

---

* Catedrático de la Universidad Complutense.

(1) BOCHENSKI, *Los métodos actuales del pensamiento*, Madrid, 1968, 74-75.

(2) CURRY y FEYS.: *Lógica combinatoria*, Madrid, 1967, 60, 59, 61. Cfr. MORRIS, Ch.: *Fundamentos de la teoría de los signos*, México, 1958. CARNAP: *Intrpduction to semantics*, Harvard University Press, 1961. *Logische Syntax der Sprache*, Viena, 1934. TARSKI: «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» en *Studia Philosoph.*, vol. 1, 1936, 261-405. *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*, Buenos Aires, 1972.

deductivas concretas por teorías deductivas «puras», en las que no sólo no se parte ya de unos axiomas o postulados considerados como evidentes, sino que ni siquiera los términos primitivos del sistema quedan restringidos a una determinada interpretación. Si además las reglas empleadas en la deducción de los teoremas son explícitamente formuladas, sin permitir entrar en juego ninguna otra por más intuitivamente evidente que parezca, entonces se habrán eliminado los elementos ingenuos y se habrá llegado a la construcción de un *sistema formal*. A Hilbert se debe en primer lugar «el subrayar que la formalización estricta de una teoría envuelve la total abstracción del significado, dando por resultado lo que se denomina un *sistema formal o formalismo*», y en segundo lugar se le debe «su método consistente en hacer del sistema formal, considerado como un todo, el objeto de un estudio matemático denominado *matemático o teoría de la demostración*» (3). En un sistema de objetos en el que se efectúa esa abs-abstracción total del significado «los objetos del sistema son conocidos sólo mediante las relaciones del sistema». Lo que se establece es «la estructura del sistema, dejando sin especificar qué sean esos objetos en cuales quiera de sus respectos, con la excepción del que se refiere a saber cómo encajan en dicha estructura». Ulteriormente puede hallarse «una representación (o modelo) del sistema abstracto, esto es, un sistema de objetos que satisface las relaciones del sistema abstracto y tiene además un estatuo propio». Por otra parte, estos objetos del modelo pueden ser elegidos también «de algún otro sistema abstracto (o incluso del mismo sistema de que se trate bajo una reinterpretación de sus relaciones» (4). Así pues, podemos afirmar que «un sistema formal es esencialmente un conjunto de teoremas obtenidos mediante reglas precisas y referentes a objetos indeterminados» (5).

Para obviar las ambigüedades, redundancias y dificultades de todo tipo propias de los lenguajes *naturales*, cuando se los pretende emplear con fines científicos, la construcción de sistemas formales va normalmente precedida o acompañada de la elaboración de lenguajes artificiales apropiados. No obstante incluso una lengua "natural" (corriente) pudiera, en principio, ser formalizada, mientras que cabe muy bien considerar un lenguaje artificial como no formalizado» (6). Los sistemas formales, pues, son sistemas axiomáticos, que constan de símbolos cuya interpretación no pertenece al sistema y que están estructurados de la siguiente forma:

1) Símbolos primitivos.
2) Reglas de definición.
3) Símbolos derivados.
4) Reglas de formación de fórmulas.
5) Lista de axiomas.
6) Reglas de inferencia.
7) La serie de los teoremas.

Siendo los ingredientes característicos: 1, 4, 5 y 6.

En el capítulo V de *Outhines of a formalist philosophy of mathematics* ofrece H. Curry nueve ejemplos de sistemas formales, correspondientes a diversas teorías en la mayoría de los casos y a distintas formalizaciones de una misma teoría en los restantes.

El primero de ellos lo recoge en la ya citada *Lógica combinatoria* como ejemplo de sistema «completamente formalizado» y es el que insertamos a continuación:

a) Obs (objetos):
- (1) Un ob primitivo: o.
- (2) Una operación monaria, indicada por el índice.
- (3) Una regla de formación de obs: Si x es un ob, entonces x' también lo es.

b) Enunciados elementales:
- (1) Un predicado binario:
- (2) Una regla de formación de enunciados elementales: si x e y son obs, entonces x = y es un enunciado elemental.

c) Teoremas elementales:
- (1) Un axioma: 0 = 0.
- (2) Una regla de deducción: Si x = y, entonces x' = y'.

Los teoremas elementales de este sistema son precisamente los que se indican en la siguiente lista:

$$0 = 0$$
$$0' = 0'$$
$$0'' = 0''$$

que son enunciados verdaderos del sistema. Pero, una vez definido este, podemos formar *epiteoremas*, es decir, enunciados sobre él. Por ejemplo:

Si y es un ob, entonces y = y.

es un enunciado verdadero sobre el sistema, aunque no es un teorema elemental (7).

Entre las diferentes axiomatizaciones de la lógica de enunciados una de las que goza de universal aceptación es la presentada por Lukasiewicz en 1929, y que, siguiendo a Frege, toma como términos primitivos los correspondientes a la implicación material y a la negación (8).

Utilizando la notación de Lukasiewicz el sistema queda estructurado de la siguiente forma:

1) *Símbolos primitivos*
- *a*) Constantes lógicas: C, N.
- *b*) Variables enunciativas: p, q, r, ...

2) *Reglas de Formación de fórmulas*
- *a*) Cualquier variable enunciativa en una fórmula.
- *b*) Si x es una fórmula, Nx es también una fórmula.
- *c*) Si x e y son fórmulas, Cxy es igualmente una fórmula.

3) *Axiomas* (Lukasiewicz llama *tesis* tanto a los axiomas como a los teoremas).

T_1 C C p q C C q r C p r
T_2 C C N p p p
T_3 C p C N p q

---

(3) KLEENE.: *Introducción a la metamatemática*, Madrid, 1974, 64.
(4) *Ibid*, 34.
(5) CURRY y FEYS.: *o.c.*, 32.
(6) BOCHENSKI, *o.c.*, 92.
(7) Cfr. CURRY y FEYS.: *o.c.*, 33-34. Sobre la idea de «formalización completa», vease págs. 55-56.
(8) Cfr. LUKASIEWICZ.: *Arist. Syllog.* Oxford, 1957, 79-83. Cfr. GARRIDO.: *Lógica Simbólica*, Madrid, 1974, 297-300.

4) *Reglas de inferencia*

a) Regla de sustitución: A partir de una tesis aceptada del sistema pueden deducirse nuevas tesis, escribiendo en lugar de cualquiera de sus variables, en todas y cada una de sus ocurrencias, una fórmula cualquiera.
b) Supuesta una tesis del tipo Cxy, si hay otra tesis que consista en el antecedente x, entonces puede afirmarse como nueva la tesis y, que consista en el consecuente separado de aquel condicional.

Así pueden obtenerse todas las tesis verdaderas del sistema. No obstante, para abreviar la escritura de las fórmulas y para hacer más sencillas las demostraciones se introducen:

5) Como símbolo derivados: K, A, E de acuerdo con las definiciones:

K p q = N C p N q
A p q = C N p q
E p q = K C p q C q p

6) Como nueva regla de inferencia, la regla de *intercambio*, que permite reemplazar el *definiens* por el *definiendum* y viceversa.

Como ejemplo de derivación de una nueva tesis presentamos la que da Lukasiewicz, en el formato sintético que él utiliza, para obtener a partir de los tres axiomas la ley de identidad Cpp. La deducción requiere dos aplicaciones de la regla de sustitución y otras dos de la regla de separación:

$T_1 \cdot q/C\,N\,p\,q \times C\,T_3 - T_4$
$T_4 \cdot C\,C\,C\,N\,p\,q\,r\,C\,p\,r$
$T_4 \cdot q/p,\ r/p \times C\,T_2 - T_5$
$T_5 \cdot C\,C\,p\,p$

Este sistema de Lukasiewicz posee el encanto de ser una especie de recopilación histórica. En efecto, el primer axioma es la *ley del silogismo hipotético*, cuyo origen se remonta a Aristóteles; el tercero es la llamada *ley de Duns Escoto* (aparece por primera vez en un comentario a Aristóteles atribuido al *doctor Subtilis)*; el segundo es la conocida *ley de Clavius*, jesuita del siglo XVI, que fue el primero en llamar la atención sobre esta ley en un comentario sobre Euclides. Por lo que respecta a las reglas de inferencia, la regla de sustitución equivaldría al *dictum de omni* aristotélico; la regla de separación es el *modus ponens* de los estoicos, y la regla de intercambio «es —como escribe el profesor Garrido— trasunto de la propiedad tradiccional de las definiciones, según lo cual todo lo que sea verdad del extremo definiente *(definiens)* ha de serlo igualmente del extremo definido *(definiendum)*».

Entre los sistemas axiomáticos de lógica elemental cabe destacar dos formulados recientemente (en la década 1950-1960) que han tenido una extraordinaria acogida entre los tratadistas. Nos referimos a los sistemas de Church y de Kleene. Mientras que el del primero presenta un número muy reducido de símbolos lógicos primitivos y de axiomas, el del segundo exhibe abundancia de ellos (9).

Pero sin lugar a dudas la más bella construcción, aunque seguramente no tan verdadera, que se ha elaborado por el método axiomático ha sido la teoría axiomática de conjuntos.

A finales del siglp diecinueve se produce la másl profunda crisis de fundamentos en la matemática. Con la aritmetización del análisis y posterior reducción de los números naturales a los conjuntos, todo el edificio de la matemática pura se apoyaba por fin en el concepto de conjunto. Pero en el interior mismo de la teoría «ingenua» de conjuntos aparecieron paradojas lógicas (como la de Cantor, la de Burali Forti y la de Russell), y a la antigua paradoja semántica del mentiroso vinieron a sumarse otras nuevas (la de Richard, la de Grelling). Ante el reto de las paradojas se hacía necesario elaborar una teoría «no ingenua» que solventara la crisis del cantorismo. En la primera década de nuestro siglo, o precisando más, entre los años 1906 y 1908 surgen independientemente y casi a la vez tres líneas distintas de pensamiento que suponen otras tantas propuestas de solución a la crisis: la de Zermelo que propone construir una teoría axiomática de conjuntos, añadiendo axiomas específicos de la teoría a la lógica elemental tomada como única base; la de Russell o línea logicista que opta por desarrollar el programa logicista, tomando como base la lógica superior y la teoría de los tipos; y la de Browwer con quien recobran nuevo vigor las tesis finitista y constructivista del intuicionismo.

Entre los posteriores desarrollos de la línea iniciada por Brouwer cabe destacar la formalización de la lógica intuicionista realizada por Heyting y las recientes aportaciones de Kleene. El programa logicista desarrollado en los *Principia Mathematica* ha sido remodelado después de forma muy original en los sistemas de Quine.

Entre las múltiples presentaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos que se han producido siguiendo la dirección emprendida por Zermelo (la línea comunmente conocida como «axiomática») cabe destacar dos orientaciones fundamentales: la de la teoría axiomática conocida como sistema de Zermelo-Fraenkel (o simplemente con la sigla Z F) y la teoría axiomática conocida como sistema de Von Newmann-Bernays-Gödel (o sistema N B G). Una de las diferencias que saltan a primera vista es que mientras en Z F se opera sólo con conjuntos en N B G se admiten clases y conjuntos; o dicho con más precisión, se admiten clases normales (las clases que son elemento de alguna otra) que son los conjuntos, y también se cuenta con las clases últimas (clases no normales) que no son conjuntos. Por supuesto está probada la consistencia relativa de N B G respecto de Z F. ¿Se trata entonces de dos teorías o más bien de dos formulaciones de la misma teoría? Los seguidores de Z F se inclinan por el segundo miembro de la alternativa: «The main point which will, in our opinion, emerge from this analysis, is that set theory with classes and set theory with sets only are not two separate theories; they are, essentially, different formulations of the same underlying theory» (10).

---

(9) Cfr. CHURCH.: *Introduction to mathematical logic*, vol. I, Princeton, 1965. KLEENE.: *Intr a la Metam. ed. c.* Ambos sistemas están recogidos en el libro citado de Garrido, págs. 280-288.

(10) FRAENKEL, BAR-HILLEL, LEVY.: *Foundations of set theory*, Amsterdam, 1973, 119. Este libro, del que justamente dice el profesor Garrido en la recensión hecha para *Teorema* que es «casi único en su género» contiene una abundante bibliografía. En castellano pueden verse: en la dirección del sistema Z F: SUPPES.: *Teoría axiomática de conjuntos*, Cali-Colombia, 1968; en la línea del sistema N B G: MOSTERIN.: *Teoría axiomática de conjuntos*, Barcelona, 1971.

1.2. Método de la deducción natural

En realidad los sistemas de reglas de deducción natural son algo así como sistemas axiomáticos sin axiomas. En todo caso se puede decir de ellos que también son sistemas formales. Sistemas formales en los que las funciones de los axiomas estarían suplidas por determinadas reglas peculiares: las de introducción y eliminación de premisas.

Gentzen consideraba que los cálculos logísticos, tal como él los encontró presentados, no eran adecuados para servir a los matemáticos o científicos y que se alejaban demasiado de la manera *natural* de razonar. Como escribe Feys en la introducción a la traducción francesa del famoso artículo de Gentzen (11) «Untersuchungen über das logische Schliessen» de 1934: «Gentzen ha empleado un camino diferente del de Hilbert. Ha valorado el empleo frecuente y natural, en matemáticas, de razonamientos a partir de una suposición (razonamientos que proceden en fin de cuentas al modo de las pruebas *ex suppositione* de los antiguos). Para formalizar estos razonamientos deberá introducir la aserción «esto es verdadero bajo tal suposición como elemento formalizado de sus sistemas». En efecto, la forma más «natural» de proceder cuando nos enfrentamos a la tarea de deducir algo de algo es que desencadenemos secuencias del tipo: supongamos el antecedente... y supongamos también «de momento»..., entonces se seguirá que..., pero si esto es así, ocurrirá..., etc.

Al igual que en los sistemas formales axiomáticos también en los sistemas de deducción natural se puede optar por una mayor o menor abundancia de símbolos primitivos y reglas básicas de derivación. Es muy frecuente (y didácticamente muy recomendable) que, además de la regla de introducción de premisas, se empleen, siguiendo a Gentzen, como reglas básicas dos para cada símbolo de constante lógica empleada: una de introducción y otra de eliminación. Así para la lógica elemental sin identidad es usual emplear las correspondientes pares de reglas para la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional, el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

Cuando en una línea de una derivación realizada de acuerdo con las reglas establecidas aparece un enunciado que depende del conjunto vacío de premisas, dicho enunciado es un teorema. Es de capital importancia resaltar que para la lógica elemental se dispone de sistemas formales de deducción natural cuyo rendimiento es equivalente al de los correspondientes sistemas formales axiomáticos.

Para entrever esa equivalencia entre el rendimiento de ambas presentaciones de la lógica elemental vamos a comparar el sistema de reglas expuesto en el texto de B. Mates y el sistema axiomático de Church al que aludíamos en páginas anteriores.

Sistema de deducción natural S N	Sistema axiomático S A
1) Regla de introducción de premisas 2) Regla de Condicionalización 3) *Modus Ponens* 4) *Modus Tollens* 5) Especificación universal 6) Generalización universal 7) Cuantificación existencial 8) Intercambio deficional	**Axiomas** I) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ II) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow$ $\rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow$ $\rightarrow (A \rightarrow C))$ III) $(-A \rightarrow -B) \rightarrow$ $\rightarrow (B \rightarrow A)$ IV) $(A \rightarrow Pa) \rightarrow$ $\rightarrow (A \rightarrow (x)Px)$ V) $(x)\ Px \rightarrow Pa$ **Símbolos definidos** VI) Además de las definiciones que se contemplan igualmente en 8) de SN, se incluye: $(\exists x)\ Px = df -$ $- (x)\ - Px$ **Reglas de inferencia** VII) *Modus ponens* VIII) Generalización **Teoremas** IX) $(A \rightarrow B) \rightarrow$ $\rightarrow (-B \rightarrow -A)$

Las diferencias más chocantes a primera vista entre SN y SA es que en SN se introducen premisas en lugar de partir de unos axiomas fijos como en SA, y luego esas premisas se eliminan por 2), quedando los teoremas sin depender de nada. Pues bien 1) y 2) quedan justificados respecto a SA por la demostración del *teorema de deducción* (que se utiliza en SA ulteriormente como regla derivada).

3) Se corresponde con VII. 4) puede justificarse en SA, ya que en SA se prueba IX y la ley de importación, llegándose a $(A \rightarrow B) \cdot -B) \rightarrow -A$ y 4) es la regla obtenida a partir de este esquema. 5) se corresponde con la regla obtenida a partir de V. 6) está directamente relacionado con IV y VIII. 7) y 8) están comprendidos en VI.

Decíamos más arriba que una vez constituido un sistema formal podíamos considerarlo como un todo y hacerlo objeto de estudio metateórico. Aquí, por ejemplo, hemos comparado dos sistemas formales con miras a establecer la equivalencia de su rendimiento.

Entre las propiedades principales de los sistemas formales en los que se centran los estudios metateóricos figuran: la consistencia, la completud, la decibilidad, la independencia, la categoricidad. Mientras que esta última es una propiedad netamente semántica, las otras cuatro pueden ser consideradas sintáctica o semánticamente, si bien la independencia de los axiomas es demostrada en la mayoría de los casos semánticamente. Veamos como define Curry las otras tres:

«A system is consistent if not every elementary proposition is a theorem; it is complete if every elementary proposition is either a theorem or implies every elementary proposition; it is resolvable if there exist a definite algorithm wich, given an elementary proposition, will determine definitely wether or not it is a theorem» (12).

El cálculo proposicional es consistente, completo y decible. A Post se deben pruebas de carácter sintáctico de la consistencia y completud de dicho cálculo.

---

(11) Cfr. GENTZEN, *Recherches sur la deduction logique*, PUF, Paris, 1955.

(12) CURRY: *Outli Form. Phi. of Math.*, Amsterdam, 1970, 51-52.

2. METODOS SEMANTICOS

Aunque no se ha conseguido un criterio formal de diferenciación entre sintasis y semántica puede hablarse de un acuerdo unánime en cuanto al carácter semántico de los conceptos de consecuencia y validez universal, en correspondencia con los conceptos sintácticos de derivabilidad y de teorema.

En cuanto a las propiedades de los sitemas formales enfocados desde los puntos de vista sintáctico y semántico Hao Wang ha escrito:

«Acerca de cada uno de los sistemas formales podemos plantear diferentes problemas. Estos problemas se distribuyen de ordinario en dos familias: problemas *sintácticos*, que se refieren al sistema considerado como un formalismo puro o como una máquina que maneja expresiones simbólicas, independientemente de sus significaciones, y problemas *semánticos* que se refieren a la interpretación del sistema. Las nociones y problemas más importantes pueden dividirse del siguiente modo:

1. *De naturaleza sintáctica*	2. *De naturaleza semántica*
1.1. Formalismo 1.2. Teorema 1.3. Método de decisión para la demostrabilidad 1.4. Consistencia 1.5. Consistencia relativa 1.6. Completud	2.1. Modelo o interpretación 2.2. Verdad o validez 2.3. Método de decisión para la verdad y criterio de id. 2.4. Realizabilidad 2.5. Modelo relativo 2.6. Categoricidad (13).

En el punto 2.6. de esta tabla se debería hablar más bien de completud o saturación semántica, dejando aparte la categoricidad como propiedad netamente semántica; ya que si bien puede darse por bueno que todo conjunto de axiomas que es categórico es también semánticamente completo; cabe, en cambio, que un conjunto de axiomas sea completo en sentido semántico, o en sentido sintáctico, y no sea categórico (14).

Un sistema axiomático es categórico si todos sus modelos son isomórficos. Al lado de esta definición de la categoricidad absoluta (o simplemente cateforicidad) cabe dar otra referida a la categoricidad relativa: «Un sistema se dice *categórico respecto a una cierta clase de objetos* Cl pertenecientes a él, si todos los modelos de este sistema, en los cuales esta clase Cl recibe la misma interpretación, son isomorfos (15).

Veamos ahora algunas definiciones de las otras propiedades de los sistemas en sentido sintáctico y en sentido semántico:

Consistencia sintáctica

Un sistema es consistente si no toda fórmula del sistema es derivable en él. O también (en el caso de que el sistema incluya el operador de negación) si no es posible derivar en él una fórmula y su negación.

Consistencia semántica

Un sistema es consistente si no toda fórmula del sistema es una consecuencia lógica. O sencillamente, un sistema es consistente si es realizable.

Prescindiremos ahora de la ω— consistencia y de la consistencia relativa.

Completud sintáctica

De un sistema se dice que ex completo *en sentido fuerte* si toda fórmula perteneciente al sistema es derivable o refutable. Un sistema es completo *en sentido débil* si, añadiéndole una fórmula no derivable del sistema se torna en consistente.

Completud semántica

Un sistema es absolutamente completo o *saturado* si, y sólo si, toda fórmula válida del sistema es derivable.

Se dice que un sistema es completo en relación a un campo de interpretación, si toda fórmula del sistema, válida en relación a ese campo, es derivable, y recíprocamente.

Decibilidad sintáctica

Un sistema es decidible si se puede dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para toda fórmula del sistema, si es o no es derivable.

Decibilidad semántica

Se dice que un sistema es decidible si se puede dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para toda fórmula del sistema, si es o no es válida.

Independencia sintáctica

Dado un sistema formal se dice de uno de sus axiomas que es independiente si no es derivable del conjunto de los axiomas restantes.

Independencia semántica

Análogamente se dice que un axioma es independiente si no es una consecuencia lógica de los otros axiomas del sistema. Un axioma es independiente en este sentido si, y solamente si, hay un modelo que satisface al conjunto de axiomas restantes, y en el que resulta ser falso el axioma en cuestión.

2.1. Teoría de modelos y pruebas semánticas

En la segunda mitad del siglo XIX Beltrami y Klein consiguieron encontrar modelos euclidianos para la geometría hiperbólica (no euclidiana), con lo que quedaba demostrda la consistencia relativa de esta nueva geometría y la independencia del axioma de las paralelas.

Este descubrimiento paradigmático es recogido unánimemente hoy por todos los tratadistas de la moderna teoría de modelos como el más ilustre precedente histórico de la nueva disciplina. Otro hito igualmente memorable, el conocido teorema de Löwenheim-Skolem, pertenece ya a nuestro siglo.

El primero que empleó la expresión «teoría de modelos» fue Tarski, en 1954. En él hay que ver

(13) HAO WANG.: *Quelques notions d'axiomatique*, *Rev. phil.* Louvain, 51, 1953, pág. 411. Recogido por V. MUÑOZ en *Lecciones de lógica*, I, Salamanca, 1972, págs. 178-179.

(14) Cfr. FRAENKEL, BAR-HILLEL, *o.c.*, 297-298.

(15) LADRIERE: *Limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, 1969, 71. Tendremos en cuenta esta obra igualmente para las definiciones que siguen.

al principal promotor de la actual semántica pura, si bien ya en las obras de Bolzano y Frege se encontraban importantes consideraciones semánticas y por más que en los tratados medievales de lógica, e incluso en los estoicos y en el mismo Aristóteles, puedan encontrarse pasajes muy sugestivos al respecto. El punto de arranque de los actuales desarrollos de la semántica se puede fijar en el articulo de Tarski «El concepto de verdad en los lenguajes formalizados» escrito en 1931 y cuya versión alemana para la revista *Studia Philosofica* ya hemos citado. En él se recupera la doctrina de la verdad contenida en el famoso pasaje de la metafísica de Aristóteles: «decir de lo que es que no es y de lo que no es que es, es falso; mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero». Ahora bien, Tarski hace resaltar el carácter metalingüístico del predicado «verdadero», y como el lenguaje corriente por su «universalismo», lejos de permitir la distinción nítida entre lenguaje objeto y metalenguaje, «es fuente de las llamadas antinomias semánticas, como la de el cretense o la de las palabras heterológicas», resulta como consecuencia que, para establecer una definición correcta de la expresión «enunciado verdadero», es necesario acudir a los lenguajes formalizados, con lo que esa noción deja de ser absoluta y queda relativizada al lenguaje formalizado concreto al que pertenezca el enunciado de cuya verdad se trate.

En *Undecidable Theories* establece Tarski la siguiente definición de modelo: «A possible realization in which all valid sentences of a theory T are satisfied is called a *model* of T» (16).

En esta definición aparecen conectadas las nociones de «realización», «validez», «satisfacción» y «modelo».

Vamos a ocuparmos ahora de establecer brevemente la conexión entre interpretación, satisfacción, verdad, modelo, verdad lógica o validez universal, y consecuencia lógica.

Dado un lenguaje L una interpretación J de L consta de:

1) 1) Un dominio no vacío (o universo del discurso) D.
2) Una asignación o atribución que asocie:
   a) Con cada constante individual de L un individuo o elemento de D.
   b) Con cada letra predicativa n-ádica de L una relación n-ádica entre miembros de D.
   c) Con cada letra enunciativa de L uno de los dos valores de verdad V o F.
   d) Las constantes lógicas conservan en la interpretación su significación usual.

Hemos supuesto que L es un lenguaje de lógica de primer orden sin identidad.

Dada una fórmula A del lenguaje L, un dominio D y una interpretación J, se dice que J *satisface* a A, si dicha fórmula al ser así interpretada se convierte en un enunciado verdadero.

He aquí una definición *recursiva* (o inductiva) de la satisfacción:

1. *La fórmula A es atómica*
   1.1. A es una letra enunciativa. Entonces J sat. A Sii J asigna el valor V a A.
   1.2. A es una predicación. Entonces J sat. A Sii los objetos que J asigna a las constantes individuales de A (tomándolos en el orden en que sus correspondientes constantes ocurren en A) guardan entre sí la relación n-ádica que J asigna al predicado n-ádico de A.

2. *La fórmula A es molecular*
   2.1. Su *signo lógico* principal es un conectivo.
      2.1.1. A = —B, entonces J sat. A Sii no es el caso que J sat. B.
      2.1.2. A = BvC, entonces J sat. A Sii J sat. B o J sat. C.
      2.1.3. Análogamente se procedería en el caso de que A fuera una conjunción, una implicación o una doble implicación. Dadas las reglas de intercambio definicional basta con los dos subcasos analizados.
   2.2. *Su signo lógico principal es un cuantificador*
      2.2.1. A = (x)B, entonces J sat. A Sii B x/a es verdadero bajo toda variante de a en J, siendo B x/a el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de la variable x por ocurrencias de la constante a, que se supone es la primer constante individual que no ocurre en B (partiendo de que las constantes individuales están enumeradas por el siguiente orden: a, b, ... t, a_1, b_1, ... t_1, a_2, b_2, ...).
      2.2.2. Análogamente si A tiene como símbolo principal el cuantificador existencial, exigiéndole solamente en este caso que B x/a sea verdadero, cuando menos, bajo una variante de a en J. La regla de intercambio definicional de cuantificadores nos permite por otra parte reducir los dos casos a uno sólo (17).

Por otra parte, de una interpretación que no cumpla las anteriores cláusulas se dice que no satisface a la fórmula en cuestión, o que ésta es falsa bajo esa supuesta interpretación.

Si una interpretación J satisface la fórmula A sin que quepa ejemplo alguno en contra, se dice que J es un *modelo* de A. (Análogamente tratándose de cualquier conjunto G de fórmulas).

Una fórmula A (o en general un conjunto G de fórmulas) es verdadero o válido bajo la interpretación J en el dominio o universo D si, y sólo si, dicha interpretación es un modelo suyo.

Un modelo M para el lenguaje L puede representarse por el par $< D, J >$, dónde D y J son respectivamente el universo y la interpretación elegidos. Suele escribirse $M = < D, J >$.

Dados dos modelos $M = < D, J >$ y M', J' >

(16) TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON: *Undecidable Theories*, Amsterdam, 1973, 11.

(17) Cfr. QUINE: *Filosofía de la lógica*, Madrid, 1973, 77-81. MATES: *Lógica matemática elemental*, Madrid, 1971, 77-79. GARRIDO: *o.c.* 226-228.

para un conjunto G de fórmulas del lenguaje L, se dice que M y M' son isomórficos si sólo si:

1) Para cada letra enunciativa P que ocurra en G, se cumple J(p) = J'(p), es decir, lo que J asocia con p es idéntico a lo que J' asocia con p.
2) Hay una aplicación biyectiva f entre D y D' tal que:

 2.1. Para cada elemento x del dominio D y el elemento x' correspondiente del dominio D' se cumple: f(x) = x'.

 2.2. Para cada relación n-ádica R de M y la correspondiente relación R' de M' se cumple:

$$R(x_1 \ldots x_n) \text{ Sii } R'(f(x_1) \ldots f(x_n) \text{ para todas las } x_1 \ldots x_n \text{ de } D \text{ (18).}$$

Se dice que una fórmula A es universalmente válida o lógicamente verdadera si A es verdadera o válida bajo toda interpretación.

Una fórmula A es una consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas G, si no hay ninguna interpretación bajo la cual todas las fórmulas de G son verdaderas y A es falsa. O como diría Tarski, el enunciado A se sigue *lógicamente* del conjunto de enunciados G si y sólo si todo modelo del conjunto G es también un modelo de A.

«La distinción entre las dos clases de relación deductiva, la deducibilidad formal y la consecuencia semántica, no es trivial. En principio no está garantizado que ambas hayan de coincidir. Posiblemente el resultado más interesante de la investigación de sistemas de lógica elemental o de primer orden, es que en dicho orden la relación de deductibilidad y la relación de consecuencia son coextensivas o equivalentes. Este resultado se debe a Gödel (1930). Pero en teorías de orden superior no es ese el caso. En tales teorías el control lógico inherente a la relación de deducibilidad deja de ser operante, y es preciso atenerse tan sólo al criterio de consecuencia lógica» (19).

Para calibrar la fecundidad del método semántico bastará con mencionar algunos de los resultados metalógicos más decisivos: Se han conseguido diferentes pruebas semánticas de la consistencia y completud del cálculo proposicional, así como la consistencia de la lógica de primer orden. Sobresale especialmente el teorema ya aludido sobre la completud semántica de esa parte de la lógica. Una demostración implícita estaba contenida en las investigaciones de Herbrand (1930). La primera demostración explícita fue la ya mencionada de Gödel (1930). Una nueva prueba más sencilla fue conseguida por Henklin en 1949 (20). Un paso esencial en esta prueba consiste en la exhibición de un modelo enumerable construido sobre la base de una autointerpretación del propio sistema. En 1953 HASENJAGER presenta una simplificación de la prueba de Henkin. Otra demostración es conseguida por SCHUTE en 1956. Pruebas constructivas se deben a Hintikka, Beth y Smullyam. Hay asímismo una demostración de Rasiowa y Sikorski (1951) que utiliza álgebra y topología (21).

El teorema de Löwenheim (1915) generalizado por Skolem (1920) puede obtenerse como corolario de la prueba de Henkin y nos garantiza que si un conjunto de fórmulas es simultáneamnte satisfacible en un dominio no vacío, entonces es simultáneamente satisfacible en un dominio infinito enumerable.

El famoso teorema de incompletitud presentado por Gödel en 1931 tiene como punto crucial la exhibición de una expresión indecidible que es autorreferente pero cuya «circularidad» no es paradójica, pues, gracias a la estrategia de la aritmetización, la aritmetización de la matematica del cálculo aritmético permite reflejar las reflexiones *sobre* el cálculo *en* el cálculo mismo; se trata de un *sumergimiento* de la metaaritmética en la aritmética misma, mediante el rodeo de la aritmetización del cálculo PM que se supone coherente (más aún ω — coherente) y suficientemente amplio para que la aritmética recursiva sea formalizable en él (22). Ya hemos mencionado el carácter semántico de las pruebas usuales de independencia.

Es de destacar la reciente prueba de independencia de la hipótesis del continuo que nos ha conducido en teoría de conjuntos a una situación similar a la producida en geometría con la demostración de la independencia del quinto postulado de Euclides.

La prueba de independencia de la hipótesis del continuo se obtiene uniendo los resultados conseguidos por Gödel (1939) y Cohen (1963).

Gödel demostró la consistencia relativa del axioma de elección AE y la hipótesis generalizada del continuo HGC respecto de la teoría axiomática de conjuntos ZF. Para llevar a cabo la demostración empleó la noción de «conjunto constructible». Gödel llama constructibles los conjuntos que pueden ser obtenidos como resultado de una secuencia transfinita de definiciones predicativas. Llamando L a la «clase» de los conjuntos constructivos y V a la clase universal, la demostración discurre por los siguientes pasos:

1) Los axiomas de ZF se cumplen en L, es decir, los conjuntos constructibles son un modelo para ZF.
2) Axioma de constructibilidad: L = V. El universo de ZF y el de los conjuntos constructibles son equivalentes, es decir, todos los conjuntos son constructibles.
3) L = V es expresable en ZF y se cumple en L (en este punto entra en juego la noción de relación *absoluta).*
4) El axioma de constructibilidad L = V implica el axioma de elección AE y la hipótesis del continuo HGC.

En conclusión: La consistencia de ZF implica la consistencia de ZF + AE + HGC.

---

(18) Cfr. MATES: *o.c.*, 229. CHANG, C.C. y KEISILER, H. J.: *Model theory*, Amsterdam, 1973, 20-21. Estos autores caracterizan a la teoría de modelos mediante la siguiente ecuación: álgebra universal + lógica = a teoría de modelos. Cfr. también: BELL, J.L. y SLOMSON, A.B.: *Models an ultraproducts: an introduction*, Amsterdam, 1974. Sobre la interpretabilidad de unas teorías en otras véase la obra de TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON, antes citada pág. 20 y siguientes.

(19) GARRIDO: *o.c.* 231-232.

(20) Cfr. HENKIN, L.: «*The completeness of the first-order funcional calculus*», *Journal of Simbolic Logic*, vol. 14 (1949), 159-166. Recogido en HINTIKKA, J. (ed.): *The philosophy of mathematics*. Oxford university press, 1969.

(21) Cfr. BELL y SLONSON.: *o.c.*, 62-65 y 71.

(22) Cfr. CHURCH, A.: *Introduction to mathematical Logic*, Princeton, 1956, 238-245.

(22) Cfr. GODEL, K.: *On formally undecidable proposition of principia mathematica and related systems*, with introduction by R. B. BRAITH-WAITTE, London, 1962.

Cohen por su parte probó que: La consistencia de ZF implica la consistencia de ZF + — AE + — — HGC es decir, demostró la consistencia relativa de la negación del axioma de elección y la negación de la hipótesis del continuo respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos. Hay interpretaciones en las que no se cumplen AE y/o HC y en las que en cambio siguen valiendo los axiomas de ZF.

Empleando las originales ideas de *forcing* y «conjunto genérico» logra construir en primer lugar un modelo N tal que en él se cumplen ZF y también HGC y AE, pero que contiene un conjunto a no constructible y, que, por lo tanto, no satisface V = L. De ahí se sigue, de momento, que aunque V = L implique HGC y AE, en cambio HGC y AE no implican V = L. Por una extensión ulterior del método se alcanza el resultado completo (23).

2.2. El método de las tablas semánticas

Entre los métodos semánticos merece una especial mención el denominado método de las tablas semánticas. Sabemos por la definición de consecuencia lógica que no cabe en una deducción correcta que, siendo verdaderas las premisas, sea falsa la conclusión. Supongamos un conjunto de premisas P y una supuesta conclusión c. Para comprobar si c se sigue de P podemos ensayar la búsqueda de una interpretación que satisfaga a P y a —c, en la seguridad de que si esto ocurre, entonces queda invalidada la supuesta inferencia. Ahora bien, en el caso de que la búsqueda del *contraejemplo* o *contramodelo* nos lleve a una contradicción, entonces queda garantizado que la conclusión c se sigue de las premisas P.

Realmente Aristóteles ya hizo uso del método de los contraejemplos para invalidar algunos modos incorrectos del silogismo. Este procedimiento «viene a ser una especie de versión semántica de la reducción al absurdo». No obstante «el hallazgo del contraejemplo era algo que dependía prácticamente del azar», hasta que las recientes investigaciones de E. W. Beth y J. Hintikka condujeron a la consecución de un método que permite la búsqueda sistemática de la interpretación invalidadora del argumento» (24).

El procedimiento consiste en la aplicación sistemática de un conjunto de reglas de eliminación de símbolos de constantes lógicas de acuerdo con una distribución tabular o arborescente que puede conducir a una de las tres situaciones siguientes:

a) Clausura completa, esto es, que en toda trayectoria continua descendente aparezca una fórmula atómica afirmada en una de sus líneas y negada en otra. En este caso la búsqueda sistemática del contraejemplo ha conducido a contradición, quedando refrendada la validez del argumento que se pretendía invalidar.

b) Que el procedimiento termine sin que se haya producido la clausura completa. En este caso el argumento sometido al proceso queda invalidado.

c) Que el procedimiento no tenga fin, es decir que la tabla se revele como *infinita*.

La situación c) puede presentarse y de hecho se presenta en los argumentos sometidos al control de este método intervienen fórmulas con letras predicativas poliadiádicas. Pero para los argumentos en los que sólo intervienen fórmulas del cálculo proposicional y/o del cálculo cuantificacional monádico las tablas en cuestión desembocan siempre en una de las dos primeras situaciones descritas. Esto es, el método de las tablas semánticas proporciona un algoritmo de decisión para la validez de las fórmulas pertenecientes a esa parte de la lógica.

3. EL METODO ALGORITMICO

Acabamos de decir que el método de las tablas semánticas permite decidir la validez de cualquier fórmula o argumento en los que no intervengan letras predicativas poliádicas. Sabemos también que toda fórmula válida de ese ámbito de la lógica puede ser obtenida como teorema, tanto por el método axiomático como por el método de la deducción natural, y que se cumple la recíproca: si una fórmula se obtiene como teorema es válida. No obstante hay una diferencia importante entre estos dos métodos y aquel otro. Tanto en el método axiomático como en el método de la deducción natural, por más que se conozcan estrategias ocasionalmente muy útiles, se requiere a menudo una cierta dosis de inventiva de quien lo practica para la derivación de los teoremas, no siendo infrecuentes los típicos fenómenos de «invisión» o de reestructuración gestáltica y hasta diferentes «estilos» de demostración. El método de las tablas semánticas, es, en cambio, mecánico. En él las demostraciones se realizan a través de pasos ordenados siguiendo una rutina establecida. Los procedimientos de este tipo son algorítmicos. Algunos procedimientos algorítmicos en el campo de las matemáticas se conocían desde la antigüedad. Recuérdese el algoritmo de Euclides para la descomposición de un número en sus factores primos. El ideal algorítmico ha sido una constante en el desarrollo de la lógica formal y hasta la década de los años 30 de nuestro siglo no se había conseguido demostrar los límites de estos métodos.

Desde hace tiempo se ensayaron y consiguieron varios métodos para resolver silogismos. El método de diagramas y diferentes tipos de máquinas lógicas constituyeron verdaderos métodos de decisión para ese campo y hay que verlos como auténticos precedentes de los métodos más potentes de que hoy disponemos (25).

Un método de decisión para las fórmulas y argumentos del cálculo proposicional es el constituido por el conocido método de las tablas de verdad. Otro puede obtenerse fácilmente a partir de la teoría de las formas normales.

(23) Cfr. COHEN, P. J.: *Set theory and the continuum hypotesis* W. A. Benjamin, Massachusetts, 1966 especialmente, págs. 85-99 y 120-127. Cfr. KRIVINE, J. L.: *Theorie axiomatique des ensembles*, Paris 1969, especialmente páginas 100-118. Cfr. SMULLYAN, R. M.: «*The continuum hypotesis*» en *The mathematical sciences, a collection of essays*, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1969, 252-260. Para el tratamiento de estas pruebas de independencia con modelos de valores booleanos Cfr. ROSSER, J. B.: *Simplied Independence Proofs*, Academic press New York and London, 1969.

(24) Cfr. GARRIDO, *o.c.*, 259. Cfr. BETH.: «Semantic entailment and formal derivability» recogido en HINTIKKA (ed.), *o.c.*, 9-41. Cfr. también la obra conjunta de BETH y PIAGET, *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*, Madrid, 1968, 33.

(25) Cfr. GADNER, M.: *Máquinas lógicas y diagramas*, México, 1973.

En cuanto a los métodos de decisión para la parte monática de la lógica de predicados cabe destacar los resultados de Löwenheim (1915), Behmann (1922), Von Wrigh (1949) y Quine (1950) (26).

En esta ocasión nos limitaremos a consignar aquí el siguiente teorema: «Si una fórmula del cálculo cuantificacional monádico es válida en un dominio de 2^n individuos, donde n es el número de letras predicativas distintas, entonces es válida en todo dominio no vacío».

Con motivo de este teorema hace Church las siguientes observaciones sobre la relación en el marco de la lógica de primer orden entre *The decision problem* i.e. *the decision problem for provability* y *the decision problem for validity*

«By Gödel's completeness theorem it istrue in one sense that a solution of a special case of the decisión porblem for validity is also a solution, in the same special case, of the decision problem. But in another sense —which ve have not attempted to make precise— this is not true, as may be seen from the fact that proof of** 466 (el teorema expuesto) provides no effective method of finding a proof of a wff A which passes the test of containing none but singulary functional variables and being valid in a domain of 2^n individuals» (27).

Hasta aquí hemos visto que para el cálculo de proposiciones y para el cálculo cuantificacional monádico no sólo se podía hallar una solución total al problema de la decibilidad, sino que además se cuenta de hecho con varios métodos concretos de decisión. El caso no es el mismo cuando sobrepasamos la lógica monádica, esto es, cuando nos enfrentamos con el problema de la decibilidad de todo el cálculo de predicados de primer orden. No se trata solamente de que no se disponga aún de una solución completa de ese problema, sino que existen razones que excluyen el que podamos llegar nunca a encontrarnos en posesión de una tal solución. A. Church ha demostrado el primero (1936) la imposibilidad de descubrir un proceso general de solventar la decibilidad.

Antes de describir a grandes rasgos la marcha de la argumentación de Church veamos como precisa Ackermann el alcance de sus consecuencias:

«No ha de malentendernos este resultado, por lo demás en el sentido de que podrían presentarse expresiones determinadas acerca de las cuales se probase que no es factible decidir si son universalmente válidas o no: de hecho no es posible tal prueba. Por si se puede probar que no cabe decir nada acerca de la validez universal o no de una expresión, existe también una demostración de que tal expresión no es deductible en el sistema de axiomas, o sea que —debido a la completitud de este sistema de axiomas, se tendría una demostración de que la expresión no era universalmente válida, contra lo que se había supuesto. Más la imposibilidad de un proceso general para solventar la decibilidad quiere decir lo siguiente: se ha encontrado procesos de esta índole para clases especiales de expresiones, y hemos de suponer que se encontrarán procesos análogos para aún otras clases de expresiones; ahora bien todos estos procesos callan acerca de expresiones cualesquiera. Con esto se aclara también al mismo tiempo porqué los esfuerzos para ampliar el campo de las expresiones cuya validez universal puede decidirse en uno u otro sentido, tropiezan cada vez con mayores dificultades» (27).

Insertamos a continuación un resumen panorámico de los casos especiales para los que se ha solucionado positivamente el problema de la decibilidad de la lógica de predicados de primer orden (28).

«El problema de la decisión ha podido ser resuelto para todo esquema bien formado que:

1) Sólo contenga letras funcionales monádicas.
2) Pueda ser reducido a una forma normal prenexuada cuyo prefijo no contenga:
   a) Ningún cuantificador existencial.
   b) Ningún cuantificador universal.
   c) Ningún cuantificador existencial delante de un cuantificador universal.
   d) Más que un cuantificador existencial.
   e) Más que dos cuantificadores existenciales que no se hallen separados entre sí por ningún cuantificador universal.
3) Pueda ser reducido a una forma normal prenexuada en la que:
   a) La matriz (esto es, la expresión que sigue al prefijo) sea una disyunción de componentes elementales y sus correspondientes negaciones o quepa reducirla a dicha forma.
   b) El prefijo sea de la forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)$ $(y_1) \ldots (y_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables $x_1, \ldots, x_m$ o bien al menos una de las variables $y_1, \ldots, y_n$.
   c) El prefijo concluya con $(z_1) \ldots (z_n)$ y todo componente elemental de la matriz que contenga alguna de las variables que intervienen en el prefijo contenga al menos una de las variables $z_1, \ldots, z_n$.
   d) El prefijo sea de la forma $(\exists x)$ (y) $(\exists z_1) \ldots$ $\ldots (\exists z_n)$, donde $n \leqslant 4$, y la matriz sea de la forma $G(x,y) \supset H(z_1, \ldots, z_n)$, con la letra funcional diádica G como única letra funcional en la versión completa o desarrollada de $H(z_1, \ldots, z_n)$.»

El teorema sobre la imposibilidad de hallar un procedimiento decisorio para el cálculo de predicados de primer orden puede esquematizarse de la siguiente manera. Desde la indecibilidad de la teoría elemental de números (presentida ya desde el teorema de incompletitud de Gödel) se arguye a la indecibilidad del cálculo de predicados de primer orden.

Llamando P a la aritmética de Peano, P^o a la aritmética de Skolem y Q al sistema de R. M. Robinson, A. Tarski y A. Mostowski, se cumple:

---

(26) Cfr. ACKERMANN, W.: *Solvable cases of the decision problem*, Amsterdam, 1954. CHURCH.: *o.c.*, 246-280. Para los métodos que emplea Quine para la decisión del cálculo cuantificacional monádico Cfr. QUINE.: *El sentido de la nueva lógica*, Buenos Aires, 1971, 94-96 y *Los métodos de la lógica*, Barcelona, 1962, 145-172 y 262-266, Cfr. VON WRIGHT.: *Logical studies*, Londres, 1957, 22-43. Una adaptación del método de Von WRIGHT puede verse en HUGHEUES y LONDEY: *The elements of formal Logic*, London, 1966, 182-197.

(27) CHURCH.: *o.c.*, 254.

(27) HIBERT y ACKERMANN, *Elementos de lógica teórica*, 4.ª ed. Madrid, 1962, 138-139.

(28) El texto que ofrecemos está en la pág. 675 de *El desarrollo de la lógica* de W. y M. Kneale, Madrid, 1972.

Q C P° C P. Aunque Q es considerablemente menos potente que P°, en cambio consta de un número finito de axiomas y a la vez es igualmente adecuado para la definición de las funciones recursivas. Ahora bien Q es indecidible porque admite en su interior la definición de la función diagonal. Más aún, es esencialmente indecidible, puesto que todas sus extensiones consistentes (como, por ejemplo, P° y P) lo son.

Llamando A a los axiomas especiales de Q el problema de saber si cabe probar, por ejemplo, F dentro del sistema Q queda reducido al de saber si cabe probar A → F dentro de la lógica de primer orden. Si esta lógica, lamémosle L, fuese decidible, habría de serlo también el sistema Q. Pero como ya sabemos que Q no lo es, se sigue por una sencilla aplicación del *modus tollens* que L tampoco puede serlo (29).

La notación de la teoría elemental de números es la del cálculo de predicados de primer orden con identidad, complementada con las notaciones 'x + y' y 'x · y' para la suma y el producto respectivamente. Las variables individuales x, y, z, etc., son las del tipo ordinario, pero construidas como referentes exclusivamente a los números naturales (30).

Varios problemas seculares, como el famoso de Fermatan resistentes a los más variados ensayos de solución y que son formulables en la notación de la teoría elemental de números, hacen que no sorprenda demasiado la indecibilidad de esta teoría. Por otro lado, conviene resaltar que para esta teoría las relaciones entre completitud y decibilidad son muy distintas a las que median entre ambas propiedades cuando se barajan en el marco de la lógica de predicados de primer orden. De la teoría elemental de números sabemos por el teorema de Gödel que es incompleta. Pero, además, si fuera completa podría hallarse para ella un procedimiento decisorio. Así que puede de nuevo arguirse su incompletitud a partir de su indecibilidad. En cambio de la lógica de predicados de primer orden sabemos por el otro teorema de Gödel que es completa, pero de su completitud no puede inferirse su decibilidad. Esta situación tan dispar «se debe al hecho de que un procedimiento demostrativo completo para la validez no acarrea consigo un procedimiento refutatorio completo de la validez, por que los esquemas no válidos no tienen siempre negaciones válidas. En cambio, un procedimiento completo de demostración de la verdad acarrea necesariamente un procedimiento completo refutatorio (si el sistema incluye la negación) y, por tanto, un procedimiento decisorio» (31).

Para demostrar la imposibilidad de un procedimiento decisorio general para la teoría elemental de números se sirvió Church de su famosa tesis de que «Toda función efectivamente calculable es recursiva general». Aunque esta tesis es más bien una conjetura dado el carácter vago e intuitivo de la noción de «función efectivamente calculable» es coincidente con muchas otras formas de abordar esta temática debidas a Gödel, Turing, Post y Kleene.

En particular: «la tesis de Turing de que toda función que sea naturalmente considerada como computable, es computable en el sentido por él especificado, esto es, computable por una máquina de Turing, es equivalente a la tesis de Church» (32).

No es este el momento de abordar los problemas filosóficos conectados con estas cuestiones, y en particular el de las relaciones entre inteligencia humana e inteligencia artificial (33).

En la introducción al ensayo citado de Turing escribe Garrido: «La tesis de la identidad de la mente con las máquinas no está aún definitivamente demostrada y continua siendo materia de conjeturas. Pero los adversarios de esta tesis han de poner ahora más cuidado que antes al elaborar sus argumentos». Por lo que toda en concreto a la indecibilidad de la lógica de predicados, Garrido termina su libro *Lógica Simbólica* relacionando ese resultado con la existencia de tablas semánticas infinitas y traduciendo un pasaje de Beth en el que éste expone su parecer de que «la mente humana está equipada con operaciones adicionales que van más allá del poder» de una supuesta máquina de buscar contraejemplos (34).

Terminaremos este apartado resaltando el hecho de que, según ha demostrado Tarski, el álgebra elemental de los números reales admite un proceso decisorio; y acompañando este resultado notable con el siguiente comentario de Quine: «La notación de este álgebra elemental es precisamente la misma descrita antes para la teoría elemental de números, con adición y multiplicación (ambas), y con la sola diferencia de que las variables se contruyen ahora como referentes a números reales en general, y no sólo a números naturales. A pesar de la complejidad aparentemente mayor de su tema, el álgebra elemental es completable y decidible mecánicamente, mientras que la teoría elemental de números no lo es» (35).

---

(29) Cfr. TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON.: *o.c.*, 46 y ss. Cfr. W. y M. KNEALE.: *o.c.*, 682-685. Los dos trabajos de CHURCH «An insolvable problem of elementary number theory» y «A note on the Entscheidungs problem», aparecidos en 1936 respectivamente en las revistas *American Journal of Mathematics y Journal of Symbolic logic*, están reimpresos en DAVIS.: *The undecidable*, Nueva York, 1965.

(30) Cfr. QUINE.: *Los métodos de la lógica*, ed. c. 326.

(31) *Ibid.* 328 Cfr. también pp. 260-261. Cfr. también LORENZEN, *Matemática*, Madrid, 1971, 157.

(32) KLEENE, *o.c.*, 340. Toda esta problemática es minuciosamente tratada en esta obra ejemplar. Cfr. también LADRIERE, *Limitaciones internas de los formalismos*, ed. c. Cfr. H. ROGERS.: *Theory of recursive functions and effective computability*, New York, 1967.

(33) Cfr. TURING.: *¿Puede pensar una máquina?* Valencia, 1974. Cfr. A. NEWELL, y H. A. SIMON.: «Simulación del pensamiento humano», *Teorema* IV/3, 1974, 335-377. Cfr. SMART.: *Ent. Ci. y fils*, 230-247; Cfr. entre otras obras: VON NEUMANN. *The computer and the brain*, Yale University Press, 1974. STARKE, P. H. *Abstract automata*, Amsterdam. 1972. FRANK NORMAN.: *Markov Processes and Learning Models*, Now York, 1972.

(34) Cfr. el ensayo de Beth recogido en HINTIKKA (ed.) *ed. c.*, 34.

(35) QUINE, *o.c.*, 330. Sobre el método de eliminación de cuantificadores que utiliza Tarski en sus demostraciones de decibilidad de teorías Cfr. KREISEL y KRIVINE: *Elements de logique matematique*, Paris, 1967, 47-50. Cfr. también LORENZEN, *o.c.* 183 y ss.

El valor de lo imposible. Un análisis del problema de la cuadratura del círculo

Por José BARRIO GUTIERREZ (*)

Las Cícladas son un grupo de islas situadas en el mar Egeo y que están dispuestas en forma de círculo alrededor de una de ellas, la de Delos. De esta disposición se deriva su nombre, ya que el término griego *kyklos* significa *círculo*.

La isla Central, la de Delos, gozó de gran fama en la Antigüedad, entre otras razones y principalmente porque, según la mitología, en ella habían nacido Artemisa y Apolo. El magnífico santuario erigido a este dios fue un lugar de peregrinación para los helenos, especialmente durante la celebración de unas suntuosas fiestas que tuvieron su origen en el siglo VIII a.C. Entre los diversos atributos de Apolo destacaba su capacidad de curar las enfermedades, particularmente la peste, una de las plagas que asolaban periódicamente a la población de Grecia. Y cuenta la leyenda que en cierta ocasión, cuando los habitantes de Delos padecían esta terrible epidemia, fueron a consultar a Apolo con objeto de que les comunicara la manera de eliminar sus padecimientos. La respuesta del dios fue tajante: *la epidemia cesaría en el mismo momento en que consiguieran resolver el problema de la duplicación del cubo utilizando la regla y el compás, para de esta manera poder, a su vez, duplicar el altar de piedra, de forma cúbica, que existía en el templo*. Tal era, según la tradición, el origen de uno de los tres famosos problemas que tanto preocuparon a los matemáticos helenos y a los matemáticos posteriores. Los otros dos fueron la trisección del ángulo mediante la regla y el compás y, el más famoso de todos ellos, el de la cuadratura del círculo también mediante la regla y el compás.

Hoy en día se sabe que los tres problemas, tal como los plantearon los griegos, es decir, usando la regla y el compás, son insolubles. Los dos primeros, porque su resolución exige ecuaciones cúbicas, es decir, de tercer grado, imposibles de plasmar con la regla y el compás. El tercero, porque el número π es un número trascendente. No obstante (y si prescindimos de la broma de mal gusto deparada por el dios Apolo a los ciudadanos de Delos, al condicionar el cese de la epidemia de peste a la resolución de un problema insoluble), el intento de resolver los tres citados problemas no fue en modo alguno estéril. Y, en particular, los denonados esfuerzos de los matemáticos hasta el siglo pasado —en el que, como veremos, se demostró su imposibilidad— por solucionar la cuestión de la cudratura del círculo condujeron a numerosos descubrimientos en el ámbito de la Matemática. De ahí el título que hemos dado a este estudio, *el valor de lo imposible*.

En efecto, la persecución de una tarea imposible de finalizar puede ser, y de hecho lo ha sido, muy fecunda en el ámbito de la Ciencia. Buena prueba de ello son los descubrimientos químicos realizados por los alquimistas en sus intentos de realizar *la pequeña obra (opus minimum*, es decir, la transmutación de los metales no nobles en plata), la gran obra *(opus magnum*, la transmutación de los metales no nobles en oro), el disolvente universal, el elixir de la larga vida o el *golem*. Del mismo modo los imposibles deseos de los astrólogos por llegar a predecir el futuro de las sociedades o de los individuos mediante el análisis de los astros condujeron a fundamentales descubrimientos astronómicos.

Pero no siempre la búsqueda de lo imposible ha sido fecunda. En efecto, y ciñéndonos exclusivamente al campo matemático, podríamos decir que hay dos tipos de imposibles.

Uno de ellos es aquella cuestión imposible que, por su propia naturaleza, implica no sólo su irresolución, sino la infecundidad de la búsqueda de su solución. Tal ha sido, por ejemplo, la concepción mágica y mística de los números, mediante la cual se intentó dominar los fenómenos naturales gracias al conocimiento del *número de las cosas*. Cada cosa, cada fenómeno de la naturaleza, tenía un número, expresivo de su esencia, de tal manera que el conocimiento de dicho número permitiría dominar la cosa o el fenómeno.

Esta concepción mágico-mística del número ha tenido numerosos seguidores; limitándonos a los más famosos hay que destacar a la corriente *acusmática* dentro del pitagorismo, con la divinización del número diez (la *Tetractys)*, en cuanto expresivo de la esencia de la Divinidad, con el carácter de «perfectos» atribuidos a diversos números, tales como el 2 (símbolo de lo femenino), el 3 (símbolo de lo masculino), el 5 (símbolo del matrimonio) o el 6 (símbolo de la procreación); y, todavía más curioso, con la teoría del *novenario*, procedimiento para poder predecir el vencedor en un combate, hallando el número de cada uno de los contrin-

(*) Catedrático de Filosofía del I.N.B. «Ramiro de Maeztu» de Madrid.

cantes y recurriendo a unas tablas confeccionadas por los pitagóricos.

En esta misma línea están situados los cálculos numéricos realizados por la *guemetría* de la *Kabbalah*, que tantos esfuerzos inútiles provocó durante siglos en la mente de los hombres.

Y, en el ámbito de la Geometría, también han surgido numerosas concepciones de índole mágico-mística, que llevaron a teorías carentes de fundamento, no sólo engendradoras de infecundidad en sí mismas, sino que supusieron un grave obstáculo para el progreso científico. Un claro ejemplo de estas teorías radica en la tesis, de origen platónico y sustentada también por Aristóteles, de que el movimiento de los astros tenía que ser circular, dado que el círculo era la figura perfecta en dos dimensiones, y de que la estructura de los mismos tenía que ser esférica, por ser esta el cuerpo más perfecto.

Como muestra del «razonamiento» que inspiraba tales afirmaciones vamos a transcribir un pasaje del *Timeo* de Platón (33 B-34 B):

«Y Dios dio al universo la forma adecuada y natural... Por tanto, lo hizo como al torno, redondo y esférico, con las extremidades a igual distancia del centro en todas las direcciones, la más perfecta de todas las formas y la más semejante a él, pensando que lo semejante era más bello que lo desemejante. Y le dio, en su externa esfericidad, una superficie perfectamente finita y lisa... Le dotó del movimiento que convenía a esta forma corporal, ese movimiento que, entre los siete tipos de movimiento, está más vinculado al entendimiento y a la inteligencia. En consecuencia, le imprimió una rotación circular, al hacerle girar en un mismo lugar sobre sí mismo; y le privó de los seis restantes movimientos (movimientos rectilíneos hacia arriba, hacia abajo, hacia adelante, hacia atrás, hacia la derecha y hacia la izquierda).»

Esta concepción, recogida y defendida por Aristóteles, todavía pesaba en Pappus, matemático del siglo IV d.C., que nos dice en su *Colección matemática* (*Συναγωγη μαθηματιΚη*):

«Afirman los filósofos que el primero de los dioses dio justamente al universo la forma esférica, por ser ésta la más bella de las existentes, y mencionan entre las propiedades de la esfera la de ser la de mayor volumen entre todos los cuerpos de la misma área.»

«Todo lo que afirman pertenecer a la esfera es evidente y apenas necesita demostrarse; pero se limitan a afirmar, sin hacer la demostración, que es de mayor volumen que los otros cuerpos, tesis de la que no es fácil convencerse, a no ser que se someta la cuestión a un riguroso examen.»

La teoría de que los astros tenían que describir órbitas circulares y de que su forma tenía que ser perfectamente esférica —por ser el círculo y la esfera más perfectos que otras figuras o cuerpos— supuso un grave obstáculo al progreso de la Astronomía, como pudieron comprobar por su cuenta Galileo y Kepler.

Pero hay otro tipo de problemas imposibles, los irresolubles por su naturaleza, pero que permiten, al hilo de los intentos por resolverlos, el descubrimiento de nuevos conocimientos matemáticos. Indudablemente esto se debe a que se trata de cuestiones de índole científica (no mágico-mística) que no pueden ser resueltas por alguna deficiencia en su planteamiento, pero que permiten, al estar insertas dentro del *status* científico, la develación de nuevos teoremas a lo largo del trabajoso esfuerzo por hallarles solución.

Un caso típico de este género de problemas insolubles es el de la cuadratura del círculo (junto con los otros dos de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo).

La primera noticia que tenemos sobre el problema de la cudratura del círculo la encontramos en el famoso *papiro Rhind;* se trata de un papiro encontrado por unos árabes entre las ruinas de unas pequeñas construcciones próximas al *Rameseum* y adquirido por A. H. Rhind en 1858; es el documento capital que poseemos para el conocimiento de la Matemática egipcia, superior a los papiros de Moscú y de Berlín; E. Peet lo ha dividido en una introducción y tres libros, siendo en el segundo donde encontramos el planteamiento del problema de la cuadratura del círculo en estos términos: «construir un cuadrado equivalente a un círculo dado»; la solución dada por los egipcios es de una alta precisión, habida cuenta del momento histórico en que se formuló; en efecto, los matemáticos egipcios se dieron cuenta de que el problema consistía en hallar el valor de π y encontraron el de $\pi = 3{,}1604938$.

Pero el problema va a adquirir un relieve fundamental entre los matemáticos griegos, que llegaron a estar obsesionados por el mismo, hasta el punto que Aristófanes, en *Los pájaros*, lo hará objeto de su implacable ironía.

Formulemos con precisión el problema tal como se lo plantearon los matemáticos griegos: *dado un círculo cualquiera, hallar un cuadrado de la misma área, mediante la regla y el compás y a través de un número finito de pasos.*

El problema, así planteado, es insoluble, precisamente por la limitación de tener que utilizar la regla y el compás; esta limitación se debió al carácter de *divinos* que tales instrumentos tuvieron para los griegos, divinidad que fue sancionada por la autoridad de Platón y de Aristóteles. Con fina ironía Marcel Boll ha señalado que más divina que el compás es la cuerda, ya que con ella se puede realizar todo lo que se puede hacer con el primero y, además, construir con suma facilidad la elipse mediante el llamado «método del jardinero».

En cualquier caso las investigaciones de los matemáticos al hilo de este insoluble problema dieron lugar a importantes descubrimientos, de manera análoga a como el intento de resolver la duplicación del cubo llevaría, por citar un ejemplo, a Diocles, en el siglo II a.C., al descubrimiento de la *cisoide*, cuya ecuación en coordenadas rectangulares es $y^2(2a - x) = x^3$.

El primer intento serio que hubo entre los griegos para la resolución del problema se debe a un curioso personaje, Hipócrates de Quíos (distinto de Hipócrates de Cos, el famosísimo médico heleno); nos encontramos ante un comerciante poco afortunado en sus negocios, pero que supo conjugar su desafortunada actividad mercantil con una excelente capacidad matemática; y fue él quien, en la segunda mitad del siglo V a.C., abordó el problema de la cuadratura del círculo, intentando resolverlo mediante la cuadratura de las *lúnulas;* en efecto, ambos problemas parecen estar íntimamente relacionados, en cuanto que las lúnulas son superficies limitadas por arcos de circunferencia; en la actualidad sabemos que sólo hay cinco especies de lúnulas que sean cuadrables, de cuyas especies

Hipócrates llegó a conseguir la cuadratura de tres; no obstante, cuando se descubrió que había lúnulas no cuadrables, se abandonó este esperanzador método de llegar a la cuadratura del círculo.
Como muestra del procedimiento seguido por Hipócrates veamos cómo consiguió la cuadratura de su primera lúnula. Demostró que la lúnula limitada por el arco AFC y por la semicircunferencia AEC, cuyo diámetro es la cuerda AC del citado arco, es equivalente al triángulo rectángulo ADC, constituido por la cuerda AC y por los radios correspondientes a sus extremos (fig. 1).

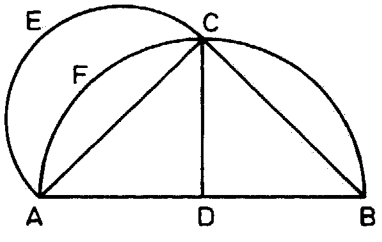


Fig. 1

La idea directriz de Hipócrates era la de llegar a la cuadratura del círculo mediante la sucesiva cuadratura de lúnulas, idea que, como antes hemos dicho, se vino abajo al descubrirse que había lúnulas no cuadrables.
El paso siguiente lo dio, al parecer, un ilustre pensador, Anaxágoras de Clazomene, también del siglo V a.C., pero no sabemos qué método siguió en su intento de resolución.
Con Antifón de Atenas, un pensador perteneciente a la escuela sofística, se va a iniciar un nuevo camino en la solución de la cuadratura del círculo; es una buena prueba, junto con el caso de Hippias de Elis, que veremos después, de cómo a los sofistas no les preocupó exclusivamente el tema antropológico, según se ha dicho reiteradamente, sino que también se interesaron por las hoy llamadas ciencias formales. El procedimiento ideado por Antifón era el de inscribir sucesivamente en una circunferencia polígonos regulares de 4.2n lados, partiendo del cuadrado, y pensando que llegaría un momento en el que, al ser *n* muy elevado, la superficie del polígono inscrito sería igual a la del círculo. Naturalmente que, al carecer de la noción de límite, Antifón incurre en un grave error, pero con este método de la inscripción de sucesivos polígonos iniciaría un camino fecundo, que luego sería continuado por numerosos matemáticos helenos. Por ello nos parece inadecuada la observación de Aristóteles, quien en su *Física* nos dice que se trata de un método grosero y que *no es preciso repetir*. De hecho en la concepción del sofista se hallan implícitos temas tan interesantes como el del infinito, el de la paradoja de Aquiles y la tortuga de Zenón de Elea, y el de los números irracionales, temática esta última a la que era muy sensible el pensamiento matemático y filosófico griego desde que los pitagóricos, quizá Hipasos de Metaponte, habían descubierto el primer número irracional, $\sqrt{2}$, con lo que la tesis de la escuela fundada por Pitágoras, según la cual los números racionales eran la esencia de las cosas y permitían una descripción de los fenómenos naturales, quedaba invalidada. Por cierto que la demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional, llegada a nosotros gracias a Aristóteles, es una bellísima aplicación de demostración indirecta, apagógica o por reducción al absurdo.
A finales del siglo V a.C., Brisón de Heraclea da un paso de gran importancia en el camino iniciado por Antifón, al tomar en consideración no sólo los polígonos inscritos, sino también los circunscritos; de nuevo Aristóteles critica el procedimiento seguido por Brisón, acusándolo de tener poco rigor; lo cual es posible que fuera cierto tal como lo utilizó el heracleense, pero que también sin duda alguna introducía en el tratamiento del problema un nuevo aspecto de gran interés.
En el siglo IV a.C., Dinóstratos va a utilizar un procedimiento distinto; intentará resolver la cuadratura del círculo utilizando una curva que había sido descubierta por un sofista, Hippias de Elis, al intentar solucionar la trisección del ángulo, curva a la que el propio Dinóstratos llamó *tetragonidsóusa*, o sea, *cuadratriz*, en cuanto que la usó para *cuadrar* el círculo. La construcción de esta curva hecha por Hippias, curva cuya ecuación es $x = y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2a}$, fue la siguiente:

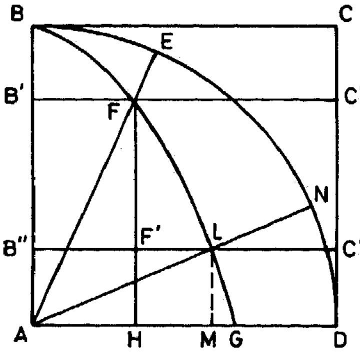


Fig. 2

La cuadratriz, es decir, la curva BFLG es el lugar de las sucesivas intersecciones de la recta BA que gira uniformemente sobre el punto A hasta llegar a la posición DA, y de la recta BC, que se desplaza uniforme y paralelamente hasta llegar a la posición AD (para obtener la trisecación del ángulo Hippias señalaba que era suficiente hallar el segmento LM, igual a $\frac{\overline{FH}}{3}$ y el ángulo $\widehat{LAD}$, igual al $\frac{\widehat{FAD}}{3}$ (fig. 2).

El camino emprendido por Hipócrates de Quios va a ser nuevamente utilizado por otro gran matemático griego, Eudemos de Rodas, cuyo *acmé* tuvo lugar hacia el 320 a.C. Discípulo de Aristóteles, escribirá una *Historia de la Geometría*, en la que recopilará todos los conocimientos que sobre esta ciencia había en su época, y que puede considerarse, *mutatis mutandis*, como un prolegómenos a los *Elementos* de Euclides. Esta obra se ha perdido, pero conservamos algunos fragmentos reproducidos por Simplicio, aristotélico del siglo VI d.C., entre los que destacan, por su relación con el tema que nos ocupa, el referente a la cuadratura de las lúnulas. Vamos a transcribir literalmente el texto conservado, ya que pone de manifiesto el alto grado de sistematización a que se había llegado en la exposición de los problemas matemáticos:

«1. Por lo que se refiere a la cuadratura de las lúnulas, figuras extraordinarias por su relación con el círculo, el primero que las describió fue Hipócrates, estudiándolas de manera satisfactoria. También lo vamos a hacer nosotros.

2. Hipócrates comenzó afirmando, como proposición inicial de utilidad para estas cuadraturas, que los segmentos semejantes de círculo son entre sí como sus bases en potencia (segmentos semejantes son los que tienen como área la misma parte alícuota de círculo; base en potencia es el cuadrado de la base).

3. Y demostró esta proposición basándose en una demostración anteriormente hecha, referente a que los círculos son entre sí como sus diámetros en potencia.

4. Sobre la base de esta demostración, determinó la manera de cuadrar una lúnula cuyo arco exterior es un semicírculo (fig. 3).

5. Para ello circunscribió un semicírculo en un triángulo rectángulo isósceles, describiendo sobre la hipotenusa un segmento de círculo semejante a los descritos sobre los catetos.

6. Ahora bien, al ser el segmento descrito sobre la base igual a la suma de los descritos sobre los catetos, si se añade a aquél y a éstos la parte de triángulo que está por encima del segmento descrito sobre la hipotenusa, la lúnula será igual al triángulo.

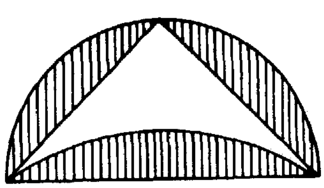


Fig. 3

7. Por lo que, al quedar demostrado que la lúnula es igual al triángulo, entonces es cuadrable.

8. Si el arco exterior de la lúnula es un semicírculo, entonces siempre es cuadrable con facilidad.

9. A continuación supone que el arco exterior de la lúnula es mayor que un semicírculo. Y construye un trapecio en el que tres de sus lados son iguales entre sí y el mayor de los lados paralelos es triple en potencia respecto de cada uno de los otros tres lados. Circunscribe un círculo a este trapecio y construye sobre su lado mayor un segmento semejante a los separados por los tres lados del trapecio que son iguales (fig. 4).

10. Es manifiesto que el segmento correspondiente al exterior de la lúnula es mayor que el semicírculo, si trazamos una diagonal del trapecio.

11. Dado que esta diagonal subtiende dos lados iguales del trapecio y su potencia es necesariamente mayor que el doble del tercero de los lados que son iguales.

12. En consecuencia, el mayor de los lados del trapecio, que es triple en potencia, es necesariamente mayor en potencia que la suma de la diagonal y del tercer lado con los que forma un triángulo.

13. El ángulo que en el triángulo antes citado se opone al lado mayor del trapecio tiene que ser agudo.

14. Por tanto, el segmento en el que está inscrito este ángulo, que es el arco exterior de la lúnula, es mayor que un semicírculo.

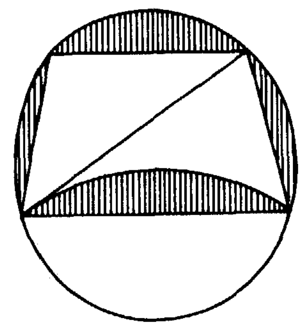


Fig. 4

(es interesante destacar que Eudemo deja sin terminar la demostración de la cuadratura de este tipo de lúnulas. La opinión más generalizada es la de que no lo hizo por considerar que lo que quedaba de la demostración era trivial, como efectivamente puede verse que lo es. No obstante, revela la carencia de espíritu crítico y científico que en estos tiempos se tenía, confiándose demasiado "en lo evidente y en lo intuitivo". Mas, en descargo de los matemáticos griegos, hemos de señalar que la desconfianza hacia lo evidente e intuitivo sólo surgirá en el siglo XIX, con la crisis en los fundamentos de la Matemática y, en concreto, con los intentos por aritmetizar el Análisis).

15. Si el arco exterior de la lúnula es menor que un semicírculo, entonces para cuadrarla realiza la siguiente construcción (fig. 5).

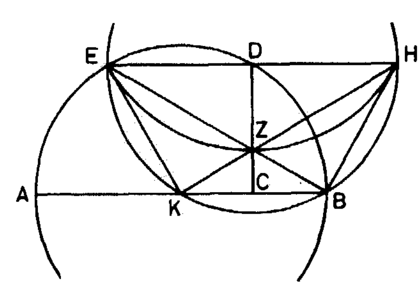


Fig. 5

16. Tracemos un círculo de diámetro AB y de centro K, y tracemos el segmento CD perpendicular al segmento KB en su punto medio.

17. Se inscribe entre esta perpendicular y la circunferencia la recta EZ, en dirección hacia B e igual a en potencia a vez y media el radio del círculo.

18. Tracemos el segmento rectilíneo EH, paralelo al diámetro AB unamos K con E y Z; prolongamos al segmento KZ hasta su intersección con el segmen-

to EH en el punto H; a continuación trazamos los segmentos BZ y BH.

19. Es evidente que el segmento BZ es la prolongación del segmento EZ, y que el segmento BH es igual al EK.

20. Por tanto, el trapecio EKBH es inscribible en el círculo primeramente trazado.

21. Tracemos el segmento circunscrito al triángulo ZEH.

22. Entonces la lúnula formada será igual al pentágono EKBHZ, constituido por los triángulos EKZ, KZB y ZBH.

23. Efectivamente, la suma de los segmentos interiores a la lúnula y separados de la figura rectilínea por los segmentos EZ y ZH es igual a la suma de los segmentos exteriores a tal figura, dado que cada uno de los interiores es igual a vez y media cada uno de los exteriores.

24. Ahora bien, la lúnula es igual a la suma de los tres segmentos exteriores y de la parte de figura rectilínea exterior a los dos segmentos interiores o, si se prefiere, la figura rectilínea es igual a la lúnula aumentada en los dos segmentos interiores y disminuida en los tres exteriores, por lo que la lúnula es igual a la figura rectilínea, dado que la suma de los dos segmentos interiores es igual a la de los tres exteriores.

25. Se demuestra que el arco exterior de esta lúnula es menor que un semicírculo, dado que el ángulo inscrito en el segmento es obtuso.

26. Demostración que se realiza de esta forma; el segmento EZ es igual en potencia a vez y media el radio, y el radio KB es mayor en potencia que el doble del segmento BZ.

27. Por tanto, también EK será de una longitud mayor que el doble de BZ, o sea, de KZ.

28. E igualmente sucederá con sus potencias, de lo que se deduce que EK es en potencia mayor que el doble de KZ.

29. Pero EZ es igual en potencia a vez y media EK, por lo que EZ es en potencia mayor que la suma de las de EK y KZ.

30. Por tanto, el ángulo en K es obtuso, y el segmento en el que está inscrito es menor que un semicírculo.

A continuación Eudemos expone la manera de cuadrar la suma de una lúnula y de un círculo, pero en esta demostración incurre en un error, ya que el tipo de lúnula que considera no es cuadrable.

En cualquier caso es muy interesante destacar cómo el intento de conseguir la cuadratura del círculo había llevado a los geómetras griegos al descubrimiento de interesantes relaciones de naturaleza geométrica, poniendo de relieve el alto grado de nivel abstracto a que se había llegado. Está claro que fue con ellos con los que la Geometría dejó de ser pura agrimensura, tal como había sucedido con los egipcios, para iniciar su camino a más elevadas cotas.

En Euclides, uno de los grandes pilares de la matemática griega no encontramos ninguna aportación sobre el problema que nos interesa. Sus *Elementos* (Στοιχεῖα) uno de los monumentos más grandiosos que nos ha legado la Antigüedad y que hasta finales del siglo XVIII fue la obra de mayor tirada, exceptuada la Biblia, no abordan este problema, la razón es sencilla.

Euclides es un compilador y sistematizador de los conocimientos de su época (en realidad, fue el creador de una axiomática de la Geometría que sólo fue superada en nuestro siglo por David Hilbert), por lo que no trató de un problema que hasta entonces no había sido resuelto.

De hecho, Euclides sólo trata aquellos problemas geométricos resolubles con regla y compás, es decir, que requieren únicamente ecuaciones lineales y cuadráticas; esta actitud excluía *ipso facto* el tema de la cuadratura del círculo, como hoy bien sabemos.

Una etapa decisiva se va a abrir con el mayor genio matemático que nos legó la cultura greco-romana; nos referimos a Arquímedes de Siracusa. Con él la Matemática griega alcanzó un nivel jamás igualado en la Antigüedad (como muestra indicaremos que en el método de *exhaustiones* del siracusano hay un claro precedente —en pleno siglo III a.C.— del cálculo infinitesimal); por otra parte, Arquímedes es un evidente ejemplo del espíritu científico y de despreocupación por el negocio; pariente de Hierón II, tirano de Siracusa desde 269 al 215, no ejerció ningún cargo político, cosa que le hubiera sido fácil (en esto recuerda la actitud de otro ilustre científico, Einstein, que en 1952 rechazó la oferta de la presidencia del Estado de Israel, hecha a la muerte del que fuera primer presidente, el gran químico Chaim Weitzmann).

Nacido en el 287, su vida fue un constante descubrimiento en los más diversos campos de la ciencia; la Matemática, la Física, la Ingeniería son tributarias de este hombre extraordinario. Su misma muerte, acaecida en el 212 y relatada por Plutarco, tiene mucho de grandioso, poniendo de relieve la total entrega de su espíritu ante la resolución de los problemas matemáticos, entrega que le hizo desatender los urgentes problemas vitales a los que hubiera tenido que enfrentarse.

Entre la riquísima producción de Arquímedes interesa especialmente para nuestro tema el breve tratado titulado *Medida del círculo* (Κύκλου μέτρησις) que consta de sólo tres proposiciones, pero de trascendental importancia. En realidad parece que este tratadito era el resumen de una obra más extensa, *Sobre la periferia del círculo* (περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας),de la que tenemos referencia en Pappus, matemático alejandrino del siglo IV d.C.

En este breve estudio Arquímedes va a realizar una triple tarea de trascendental importancia:

1) Establecer la relación entre la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia.
2) Dar una solución muy precisa de la cuadratura del círculo.

De las tres proposiciones que integran el tratado sobre la medida del círculo vamos a estudiar detenidamente la primera de ellas, limitándonos a formular las dos últimas.

La primera, en la que relaciona la cuadratura del círculo con la rectificación de la circunferencia, dice así:

El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos sea igual al radio y el otro a la longitud de la circunferencia del círculo (fig. 6).

El método que sigue Arquímedes para demostrar esta proposición consiste en hacer ver que el área del círculo no puede ser mayor ni menor que la del triángulo y que, por tanto, tiene que ser igual.

La demostración de que el área del círculo no puede ser mayor que la del triángulo la realiza de esta forma. Tracemos un círculo y consideremos un triángulo T con las características establecidas en la anterior proposición.

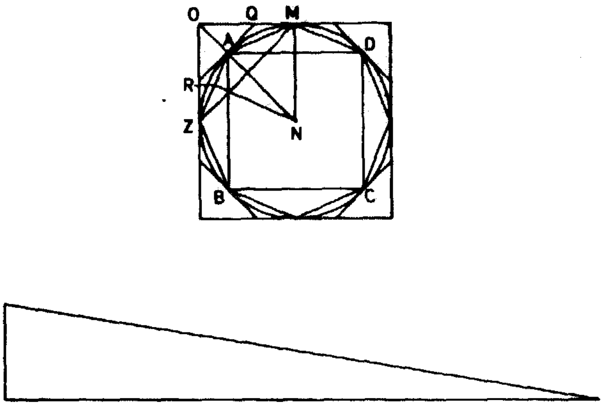


Fig. 6

Supongamos que el área del círculo es mayor que la de T. Inscribimos en el círculo el cuadrado ABCD y procedamos a dividir los arcos en dos partes iguales hasta que llegue un momento en el que la suma de los segmentos resultantes sea menor que la superficie en la que el círculo excede al triángulo; entonces tendremos una figura rectilínea mayor que el triángulo. Ahora trazamos desde el centro N del círculo el segmento NR, perpendicular a AZ; NR es menor que cualquiera de los catetos del triángulo T; es menor que el cateto menor de T, ya que éste es el radio, y evidentemente NR es menor que NA; y con mayor razón NR es menor que la longitud de la circunferencia, que es el otro cateto. Por tanto, la figura rectilínea resulta menor que el triángulo, y esto es contradictorio con lo antes establecido (como puede verse, Arquímedes aplica aquí el método de la demostración *per reductionem ad absurdum*, tan cara a los griegos).

Supongamos ahora que el área del círculo es menor que la de T. Circunscribimos un cuadrado al círculo. Dividimos los arcos en partes iguales y trazamos tangentes por los puntos de división. Dado que el ángulo OAQ es recto, el segmento OQ es mayor que el AQ. Como AQ es igual a QM, tenemos que OQ es mayor que QM. En consecuencia el triángulo POQ es mayor que la mitad de la figura OZAM, y la suma de los segmentos restantes menor que el exceso del triángulo sobre el círculo; de lo que se infiere que la figura rectilínea será de un área menor que la del triángulo. Pero esto es imposible, ya que tal figura rectilínea es mayor que la del triángulo, por ser NA igual a la altura del triángulo y el contorno de la figura mayor que la base de éste.

Por tanto, si el área del círculo no puede ser mayor ni menor que la del triángulo T, entonces tendrá que ser igual.

Desde un punto de vista lógico es de destacar que Arquímedes utiliza para la demostración anterior un silogismo disyuntivo, en la forma *tollendo ponens*, y en el que la primera proposición o premisa mayor es una disyuntiva exclusiva con tres alternativas:

El área del círculo o es mayor que T, o es menor que T, o es igual a T.

El área no es mayor que T.

El área no es menor que T.

Luego, el área es igual a T.

En símbolos:

$$\underline{p} \veebar q \veebar r$$
$$\underline{p}$$
$$q$$
$$\vdash r$$

Se trata de una forma de razonamiento no raro, pero tampoco excesivamente utilizada por los matemáticos.

La segunda de las proposiciones formuladas por Arquímedes en la *Medida del círculo* dice así:

«La razón de un círculo al cuadrado de su diámetro es aproximadamente la de 11 a 14».

La tercera proposición es la siguiente:

«La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro y a una parte de este menor que la séptima y mayor que diez setenta y un avos del diámetro».

De esta última proposición, cuya demostración es muy laboriosa, se deduce el valor que Arquímedes estableció para π:

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{10}{70}$$

El método seguido por Arquémedes fue el de inscribir y circunscribir polígonos a la circunferencia, método que, como hemos visto, había sido iniciado en Grecia por Antifón y Brisón, pero que ya había sido manejado anteriormente por los babilonios y los egipcios.

El procedimiento consiste en inscribir en una circunferencia de un metro de diámetro un triángulo equilátero, hallándose su perímetro; después se construye el exágono, luego el dodecágono, y así sucesivamente, duplicando indefinidamente el número de lados del polígono; en el límite se obtiene el número π.

Por este procedimiento los babilonios y los hebreos establecieron que la longitud de la circunferencia era la de tres veces la longitud de su diámetro. Los egipcios hallaron para π el valor de 3,1623.... Arquímedes llegó mucho más lejos, hasta el polígono de 96 lados, con lo que nos dio el valor de π antes indicado.

Siguiendo este camino se han alcanzado cada vez valores más aproximados de π, como el de los matemáticos hindúes, que en el siglo VI obtuvieron el de 3,1416018, gracias a la utilización del polígono de 768 lados.

Los dos últimos pasos por este camino los dieron Vieta, en 1593, que utilizó el polígono de 393.216 lados, hallando un valor de π exacto hasta la once cifra decimal: 3,14159265358. Poco después, en 1596, Rudolf van Ceulen halló el valor de π con 35 decimales exactos: 3,14159265358979323846264338327950288.

A partir de 1706 el procedimiento seguido para hallar cada vez valores más precisos se basó en la totalización de las series, habiéndose llegado ya en 1873 a conocer π con 809 decimales. En la actualidad, y gracias a los ordenadores electrónicos, se pueden calcular todas las cifras decimales que se deseen sin ningún esfuerzo.

Como curiosidad exponemos a continuación la tabla que permite ir hallandq valores cada vez más aproximados de π mediante la inscripción y circunscripción de polígonos.

Número de lados del polígono	Perímetro de los polígonos inscritos	Perímetro de los polígonos circunscritos	Valor medio
3	2,5980762	5,1961524	3,8971143
6	3,0000000	3,4641016	3,2320508
12	3,1058265	3,2151900	3,1606082
24	3,1326325	3,1596673	3,1461499
48	3,1393546	3,1460919	3,1427232
96	3,1410369	3,1427201	3,1418785
192	3,1414569	3,1418776	3,1416672
384	3,1415625	3,1416675	3,1416150
768	3,1415833	3,1416153	3,1416018

En cuanto a la historia moderna de los intentos por conseguir la cuadratura del círculo mediante la regla y el compás pudiéramos decir que ha sido como una especie de epidemia, constituyendo los «cuadradores» un conjunto de hombres, en su mayoría inexpertos en los más elementales conocimientos geométricos, que en sus pretendidas soluciones a la cuadratura ponen de manifiesto los más absurdos, sofismas, mantenidos con una fabulosa arrogancia.

Arago llegó a afirmar que la cuadratura del círculo era como una especie de enfermedad que se producía, especialmente, durante la primavera. No obstante ha habido algunos intentos de gran interés, realizados por matemáticos de alta calidad, como el realizado por Specht, en 1836, quien en su elegante construcción usa un valor de π exacto hasta la quinta cifra decimal (en efecto, dio para π el valor de 3,1415919, siendo el verdadero 3,1415927), y calculando el lado del cuadrado equivalente al círculo en 0,8862268, cuyas seis primeras cifras son exactas.

El procedimiento de construcción seguido por Specht fue el siguiente:

1) Se construye una circunferencia de un metro de diámetro. En el extremo izquierdo del diámetro se levanta una tangente vertical, en la que se toman sucesivamente y a partir del punto de tangencia las longitudes de 1 metro, 10 centímetros y 20 centímetros (Fig. 7).

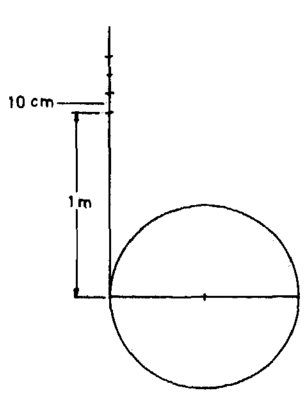


Fig. 7

2) Se une el punto 1,10 m. con el centro del círculo, y a continuación se lleva la longitud del segmento resultante sobre el diámetro del círculo (Fig. 8).

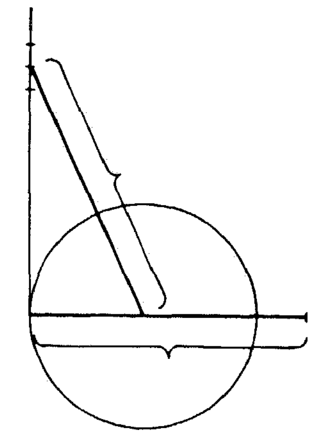


Fig. 8

3) Se une el punto 1,30 m. con el centro del círculo; a continuación y desde el extremo final del segmento de longitud 1,10 m. que, según el anterior apartado, se ha llevado sobre el diámetro del círculo, se traza una paralela al segmento resultante de la operación antes indicada, es decir, de unir el punto 1,30 m., con el centro del círculo; el valor de la longitud del segmento que está paralela determina sobre la tangente vertical es de 3,1415919 (recordemos que π vale 3,1415927) (Fig. 9).

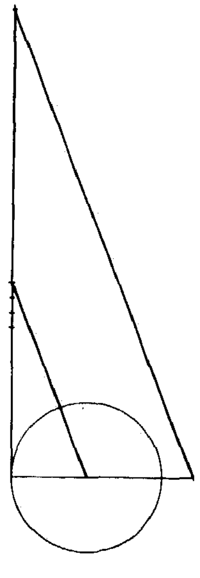


Fig. 9

4) A partir del extremo inicial de la tangente vertical (es decir, desde el punto de tangencia) se construye hacia abajo un segmento de 25 cm., trazándose a continuación una semicircunferencia, cuyo diámetro será de 3.3915919 m.; después se prolongan el diámetro de la circunferencia inicial hasta hallar el punto de intersección con la anterior semicircunferencia. El lado del cuadrado buscado es el segmento comprendido entre el punto de intersección y el punto de tangencia. Es decir, que las dos superficies en negro de la

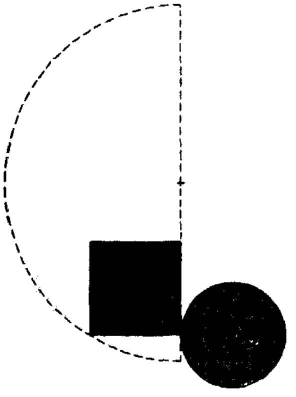


Fig. 10

figura son muy aproximadamente iguales (Fig. 10).

Con el procedimiento de construcción hallado por Specht, y dada la altísima aproximación con que halló el lado del cuadrado, puede decirse que, desde un punto de vista práctico y aproximativo, el problema de la cuadratura del círculo está ya resuelto.

Desde un punto de vista teórico también fue demostrado en el siglo pasado, y más concretamente en 1882, que una construcción exacta de la cuadratura del círculo es imposible. Esta demostración fue realizada por Ferdinand Lindemann, partiendo de que el problema de la cuadratura del círculo se reducía al problema de hallar el valor de π, valor que puede hallarse a partir de la famosa fórmula de Euler $e^{i\pi} = 1$; por tanto, había que determinar el valor de e base de los logaritmos neperianos y que puede definirse de las siguientes maneras: 1) como la suma de la serie convergente

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots;$$

2) como un límite $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 3) mediante una integral $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$; ahora bien, en 1873 Charles Hermite y en 1882 Ferdinand Lindemann con mayor generalidad demostraron que e y, por tanto, necesariamente π son números trascendentes, es decir, que no pueden ser raíces de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales; de esta manera quedó demostrada la imposibilidad de una construcción geométrica exacta de la cuadratura del círculo.

La demostración de la trascendencia de e realizada por Lindemann era muy compleja, pero en 1893 David Hilbert llevó a cabo una demostración mucho más sencilla, que exponemos a continuación.

Hilbert parte del teorema de Hermite, según el cual es imposible una ecuación de la forma

$$(1) \quad a + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0,$$
siendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ enteros

Supongamos que se sustituyen las cantidades $1, e, e^2, \dots, e^n$, para las que (1) es homogénea, por cantidades que les sean proporcionales

$$l_0 + \varepsilon_0, \; l_1 + \varepsilon_1, \; l_2 + \varepsilon_2, \dots, l_n + \varepsilon_n$$

estando cada una de ellas constituida por un entero l y por una fracción ε. La ecuación (1) queda transformada en:

$$(2) \quad (al_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n) + (a\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n) = 0$$

Ahora se trata de demostrar que los enteros y las fracciones ε pueden ser escogidos de tal manera que el primer paréntesis de (2), que es lógicamente entero, sea distinto de cero, y que el segundo paréntesis de (2) sea una fracción propiamente dicha, ya que, en ese caso, quedaría demostrada la imposibilidad de (1), puesto que la suma de un entero y de una fracción propia no puede ser igual a cero.

A tales efectos se introduce una integral definida, en la que ρ representa un entero

$$J = \int_0^\infty z\rho[(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z}\,dz$$

Multiplicando cada uno de los términos de (1) por J y dividiendo por $\rho!$ (1) toma la forma

$$(3) \qquad P_1 + P_2 = 0$$

siendo

$$P_1 = a\frac{\int_0^\infty}{\rho!} + a_1 e\frac{\int_1^\infty}{\rho!} + \dots + a_n e^n \frac{\int_n^\infty}{\rho!}$$

$$P_2 = a_1 e\frac{\int_0^1}{\rho!} + a_2 e^2\frac{\int_0^2}{\rho!} + \dots + a_n e^n \frac{\int_0^n}{\rho!}$$

Ahora bien (1) se transformará en (2) si se demuestra que los $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ de P_1 son enteros y que ρ puede ser tal que P_1 sea distinto de cero y P_2 tan pequeño como se quiera.

Pero, gracias a la integral

$$\int_0^\infty z\rho e^{-z}\,dz = \rho!$$

J es un entero divisible por $\rho!$

A su vez, sustituyendo $z = z' + 1$, $z = z' + 2$, ..., $z = z' + n$ tenemos que

$$e\int_1^\infty \;, \quad e^2\int_2^\infty \;, \quad \dots \;, \quad e^n\int_n^\infty$$

son enteros divisibles por

$$(\rho + 1)!$$

De donde se sigue que P_1 es un entero de la forma

$$P_1 \equiv a(n!)^{\rho+1} \qquad [\text{mód}(\rho + 1)]$$

Y eligiendo ρ de tal manera que el segundo miembro de la anterior congruencia no sea divisible por $\rho + 1$, tendremos que P_1 será distinto de cero.

Por otra parte, para que P_2 sea tan pequeño como se quiera, basta con dar a ρ un valor suficientemente grande, lo cual es compatible con el hecho de que J no sea divisible por $\rho + 1$, ya que las integrales pueden ser sustituidas por potencias de constantes de exponente ρ (teorema de la media), siendo el crecimiento de una potencia, cuando los valores de ρ son lo suficientemente elevados, siempre inferior al de la factorial del denominador.

Por último, y para terminar, sólo indicaremos que, pese a haber sido demostrado la imposibilidad de una construcción exacta de la cuadratura del círculo con regla y compás, todavía se reciben en las Academias de Ciencias de los diversos países soluciones «exactas» al citado problema.

El hombre, ha dicho el sociólogo alemán Alfredo Vierkandt, es un animal crédulo. Y también un animal ingenuo, podría haber añadido.

La hora de la matemática recreativa en el Bachillerato actual

Por Antonio Luis RODRIGUEZ LOPEZ-CAÑIZARES (*)

EL DESECANTO

Vivimos ciertamente en una época de desencanto. Profesores y alumnos padecen este mal por doquier y unos a otros se contagian inexplicablemente. Por otro lado, y entre otras cosas, la falta de estímulos prácticos en los planos docente y discente (ausencia de cursos suficientes de perfeccionamiento del profesorado, desaparición de las «reválidas» ...) crean el clima propicio para esa atonía que se observa, empobrecedora del entusiasmo, que poco a poco va minando las cualidades imprescindibles para entregarse sin reservas al ejercicio intelectual más apasionante, gratificante y noble de todos los que el hombre conoce: enseñar y aprender. («Enseñar y aprender es todo uno» decía acertadamente Fray Luis de León).

En este entorno agresivo a la trasmisión de conocimientos. (Lleno de ruidos —como dirían los especialistas en comunicación— con un emisor y un receptor en muchos casos condenados, a pesar suyo, a permanecer en sus respectivos «roles» y para colmo utilizando un código que se emplea frecuentemente sin la existencia de un decodificador) no parece ocioso el que prentendamos hacer una modesta apología de las matemáticas recreativas. Pues haciendo la matemática (-s) recreativa (-s) (*) (i. e. volviendo a crearlas: aprendiéndolas y enseñándolas), se experimentará un gozo espiritual un «recreo» que ayudará muy positivamente a romper el círculo de tedio que existe en algunas aulas que como en tantos otros ambientes que actúan por «obligado cumplimiento» no han sabido encontrar un recurso mágico que les saque de ese estado de postergamiento y les evite llegar a otros niveles más violentos y peligrosos que marcan las distintas fases pasivas de una convivencia viciada.

Los textos de matemáticas recreativas (o las inclusiones de asuntos o tratamientos propios de la matemática recreativa en los cursos ordinarios) son tónicos excelentes que entendemos ayudan al alumnado a «seguir adelante» en el sentido que más adelante explicaremos.

¿QUE ES LA MATEMATICA RECREATIVA?

Según el diccionario matemático de F. Vera publicado por Kapelusz es una «colección de problemas generalmente enunciados en forma de acertijos casi todos los cuales se resuelven por medio del análisis indeterminado», aserto que no tiene desperdicio y que sacamos a colación como excusa al no haber podido llegar a una definición absolutamente precisa y satisfactoria como más adelante el lector comprobará.

El adjetivo «recreativa» colocado detrás del nombre matemática puede parecer a algunos innecesario por redundante y a otros inadecuado por considerar contradictorio con el nombre al que acompaña. Entre estas dos posturas extremas como siempre está lo razonable pero ¿dejaremos a cada sujeto que juzgue qué presentación y qué medios utilizados son los adecuados para calificar de recreativos a un cierto contenido matemático? ¿Son más recreativos los «Elements de Mathematique» de Bourbaki (una vez suprimidas las curvas peligrosas) que la canción el «teorema de Thales» del grupo argentino LES LUTHIERS? (Formado por desertores de la ciencia y buenos músicos.) Ciertamente hay que reconocer de entrada que con las Matemáticas recreativas sucede algo parecido a lo que pasa con las Matemáticas elementales. Pues los calificativos dan pie a la subjetividad y así por citar un ejemplo habría dos respuestas posibles a la pregunta de si las categorías y funtores pertenecen o no a la Matemática elemental (los que digan que si —como Hilton— pensarán que al ser una herramienta básica en la Matemática de hoy es un instrumento para ser utilizado en un aprendizaje temprano de las matemáticas y por consiguiente calificables muy justamente de elementales, los que digan que no pensarán en el alto grado de abstracción y de sintetización que la teoría citada conlleva y confesarán como G. Papy estar menos familiarizados con la teoría de las categorías que sus propios discípulos (coloquio internacional sobre modernización de la enseñanza matemática en los países europeos patrocinado por la U.N.E.S.C.O. y celebrado en Bucarest en 1968).

Parece razonable admitir que entre dos interlocutores es difícil ponerse de acuerdo sobre lo recreativo ¡no digamos ya en el conjunto de todos los usuarios de la matemática! Sin embargo, existen ciertas características que los libros de matemática recreativa tienen y son a saber:

1) La falta de conexión de unos temas con otros; que facilita una lectura «a trozos».

(*) Catedrático de Matemáticas e inspector de Enseñanza Media.

(*) En lo sucesivo utilizaremos indistintamente los términos Matemática y Matemáticas como si fueran sinónimos.

2) Resultados chocantes con la intuición ordinaria del lector al que van dirigidos.
3) El rigor suavizado en el trtamiento del contenido. En muchas ocasiones con detrimento de la brevedad normal al no utilizar, por ejemplo los símbolos usuales.
4) Suposición de escasa base matemática en el lector lo que asegura una amplia divulgación del libro.
5) Posibilidad de qie al lector le baste una lectura sin papel y lápiz para enterarse del contenido. (Se pide con frecuencia otro material: lápices de colores, tijeras, láminas de caucho o hasta un pastel).
6) Títulos muy llamativos (Bailemos con las matemáticas).
7) Aparición notable de referencias históricas.

Un texto con al menos cuatro de las características anteriores se le puede llamar en nuestra opinión recreativo.

Un curso ordinario es una excursión —como decía Rey Pastor en un memorable prólogo— y tal excursión está condicionada en muchos casos de antemano por la «guía de campo» que es el texto (real o inexistente). Es conveniente que el profesor de matemáticas de al menos 1.° y 2.° de Bachillerato tenga «in mentis» un texto en el que parte de cada tema o todo él pueda ser considerado sin reservas como recreativo.

EL PROBLEMA DEL RECHAZO A LAS MATEMATICAS

La matemática es —como se sabe— la disciplina más sencilla de cuantas cultiva el hombre. La razón hay que encontrarla en la matemática misma y en su historia. «La naturaleza está excrita en lenguaje matemático» (**), pero la matemática hace una simplificación de la realidad que facilita su estudio y la convierte en una herramienta útil y en una disciplina sencilla; de otra parte, el ser una ciencia muy antigua hace que esté muy elaborada que es un nuevo factor de simplificación. Con estos antecedentes ¿cómo explicar que los fracasos escolares incidan especialmente en las Matemáticas? ¿Por qué aparece el rechazo de los alumnos hacia la matemática? La razón quizá no es única y no es nuestro objetivo entrar de lleno en el tema sino en lo que afecta a las Matemáticas recreativas (que posiblemente no resuelvan completamente el problema).

Los alumnos se apartan de las Matemáticas por muchas razones pero se acercan esencialmente por:

1) Espíritu de competición (el joven húngaro BOLYAI y el matemático inglés HARDY han sado en sus memorias su satisfacción de «Aplastar» a los demás resolviendo problemas que para otros eran inalcanzables). Se trata como se ve de satisfacer el ego.
2) Por insaciable y precoz curiosidad científica (Bertrand Russell decía en sus memorias que en su penosa infancia había abandonado la idea del sucidio por satisfacer su curiosidad matemática ¿justamente al contrario que nuestros escolares?).
3) Por experimentar un goce estético. La metodología matemática es atrayente y comprende las estructuras matemáticas proporcionan a sus estudiosos cultivadores satisfacciones espirituales parecidas a las que el público cultivado siente ante una obra pictórica o musical. (Hay que reconocer al paso que entre los matemáticos profesionales hay muchos «dilettantes».)
4) Por ser reconocida universalmente como ciencia útil. (Aprender matemáticas viene a ser como aprender inglés. Tarde o temprano se utilizan los contenidos asimilados.)
5) Por su carácter formativo (del carácter, de la conducta, del rigor científico, ...) y el prestigio consiguiente de quien la estudia.

Pero estos motivos no son en general aplicables a los alumnos de 1.° y 2.° de Bachillerato que forzosamente tienen que cursar la asignatura de Matemáticas sin otra alternativa. El profesor de matemáticas no puede, pues, olvidar que esos alumnos deben ser estimulados constantemente con presentaciones sugestivas y para ello es conveniente seguir la recomendación octava de las conclusiones del Seminario Permanente de Inspectores de Matemáticas que invitó al profesorado del país a «la lectura de libros de popularización matemática que le ayuden a realizar una motivación más adecuada de los temas que han de presentar a sus alumnos». (Esos libros son según la definición adoptada libros de matemátctica recreativa.)

LA DESAXIOMATIZACION DE LA MATEMATICA

Hablabamos ya de las dificultades que muchos alumnos encuentran en su aprendizaje matemático. Tales dificultades se verán multiplicadas si los profesores se empeñan en los niveles obligatorios de enseñanza de la matemática en explicarla con uso y abuso del método axiomático. El método axiomático ha sido —como se sabe— especialmente empleado desde principios de siglo (Hilbert y Peano) y en un estadio ingenuo la humanidad lo viene utilizando desde Euclides.

«Un razonamiento intuitivo no puede en absoluto ser considerado sin valor. El profesor procurará en primer término que el alumno maneje los conceptos con preferencia a que sepa expresarlos con un lenguaje matemático preciso» —decía la recomendación número 10 de la citada reunión de inspectores—.

Ciertamente al profesor le resulta muy cómodo la utilización del método axiomático (en otras palabras la aplicación del rigor con toda crudeza). Pero dicho método en el nivel de 1.° y 2.° hay que utilizarlo con sumo cuidado pues en muchos casos es el que provoca el mayor número de deserciones. Frechet que no es nada sospechoso de no saber utilizar la metodología por excelencia de la matemática dijo en una conferencia en Berna (1.9.): «Mi propósito es tratar de demostrar que si este método (el axiomático) ha adquirido legítimamente en la ciencia un lugar cada vez más importante, sería de interés edificar igualmente una construcción científica basada en principios diferentes y aún opuestos... Dicho de otro modo se procedería a la desaxiomatización de la ciencia.»

Si esto es oportuno como posibilidad alternativa

(**) E. SABATO corrige sagazmente la frase de Galileo en el sentido de considerar escrito en lenguaje matemático «la naturaleza simplificada» lo cual es una perogrullada parecida a asegurar que un esqueleto tiene estructura osea.

para la ciencia ¿por qué no en la metodología a emplear en 1.° y 2.° de Bachillerato?

Es importante pues en estos niveles (y posiblemente en niveles más altos) cultivar la intuición, el razonamiento verosimil (G. Polya) y la definición provisional (al modo en que la utiliza SPIVAECK en su libro «Calculus») y quizás como método de apoyo o segunda vía paralela el método axiomático. No recomendable —insistimos— como camino único. Ese camino único posible como decía Euclides a Ptolomeo —al decir de GINO LORIA— que existe para aprender Geometría. Respuesta lacónica a la pregunta del soberano sobre la existencia de un camino más sencillo en su aprendizaje. Sin duda alguna Ptolomeo desertaría de sus buenas intenciones tras las correspondientes apariciones de los fenómenos de rechazo y por la inexistencia en la época de textos recreativos. Situación completamente superada hoy en día como lo muestra la siguiente lista de textos «recreativos» que no pretende como es habitual ser completa y que recomendamos estén al alcance de los alumnos de 1.° y 2.° quienes los manejarán (prácticando ocasionalmente de paso las lenguas extranjeras del bachillerato español) tras la oportuna recomendación del profesor de turno.

LIBROS RECREATIVOS

1. ANDERSON, R. W.: «Dansons avec les mathématiques». DUNOD. Paris, 1960.
2. BERGAMINI: «Matemáticas». TIME. LIFE.
3. BONSDORFF-FABEL-RIIHIMAA: «Ajedrez y Matemáticas» Martínez Roca. Barcelona, 1978.
4. BOLL, M.: «Les certitudes du hasard». PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE. Paris, 1971.
5. BOREL, E.: «Probabilité et certitude». PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE. Paris, 1969.
6. BOREL, E.: «Las probabilidades y la vida». OIKOS-TAU. Barcelona, 1971.
7. BOURSIN, J. L.: «Las estructuras del azar». Martínez Roca. Barcelona, 1968.
8. BRONOWSKI, J.: «The common sense of science». Pelican. Londres, 1968.
9. CAMPEDELLI, L.: «Fantasía y lógica en la matemática». LABOR. Barcelona, 1970.
10. CARNAP y otros: «Matemáticas en las ciencias del comportamiento». Alianza Universitaria. Madrid, 1974.
11. CARROL, L.: «Matemática Demente». TUSQUETS. Barcelona, 1975.
12. COPI, I. M.: «Introducción a la Lógica». EUDEBA. Buenos Aires, 1974.
13. COXETER, H. S. M.: «Fundamentos de Geometría». LIMUSA WILEY. México, 1971.
14. FRECHET, M.: «Las Matemáticas y lo concreto». Universidad Nacional Autónoma de México. México, 1958 (Traducc. del original editado en PARIS por PRESSE UNIVERSITAIRES de FRANCE.
15. FREUDENTHAL, Hans. «Las matemáticas en la vida cotidiana». GUADARRAMA. Madrid, 1967.
16. FUCHS, W. R.: «Los padres descubren la nueva lógica». OMEGA. Barcelona.
17. GARDNER, Martín: «Nuevos pasatiempos matemáticos». Alianza Editorial. Madrid, 1972.
18. GERARD DES LAURIERS: «La mathematique, les mathématiques, la mathematique moderne». DOIN. París. 1972.
19. GUZMAN, M.: «Mirar y ver». ALHAMBRA. Madrid, 1976.
20. HARDY, G. H.: «A mathematician's apology». Cambridge Un. Press. Londres, 1976.
21. HILTON, P. J.: «El lenguaje de categorías». TECNOS. Madrid, 1975.
22. HUFF, D. «How to lie with statistics». Penguin Books. Londres, 1973.
23. JURGIN, YA. «Bueno, ¿y qué?». MIR. Moscú, 1973.
24. KAC-ULAM: «Mathematicsand Logc». Penguin Books. Londres, 1968.
25. KLINE, M. y otros: «Matemáticas en el mundo moderno». BLUME. Madrid, 1974.
26. KONDRATOV, A.: «Nombre et Pensée». MIR. Moscú, 1967.
27. KORDIEMSKY, B. «Sur le sentier des mathématiques» (2 volúmenes). DUNOD. París, 1963.
28. KUNTZMANN, J. «Où vont les mathematiques?». HERMANN. Paris, 1967.
29. LE LIONNAIS, F. y otros: «Las grandes corrientes del pensamiento matemático». EUDEBA. Buenos Aires, 1962.
30. MARKUSHEVICH: «Curvas maravillosas. Números completos y representaciones conforme. Funciones maravillosas». MIR. Moscú, 1977.
31. MORONEY, M. J.: «Hechos y estadísticas». EUDEBA. Buenos Aires, 1970.
32. NAVARRO, J.: «La nueva Matemática». Biblioteca Salvat G.T. Barcelona, 1973.
33. NEWMAN, J. R. y otros: «El mundo de las matemáticas» (6 volúmenes). GRIJALBO. Barcelona, 1968.
34. NORTHROP, Eugene: «Paradojas matemáticas». U.T.E.H.A. México, 1960.
35. PEKELIS, V.: «Mezcla cibernética». MIR. Moscú, 1973.
36. PERALMAN, Y.: «El divertido juego de las matemáticas». Círculo de Lectores. Martínez Roca.
37. PETROVICH, N.: «Hablemos sobre informática». MIR. Moscú, 1976.
38. POLYA, G. «Matemáticas y razonamiento plausible». TECNOS. Madrid, 1966.
39. RADEMACHER-TOEPLITZ: «Números y figuras». Alianza. Madrid, 1970.
40. REICHMANN, W. J.: «Use and abuse of statistics». Penguin Books. Londres, 1971 (existe traducción española).
41. REVUZ, A.: «Mathématique moderne. Mathématique vivante». OCDL. París, 1970.
42. RODRIGUEZ ANNONI, Rafael: «Al margen de la clase». Librería General. Zaragoza.
43. SANTALO, Luis A.: «La educación Matemática, hoy». TEIDE. Barcelona, 1975.
44. SINGH, J.: «Teoría de la información, del lenguaje y de la cibernética». Alianza Universitaria. Madrid, 1976.
45. SINGH, J.: «Mathematical ideas». HUTCHINSON. Londres, 1972.
46. SMILGA, V.: «In the search for beauty». MIR. Moscú, 1970.
47. SOLOMON, C.: «Les mathematiques». LAROUSSE. París, 1970.
48. 48. STEWART, Ian: «Concepts of modern mathematics». Penguin Bookd (existe traducción española editado por Alianza Universidad).
49. SWOBODA, H. «El libro de la Estadística Moderna». OMEGA. Barcelona, 1975.
50. THIO DE POL, S.: «Primos o algunos dislates sobre números». ALHAMBRA. Madrid, 1976.
51. VILENKIN, N. YA.: «Stories about sets». Academic Press. Nueva York, 1970.
52. WARUSFEL, A.: «Los números y sus misterios». Martínez Roca. Barcelona, 1968.
53. WARUSFEL, A.: «Las matemáticas modernas». Martínez Roca. Barcelona, 1971.
54. ZEISEL, Hans.: «Dígalo con números». Fondo de Cultura Económica. México, 1962.
55. VARIOS: Lecciones populares de matemáticas. Editorial MIR. Moscú.

El cálculo infinitesimal en España

Por Eulogio HERNANDEZ(*)

El Cálculo infinitesimal, disputas aparte, se debe a los matemáticos Leibnitz y Newton.

Las dos memorias fundamentales de Leibnitz se publicaron en el Acta Eruditorum en 1684 y 1686. El trabajo de Newton es más tardío, 1693, aunque posiblemente redactado mucho antes, hasta el punto que el Marqués de L'Hôpital publica el primer tratado sistemático de Cálculo, «Analyse des infinemens petits par le connaissance des lignes courbes», en 1696, anterior al de Newton.

No pueden dejar de citarse las memorias de Jacobo Bernoulli no sólo por su valía, sino porque se vio envuelto en la polémica suscitada en el problema de prioridad de los creadores; polémica larga en el tiempo y en la que no entramos de intento, pues está publicada y comentada por unos y otros, no se si con vencedor de uno u otro lado del canal, aunque bien merecían ambos el respeto y la admiración que el mundo científico les ha tenido y espero que siga teniéndoselo y sigan compartiendo, para bien, la gloria por nadie negada del invento.

No es mi propósito el enmarcar la Ciencia española de fines del siglo XVII y traer a estas páginas nombres de compatriotas que hayan contribuido al desarrollo de la Matemática en ese siglo, que en corriente expresión francesa se titula «el gran siglo». Y no es mi propósito, porque sería empeño vano; ni un nombre español figura en el gran desarrollo que la Ciencia en Europa alcanza al final de esa centuria. Es posible que la falta de contribución científica por parte española esté en la dificultad que para estudiar en el extranjero tenían los españoles de entonces ocupados en defender el Imperio al que tenían que dedicar nuestros mayores su tiempo y su vida, abandonando el libro para empuñar la espada. Sean cuales fueren las razones, el hecho, cierto es que en ninguna Universidad española se estudia Cálculo Infinitesimal en las primeras décadas del siglo XVIII. En algunas hay un texto enciclopédico de un valenciano, Vicente Tosca, copiado en lo fundamental de otro francés, el jesuíta Deschalez, mucho más amplio que el del valenciano, con temas de Aritmética, Algebra, Geometría (no más allá de los Elementos de Euclides), Astronomía y Logarítmica en sus tres primeros tomos, siguiendo, hasta completar los nueve de que consta la obra, con Música, Balística, Arquitectura Militar y un largo etcétera. Cierto que es costumbre de la época el libro enciclopédico y en Europa están, aparte del modelo de Tosca, que contiene la Geometría Analítica, de la que el español carece, la de Tacquet y la de Wolf, matemático y filósofo de cierto nombre y cuyos libros fueron utilizados en algunas Universidades españolas muy avanzado el siglo XVIII y si de verdad es que contiene la obra de Wolf, el Cálculo diferencial, no lo es menos que pasó sin verse en las aulas.

No podemos pasar por alto lo que ocurría en la Universidad salmantina, secular ya entonces. La única cátedra de Matemáticas estaba regentada, en propiedad, por el singular y estrafalario clérigo Diego Torres Villarroel. Sus obras llenan catorce tomos, las literarias, naturalmente, ya que la Matemática la ignoraba en profundidad y el Cálculo infinitesimal de raíz, según consta en los libros de Claustro de la Universidad salmantina. Sus lecciones, a los pocos alumnos que tenía, versaban sobre el Almagesto de Ptolomeo y la Esfera del Sacro Bosco. No era poco el mérito de Torres, que según él mismo relata en su «Vida de Torres», se impuso en esas Ciencias (las Matemáticas) en seis meses y que entre la ignorancia de los demás y su osadía ganó la cátedra, de la que se jubiló dejándola en herencia a un sobrino. Quiero dejar sentado que esta referencia a la docencia de las Matemáticas en la sabia, universal y secular Salamanca no pretende, en modo alguno, atacar al tradicional método de selección del profesorado, llamado oposición. No se sirvan de él sus detractores.

Después del clan Torres llegó a ocupar una cátedra, la de Algebra, creada en el 1771, el sacerdote don Juan Justo García, que publica más tarde, 1783, un texto que contiene Cálculo diferencial y es la primera vez, que el nuevo Cálculo, ya casi centenario, se explica en Salamanca. Por cierto, que otro catedrático de Análisis Matemático de la Universidad salmantina, casi dos siglos después, don Norberto Cuesta Dutari, ha publicado un libro sobre J. J. García en el que intenta librarle del mal lugar en que le había colocado Marcelino Menéndez Pelayo, no por catedrático de Matemáticas, sino por sus ideas filosóficas.

Con una claridad que nos duele, relata el lamentable estado de los estudios Matemáticos en las Universidades patrias don Vicente de la Fuente en su libro «Historia de las Universidades españolas»; pero son más duros los que historian la Universidad aragonesa, pues no conformes con decir que en ella no se estudiaban Matemáticas, porque no brillaban los profesores de esa Ciencia, culpan a la de Salamanca de ser la más «reacia a implantar las

(*) Catedrático de Matemáticas e inspector de Enseñanza Media.

nuevas doctrinas y la más apegada a los antiguos planes de estudio». Sin duda que los señores Sinués Urbiola y Jiménez Catalán no eran matemáticos, pero habían leído a Torres Villarroel del que dicen que «tanto pudo hacer en favor de los estudios matemáticos modernos de su época (¡ojo!, ya se utilizaba el "moderno")» y nada hizo a pesar de su brillante pluma. Y su ágil desparpajo, concluyo yo.

Otras instituciones culturales donde pudo iniciarse la andadura del Cálculo en España son los establecimientos militares, colegios y academias de marinos.

Los centros militares donde se formaban los artilleros, y en ellos se incluían a los ingenieros hasta bien pasada la mitad del siglo XVIII, que ya forman aparte, han tenido, tradicionalmente, prestigio entre nosotros y no menor ha sido el de las Escuelas navales en las que había buenos cosmógrafos y matemáticos, como señala Rey Pastor refiriéndose al siglo XVI.

Hemos indagado, cuidadosamente, si se explicaba el nuevo Cálculo a los cadetes, sospechando que a marinos y artilleros les vendría bien para su formación. Creemos que ni en Barcelona ni en San Sebastián ni en Cádiz donde hubo Academias de Artillería se explicó una palabra de Análisis Infinitesimal y sólo en la de Segovia, donde hoy sigue, en un texto del jesuíta Cerdá titulado «Lecciones de Artillería» aparece una ecuación diferencial en un problema de tiro. Por cierto, dice Cerdá en ese libro, que el que quiera avanzar en ese asunto puede leer su libro de Mecánica y en éste envía al lector a las Licciones» para enterarse. Me imagino el pasmo de los cadetes curiosos en el año 1763.

No parece aventurado el decir que hasta esa fecha no se explicaron en Artillería lecciones de Cálculo. Desde luego que en la «Historia de la Artillería» del general Vigón se hace referencia a un Compendio Matemático, que es sin duda el del valenciano Vicente Tosca, pero ninguna a otros textos hasta el citado de Cerdá. Bien es cierto que el reglamento de la recién creada Academia de Segovia dice que «En Matemáticas no se pase muy adelante...» (ver la obra citada de Vigón, tomo II, capítulo de Tratadistas). Parece que no gustó ésto de no avanzar, en Matemáticas, a los artilleros y manuscrita surgió una obra de ocho tomos, el tercero dedicado al Cálculo diferencial e integral, que ha debido de perderse en dos incendios, uno en la Academia y otro en el palacio de Vistahermosa donde habían llevado los libros salvados del primero. El autor del Compendio eran Vimercati y el general García Loygorri, duque de Vistahermosa.

El prestigio del profesorado de la Academia de Segovia fue grande, no podemos olvidar que en ella enseñó el químico Proust y en Segovia enunció su famosa ley de las proporciones múltiples, no obstante, reconocemos que la aventura del Cálculo infinitesimal no empezó a conocerse, en España, ni en las Universidades ni en las Academias militares.

Veamos que ocurría en la Marina. Felipe V crea en Cádiz una Escuela Naval, sucesora en nuestra opinión, del antiguo Centro que servía para la formación de marinos. Esta Escuela, Academia de Guardias Marinas, en la que estudió y dirigió después, Jorge Juan, fue el modelo para otras posteriores en Ferrol y Cartagena. Si en esta Escuela aprendieron el Cálculo Jorge Juan y Gabriel Císcar, ambos lo conocían y escribieron libros de Mecánica, de texto en la Escuela, en que lo utilizaban, tendríamos el primer centro español donde se explicaba; pero no hemos encontrado rastro de libros que lo contuvieran, ni de profesores que lo conociesen. Las primeras referencias del Cálculo en Cádiz aparecen en el programa de un Certamen Matemático, que se celebra en La Academia en 1754. Son los certámenes actos académicos en los que se pregunta a los alumnos, los más brillantes, sin duda, cuestiones que previamente preparan y al tiempo que sirven para el lucimiento de los actuantes, prestigian al Centro que los organiza, como un acto social, que sería bien recibido. Estos certámenes eran usuales en las instituciones jesuíticas, algunas de fundación real, solemnizadas por la presencia del Rey y la Corte en ocasiones y donde los nobles mostraban sus conocimientos en los saberes al uso.

No debía de ser chica la importancia de la Escuela de Guardias Marinas, ya que cuando había cátedra vacante de Matemáticas en alguna Universidad española debía de ser anunciada allí y, por otra parte, en las listas de profesores de Matemáticas, que lo fueron de Cádiz, hemos leído algunos nombres procedentes del extranjero, costumbres también de los Centros jesuíticos, de Madrid al menos, y que ha creado el hábito, por lo que leemos a diario, de la figura llamada importación.

El Certamen Matemático, objeto de nuestro comentario era este:

CERTAMEN MATHEMATICO

SOBRE EL ANALYSIS; CALCULO DIFERENCIAL INTEGRAL Y GEOMETRIA SUBLIME

Que celebrarán

EN LA REAL ACADEMIA DE GUARDIAS MARINAS

Don Francisco Huarte.
Don Francisco Gil.
Don Luis Muñoz
Don Juan Murillo.
Don Antonio de la Concha
Don Francisco de Quevedo.
Guardias Marinas de la misma Academia.

En que, supuesta la inteligencia del Cálculo Algebraico, tanto en conmensurables, inconmensurables e Imaginarios, como en las raíces de estos en Binomios y Trinomios; darán el methodo de preparar, ordenar y resolver todas las Equaciones del primero, segundo, tercero y quarto grados; así por Analysis, como por Geometría; añadiendo un methodo general de resolver por el primero las de qualquier grado que sean. Explicarán los Cálculos Diferencial e Integral, su índole, sus methodos y sus usos; y aplicarán todas estas Reglas y Construcciones a la resolución de varios problemas, como son los de Máximos y Mínimos, en hallar tangengentes, subtangentes, subperpendiculares. Con las rectificaciones de Curvas, Areas, Superficies, Sólidos. Y darán la solución de varios Problemas particulares.

El jueves 19 de diciembre de 1754

Los que conozcan los textos de Cálculo de la época pueden ver que lo recogido en el programa del Certamen es el índice de cualquiera de ellos y no hace aún treinta años era la exigencia del Análisis II de la licenciatura de Exactas o el programa de ingreso en las Escuelas de Ingenieros.

Ciertamente que no hay más pruebas de que el Cálculo Diferencial se explicase en España en fecha anterior a ese 19 de diciembre de 1754. Esta afirmación, que vería con gusto refutada, la hago después de no encontrar en los archivos militares y naval, nombre de profesor ni escritos sobre la materia que la rebatan.

Por lo que hemos visto, nuestra cultura matemática carecía del clima adecuado para recibir, en los albores del siglo XVIII, el nuevo Cálculo, cada día más sólido en lo teórico y con múltiples aplicaciones a otras Ciencias y a la Técnica.

Estábamos convencidos de que el Cálculo en España no había sido conocido hasta muy entrado el siglo XVIII y de que no había españoles que lo supieran y por ello quien lo enseñase, cuando apareció, entre los papeles de los jesuítas extrañados en 1763, un librito de un español, Francisco de la Torre Argaiz que defiende unas Tesis Matemáticas, en la universidad de Toulouse, con amplio contenido de Cálculo infinitesimal y en fecha digna de ser señalada. Corría el 1717. Es un libro de setenta páginas, precedidas de solemne dedicatoria al Príncipe de Asturias y seguidas de un índice de materias.

El caballero Argaiz, pensionado en Toulouse, en el colegio de los jesuítas y apadrinado por otro jesuíta el padre Durranc, se hunde en el misterio y sólo ha llegado a nosotros ese librito. A pesar de las indagaciones que hemos hecho en el colegio de Toulouse y las de Madrid, no hemos encontrado rastro de su vida posterior a la defensa de esas Tesis, en las que demuestra y ustedes lo verán, que conocía el Cálculo en fecha en que eran pocos los libros publicados de la materia. Aparte de los trabajos de Newton, de Leibnitz, el libro del marqués de L'Hôpital, los de Jacobo Bernouilli y el libro de Brook Taylor de 1715, poco más había. Una lista muy completa de libros y revistas que pudieron utilizar Argaiz y su patrono Durranc figura en el libro del profesor Cuesta Dutari «El maestro Juan Justo García» publicado en Salamanca en 1974.

Este libro de las Tesis Matemáticas de Argaiz, entiendo que escapó a los ojos de Menéndez Pelayo, pues no le cita en la Historia de la Ciencia española y tampoco lo conoció don Julio Rey Pastor que pasó muchas horas en la Biblioteca Nacional, en la que hay un ejemplar (sig. 3.49133), aunque el profesor Rey se dedicó a los matemáticos españoles del siglo XVI. Sólo he visto una referencia a las «Tesis» en el artículo del profesor Vernet, publicado en Archives Internationals d'Histoire des Sciences, vol. 25, décembre 1975 y la noticia parece adquirida, por el catedrático Vernet, en el libro del profesor Cuesta y en el discurso de contestación al de entrada en la Academia de Ciencias de Simón Archilla en 1888. Por lo demás es extraño que el señor de la Torre no haya sido citado en las publicaciones sobre la Ciencia española antes y después de don Marcelino.

Son tan bellas las palabras que dirige Argaiz, en su dedicatoria, al Rey que no me resisto a transcribir alguna frase:

«... he emprendido un estudio, que desarrollando todas las partes del Arte Militar, conduce a la gloria por caminos ciertos. He buscado en Francia con qué satisfacer mi inclinación, y esto es lo que querría encontrar en mi Patria. No se puede desear que España tenga que invidiar a las otras naciones de Europa el honor de perfeccionar las Ciencias tan dignas de espíritus sublimes, tan propias para formar héroes...». Termina diciendo que con el gusto para las Matemáticas de los españoles podrían descubrirse secretos desconocidos para los hombres más sabios y ¡que podamos ver este tiempo feliz!

Las Tesis Matemáticas que contienen Cálculo diferencial e integral son estas:

I. Distinguir dos tipos de magnitudes, 1. las variables, que crecen o decrecen continuamente, 2. las constantes, que permanecen siempre las mismas, mientras que las otras cambian.

II. Una línea curva puede ser considerada como el conjunto de infinitos segmentos, infinitamente pequeños; o lo que es lo mismo, como un polígono de infinito número de lados, infinitamente pequeños, los cuales determinan por los ángulos que determinan entre ellos la curvatura de la línea.

III. Una magnitud que no ha aumentado o disminuido más que en otra magnitud infinitamente menor que ella, puede considerarse como permaciendo la misma.

IV. Tomar la diferencia de todo tipo de magnitudes variables a saber: 1. de varias magnitudes sumadas, o restadas unas de otras, 2. de un producto cualquiera de varias magnitudes multiplicadas unas por otras, 3. de una fracción cualquiera, 4. de una potencia cualquiera entera o no.

V. Uso del Cálculo diferencial para encontrar: 1. las tangentes sean geométricas o mecánicas, de todo tipo de curvas, 2. las mayores y menores ordenadas, a que se reducen las cuestiones de máximos y mínimos.

VI. La diferencia de una magnitud variable cualquiera multiplicada por una potencia entera o no de esta misma magnitud variable; encontrar la integral de este producto.

En segundo lugar, encontrar la integral de las otras diferencias que pueden reducirse a estas.

En tercer lugar, dada una magnitud variable bajo un signo cualquiera, multiplicada por una diferencial fuera del signo, encontrar la integral de este producto.

VII. Conocer si una integral está completa o no lo está, 2. cuando no está completa, encontrar la magnitud constante que es preciso sumarle, o restarle, para completarla.

VIII. Reducir a sucesiones finitas o infinitas todas las potencias enteras o no. De ello:

1. La formación de todas las potencias.
2. Una nueva manera de extraer todas las raíces, de dividir.
3. La integración de todas las diferenciales, al menos por aproximación al infinito.
4. La solución de todos los problemas, si no exacta, al menos aproximada al infinito.

IX. La diferencia de una magnitud, cualquiera, estando dividida por esta misma magnitud, da la diferencia del logaritmo de esta magnitud.

Se demostrará este principio, y se hará ver su uso en el Cálculo integral. En particular se explicará la manera de encontrar, por este principio, las integrales de ciertas fracciones, donde no hay más que una misma variable, y todas las potencias son conmensurables. Esta manera está referida en las Memorias de la Academia Real de Ciencias, del año 1702, página 289.

X. ¿Qué significan las integrales negativas que se encuentran en ciertos cálculos?

En el Capítulo que dedica al Análisis, figuran estas dos:

Encontrar por Análisis las tangentes a las líneas curvas geométricas y resolver las cuestiones que se dicen de *máximos* y *mínimos*.

Demostrar el Método del célebre M. de Fermat, consejero del Parlamento de Toulouse, para la solución de las cuestiones de *máximos* y *mínimos*.

En el Capítulo que titula Geometría especulativa, aparecen éstas:

1. Encontrar las tangentes de cualquier curva.
2. Encontrar por el mismo método, las asíntotas de las curvas, por ejemplo, de la hipérbola, considerando las asíntotas como tangentes trazadas por un punto de la curva infinitamente alejado.
3. Cuadrar una superficie curvilínea cualquiera, o exactamente, o aproximada al infinito.
4. Hallar el área del recinto asintótico de cualquier especie de hipérbola, exceptuando la común, que demostraremos que es infinita; y sus diversos segmentos, que no son cuadrables más que por aproximación al infinito.

Estos espacios asintóticos, cuyo conocimiento, dice el P. Pardies en su prólogo de los Elementos de Geometría, es la cosa más admirable del mundo y que hace ver claramente la grandeza y espiritualidad de nuestra alma; ya que por la sola luz de su espíritu, penetrando más allá del infinito, descubre tan claramente las cosas, que ninguna experiencia sensible las puede percibir y que ninguna potencia corporal podría notar. Estos espacios son de una extensión actualmente infinita, comprendidos entre dos líneas, que prolongadas hasta el infinito, no se encuentran jamás; de ello le viene el nombre de asíntotas. Sin embargo, se demuestra que estos espacios infinitos en longitud son, no obstante, iguales a un círculo, o a otra figura cualquiera determinada; de modo que el infinito mismo, inmenso e innûmerable como es, se reduce, no obstante, al cálculo y a la medida de la Geometría y que nuestro espíritu aún más grande que él, es capaz de comprenderlo, etc.

Hay también un espacio asintótico entre la curva logarítmica y su eje. Se demostrará que es finito, equivalente a un triángulo formado por la ordenada, la subtangente y la tangente de esta curva. Se encuentran en Geometría una infinidad de ejemplos parecidos. Y algo análogo ocurre en la Aritmética especulativa (Progresiones decrecientes).

5. Medir la superficie y la solidez de un conoide parabólico, engendrado por la rotación de una parábola de cualquier género alrededor de su eje.

Él mismo problema para el sólido engendrado por la revolución de una hipérbola alrededor de su asíntota, de cualquier género que sea la hipérbola. Se demostrará que ahora el sólido engendrado por el espacio asintótico es finito, en la hipérbola común.

6. Medir cualquier sólido ya sea por aproximación al infinito o exactamente.
7. Encontrar exactamente o por aproximación al infinito el centro de líneas, superficies y sólidos cualesquiera.
8. Demostrar esta maravillosa propiedad del centro de gravedad, encontrada por el P. Guldin, y demostrada por el P. Tacquet:

«Si una superficie plana cualquiera gira alrededor de un eje, el sólido redondo producido por esta revolución, es siempre igual al sólido recto que tuviera por base esta superficie, y por altura un segmento igual a la circunferencia que describe el centro de gravedad de esta superficie mientras la revolución.»

«Del mismo modo, si una línea..., etc.»

9. ¿Cómo se encontraría la superficie de un círculo, supuesto conocido el centro de gravedad del semicírculo?
10. Demostrar la paradoja propuesta por el P. Laloubère en su obra sobre el cicloide: «Que dos pesos, el uno actualmente infinito, el otro finito, puede permanecer en equilibrio, sobre una palanca de longitud finita.

Recogemos algunas otras cuestiones, planteadas en las Tesis de De la Torre, por su relación con el Cálculo o por el interés general de los problemas suscitados, entresacadas del resto de las materias tratadas.

1. Demostrar la admirable proposición del célebre Leibnitz «que el cuadrado del diámetro de un círculo cualquiera es a este círculo como 1 es a $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$».
2. Cálculo de latitudes, longitudes y rumbos en alta mar.
3. Curvas que cortan siempre a los meridianos bajo el mismo ángulo. Estas curvas, Loxodrómicas, proporcionan amplia materia para la especulación de los geómetras.
4. Una bella proposición de Arquímedes sobre la cuadratura del círculo.
5. Problemas sobre velocidades, distancias y trayectorias en el arte de lanzar bombas, según las hipótesis de Galileo y los problemas propuestos por Varignon.

Para concluir este resumen, de las Tesis de Argaiz, lo haré con el prólogo que precede a las de Análisis: «Es sorprendente que el medio más seguro y el más cómodo de hacer descubrimientos en Matemáticas, consiste principalmente en suponer ya encontrado lo que se busca y sacar de esta suposición las consecuencias conforme al estado de la cuestión. No obstante, en ello está todo el fondo y el espíritu del Análisis o del método analítico, tan feliz y tan fecundo en descubrimientos admirables, donde parece que el espíritu humano no alcanzaría nunca, y, sin embargo, llega casi sin esfuerzo, como jugando.»

Como se ve, son muchos los temas abarcados en las Tesis de Argaiz. Suponemos que, como ocurría en la Universidad de Salamanca y en otras, estas Tesis se proponían para celebrar un acto académico-literario, en presencia del Claustro de doctores, maestros ya licenciados de la Universidad donde el actuante, no graduado aún, Francisco de la Torre en nuestro caso, defendería algunos de los puntos propuestos en las Tesis y contestaría a las preguntas, que sobre lo expuesto le hiciesen los asistentes.

Es claro que las cuestiones de las Tesis se tomarían de los textos de la época y también de los artículos monográficos de las revistas existentes, lo cual se comprueba en este caso en algunos de los artículos. (Ejemplo: La diferencia del log. de una función es la diferencial de la función dividida por la función. Se demostrará esto según lo refiere la Memoria de la Real Academia, año 1702. Tomado de las Tesis página 14). Esta labor de selección de temas, cuestiones y comentarios que componen las Tesis, sería hecha, muy probablemente, por el actuante y por el padrino.

Examinando cuidadosamente las setenta páginas de esta obrita y pensando en contestar a todas las cuestiones planteadas en ella nos daría para escribir una obra, enciclopedia, de los saberes matemáticos de la época. Y pensemos que las Tesis de nuestro compatriota están incrustadas en fecha bastante temprana dentro de la bibliografía del Cálculo Infinitesimal, tema, que ya de pasada fue tratado más atrás y con referencias muy precisas de cuanto se ga escrito sobre cálculo a lo largo del siglo XVIII.

Pero también queremos hacer unas reflexiones a propósito del contenido del trabajo, que no dudamos en afirmar es el primero de los españoles, si bien defendido en Francia y escrito en francés, pero sin duda alguna presentados por un español, pensionado por el Gobierno español en Francia y hundido en el misterio ya que nada hemos podido saber de su vida y obra a pesar de haberlo intentado. En el colegio jesuítico de Toulouse no tenían documentación alguna de la época anterior a la expulsión y en España, siguiendo, quizá como en tantas cosas a los franceses, también anda perdido mucho de lo noticiable por culpa del extrañamiento de los Reinos de su Majestad Católica de todos los jesuítas en 1763.

Sean las primeras reflexiones las dedicadas a cuestiones de lenguaje. A todo lo largo de la obra cuando se refiere a Cálculo Infinitesimal, siempre dice diferenciales o integrales, según el caso. No leemos ni una vez la palabra «Fluxión» ni tampoco «Fluente» que son los términos usuales de Newton. En otros textos de Cálculo que citaremos luego el lenguaje usual es el newtoniano, que llega a través de Simpson. También observamos que dice en las Tesis «tomar la diferencia de...» en textos más tardíos se dice tomar la difrencial de... Y desde luego es más cómo el uso de la integral de..., que la Fluente de una fórmula fluxional...

En las Tesis, se habla muchas veces de series infinitas, se diga o no con esas palabras: La división infinita: la integración de todas las diferenciales, al menos por aproximación al infinito; la solución de todos los problemas, si no exacta, al menos, por aproximación, son tres ejemplos de problemas de series infinitas, muy bien tratadas por los matemáticos de la época, especialmente avisados para los problemas de la convergencia. Pero pensemos que el lenguaje al uso era muy distinto y aunque en las Tesis de Argaiz no se dan respuestas, sólo se hacen proposiciones que tendrían adecuadas respuestas, voy a intentar resolver algunas de las cuestiones propuestas por Argaiz, fundamentales ambas, una de Cálculo diferencial y otra del Integral, como, zs muy posible, que las hubiese contestado ante el Claustro de Toulouse el propio Francisco de la Torres.

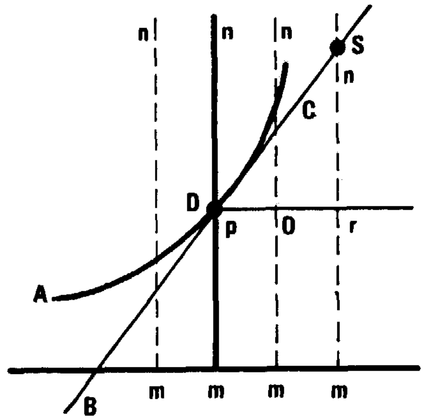
Esta es la de Cálculo: *Trazar la tangente a una curva en uno de sus puntos.*

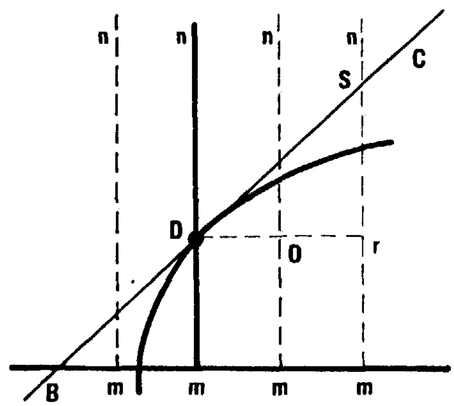
Toda la dificultad en tirar las tangentes a las curvas en un punto dado, consiste en buscar otro punto o bien en el eje (prolongado), o bien en otra parte, de donde tirando una recta al punto dado de la curva le sea ésta tangente.

De manera que aquí no tanto se busca el valor de la tangente misma cuanto el de la tangente cuyo extremo es el punto por donde la tangente se debe tirar.

Sea pues ADE una curva cualquiera (cuyas ordenadas sean paralelas entre sí) a quien se le quiere tirar una tangente en el punto dado D y concíbase una línea mn hacia E paralelamente a sí misma, pero de suerte que el punto p moviéndose en ella vaya describiendo la línea curva ADE.

Sea mn o su igual y paralelo Dr la fluxión de Am ó lo que es lo mismo la velocidad con que la línea mn se mueve hacia AE y que rs sea la fluxión de mp estando en la posición mDn ó la velocidad del punto p a lo largo de la línea mn, tírese la recta SB que encuentre al eje AF en B. Ahora pues si el movimiento del punto p fuese uniforme por lo largo de la línea mn cuando la línea mDn se encontrase en la posición mSn, p se encontraría en S por ser Dr y rS las distancias que en el mismo tiempo describiera el punto p ya a lo largo de mn.





Si la línea mDn se concibe en otra posición mOn permaneciendo el punto p en su movimiento uniforme, los espacios DO, OS descritos en un mismo tiempo serían proporcionales a Dr, rS, de suerte, que siendo uniforme el movimiento de p a lo largo de la línea movible mn el punto describirá necesariamente una línea recta, luego para que el punto p describa efectivamente una Curva, su movimiento a lo largo de la línea mn se debe concebir o bien como *acelerado*, o bien *retardado*.

Si este movimiento sobredicho se concibe acelerando el espacio realmente descrito en un tiempo dado sería mayor que el que se describiría con el movimiento uniforme, luego si con el movimiento uniforme el punto p siempre se encontraría en la recta BC, con el acelerado describirá una línea que caiga en la parte superior de BC, como en la figura 18 y con el retardado describirá una curva que siempre caiga en la parte inferior de BC, como en la figura 19, pero en entrambos casos BDC es una tangente de la curva en el punto D.

Ahora, pues, los triángulos SrD, DmB son semejantes, luego $Sr : rD :: Dm : mB$, esto es puesta la Ordenzda $Dm = y$, la Abscisa $Am = x$; $dy; dx :: y : : mB = \frac{y \cdot dx}{dy}$, por lo tanto la subtangente, especialmente en las curvas cuyas abscisas se toman en el eje, es una cuarta proporcional a la fluxión de la ordenada a la de la abscisa y a la ordenada terminada en el punto de contacto.

Se da otra demostración que dice el autor es más breve. El final de la cuestión es que para trazar la tangente a una curva en uno de sus puntos, reducen el problema al cálculo de la subtangente en el punto. Uniendo el extremo de ésta con el punto dado se traza la tangente pedida.

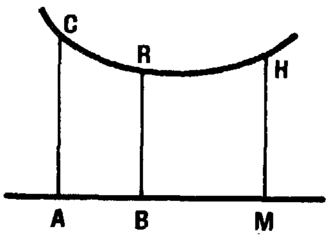
Varios ejemplos de corroboración dan ocasión a aejercitarse en el método y en algunos puede comprobarse cómo con el método de las fluxiones se llega a los mismos resultados que con los viejos métodos geométricos. (Es el caso de la parábola y la circunferencia).

El problema de Cálculo integral es como sigue: Encontrar el área de la curva CRH cuya ecuación sea $a^2y - x^2y - a^3 = 0$. En fuerza de esta ecuación tendremos $y = \frac{a^3}{a^2 - x^2}$ que reducida a serie por división del numerador por el denominador (después de multiplicar por la fluxión de las abscisa *dx)*

$$ydx = dv = (a^3dx) : (a^2 - x^2) = adx + \frac{x^2}{a}dx +$$
$$+ \frac{x^4}{a^3}dx + \frac{x^6}{a^5}dx + \frac{x^8}{a^7}dx + \ldots$$

cuya fluente es
$$ax + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^7}{7a^5} + \ldots$$

área de la curva expresada en términos de una serie. Pero haciendo alguna reflexión a las cuatro fórmulas fluxionales cuyas Fluentes se pueden encontrar por



los logaritmos hiperbólicos, reparo, que la Fluxión encontrada de la área es $\frac{a^3dx}{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2}a^2$ cuyo primer factor es la tercera fórmula de un cuadro de Fluentes que pueden encontrarse por log. hiperbólicos, luego sin recurrir z serie tenemos que su Fluente es $\frac{1}{2}a^2$ log. hiperb. $\frac{a + x}{a - x}$ y después de unos cálculos supuestos $a = 10$, $x = 5$, resulta 54,9306 para el área de ABRC.

Imaginen el sobresalto de nuestros alumnos de C.O.U., que optaron por las matemáticas, si el profesor de turno, para explicarles cómo se traza la tangente a una curva en un punto les atiza la demostración precedente. No obstante, no serían mayores de edad aquellos otros alumnos del autor del libro de donde están tomados y para los que fue escrito. Me refiero al jesuita catalán Tomás Cerdá que, muy probablemente, en 1758 tiene dispuestos para la imprenta un tratado en dos tomos de Cálculo diferencial e integral, copia fiel del inglés des mismo título debido a Tomás Simpson, con posibilidad de haber sido explicado a los alumnos del colegio barcelodés de Cordelles y desde luego a los de los Reales Estudios ubicado este último centro en el mismo edificio que hoy es el Instituto San Isidro de Madrid.

El padre Cerdá, profesor de Filosofía en la Universidad de Cervera, donde fue trasladada la de Barcelona por Felipe V, fue a estudiar Matemáticas a Francia con el también jesuita P. Pezenas, profesor en Marsella de la Academia Naval y como matemático tiene en su haber el haber traducido a Mac Laurin. Tres años más tarde regresa a Barcelona, con buenos libros y supongo que con una cultura matemática aceptable, ocupando una cátedra de Matemáticas en el Colegio de Cordelles, cátedra creada para él y allí escribe una Geometría y una Aritmética y Algebra. En esta ya se ve la devoción por los libros ingleses, sobre todo de Simpson.

En el prólogo de la Geometría habla de estar preparado para publicar entre otras obras el Cálculo diferencial e integral o Tratado de Fluxiones en dos tomos. Si lo publicó no lo sé, pero los manuscritos de ambas se conservan en la Academia de la Historia y de ellas están tomados los dos ejercicios, que cambiando algunos términos habría tenido que contestar Argaiz en la defensa de sus Tesis si le huieran tocado en suerte.

Volveremos sobre el P. Cerdá, a nuestros juicio autor del primer libro de Cálculo diferencial en español.

El segundo de los problemas que nos fue sugerido por las Tesis de Argaiz, lo seleccionamos porque halla un área después de sumar una serie, y son muchas las cuestiones que sobre series nos plantean en las Tesis. Alguna de esas series son divergentes, al menos tienen un campo de convergencia y fuera de él debemos de estar avisados. Es el caso del problema del área de la curva $y = a^3 : (a^2 - x^2)$. Basta observar la gráfica a que da lugar para ver los recintos infinitos que el autor solicita de nosotros. Pero, claro, el texto resuelve el problema, sin reparo alguno, le basta con decir que si $a = 10$ y $x = 5$, el área vale tanto, y hasta da cinco cifras decimales. La indefinición del anunciado sorprende, sospecho que la pretensión del autor ha sido mostrar la eficacia del método de cálculo y lo potente del recurso de las series para el cálculo de integrales.

Sólo unas palabras más sobre Argaiz y sus Tesis de Toulouse. Una relativa a la serie de Leibniz que da el desarrollo de $\frac{n}{4}$. Desconocía que se atribuyese a Leibnitz la tal serie. Fueron muchos y afamados los matemáticos del siglo XVII, que se dedicaron a los desarrollos infinitos, aunque entiendo que Euler y Lagrange en el XVIII desarrollaron exhaustivamente series y productos infinitos, presentando algunas de sus fórmulas como desarrollos en serie, aunque no fuera estudiada la convergencia, problema éste que se dejó para los matemáticos del principio del XIX, no porque desconocieran el tema los anteriores, sino sencillamente porque no había llegado el momento de pararse a reflexionar sobre lo hecho hasta entonces.

Supongo, que la serie que llama de Leibnitz es la obtenida al desarrollar en serie el arco tangente. Es una pena que Argaiz sólo dice en las tesis los temas que va a tratar y enuncia los problemas o proposiciones que va a demostrar, pero no las demuestra efectivamente, dejando al curioso lector en ignorancia invencible.

Tal ignorancia ocurre en otro de los puntos de las Tesis: «Una bella proposición de Arquímedes sobre la cuadratura del círculo». Me gustaría poder prometer, y cumplirlo, ocuparme de estos temas y al contárselo a ustedes, poder afirmar quién explicó Cálculo por primera vez en España y dónde, que bien merece la pena el estar informados de esta cuestión en la que hombres universales del siglo XVII pusieron los cimientos de la Ciencia moderna.

Siendo mi objetivo, el exponer mi opinión personal sobre la introducción del Cálculo en España y quienes fueron los profesores de esa materia que lo enseñaron primero, hemos pasado, panorámicamente, por los centros e instituciones culturales que pudieron hacerlo, bien porque lo necesitan para su vieran al tanto, y quisieran seguirlo, del movimiento científico europeo, muy intenso, en fines del siglo glo XVII. Se publicaban revistas científicas, en las últimas décadas; se creaban Academias científicas, se editaban libros cada día en mayor número. ¿Dónde podían encontrarse en nuestro país, empeñado en batallas de otro género, estas revistas que publicaban los trabajos de los mejores científicos europeos? ¿Cómo podía seguirse desde aquí esa creación de los mejores de fuera sin conocer idiomas, además del latín? Y nuestros pasos recorrieron las Universidades en busca de nombres de estudiosos, creadores no había, y las instituciones militares y centros jesuíticos. Ya hemos visto algunos resultados, aunque nos apartó de nuestro camino la obra de Francisco de la Torre, una delicia para nuestro espíritu.

En los colegios jesuíticos, algunos de fundación real, podían disponer de profesorado de todas las materias. Los que no había aquí, los traían del extranjero, lo mismo que libros y revistas científicas, de las que disponían puntualmente. La biblioteca de la Universidad salmantina tiene fondos bibliográficos de inestimable valor procedentes del Colegio de Jesuitas de la ciudad con motivo de la expulsión. En abril de 1763, una pragmática real extraña de los Reinos a todos los jesuitas y al destierro fueron, abandonando todas sus pertenencias a excepción del rosario y la tabaquera. Nuestro padre Cerdá fue a dar con sus huesos a Forli (Italia) donde los dejó definitivamente en 1791.

Cuando surgió el problema de la historia del Cálculo en España, cayó en manos del profesor Cuesta Dutari el libro de Cerdá «Licciones de Aritmetica y Algebra», del que ya hemos dicho de su parecido con el del inglés Simpson. En el prólogo de ese libro dice el autor que tiene en la imprenta el tomo de Ecuaciones y dispuesto para imprimir, «los otros tres que tengo dispuesto para ello, la Geometría y trigonometría, la Aplicación del algebra a la Geometría y curvas y el Método directo e inverso de las fluxiones, que otros llaman Cálculo diferencial e integral», y, si estos es bien recibido por el público, «proseguiré en las otras partes superiores, asegurando, que procuraré en los elementos de cada ramo de las Mathemáticas el poner los puntos según el estado en que actualmente se encuentran estas Ciencias en Inglaterra y en Francia, dos naciones sin duda las más adelantadas en esta materia, entresacando de sus libros los más selecto, para...».

De ser cierto el contenido del párrafo anterior, teníamos un Cálculo en español en los alrededores de 1758 y, además, cuando leíamos este prólogo desconocíamos el Certamen de Cádiz de la Academia de Guardias Marinos que asegura, que unos cadetes se van a examinar y a lucir con uns cuestiones de cálculo diferencial de integral, en fecha anterior en cuatro años al libro de Cerdá donde se dice que va a publicarse. La verdad, que si estos cadetes conocen el Cálculo en 1754, alguien se lo habría enseñado y retrocedíamos en el tiempo.

El no sospechar siquiera de otra vía posible que antecediera al anunciado libro del padre Cerdá, me llevó a intentar descubrir el Tratado de Fluxiones del jesuita, que ciertamente conseguí en etapas sucesivas, aunque distantes entre sí y mi alegría se tornó decepción cuando al final de una de las etapas descubrí que me había encontrado una traducción fiel de muchos de los capítulos de la obra del inglés Tomás Simpson, libro que vio la luz en 1737, anterior al de Mac Laurin, aunque la edición que conozco es de 1750 y está en la Biblioteca universitaria de Salamanca, lo mismo que el Tratado de Fluxiones de Mac Laurin, en la traducción del maestro del padre Cerdá, Esprit Pezenas.

Después más preparada y simplificada, pero siempre manuscrita encontré 15 capítulos y un apéndice, que bien puede ser lo que el autor pensara como el primer tomo de su Tratado de Fluxiones.

En estos quince capítulo se trata desde la naturaleza de las Fluxiones en el primero, hasta la resolución de las ecuaciones fluxionales o modo de encontrar la relación entre las cantidades fluentes por las de las fluxiones. El apéndice es un conjunto de problemas de máximos y mínimos, algunos de ellos aplicados a problemas físicos, y casi todos figuran hoy en los tratados elementales de Análisis.

Es muy interesante el capítulo dedicado a la resolución de ecuaciones diferenciales, que cuando no dispone de método adecuado y preciso dice que se integrarán por series. Aunque recomienda que sólo en caso extremo, se use este procedimiento por ser muy pesado. Se contemplan algunos ejemplos, muy útiles, de integración por series, y entre los ejercicios hay algunos de máximos y mínimos de integrales, que pertenecen a capítulos no incluídos en lo que llamamos primera parte del libro.

Estimamos que este libro manuscrito se explicó, porque entre los papeles de Cerdá figuran algunos pliegos que en sus márgenes tienen una nota. «Esto para el cuaderno de clase». Y se aplicaba, con el sentido que tuviera el verbo explicar entonces, antes de 1763, fecha de su extrañamiento. El que no se haya publicado, si este ha sido el caso, no sería achacable al P. Cerdá porque leemos en el prólogo de sus «Liciones» «...que aún los más cuidadosos profesores emplean, de las cuatro partes del tiempo que están con sus discípulos, tres en escribir y la otra en practicar o explicar, luego estando ya impresos los tratados, esto que se emplea en dictar se emplea en explicación...». Añade alguna otra razón a favor de los libros impresos. Deduzco de ello que, si pudo, imprimió el Tratado y estimo que hubiera sido un buen texto de Cálculo aunque fuera un tanto tardío. Peor es que no hubiera ninguno y cuando lo hubo, sin pretender molestar a nadie, dudo de la originalidad, lo que por otra parte, diciendo las fuentes de donde se bebe, no parece pecado mayor. La mayor parte del profesorado hemos intentado enseñar a nuestros alumnos lo que hemos leído en los libros; pecado de orgullo sería el creerse original siempre.

Dejo para otra ocasión el comentario de otros libros del jesuita Cerdá, asi como la opinión que de él tenían en la revista francesa Journal Etrangers (agosto de 1760). Creo que fue hombre estudioso y trabajador, que escribió varios libros y que no mereció el exilio, que le alejó de su Tarragona natal para siempre, a los 47 años de edad, truncando su meritoria labor científica y las posibilidades de los españoles de no separarnos más de la Ciencia europea.

EXPERIENCIAS

El problema de los problemas: análisis de una experiencia

Por José Ramón PASCUAL IBARRA(*)

ESCUCHO Y OLVIDO. VEO Y RECUERDO.
HAGO Y COMPRENDO

[Proverbio chino]

En un reciente curso que tuve ocasión de impartir a un grupo de jóvenes licenciados, aspirantes al Certificado de aptitud Pedagógica, los propuse el problema bien clásico y conocido, por lo menos para los profesores de mi generación, de dado un segmento AB y una recta, paralela al segmento —no importa como haya sido dibujada— encontrar, con la regla de un solo borde, el punto medio del segmento. Naturalmente, les dije, no es que yo les proponga a Vds. la resolución del problema, pues doy por descontado que muchos de Vds. ya la conocen, y si fuera nuevo para algunos, todos encontrarán inmediatamente la solución. Lo que les propongo es una cuestión didáctica, ¿cómo podemos aprovechar esta situación concreta para hacer de ella una lección destinada a alumnos de Bachillerato?

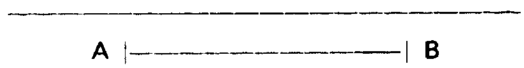
Me vi fuertemente sorprendido al comprobar que fueron muy pocos los que, después de algunos tanteos, resolvieron el problema. Algunos me preguntaron: ¿Qué es eso de la regla de un solo borde?; otros utilizaban —sin darse cuenta— la regla como compás, y los más permanecieron sin hacer nada, alegando simplemente que no lo sabían... que eso no lo habían estudiado.

Me encontré así obligado a resolverles yo el problema, al tiempo que hacía con ellos —como si de alumnos de bachillerato se tratara— la lección que les había propuesto como tema didáctico.

Después de aclararles lo que es la regla de un solo borde (el serrucho), les pedí que no intentaran aplicar ninguno de sus conocimientos matemáticos, sino que actuaran directamente sobre el problema en la forma que lo haría una persona *inteligente*, esto es, educada en el sentido kantiano del término persona: el hombre que ante una situación cualquiera de la vida examina lo que *puede* hacer, analiza lo que *debe* hacer... y después lo hace.

Ante su actitud más bien pasiva les tuve que ayudar, recordando a Polya: ¿cuál es la situación?, ¿cuáles son los datos del problema? ¿de qué medios dispongo?

Los datos son: los puntos A y B, que determinan el segmento, y la recta *p*, paralela a él:



No preguntaremos: ¿qué es lo que *puedo* hacer? Como sólo dispongo de la regla de un borde (y, por supuesto, de un lápiz), la única operación posible es dibujar rectas. Nada conseguiré, evidentemente, trazando rectas «a barullo». *Debo* utilizar los datos del problema. Tendré, por tanto, que dibujar una recta que pase por el punto A:

Y, ahora, obviamente, otra que pase por B:

¿Cómo seguir? Habrá que utilizar el otro dato —la recta *r*— y, si quiero que lo que llevo hecho me sirva de algo, he de fijarme en los puntos A' y B' que las dos rectas ya dibujadas han determinado en *r*. Uniré, pues, A' con B', y B' con A:

Y hecho ésto —lo único que realmente podía y debía hacer—, ya *parece* que «sin querer» tengo resuelto el problema. Basta seguir. La recta PQ me da el punto buscado; es M:

Al llegar aquí la pregunta surge espontánea en la clase: ¿por qué es M el punto medio de AB? Justamente ahora, les digo, es cuando comienza la matemática; en el momento que sentimos la necesidad de *demostrar* una proposición cuya verdad, de alguna forma, hemos intuído. En nuestro caso, estamos convencidos de haber llegado a la solución, porque hemos trabajado inteligentemente, y si el problema tiene solución es la encontrada,

(*) Catedrático de Matemáticas e Inspector de Enseñanza Media.

puesto que hemos realizado efectivamente lo que podíamos y debíamos hacer. Pero mientras no construyamos una demostración, hasta que no encontremos un *porqué*, la proposición para un matemático es sólo una conjetura. Podríamos reforzar el valor de la misma, afianzarnos en ella, repitiendo cuidadosamente la construcción con otras rectas y comprobando que siempre se llega al mismo punto M.

Los alumnos parecen ya más animados y les propongo que busquen una demostración... No la encuentran. Les pregunto, entonces, si no podrían considerar la configuración hallada como caso particular de otra más general. ¿Qué sucedería, al repetir la misma construcción, en el caso de que la recta no fuese paralela al segmento AB? Ahora, la recta cortaría a la que contiene el segmento AB en un punto N, y observemos que el punto M, debido a la inclinación de *r*, se ha desplazado hacia la derecha:

¿Cómo es la cuaterna (ABMN? No lo saben. Les recuerdo que es armónica, y, por tanto, en el caso particular de nuestro problema, por ser N un punto del infinito, M es el punto medio de AB.

Pero esta demostración desborda los conocimientos de un alumno de bachillerato —me dicen— y, por consiguiente, les insto a investigar otra de carácter más elemental. Tampoco la encuentran. Les sugiero entonces que observen bien la configuración final y que procuren expresar en términos «más» geométricos las operaciones realizadas (pensar, muchas veces, es decir, lo mismo de otra manera). Lo que hemos hecho, en definitiva, ha sido: *proyectar* AB sobre *r* desde P (punto arbitrario del plano) en A'B', y después hemos proyectado A'B' en BA, desde Q. Por tanto, por ser *r* paralela a AB, hemos realizado dos homotecias. Como las respectivas razones de estas homotecias son $\frac{A'B'}{AB}$ y $\frac{BA}{A'B'}$ su producto es -1, y la composición de ambas homotecias, la simetría central: M es el punto medio de AB.

Con los alumnos de niveles inferiores del bachillerato puede prescindirse de la demostración —quizá no la necesiten—, pero sí puede pedírseles que, por observación de la figura construida, enuncien en forma de teorema la proposición descubierta. Con ello se pretenden dos cosas importantes: primera, proporcionarles la alegría de haber descubierto algo nuevo, algo que no «viene en el libro», y, segunda —objetivo esencial de la educación matemática— contribuir a la formación del lenguaje, con la precisión y el rigor que la matemática proporciona. El teorema puede enunciarse así: «en un trapecio, la recta que une el punto de intersección de los lados no paralelos con el de intersección de las dos diagonales, pasa por los puntos medios de las bases».

A continuación propuse a los alumnos enunciar y estudiar los problemas inversos del que habíamos resuelto. Son dos:

a) Dados A, B y M, hallar *r*. Esto es, dados un segmento AB y su punto medio M, dibujar por un punto cualquiera del plano una paralela del segmento AB. Siempre, naturalmente, con el uso exclusivo de la regla de un solo borde. Todos, sin excepción, encuentran la solución reconstruyendo la figura.

b) Dados A, M y *r*, paralela a AM, hallar B. Es decir, *duplicar* un segmento. Todos, ahora, también sin excepción, intentan resolver el problema siguiendo la misma vía de reconstrucción de la figura, a partir de los nuevos datos. Ninguno lo consigue. Sin embargo, la solución, en este caso, es *aparentemente* más fácil: En *r* se puede tomar un segmento arbitrario A'B'; como se dispone de AM, paralelo a *r*, es posible, por el teorema directo, hallar M', punto medio de A'B'; uniendo A con A' y M con M', tengo P. La recta PB' me da el punto B.

El comportamiento de los alumnos nos permite verificar, una vez más, la tendencia, cuando se ha adquirido una cierta técnica, esto es, un instrumento que convierte un problema en ejercicio, a aplicar esta técnica de forma indiscriminada, sistemática y rutinaria, aun cuando no sea ya la indicada, y, por otra parte, comprobar también que la solución de un problema que a nosotros, profesores, puede parecernos trivial, no lo es en ocasiones para los alumnos, y siempre que aparezca una situación nueva no es desde luego nada fácil. No olvidemos, pues, y que lo sepan también ellos, que las ideas felices siempre llegan al final, como resultado de muchos intentos fallidos. ¡Llamada a la constancia, a la tenacidad, al esfuerzo continuado!

Ahora ya se les puede hacer ver que por operaciones reiteradas es posible construir sobre la recta AB la recta racional, esto es, encontrar cualquier punto *P* de ella tal que $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$; m, n $\in$ N. Lo que da pie también para hacer oportunas consideraciones sobre los tres tipos de geometría: proyectiva (instrumento, la regla); afín (instrumento, juego de escuadras) y métrica (el compás).

Prolongando la situación en otro orden de ideas, les piso si sabrían calcular la medida del segmento CD, conocidas las medidas de AB y A'B':

Hubo algunos alumnos que sin pensarlo contestaron de forma vaga que «sería» la medida aritmética. Por comparación con la paralela media del trapecio, en seguida se dan cuenta de su error y comprueban que es menor. El cálculo, no difícil, nos da como medida de CD la *media armónica* de AB y A'B'. Esta propiedad del trapecio nos proporciona un método muy sencillo para la construcción gráfica de dicha media. Se observa también, por el cálculo, la propiedad de que la media geométrica de dos segmentos, lo es asimismo de la media aritmética y de la media armónica. El cálculo de la media geométrica de dos números se puede hacer, por tanto, mediante un algorítmo iterativo rápidamente convergente. Confeccionar el organigrama del algorítmo y la utilización de la calculadora de bolsillo, puede ser un ejercicio interesante.

Un somero análisis de esta experiencia plantea una serie de consideraciones. Veamos algunas:

— ¿Por qué los alumnos, en mi opinión, encuentran hoy mayores dificultades que nunca para la resolución de problemas?

— Si, siguiendo a Polya, la actividad característica de la inteligencia, es decir, la más específicamente humana, es la capacidad para plantearse y resolver problemas, ¿en dónde radica esta capacidad y cómo impulsarla?

— ¿No se habrá pasado, con la supresión de los exámenes de grado elemental, de grado superior, de ingreso en las escuelas técnicas... de una situación que, en efecto, no era buena, pues en demasiadas ocasiones generaban técnicas «preparatorias» rutinarias, con profusión de recetas y trucos, al extremo opuesto, abandonando los problemas concretos, creativos, que, por una parte, motivan la construcción de los conceptos matemáticos como modelos válidos para manejar la complejidad de los fenómenos reales, y, por otra, cultiva el sentido de aplicabilidad?

— ¿No se habrá exagerado la finalidad de la educación matemática, que se dice formadora de la inteligencia —y lo es—, pero no en abstracto, sino como formato de la aptitud para comportarse inteligentemente en situaciones concretas?

— Cómo observa la profesora Krygowska, en las recientes reformas de la enseñanza de la matemática ¿no habrá privado más la idea de construir un edificio coherente y lógico de las matemáticas elementales, sin preocuparse también —lo que es imprescindible para la viabilidad de la reforma— de los métodos de realización concreta en la clase de las nuevas ideas?

— Por olvido o ignorancia de este factor esencial, el ideal de Klein de enseñar la matemática elemental desde un punto de vista superior, ¿no habrá sido invertido por algunos profesores, haciéndolo al revés: enseñar, o tratar de enseñar, matemática superior desde un punto de vista elemental, lo que no deja de ser, en una perspectiva psicológica, un error didáctico, queriendo hacer del Instituto una caricatura de la Universidad?

— Con la matemática clásica —digamos para entendernos— y, en particular, con la geometría tradicional, que ha sido la cenicienta de la reforma, disponíamos los profesores de buenos y bellos problemas, teóricos y prácticos, hoy —¿justamente? ¿injustamente?— abandonados. ¿Los hemos sabido reemplazar por otros suficientemente motivadores, adaptados a las posibilidades reales de los alumnos?

— El predominio de la algebrización de la matemática y de su construcción axiomática, impecable modelo teórico-sistemático ¿no comportará una limitación de la libertad del alumno para un aprendizaje activo, aprendizaje más ligado a procesos intuitivos —intuición descubridora y creadora— que a los rígidos métodos exclusivamente deductivos y demostrativos, culminación de aquellos procesos?

— Bien están las nociones de lógica formal como instrumento del pensamiento, pero, ¿más que «enseñar lógica» no será tarea del profesor de bachillerato habituar a nuestros alumnos a «actuar con lógica»?

En relación con este punto, veamos el siguiente problema, también muy fácil, tomado del librito *Cómo jugar a divertirse con su inteligencia* de Jaime y Lea Poniachik (Ed. Altalena, 1978). Problema que también fue propuesto a los mismos alumnos, con idénticos resultados:

Se trata de averiguar por *cinco* comensales extranjeros, desconocedores de la lengua del país, lo que les ofrece la minuta de un restaurante compuesta de *nueve* platos diferentes, siempre los mismos. El primer día solicitan cinco platos que el camarero trae y coloca en el centro de la mesa. Repiten la operación en el segundo y el tercer día, y consiguen de esta forma identificar el contenido de cada plato con su denominación en la carta. ¿Cómo lo lograron?

El problema es muy similar al muy clásico de las tres pesadas. Hay que conseguir la máxima información en cada pedido y saber aprovecharse de ella. Sean los platos A, B, C, D, E, F, G, H, I.

1.er pedido	2.o pedido	3.er pedido
A	B	C
A	E	F
B	E	H
C	F	H
D	G	I

Los platos, en consecuencia, quedan identificados por el esquema:

1	11	22
2	12	23
3	13	33

cuyos elementos corresponden, respectivamente, a los platos:

D	A	E
G	B	F
I	C	H

¿Admite el problema alguna generalización cambiando el número de comensales, de platos y de pedidos?

— Como conclusión, estimo que la difícil tarea que nos corresponde a los profesores de matemáticas de bachillerato, integrado hoy —nos guste o no— en la formación general, y por imperativo de la era tecnológica y de la sociedad cambiante a ritmo acelerado ¿no será la de crear una nueva metodología —aún sin hacer— más acorde con las nuevas necesidades, que nos permita dar, si no mejores matemáticas sí una mejor y más eficaz educación matemática a un mayor número de alumnos?

Este es el desafío, creo yo, con que nos enfrentamos, y el esfuerzo que la sociedad, y nuestros alumnos, nos exigen.

La simulación de modelos (*)

Por José Manuel MARTINEZ SANCHEZ(**)

1. INTRODUCCION

La acción formativa de la matemática, así como su papel de útil y auxiliar en otras ciencias, son hechos generalmente reconocidos. También es notorio que las ramas de la actividad humana, en las que la matemática muestra su influencia, están en constante ampliación, siendo cada vez más los profesionales que tienen necesidad de utilizar las técnicas matemáticas en su trabajo.

Sin embargo, en la práctica docente, no es siempre fácil encontrar ejemplos actualizados de estos hechos que motiven y sean asequibles a nuestros alumnos.

La simulación de modelos es un ejemplo privilegiado para mostrar cómo los métodos matemáticos permiten tratar una serie de problemas que se presentan en la vida cotidiana y que, a primera vista, parecen alejados del quehacer matemático. El interés que esto despierta en los alumnos motiva su deseo de conocer más sobre los métodos matemáticos.

Por otro lado, la simulación de modelos, a la vez que facilita una enseñanza activa e individualizada, permite introducir el concepto de algoritmo en procesos secuenciales no numéricos, lo cual presenta fecundas perspectivas como factor interdisciplinar y y como iniciación a las técnicas de programación.

2. EXPERIENCIA

Como resumen de una experiencia, llevada a cabo con nuestros alumnos, describimos, a continuación, el proceso seguido para simular una sesión de estudio, durante la cual se necesita utilizar, por varios usuarios, con frecuencia e intensidad variables, un determinado libro de consulta.

Aprovechando la circunstancia de que un grupo de alumnos de C.O.U. disponía de 2^h semanales, que podían ser utilizadas para prácticas y trabajos en grupo, formamos cinco equipos de trabajo, con objeto de que profundizaran en el estudio de algunos temas de especial interés del programa. A cada equipo se le proporcionaba el contenido esquemático de los temas, los puntos de mayor dificultad de los mismos y la correspondiente bibliografía de consulta para ser utilizada en las sesiones semanales de estudio.

Para varios de los temas propuestos era necesario consultar un libro determinado, del que sólo disponíamos de un ejemplar, y se producía el inconveniente de que distintos equipos necesitaban consultar a la vez o de que cuando un equipo necesitaba hacer una consulta, el libro estaba siendo utilizado por otro equipo. A la vista de este inconveniente surgió la pregunta natural: ¿es suficiente, para nuestro trabajo, un solo ejemplar del libro?

Evidentemente que, en este caso, el inconveniente se evitaría comprando más ejemplares. Sin embargo, surgen las siguientes consideraciones:

1.ª El uso de los libros es temporal y no son necesarios con posterioridad.
2.ª El inconveniente es mínimo, pues el tiempo que se pierde esperando consultar es muy pequeño y no afecta al trabajo.
3.ª El inconveniente no es significativo, pues surge en algunas, pocas, sesiones, pero no en todas.

Por tanto, es lícito preguntarse si es realmente necesario comprar más ejemplares, y si es así: ¿cuántos?

En general, bien porque la compra del material sea costosa, bien porque sea difícil, la decisión de comprar debe estar fundada en un criterio racional que permita saber si dicha compra es realmente necesaria y en qué cuantía.

Con el fin de obtener la información necesaria para saber si bastaba un solo ejemplar del libro de consulta, sin agotar todas las sesiones de estudio, propuse reproducir, bajo condiciones e hipótesis determinadas, el proceso de consulta. Es decir, construir un modelo aceptable de las sesiones de estudio típicas, de dos horas de duración, cinco equipos de trabajo y un solo libro de consulta, que permitiera simular cuantas sesiones fueran necesarias para obtener una idea del proceso real.

En efecto, la simulación nos permite determinar, para un gran número de casos y en breve tiempo, el porcentaje de utilización del libro, el tiempo dedicado por cada equipo a consultar y el tiempo que cada equipo pierde en espera de efectuar su con-

---

(*) Este trabajo fue realizado y experimentado con alumnos de C.O.U., durante el curso 1973-74, apareciendo por primera vez en cursillos sobre Didáctica de la Matemática. A pesar del tiempo transcurrido creemos de interés, dada la difusión de la Revista de Bachillerato, incluirlo en este número monográfico para que pueda llegar a conocimiento del mayor número posible de profesores interesados por una enseñanza activa de la matemática. Nos daremos por satisfechos, si con ello contribuimos a sugerir ideas, y a despertar inquietudes, sobre la búsqueda de nuevas formas de acción docente.

(**) Catedrático de Matemáticas e Inspector de Enseñanza Media.

sulta cuando el libro es utilizado en ese instante por otro equipo.

Con estos datos, podemos estimar el número de ejemplares, de la obra de consulta, que es necesario poner a disposición de los equipos de trabajo, para que las demoras en realizar las consultas no sean excesivas.

Naturalmente, la experiencia es trasladable a cualquier otro material que debe ser utilizado simultáneamente por varios usuarios: tablas de logaritmos, calculadoras, etc. O también, para determinar el mínimo deseable de ejemplares de una obra, de uso frecuente, que debe haber en la biblioteca de un Centro.

3. MATERIAL

El material utilizado para simular las sesiones de estudio lo describimos, a continuación, indicando el uso del mismo.

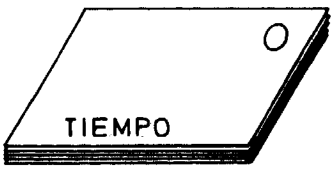
El tiempo de trabajo: Veintiséis tarjetas, numeradas de 0 a 25, que representan los veinticuatro intervalos de tiempo en que subdividimos la sesión de trabajo. Las tarjetas 0 y 25 sirven para indicar el principio y fin del proceso.

El libro de consulta: Ficha que representa al libro de consulta y que, a la vez, sirve para, en el dorso, acumular información sobre las consultas realizadas.

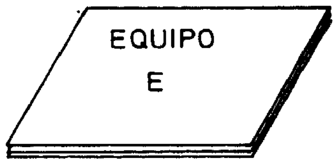
Los equipos de trabajo: Cinco cartulinas, marcadas E_1 a E_5, para representar los equipos de trabajo. Al dorso se anota el momento en que el equipo correspondiente necesita hacer una consulta, el momento en que empieza a consultar y el final de la consulta realizada.

La probabilidad de consulta: Dado que nos permite simular la probabilidad de consulta para cada equipo en un instante determinado.

La duración de una consulta: Bolsa con doce bolas, convenientemente numeradas, que nos permite simular la duración de una consulta.

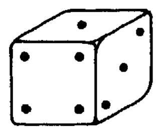


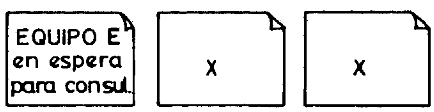
Paquete T "en cero"



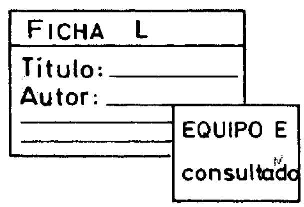
Equipo en "posición de trabajo"


Bolsa con bolas


Dado



Fila de equipos en



NOTA: Si sobre la ficha L no hay ningún equipo consultando decimos que el libro está «disponible».

4. DESCRIPCION

El tiempo que dura la sesión de trabajo, dos horas, lo subdividimos en 24 períodos de 5^m; cada uno de los cuales viene representado por una de las tarjetas numeradas del 1 al 24. El transcurso del tiempo, durante la sesión, se simula al ir retirando las tarjetas del paquete T, la simulación comienza a retirar la tarjeta 0 y finalizar cuando sólo queda la tarjeta 25, que se marca con las letras «FINAL TIEMPO».

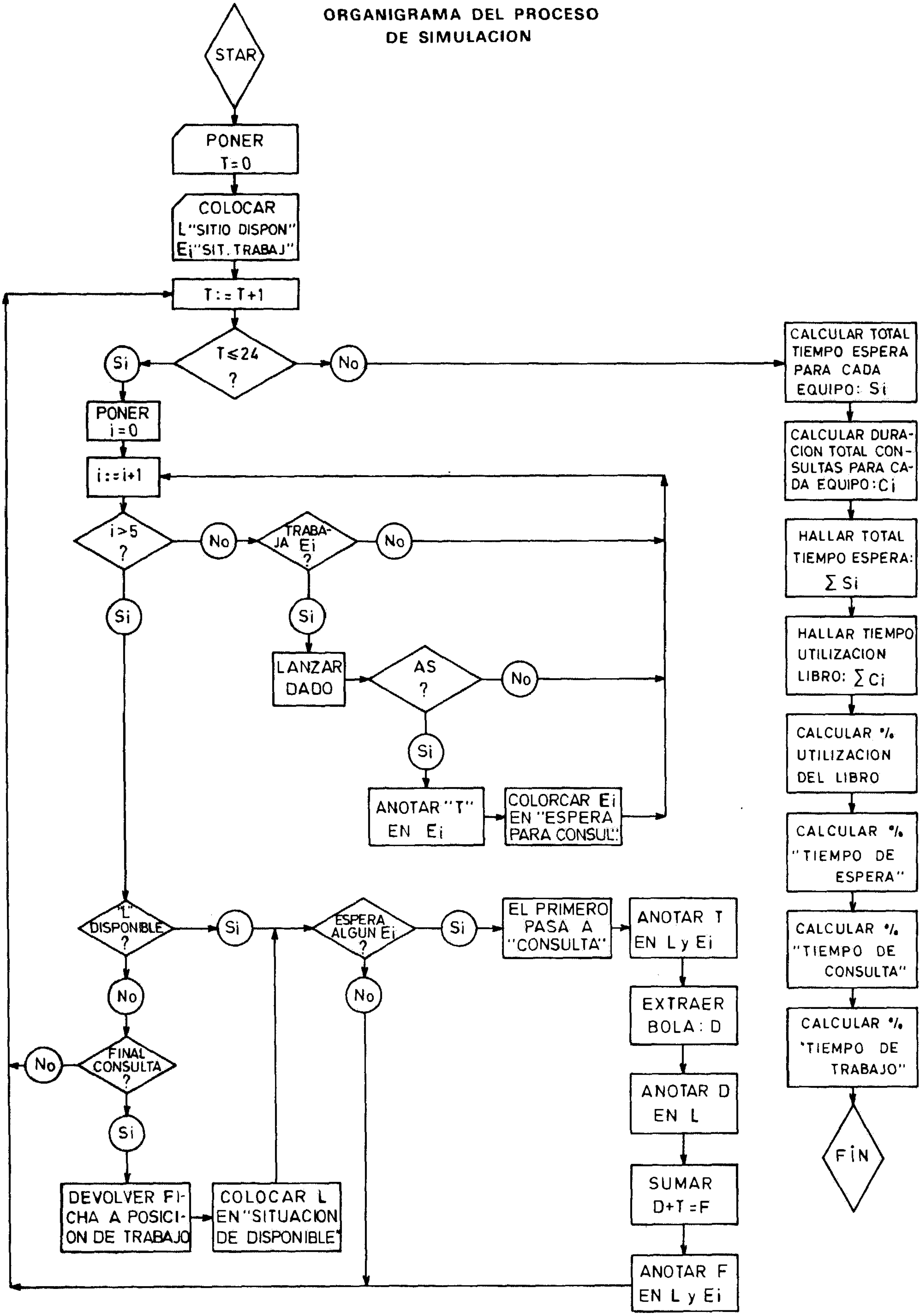
Repetimos que cada tarjeta representa 5^m de tiempo real, por consiguiente, al retirar una tarjeta, se simula que han transcurrido 5^m de la sesión de trabajo. En cada uno de esos 5^m, uno, o varios equipos de trabajo, pueden tener, o no, necesidad de consultar el libro, que, en ese instante, puede estar disponible u ocupado.

La frecuencia y duración de las consultas no es fija y se establecen, generalmente, por observaciones previas en situaciones reales. En nuestro caso, las sesiones de estudio ya realizadas nos indicaron que, en media, cada equipo venía a realizar cuatro consultas en las dos horas de trabajo.

Por consiguiente, en cada período de 5^m hay *una* posibilidad, sobre *seis* de realizar una consulta. En este caso, la probabilidad de consulta es 1/6 y se puede simular mediante el lanzamiento de un dado. Convenimos en que si se obtiene «AS» se produce la necesidad de consultar, y no se produce en caso contrario.

Asimismo, las consultas son de duración variable, desde las breves, para una cita o dato, hasta las que que requieren leer todo un epígrafe; en cualquier caso no solían presentarse consultas con duración superior a 30^m ni inferior a 5^m. Para nuestra experiencia llegamos a establecer, como aceptable, la siguien-

ORGANIGRAMA DEL PROCESO DE SIMULACION



te distribución de tiempo para la duración de las consultas en proporción:

«Dos consultas de 5^m, tres de 10^m, tres de 15^m, dos de 20^m, una de 25^m y una de 30^m.»

Esta distribución se puede materializar mediante una bolsa, en la que introducimos 12 bolas o discos numerados: *dos* de ellos con el número 1; *tres*, con el número 2; *tres*, con el número 3; *dos*, con el número 4; *uno* con el número 5 y *otro* con el número 6 para indicar los períodos de tiempo de 5^m empleados en la consulta.

La simulación de la duración de consulta consiste en elegir una bola al azar, de entre las doce de la bolsa, y el número escrito en la misma nos indica el número de períodos de 5^m empleados en la consulta.

Si en un instante dado, indicado por la tarjeta superior del paquete de tiempos, un equipo tiene necesidad de consultar, puede empezar la consulta en ese instante si el libro está disponible, o ponerse en espera para consultar cuando el libro esté ocupado. Los equipos en espera para consultar forman una «fila de espera».

Pudiese ocurrir que un equipo necesita consultar cuando se acaba el tiempo de simulación, en este supuesto hay dos opciones, como ocurre en las situaciones reales: o prolongamos la sesión hasta que el equipo interesado acabe la consulta o, por el contrario, al finalizar el tiempo de trabajo se suspende toda actividad y lo que quede pendiente se concluirá en la próxima sesión. Cualquiera de las dos opciones es válida, pero es conveniente, para la uniformidad de los cálculos, fijar una de ellas de antemano.

La «fila de espera» se simula colocando una a continuación de otra las cartulinas, que representan los equipos que necesitan consultar, a la altura de la ficha del libro. El hecho de que el libro esté ocupado lo indicamos colocando, encima de la ficha del libro, la cartulina del equipo que consulta. Cuando el equipo que está consultando finaliza su consulta, vuelve a la «posición de trabajo» y su lugar lo ocupa el primero de la «fila de espera» cuando lo haya.

Se empieza poniendo el paquete T en cero, es decir, ordenadas las tarjetas de menor a mayor numeración, colocando a los equipos en «posición de trabajo» y el libro «disponible». Se inicia la simulación al retirar la tarjeta 0, y comenzar a contar los 5^m primeros, simbolizados por la tarjeta 1, durante los cuales vemos, mediante lanzamientos del dado, si los equipos tienen, o no, necesidad de consultar. El proceso sigue, y si, en un instante dado, un equipo tiene necesidad de consultar la extracción de una bola de la bolsa, nos simula la posible duración de la consulta.

El análisis del proceso permite confeccionar la carta de flujo del mismo, dada por el siguiente organigrama:

5. LA PROGRAMACION DEL PROCESO DE SIMULACION

A la vista del organigrama anterior, y mediante el listado secuencial de los distintos pasos del proceso, se realiza la programación correspondiente.

El programa realizado se compone de una serie de instrucciones, a la izquierda de las cuales se escribe su número de orden, que nos indican las operaciones a realizar. En cada instrucción también se dice, mediante el correspondiente número de orden encerrado entre paréntesis, la instrucción a ejecutar en el siguiente paso. Si no se indica la instrucción que hemos de realizar a continuación, se entiende que es la inmediatamente siguiente en la secuencia.

En el organigrama, utilizando el subíndice *i* como «contador» hemos englobado en un bucle todo el proceso que siguen los equipos E_i en el programa hemos preferido indicar, para mayor claridad, el proceso para cada uno de los equipos E_1 a E_5 por separado.

PROGRAMA

1. Poner el paquete T, de tarjetas que simulan el tiempo, en cero.
2. Colocar las fichas E_1, que representen a los equipos, en «posición de trabajo», y L en «situación de disponible».
3. Retirar la tarjeta superior de T, si aparece «FINAL TIEMPO», T = 25, ir a (31). Si no, pasar a (4).
4. Si el equipo E_1 está trabajando, pasar a (5). Si no, ir a (8).
5. Se lanza el dado; si se obtiene «AS», pasar a (6). Si no, ir a (8).
6. Anotar, en la ficha de E_1 el momento dado por el número que figura en la tarjeta superior de T, en que se produce la necesidad de consultar.
7. Colocar E_1 en «espera para consulta».
8. Si E_2 está trabajando, pasar a (9). Si no, ir a (12).
9. Se lanza el dado; si se obtiene «AS», pasar a (10). Si no, ir a (12).
10. Anotar en E_2 el momento en que se produce la necesidad de consulta.
11. Colocar E_2 en «espera para consulta».
12. Si E_3 está trabajando, pasar a (13). Si no, ir a (16).
13. Se lanza el dado; si se obtiene «AS», pasar a (14). Si no, ir a (16).
14. Anotar en E_3 el momento en que se produce la necesidad de consultar.
15. Colocar E_3 en «espera para consulta».
16. Si E_4 está trabajando, pasar a (17). Si no, ir a (20).
17. Se lanza el dado; si se obtiene «AS», pasar a (18). Si no, ir a (20).
18. Anotar en E_4 el momento en que se produce la necesidad de consultar.
19. Colocar E_4 en «espera para consulta».
20. Si E_5 está trabajando, pasar a (21). Si no, ir a (24).
21. Se lanza el dado; si se obtiene «AS», pasar a (22). Si no, ir a (24).
22. Anotar en E_5 el momento en que se produce la necesidad de consultar.
23. Colocar E_5 en «espera para consulta».
24. Si el libro L está «disponible», ir a (27). Si, por el contrario, algún equipo está consultando, pasar a (25).
25. Si la consulta ha finalizado, pasar a (26). Si no, se vuelve a (3).
26. Se devuelve la ficha del equipo que ha finalizado la consulta a su «posición de trabajo» inicial. El libro L se pone de nuevo en «situación disponible».
27. Si hay, al menos, un equipo en «espera para consulta», el primero de la fila pasa a consulta, colocándole sobre la ficha L y se pasa a (28). Si no hay ningún equipo en la fila de espera, se vuelve a (3).

28. Anotar, en las fichas del libro y del equipo en «situación de consulta», el instante T en que ha comenzado la consulta.
29. Se extrae una bola de la bolsa, que simula la duración de las consultas, el resultado D se anota en la ficha L.
30. Se suma D al número T, indicado en la tarjeta superior del paquete de tiempo, el resultado F se escribe en la columna «Final de consulta» de la ficha del equipo y, para control de errores, también se anota en la ficha L. A continuación se vuelve a (3).
31. Se determina el total S_i del tiempo de espera para cada equipo E_i.
32. Se calcula la duración total C_i de las consultas realizadas por cada equipo E_i.
33. Se halla el tiempo ΣS_i de espera total.
34. Se suman las duraciones de todas las consultas para hallar el tiempo total ΣC_i de utilización del libro.
35. Se calcula el porcentaje de tiempo de utilización del libro.
36. Se calcula el porcentaje de tiempo dedicado por los equipos a «esperas para consultas».
37. Se calcula el porcentaje de tiempo empleado en las consultas.
38. Se determina, para control de errores, el porcentaje de tiempo en el que los equipos están trabajando.
39. FIN.

6. RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE LA SIMULACION DE UNA SESION DE TRABAJO

Con el siguiente ejemplo pretendemos dar una idea sobre el desarrollo de una sesión de trabajo simulada.

Los datos sobre los resultados obtenidos se anotan en las fichas de los equipos y del libro, todo lo cual se resume en los siguientes cuadros.

Además, tenemos que:

El tiempo total de utilización del libro es 25 periodos de tiempo, igual a la suma de la duración de las consultas.

El tiempo de trabajo para cada equipo (P), es de 24 períodos y el tiempo total de trabajo (t. t.) es de 5 × 24 (= 120) periodos de tiempo

Con estos datos se calculan los siguientes porcentajes:

1) *Utilización del libro* $\frac{\Sigma C_i}{P} \times 100$

$$\simeq \frac{25}{29} \times 100 \simeq 86{,}2\,\% \quad ó \; \frac{20}{24} \times 100 \simeq 83{,}3\,\%^{25}$$

2. *Tiempo de espera* $\frac{\Sigma S_i}{t.\ t.} \times 100$:

$$\simeq \frac{32}{125} \times 100 \simeq 25{,}6\,\% \quad ó \; \frac{32}{120} \times 100 \simeq 26{,}6\,\%$$

3. *Tiempo de consulta* $\frac{\Sigma C_i}{t.\ t.} \times 100$:

$$\frac{25}{125} \times 100 \simeq 20\,\% \quad ó \; \frac{25}{120} \times 100 \simeq 20{,}83\,\%$$

Los resultados obtenidos fueron:

Tiempos	Nec. consul.	Fil. espera	Prin. consl.	Fin. consl.
1	E_1, E_5	E_6	E_1	—
2	E_4	E_5, E_4	—	—
3	—	E_5, E_4	—	—
4	E_3	E_4, E_3	E_5	E_1
5	—	E_4, E_3	—	—
6	—	E_4, E_3	—	—
7	E_1	E_4, E_3, E_1	—	—
8	—	E_4, E_3, E_1	—	—
9	—	E_3, E_1	E_4	E_5
10	E_2	E_3, E_1, E_2	—	—
11	—	E_3, E_1, E_2	—	—
12	—	E_3, E_1, E_2	—	—
13	—	E_1, E_2	E_3	E_4
14	—	E_2	E_1	E_3
15	—	E_2	—	—
16	—	—	E_2	E_1
17	—	—	—	—
18	—	—	—	—
19	—	—	—	—
20	—	—	—	E_2
21	—	—	—	—
22	E_3	—	E_3	—
23	—	—	—	E_3
24	E_1	—	E_1	→
FIN				
(29)	—	—	—	E_1 (*)

(*) La simulación acaba en el momento 24, pero, en esta experiencia, se acordó prolongar el tiempo de simulación hasta que el último equipo que necesite consultar finalice la consulta.

EQUIPOS

Fichas	Mom. de Nec. consl.	Periodos espera	Principio consl.: T	Duración consl.: D	Fin. consulta F = T + D
E_1	1 7 24	0 7 0	1 14 24	3 2 5	4 16 29
E_2	10	6	16	4	20
E^3	4 22	9 0	13 22	1 1	14 23
E_4	2	7	9	4	13
E_5	1	3	4	5	9

TOTALES						
EQUIPOS	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Sumas
Tiempos de espera (S_i)	7	6	9	7	3	$32 = \Sigma S_i$
Duración consultas (C_i)	10	4	2	4	5	$25 = \Sigma C_i$

NOTA: Para esta experiencia concreta, el decidir prolongar el tiempo de trabajo, hasta el momento 29, se tiene:

FICHA L DEL LIBRO								
Principio consulta.	1	4	9	13	11	16	22	24
Final consulta.	4	9	13	14	16	20	23	29
Duración consulta.	3	5	4	1	2	4	1	5

4. *Tiempo de trabajo* $\frac{t.t. - (\Sigma S_i + \Sigma C_i)}{t.t.} \times 100$:

$$\frac{125 - (32 + 25)}{125} \times 100 \simeq 54{,}4\,\%$$

$$\text{o}\left(\frac{120 - (32 + 35)}{120} \times 100 \simeq 52{,}5\,\%\right)$$

a la vista de estos resultados, parece que tanto el porcentaje de utilización del libro, más de un 85 %, como el tiempo de espera, más de un 25 %, sobre el total del tiempo de trabajo es grande.

Sin embargo, con este solo ejemplo no es prudente pronunciarse todavía sobre si es, o no, conveniente adquirir más ejemplares del libro. Dejamos la cuestión abierta a la espera de que el lector haga más ensayos y vea, además, si el porcentaje de espera para cada equipo, sobre su total de tiempo de estudio, es significativo.

7. CONCLUSION

Bajo ciertas hipótesis hemos construido un modelo del fenómeno que deseamos estudiar, en nuestro caso, las sesiones de estudio descritas, este modelo se puede reproducir a voluntad en breve tiempo. Repitiendo el proceso de simulación tantas veces como se considere necesario, llegamos a obtener una serie de resultados que nos suministran información sobre el fenómeno real.

Se comprende que, para obtener resultados en breve tiempo, cuando el proceso de simulación es largo o complejo, sea necesario recurrir al tratamiento automático de la información por medios de un ordenador.

La utilización didáctica de la simulación de modelos creemos, pues, que permite cubrir de manera amena y eficaz diversos objetivos docentes previamente establecidos.

Aviso a los lectores

La redacción de la Revista se ha trasladado a:

Paseo del Prado, 28, planta 7.ª

MADRID-14

Simulaciones aleatorias

Por Ricardo AGUADO-MUÑOZ, Ricardo ZAMARREÑO y Agustín BLANCO(*)

1. INTRODUCCION

En este trabajo presentamos unos ejemplos sencillos de *simulación aleatoria* con ayuda de calculadoras.

Las técnicas de simulación que vamos a exponer se conocen bajo el nombre genérico de *Método de Montecarlo* debido a que sus creadores, los matemáticos J. von Neumann y S. Ulam, lo dieron a conocer en un artículo titulado «The Monte Carlo method» en 1949. El nombre hace alusión al famoso casino, pues la ruleta es uno de los instrumentos que se pueden utilizar para simular una variable aleatoria.

En la actualidad, en lugar de ruletas, se utilizan ordenadores. Nosotros hemos intentando aplicar las calculadoras a la realización de estos métodos en bachillerato.

Para la práctica de estas actividades es conveniente disponer de una calculadora programable. A pesar de esto, en la clase se puede dividir el trabajo entre distintos grupos de alumnos, de modo que las calculadoras normales sean aprovechables.

La base del método está en la generación de *números aleatorios*, que pasamos a exponer.

2. GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS

Podemos imaginar que un *número aleatorio* es aquel que se obtiene mediante «un sorteo» efectuado en un conjunto de números.

A veces se necesita disponer de una lista de números aleatorios x_i, comprendidos entre 0 y 1, y distribuidos uniformemente en el intervalo (0,1).

Esta lista puede ser sustituida por una sucesión de números aleatorios (1) generados con la calculadora, del siguiente modo:

Inicialmente elegimos un número, por ejemplo:

$$x_0 = 0{,}3727468;$$

lo multiplicamos por 147:

$$0{,}3727468 \times 147 = 54{,}7937796$$

De este número, nos quedamos con la parte decimal x_1:

$$x_1 = 0{,}7937796$$

A partir de x_1 repetimos el proceso para obtener x_2:

$$x_2 = \text{parte decimal de } (0{,}7937796 \times 147)$$

$$x_2 = 0{,}6856012$$

Del mismo modo obtenemos los números aleatorios siguientes:

$$x_3 = 0{,}7833764$$
$$x_4 = 0{,}1563308$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En general, se tiene:

$$\boxed{x_{n+1} = D(147 \cdot x_n)}$$

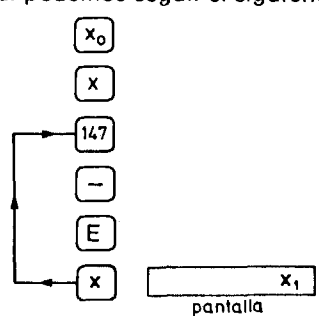
siendo D la función parte decimal.

El número x_0, a partir del cual se genera la sucesión de números aleatorios, se llama *semilla*. El número 147 es el *generador*.

El carácter aleatorio de la sucesión se puede probar mediante tests especiales; pero nosotros vamos a confirmar este carácter diseñando algunos procesos aleatorios que lo confirmarán de modo indirecto.

Es claro que se puede empezar por otra semilla. En cuanto a generadores, además del 147, se pueden usar, entre otros, los siguientes: 83; 117; 123; 133; 163; 173; 187 y 197 (2). El lector podrá añadir algún otro de su cosecha después de haberlo experimentado convenientemente.

Para generar números aleatorios con una calculadora normal podemos seguir el siguiente programa:



(*) Catedrático y profesores agregados de Matemáticas respectivamente del I.N.B. «Herrera Oria» de Madrid.

(1) Más propiamente: los números «aleatorios» generados por un computador se llaman *pseudoaleatorios*.

(2) RADE, L.: *Tentez votre chance avec votre calculateur programable*. CEDIC. Paris, 1977.

En este programa E representa la parte entera de 147 x_0.

3. CALCULO ALEATORIO DE π

Vamos a ver una primera aplicación de los números aleatorios:

Se trata de calcular un valor aproximado de π, lanzando dardos sobre la diana representada en la figura 1.

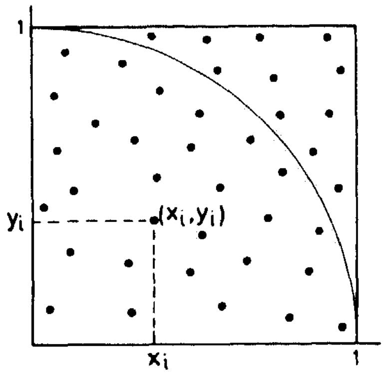


Fig. 1

La diana es un cuadrado de lado 1, en el que se ha inscrito un cuadrante de círculo.

Supongamos que todos los dardos que se lanzan dan en el cuadrado y que se reparten uniformemente; entonces la probabilidad de que un dardo caiga en el cuadrante de círculo es:

$$p = \frac{\text{área del cuadrante}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Supongamos, ahora, que lanzamos N dardos sobre el cuadrado, y sea n el número de los que caen en el cuadrante. La frecuencia relativa de caída en el cuadrante $\frac{n}{N}$, será aproximadamente igual a $\frac{\pi}{4}$. Por tanto:

$$\boxed{\pi \simeq \frac{4n}{N}}$$

Si el número N es suficientemente grande, cabe esperar que $\frac{4n}{N}$ sea una buena aproximación de π.

Como no es cosa de ponerse a lanzar dardos sobre un cuadrado, los lanzamientos serán simulados con la calculadora:

Produzcamos dos sucesiones de números aleatorios comprendidos entre 0 y 1:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$$
$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$$

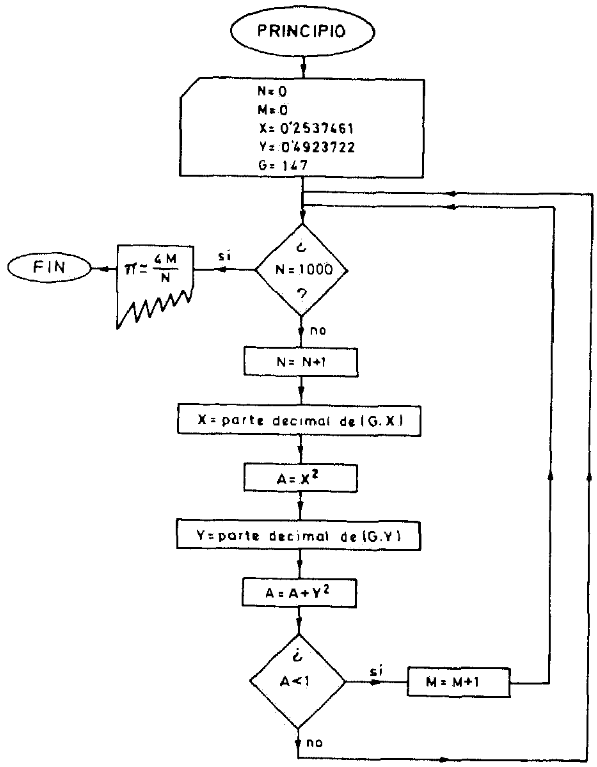
Cada par de números (x_i, y_i) representa un punto del cuadrado (fig. 1), es decir, el resultado obtenido al lanzar el dardo i-ésimo. Si $x_i^2 + y_i^2 < 1$, el dardo ha dado en el cuadrante de círculo.

Simulando el lanzamiento de, por ejemplo, 1.000 dardos y contando el número n de los que caen en el cuadrante, tenemos:

$$\pi \simeq \frac{4n}{1.000}$$

He aquí el organigrama para esta simulación:

ORGANIGRAMA PARA EL CALCULO ALEATORIO DE π



Con una calculadora programable hemos ejecutado el correspondiente programa y obtenido los siguientes resultados:

N	π
10	3,6
100	3,28
1000	3,200
10000	3,1428

Para efectuar el cálculo aleatorio de π con calculadoras científicas normales, conviene elegir los pares (x_i, y_i) en una *tabla de digitos aleatorios*. El recuento resulta tedioso si lo hace una sola persona; nosotros, en la clase, hemos distribuído fotocopias de una tabla de dígitos aleatorios y cada alumno ha efectuado 10 lanzamientos. De este modo la clase consigue unos 400 lanzamientos, número suficiente para ilustrar el método.

Vale la pena señalar que, a falta de tablas de dígitos aleatorios, se puede usar una guía telefónica, considerando, por ejemplo, las cuatro últimas cifras de cada número de teléfono.

4. SIMULACION DE RULETAS

Para simular la ruleta de la figura 2 podemos proceder del siguiente modo: de cada número aleatorio x_i, $0 < x_i < 1$, tomamos la primera cifra decimal; así, por ejemplo, el número aleatorio x = 0,2151462 nos proporciona el dígito aleatorio 2. Con una calculadora programable, la primera cifra decimal de x_i se puede hallar tomando la parte entera de $10\,x_i$. En general:

$$d_i = E\,(10\,x_i)$$

siendo E la función parte entera.

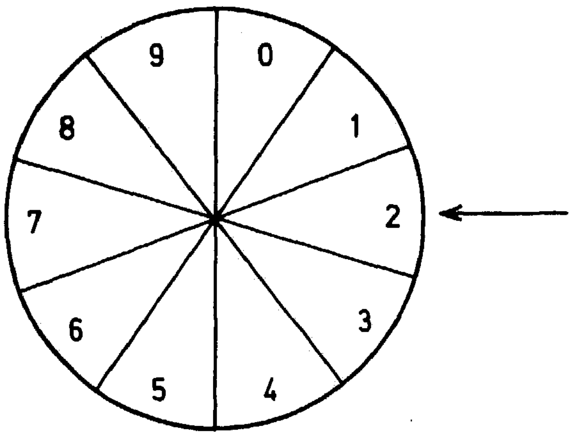


Fig. 2

Con una calculadora programable, y partiendo de la semilla $x_0 = 0{,}3727468$ hemos obtenido los dígitos:

7 6 7 1 9 1 3 1 4 1 1 0 4 0 1 7 1 2 6 3
9 6 3 6 4 6 0 8 2 5 5 3 6 3 7 8 3 1 2 4

5. SIMULACION DE UN DADO

A partir de la ruleta anterior se puede simular un dado despreciando los dígitos 0, 7, 8 y 9 cada vez que aparezcan. Sin embargo, resulta más sencillo el siguiente procedimiento:

1.° Generar un número aleatorio x_i, $0 < x_i < 1$.
2.° Calcular $6x_i$, que será un número comprendido entre 0 y 6.
3.° Hallar la parte entera de $6x_i$, que será uno de estos números: 0, 1, 2, 3, 4, 5.
4.° Sumar una unidad al resultado obtenido en el apartado anterior.

Brevemente:
Una vez generado el número aleatorio x_i, el punto del dado es:

$$d_i = E(6x_i) + 1$$

siendo E la función parte entera.

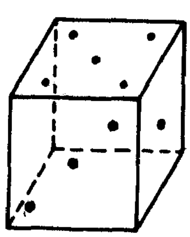


Fig. 3

Veamos un ejemplo:
partiendo de $x_0 = 0{,}3727468$, calculamos:

$$147x_0 = 54{,}7937796,$$

tomamos la parte decimal:

$$x_1 = 0{,}7937796,$$

multiplicamos por 6:

$$6x_1 = 4{,}7626776,$$

tomamos la parte entera:

$$E(6x_1) = 4,$$

sumamos una unidad:

$$d_1 = 4 + 1 = 5$$

El número 5 es, pues, el resultado del primer «lanzamiento».
A partir de x_1 se reitera el proceso.
El lector puede diseñar un programa adaptado a su calculadora. Nosotros hemos obtenido, con un programa que calcula las frecuencias de cada dígito, los resultados que se recogen en la tabla:

N	1	2	3	4	5	6
10	4	0	2	0	3	1
100	23	17	16	17	17	10
1000	164	156	155	181	186	158
10000	1623	1625	1625	1777	1709	1641

6. SIMULACION DE MONEDAS

Una moneda es un caso particular de ruleta. Es la ruleta que sólo tiene dos números: 0 y 1.

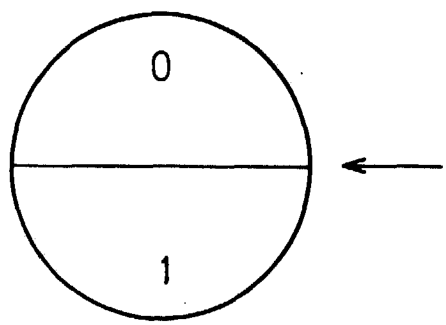


Fig. 4

El 0 representa la *cara* y el 1 la *cruz*.
Para obtener estos números podemos considerar el siguiente proceso:

Después de generar el número aleatorio x_i, $0 < x_i < 1$, sumamos 0,5, y obtenemos un número comprendido entre 0,5 y 1,5. Si ahora hallamos la parte entera, obtenemos 0 ó 1, cada uno de ellos con probabilidad 0,5.

$$d_i = E(x_i + 0{,}5)$$

A veces se necesita simular una ruleta como la de la figura 5, que proporciona 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad 1-p.

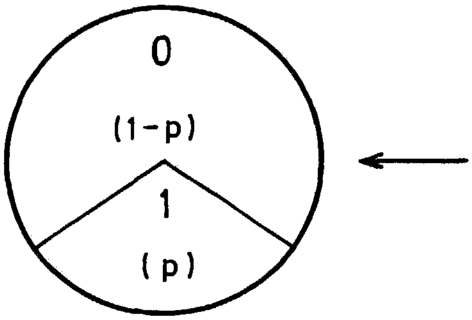


Fig.5

Esta ruleta se puede simular mediante el algoritmo:

$$d_i = E(x_i + p)$$

Con un programa para obtener 1 con probabilidad 1/3 hemos elaborado la siguiente serie aleatoria, que recogemos en tabla agrupando los dígitos de tres en tres.

111	001	000	000	000	100	111	000	000	100
010	011	000	000	000	000	100	100	001	010
000	000	110	010	100	000	011	100	110	001
000	000	001	000	011	101	011	110	100	101
100	100	101	011	100	101	010	000	011	101
001	001	100	100	110	000	010	010	000	000
000	100	000	110	000	000	011	010	000	101
000	001	100	110	000	100	000	011	100	111
100	100	000	110	000	000	000	000	000	001
000	000	001	000	000	110	100	110	001	000

7. SIMULACION DE UN BOMBARDEO

Como aplicación de la tabla obtenida en 6 vamos a considerar el siguiente problema:

La probabilidad de destruir un puente al arrojar una bomba desde un avión es 1/3. Hallar un valor aproximado de la probabilidad de destruir el puente arrojando 3 bombas.

La tabla 6 simula el proceso. Cada grupo de tres dígitos representa el lanzamiento de tres bombas. El 1 significa éxito, el 0 fracaso.

Considerando las 100 ternas de la tabla se ve que el puente queda destruido en 62 ocasiones:

$$p \simeq \frac{62}{100} = 0{,}62$$

Este número se aproxima a la probabilidad p, que se puede calcular teóricamente así:

$$p = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}70$$

8. FABRICACION DE BOTELLAS

Supongamos que la pasta para fabricar 100 botellas contiene 50 partículas extrañas. Al final del proceso de fabricación se rechazan, por inservibles, todas las botellas que contengan al menos una de esas partículas. ¿Cuántas botellas resultarán aceptables?

El proceso se puede simular suponiendo que cada partícula se distribuye al azar en el conjunto de las 100 botellas.

El siguiente cuadro representa las 100 botellas. Los puntos son las partículas extrañas, y han sido colocadas en la cuadrícula tras generar con la calculadora 50 números aleatorios comprendidos entre 0 y 99.

0 ●	1 ●	2	3	4 ●	5 ●	6	7	8	9
10 ●	11	12 ●	13 ●	14 ●●	15 ●●	16 ●●	17	18	19
20 ●	21	22	23	24	25	26 ●	27	28 ●	29 ●
30 ●	31	32 ●● ●●	33	34 ●●	35	36	37	38 ●●	39
40	41 ●	42	43	44	45	46	47 ●	48 ●	49 ●
50 ●	51	52	53 ●	54	55	56	57	58 ●	55
60	61 ●	62 ●	63 ●	64	65 ●	66	67	68 ●●	69
70	71	72	73	74 ●	75	76	77 ●●	78 ●●	79 ●
80	81 ●	82	83	84	85 ●	86	87	88	89
90 ●	91	92	93	94	95	96	97	98 ●	99 ●

Del cuadro se deduce que en esta situación han resultado aceptables 61 botellas.

Hemos hecho una segunda simulación, resultando 60 botellas buenas.

Estos resultados concuerdan con el hecho de que la probabilidad teórica de que una botella sea aceptable es

$$p = (0{,}99)^{50} \simeq 0{,}60$$

9. LA COLECCION DE CROMOS

Si tenemos curiosidad por saber cuántos cromos hay que comprar para rellenar un álbum, nada mejor que simular la situación.

Estableceremos hipótesis sencillas: todos los cromos tienen la misma probabilidad de aparecer, probabilidad que se mantiene constante a lo largo del proceso; en cada sobre sólo entra un cromo (el lector puede simular casos en que los sobres traigan dos, o más, cromos no repetidos).

En primer lugar hemos simulado situaciones en las que hay un solo coleccionista, esto es, situaciones en las que los cromos «repes» no se cambian. Después hemos supuesto que hay dos (o más) coleccionistas, que extraen los cromos por turno y que intercambian entre si los «repes» cada vez que es posible.

A continuación se estudia el caso de una colección de 10 cromos y un solo coleccionista:

Después de haber generado con la calculadora dígitos equiprobables (véase 4), hemos obtenido el siguiente resultado:

•••	••• ••• •	••	•••	•••	•	••• ••	•••	•	••
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Es decir, para completar el álbum hemos necesitado comprar 30 cromos.

En otras simulaciones posteriores hemos visto que se precisan 20, 21, 24, 20 y 36 cromos.

Considerando las seis simulaciones tenemos que, por término medio, hay que «comprar» unos 25 cromos.

Para ver la influencia que tiene el hecho de que se puedan cambiar los «repes», hemos supuesto el caso de dos coleccionistas A y E que intercambian cromos repetidos siempre que el canje es posible:

B	•	•	••	••	••	••	••	•	••	•
A	••• •	•	••• •	••	•••	•	••	••• •••	••• •	•••
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

El coleccionista A necesitó comprar 29 cromos y el B 14. En el cuadro figuran tachados con un aspa los cromos que han sido cambiados.

En esta simulación se observa que el número de intercambios ha sido pequeño y que, además, alguno de los cromos obtenidos por canje ha salido posteriormente en los sobres.

He aquí los resultados obtenidos en otras simulaciones:

A 43, B 35; A 55, B 25; A 15, B 15; A 19, B 29

La media, en los cinco casos en que se intercambian los repetidos, es 28. El azar nos juega una mala pasada pues, aparentemente, parece que es peor cambiar. Esto es debido a que el número de cromos por álbum es bajo; lo mismo que el de coleccionistas.

••••• • 0	••• 1	••••• •• 2	••••• •• 3	••••• ••••• 4	••• 5	••••• 6	••••• 7	•••• 8	••••• • 9
••••• •••• 10	••••• •• 11	••••• • 12	•••• 13	••••• • 14	••••• 15	••••• 16	•••• 17	•• 18	••• 19
•• 20	••••• 21	••••• 22	••••• •••• 23	••••• • 24	••••• ••••• 25	•••• 26	••• 27	•• 28	•••• 29
••••• • 30	•• 31	••••• •••• 32	••••• • 33	••••• • 34	•••• • 35	•• 37	• 37	••••• • 38	••••• 39
•••• 40	••••• ••••• 41	••••• 42	• 43	••• 44	••••• ••• 45	••••• 46	••••• • 47	••• 48	••••• 49
••••• • 50	••••• 51	••••• •• 52	••••• ••••• 53	•••• 54	••• 55	••••• •••• 56	••••• ••• 57	••••• ••• 58	••••• ••••• • 59
••••• 60	••••• • 61	••••• • 62	••••• 63	••••• 64	••••• ••••• 65	••••• •• 66	••••• • 67	••••• ••••• 68	••••• ••••• 69
••• 70	••••• •• 71	••••• 72	••••• 73	••••• 74	••••• ••• 75	••••• ••• 76	••••• ••• 77	•••• 78	••••• •• 79
••••• ••• 80	••••• ••••• • 81	••••• 82	••• 83	••••• • 84	••••• 85	••••• 86	••••• 87	••••• • 88	•••• 89
••••• ••••• 90	•••• 91	•••• 92	• 93	••••• 94	••••• ••••• 95	••• 96	••• 97	•• 98	••• 99

Prosigamos con el tema aumentando, ahora, el número de cromos. Supongamos un álbum de 100 cromos y un solo coleccionista. He aquí el resultado:

Para completar el álbum se ha necesitado comprar 559 cromos.

Hemos hecho una segunda simulación en la que han sido necesarios 529 cromos para terminar el álbum.

Sorprende que sea necesario comprar más de cinco veces el número de cromos del álbum para poderlo completar.

Para ver la influencia del intercambio de cromos hemos diseñado una experiencia en la que suponemos tres álbums de 100 cromos y tres coleccionistas que se intercambian los «repes».

La simulación ha sido llevada a cabo por tres alumnos provistos de una calculadora programable cada uno. Al principio de la experiencia han hecho alto, para intercambiar los cromos repetidos, cada 10 cromos «adquiridos»; más tarde han parado para cambiar cada cinco cromos; y al final cada vez que sacaban un cromo.

De este modo se ha visto que para completar cada colección han hecho falta: 245, 246 y 293 cromos.

No deja de sorprender que en esta situación muy próxima a la real, haya que comprar dos veces y media el número de cromos del álbum para poder completarlo.

BIBLIOGRAFIA

[1] NAYLOR, T.: *Técnicas de simulación en computadoras.* Limusa, Méjico, 1977.

[2] RADE, L.: *Tentez votre chance avec votre calculateur programmable.* CEDIC, París, 1977.

[3] SOBOL, I. M.: *Método de Montecarlo.* MIR, Moscú, 1975.

Aplicación de las calculadoras programables para el estudio de la posición relativa de dos rectas en el espacio afín. Introducción de los conceptos de matriz definida positiva y norma

Por Enrique RUBIALES CAMINO(*)

El trabajo que voy a presentar fue realizado en un Seminario (un día a la semana, entre el 2.° y 3.er trimestre) con las alumnas de C.O.U., que quisieron asistir voluntariamente; y que en 3.° ya trabajaron con las calculadoras programables de bolsillo.

Este trabajo fue presentado por dichas alumnas a un concurso que se realiza todos los años, patrocinado por el centro.

Fue elegido por el alumnado, a fin de que se pusiese de manifiesto cómo una pequeña caculadora programable puede ser tan interesante como tener un ordenador.

El tema ya lo habían visto, pues se trataba de la posición relativa de 2 rectas, 2 planos y una recta y un plano. Ya sabemos que si estamos en un ordenador, en pantalla, nos puede aparecer, al introducir los datos de dos rectas, por ejemplo, SE CORTAN SEGUN UN PUNTO, o bien, SON PARALELAS, etc. Lo que es evidente, es que esto no es posible en una calculadora, pues no hay caracteres alfabéticos.

El primer paso, fue reducir a números, cada uno de los casos. Por ejemplo, si las rectas se cruzan, aparece en pantalla un (1); si son secantes, un (2); si son paralelas un (3) y si son coincidentes un (4).

Así, si alguien necesita saber qué pasa con dos rectas, debe introducir los datos de ambas rectas y pulsando una tecla, obtener en pantalla un (1) o un (2), etc., como ya dijimos antes.

Ahora bien, el trabajo del alumnado era todavía más complicado, pues ellas iban a exponer el desarrollo matemático, de forma que luego realizasen la programación. Entonces, para entrar en la programación, era preciso previamente realizar el esquema, que recibe el nombre de organigrama.

Tomamos las dos rectas:

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$r': \frac{x - x_2}{a'} = \frac{y - y_2}{b'} = \frac{z - z_2}{c'}$$

y planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} at - a't' = x_2 - x_1 \\ bt - b't' = y_2 - y_1 \\ ct - c't' = z_2 - z_1 \end{array}\right\}$$, que sabemos tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a' \\ b & -b' \\ c & -c' \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & -a' & x_2 - x_1 \\ b & -b' & y_2 - y_1 \\ c & -c' & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Caract. (A) = 2, caract. (B) = 3 se cruzan.
Caract. (A) = 2, caract. (B) = 2, número de incógnitas, se cortan.
Caract. (A) = 1, caract. (B) = 2 son paralelas.
Caract. (A) = 1, caract. (B) = 1 número de incógnitas, son coincidentes.

Ahora, el problema está en averiguar el procedimiento para llevar esto a un organigrama, que sobre el programa nos va a dar las distintas bifurcaciones mediante condiciones lógicas.

El cálculo de $|B|$, se hace por los adjuntos conjuntos de la última columna, de modo que tenemos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & -a' \\ b & -b' \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a & -a' \\ c & -c' \end{vmatrix} \quad y \quad A_3 = \begin{vmatrix} b & -b' \\ c & -c' \end{vmatrix},$$

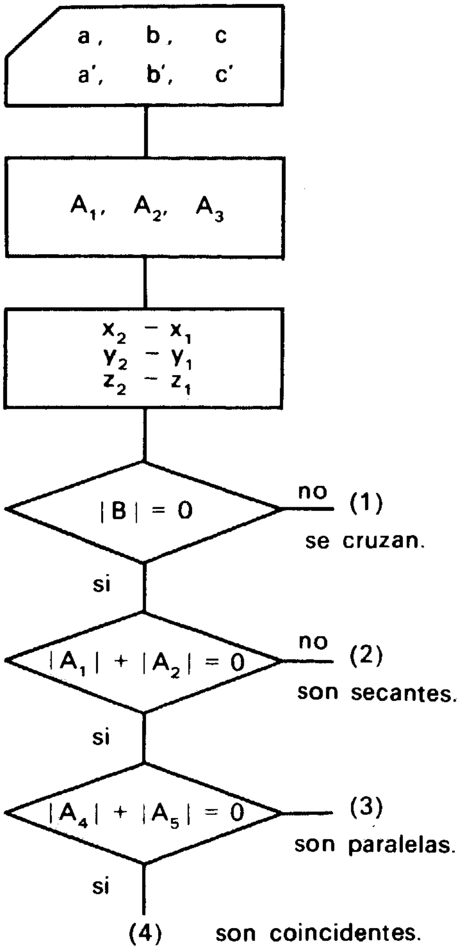
entonces:

$$|B| = (x_2 - x_1)\begin{vmatrix} b & -b' \\ c & -c' \end{vmatrix} - (y_2 - y_1)\begin{vmatrix} a & -a' \\ c & -c' \end{vmatrix} + (z_2 - z_1)\begin{vmatrix} a & -a' \\ b & -b' \end{vmatrix}$$

* Catedrático (excedente) y Profesor Agregado del INB «Emilia Pardo Bazán» de Madrid.

Así, en el organigrama, llegamos a ver si:

$$|B| = 0 \quad ó \quad |B| \neq 0$$



(figura 1)

Esto último, debemos enlazarlo con el paso siguiente, que será aquel en el que las rectas se corten y el que va a continuación, que es el que sean paralelas.

Sabemos que si $A_1 = 0$ y $A_2 = 0$, entonces $A_3 = 0$, por tanto, basta calcular los dos primeros, y así pasaríamos al caso de ser paralelas.

Y si $A_1 \neq 0$, se cortan.

Ahora bien, aquí había una cuestión delicada, si $A_1 = 0$ y no lo era A_2, entonces las rectas se cortan y como hacer cada caso por separado suponía muchos pasos de programación, tras pensar en ello, pusimos:

$$|A_1| + |A_2| = 0 \quad ó \quad |A_1| + |A_2| \neq 0$$

Continuando, con el siguiente paso, es decir, paralelas o coincidentes, tuvimos que calcular los determinantes siguientes de la matriz B:

$$A_4 = \begin{vmatrix} a & x_2 - x_1 \\ b & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \quad ; \quad A_5 = \begin{vmatrix} a & x_2 - x_1 \\ c & z_2 - z_1 \end{vmatrix}$$

para así, poner de manifiesto, el que la característica de B fuese 2 ó 1 (figura 1).

De esta manera, ya estamos en condiciones de poder realizar el programa, que en el caso concreto del seminario, se hizo para los tres tipos de calculadoras programables de bolsillo que teníamos.

En un seminario de C.O.U., sería interesante que tras la discusión y resolución de un sistema lineal del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, les hiciésemos ver a los alumnos que la resolución directa no es la idónea para un ordenador. Ahora bien, como no tenemos un ordenador, le podemos sustituir por una calculadora programable.

La programación directa de dos ecuaciones y dos incógnitas y tres y tres, resulta asequible, pues los determinantes se pueden calcular directamente. Sin embargo, de cuatro en adelante sí hay dificultad y cuanto mayor sea el número de incógnitas, la dificultad será mayor. De ahí que se haya recurrido a métodos de resolución, que se suelen llamar iterativos.

En nuestro caso, veremos dos métodos:

a) Jacobi.
b) Gauss-Seidel (algunos autores le llaman Seidel).

También veremos, aunque sin entrar en muchos detalles las condiciones que se han de cumplir para que se dé la convergencia del proceso iterativo. Y, someramente hablaremos de los errores que se cometen. En fin, en C.O.U., para las alumnas de Ciencias, aunque sea un seminario ambicioso, pensamos que merece la pena, ya que entramos en un campo, como es el del cálculo numérico, que ha sido bastante olvidado en el Bachillerato y C.O.U.

El alumno debe conocer las calculadoras programables y haber trabajado procesos iterativos en resolución de ecuaciones algebraicas con una incógnita. Si no fuese así, se precisaría de un seminario previo, coincidente con el temario oficial (sistemas de ecuaciones lineales).

La idea expuesta podría desarrollarse en la forma siguiente:

El primer trimestre, se puede dar el seminario correspondiente a la resolución de ecuaciones algebraicas por métodos iterativos y en el segundo, lo que se explica en este artículo.

En el seminario previo, con la calculadora programada por nosotros de forma que se parase cuando el «error» entre dos iteraciones consecutivas fuese menor que una milésima, una diezmilésima, etc., el trabajo a proponer sería, cómo podríamos realizar esto para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, etc., de modo que debemos introducir la notación matricial y de ello surgió el concepto de norma de una matriz.

Por otro lado, estudiando la convergencia del proceso iterativo, llegamos a la conclusión de que no todo sistema lo hace, por lo que un teorema muy importante es el que dice:

«Si la matriz del sistema es real, simétrica (estos dos conceptos están en el programa de C.O.U.) y definida positiva, entonces el sistema converge, hacia la solución, sea cual sea el valor inicial que tomemos.»

Ayudado de varios ejemplos, voy a comprobar, más detalladamente, lo que enuncia el teorema.

En primer lugar, yo pongo el sistema siguiente de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Los alumnos, mediante cualquier método, lo resuelven y obtienen como resultado:

$$x = 0'40 \quad \text{e} \quad y = 1'20$$

Ahora, lo pongo para iterar, de la siguiente manera:

$$x^{k+1} = -2 + 2y^k$$
$$y^{k+1} = 2 - 2x^k$$

Lo programamos en la calculadora, y vemos que:

	$x^0 = 0,$	$y^0 = 0$
$k = 0;$	$x^1 = -2,$	$y^1 = 2$
$k = 1;$	$x^2 = 2,$	$y^2 = 6$
$k = 2;$	$x^3 = 10,$	$y^3 = -2$
$k = 3;$	$x^4 = -6,$	$y^4 = -18$
$k = 4;$	$x^5 = -38,$	$y^5 = 14$
$k = 5;$	$x^6 = 26,$	$y^6 = 78$

Podemos observar que el proceso diverge.

Si ahora vuelvo a ponerlo, pero de otra forma, para iterar, nuestra sorpresa es grande, ya que ahora sí que converge.

Lo programamos haciéndolo el alumno. En este caso, para el proceso iterativo, lo pongo así:

$$\left.\begin{array}{l} x^{k+1} = 1 - \dfrac{1}{2} y^k \\ y^{k+1} = 1' + \dfrac{1}{2} x^k \end{array}\right\}$$

	$x^0 = 0$,	$y^0 = 0$
$k = 0,$	$x^1 = 1$,	$y^1 = 1$
$k = 1,$	$x^2 = 0'50,$	$y^2 = 1'50$
$k = 2,$	$x^3 = 0'25,$	$y^3 = 1'25$
$k = 3,$	$x^4 = 0'38,$	$y^4 = 1'13$
$k = 4,$	$x^5 = 0'44,$	$y^5 = 1'19$
$k = 5,$	$x^6 = 0'41,$	$y^6 = 1'22$
$k = 6,$	$x^7 = 0'39,$	$y^7 = 1'20$
$k = 7,$	$x^8 = 0'40,$	$y^8 = 1'20$

Como sabemos la solución paro la calculadora.

Pero, si el sistema antes era divergente y ahora es convergente, esto no parece serio. Me imagino que para el alumnado esto tiene que hacer pensar y, sobre todo en esta materia, donde todo goza de la exactitud.

Con esto se pone de manifiesto, que no todo es la práctica y que por eso hay que estudiar teoría. Los enunciados de los teoremas tienen hipótesis y tesis y existe el teorema recíproco de uno dado. En otras palabras, la condición necesaria y suficiente.

«Si la matriz del sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n \end{array}\right\}$$

es real, simétrica y definida positiva, entonces el sistema escrito en la forma especial:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} (k_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} (k_2 - a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} (k_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{array}\right\}$$

converge a la solución, sea cualquiera el valor inicial que tomemos».

El recíproco no es cierto, como se comprobó en el ejemplo, ya que puede converger, y sin embargo, la matriz no ser definida positiva.

Para introducir el concepto de norma de una matriz, basta que escribamos el sistema especial, en forma matricial, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & + a'_{12} & \ldots & + a'_{1n} \\ +a'_{21} & 0 & \ldots & + a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ + a'_{n1} & + a'_{n2} & \ldots & - 0 \end{pmatrix} /$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \ldots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ \ldots \\ k'_n \end{pmatrix}$$

donde

$$a'_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j \quad \text{y} \quad k'_i = \frac{k_i}{a_{ii}}$$

Aquí, me interesan los vectores columnas, o matrices de n filas y una columna.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_1^{(k+1)} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \ldots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

que se pueden escribir

$$\bar{x}^{k+1} \qquad \text{y} \qquad \bar{x}^k$$

Si en la resolución de ecuaciones algebraicas por el método de iteración escribíamos:

$$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$$

aquí, será algo que me «mida» la diferencia de los vectores. Entonces, ese algo que mide me lo da el concepto de norma. Por tanto:

$$||\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k|| < \varepsilon$$

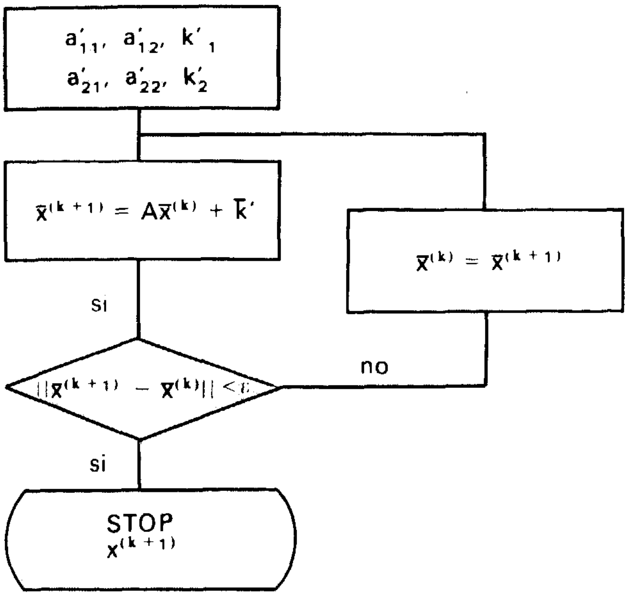
Es conveniente que conozcan la existencia de diferentes normas, que son:

a) $||\bar{x}||_1 = \max\limits_i |x_i|$

b) $||\bar{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

c) $||\bar{x}||_3 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Visto ya esto, me puedo entretener en que programen las tres normas, aunque pensando como siempre en ahorro de pasos de programa, la que más interesa es la *c*).
Para los interesados en trabajar en ello, el organigrama es el siguiente:



Tomo el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

que en forma especial, es

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - y) \\ y &= \frac{1}{3}(-1 - x) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Y $\varepsilon = 10^{-3}$.

El programa para una HP-65, es el siguiente:

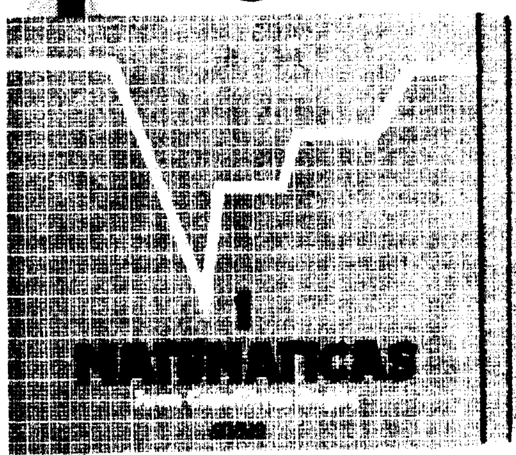
LBL	STO 3	STO 5	2
A	RCL 1	RCL 4	RCL 3
STO 1	CHS	RCL 2	STO 1
R/S	1	−	RCL 4
STO 2	−	g	STO 2
LBL	3	ABS	GTO
1	÷	RCL 5	1
RCL 2	STO 4	+	LBL
CHS	RCL 3	EEX	2
3	RCL 1	3	RCL 3
+	−	CHS	R/S
2	g	gx > y	RCL 4
÷	ABS	GTO	RTN

TECLAS	PANTALLA
O	0.
R/S	0.00
O	0.
R/S	2.00
R/S	— 1.00

Como final, explicaré brevemente en qué consiste el método iterativo de Gauss-Seidel, y como labor para otro seminario, será el ver si todo lo dicho anteriormente es válido sin más, o hay que hacer algunas variaciones.
Este método consiste en que el valor inicial y_o, sirve para hallar x_1, éste a su vez sirve para hallar y_1, etcétera. Este proceso de iteración se puede escribir de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(K_1 - a_{12}y^k) \\ y^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(K_2 - a_{21}x^{k+1}) \end{aligned}\right\}$$

DOS SERIES anaya DE MATEMATICAS PARA BACHILLERATO



JUAN CASULLERAS REGAS, Doctor en Ciencias Exactas, Catedrático de Matemáticas del Instituto de Bachillerato Milá i Fontanals, de Barcelona.

MATEMATICAS 1º:

Se inicia la serie de matemáticas para Bachillerato en este primer curso siguiendo, en lo esencial, el método cíclico. Muchos de los temas ya los han estudiado los alumnos de E.G.B., pero aquí, naturalmente, se tratan ampliando los conocimientos adquiridos con anterioridad y que en Bachillerato se estudian no sólo con mayor amplitud y extensión, sino relacionándolos y situándolos en el contexto total y unitario de la Matemática. El libro de Matemáticas de 1º que nos ocupa desarrolla siete grandes temas: Cálculo combinatorio, los cuerpos de los números reales y complejos, funciones polinómicas y racionales, inecuaciones y sistemas, progresiones aritméticas y geométricas, aritmética comercial, interés compuesto y anualidades.

MATEMATICAS 2º:

El cuestionario de MATEMATICAS 2º contiene un capítulo dedicado a las aplicaciones del cálculo infinitesimal que es el lugar oportuno para completar estas ideas dentro de la enseñanza media.

Las lecciones dedicadas al espacio vectorial son en cierto modo más simples, por cuanto apoyándose en manipulaciones algebraicas son más asequibles a alumnos que en la E.G.B. y en el primer curso de B.U.P. han adquirido una cierta familiaridad con los cálculos algebraicos.

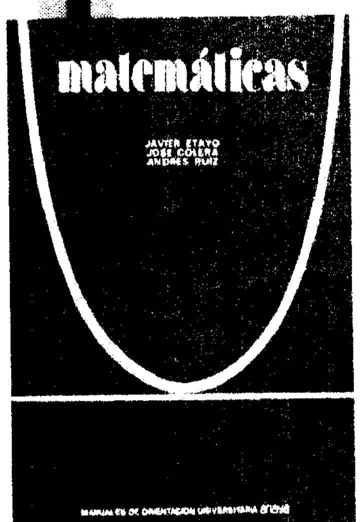
MATEMATICAS 3º:

La obra abarca cuatro grandes temas: Geometría, Trigonometría, Análisis y Estadística.

La geometría y la trigonometría van íntimamente ligadas.

Los problemas básicos del análisis como las nociones de derivada e integral se resuelven de una forma clásica. La última parte de la obra se dedica a la estadística.

El libro se completa con tablas auxiliares para el manejo de la distribución normal y unos doscientos ejercicios y problemas propuestos, que ayudan a la comprensión y fijación de los temas tratados en el índice.



MATEMATICAS C.O.U.

JAVIER ETAYO, JOSE COLERA, ANDRES RUIZ

JAVIER ETAYO, Catedrático de Geometría de la Universidad Complutense, de Madrid.
JOSE COLERA, Catedrático del Instituto de Bachillerato de Colmenar (Madrid).
ANDRES RUIZ, Catedrático del Instituto de Bachillerato "Rey Pastor", de Madrid.

MATEMATICAS 1º:

Cada uno de los conceptos estudiados aparece motivado mediante una puesta en situación, procurando con ello que el alumno vea natural el proceso por el cual se desarrolla cada una de las cuestiones, y que culmina en la expresión rigurosa de las conclusiones obtenidas. Ejemplos resueltos y ejercicios propuestos al final de cada apartado completan la comprensión de lo estudiado en él. Al acabar cada unidad se proponen bastantes ejercicios y problemas, cuidadosamente escogidos y graduados en orden de dificultad.

Al final del libro aparecen unos trescientos ejercicios de todo tipo, con los que se alcanza un total de unos ochocientos sin resolver y más de doscientos resueltos.

MATEMATICAS 2º:

En cinco bloques de lecciones se distribuyen, de acuerdo con las exigencias del cuestionario, las materias que corresponden a este curso.

En el primero de ellos se estudian las sucesiones, con los problemas fundamentales de convergencia y límite; en el segundo, las funciones reales de variable real y su noción básica, la continuidad, para pasar a tratar en el siguiente de algunas funciones particulares importantes, exponencial, logarítmica funciones circulares. El bloque cuarto contempla un problema de rango universal, la introducción del cálculo diferencial, junto a la formación de la integral indefinida. Finalmente hay un quinto bloque dedicado a la geometría con el estudio del plano y espacio vectoriales y del plano afín.

MATEMATICAS 3º:

De la trigonometría ya son conocidos por 2º de BUP sus conceptos fundamentales que, en esta obra, se amplían hasta el punto en que es posible ampliarlos a lo que es la razón principal de su estudio, la determinación de las relaciones métricas entre los elementos (lados, ángulos) de un triángulo. Ligado con la trigonometría por la importancia de su representación, se aborda el número complejo y todas las operaciones realizables en el cuerpo complejo C.

La última parte del libro se dedica a la formación de los conceptos fundamentales de la estadística.

El programa de Matemáticas de COU prefigura un curso de Matemáticas de 1º de Universidad o de Escuelas Técnicas y al mismo tiempo completa los temas sencillos que no hayan quedado suficientemente tratados en BUP.

La obra finaliza con tres capítulos dedicados al cálculo de probabilidades, donde se recuerdan algunos resultados conocidos. Y se introducen otros nuevos, como el teorema de Bayes, para su utilización en experimentos compuestos.

NOTAS

Seminarios para la coordinación E.G.B.-Bachillerato en el área de las Matemáticas

Es evidente y facilmente comprobable la ruptura que existe entre el nivel de E.G.B. y el de B.U.P.

Las dificultades del paso de la E.G.B. a la Enseñanza Media, han sido agudizadas por algunos hechos que es necesario recordar:

La extensión de la enseñanza a mayor número de hombres, que siendo un hecho positivo en una sociedad democrática, comporta el riesgo de la masificación que puede suponer un deterioro de los niveles de preparación y una frustración de los que creen que los estudios llevan a una elevación social y económica.

La promoción casi automática de un grado a otro en E.G.B. que se ve deteriorda por la poca eficacia de la enseñanza de recuperación, la interpretación equivocada de la evaluación contínua y la utilización de los libros de consulta como libros de texto y quizá para algunos profesores de forma dogmática.

La desigual formación y metodología del profesorado, que en el caso de Matemáticas se agudiza al considerar que buena parte del profesorado ha tenido que reestudiar la materia, aprender nuevos términos y símbolos y utilizar un lenguaje y unas ideas que desconocían. Aunque hay que reconocer el esfuerzo que han hecho muchos profesores para ponerse al día, es lógico que esta situación problemática haya producido un cierto rechazo institntivo hacia la mal llamada «matemática moderna» de la que no se ven claramente sus aplicaciones y a la que se aleja de las motivaciones concretas que rodean al alumno y del cultivo de los automatismos de cálculo y del bagaje geométrico que tradicionalmente se enseñaban en la escuela Primaria. Es interesante destacar el abuso de los «conjuntos», no el estudio de la teoría de conjuntos que es algo más serio. Este abuso ha llevado en muchas ocasiones a una siembra de errores, inexactitudes y prejuicios, así como a una verborrea excesiva sin ningún soporte ni justificación desde el punto de vista científico o didáctico.

Los desfases en la programación, la falta de investigaciones psico-pedagógicas donde se estudien las causas del rechazo de los alumnos hacia algunas materias y la falta de formación en estos de hábitos de estudio y trabajo.

Estos hechos que han sido corroborados por los grupos de trabajo por la experiencia de la Inspección en sus visitas a los centros, sugieren la necesidad de coordinar al máximo los programas de Bachillerato con los de E.G.B., pero no tanto sobre las previsiones teóricas de los textos legales cuando sobre los conocimientos y técnicas de trabajo realmente adquiridos en el nivel de E.G.B.

En este sentido se han venido realizando en varias provincias españolas y patrocinados por los respectivos ICES, seminarios para tratar el tema Coordinación E.G.B.-B.U.P. en el área de Matemáticas, de algunos de ellos presentamos aquí un breve resumen.

COORDINACION E.G.B.-B.U.P. EN EL PRIMER SEMINARIO PERMANENTE DE MATEMATICAS DEL D.U. DE VALLADOLID

Desde el mes de noviembre de 1979 hasta el mes de mayo se han desarrollado las actividades del I Seminario Permanente de Matemáticas del D.U. de Valladolid.

Estaba integrado dicho seminario por profesores de B.U.P. y C.O.U. tanto de centros estatales como no estatales. Las actividades se encauzaron en dos vertientes: científica y didáctica.

La parte científica estuvo a cargo de profesores de Universidad que presentaron una panorámica actual y líneas abiertas de investigación sobre los temas: Geometría de curvas y concepto de probabilidad.

La parte didáctica se llevó a cabo mediante la formación de tres grupos de trabajo. Uno de ellos encargado de estudiar la coordinación de los programas de E.G.B. y B.U.P., y otros dos encargados de estudiar y remodelar los programas de 1.º, 2.º, 3.º y C.O.U.

Daremos solo en esta ocasión las conclusiones del primer grupo de trabajo por encajar dentro del tema que nos ocupa.

GRUPO METODOLOGICO DIDACTICO 8.º E.G.B.-1.º B.U.P.

El objetivo general de este grupo ha sido: establecer unas pautas o niveles básicos de referencia a fin de que los profesores de E.G.B. y B.U.P. puedan hacer la conexión necesaria entre ambos niveles, evitando la dispersión de los alumnos ante el cambio de profesorado y procurando la continuidad del aprendizaje tanto en cuanto a conocimientos como a técnicas instrumentales.

Empezamos estudiando las principales dificultades que observan los profesores de bachillerato en los alumnos que vienen de la E.G.B., en cuanto a conocimientos y utilización de las técnicas instrumentales.

Las principales deficiencias contrastadas son las siguientes:

— Ausencia del concepto de función, dominio e imagen.
— Ausencia de los conceptos geométricos de la geometría del triángulo, ángulos, segmentos, paralelismo y perpendicularidad, con todo lo que supone respecto al proceso de resolución de problemas.
— Fallos en los automatismos de:

cálculo con números racionales,
cálculo con radicales,
resolución de ecuaciones,
simplificaciones.

Después de un estudio detenido de las principales dificultades y sus posibles causas, llegamos a la conclusión de que se deberían de elaborar unos niveles básicos de referencia para los profesores de E.G.B., que al mismo tiempo que homogeneizaran el nivel mínimo de información y de formación matemática de los alumnos, sirvieran de apoyo a los profesores para establecer la forma lo más objetiva posible los niveles de promoción.

Consideramos que los contenidos que los alumnos tendrían que haber asimilado al acabar 8.° E.G.B., son los siguientes:

— Conocimiento de los conjuntos numéricos: Naturales, enteros, racionales decimales.
— Operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, radicación, potenciación). Automatismos del cálculo.
— Simplificación y racionalización.
— Divisibilidad en N.
— Idea de función. Representación de funciones sencillas.
— Concepto de polinomio y operaciones con polinomios (adición, sustracción, multiplicación, división). Automatización de dichas operaciones. La regla de Ruffini.
— Proporcionalidad de magnitudes. Interés, regla de tres, repartos proporcionales, etc.
— Resolución de ecuaciones de primero y segundo grado (analítica y gráficamente). Estudio de las parabóla.
— Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (analítica y gráficamente).
— Estadística descriptiva: Estudio de la media, mediana y moda. Desviación típica. Representaciones gráficas.

GEOMETRIA

Reconocimiento y observación del paralelismo y perpendicularidad en el plano y en el espacio.
Estudio de simetrias, giros y traslaciones.
Angulos inscritos y circunscritos en la circunferencia. Su medida. Segmentos. Su medida.

Geometría del triángulo: Clasificación, elementos fundamentales de un triángulo, propiedades métricas del triángulo. Igualdad y semejanza.
Polígonos. Circunferencia. Círculo.
Areas de figuras planas.

Pirámides. Tronco de pirámide. Prismas. Conos. Tronco de cono. Cilindros esfera. Descripción y elementos fundamentales. Cortes en la esfera. Volumen de los cuerpos estudiados.

La reunión conjunta con profesores de E.G.B., fue aceptado este planteamiento y distribuidos los contenidos en núcleos temáticos por niveles.

Nivel de 6.° E.G.B.

Conjuntos: El conjunto de los números racionales positivos y de los númros decimales. Operaciones con estos conjuntos numéricos.
Aplicaciones: Divisibilidad en N. Simetrías. Giros. Traslaciones.
Geometría: Segmentos. Angulos y su medida.
Triángulos. Casos de igualdad. Relaciones métricas en un triángulo. Polígonos.
Areas de figuras planas.
Posiciones de rectas y planos en el espacio.
Circunferencia y círculo.

Nivel 7.°

Conjuntos: El conjunto de los números enteros. Operaciones.
Aplicaciones: Funciones: dominio e imagen. Definición de una función. Representaciones gráficas.
Ecuaciones de primer grado.
Resolución numérica y gráfica.
Proporcionalidad entre magnitudes: Regla de tres, interés, etc.
Geometría: Poliedros. Areas laterales y totales. Cuerpos redondos. Areas.

Nivel 8.° E.G.B.

Conjuntos: De los números racionales. Operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación con exponentes racionales.
Aplicaciones: Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Ecuación de 2.° grado. Representación gráfica. Sistemas de ecuaciones lineales. Representación gráfica. Resolución gráfica y numérica.
Geometría: Seme͜anza de triángulos.
Homotecia.
Representación y elementos fundamentales en la parábola.
Volúmenes de los cuerpos estudiados.
Estadística: Medidas de centralización: media, mediana y moda. Medidas de dispersión: desviación típica. Representacióones gráficas.

METODOLOGIA

Debe procurarse que el alumno vaya descubriendo las matemáticas, por lo cual se utilizarán métodos activos. Se cuidará la motivación como medio para que el alumno se interese por los conceptos matemáticos y desee trabajar activamente en ellos, para lo cual se intentará adiestrrle en el estudio y en el trabajo personal.

Como niveles mínimos se intentará lograr lo siguiente:

Conjuntos numéricos. Que el alumno sepa distinguir los números naturales enteros, racionales, decimales no racionales; que sepa ordenarlos y representarlos sobre una recta. No se hará hincapié en este nivel mínimo, en el proceso de construcción de los conjuntos numéricos.

Que el alumno comprenda las operaciones y sus propiedades y sepa aplicarlas en la resolución de ejercicios y problemas. Que haya adquirido el dominio de los automatismos de todas las operaciones con números, excluida la radicación con números negativos; insistiendo fundamentalmente en las operaciones con números racionales, en las operaciones con radicales y en la simplificación de fracciones algebráicas.

Funciones. Que el alumno haya adquirido el concepto de función, distinguiendo dominio y rango. Que sepa representar funciones. Que haya adquirido los automatismos de la resolución de ecuaciones y sistemas (las ecuaiones, de 1.° y 2.° grado con coeficientes en Q; y los sistemas, de dos ecuaciones con dos incógnitas, lineales y con coeficientes en Q). No es necesario en este nivel mínimo, el estudio de las inecuaciones y de las ecuaciones y sistemas con coeficientes irracionales. Si es conveniente insistir en la resolución de problemas que planteen ecuaciones y sistemas de estos tipos. La automatización de la resolución de ecuaciones y sistemas deberá haberse conseguido al terminar 8.° por métodos numéricos y gráficos.

Polinomios. Que el alumno sepa definir, reconocer y escribir polinomios y haya conseguido el automatismo de las operaciones. Que sepa plantear y resolver problemas de estos conceptos. No es necesario, en este nivel mínimo estudiar las estructuras.

Divisibilidad. Que el alumno haya adquirido el concepto de m.c.d. y m.c.m. y haya automatizado los mecanismos que llevan a su obtención. Que sepa resolver problemas de este tipo. La divisibilidad se estudiará en N.

Geometría del plano. Que el alumno conozca y maneje los conceptos geométricos elementales. Que sepa demostrar algunos teoremas (por ejemplo: el teorema de la altura, del cateto, etc.) y así se va iniciando en el método deductivo. Que sepa reconocer y medir los ángulos en una circunferencia. Que sepa resolver algunos sencillos problemas por el método gráfico. Que conozca los criterios de igualdad y semejanza de triángulos. Que sepa describir y caracterizar los diversos polígonos (los más utilizados).

En cuanto a la *geometría del espacio*, que se estudiará fundamentalmente de forma descriptiva, es necesario que los profesores cultiven la intuición espacial en sus alumnos, fundamentalmente en la observación del paralelismo y perpendicularidad en el plano y en el espacio. Que los alumnos conozcan los principales cuerpos geométricos y sepan calcular sus áreas y volúmenes. Que sepan resolver problemas relacionados con estos conceptos.

Estadística, que se estudiará de forma descriptiva. Hay que procurar jue el alumno sepa interpretar gráficos y ordenar, agrupar y clasificar los datos para construir gráficos. Que sepa calcular la media, mediana, moda y desviación típica y resolver sencillos problemas relacionados con estos conceptos.

Si los alumnos llegaran de la E.G.B. con estos niveles mínimos adquiridos, el profesor de B.U.P., podría, en el desarrollo del programa de Bachillerato, insistir, respecto a los temas tratados en E.G.B., en los aspectos más formativos de la matemática, como: el manejo de las estructuras algebráicas para una mejor comprensión y relación entre los elementos de los conjuntos estudiados; la mayor profundidad en el formalismo matemático y la elaboración de sistemas normales, necesarios en la resolución de problemas.

M.ª Dolores de PRADA

EXPERIENCIA DE UN SEMINARIO PERMANENTE DE MATEMATICAS EN EXTREMADURA

En noviembre de 1977 el I.C.E. de Extremadura convocó una reunión para poner en funcionamiento varios Seminarios permanentes con el fin de coordinar los niveles de Educación General Básica-Bachillerato y analizar la problemática particular de las respectivas materias en estos niveles.

El proyecto fue concebido con carácter abierto, experimental, flexible y dotado de amplia capacidad de gestión. Para materializar este proyecto se pensó en constituir una Comisión por Seminario con cuatro miembros de E.G.B. y cuatro de Bachillerato.

Quedó constituida la Comisión de Matemáticas y se comenzarón las actividades animados con la idea de encontrar procedimientos que permitieran contrastar y extender experiencias realizadas en los dos niveles interesados, tratando de evaluar resultados y de detectar los factores fundamentales de ensamblaje entre ambos. Por otra parte, era necesario fijar un plan de trabajo y llevarlo a cabo con un número suficiente de miembros procedentes de los diversos estamentos implicados en la idea anteriormente descrita, procurando cubrir un amplio espectro de opiniones.

Sin ignorar las interesantes conclusiones reflejadas en el primer documento del Seminario de Coordinación de Santander y en el de las reuniones celebradas en el I.N.C.I.E. en septiembre del 75, iniciamos el trabajo con cierta improvisación.

Los objetivos del Seminario, fijados en una de sus primeras reuniones (Cáceres, 12 noviembre 1977 fueron:

a) Elaborar una relación de objetivos operativos para E.G.B. y B.U.P., señalando los contenidos y los niveles mínimos y máximos a alcanzar en cada curso.

b) Elaborar un programa de actividades tendentes a superar las dificultades encontradas en el logro de los objetivos.

d) Estudiar algún sistema adecuado a emplear, según los casos, en la elaboración de pruebas y en el análisis de resultados.

e) Confeccionar y enviar encuestas a los Centros.

f) Participar en reuniones complementarias cuando así lo aconseje el interés de los encuestados.

En la primera etapa de funcionamiento del Seminario, éste acordó desarrollar sus actividades con miembros fijos y reuniones cada dos semanas. Más que miembros fijos éramos un conjunto de personas comprometidas en llevar a cabo un programa de ponencias sobre cada uno de los temas especificados en los cuestionarios oficiales de los niveles respectivos, ponencias que deberían presentarse y discurtirse en las sucesivas reuniones. En cada sesión habría dos ponentes (uno de Bachillerato y otro de E.G.B.) desigandos con criterio rotativo; los lugares de reunión también tendrían este carácter, designándose cada vez un Instituto o Colegio Nacional distinto.

El sistema anterior permitió que, sin mucho esfuerzo, asistieran a las reuniones otros Profesores invitados que participaron en ellas con nuevos puntos de vista en la discusión de las ponencias correspondientes a esa reunión. También se obtuvo de ésto la incorporación al Seminario de nuevos miembros permanentes interesados por este tipo de actividades que presenciaban en su ámbito.

A lo latgo de las reuniones las ponencias se sucedieron de forma muy variada, reflejándose en cada caso distinta postura ante las Matemáticas, avalada siempre por sinceras intenciones de contraste con los demás. Unas ponencias consistieron en la exposición convencional de la programación corta de un tema; otras llegaron a plantear verdaderas innovaciones con clara incidencia en la conexión entre los dos niveles de enseñanza que ocupaban al Seminario. La documentación correspondiente —que yo sepa— no está recopilada en ningún sitio y, mucho menos, ordenada y sintetizada.

Hubo un momento en el que diversas razones aconsejaron que el Seminario de Matemáticas se estructurara de acuerdo con otras directrices. No se trataba de anular al primitivo Seminario de Distrito, sino de disminuir la frecuencia de sus reuniones (dejándola en una al trimestre) e introducir, al mismo tiempo, unos Seminarios zonales que, debido a la envergadura cobrada por el primero en la etapa anterior, desarrollasen por separado las funciones que ya no cabían dentro del esquema inicial. El Seminario de Distrito potenciaria así su labor coordinadora y estaría constituido por una representación adecuada de los Seminarios zonales.

Las zonas elegidas tuvieron las siguientes denominaciones:

a) Zafra (Badajoz).

b) Mérida (Badajoz).

c) Plasencia (Cáceres).

Independientemente de las actividades conjuntas del Seminario de Distrito, se debían enviar por correo los documentos de trabajo de cada zona a las demás.

Los Seminarios zonales no partieron de cero, sino que continuaron la labor iniciada e incorporaron valiosos miembros interesados. (Cada sector o zona podía tener, en principio, hasta 20 participantes permanentes).

Las últimas reuniones terminaron con el curso 1977-78.

Desde aquí manifiesto mi esperanza de reanudación. Aunque tengamos que volver a empezar.

Pedro FERNANDEZ TOLEDO

EXPERIENCIA DE COORDINACION DIDACTICA DE LOS NIVELES E.G.B.-B.U.P. EN EL D.U. DE SANTANDER

Durante cuatro años el I.C.E. de la Universidad de Santander, ha realizado unos estudios de coordinación de niveles E.G.B. en las diversas asignaturas y que han sido objeto de una publicación.

Presentamos aquí el resumen de la experiencia llevada a cabo en el Seminario Permanente de Matemáticas creado a tal efecto. Dicho Seminario estuvo integrado por profesores de E.G.B. y B.U.P. tanto de la enseñanza estatal como de la no estatal y de las diversas catagorías administrativas. Se consideró que el Seminario debía recoger las iniciativas del profesorado y ser el responable directo de la elaboración de los documentos previos y subsiguientes a las sucesivas jornadas de distrito.

Elaboración de Documentos de Coordinación

Se comenzó elaborando un «documento 0» que en las primeras Jordadas de Coordinación Didáctica sirvió de base, después de cuatro días de reunión con los Profesores asistentes, para la elaboración del «documento 1», en el que se recogieron cuantas aportaciones y sugerencias realizó el Profesorado.

Este mismo método de trabajo se utilizó en las sucesivas Jornadas. En cada una de ellas el «documento 0» era el resultado de las conclusiones definitivas de las Jornadas anteriores más los documentos elaborados por el Seminario durante el curso.

Se procuró así, cumplir con los objetivos que inicialmente se propusieron: progresividad, participación, cientificidad y realismo.

Perfeccionamiento de los Coordinadores

Si el perfeccionamiento del Profesorado es fundamental, tanto más lo es el de aquellos Profesores que han de dedicarse a coordinar a los demás. Por tanto, pareció imprescindible un permanente perfeccionamiento de los equipos de coordinación didáctica.

Los equipos deberían ser capaces de:

— Evaluar programas y planes de trabajo.
— Diagnosticar y analizar los problemas planteados en ellos.
— Proponer en común alterntivas de solución.
— Aplicar estrategías para la implantación de innovaciones. Esto implicaba la adquisición y desarrollo de conocimientos, habilidades y y actitudes en los siguientes campos:
— Diseño y evaluación del currículum.
— Evolución de las capacidades de la inteligencia.
— Animación de grupos de trabajo y adquisición de técnicas necesarias para ello.
— Investigación y planificación de innovaciones en las organizaciones educativas.

Coordinación Didáctica en Matemáticas

Se planteó inicialmente entre 8.° de E.G.B. y 1.° de B.U.P.

Nos preguntamos: ¿Qué nivel mínimo en Matemáticas debe alcanzar un alumno al terminar 8.° de E.G.B.?

¿Cuál debe ser el nivel mínimo deseable para comenzar los estudios de 1.° de B.U.P.?

Establecidos estos niveles debíamos proponer estrategias conducentes a la consecución de los objetivos establecidos.

Desde una postura realista consideramos que el alumno al terminar 8.° de E.G.B. no domina los mecanismos operativos, lo cual no ocurre solo al terminar 8.° de E.G.B., sino que es una constante a lo largo de todo el curso.

Por otro lado, es necesario que el alumno al concluir la 2.ª etapa de E.G.B. se haya iniciado en modo matemático de razonar.

Propusimos como objetivos primordiales:

a) Perfeccionamiento de los automatismos.
b) Iniciación al razonamiento matemático.
c) Un desarrollo adecuado de la intuición con introducción progresiva del rigor, que el alumno irá exigiendo, y no será imposición del Profesor, en muchas ocasiones arbitrario.

Sin mutuos reproches, que a nada conducen, era necesario acordar no sólo lo que sería *deseable* hacer, sino lo que se *podría* hacer, y estudiar soluciones a los interrogantes planteados.

El Profesorado de B.U.P. desconoce muchas veces los contenidos exigidos en E.G.B., y en 1.° de B.U.P. parte del supuesto de que el alumno posee algunos conocimientos que no están incluidos en los programas de E.G.B. Valgan por ejemplo: Cálculo con radicales; División de Polinomios; etc.

El profesorado de E.G.B. imparte a veces conocimientos no exigidos en los programas. Sirvan también los anteriores ejemplos. El motivo es conocido, muchso *textos* de E.G.B. contienen temas no exigidos en la programación oficial.

Parece lógico establecer un acuerdo y realizar una división del trabajo. No es tan importante el que un alumno conozca la estructura de cuerpo de Q en 8.° de E.G.B., como el que sepa operar adecuadamente en dicho cuerpo. La estructura de cuerpo parece más adecuado estudiarla en B.U.P.

Estas y otras muchas cuestiones que están en la mente de todos los docentes fueron las que nos planteamos y a las cuales buscamos soluciones. Los Documentos elaborados son una respuesta, naturalmente, abierta a críticas y sugerencias.

Establecimos, por tanto, los núcleos de agregación en cada curso con unas actividades previas determinando los elementos integrantes del núcleo, estableciendo unas experiencias de aprendizaje y dando un modelo de evaluación del núcleo.

El desarrollo curricular elegido fue el propuesto por Wheeler, que nos pareció el más adecuado a nuestros propósitos.

Si los objetivos propuestos para 8.° de E.G.B. se hubieran cumplido quedaba asegurado que el paso de E.G.B. a B.U.P. no supondría para el alumno ninguna dificultad. El análisis de los resultados después de la primera etapa nos demostró que para conseguir una coordinación real era necesario:

a) Realizar una programación de al menos toda la 2.ª etapa de E.G.B. en el campo de la Matemática.
b) Realizar una programación de todo el B.U.P. en la misma asignatura.

Estas dos tareas se consideraron como fundamentales y respetando los programas oficiales, las últimas publicaciones del año 1979 del I.C.E. de la Universidad de Santander, contienen unas posibles soluciones.

CONCLUSION

El proceso de coordinación es lento y se tarda en percibir resultados apreciables, pero esto no obsta para que convinemos los más ambiciosos objetivos finales con modestos propósitos de cada día.

En el momento actual la coordinación en el Distrito Universitario de Santander, es promovido por gran parte del Profesorado, por los Centros de Enseñanza Media, por la Universidad, por el I.C.E., por la Inspección de E.G.B. y por la Inspección de Enseñanza Media, pero sólo podrá avanzar si un número creciente de Profesores la valoran como una auténtica exigencia profesional y consideran voluntad colectiva del Profesorado hacer de la educación y de la enseñanza obra coherente de todos.

Julio AMADO CASTANEDO

COORDINACION EN LA ASIGNATURA DE MATEMATICAS, ENTRE SEGUNDA ETAPA DE E.G.B. Y B.U.P. POR EL SEMINARIO PERMANENTE DE MATEMATICAS DE CORDOBA

En octubre de 1976, al comienzo del curso académico, se hizo una prueba de exploración inicial para alumnos de 1.° de B.U.P. matriculados en los Institutos de la provincia de Córdoba. La idea partió del Seminario Permanente de Matemáticas para profesores de Bachillerato, y, contó con la ayuda de la Inspección de Enseñanza Media del Distrito y el I.C.E. de la Universidad de Córdoba, que dentro de sus actividades patrocinaba las del Seminario Permanente, dirigido y coordinado por Ricardo Rodríguez, catedrático de Matemáticas del I.N.B. «López Neyra» de Córdoba.

Tras analizar los resultados de la exploración inicial se vió la necesidad de conectar con el profesorado de E.G.B. a fin de coordinar el paso de un tipo de enseñanza a otra, buscando unos objetivos y niveles mínimos sobre los que montar una programación realista de 1.° de B.U.P.

La idea fue recogida por el I.C.E. y cuajó en unas reuniones conjuntas entre profesores de 2.ª etapa de E.G.B. y profesores de Institutos, con el único objetivo de buscar unos niveles mínimos de promoción de un ciclo de enseñanza a otra.

Por otra parte se reunieron los profesores de E.G.B. coordinados por el Inspector Jefe de Enseñanza Primaria y por otra los profesores de B.U.P. Cada grupo redactó sus conclusiones y a continuación se celebraron varias reuniones conjuntas a fin de concluir un programa común sobre la base de lo trabajado por cada grupo.

El resultado fue el programa siguiente:

1. Conjuntos, relaciones y aplicaciones. Relaciones de pertenencia e inclusión. Unión e intersección. Conjunto producto relación de equivalencia. Conjunto cociente. Conciente de aplicación: Tipos. Relación de orden. Representaciones gráficas.
2. Los conjuntos N, Z, Q. Dominio de los automatismos del cálculo, con conocimiento de

las propiedades que se emplean y en que conjunto se actúa. Manejo correcto de los símbolos (el menor que, el paréntesis, el corchete, el de idualdad, etc.).

3. Resolución de ecuaciones de primer grado en los distintos conjuntos numéricos N, Z, Q (sería conveniente resolver ecuaciones de primer grado en anillos de congruencia). Planteamiento, resolución e interpretación de problemas de primer grado. Sistemas de ecuaciones lineales.
4. Aplicaciones lineales y afines. La proporcionalidad. Aplicaciones al cálculo comercial.
5. Segmentos y ángulos generales. Medida y operaciones.
6. Polígonos. Conocimiento de los elementos del polígono, particularizando para el triángulo y el cuadrilátero.
7. Circunferencia y círculo. Propiedades y elementos. Angulos en la circunferencia.
8. Construcciones geométricas con regla y compás.
9. Areas y perímetros de las figuras planas.
10. Paralelismo y perpendicularidad en el espacio (estudio a través del amanejo de los poliedros).
11. Areas y volúmenes de prismas y pirámides (apoyado en la construcción material de los cuerpos).
12. Conocimiento material de las figuras de revolución. Areas y volúmenes. Tras estas conclusiones, se montó por el I.C.E. un curso para profesores de E.G.B., a fin de desarrollar algunos de los temas anteriores, atendiendo a contenidos, metodología, programación, evaluación.

El programa desarrollado fue el siguiente:

1. El cuerpo de los números racionales: Distintas formas de introducirlo: Ventajas e inconvenientes. Niveles mínimos a alcanzar. Pruebas.
2. El anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes racionales. Distintas formas de introducirlo: Ventajas e inconvenientes. Niveles mínimos. Pruebas.
3. El subgrupo de los segmentos generales. Longitud de un segmento. Proporcionalidad de segmentos, Niveles mínimos. Pruebas.
4. Introducción al concepto de ángulo. Medidas y relaciones entre ángulos. Ninveles mínimos. Pruebas.
5. Introducción al concepto de polígono. Elementos de un polígono y relaciones entre ellos. Estudio especial de los triángulos y cuadriláteros. Areas y perímetros, Niveles mínimos. Pruebas.
6. Circunferencia: Elementos y propiedades. Angulos en la circunferencia. Niveles mínimos. Pruebas.
7. Construcción de elementos geométricos utilizando regla y compás.

La forma de trabajo en el Seminario fue la siguiente:

— Un ponente desarrollaba el tema en cuanto a sus contenidos científicos; a continuación se discutía sobre la metodología adecuada al tema en la segunda etapa de E.G.B., incluyendo su adaptación a los distintos cursos; se determinaban los niveles mínimos de promoción y se proponía una prueba modelo de determinación de esos niveles mínimos.

— Como conclusión del curso se llegó a la conveniencia de extenderlo a un mayor número de profesorado, la necesidad de reuniones periódicas entre el profesorado de B.U.P. y el de E.G.B. de los centros de su zona de influencia y la posibilidad de poner en práctica, en plan experimental, un programa de este tipo a fin de contrastar sus resultados.

Ricardo Rodríguez

Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas

Es de todos sabido que existe una gran desconexión no solamente entre los distintos niveles educativos, sino también entre los distintos centros de un mismo nivel e incluso con frecuencia entre distintos profesores de un mismo centro de enseñanza. Por otra parte, y ciñéndonos a una de las materias que se enseñan en los niveles básico y medio, esto es, a la Matemática, son conocidas las dificultades que suelen tener los alumnos para la compresión de esta asignatura. Es un hecho comprobado que los porcentajes de éxito más bajos entre los estudiantes de estos niveles suelen ser los relativos a esta asignatura.

Varios profesionales de la enseñanza de la Matemática, conscientes de esta problemática, decidimos convocar al resto de los colegas con el fin de hablar de estos problemas y estudiar qué se podría hacer. Se celebró una primera reunión en el I.N.B. «Viera y Clavijo», de La Laguna (Tenerife), el 16 de diciembre de 1977, y en ella se acordó empezar a trabajar para conseguir mejorar la enseñanza de nuestra asignatura, haciéndose varias propuestas para ser estudiadas y presentadas en la siguiente reunión. Estas quedaron resumidas en: (a) Crear una Asociación de Profesores de Matemáticas. (b) Formar comisiones y equipos de trabajo sobre cuestiones concretas. (c) Publicar una revista o boletín en el que colaborásemos todos, aportando por una parte las conclusiones de los citados equipos de trabajo y por otra nuestras propias experiencias didácticas, notas bibliográficas, etcétera.

En una segunda reunión celebrada el 20 de enero de 1978 fueron aprobadas las propuestas anteriores, por lo que en esa fecha comienza su andadura la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, a la que más tarde, por necesidades formales, se le denominó «Isaac Newton» en homenaje a ese gran científico universal. En esa misma reunión fue presentado un proyecto de estatutos, los cuales fueron aprobados por los presentes con ligeras modificaciones. También fue creada una comisión gestora encargada de regir la Sociedad hasta que la misma fuese reconocida oficialmente. El 24 de septiembre fueron aprobados los estatutos por el Ministerio del Interior, y el 24 de noviembre se celebró la primera Asamblea General en la que, tras informarse de las gestiones realizadas, se procedió a la elección de la Junta Directiva, según lo previsto en los estatutos.

Ya estaba la Sociedad formalizada, pero ahora había que darle vida, justificar su razón de ser. No cabe duda que los primeros pasos estuvieron llenos de dificultades. Cundió el desánimo y todo estuvo a punto de venirse abajo. No obstante, con pasos algo inseguros y sin una línea de trabajo muy definida, llegamos a la publicación del primer número del boletín. Este, a pesar de los lógicos defectos de toda obra que comienza, tuvo una acogida muy favorable, lo que nos dio ánimos para seguir adelante con nuestros trabajos y pensar en la elaboración del segundo número.

Según iban surgiendo ideas, íbamos desarrollando distintas actividades, entre las que podemos destacar:

1) Homenaje al Catedrático de Matemáticas del I.N.B. «Viera y Clavijo», D. Luis García Fernández.
2) Conferencia sobre «Matemática estructural, matemática paradigmática», a cargo de don Luis Vigil Vázquez, Catedrático de Análisis de la Universidad de Zaragoza.
3) Edición del número 1 del boletín en noviembre de 1978.
4) Edición del número 2 del boletín en febrero de 1979.
5) Encuesta sobre la opinión de los alumnos respecto de la Matemática, realizada entre alumnos de 1.º y 2.º de B.U.P. y titulada «La enseñanza de la Matemática en entredicho». El número 3 del boletín fue dedicado íntegramente a comentar esta encuesta.
6) Realización de un sondeo sobre el nivel matemático de los alumnos de 1.º de B.U.P. en los institutos de la Región. Los resultados de este sondeo están resumidos en el número 2 del boletín.
7) Seminarios a cargo del Dr. D. Angel Isidoro Martín sobre «Introducción del Teorema de Bayes en C.O.U.».
8) Investigación entre los profesionales que no utilizan la Matemática habitualmente, a fin de sacar conclusiones.

De todas las actividades que hemos desarrollado hasta el momento, lo más importante ha sido, sin duda, la celebración de las I Jornadas, que bajo el lema «La matemática en el bachillerato» reunieron a más de cincuenta colegas procedentes de casi todas las islas del Archipiélago, los cuales durante tres días estudiaron diversos aspectos sobre la problemática de la matemática en el bachillerato. Asistieron a las mismas como profesores invitados, don José Pascual Ibarra y D. José Colera Jiménez, especialistas en didáctica de la matemática, los cuales aportaron valiosas sugerencias, fruto de sus conocimientos y gran experiencia como enseñantes.

La idea que nos llevó a celebrar las Jornadas fue, como queda dicho más atrás, la de estudiar los distintos aspectos que más nos preocupan sobre la problemática de la enseñanza de la matemática en el Bachillerato. Con objeto de decidir qué aspectos concretos habrían de ser estudiados, se hizo un sondeo entre los socios. Como resultado del mismo, se acordaron desarrollar los siguientes temas: (a) Conexión de la matemática de la E.G.B. con la del B.U.P. (b) La Matemática y la formación integral del alumno. El problema de la motivación. (c) El seminario de matemáticas en el B.U.P. (d) El uso de la calculadora en el aula. Este último tema fue debatido en una mesa redonda coordinada por el profesor Colera Jiménez.

También es de resaltar la presencia de un grupo de alumnos que constituyeron un grupo que elaboró un trabajo con el título «La matemática en el B.U.P. Los alumnos opinan».

Por otra parte, el profesor José Carlos M. Piquero del departamento de Metodología y Didáctica de la Universidad de La Laguna presentó una ponencia sobre una experiencia pedagógica realizada con alumnos de 1.º del B.U.P. sobre el tema «Combinatoria y Binomio de Newton», que fue seguida con gran interés por los asistentes.

La impresión que hemos sacado de estas I Jornadas ha sido altamente positiva, por el interés despertado en todos los participantes por obtener de ellas algo fructífero y, sobre todo porque pueden ser las que sienten las bases sobre las futuras líneas de trabajo de la Sociedad.

Las conclusiones obtenidas por los distintos equipos de trabajo constituyen casi exclusivamente el número 4 de nuestro boletín, aunque no pueden, ni mucho menos, considerarse como definitivas. Es obvio que así sea, pues temas tan complejos no podrían ser estudiados de forma exhaustiva en sólo tres días. Tales conclusiones constituyen sendos documentos de trabajo que han de elaborarse de forma constante y continuada si queremos conseguir una verdadera mejora de la calidad de la enseñanza de la Matemática. Por lo menos este era el sentir general de los participantes en las Jornadas. Precisamente una de las ideas que prevalecían en todos los equipos de trabajo era la necesidad de que exista un contacto permanente entre todos, que exista un intercambio de ideas y de experiencias y que se fomente la actividad investigadora. A este respecto se apuntó la idea de crear un centro de investigación didáctica, pues tal actividad está bastante descuidada por parte de los profesores.

Para terminar, queremos indicar a todos los colegas que lean esto y estén interesados en la Matemática, que nos agradaría tener ocasión de poder contactar con ellos. También indicarles que, si lo desean, pueden suscribirse a nuestro boletín, que será enviado por correo. La suscripción por tres números vale 400 pesetas, que pueden hacernos llegar, bien por giro postal, o por talón nominativo a las siguientes señas:

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

I.N.B. de Tejina. Tenerife

Arnulfo SANTOS HERNANDEZ

IV Congreso Internacional de Educación Matemática

TEMAS DEL CONGRESO SELECCIONADOS

101. Las Matemáticas en la *Enseñanza Primaria General*.

CONFERENCIANTE,
SEGUIDO POR PANELES 102-104.

102. ¿Qué matemáticas deberían dominar todos los estudiantes al final de la enseñanza *primaria obligatoria?*

PANEL.

103. ¿Cuál debería ser el curriculum de matemáticas en los sistemas de enseñanza en donde muchos alumnos *lo dejan a muy temprana edad?* ¿Qué es esencial, deseable, opcional?

PANEL.

104. ¿Qué *variaciones* en *objetivos* y *contenido* de las matemáticas de la escuela primaria son apropiadas en los diversos contextos sociales y culturales?

PANEL.

105. ¿Cuál es la situación actual del movimiento de «vuelta-a-lo-básico»? ¿Qué significa «vuelta-a-lo-básico»?

CONFERENCIANTE.

106. ¿Cuáles han sido los *éxitos y fracasos* de los curricula de matemáticas en los *últimos veinte años?*

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

107. ¿Cuáles deberían ser las principales corrientes de los curricula de matemáticas en la década de los ochenta?

APORTACIONES PERSONALES DE CONFERENCIANTES CONSTITUYENDO UNA PEQUEÑA CONFERENCIA.

108. *Recomendaciones para* el curriculum de *los años ochenta*, por diferentes comisiones *nacionales* o internacionales.

PANEL.

109. ¿Cuáles son algunos de los *modos alternativos de organizar* el curriculum escolar de matemáticas, incluyendo decisiones para las necesidades generales de la sociedad, las especiales necesidades técnicas y académicas, y las necesidades de los alumnos más lentos o más rápidos?

DISCUSION EN GRUPOS
SIGUIENDO A 101-08.

111. ¿Qué matemáticas deberían *dominar* todos los alumnos de escuela *secundaria*, y qué otras matemáticas deberían exponerse para que se familiaricen con ellas?

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

112. ¿Qué *nuevos temas* deberían introducirse en el curriculum de Matemáticas de la enseñanza secundaria, como, por ejemplo: teoría de grafos, teoría de juegos, matemática numérica, teoría de la información? ¿Es posible y aconsejable que elementos sencillos de esas teorías encuentren un lugar adecuado en las matemáticas escolares?

PANEL.

113. ¿Qué es lo que puede y debería ser *eliminado* del curriculum de matemáticas de la escuela *secundaria* para dejar sitio para aplicaciones y para temas nuevos?

PANEL.

121. La relación de las *matemáticas con las ciencias biológicas*: ¿qué campos de las matemáticas están implicados, cómo se debería coordinar o integrar la enseñanza de las matemáticas y la biología?

MINICONFERENCIA.

122. La relación de las *matemáticas* con las *ciencias sociales*: ¿qué campos de las matemáticas están implicados, cómo se debería coordinar o integrar la enseñanza de las matemáticas y las ciencias sociales?

MINICONFERENCIA.

123. La relación de las matemáticas con las *ciencias físicas* y la *ingeniería*: ¿qué campos de las matemáticas están implicados, cómo se debería coordinar o integrar la enseñanza de las matemáticas y las ciencias físicas?

MINICONFERENCIA.

124. ¿Cómo pueden integrarse las *matemáticas*, la *estadística* y la *ciencia de los ordenadores* en un programa de matemáticas universitario o de grado medio?

MINICONFERENCIA.

125. ¿Qué es lo que puede y debería ser *eliminado*

del curriculum de matemáticas universitario o de grado medio para dejar sitio a las aplicaciones y a nuevos tópicos?

PANEL.

131. ¿Qué métodos pedagógicos son particularmente apropiados y efectivos en la enseñanza de la *aritmética* a los *adultos analfabetos?*

PANEL.

132. ¿Qué métodos pedagógicos son particularmente apropiados y efectivos en la enseñanza de la *aritmética* a los *adultos alfabetizados?*

PANEL.

133. Problemas referentes a clases de alumnos de habilidades diferentes respecto a las matemáticas. Presentación de métodos usados con éxito al enfrentar estos problemas.

141. La enseñanza tradicional de las matemáticas escolares está orientada hacia el *dominio* de los contenidos prescritos. Otro objetivo es la familiarización con los *procesos matemáticos*, por ejemplo, formulación y comprobación de hipótesis, simulación, demostración, generalización. ¿Cómo se pueden coordinar estos dos objetivos en la enseñanza de las matemáticas?

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

142. ¿Podemos definir más precisamente los papeles complementarios de *intuición y axiomática?* ¿Cómo se puede desarrollar la intuición, y cuándo y como se debería presentar a los alumnos la demostración?

CONFERENCIANTE.

143. ¿Cómo se puede enseñar a *resolver problemas?*

PANEL.

144. Uso y abuso de los *libros de texto* en la enseñanza de las matemáticas.

PANEL.

145. ¿Qué son algunos programas modélicos en la enseñanza de las matemáticas *a distancia?*

PANEL, PRESENTACION DE PROYECTOS.

146. ¿Resultan efectivos los *cursos integrados* para la enseñanza de las matemáticas?

CONFERENCIANTE O PANEL.

147. ¿Cómo se pueden usar las *investigaciones* y *proyectos* matemáticos llevados a cabo por estudiantes, individualmente o en grupos pequeños, para ayudar en la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario y en el secundario?

PANEL.

148. ¿Cómo se puede utilizar la *historia de las matemáticas* en la enseñanza de los matemáticos en las escuelas primaria y secundaria?

PANEL.

149. ¿Qué materiales hay disponibles a escala mundial para llevar las *aplicaciones* de las matemáticas a las escuelas?

CONFERENCIANTE.

150. Exitos y fracasos de la enseñanza individualizada, incluyendo la enseñanza programada.

PANEL.

151. Exitos y fracasos de la enseñanza asistida por ordenador (C.A.I.).

PANEL.

161. *Modelos* de desarrollo del curriculum.

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR QUIENES YA HAN ACTUADO.

162. La *institucionalización* del desarrollo del curriculum de matemáticas.

PRESENTACION DE PROYECTOS.

171. La relación entre el *desarrollo* del *lenguaje* en los niños y el *desarrollo* de los *conceptos* matemáticos en los niños.

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

172. La relación entre la *enseñanza* del lenguaje y la *enseñanza* de las *matemáticas*.

CONFERENCIANTE.

173. Los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en una *segunda lengua*.

PANEL.

201. El papel de las *fracciones* en la enseñanza elemental, incluyendo un estudio comparativo sobre la introducción de las fracciones. En resumen: fracciones, ¿por qué y cómo?

DEBATE.

202. Aproximaciones alternativas a la enseñanza del *álgebra* en las escuelas secundarias.

PANEL.

203. ¿Cuál es el lugar de la *geometría* en el curriculum de la escuela *elemental?* ¿Qué temas de geometría se deberían incluir y cuánto tiempo se les debería conceder? ¿Qué conceptos geométricos especiales deberían desarrollarse en la escuela elemental y cómo?

PANEL.

204. ¿Cuál es el lugar de la *geometría* en el currículum de la escuela *secundaria?* ¿Qué geometría debería enseñarse y a quiénes? Posición relativa y méritos de la geometría intuitiva y axiomática. La adecuada relación de la geometría y el álgebra; las ventajas y desventajas de una secuencia unificada.

DEBATE MAS MINICONFERENCIA.

205. La muerte de la *geometría* en el nivel *post-secundario*.

DEBATE.

206. Hay varias introducciones posibles a la enseñanza del *análisis*, por ejemplo, vectores. ¿Qué método de enseñanza y modelos son más efectivos?

PANEL.

207. Panorámica sobre el tema de *probabilidad y estadística* en el nivel escolar.

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR 208, 209.

208. El orden de presentación de tópicos en *probabilidad* y *estadística* para las escuelas y su posible integración con otras matemáticas en las escuelas.

209. La naturaleza de la *estadística* que ha de enseñarse en las escuelas (descriptiva orientada hacia las matemática), buenas fuentes de datos sin elaborar; el uso de calculadoras de bolsillo en la enseñanza de la estadística; la división de las materias de estadística y probabilidad en materias obligatorias y opcionales.

MINICONFERENCIA.

210. ¿Debería continuar siendo el cálculo el único nucleo de las matemáticas *universitarias o de grado medio?* Si no, ¿qué alternativas deberían considerarse?

DEBATE.

221. *La teoría del álgebra codificada* se ha convertido recientemente en un tópico importante, adecuado para enseñar y de muchas aplicaciones. Proponemos una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA.

222. *Los algoritmos* se han convertido en tema importante recientemente, adecuado para enseñar y con muchas aplicaciones. Se propone una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA.

223. *La combinatoria* se ha convertido recientemente en tema importante, adecuado para enseñar y con muchas aplicaciones. Se propone una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA.

224. *El análisis exploratorio de datos,* se ha convertido recientemente en un tema importante, adecuado para enseñar y de muchas aplicaciones. Se propone una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA QUIZAS UTILIZANDO PELICULAS ASA

225. *Máximos y mínimos sin cálculo* es un tópico que recientemente ha pasado a ser importante, adecuado para enseñar y con aplicaciones. Se propone una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA.

226. La investigación operativa para planificación y dirección se ha convertido recientemente en un tópico importante, adecuado para enseñar y con muchas aplicaciones. Se propone una miniconferencia sobre estos tres aspectos.

MINICONFERENCIA.

301. ¿Cuán estrechamente asociados deberían estar los currícula de ordenadores y los de matemáticas? ¿Deberían ser materias separadas o no?

DEBATE.

302. ¿Qué conocimiento, destrezas y actitudes respecto a los *ordenadores* deberían formar parte de los *objetivos educativos?* ¿«Computer appreciation»? ¿Lenguajes? ¿Programación? ¿Cuándo y cómo?

PANEL.

311. ¿Cómo evolucionarán las matemáticas escolares con el uso extendido de las calculadoras de bolsillo? ¿Deberíamos pensar en una ola de nuevos currícula de matemáticas que tenga quizás un profundo efecto sobre los cimientos de las matemáticas escolares?

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANELES 312-314.

312. ¿Cómo se verá afectado el curriculum escolar del nivel *primario* por el uso extendido de las *calculadoras de bolsillo?*

PANEL A CONTINUACION DEL CONFERENCIANTE PRINCIPAL

313. ¿Cómo se verá afectado el curriculum escolar del nivel *secundario* por el uso extendido de las *calculadoras de bolsillo?*

PANEL A CONTINUACION DEL CONFERENCIANTE PRINCIPAL

314. ¿Cómo se verá afectado el curriculum del nivel *post-secundario* por el uso extendido de las *calculadoras de bolsillo?*

PANEL A CONTINUACION DEL CONFERENCIANTE PRINCIPAL

315. ¿Cuánto afectará el uso temprano de las *calculadoras* la adquisición de los conceptos numéricos y de las destrezas relacionadas con el uso de los números y operaciones?

PANEL.

316. El uso de las calculadoras programables en la enseñanza de las matemáticas.

MINICONFERENCIA.

321. Cursillo sobre «computer sofware packges (M-lab, MACSYMA, SCRATCH PAD, etc.) y sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas.

MINICONFERENCIA.

322. La enseñanza de literatura del computador.

PANEL.

323. Cursillo sobre microprocesadores y su impacto sobre la enseñanza de las matemáticas.

MINICONFERENCIA.

401. ¿Qué es un *profesor de matemáticas profesional?* ¿Qué cualidades, conocimiento y aptitudes debería tener un profesor? ¿Puede un programa de educación de profesorado adiestrar un profesor verdaderamente profesional? ¿Cómo se puede decidir si un individuo determinado puede llegar a ser o no profesor de matemáticas?

CONFERENCIANTE.

402. El dilema de los profesores entre enseñar lo que les *gusta* o enseñar lo que el alumno *necesita conocer*. ¿Cuánta libertad deberían tener los profesores para añadir materia, cuánta materia, qué profesores?

CONFERENCIANTE.

403. Una crítica de las actuales tendencias en educación del profesorado: primaria, secundaria, antes de estar en activo, estando en activo.

MINICONFERENCIA.

404. ¿Cómo asegurar la *calidad* de un *programa de educación de profesores?*

CONFERENCIANTE.

411. ¿Qué clase de *preparación* matemática debería tener un *profesor de elemental en el futuro?*

PANEL.

412. ¿Cómo pueden *integrarse* el *contenido* matemático y los métodos *pedagógicos* en la formación antes de estar en activo de los profesores de elemental?

413. ¿Qué clase de *preparación* matemática debería tener un *profesor de secundaria en el futuro?*

414. ¿Cómo pueden *integrarse* el *contenido* matemático y los métodos *pedagógicos* en la formación antes de estar en activo de los profesores de secundaria?

PANEL.

415. ¿Cuál es la preparación idónea en *matemáticas* y en pedagogía y qué más es lo adecuado para un profesor de grado medio de matemáticas?

DEBATE.

421. Los profesores en activo necesitan una formación por una serie de posibles razones tales como: falta de conocimiento matemático, deficiente preparación antes de estar en servicio, necesidad de puesta al día. ¿Qué clases de programas para profesores en activo han tenido éxito en el profesorado de *elemental?*

PANEL Y PRESENTACION DE PROYECTOS.

422. Los profesores en activo necesitan formación contínua por varias posibles razones: tales como: falta de conocimiento matemático, deficiente preparación antes de estar en servicio, necesidad de puesta al día. ¿Qué tipos de programas para profesores en activo han tenido éxito para el profesor de *secundaria?*

PANEL Y PRESENTACION DE PROYECTOS.

423. Los profesores en activo necesitan una formación contínua por varias posibles razones, tales como: falta de conocimiento matemático. deficiente preparación antes de estar en servicio, necesidad de puesta al día. ¿Cuales de las características de un programa para profesores en activo son las más importantes para los profesores de *post-secundaria* y qué programas han tenido éxito?

PANEL.

431. *Las aplicaciones* de las matemáticas deben jugar un papel cada vez mayor en la enseñanza de las matemáticas. ¿Cuáles son las repercusiones de este papel en la educación de los profesores de matemáticas?

CONFERENCIANTE.

432. *Estadística y probabilidad* deben jugar un papel cada vez mayor en la enseñanza de las matemáticas. ¿Cuáles son las repercusiones de este papel en la educación de los profesores de matemáticas?

CONFERENCIANTE.

433. *La evaluación de los profesores* y de su enseñanza. ¿Cómo se evalúa a los profesores y a su enseñanza en los distintos países? ¿Cómo se deberían hacer tales evaluaciones?

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

434. *Servicios de apoyo* para profesores de matemáticas, tales como especialistas en curriculum, jefes de departamento, asistencia especial para profesores principiantes, centros de profesorado.

PANEL.

435. Los *ordenadores* deben desempeñar un papel cada vez mayor en la enseñanza de las matemáticas. ¿Cuáles son las implicaciones de este papel para la formación del profesor de matemáticas?

CONFERENCIANTE.

436. Las *calculadoras de bolsillo* deben desempeñar un papel creciente en la enseñanza de las matemáticas. ¿Cuáles son las implicaciones de este papel para la formación del profesor de matemáticas?

CONFERENCIANTE.

501. Metodologías alternativas para investigación en la enseñanza de las matemáticas: el estudio de los casos orientado hacia los diseños a gran escala .

502. Metodologías alternativas para la investigación en la enseñanza de las matemáticas: *el análisis exploratorio de datos* orientado hacia la estadística clásica.

DEBATE.

503-5. *La serie de memorias de Begle sobre Investigación del Aprendizaje de las Matemáticas.* El último de los grandes proyectos del profesor Edward G. Begle fue una revisión de la investigación: «Variables críticas en la Enseñanza de las Matemáticas». Begle revisó la bibliografía existente sobre los efectos de unas cien variables sobre los logros estudiantiles y dio recomendaciones para la investigación futura. En estas series, la revisión de Begle sobre un subconjunto de estas variables se pondrá al día, se extenderá y se pondrán los cimientos para la cooperación mundial sobre la investigación futura y las presentaciones en los congresos ulteriores. ¿Qué variables tienen el mayor interés mundial?

TRES MINICONFERENCIAS.

506. ¿Por qué las mujeres están poco representadas en la enseñanza de las matemáticas en muchos países?

PANEL.

511. El *desarrollo* de *destrezas matemáticas* en los niños. ¿Cómo clasificar las destrezas matemáticas, cómo se desarrollan, cómo se puede ayudar a su desarrollo?

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR PANEL.

512. El *concepto de número en el niño*. Las investigaciones recientes sugieren modificaciones de algunas de las ideas de Piaget. En particular, está en debate el papel de la numeración.

MINICONFERENCIA.

513. El *concepto de espacio en el niño*. Enfasis en la investigación de «cruces-culturales» y en los intentos para desarrollar los conceptos espaciales.

MINICONFERENCIA.

514. Análisis de los *errores de los niños* en matemáticas.

MINICONFERENCIA.

521. La importancia de la *filosofía* y la *historia* de la ciencia y de las matemáticas para la *enseñanza de las matemáticas*, por ejemplo, para la comprensión del crecimiento del conocimiento y el desarrollo de los conceptos.

CONFERENCIANTE SEGUIDO POR UN PANEL DE QUIENES YA HAN ACTUADO.

522. Contribuciones de la investigación sobre enseñanza de las *ciencias* a la enseñanza de las matemáticas.

MINICONFERENCIA.

523. El papel de los *Institutos de Investigación* para el Trabajo Fundamental en la Enseñanza de las Matemáticas. Las ideas centrales y ejemplos de su trabajo con especial énfasis sobre investigación metodológica y la relación entre teoría y práctica.

MINICONFERENCIA.

524. La utilización de las *matemáticas* para la construcción de *modelos* matemáticos en la investigación de la *enseñanza de las matemáticas.*

CONFERENCIANTE.

525. ¿Qué desean los *profesores* de elemental y secundaria que les averigue la *investigación* sobre enseñanza de las matemáticas?

PANEL DE PROFESORES.

526. La efectividad del uso de *juegos* para aprender matemáticas.

PANEL.

601. ¿Cuáles son algunas de las organizaciones de curricula que se ocupan con éxito de los alumnos *superdotados?* ¿Qué métodos de enseñanza ayudan con éxito al alumno superdotado?

MINICONFERENCIA.

602. Las *competiciones* matemáticas, torneos, olimpiadas, etc. ¿Qué sucede en los distintos países? ¿Qué efectos tienen esas competiciones?

PANEL.

603. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en zonas rurales. Ejemplos de aproximaciones interesantes y con éxito a estos problemas.

MINICONFERENCIA Y PRESENTACION DE PROYECTOS

604. *Contribuciones* hechas por *mujeres*, a la enseñanza de las matemáticas.

CONFERENCIANTE.

605. ¿Cómo podemos mejorar la *participación* de *las mujeres* en la escuela y en las matemáticas de la post-secundaria? ¿Cuáles son algunos de los planes y proyectos que han tenido éxito?

PANEL SEGUIDO POR UNA DISCUSION EN GRUPO

606. ¿Por qué existen grupos *al margen de la corriente principal, subrepresentados*, en matemáticas en muchos países? ¿Cómo podemos mejorar la participación de estos grupos en las matemáticas escolares y post-secundarias? ¿Cuáles son algunos planes y proyectos con éxito?

PANEL.

611. ¿Cuáles son las *raíces* del *fracaso* de los niños para comprender las matemáticas en la escuela primaria?
¿Qué se puede hacer?

MINICONFERENCIA, POSIBLEMENTE PELICULAS DE CLASES REALES. ¿SABE USTED DE ALGUNAS?

612. ¿Cuáles son los problemas del estudiante en la transición desde las matemáticas enseñadas a los niños a las matemáticas enseñadas a los adolescentes? ¿Qué matemáticas deberían enseñarse a los *jóvenes adolescentes* y cómo deberían enseñarse?

PANEL.

613. ¿Ha empeorado la preparación matemática de los estudiantes de la escuela *secundaria* para los cursos de matemáticas post-secundarias? ¿Ha meiorado? ¿Cuál ha sido la experiencia en varios países?

PANEL.

614. ¿Cuáles son algunos de los métodos de enseñanza que se ocupan y ayudan con éxito a los alumnos adultos *matemáticamente-analfabetos?*

PANEL.

615. En muchos países ha habido una *disminución* en el *número* de estudiantes de *post-secundaria* enfocados hacia las matemáticas. ¿Por qué ha ocurrido y qué puede hacerse?

PANEL.

701. Las pruebas: ¿son beneficiosas o periudiciales?

DEBATE.

702. Evaluación de la actuación de los alumnos en matemáticas: planes, procedimientos y efectos. Revisión mundial de opinión y práctica junto con ejemplos de procedimientos innovadores.

PANEL.

711. Evaluaciones nacionales en matemáticas. Pruebas oficiales de logros matemáticos en la escuela.

PANEL.

712. Informes de la I.E.A. (Asociación Internacional de Evaluación) sobre análisis de procesos de las clases de Matemáticas.

PANEL.

713. Informes de la I.E.A. (Asociación Internacional de Evaluación) sobre Análisis de curriculum en Matemáticas.

PANEL.

801. ¿Qué es el *proceso de matematización* de situaciones aienas a las matemáticas y cómo y cómo puede enseñarse?

PANEL.

801. La *enseñanza* de las matemáticas para que los alumnos puedan *aplicarla* «Pura» orientada a, o con, la aplicada; equilibrio entre eurística y precisión.

PANEL.

803. ¿Deberían las *aplicaciones* de las matemáticas enseñarse en clases *separadas* (en matemáticas aplicadas o en otras disciplinas?) o en clases de matemáticas orientadas hacia, o motivadas por, o usar eiemplos de, aplicaciones?

DEBATE.

804. El uso de *módulos* para introducir las matemáticas aplicadas en el curriculum.

PANEL.

805. *Aproximación a las matemáticas a través* de las artes.

PANEL.

806. La relación entre las matemáticas y el empleo en *diversas profesiones* ¿Qué matemáticas son necesarias para diferentes profesiones? ¿Qué profesiones compensaría examinar?

PANEL O MINICONFERENCIA.

812. Programas de matemática aplicada *en estudios de grado medio o universitarios,* basados en debates coniuntos de alumnos y profesores de facultad sobre los problemas de importanpara la industria y suministrados por ella.

MINICONFERENCIA.

813. Informes de la industria sobre los puntos fuertes y los puntos débiles de la formación en las ciencias matemáticas *de los nuevos empleados,* orientado principalmente este estudio hacia el empleado que no es un profesional de la ciencia matemática.

PANEL.

814. *La educación permanente en la industria* obietivos, énfasis iniciales, aproximaciones diversas, cómo involucrar al sistema educacional standard.

PANEL.

901. Los tres primeros ICMEs (Congreso Internacional de Educación Matemática) ¿Han tenido algún impacto sobre la enseñanza en las clases? ¿Y sobre la investigación? ¿Cómo se podría evaluar el écito de un ICME?

PANEL.

1000. Por favor, comuniquemos los proyectos interesantes que conozca y que pudieran ser solicitados para elaborar con ellos proyectos para presentar en el Congreso.