

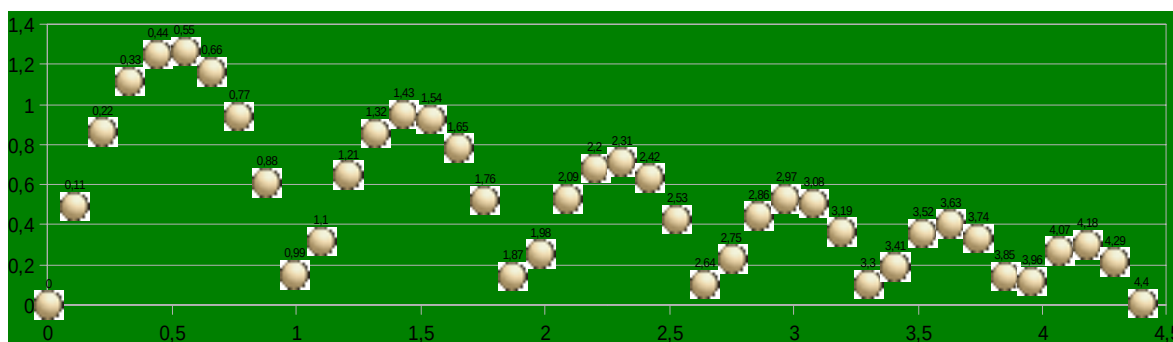


Laboratorio informático de prácticas

Física y Química de Bachillerato

Secciones Bilingües de Eslovaquia

Datos fijos	Unidades	Tiempo	Bote actual	t_n	$x=x_0+v_x t$	$y_n=v_n(t-t_n)+1/2g(t-t_n)^2$	Bote	Tiempo inicio bote
$X_0 =$	0 m	0	0	0	0	0	0	0
$V_x =$	1 m/s	0,11	0	0	0,11	0,49	1	1,0204
$Y_0 =$	0 m	0,22	0	0	0,22	0,86	2	1,9041
$V_y =$	5 m/s	0,33	0	0	0,33	1,12	3	2,6694
$g =$	-9,8 m/s ²	0,44	0	0	0,44	1,25	4	3,3322
Razón de energías =	0,75	0,55	0	0	0,55	1,27	5	3,9062
		0,66	0	0	0,66	1,17	6	4,4032
Datos para la representación		0,77	0	0	0,77	0,94	7	4,8337
Tiempo inicial	0 s	0,88	0	0	0,88	0,61	8	5,2065
Incremento de tiempo	0,11 s	0,99	0	0	0,99	0,15	9	5,5294
		1,1	1	1,02	1,1	0,31	10	5,8090
Datos calculados		1,21	1	1,02	1,21	0,64	11	6,0512
Tiempo retorno suelo = 1,02 s		1,32	1	1,02	1,32	0,86	12	6,2609
		1,43	1	1,02	1,43	0,95	13	6,4425
		1,54	1	1,02	1,54	0,93	14	6,5998
		1,65	1	1,02	1,65	0,78	15	6,7360
		1,76	1	1,02	1,76	0,52	16	6,8539
		1,87	1	1,02	1,87	0,14	17	6,9561
		1,98	2	1,9	1,98	0,26	18	7,0446
		2,09	2	1,9	2,09	0,53	19	7,1212
		2,2	2	1,9	2,2	0,68	20	7,1875
		2,31	2	1,9	2,31	0,71	21	7,2450
		2,42	2	1,9	2,42	0,63	22	7,2947
		2,53	2	1,9	2,53	0,43	23	7,3378
		2,64	2	1,9	2,64	0,11	24	7,3752
		2,75	3	2,67	2,75	0,23	25	7,4075



LABORATORIO INFORMÁTICO DE PRÁCTICAS
FÍSICA Y QUÍMICA DE BACHILLERATO

Antonio Cascales Vicente
José Gabriel Díaz García



MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Secretaría General Técnica

Edita:

© Secretaría General Técnica
Subdirección General de Información y Publicaciones

EMBAJADA DE ESPAÑA EN ESLOVAQUIA

NIPO: 820-09-127-9

Autores, © de la obra: Antonio Cascales Vicente
José Gabriel Díaz García

Gráficos portada: autores.

Bratislava, septiembre 2009

Edición electrónica de la Agregaduría de Educación en Eslovaquia:
<http://www.educacion.es/exterior/sk/es/publicaciones-y-materiales/LabFQ.pdf>

Las publicaciones de la Agregaduría de Educación en Eslovaquia se enriquecen con este ***Laboratorio Informático de prácticas. Física y Química***, fruto de los grupos de trabajo que vienen funcionando dentro del programa de formación del profesorado del Ministerio de Educación de España.

Sus dos autores, que han sido profesores de las asignaturas del área de ciencias en la Sección Bilingüe de Nové Mesto nad Váhom, han estudiado y tenido en cuenta las dificultades del acercamiento del aprendizaje de estas materias a los alumnos de un sistema educativo extranjero, y han procurado, partiendo de su experiencia, hacer compatibles los dos sistemas educativos y dar herramientas prácticas para facilitar la enseñanza de la Física y de la Química desde la óptica de los programas españoles en los programas del sistema educativo eslovaco.

Con este objetivo, el presente libro se revela de una importante utilidad no sólo para el programa educativo del Ministerio de Educación español en Eslovaquia, sino también en el sistema educativo español, haciendo destinatarios de esta publicación a los profesores y alumnos de Bachillerato.

Finalmente, es de destacar que en el propósito conjunto que hemos puesto en marcha la Agregaduría de Educación y las direcciones de las Secciones Bilingües para uniformar las enseñanzas de las asignaturas que se imparten total o parcialmente en español, la publicación que presentamos contribuye a esta tarea, de cuyo éxito se verán favorecidas ambas administraciones educativas y, particularmente, la calidad de la enseñanza en las Secciones Bilingües eslovaco-españolas. Y aunque en el desarrollo de los trabajos conjuntos, y a tenor de las nuevas disposiciones de la reciente Ley de Educación eslovaca, los currículos que finalmente se aprueben se diferencien en algo de los que aparecen en el Anexo I, creemos que será indudable que este ***Laboratorio Informático de prácticas. Física y Química*** será punto de referencia y consulta en la enseñanza de las secciones bilingües de Eslovaquia.

Siguiendo las nuevas corrientes que van marcando las tecnologías de la información, se ha recurrido a su edición electrónica como medio para conseguir una más amplia difusión de esta publicación.

A la vez que agradecemos y felicitamos a los autores del ***Laboratorio Informático de prácticas. Física y Química*** por llevar a término este proyecto, invitamos a los profesionales involucrados en la enseñanza de la Física y la Química a consultar y servirse del presente libro como instrumento complementario de trabajo.

Bratislava, septiembre 2009

Nos gustaría expresar nuestro más sincero agradecimiento a la Agregaduría de Educación de la Embajada de España en Eslovaquia y más concretamente a los agregados María José Lacleta y Luis Pardiñas Béjar por las facilidades ofrecidas en la elaboración de este libro. Asimismo, quisiéramos reconocer la ayuda prestada por los profesores Lourdes Castro, Emilio J. Fernández , Rafael Medel y Pilar Soto en la elaboración de la propuesta de currículo de Maturita. Finalmente, nos gustaría manifestar nuestra gratitud a los estudiantes, destinatarios de este trabajo, por la recompensa diaria de su atención en nuestras clases. En particular, agradecemos a los alumnos de la sección bilingüe de Nové Mesto nad Váhom sus preguntas y continuas demandas de aclaraciones, las cuales han contribuido a mejorar la calidad de este trabajo.

Nové Mesto nad Váhom, diciembre de 2008

ÍNDICE

Introducción.....	7
Introducción a la parte de química.....	9
Capítulo I: El espectro de emisión del átomo de hidrógeno.....	11
Capítulo II: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases fuertes.....	17
Capítulo III: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases débiles.....	25
Capítulo IV: Curvas de valoración ácido-base.....	33
Capítulo V: Dependencia de la constante de velocidad con la temperatura.....	45
Capítulo VI: Determinación de la cinética de una reacción química.....	55
Introducción a la parte de física.....	67
Capítulo VII: Caída libre en el Sistema Solar.....	69
Capítulo VIII: Dilatación Térmica.....	81
Capítulo IX: Circuitos de Corriente Alterna.....	91
Capítulo X: Superposición de Ondas.....	103
Capítulo XI: Rebotes de una pelota.....	117
Capítulo XII: Osciladores Armónicos.....	129
Anexo I: Currículos de Química, Física y Matemáticas.....	141
Anexo II: Prácticas resueltas.....	161
Anexo III: Contenidos y glosario de la hoja de cálculo.....	187
Bibliografía y Referencias Web.....	193

Introducción

Los problemas seleccionados para este libro han sido escogidos por su importancia en los correspondientes currículos eslovacos de las asignaturas de Física y Química. Intencionadamente, hemos seleccionado problemas que la docencia tradicional de aula deja simplemente planteados, debido a las dificultades matemáticas y de procesamiento de datos que su resolución con simple papel y lápiz conlleva. El objetivo de este libro no es abordar exhaustivamente todos los temas del currículo de Física y Química, para lo cual necesitaríamos de una extensión muy superior, sino proponer ejemplos donde la hoja de cálculo *OpenCalc* verdaderamente permita al estudiante comprender con mayor profundidad los conceptos estudiados en clase y obtener, por sí mismo, resultados que de otro modo debe asumir como ciertos.

Para la resolución de estos problemas es imprescindible un mínimo conocimiento de informática. En concreto, el alumno debe disponer de nociones elementales acerca de la utilización de sistemas operativos con ventanas, como *Windows*, *Ubuntu*, *Fedora*..., y conocer algunas de las opciones básicas de las hojas de cálculo. Para hacer más gradual la introducción al manejo de la hoja de cálculo de libre distribución, *OpenCalc*, los problemas se han ordenado en función de su dificultad. De esta manera, el alumno adquirirá progresivamente las destrezas procedimentales básicas que le permitan emplear con soltura los recursos del programa. La ventaja de la hoja de cálculo reside en el hecho de que, con unas mínimas indicaciones por parte del profesor, los alumnos pueden comenzar a hacer uso de las posibilidades que nos ofrece el programa prácticamente desde el primer día. Para ello, bastará con mostrar las opciones básicas del programa relativas a la implementación de funciones matemáticas, el arrastre de celdas para series de datos y la graficación. El propio alumno constatará cómo con la resolución de estos problemas la utilización que realiza de la hoja de cálculo transita desde una simple calculadora avanzada hasta una verdadera herramienta matemática para la resolución de problemas de naturaleza variada de un modo rápido, sencillo y elegante.

Uno de los aspectos que hacen atractivas las prácticas propuestas es la interdisciplinaridad. En la resolución de estos problemas se hacen uso de conceptos matemáticos impartidos durante el Bachillerato como: la utilización de logaritmos, los conceptos de derivada e integral de una función, o los ajustes lineales. Por un lado, las prácticas permiten consolidar estos conceptos matemáticos. Por otro, los alumnos tienen la oportunidad de aplicar de forma práctica sus conocimientos matemáticos, constatando que no se trata de herramientas poco útiles empleadas exclusivamente en la resolución de problemas académicos, sino que su utilidad trasciende el ámbito del aula e incumbe problemas que el estudiante puede encontrarse con posterioridad en su vida laboral.

Este libro se divide en dos secciones: una de Química y otra de Física. Cada una de las cuales se encuentra estructurada en prácticas o capítulos. La estructura de los distintos capítulos del libro también presenta un esquema fijo, con una serie apartados comunes a todas las prácticas. La finalidad que se persigue es que la exposición de los contenidos resulte ordenada para el lector. En el inicio de cada capítulo se recogen los *objetivos* fundamentales que se espera alcanzar mediante el desarrollo de la práctica. Estos objetivos hacen referencia tanto a aspectos concretos del contenido de las asignaturas de Física y Química, como a otros relativos a las disciplinas de Matemáticas e Informática. El apartado de *contenidos* permite que el lector identifique con rapidez cuáles son los aspectos clave que se desarrollan en la práctica.

El destinatario de este libro son los alumnos de las secciones bilingües de Eslovaquia. Por ello, el libro sigue el currículo eslovaco para las asignaturas de Matemáticas, Física y Química. En el Anexo I al final del libro incluimos una propuesta de currículo general para estas asignaturas. La *contextualización* académica permite situar los contenidos presentados dentro del currículo

eslovaco. Además, resulta imprescindible ubicar la práctica en el marco histórico y social en el que se encuadra. La intención es que el alumno comprenda, desde una perspectiva histórica, las implicaciones que los conceptos desarrollados tuvieron para el desarrollo de la ciencia y sus posteriores aplicaciones prácticas.

El apartado de *temporalización* es una guía destinada al profesor, cuya única intención es reflejar una posible secuenciación de las actividades a desarrollar en el aula de informática, indicando el tiempo aproximado para realizarlas. Estas indicaciones son meramente orientativas, ya que será el profesor quien rediseñe la práctica en función de los objetivos que se plantee conseguir, el nivel de los alumnos para los cuales dirija la práctica y el tiempo disponible.

Los conocimientos teóricos necesarios para la resolución de los problemas propuestos se incluyen en el apartado de *fundamentos teóricos*. La finalidad de esta sección es desarrollar los conceptos teóricos básicos que se han citado previamente y que son necesarios para la resolución de la práctica. Este apartado permite que tanto el profesor como los alumnos tengan recopilada y sintetizada toda la información de interés relativa al problema.

Los aspectos relacionados con la resolución práctica del problema se incluyen en el apartado de *metodología*, donde se indican todos los pasos seguidos en la resolución del problema. Este apartado se ilustra con numerosos gráficos y figuras que detallan cada una de las tareas realizadas, con especial atención a la sintaxis de las fórmulas implementadas y a la construcción de las gráficas. Al final del libro, el lector encontrará en el Anexo II la hoja de cálculo completa donde se encuentra la resolución para cada una de las prácticas propuestas. Asimismo, esta obra incluye un CD complementario, destinado al profesor, donde se incluyen las hojas de cálculo, solución de las prácticas propuestas.

El apartado de *criterios de evaluación* está también dirigido al profesor de la asignatura. En él se recogen las destrezas de tipo conceptual y procedimental que se espera que los alumnos hayan alcanzado al completar una determinada práctica. De nuevo, hemos de señalar el carácter flexible y dinámico con el que se concibe este libro, el cual permite rediseñar los objetivos para cada práctica, y por tanto su evaluación, de acuerdo a las particulares motivaciones e intereses con las que el docente efectúe la práctica.

Uno de los objetivos fundamentales que pretende alcanzar este libro es despertar la motivación y el interés del estudiante hacia las disciplinas de Física y Química. En el *corolario*, los estudiantes encontrarán aplicaciones de los conceptos desarrollados en la práctica, que les permitirán entroncar los conocimientos teóricos desarrollados en clase con aplicaciones tecnológicas de las que disfrutan en la vida cotidiana y que, a menudo, emplean inconscientes de la base teórica que subyace tras ellas.

Finalmente, cada uno de los capítulos termina con una *propuesta de trabajos*, la cual recoge distintos problemas asociados al contenido de la práctica que se pueden resolver con ayuda de la propia hoja de cálculo realizada o mediante alguna pequeña modificación de la misma. Este apartado también incluye problemas y cuestiones adicionales destinadas a comprobar el grado con que el alumno ha entendido los conceptos trabajados.

En resumen, la intención de este libro es la de aproximar los contenidos del currículo de Física y Química de una forma que despierte la curiosidad e interés del estudiante por estas disciplinas y que, a su vez, desarrolle su espíritu constructivista. La mejor manera con la que creemos que el alumno entenderá los conceptos será si él mismo es capaz de construir sus propios materiales de conocimiento. Las hojas de cálculo son una herramienta barata y de una enorme potencialidad para alcanzar estos objetivos.

Introducción a la parte de Química

Para la sección de Química, los problemas seleccionados comprenden tres grandes bloques de contenido: *estructura de la materia*, *reacciones ácido-base* y *cinética química*. Estos problemas responden a aspectos fundamentales del currículo de Química, que resultan difíciles de abordar con ayuda de papel y lápiz o de una simple calculadora. La hoja de cálculo *OpenCalc* nos permite aprovechar su potencialidad matemática y de representación gráfica para entender en profundidad estos problemas y resolverlos de un manera cómoda y elegante.

En la capítulo I de esta sección se aborda la construcción del *espectro de emisión del átomo de hidrógeno*. Éste es un problema de una gran importancia histórica, puesto que el carácter discreto de los espectros atómicos es una evidencia experimental que no puede ser explicada en base a la teoría clásica. Para explicar este problema y otros similares que implican la interacción de la radiación y la materia nació la teoría cuántica. Los recursos gráficos que nos ofrece la hoja de cálculo permiten reproducir el espectro de emisión del átomo de hidrógeno mediante la implementación de la fórmula empírica de Balmer. De esta manera, los alumnos obtendrán el espectro experimental del átomo de hidrógeno, que aparece habitualmente en los libros de texto.

El segundo bloque de contenido es el dedicado a las reacciones ácido-base. Este bloque comprende tres prácticas distintas: el *cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases: fuertes* (capítulo II), *débiles* (capítulo III) y la construcción de una *curva de valoración* (capítulo IV). Para el cálculo del pH de disoluciones ácido-base, los alumnos deberán obtener las ecuaciones matemáticas que permiten obtener el pH de una disolución en función de la concentración o el volumen de las especies involucradas. Además, deberán ser capaces de realizar las aproximaciones oportunas, fundamentadas en sus conocimientos químicos, para simplificar la resolución matemática de los problemas propuestos. En la construcción de una curva de valoración, estudiarán el punto de inflexión de la función obtenida que es de especial relevancia química, puesto que corresponde al punto de equivalencia de la valoración. La determinación precisa del punto de equivalencia constituye uno de los problemas habituales del laboratorio químico. Para efectuar esta determinación, los alumnos harán uso de conceptos matemáticos como el de primera y segunda derivada de una función.

El tercer y último bloque de contenido que se aborda en esta sección es el de cinética química. En la práctica V, los alumnos establecerán la *dependencia de la constante de velocidad con la temperatura*. Para ello, representarán la ecuación de Arrhenius integrada de donde obtendrán el valor de la energía de activación y el factor pre-exponencial para una reacción química, a partir de un ajuste por mínimos cuadrados de la recta construida con los datos experimentales de la constante de velocidad para diferentes temperaturas. En la práctica VI, el objetivo es la *determinación de la cinética de una reacción química*. En este caso, deberán obtener las correspondientes ecuaciones de velocidad integradas correspondientes a las cinéticas de orden: 0, 1 y 2. A partir de la representación gráfica de los datos experimentales de concentración y tiempo, tratados convenientemente para adaptarse a la particular forma de ecuación de velocidad linearizada, se establece la cinética de la reacción.

Capítulo I: El espectro de emisión del átomo de hidrógeno

Objetivos

- Construir el espectro de emisión del átomo de hidrógeno mediante la implementación de la fórmula empírica de Balmer.
- Adquirir destrezas procedimentales relativas a la utilización de magnitudes físicas tales como la longitud de onda o el número de ondas y efectuar correctamente el cambio de unidades para estas magnitudes.
- Identificar el intervalo de longitudes de onda que corresponde a las distintas zonas del espectro electromagnético.
- Explorar las opciones de formato de celdas que ofrece la hoja de cálculo.
- Adquirir nociones avanzadas de graficación.

Contenidos

Espectros de emisión y de absorción, átomo de hidrógeno, modelos atómicos, química cuántica, longitud de onda, número de ondas, constante de Rydberg.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas:

Matemáticas

- Tema 4: Expresiones algebraicas
- Tema 5: Ecuaciones lineales y cuadráticas
- Tema 8: Las funciones elementales

Química

- Tema 2: Estructura del átomo

Histórico-científica

La interpretación del espectro de emisión del átomo de hidrógeno es uno de los problemas precursores clave que precedió al nacimiento de la teoría cuántica.

A mediados del siglo XIX se construyeron los primeros espectroscopios los cuales nos permiten realizar un estudio analítico de las sustancias cuando éstas se calientan o se someten a elevados voltajes. Al analizar la luz que estas sustancias desprenden en el espectroscopio se obtienen los correspondientes *espectros de emisión* de estas sustancias, que pueden ser empleados a modo de carnet de identidad de una determinada sustancia.

El carácter continuo de los espectros atómicos, y más concretamente del átomo de hidrógeno, constituye una evidencia experimental que no puede ser interpretada mediante el modelo planetario clásico de Rutherford. Para dar una explicación coherente a este espectro, Niels Bohr propuso el modelo que lleva su nombre en el que, por primera vez, se introducen postulados cuánticos, tales como la cuantización de la energía, para explicar la estructura íntima de la materia.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión proponemos abordar los aspectos teóricos relativos a la descripción del espectro de emisión del átomo de hidrógeno mediante la fórmula empírica de Balmer y efectuar el diseño de la hoja de cálculo.
- En la segunda sesión, se realizará la implementación de la fórmula de Balmer y se atenderán aspectos formales tales como la representación gráfica y el formato.

Fundamentos teóricos

Los gases, cuando se eleva suficientemente la temperatura o cuando se encuentran enrarecidos (es decir, a baja presión), y se les somete a fuertes diferencias de potencial en tubos debidamente preparados con electrodos, emiten luz visible y otras radiaciones no visibles del espectro electromagnético. La luz emitida por el gas, al ser descompuesta en un espectroscopio, muestra un espectro discreto (no continuo) formado por una serie de rayas separadas con frecuencias diferentes. Si consideramos que el gas se encuentra a baja presión, puede suponerse que cada átomo, al emitir luz, está libre de las interferencias de otros átomos, por lo que el *espectro de emisión* es característico de cada átomo.

Los datos espectrográficos obtenidos en el análisis de distintos gases muestran que las rayas de los espectros atómicos se agrupan en series espectrales. Al aumentar la frecuencia, las líneas espectrales van disminuyendo de intensidad y aproximándose entre sí. El espectro mejor estudiado es el del átomo de hidrógeno para la región visible, el cual se muestra en la figura 1.1.:

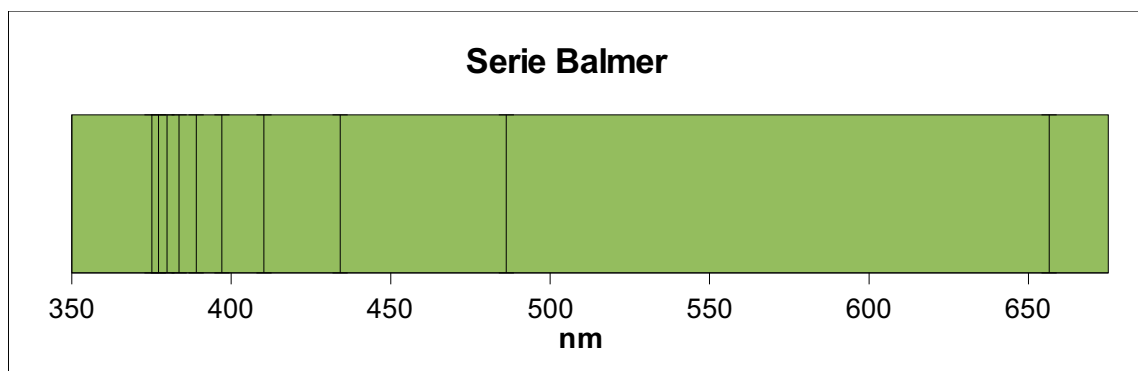


Fig. 1.1- Espectro de absorción del átomo de hidrógeno en la región del visible.

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (\text{ec.1.1})$$

En 1885, Balmer descubrió, de forma empírica, una ley matemática a la que se ajustan las longitudes de onda de las distintas líneas espectrales correspondientes al espectro de emisión del átomo de hidrógeno (ec. 1.1), donde:

- $\bar{\nu}$ representa el número de ondas¹. Habitualmente, se expresa en cm^{-1} .
- λ representa la longitud de onda. Normalmente, se expresa en nm ($1\text{ cm} = 10^7\text{ nm}$).
- R es la constante de *Rydberg*, $R = 109677,6\text{ cm}^{-1}$.
- $n_1 = 1, 2, 3\ldots$ etc ($n_1 = 1$, para todas las líneas de la serie Lyman; $n_1 = 2$, para todas las líneas de la serie Balmer; $n_1 = 3$, para la serie Paschen; $n_1 = 4$, para la serie Bracket y $n_1 = 5$, para la serie Pfund).
- $n_2 = n_1 + 1$, para la primera línea de cada serie; $n_1 + i$, para la i -ésima línea de cada serie.

Además de la serie Balmer, que se presenta en el visible, el espectro del átomo de hidrógeno presenta otras cuatro series más, situadas en otras zonas del espectro electromagnético y que llevan el nombre de sus descubridores. La primera de ellas, la serie Lyman, se presenta en el ultravioleta y las otras: serie de Paschen, serie de Bracket y serie de Pfund se localizan en el infrarrojo cada vez más lejano.

Niels Bohr fue el primero en interpretar las rayas espectrales como transiciones electrónicas correspondientes a la excitación de un electrón a un nivel electrónico superior (*espectro de absorción*) o a la relajación de un electrón desde un nivel discreto superior a otro inferior (*espectro de emisión*).

La observación experimental de los espectros de absorción muestra un límite superior al que convergen las transiciones espectroscópicas. Este límite superior corresponde a la transición desde $n_1 = 1$ hasta $n_2 = \infty$, y se denomina energía o potencial de ionización. El potencial de ionización se define como el cambio de entalpía necesario para llevar al electrón más externo de un átomo neutro y gaseoso hasta el infinito, y producir así el correspondiente ion positivo también en estado gaseoso, supuesto este proceso a la temperatura de 0 K. El potencial de ionización es un proceso endoenergético, ya que hay que comunicar una energía para vencer la atracción electrostática del núcleo y arrancar así el electrón más externo. Se mide experimentalmente por métodos espectroscópicos y se suele expresar en eV/átomo, Kcal/mol o en KJ/mol. El potencial de ionización para el átomo de hidrógeno es de 13,61 eV.

Metodología

En esta práctica, calcularemos las diez primeras líneas de la serie Lyman, correspondientes a las diez primeras transiciones desde una órbita excitada hasta la primera órbita; las diez primeras líneas espectrales de la serie Balmer, y las correspondientes a la serie Paschen. Para ello, realizaremos los siguientes pasos:

¹ En espectroscopia, se emplea habitualmente la cantidad $\bar{\nu}$ para cuantificar el número de ondas que existen en 1 cm de longitud (normalmente, se emplea el sistema cgs). Cuando se describen las ondas armónicas es habitual definir la constante $k = 2\pi/\lambda$, como el número de ondas que hay en una distancia de 2π metros (generalmente, se emplea el sistema internacional).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	C Rydberg =	109677,6						
3	cm -> nm	1E+07	=B6+1	=R*(1/C6^2-1/D6^2)			=1/E6*nm	
4								
5	Intensidad	i	n ₁	n ₂	ν (cm ⁻¹)	λ (nm)	Ultravioleta	
6	1	1	1	2	82258,2	121,57		
7	1	2	1	3	97491,2	102,57		
8	1	3	1	4	102822,8	97,25		
9	1	4	1	5	105290,5	94,98		
10	1	5	1	6	106631,0	93,78		Lyman
11	1	6	1	7	107439,3	93,08		
12	1	7	1	8	107963,9	92,62		
13	1	8	1	9	108323,6	92,32		
14	1	9	1	10	108580,8	92,10		
15	1	10	1	11	108771,2	91,94		

Fig. 1.2- Hoja de cálculo para las diez primeras transiciones de la serie Lyman

● Tarea 1: definiciones

Para la construcción de la hoja de cálculo, comenzaremos definiendo la celda B2, que posee el valor numérico: 109677,6 como **R**. Este proceso se puede realizar utilizando las opciones del menú principal: **Insertar/Nombres/Definir** o, de forma más rápida, escribiendo en el cuadro de nombres que está situado a la izquierda de la línea de comandos el nombre de la constante; en este caso, **R**. Una vez realizada la definición, cualquier fórmula que incluya la constante de Rydberg puede escribirse utilizando simplemente **R** en lugar de \$B\$2² o el propio valor numérico. Análogamente, y para una mayor comodidad, se ha definido el factor de conversión de cm a nm que se encuentra definido en la celda B3, como **nm**.

● Tarea 2: Construcción del cuadro de intensidades frente a longitudes de onda (fig. 1.2.) para las 10 primeras transiciones de cada una de las series espectrales.

Una vez realizadas las correspondientes definiciones, creamos un cuadro con seis entradas distintas: *Intensidad*, un contador *i* para describir el número de la transición, *n*₁, *n*₂, $\bar{\nu}$ y λ .

Un átomo, en un instante dado, puede emitir un solo fotón de longitud de onda λ pero, como en la cantidad de hidrógeno que se examina espectroscópicamente existen muchos átomos, siempre habrá otros átomos que emitirán fotones de diferentes frecuencias, dando como resultado la serie de rayas que se observan para cada serie. El número relativo de átomos en los que los electrones pasan de un estado inicial a un estado final determina la intensidad relativa de la raya espectral correspondiente a esta transición electrónica particular. Por simplicidad, en esta práctica, asumiremos que la intensidad de todas las transiciones es la misma y le atribuiremos un valor constante e igual a 1.

En la columna B, el contador *i* numera las transiciones que deseamos calcular. Basta con sumar una unidad a la celda B6 en la celda inmediatamente inferior para que, por arrastre, completemos el número total de transiciones deseadas, 10. En la columna C, escribimos el valor de *n*₁ correspondiente a la serie Lyman, en este caso. Éste es un valor fijo e igual a 1. La columna D corresponde al valor de *n*₂, que se obtiene como suma de *n*₁ + *i*. Ésta es la fórmula que se ha

2 La utilización del símbolo \$ situado delante del valor de la columna o de la fila fija la correspondiente fila o columna, de manera que su valor no varíe al arrastrar la fórmula implementada en una celda.

implementado en la celda D6. Por arrastre, podemos obtener el resultado que se observa en la figura 1.2 para el resto de las celdas de la columna.

El número de ondas, $\bar{\nu}$, se calcula en la columna E. La celda E6 ha sido definida de acuerdo con la fórmula empírica de Balmer (ec. 1.1), a partir de los valores de n_1 , n_2 y la constante de Rydberg, R . En la figura 1.2. se explicita la fórmula implementada. Finalmente, para obtener la longitud de onda, λ , debemos calcular la inversa del número de ondas. Por conveniencia, expresamos el resultado en nm, por lo debemos multiplicar la fórmula por el factor conversor **nm**, que se ha definido previamente. El resultado se encuentra en la columna F.

- Tarea 3: formatos

Resulta interesante conocer las posibilidades que la hoja de cálculo nos ofrece en cuanto a los formatos. En ocasiones, resulta útil agrupar conjuntos de celdas. Este proceso se puede realizar mediante la opción del menú principal: **Formato/Combinar celdas**. Además, podemos cambiar a voluntad atributos de una celda o conjunto de celdas tales como el color de fondo, el tipo, tamaño y estilo de letra, la existencia de bordes externos... Todas estas opciones aparecen en un cuadro de diálogo al elegir la opción del menú: **Formato/Celdas...**

De forma análoga a como se ha realizado para la serie Lyman, podemos obtener las longitudes de onda para las demás series espectrales. Una vez obtenidos los datos de las correspondientes transiciones en términos de λ para las series de interés, podemos representar los resultados obtenidos para obtener el correspondiente espectro de emisión. Para ello, seleccionaremos las columnas de *Intensidad* (columna A) y λ (columna F). Mediante un gráfico XY, en el que el valor de las x corresponde a la intensidad y el de las y a λ , obtenemos los puntos correspondientes a las distintas transiciones. Si en lugar de puntos queremos que cada transición se represente mediante una raya, tal y como ocurre en los espectros experimentales, podemos sustituir los puntos por el indicador de error que aparece en el cuadro de diálogo **Estadística** correspondiente al menú **Insertar** de la representación gráfica. Si ajustamos convenientemente los márgenes en los ejes y utilizamos los recursos de formato para la **Serie de Datos** que nos ofrecen estas representaciones gráficas, obtenemos el espectro de la figura 1.1.

Criterios de Evaluación

- Comprender y trabajar la fórmula empírica de Balmer para obtener las longitudes de onda de las distintas transiciones experimentales.
- Manejar con soltura conceptos ondulatorios tales como número de ondas o longitud de onda.
- Reconocer las distintas zonas del espectro electromagnético y atribuirles un rango aproximado de longitudes de onda y de frecuencias.
- Diseñar de forma autónoma una hoja de cálculo en la que se especifiquen las distintas entradas necesarias para obtener las longitudes de onda correspondientes a las transiciones espectrales dentro de una misma serie y para series espectrales diferentes.
- Emplear los formatos más adecuados para los objetivos de la práctica.
- Emplear opciones de graficación más avanzadas con el fin de reproducir el espectro experimental del átomo de hidrógeno que aparece de forma habitual en los libros de texto.

Corolario

Los espectros de emisión y absorción presentan numerosas aplicaciones prácticas que conviene sean valoradas por los estudiantes. Por ejemplo, la luz blanca emitida por el Sol, al pasar a través de los gases fríos de la atmósfera solar y de la atmósfera terrestre, sufre absorciones que se manifiestan como rayas oscuras que salpican el espectro continuo del Sol. Las diferentes rayas de absorción observadas han sido útiles para identificar elementos en las atmósferas solar y terrestre. El mismo método se utiliza para analizar la composición de las estrellas y de las galaxias.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Calcula la longitud de onda mínima o límite de las series Balmer y Paschen. Exprésala en nm. Toma como valor de la constante de Rydberg, $R = 109677,6 \text{ cm}^{-1}$.

Sol. Serie Balmer: $\lambda = 364,7 \text{ nm}$; Serie Paschen: $\lambda = 820,6 \text{ nm}$.

- Ejercicio 2: Determina la energía molar de ionización, E.I., del átomo de hidrógeno. Exprésala en KJ/mol. Datos: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$, $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ at/mol}$, donde c es la velocidad de la luz; h , la constante de Planck y N_A , el número de Avogadro.

Sol. E.I. = 1313,8 KJ/mol.

- Ejercicio 3: Una de las líneas en el espectro de emisión del átomo de hidrógeno aparece a $4102 \text{ \AA}$ y corresponde a la serie Balmer. Hallar desde qué nivel se ha movido el electrón para producir esa línea.

Sol. $n_2 = 6$.

- Ejercicio 4: La constante de Rydberg para el deuterio, ^2H , es 109707 cm^{-1} . Determina: a) la longitud de onda más corta en el espectro de absorción del deuterio; b) el potencial de ionización del deuterio (en eV). Datos: La carga del electrón es igual a $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Sol. a) $\lambda = 91,15 \text{ nm}$; b) E.I. = 13,61 eV.

- Ejercicio 5: Determina la separación, en angstroms, entre la segunda línea de la serie Balmer del espectro de hidrógeno y del espectro del deuterio.

Sol. $\Delta\lambda = 1,3 \text{ \AA}$

Capítulo II: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases fuertes

Objetivos

- Elaborar una hoja de cálculo para el cálculo del pH de un ácido y de una base fuerte.
- Examinar para qué rango de concentraciones es válida la aproximación de obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua.
- Explorar las aplicaciones de la hoja de cálculo referentes a la graficación y a la implementación de funciones de dificultad creciente como el logaritmo, las raíces o los exponentes.

Contenidos

pH, ácido fuerte, base fuerte, teoría de Brönsted-Lowry, par ácido-base conjugado, constante de equilibrio, equilibrio de autoprotólisis del agua, balance de masas, balance de cargas.

Contextualización

Pedagógica

La práctica está relacionada con los siguientes temas del currículo de Maturita, los cuales se incluyen en el Anexo I:

Matemáticas

- Tema 5: Ecuaciones lineales y cuadráticas
- Tema 9: Funciones exponenciales y logarítmicas

Química

- Tema 10: Reacciones ácido-base

Histórico-científica

El cálculo del pH de disoluciones ácido-base es una de las destrezas procedimentales básicas que debe adquirir el alumno durante el Bachillerato. En particular, el cálculo del pH de ácidos y base fuertes es el caso más sencillo de entre todos los problemas que implican reacciones de transferencia de protones. Sin embargo, no es menos importante, ya que el entendimiento profundo de este problema permite al estudiante comprender conceptos clave como los de pH y par ácido-base conjugado, al tiempo que le prepara para la resolución de problemas ácido-base más complejos como los que veremos en capítulos posteriores.

Para la resolución de este tipo de problemas haremos uso de la teoría ácido-base de Brönsted-Lowry, de acuerdo con el currículo eslovaco de Bachillerato. La teoría electrónica de Lewis según la cual: *ácido es cualquier especie química capaz de aceptar un par de electrones que proceden de otra especie química llamada base* es más general y amplía las sustancias ácidas a aquellas que, como el AlCl_3 , presentan orbitales vacantes, capaces de aceptar un par de electrones. Sin embargo, aunque la tesis de Lewis es más general, también es más compleja. Por lo tanto, será la teoría de Brönsted-Lowry la que emplearemos para el estudio del equilibrio ácido-base en

disolución.

Temporalización

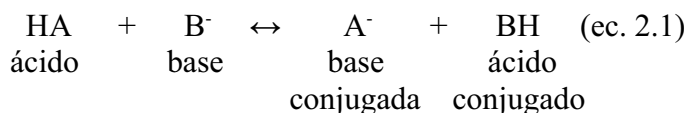
La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión proponemos abordar los aspectos teóricos del equilibrio ácido-base y efectuar el diseño de la hoja de cálculo.
- En la segunda sesión se realizará la implementación de las fórmulas para el cálculo del pH de un ácido y/o de una base fuertes, al tiempo que se analizará de forma gráfica la validez de la aproximación de obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua en el cálculo del pH.

Fundamentos teóricos

La definición protónica ácido-base fue propuesta por el danés Brønsted y el inglés Lowry de forma independiente en 1923 y dice así: *Ácido es cualquier sustancia molecular o iónica que puede ceder un protón a otra sustancia que se comporta como base. Por tanto, base es cualquier sustancia que puede aceptar un protón de otra sustancia que se comporta como ácido.* Del propio concepto de ácido y de base se deduce que una sustancia ácida no puede actuar como tal mas que en presencia de una base y viceversa.

En los equilibrios ácido-base, un concepto clave que deberán comprender los alumnos es el de par ácido-base conjugado. Cuando un ácido cede un protón a una base, el resto de la molécula del ácido puede volver a aceptar un protón, lo que implica que se ha convertido en una base, la cual recibe el nombre de *base conjugada*. Análogamente, cuando una base acepta un protón se convierte en el correspondiente ácido conjugado. Este hecho se ilustra de manera esquemática en el siguiente equilibrio:



Por tanto, según la teoría de Brønsted-Lowry, todas las reacciones ácido-base implican la presencia de dos pares ácido-base en equilibrio. Tomando el agua como disolvente podemos establecer una escala de fuerza ácida o básica, mediante la cual compararemos la fortaleza relativa de dos especies químicas.

El pH de una disolución dependerá de la concentración en que se encuentre el ácido o la base y de su fortaleza; es decir, del grado de realización del equilibrio ácido-base. Para una disolución de un ácido, HA, podemos escribir el siguiente equilibrio ácido-base:



Análogamente, la base B experimenta el siguiente equilibrio ácido-base en disolución acuosa:

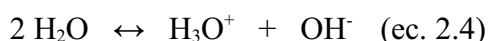


Estos equilibrios ácido-base vienen descritos por la correspondiente constante de equilibrio, la cual indica la fortaleza de un ácido, K_a , o de una base, K_b . Comúnmente, suele decirse que un ácido es muy fuerte si $K_a > 10^3$; es fuerte si K_a tiene un valor comprendido entre 10^3 y 10^{-2} ; es débil si su valor se encuentra entre 10^{-2} y 10^{-7} ; y muy débil si $K_a < 10^{-7}$. Los ácidos y bases objeto de

estudio en esta práctica son aquéllos para los cuales los anteriores equilibrios son desplazamientos; es decir, aquellos ácidos para los cuales consideramos que la concentración de cationes hidronio, $[H_3O^+]$, en disolución es igual a la concentración inicial de la disolución de ácido y aquellas bases en las que la concentración de aniones oxidrilo, $[OH^-]$, en disolución corresponde a la concentración inicial de disolución de base.

En disoluciones diluidas, el pH se define como el logaritmo decimal cambiado de signo de la concentración molar de cationes hidronio, $pH = -\log [H_3O^+]$. Aunque, en sentido estricto, deberíamos emplear la actividad del catión hidronio en lugar de su concentración, la concentración de las disoluciones empleadas de forma rutinaria en el laboratorio permite realizar esta aproximación.

Para el cálculo del pH de ácidos y bases fuertes resulta habitual obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua:



definido por la constante de equilibrio, $K_w = [H_3O^+][OH^-]$, cuyo valor es $K_w = 10^{-14}$. Esta aproximación equivale a asumir que la acidez de una disolución de ácido proviene exclusivamente del ácido y, en el caso de una disolución básica, que los aniones oxidrilo son sólo aquéllos aportados por la base. Como veremos en esta práctica, ésta es una aproximación razonable a menos que nos encontremos frente a disoluciones muy diluidas. Uno de los objetivos de esta práctica será determinar para qué rango de concentraciones esta aproximación deja de ser válida. Para ello, compararemos el pH calculado a partir de la concentración inicial de ácido o de base, con el pH exacto el cual tiene en cuenta el equilibrio de autoprotólisis del agua.

Si calculamos el pH de un ácido fuerte sin aproximaciones debemos escribir las ecuaciones correspondientes al balance de masas, balance de cargas y equilibrio de autoprotólisis del agua. Para una disolución de ácido HA de concentración Ca, tenemos:

Balance de masas: $Ca = [A^-]$ (ec. 2.5)

Balance de cargas: $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$ (ec. 2.6)

Equilibrio de autoprotólisis: $K_w = [H_3O^+][OH^-]$ (ec. 2.7)

A partir de este sistema de ecuaciones es posible calcular la concentración de protones mediante una ecuación de segundo grado:

$$[OH^-] = \frac{K_w}{[H_3O^+]} \quad (\text{ec. 2.8})$$

$$[H_3O^+] = Ca + \frac{K_w}{[H_3O^+]} \quad (\text{ec. 2.9})$$

$$[H_3O^+]^2 - Ca[H_3O^+] - K_w = 0 \quad (\text{ec. 2.10}) \quad [H_3O^+] = \frac{Ca + \sqrt{Ca^2 + 4K_w}}{2} \quad (\text{ec. 2.11})$$

Análogamente, podemos calcular el pH de una base fuerte a partir de las ecuaciones (2.12) y (2.13):

$$[H_3O^+]^2 + Cb[H_3O^+] - K_w = 0 \quad (\text{ec. 2.12}) \quad [H_3O^+] = \frac{-Cb + \sqrt{Cb^2 + 4K_w}}{2} \quad (\text{ec. 2.13})$$

Tanto la ecuación (2.11) como la ecuación (2.13) consideran la solución positiva de la

ecuación de segundo grado, que es la que tiene significado físico, y se pueden implementar fácilmente en una hoja de cálculo.

Metodología

En esta práctica nos proponemos calcular el pH de distintas disoluciones de un ácido fuerte, como es el ácido clorhídrico, para un intervalo de concentraciones suficientemente amplio (de 10^{-1} M a 10^{-14} M). Para ello, construiremos un cuadro con cuatro entradas: concentración de ácido (Ca), pHCl, pH aproximado y pH exacto.

- Tarea 1: definiciones

El primer paso será, como de costumbre, realizar las definiciones pertinentes. En nuestro caso, definiremos la celda C1, que tiene un valor numérico igual a 10^{-14} , como K_w , utilizando bien el comando **Definir** o el cuadro de nombres.

- Tarea 2: creación del cuadro de valores

Una vez realizada la definición, creamos el cuadro que hemos mencionado anteriormente. En la primera columna, A, introducimos el valor de la concentración de ácido (Ca). Comenzamos con una disolución de concentración 0,1 M (celda A4), a partir de la cual obtenemos disoluciones cada vez más diluidas mediante la introducción de la fórmula: $=A4/10$. Por arrastre se obtienen el resto de disoluciones.

Con el fin de simplificar los datos y obtener una representación gráfica más agradable a la vista, en la columna B calculamos el $-\log(Ca)$, que se etiqueta como pHCl. Para ello, la celda B4 se definirá como $=-LOG(A4)$. A partir de esta celda, se obtendrán las demás de la columna. El empleo de la función logarítmica permite trabajar con magnitudes muy pequeñas, como las consideradas en el cuadro de concentraciones, de forma mucho más cómoda.

En la columna C se expresa el valor del pH calculado de forma aproximada; es decir, obviando el equilibrio de autoprotólisis del agua. En esta aproximación, consideramos que toda la acidez viene dada por la concentración de protones provenientes de la hidrólisis del ácido. Al tratarse de un ácido fuerte, consideraremos que se encuentra completamente disociado. Por lo tanto, la concentración de protones en el medio coincide con la concentración de ácido inicial (Ca). El pH se calculará, en consecuencia, como el logaritmo cambiado de signo de la concentración de ácido. Esto es lo que se ha implementado en la celda C4, $=-LOG(A4)$.

Sin embargo, un tratamiento exacto del pH debe considerar también el equilibrio de autoprotólisis del agua, ya que ésta se encuentra parcialmente disociada y cede protones al medio. La ecuación (2.11) nos permite calcular la concentración total de protones en el medio incluyendo los provenientes del equilibrio de autoprotólisis del agua. En la celda D4 se ha implementado directamente el logaritmo cambiado de signo de la concentración de protones calculada según la ecuación (2.11). Es decir, se ha introducido la expresión $=-LOG((A4+RAIZ(A4^2+4*Kw))/2;10)$. El resultado se refleja en el cuadro adjunto (Fig. 2.1):

	A	B	C	D
1		Kw =	1,00E-14	
2				
3	Ca	pHCl	pH aprox	pH exacto
4	1E-01	1	1	1,0000000
5	1E-02	2	2	2,0000000
7	1E-03	3	3	3,0000000
8	1E-04	4	4	3,9999996
9	1E-05	5	5	4,9999566
10	1E-06	6	6	5,9957208
11	1E-07	7	7	6,7910124
12	1E-08	8	8	6,9782943
13	1E-09	9	9	6,9978285
14	1E-10	10	10	6,9997829
15	1E-11	11	11	6,9999783
16	1E-12	12	12	6,9999978
17	1E-13	13	13	6,9999998
18	1E-14	14	14	7,0000000

Fig. 2.1- Hoja de cálculo para determinar el pH de disoluciones de concentración variable de ácido clorhídrico. El pH se calcula de forma exacta y aproximada.

- Tarea 3: graficación

Si realizamos una representación gráfica del tipo XY del pH, tanto en su cálculo aproximado (pH aprox; columna C) como en su forma exacta (pH exacto; columna D) frente a pHCl (columna B) podemos determinar el rango de validez de la aproximación realizada al obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua.

Tal y como se muestra en la figura 2.2, para concentraciones próximas a 10^{-7} M, el pH calculado de forma exacta difiere del pH aproximado. Para disoluciones tan diluidas, es el agua quien aporta toda la acidez del medio, por lo que el equilibrio de autoprotólisis del agua no se puede obviar en el cálculo del pH. No obstante, se debe tener en cuenta que en el laboratorio rara vez se trabaja a concentraciones menores de 10^{-5} M, por lo que la aproximación es perfectamente válida en el trabajo rutinario de laboratorio.

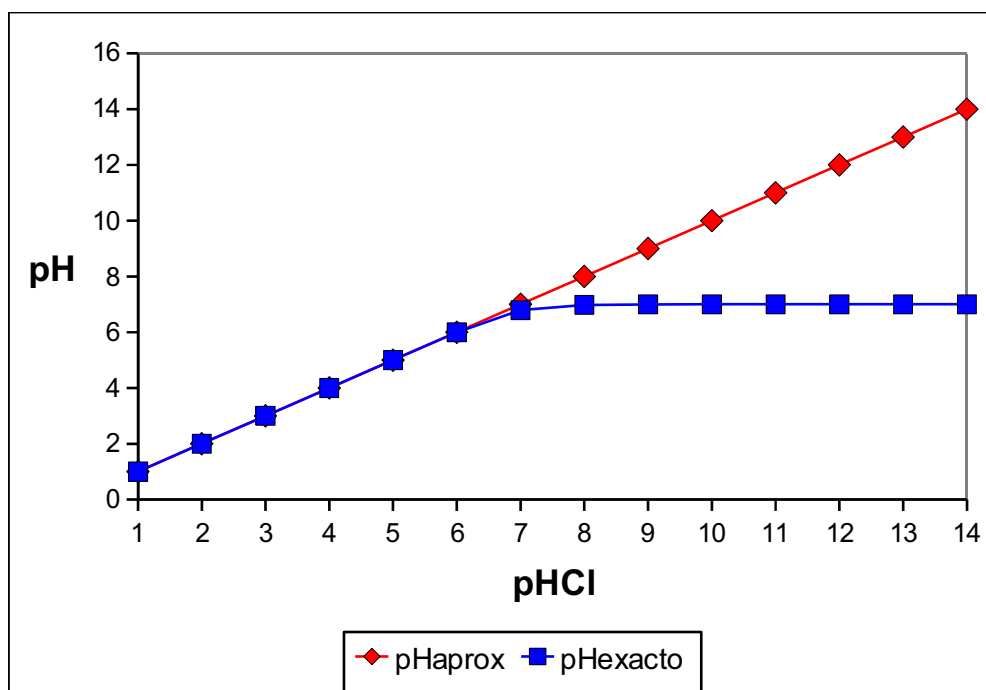


Fig. 2.2- Representación del pH, calculado de forma exacta (cuadrados) y de forma aproximada (rombos), frente a pHCl.

Análogamente a como hemos realizado para una disolución de ácido fuerte, propondremos a los estudiantes que elaboren la correspondiente hoja de cálculo para determinar el pH de disoluciones de una base fuerte como la sosa, NaOH, de concentración comprendida en el rango ($10^{-1} - 10^{-14}$) M. Para ello deberán implementar la ecuación (2.13) en el cálculo del pH. El resultado se puede observar en el Anexo II.

Criterios de Evaluación

- Comprender y trabajar con soltura el concepto químico de pH como medida de la acidez o basicidad de una disolución.
- Escribir la constante de equilibrio de una reacción de transferencia de protones y los correspondientes balances de materia y de carga.
- Calcular el pH de disoluciones de ácidos y bases fuertes de forma exacta.
- Determinar el rango de aplicabilidad de la aproximación de obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua para calcular el pH de un ácido y de una base fuertes.

Corolario

Desde la época de la revolución industrial hasta nuestros días, los principales ácidos inorgánicos de importancia industrial como son: el ácido sulfúrico, el ácido nítrico, el ácido fosfórico y el ácido clorhídrico han acrecentado su papel de materia básica y fundamental en las transformaciones que se desarrollan en la industria química, metalúrgica, farmacéutica, textil... De hecho, la producción de estos ácidos, especialmente el ácido sulfúrico, se emplea como indicador del grado de desarrollo de un país. Las aplicaciones de estos ácidos son múltiples. Por ejemplo, el ácido clorhídrico, el cual hemos estudiado en esta práctica, se emplea, entre otras múltiples

aplicaciones, como catalizador, en la obtención de glucosa a partir de almidón, en la fabricación de colorantes, de drogas, en los baños de decapado para la eliminación de las escorias de óxido...

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Construye una hoja de cálculo para determinar la acidez de una base fuerte como la sosa, NaOH, en un rango de concentraciones comprendido entre 10^{-1} y 10^{-4} M. Calcula el pH de forma exacta y obviando el equilibrio de autoprotólisis del agua. Construye una gráfica en la que se represente el pH calculado de forma exacta y de forma aproximada frente al logaritmo cambiado de signo de la concentración inicial de sosa (pNaOH). Determina el rango de aplicabilidad de obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua.

Sol. Anexo II.

- Ejercicio 2: Con ayuda de la hoja de cálculo que has diseñado, calcula el pH de una disolución de NaOH: a) 0,5 M; b) 0,075 M; c) 0,0003 M.

Sol. a) 13,70; b) 12,88; c) 10,48.

- Ejercicio 3: Calcula el pH de una disolución 0,2 M de ácido sulfúrico, H_2SO_4 . Supón que el ácido sulfúrico se comporta como un ácido fuerte en las dos constantes de acidez.

Sol. pH = 0,4.

- Ejercicio 4: ¿Qué concentración debe tener una solución de un ácido fuerte HA para que el pH sea 2,23?

Sol. 0,059 M.

- Ejercicio 5: Se disuelven 5 mL de HCl concentrado ($d = 1,16$ g/mL y 34% de riqueza en peso) hasta formar 500 mL de disolución. Calcula el pH de la disolución resultante. Datos: $m(Cl) = 35,5$ g/mol, $m(H) = 1$ g/mol.

Sol. pH = 0,97.

- Ejercicio 6: Se disuelven 1,14 g de hidróxido sódico en agua hasta obtener 250 mL de disolución. Calcula el pH. Datos: $m(Ca) = 40$ g/mol; $m(O) = 16$ g/mol; $m(H) = 1$ g/mol.

Sol. pH = 13,09.

- Ejercicio 7: ¿Qué concentración debe tener una disolución de hidróxido de magnesio para que el pH sea 11,8?

Sol. $3,15 \cdot 10^{-3}$ M.

Capítulo III: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases débiles

Objetivos

- Obtener las ecuaciones matemáticas que permiten calcular el pH de una especie con carácter ácido-base débil de forma exacta y aproximada.
- Utilizar la hoja de cálculo para encontrar las raíces de un polinomio de segundo grado.
- Elaborar una hoja de cálculo para el cálculo del pH de un ácido y de una base débiles.
- Examinar el rango de validez de distintas aproximaciones para calcular el pH de un ácido y una base débiles.
- Profundizar en las aplicaciones de la hoja de cálculo referentes a la graficación y a la implementación de funciones matemáticas.

Contenidos

pH, ácido débil, base débil, teoría de Brönsted-Lowry, constantes de acidez y de basicidad, equilibrio de autoprotólisis del agua, balance de masas, balance de cargas.

Contextualización

Pedagógica

La práctica se relaciona con los siguientes temas del currículo de Maturita (Anexo I):

Matemáticas

- Tema 5: Ecuaciones lineales y cuadráticas
- Tema 9: Funciones exponenciales y logarítmicas

Química

- Tema 10: Reacciones ácido-base

Histórico-científica

El cálculo del pH de ácidos y bases fuertes, que fue abordado en el capítulo anterior, sirve de preámbulo para la resolución de casos más complicados como el cálculo del pH de especies con carácter ácido-base débil, donde la constante de equilibrio de la especie en disolución determina el grado de desplazamiento del equilibrio.

Para el cálculo del pH de estos ácidos y bases débiles en el marco de la teoría ácido-base de Brönsted-Lowry, los alumnos deberán plantear correctamente el equilibrio de la especie en disolución y el de autoprotólisis del agua, así como los correspondientes balances de masas y cargas. En la resolución de estos problemas deberán hacer uso de aproximaciones para calcular el pH y obtener así polinomios de grado dos, en lugar del polinomio de grado tres que determina el pH exacto de la disolución.

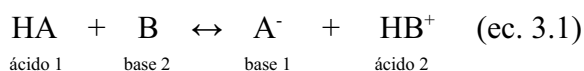
Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión proponemos plantear las ecuaciones para el cálculo del pH de especies con carácter ácido-base débil y analizar las correspondientes aproximaciones químicas. Además, se efectuará el diseño de la hoja de cálculo.
- En la segunda sesión se realizará la implementación de las fórmulas para el cálculo del pH de un ácido y de una base débiles, al tiempo que se analizará de forma gráfica la validez de las aproximaciones planteadas para el cálculo del pH en función de la concentración inicial de ácido o base.

Fundamentos teóricos

Considerando la definición ácido-base de Brönsted-Lowry, la fuerza de las especies ácidas y básicas se puede medir cuantitativamente por el grado en que los reaccionantes se convierten en productos en la reacción general:



Si la reacción está desplazada hacia la derecha significa que el ácido 1 es más fuerte que el ácido 2. Además, el grado de realización de esta reacción depende no sólo de la tendencia del ácido 1 a perder un protón, sino de la afinidad de la base 2 por los protones. Por lo tanto, el único modo válido para comparar las fuerzas de los ácidos y de las bases es medir el grado de desplazamiento de la reacción frente a una sustancia de referencia. Esta sustancia de referencia es el agua. En las disoluciones acuosas de ácidos y de bases se establecen los siguientes equilibrios, respectivamente:



Para el caso del ácido HA, la constante de equilibrio toma la forma:

$$K = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}][\text{H}_2\text{O}]} \quad (\text{ec. 3.4})$$

La ecuación (3.4) es válida puesto que, normalmente, las disoluciones acuosas que nos interesan son diluidas y, por consiguiente, podremos considerar despreciables las atracciones electrostáticas entre los iones de signo contrario. En tal escenario, podemos utilizar concentraciones en lugar de actividades en la expresión de la constante de equilibrio.

En disoluciones diluidas, la concentración de agua varía muy poco al cambiar la concentración de soluto por lo que suele tomarse como constante e incluirse en la expresión de la constante de equilibrio.

$$K_a = K[\text{H}_2\text{O}] = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}]} \quad (\text{ec. 3.5})$$

donde K_a es la constante de ionización o disociación del ácido HA. Su valor nos indica la extensión de la reacción (3.2). Un valor elevado de K_a indica que la reacción está muy desplazada hacia la derecha; esto es, que HA es muy fuerte.

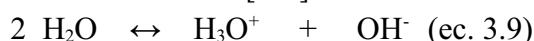
De modo análogo, podemos expresar la constante de equilibrio, K_b , para la ecuación (3.3):

$$K_b = \frac{[\text{HB}^+][\text{OH}^-]}{[\text{B}]} \quad (\text{ec. 3.6})$$

Una vez definidas las expresiones generales para las constantes de equilibrio del ácido y de la base, estamos en disposición de calcular el pH de disoluciones de estas especies. Consideremos el caso de un ácido débil HA que se encuentra en disolución acuosa. Para dicha especie podemos escribir los siguientes equilibrios:



$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}]} \quad (\text{ec. 3.8})$$



$$K_w = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \quad (\text{ec.3.10})$$

correspondientes a la constante de equilibrio para la disociación del ácido (ec. 3.8) y a la constante de autoprotólisis del agua (ec. 3.10). Además, podemos plantear los correspondientes balances de masas (ec. 3.11) y cargas (ec. 3.12):

$$\text{Balance de masas: } C_a = [\text{HA}] + [\text{A}^-] \quad (\text{ec. 3.11})$$

$$\text{Balance de cargas: } [\text{A}^-] + [\text{OH}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (\text{ec. 3.12})$$

donde C_a representa la concentración inicial de ácido.

A partir de la ec. (3.10) podemos obtener la concentración de aniones oxidrilo:

$$[\text{OH}^-] = \frac{K_w}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \quad (\text{ec. 3.13})$$

Si sustituimos la ec. (3.13) en la expresión (3.12), obtenemos el valor de la concentración de ácido disociado, $[\text{A}^-]$, la cual viene reflejada por la ecuación (3.14):

$$[\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - \frac{K_w}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \quad (\text{ec. 3.14})$$

Análogamente, podemos sustituir la expresión (3.14) en la ecuación (3.11) para obtener la concentración de ácido sin disociar, $[\text{HA}]$:

$$[\text{HA}] = C_a - [\text{H}_3\text{O}^+] + \frac{K_w}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \quad (\text{ec. 3.15})$$

Reemplazando las ecuaciones (3.14) y (3.15) en la expresión de la constante de acidez (ec. 3.8.), obtenemos un polinomio de tercer grado en el que la única variable desconocida es la concentración de cationes hidronio, $[\text{H}_3\text{O}^+]$:

$$[\text{H}_3\text{O}^+]^3 + K_a[\text{H}_3\text{O}^+]^2 - (C_a K_a + K_w)[\text{H}_3\text{O}^+] - K_a K_w = 0 \quad (\text{ec.3.16})$$

la resolución de esta ecuación de tercer grado se puede llevar a cabo mediante el método iterativo de Newton-Raphson. El fundamento de este método consiste en desarrollar la función mediante series de Taylor hasta el término lineal y corregir iterativamente el resto de serie no considerada. Otra alternativa sería emplear el método de la bisección. Este método es seguro a la hora de converger a la solución deseada, pero mucho más prolijo si la solución se quiere obtener con muchos decimales. Finalmente, hemos de señalar que hojas de cálculo estándar como EXCEL incluyen entre sus opciones el comando *Solver*, el cual permite el ajuste de datos a modelos cuyos

parámetros están controlados por el usuario. El comando *Solver* permite seleccionar una celda como **objetivo**, la cual puede alcanzar un valor máximo, mínimo o un valor determinado, y una celda **cambiante**, la cual varía desde su valor inicial hasta conseguir que la celda **objetivo** alcance el valor deseado. Ejemplos de la utilización de estos tres métodos para la resolución de problemas en el ámbito de la química se pueden encontrar en las referencias [1]-[4].

Con anterioridad, hemos demostrado que para concentraciones de laboratorio (hasta 10^{-5} M) podemos obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua, ya que sólo para valores cercanos a 10^{-7} M es necesaria su inclusión. En este rango de concentraciones tan diluido, la acidez o basicidad viene determinada por la disociación del agua. Si traducimos este resultado químico a las matemáticas, significa que podemos despreciar todos aquellos términos que contengan el valor K_w en la ecuación (3.16). De esta manera, el grado del polinomio (3.16) se reduce en un orden, según se expresa en la ecuación (3.17).

$$[\text{H}_3\text{O}^+]^2 + K_a[\text{H}_3\text{O}^+] - \text{Ca}K_a = 0 \quad (\text{ec. 3.17})$$

la cual se puede resolver de forma analítica para distintos valores de la concentración inicial, Ca. La ecuación (3.17) para valores de Ca iguales o superiores a 10^{-6} M nos da la concentración de cationes hidronio en disolución.

En ocasiones, se suele realizar una segunda aproximación que consiste en considerar que la concentración de ácido inicial, Ca, es muy superior a la concentración de cationes hidronio, $[\text{H}_3\text{O}^+]$. Esta aproximación implica despreciar el término de primer orden respecto a la concentración de cationes hidronio en la ecuación (3.17). En el marco de esta aproximación, el pH se calcula a partir de la expresión:

$$[\text{H}_3\text{O}^+]^2 - \text{Ca}K_a = 0 \quad (\text{ec. 3.18})$$

En esta práctica estableceremos el rango de aplicabilidad de esta aproximación, comparando el pH calculado a partir de las expresiones (3.17) y (3.18).

Metodología

Tal y como hemos señalado, el objetivo de esta práctica es calcular el pH para distintas disoluciones de un ácido débil, como puede ser el ácido acético ($K_a = 1,8 \cdot 10^{-5}$), en un intervalo de concentraciones comprendido entre 10^{-1} M y 10^{-6} M. Se estimará el efecto de obviar el término de primer grado respecto de la concentración de cationes hidronio en la ecuación (3.17). Para realizar la práctica, efectuaremos los siguientes pasos:

- Tarea 1: definiciones

En primer lugar, implementaremos las definiciones pertinentes. Existen dos constantes de equilibrio: K_a y K_w . Sin embargo, como hemos decidido obviar el equilibrio de autoprotólisis del agua, el valor de K_w no aparece en las ecuaciones (3.17) y (3.18). La definición de K_a en una celda permite adaptar la hoja de cálculo para cualquier ácido débil y su respectiva constante de acidez.

- Tarea 2: creación del cuadro de valores

Realizaremos un cuadro que contenga siete entradas. La primera entrada, rotulada como **Índice**, es un contador que establece el número de disoluciones de concentración decreciente que analizaremos. El valor inicial del contador es 1, y aumenta de unidad en unidad. En la columna B introducimos la concentración de ácido. Como hemos señalado previamente, estudiaremos el intervalo comprendido entre 10^{-1} M y 10^{-6} M. Para cubrir este intervalo con un número suficiente de

puntos, hemos implementado un algoritmo que permite diluir la concentración en 0,5 unidades de pCa, tal y como se refleja en la gráfica.

	A	B	C	D	E	F	G
17	índice	Ca	pCa	[H ⁺]	pH	[H ⁺] aprox	pH aprox
18	1	1,00E-01	1	1,33E-03	2,875	1,34E-03	2,872
19	2	3,16E-02	1,5	7,46E-04	3,128	7,54E-04	3,122
20	3	1,00E-02	2	4,15E-04	3,382	4,24E-04	3,372
21	4	3,16E-03	2,5	2,30E-04	3,639	2,39E-04	3,622
22	5	1,00E-03	3	1,33E-04	3,872	1,34E-04	3,872
23	6	3,16E-04	3,5	6,70E-05	4,174	7,54E-05	4,122
24	7	1,00E-04	4	3,44E-05	4,464	4,24E-05	4,372
25	8	3,16E-05	4,5	1,65E-05	4,783	2,39E-05	4,622
26	9	1,00E-05	5	7,16E-06	5,145	1,34E-05	4,872
27	10	3,16E-06	5,5	2,74E-06	5,562	7,54E-06	5,122
28	11	1,00E-06	6	9,50E-07	6,022	4,24E-06	5,372

Fig. 3.1- Cuadro de valores con las entradas: índice, concentración de ácido (Ca), logaritmo cambiado de signo de la concentración de ácido (pCa), concentración de protones ([H⁺]), pH, concentración de protones aproximada ([H⁺] aprox) y pH aproximado (pH aprox).

En la columna C, calculamos el logaritmo decimal cambiado de signo de la concentración inicial de ácido, que denominamos pCa. La columna D nos permitirá calcular la concentración de cationes hidronio de acuerdo con la ecuación (3.17). Para ello, implementaremos la fórmula analítica de un polinomio de segundo grado. Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, donde x corresponde a la variable que deseamos calcular, en nuestro caso [H₃O⁺], el algoritmo (3.19) permite obtener las raíces del polinomio.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{ec.3.19})$$

De las dos soluciones que presenta esta ecuación, sólo la positiva tiene significado químico, ya que la concentración debe ser necesariamente un valor positivo. La solución positiva se ha implementado en la columna D.

Una vez calculada la concentración de cationes hidronio, resulta trivial calcular el pH de la disolución. Hemos de recordar que la ecuación es aproximada ya que se ha obviado el equilibrio de autoprotólisis del agua. Sin embargo, el error cometido es despreciable, incluso para el caso de la disolución más diluida de entre las consideradas: 10⁻⁶ M, para la cual el pH obtenido es 6,022 frente al valor exacto igual a 6,018. Es decir, el error relativo cometido es igual a 0,07%.

Una mayor discrepancia se obtiene cuando se emplea la ecuación (3.18) para el cálculo del pH. En este caso, la concentración de cationes hidronio se obtiene directamente mediante la expresión (3.20). De nuevo, la solución positiva es la única de interés químico:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{\text{CaK}_a} \quad (\text{ec.3.20})$$

La concentración de cationes hidronio y el pH correspondientes a esta aproximación se calculan en las columnas F y G, respectivamente, tal y como refleja el cuadro. La comparativa entre los valores de pH obtenidos mediante las expresiones (3.17) y (3.18) demuestra una discrepancia que se hace

más importante al disminuir el valor de la concentración de ácido, Ca. La magnitud de esta discrepancia es, además, dependiente del valor de la constante de acidez, K_a , tal y como puede comprobarse variando el valor de esta constante.

- Tarea 3: graficación

Por último, realizaremos una representación gráfica del tipo XY del pH, obtenido a partir de la ecuación (3.17) (pH; columna E) y de la ecuación (3.18) (pH aprox; columna G) frente al logaritmo de la concentración de ácido cambiada de signo, pCa (columna C).

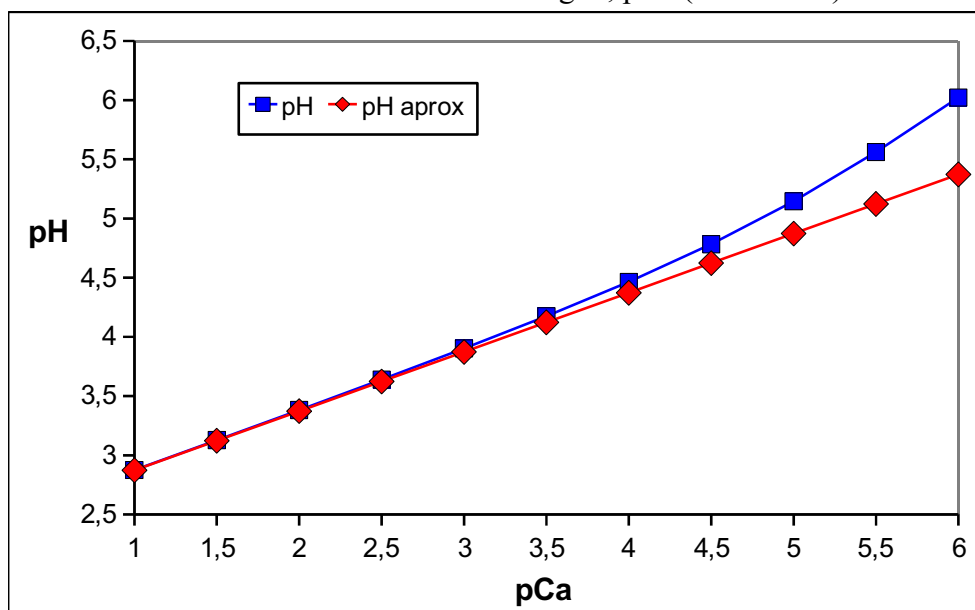


Fig. 3.2- Representación del pH (ec. 3.17) y del pH aproximado (ec. 3.18) frente a pCa.

Tal y como se muestra en la figura 3.1, para el caso del ácido acético, cuando la concentración inicial de ácido se encuentra próxima a 10^{-4} M, el pH real difiere de forma significativa del pH aproximado. Para disoluciones diluidas (10^{-6} M), el error relativo cometido es del 11%.

Criterios de Evaluación

- Plantear los equilibrios en disolución para distintas especies con carácter ácido-base y escribir las expresiones de las constantes de equilibrio, así como los correspondientes balances de masas y de cargas involucrados.
- Calcular el pH de disoluciones de ácidos y bases débiles haciendo uso de aproximaciones razonables desde el punto de vista químico.
- Determinar el rango de concentraciones para un determinado ácido débil en el cual la ecuación (3.18) permite calcular el pH con un error relativo inferior al 5%, que es el valor que normalmente se acepta en este tipo de cálculos.
- Analizar la influencia del valor de la constante de acidez en la exactitud del valor del pH calculado de forma aproximada para una determinada concentración inicial de ácido.

Corolario

La química tiene un papel crucial a la hora de explicar muchos de los procesos que ocurren en el medio ambiente. Uno de los fenómenos que ha atraído gran preocupación por su impacto sobre la naturaleza es la lluvia ácida. La lluvia ácida consiste en la precipitación de partículas que se han acidificado por efecto de la contaminación y es consecuencia de los mecanismos de autolimpieza de la propia atmósfera. El ciclo de reacciones que explica la lluvia ácida comienza en la troposfera, cuando un fotón de la luz solar choca con una molécula de ozono, O_3 . Como resultado se forma una molécula de oxígeno, O_2 , y un átomo de O solitario muy reactivo, el cual se combina con una molécula de agua para formar dos radicales hidroxilo ($OH\cdot$). El radical hidroxilo es una especie química muy activa que transforma el dióxido de nitrógeno, NO_2 , en ácido nítrico, HNO_3 , e inicia las reacciones que transforman el dióxido de azufre, SO_2 , en ácido sulfúrico, H_2SO_4 . La concentración del radical hidroxilo en la atmósfera es muy pequeña (del orden de partes por billón) pero resulta inagotable ya que los procesos de oxidación que transcurren en la atmósfera acaban por regenerarlo.

Los ácidos sulfúrico y nítrico formados en estos procesos atmosféricos se disuelven con facilidad en las gotas de las nubes. Pese a que la mayor parte del ácido sulfúrico se disuelve, una fracción de las partículas de ion sulfato, SO_4^{2-} , se deposita en el suelo en un proceso que se conoce como deposición seca. La humedad se condensa fácilmente en cualquier superficie existente y las partículas de SO_4^{2-} son núcleos de condensación idóneos, convirtiéndose en gotas nubosas que contienen ácido sulfúrico diluido y le confieren un pH muy bajo a la lluvia. Se han recogido muestras de lluvia en las que el pH oscila entre 2,6 y 3,6. En el área de algunas grandes ciudades, el pH de la niebla alcanza valores en torno a 2, que es la acidez del limón aproximadamente.

La lluvia ácida puede caer a centenares de kilómetros del foco de contaminación. Allá donde se deposita experimenta nuevos episodios de alteraciones físicas y químicas que pueden rebajar la acidez, como por ejemplo la neutralización mediante procesos de intercambio de cationes, al tiempo que modifica las características químicas del agua, que finalmente llega a los lagos, ríos y mares. La acidificación de los lagos y de los ríos tiene que ver con la precipitación ácida de la región y la capacidad neutralizadora e intercambiadora de los suelos, y puede producir un importante efecto, aún en estudio, sobre el ecosistema. El efecto ambiental más importante atribuido a la lluvia ácida es la degradación de los bosques.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Construye una hoja de cálculo para determinar la acidez de una base débil como el amoníaco ($K_b = 1,8 \cdot 10^{-5}$) en un rango de concentraciones, C_b , comprendido entre 10^{-1} M y 10^{-6} M. Calcula el pH a partir de las ecuaciones siguientes:

$$[OH^-]^2 + K_b [OH^-] - C_b K_b = 0 \quad (i)$$

$$[OH^-]^2 - C_b K_b = 0 \quad (ii)$$

Justifica las ecuaciones (i) y (ii) implementadas. Construye una gráfica en la que se represente el pH calculado con ambas ecuaciones frente al logaritmo cambiado de signo de la concentración inicial de base (pC_b). Establece gráficamente la desviación del pH calculado mediante la ecuación (ii) con respecto al pH que se obtiene de aplicar la ecuación (i) para el rango de concentraciones previamente indicado.

Sol. Anexo II.

- Ejercicio 2: Con ayuda de la hoja de cálculo que has diseñado, determina el error relativo cometido en la estimación del pH mediante el método aproximado (ii) para una disolución 10^{-4} M de base cuya constante de basicidad es a) 10^{-1} ; b) 10^{-3} ; c) 10^{-5} . Justifica el resultado obtenido.

Sol. a) 15%; b) 5,4%; c) 0,7%.

- Ejercicio 3: Se disuelven 0,35 g de ácido fórmico (HCOOH) hasta formar 500 mL de disolución. Calcula el pH de la disolución. Datos: K_a (HCOOH) = $1,7 \cdot 10^{-4}$. Datos: $m(C) = 12$ g/mol; $m(O) = 16$ g/mol; $m(H) = 1$ g/mol.

Sol. pH = 2,81.

- Ejercicio 4: Calcular la concentración de una disolución de ácido acético ($K_a = 1,8 \cdot 10^{-5}$) sabiendo que su pH es 3,5.

Sol. Ca = 0,0059 M.

- Ejercicio 5: Se disuelven 5 g de ácido benzoico (C_6H_5COOH) hasta formar 1L de disolución. El pH de la disolución resultante es 2,8. Calcula la constante de acidez para el ácido benzoico.

Sol. $K_a = 6,4 \cdot 10^{-5}$.

Capítulo IV: Curvas de valoración ácido-base

Objetivos

- Comprender el concepto de valoración ácido-base y su importancia analítica.
- Adquirir destrezas procedimentales relativas al cálculo del número de equivalentes necesario para neutralizar una disolución problema.
- Construir la curva de valoración para un ácido fuerte, como el ácido clorhídrico (HCl), por adición de volúmenes crecientes de disolución patrón de una base fuerte, como el hidróxido sódico (NaOH).
- Interpretar las características fundamentales de la curva de valoración obtenida, como el cambio brusco de pH en el punto de inflexión y el volumen de equivalencia para el cual se produce.
- Seleccionar correctamente indicadores ácido-base que permitan realizar una determinada valoración ácido-base sin cometer un error apreciable.
- Aprovechar las propiedades matemáticas del punto de equivalencia (a su vez, punto de inflexión) para determinar de forma precisa el volumen de equivalencia a partir de los conceptos de primera y segunda derivada.

Contenidos

Valoración, ácido fuerte, base fuerte, neutralización, curva de valoración, punto de equivalencia, indicadores, punto de inflexión, primera derivada, segunda derivada.

Contextualización

Pedagógica

La práctica se relaciona con los siguientes temas del currículo de Maturita (Anexo I):

Matemáticas

- Tema 5: Ecuaciones lineales y cuadráticas
- Tema 9: Funciones exponenciales y logarítmicas
- Tema 14: Derivadas
- Tema 15: Análisis de funciones: representación gráfica y elementos

Química

- Tema 10: Reacciones ácido-base

Histórico-científica

Tras abordar el cálculo del pH tanto de ácidos y bases fuertes (capítulo II) como de especies ácido-base con carácter débil (capítulo III), en este capítulo estudiamos la técnica analítica de la valoración, la cual es comúnmente empleada en el laboratorio para determinar la concentración exacta de una disolución problema.

Las valoraciones ácido-base hacen uso del concepto de neutralización. De acuerdo a las características ácido-base de la disolución problema, obtendremos una determinada forma de la curva de valoración. En esta práctica, analizaremos la valoración de un ácido fuerte como el ácido

clorhídrico, HCl, con una base fuerte como la sosa, NaOH, y propondremos indicadores adecuados para efectuarla.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión plantearemos la ecuación para el cálculo del pH de forma exacta cuando añadimos volúmenes crecientes de una base de concentración conocida a una disolución ácida. Asimismo, se diseñarán las características generales de la hoja de cálculo.
- En la segunda sesión se realizará la implementación de las fórmulas y la graficación del pH de la disolución en función del volumen de base añadido; es decir, la curva de valoración. Además, se empleará el concepto de primera y segunda derivada para determinar con exactitud el valor del punto de equivalencia.

Fundamentos teóricos

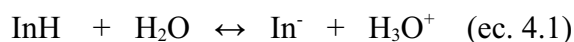
El análisis volumétrico es uno de los procedimientos analíticos más empleados. Consiste en la determinación del volumen de una disolución de concentración conocida necesario para reaccionar completamente con una cantidad dada de la sustancia a analizar. A esta operación se le llama *valoración*.

En las volumetrías de neutralización ácido-base, la valoración consiste en la medida cuidadosa del volumen de una disolución ácida o básica de concentración perfectamente conocida (disolución patrón) necesaria para que reaccione con un volumen determinado de la base o del ácido cuya concentración se desea conocer (disolución problema).

La valoración ácido-base se basa en un cambio brusco de pH que se produce cerca del punto de equivalencia de la reacción química, punto en el que se han mezclado cantidades estequiométricamente equivalentes de los reactivos. Como es obvio, es necesario disponer de algún medio para detectar dicho punto de equivalencia; es decir, disponer de algún indicador apropiado, que puede ser de tipo físico (medida de la conductividad eléctrica, del potencial de una pila...) o químico (colorante). En este último caso, se dice que se ha alcanzado el punto final de la valoración cuando el indicador cambia de color.

Los indicadores químicos son colorantes orgánicos complejos que cambian de color según el pH de la disolución en que se encuentren. Estas sustancias son ácidos o bases débiles cuyas formas ácido-base conjugadas tienen colores diferentes.

En disolución acuosa, el indicador InH presenta el siguiente equilibrio ácido-base:



el cual está descrito por la correspondiente constante de equilibrio:

$$K_{\text{ind}} = \frac{[\text{In}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{InH}]} \quad (\text{ec. 4.2})$$

Al despejar la concentración de cationes hidronio en la ecuación (4.2) resulta:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = K_{\text{ind}} \frac{[\text{InH}]}{[\text{In}^-]} \quad (\text{ec. 4.3})$$

Si ahora tomamos logaritmos y cambiamos de signo los términos de la ecuación (4.3), obtenemos la expresión (4.4):

$$\text{pH} = \text{pK}_{\text{ind}} + \log \frac{[\text{In}^-]}{[\text{InH}]} \quad (\text{ec. 4.4})$$

Como el indicador InH es un ácido débil y se encuentra en pequeña proporción, la concentración de iones hidronio en disolución apenas variará por la disociación del indicador, pero el equilibrio de disociación de éste sí se verá afectado por la concentración de cationes hidronio de la disolución.

Aunque el límite de percepción del color depende de muchos factores (tonalidad intrínseca, percepción del observador...) en general se asume que para que el cambio sea visible, la concentración de una de las formas coloreadas debe ser unas diez veces mayor que la otra. Por lo tanto, si $[\text{In}^-] = 10 [\text{InH}]$, resultará: $\text{pH} = \text{pK}_{\text{ind}} + \log 10 = \text{pK}_{\text{ind}} + 1$; y si $[\text{InH}] = 10 [\text{In}^-]$, resultará: $\text{pH} = \text{pK}_{\text{ind}} - 1$. En consecuencia, se concluye que el ojo aprecia el viraje en una zona que corresponde a dos unidades de pH, $\text{pH} = \text{pK}_{\text{ind}} \pm 1$.

En la figura (4.1) se incluyen algunos de los indicadores ácido-base más importantes, junto con el intervalo de viraje y sus correspondientes colores en sus formas ácida y básica:

Indicador	pH de viraje	Color ácido	Color básico
Naranja de metilo	3,1 - 4,4	Rojo	Anaranjado
Rojo de metilo	4,2 – 6,3	Rojo	Amarillo
Tornasol	4,5 – 8,3	Rojo	Azul
Fenolftaleína	8,0 – 9,5	Incoloro	Rojo

Fig. 4.1: Principales indicadores utilizados en el laboratorio. Se incluye su pH de viraje y el color de sus formas ácida y básica.

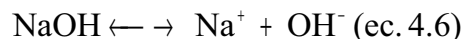
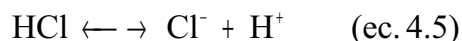
El punto de inflexión de la curva de valoración se produce como consecuencia de un salto brusco del pH y corresponde al punto de equivalencia de la reacción de neutralización. Cuando se valora un ácido fuerte, como el HCl, con una base fuerte, como el NaOH, el pH en el punto de equivalencia es igual a 7, tal y como corresponde al pH de la sal formada, una sal de ácido fuerte y base fuerte; en nuestro caso, el NaCl.

Cuando se neutraliza un ácido débil, como el ácido acético (CH_3COOH), con una base fuerte como la sosa (NaOH), el pH del punto de equivalencia es superior a 7, como corresponde a una disolución de una sal de ácido débil y base fuerte, el acetato sódico (CH_3COONa).

Si se neutraliza un ácido fuerte, como el HCl, con una base débil como el amoníaco (NH_3), el pH del punto de equivalencia es inferior a 7, correspondiente a una disolución de una sal de ácido fuerte y base débil, el cloruro de amonio (NH_4Cl).

En cada uno de estos tres casos mencionados, el indicador adecuado será aquél cuyo intervalo de viraje corresponda a la zona en la que se produce la neutralización, la cual se identificará fácilmente por el cambio brusco en el valor del pH.

Como ejemplo de construcción de una curva de valoración, analizaremos la valoración de un ácido fuerte, HCl, con una base fuerte, NaOH. En disolución acuosa, debido al carácter ácido-base fuerte de ambas especies, éstas se encuentran totalmente disociadas. Es decir:



El balance de cargas de las especies en disolución será, por tanto:

$$[\text{H}^+] + [\text{Na}^+] = [\text{Cl}^-] + [\text{OH}^-] \quad (\text{ec. 4.7})$$

Las concentraciones a las que se refiere la ecuación (4.7) son concentraciones en disolución, las cuales debemos expresar en función de las respectivas concentraciones iniciales y los volúmenes de ácido y de base. Adoptaremos las siguientes definiciones:

C_a = concentración inicial de HCl.

V_a = volumen de HCl valorado.

C_b = concentración de NaOH.

V_b = volumen de NaOH añadido.

En general, la concentración inicial de ácido, C_a , es el parámetro que se pretende determinar en el laboratorio. En la simulación por ordenador, asumiremos conocido este valor para detallar la forma de la curva de valoración en función del volumen de base añadido.

Si sustituimos las definiciones anteriores en la ecuación (4.7) obtenemos la expresión (4.8):

$$[\text{H}^+] + \frac{C_b V_b}{V_a + V_b} = \frac{C_a V_a}{V_a + V_b} + \frac{K_w}{[\text{H}^+]} \quad (\text{ec. 4.8})$$

Si, para simplificar, agrupamos en una variable B , los términos que dependen de las concentraciones iniciales y volúmenes de ácido y base, tenemos que:

$$B = \frac{C_a V_a - C_b V_b}{V_a + V_b} \quad (\text{ec. 4.9})$$

Sustituyendo la expresión (4.9) en la ecuación (4.8) y operando convenientemente se obtiene la correspondiente ecuación de segundo grado que determina el pH exacto de la disolución en función del volumen de NaOH añadido.

$$[\text{H}^+]^2 - B[\text{H}^+] - K_w = 0 \quad (\text{ec. 4.10})$$

Tal y como hemos analizado en capítulos anteriores, sólo la solución positiva tiene significado químico. Para obtener la concentración de protones que determina el pH de la disolución debemos implementar el algoritmo (4.11):

$$[\text{H}^+] = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4K_w}}{2} \quad (\text{ec. 4.11})$$

En la resolución de este problema podríamos obviar también el equilibrio de autoprotólisis del agua y, por tanto, despreciar el valor de K_w en la ecuación (4.10). Sin embargo, esto conduciría a que, en el punto de equivalencia ($B = 0$), la concentración de protones fuera nula. Este hecho implica que el ácido inicial ha sido completamente neutralizado, y la concentración de protones proviene exclusivamente de la disociación del agua. La ecuación (4.11) permite calcular de forma exacta el pH incluso en el punto de equivalencia y sus proximidades, por lo tanto será la ecuación que implementaremos para el cálculo del pH.

La representación del pH de la disolución frente al volumen de base añadida origina una curva de valoración como la que se observa en la figura 4.2:

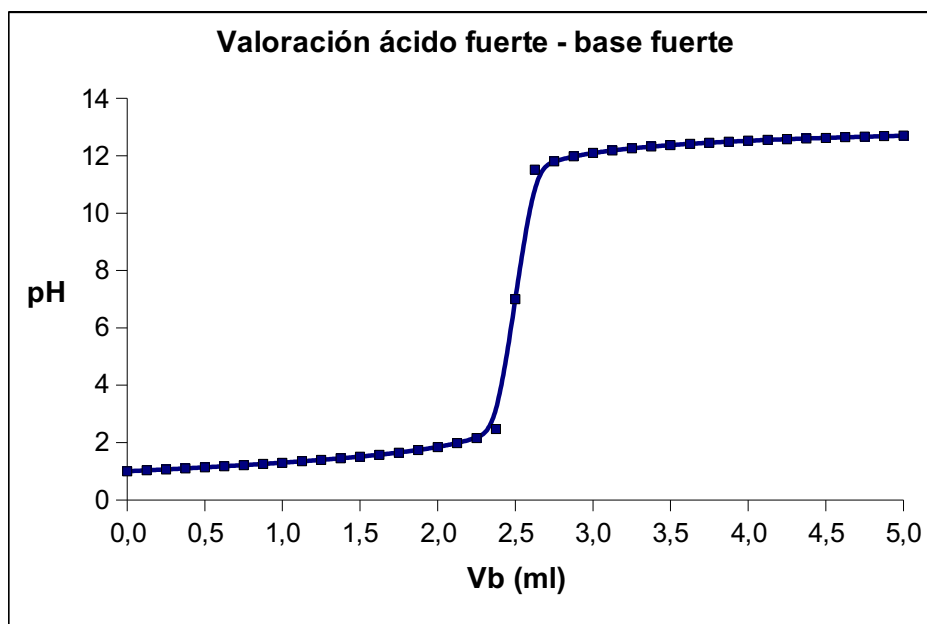


Fig. 4.2: Curva de valoración de una disolución de HCl frente al NaOH.

Esta curva presenta una serie de características que procedemos a detallar a continuación:

- El pH inicial es muy ácido ($\text{pH} = 1$) correspondiente a la disolución de un ácido fuerte como el HCl.
- La adición de los primeros mL de base produce una variación poco significativa del pH. El pH sólo varía una unidad al añadir los primeros 2 mL de NaOH.
- En las proximidades del punto de equivalencia se produce un salto muy brusco del pH, el cual aumenta en más de 8 unidades de pH, por la adición de 0,1 mL (desde 2,45 hasta 2,55 mL).
- Adiciones de NaOH posteriores al punto de equivalencia producen un aumento poco importante del pH, que permanece estabilizado en torno a 12.
- El salto tan brusco del pH posibilita que prácticamente cualquier indicador de los señalados previamente sea adecuado para realizar la valoración. El rojo de metilo, el tornasol o la fenolftaleína son habitualmente empleados para realizar esta valoración ácido-base. El naranja de metilo también podría ser utilizado aunque el error cometido en la valoración sería ligeramente mayor.

Desde un punto de vista matemático, el punto de equivalencia es un punto de inflexión en la representación del pH frente a V_b , tal y como se observa en la figura 4.2. Un punto de inflexión es aquel lugar donde la función cambia su curvatura (de cóncava a convexa o viceversa). La determinación gráfico-matemática de este punto puede resultar dificultosa si se disponen de pocos valores de la curva de valoración o estudiamos especies ácido-base débiles para las cuales el salto de pH en las proximidades del punto de equivalencia es sensiblemente menos pronunciado.

Por ello, se hace uso de las propiedades matemáticas del punto de inflexión para establecer con precisión el valor del volumen de equivalencia de forma gráfica. El punto de equivalencia equivale a un máximo en la representación de la primera derivada del pH frente a V_b (pH'), y corta el eje de abscisas cuando representamos la segunda derivada del pH frente a V_b (pH''). La determinación gráfica de un máximo o del punto de corte con el eje de abscisas es más sencilla que

establecer el lugar donde la función cambia su curvatura.

Para el cálculo de las derivadas primera y segunda podríamos haber optado por ajustar la curva de valoración a una función analítica que determinara el pH en función de V_b y efectuar la derivada de dicha función. Sin embargo, como disponemos de una función discretizada; es decir, conocemos el valor de la función para distintos puntos, podemos emplear el método de las diferencias finitas para calcular los valores de las derivadas en los puntos conocidos.

Sea una función f dependiente de una variable x , $f(x)$, -en nuestro caso pH (V_b)- el método de la diferencia central establece que la derivada del pH en un punto (i), $pH'(i)$, se define, de acuerdo con la ecuación (4.12), como el cociente entre la diferencia del valor de la función en el punto posterior, pH ($i+1$), menos el valor de la función en el punto anterior, pH($i-1$), dividido entre la separación entre ambos puntos, $2h$, que se define como $2h = V_b(i+1) - V_b(i-1)$:

$$pH'(i) = \frac{pH(i+1) - pH(i-1)}{2h} \quad (\text{ec. 4.12})$$

La ecuación (4.12) utiliza el concepto geométrico de derivada que representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Análogamente, empleando el método de la derivada central podemos definir la segunda derivada $pH''(V_b)$ como:

$$pH''(i) = \frac{pH(i+1) - 2pH(i) + pH(i-1)}{h^2} \quad (\text{ec. 4.13})$$

Metodología

Para la construcción de la curva de valoración de un ácido fuerte (HCl) con una base fuerte (NaOH) seguiremos los pasos generales que han sido detallados para la confección de las hojas de cálculo anteriores.

- Tarea 1: definiciones

En primer lugar, implementaremos los valores de las constantes de nuestro problema. Asumiremos apriorísticamente que la concentración inicial de HCl, C_a , es perfectamente conocida para así calcular teóricamente el pH de la disolución resultante de valorar el ácido. En la práctica, este valor es el que se trata de averiguar en el laboratorio a partir de los valores experimentales de pH obtenidos al añadir volúmenes crecientes de base. Así pues, los datos iniciales serán las concentraciones iniciales de ácido (C_a), de base (C_b) y el volumen inicial de ácido (V_a) que se valora. La disolución de NaOH es el patrón que se utiliza para valorar y su concentración (C_b) se conoce con exactitud. Junto con estas constantes, definiremos el valor de la constante de autoprotólisis del agua, $K_w = 10^{-14}$. En nuestro caso, $C_a = 0,1 \text{ M}$; $C_b = 0,2 \text{ M}$, y $V_a = 5 \text{ mL}$.

- Tarea 2: creación del cuadro de valores

Definidas estas constantes, nos interesa diseñar una hoja de cálculo de manera que la representación del pH frente al volumen de base (V_b) quede centrada respecto al eje de abscisas; es decir, en la que consideremos tantos puntos antes del punto de equivalencia como después de él. Para ello, deberemos determinar previamente el valor del punto de equivalencia, para el cual se producirá la neutralización de todos los moles de ácido con los moles de base, de acuerdo con la reacción (4.14):



En el punto de equivalencia se cumple que: moles de HCl = moles de NaOH, o expresado de otro modo:

$$C_a V_a = C_b V_{eq} \quad (\text{ec. 4.15})$$

donde V_{eq} es el volumen de equivalencia, que en nuestro caso es igual a 2,5 mL de acuerdo con la expresión (4.15). Para conseguir que la representación sea simétrica respecto al punto de equivalencia, definiremos el valor del volumen de base introducida (V_b) en función del volumen de equivalencia (V_{eq}), valor que fijaremos también como constante.

Si queremos una representación con 41 puntos, definiremos en primer lugar un contador, n , que numere los puntos considerados desde 0 a 40, tal y como se muestra en la figura 4.3. Queremos que la mitad de los puntos, 20, se encuentren a la izquierda del punto de equivalencia y la otra mitad, 20, se encuentren a la derecha. Para ello, definimos los volúmenes de base añadidos, V_b , mediante el algoritmo (4.16):

$$V_b = V_{eq} \frac{n}{20} \quad (\text{ec. 4.16})$$

En la columna D, definiremos el valor de B según la ecuación (4.9). El pH de la disolución se calculará en la columna E. En dicha columna implementamos el logaritmo cambiado de signo de la expresión (4.11).

Tal y como se puede observar en la figura 4.3. se han incluido dos columnas más en las que se calcula la derivada primera del pH respecto a V_b , pH' (columna F) y la derivada segunda del pH respecto a V_b , pH'' (columna G). El objetivo de estas columnas es aprovechar las propiedades matemáticas del punto de equivalencia para determinar de forma precisa su valor.

Las ecuaciones (4.12) y (4.13) se han implementado en las columnas F y G, respectivamente, como se observa en la figura 4.3. Puesto que para establecer el valor de la derivada en un punto (i) es necesario conocer el valor de la función en el punto posterior ($i+1$) y anterior ($i-1$), el valor de las derivadas no estará definido para $n = 0$ y $n = 40$.

Como resultado final, obtendremos un cuadro con seis entradas en forma de columnas: n , V_b , B , pH , pH' y pH'' para un conjunto de puntos (desde $n = 0$ hasta $n = 40$) simétricamente distribuidos en torno al punto de equivalencia. Dicho cuadro, junto con las fórmulas implementadas en cada columna se muestra en la figura 4.3.

=B12+1 =(Ca*Va-Cb*\$C12)/(Va+\$C12) =(E14-E12)/(C14-C12)						
11	n	Vb (mL)	B	pH	pH'	pH''
12	0	0,000	1,00E-01	1,0000		
13	1	0,125	9,27E-02	1,0330	0,2678	0,060561
14	2	0,250	8,57E-02	1,0669	0,2760	0,070158
15	3	0,375	7,91E-02	1,1020	0,2854	0,081306
16	4	0,500	7,27E-02	1,1383	0,2964	0,094426
=B12/20*Veq =(E14-2*E13+E12)/((C14-C12)/2)^2						
48	36	4,500	-4,02E-02	12,6243	0,1717	-0,103639
49	37	4,625	-4,02E-02	12,6450	0,1595	-0,091555
50	38	4,750	-4,02E-02	12,6642	0,1487	-0,081597
51	39	4,875	-4,81E-02	12,6822	0,1390	-0,072739
52	40	5,000	-5,00E-02	12,6990		
=-LOG((D12+RAÍZ(D12^2+4*kW))/2;10)						

Fig. 4.3: Cuadro de valores con las entradas: n, Vb, B, pH, pH' y pH''

- Tarea 3: graficación

Por último, realizaremos la representación gráfica de la curva de valoración mediante un gráfico de tipo XY en el que se represente el pH (columna E) frente al volumen de base, Vb (columna C). El resultado obtenido se encuentra en la figura 4.2.

En gráficas separadas representaremos el valor de la primera derivada, pH', frente al volumen de sosa (figura 4.4) y el correspondiente a la segunda derivada, pH'' (figura 4.5). En ambos casos, utilizaremos un tipo de representación XY en su variante *B spline con símbolos*. Este tipo de representación representa los puntos del cuadro, al tiempo que los une mediante una línea suave correspondiente a una interpolación de orden cuadrático. A diferencia de otro tipo de representaciones como el *Spline cúbico con símbolos*, esta interpolación no genera falsos máximos o mínimos locales.

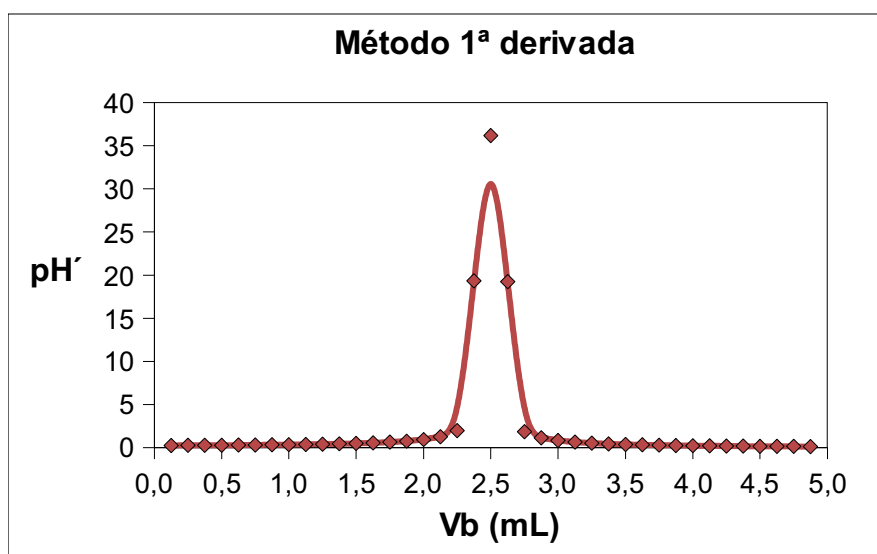


Fig. 4.4: Representación de la primera derivada del pH frente a Vb (mL), pH'.

La gráfica 4.4 en la que se representa la primera derivada del pH frente al volumen de sosa presenta un máximo perfectamente definido para un valor de NaOH añadido igual a 2,5 mL.

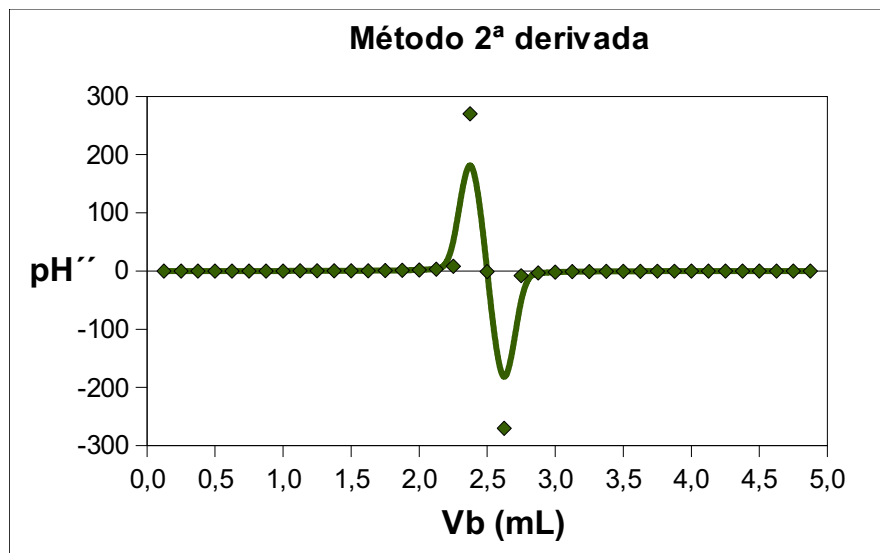


Fig. 4.5: Representación de la segunda derivada del pH frente a V_b (mL), pH'' .

La gráfica 4.5 representa la segunda derivada del pH frente al volumen de sosa y corta el eje de abscisas para un valor de NaOH añadido igual a 2,5 mL.

Criterios de Evaluación

- Desarrollar el balance de cargas correspondiente a las especies involucradas en la neutralización de un ácido fuerte, como el ácido clorhídrico, con una base fuerte, como el hidróxido sódico, para determinar el pH de una disolución ácida al añadir volúmenes crecientes de una disolución patrón de sosa de concentración perfectamente conocida.
- Calcular de forma teórica el volumen de equivalencia para el cual tiene lugar la neutralización ácido-base.
- Construir una curva de valoración para un ácido fuerte mediante la adición de volúmenes crecientes de una base fuerte.
- Seleccionar indicadores adecuados para realizar una valoración experimental en el laboratorio de acuerdo a las características ácido-base de las especies involucradas.
- Emplear distintas estrategias basadas en las propiedades matemáticas del punto de inflexión para determinar de forma precisa el valor del volumen de equivalencia.

Corolario

En muchos de los procesos bioquímicos que tienen lugar en los organismos vivos tienen especial importancia las llamadas disoluciones reguladoras, amortiguadoras o tampón. Estas disoluciones son aquéllas cuyo pH apenas varía al añadirle, en pequeñas cantidades, otros

electrolitos que formen cationes H_3O^+ (ácidos) o aniones OH^- (bases).

Las disoluciones amortiguadoras contienen dos especies químicas, una capaz de reaccionar con los H_3O^+ y otra con los OH^- . Suelen estar formadas por un ácido débil (por ejemplo, ácido acético) en elevada concentración y una de sus sales (acetato sódico) en parecida concentración; o bien, por una base débil (por ejemplo, amoníaco) y una de sus sales (cloruro de amonio).

A continuación analizaremos el mecanismo de actuación de los sistemas reguladores, evaluando el papel amortiguador del sistema: ácido acético/acetato de sodio ($\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COONa}$).

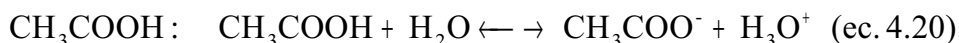
Si a una disolución $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COONa}$ se le añade una cierta cantidad de ácido se amortigua el efecto ácido por la acción de la sal (CH_3COONa), de acuerdo con la reacción (4.17):



Por contra, si es una base lo que se añade, el efecto alcalino se amortigua gracias a la acción del ácido (CH_3COOH), según la reacción (4.18):



El pH de la disolución se puede calcular si consideramos todos los equilibrios ácido-base involucrados:



A partir de las expresiones (4.19) y (4.20) podemos concluir que, en el equilibrio, la concentración de anión acetato, $[\text{CH}_3\text{COO}^-]$, corresponde en buena aproximación a la concentración de sal inicial, mientras que la concentración de ácido acético, $[\text{CH}_3\text{COOH}]$, es igual a la concentración inicial de ácido.

Si tenemos presente la expresión de la constante de acidez para el ácido acético (ec. 4.21):

$$K_a = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \quad (\text{ec. 4.21})$$

podemos establecer el pH de la disolución. De acuerdo con la expresión (4.21), la concentración de cationes hidronio viene dada por la expresión (4.22):

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = K_a \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]} \quad (\text{ec. 4.22})$$

donde $[\text{CH}_3\text{COO}^-] = [\text{CH}_3\text{COONa}]_0$ y $[\text{CH}_3\text{COOH}] = [\text{CH}_3\text{COOH}]_0$. El subíndice “0” indica que se trata de las concentraciones iniciales de sal y ácido, respectivamente.

Tomando logaritmos en la expresión (4.22) obtenemos el pH de la disolución:

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{sal}]_0}{[\text{ácido}]_0} \quad (\text{ec. 4.23})$$

Como hemos señalado previamente, el pH de la disolución reguladora apenas varía al añadir una cantidad moderada de ácido o de base, pero si la concentración de ácido acético y del acetato no son considerablemente mayores que la del ácido o la base agregadas, esta disolución deja de actuar como reguladora.

Por otra parte, de acuerdo con la expresión (4.23) cuanto más próximo a la unidad se encuentre el cociente $[\text{sal}]_0 / [\text{ácido}]_0$ mayor será el poder regulador de la disolución. Es decir, el pH que mejor se amortigua es del orden del pK_a regulador. Por tanto, cuando se intentan regular varios procesos químicos que tienen lugar a diferente pH deben utilizarse distintos reguladores apropiados, cada uno de ellos al pH a regular, en vez de emplear un único regulador y variar la concentración $[\text{sal}]_0 / [\text{ácido}]_0$.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Se mezclan 25 mL de HCl 0,22 M con 50 mL de NaOH 0,16 M. Calcula el pH de la disolución resultante.

Sol. $\text{pH} = 12,52$.

- Ejercicio 2: Se mezclan 82 mL de HCl 0,14 M con 30 mL de hidróxido cálcico 0,12 M. Escribe los equilibrios en disolución involucrados y calcula el pH de la disolución resultante.

Sol. $\text{pH} = 1,41$.

- Ejercicio 3: Calcula el volumen de disolución 0,06 M de NaOH que hay que añadir sobre 25 mL de disolución 0,11 M de ácido clorhídrico para que el pH resultante sea 11,84.

Sol. $V_b = 55 \text{ mL}$.

- Ejercicio 4: Valoramos 40 mL de ácido acético 0,01 M con una disolución de NaOH 0,02 M. Calcula el pH de la disolución tras la adición de: a) 20 mL de la disolución de NaOH; b) 30 mL de la disolución de NaOH. Datos: $K_a(\text{CH}_3\text{COOH}) = 1,8 \cdot 10^{-5}$

Sol. a) $\text{pH} = 8,3$; b) $\text{pH} = 11,5$.

- Ejercicio 5: Calcula el volumen de disolución 0,08 M de NaOH que hay que añadir sobre 250 mL de disolución 0,11 M de ácido acético para que el pH resultante sea 5,2.

Sol. $V_b = 254,5 \text{ mL}$.

- Ejercicio 6: i) Calcula el pH de una disolución tampón 0,1 M en ácido acético y 0,2 M en acetato de sodio. ii) Determina cuánto variará el pH de la disolución si se adicionan: a) 10 mL de disolución de HCl 0,1 M; b) 10 mL de disolución 0,1 M de NaOH.

Sol. i) $\text{pH} = 5,05$; ii.a) $\Delta\text{pH} = -0,04$; ii.b) $\Delta\text{pH} = 0,02$.

- Ejercicio 7: i) Calcula el pH de una disolución tampón 0,2 M en amoníaco y 0,3 M en cloruro de amonio. ii) Determina cuánto variará el pH de la disolución si añadimos 20 mL de NaOH 0,1 M. Datos: $K_b(\text{NH}_3) = 1,8 \cdot 10^{-5}$.

Sol. i) $\text{pH} = 9,08$; ii) $\Delta\text{pH} = 0,12$.

- Ejercicio 8: El indicador rojo de metilo tiene una constante de ionización de $7,93 \cdot 10^{-6}$. Si se admite normalmente que el 6% de su forma ácida de color rojo y el 12% de su forma básica de color amarillo ya no son reconocibles, determina el pH de viraje del indicador.

Sol. $pH = 4,2 - 6,3$.

Capítulo V: Dependencia de la constante de velocidad con la temperatura

Objetivos

- Comprender y aplicar la ecuación de Arrhenius que determina la dependencia de la constante de velocidad con la temperatura.
- Analizar el significado químico tanto del factor pre-exponencial como de la energía de activación.
- Adquirir destrezas procedimentales relativas al ajuste lineal de funciones matemáticas por el método de mínimos cuadrados.
- Calcular el factor pre-exponencial y la energía de activación a partir de una serie de valores de la constante de velocidad para distintas temperaturas.
- Determinar el valor de la constante de velocidad a una temperatura determinada, conocido su valor para una temperatura distinta.

Contenidos

Constante de velocidad, temperatura, ecuación de Arrhenius, factor pre-exponencial, energía de activación, teoría del estado de transición, ajuste lineal.

Contextualización

Pedagógica

La práctica se relaciona con los siguientes temas del currículo de Maturita (Anexo I):

Matemáticas

- Tema 9: Funciones exponenciales y logarítmicas
- Tema 16: Cálculo integral
- Tema 25: Estadística

Química

- Tema 8: Cinética química

Histórico-científica

Uno de los recursos más comúnmente empleados tanto en el laboratorio como en la industria para acelerar la velocidad de una determinada reacción química es aumentar la temperatura a la cual tiene lugar el proceso. Esta opción es utilizada especialmente en reacciones endotérmicas en las que un aumento de la temperatura desplaza el equilibrio hacia la formación de productos.

En esta práctica haremos uso de la ecuación de Arrhenius para estudiar cómo varía la constante de velocidad con la temperatura, e introduciremos conceptos básicos de la teoría cinética del estado de transición como los de energía de activación o factor pre-exponencial, los cuales se interpretarán desde un punto de vista químico.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión diseñaremos la hoja de cálculo con el fin de implementar la ecuación de Arrhenius linearizada. Introduciremos los datos de la constante de velocidad, k , en función de la temperatura, T , y calcularemos los valores del logaritmo neperiano de la constante de velocidad, $\ln k$, y la inversa de la temperatura, $1/T$. Como resultado obtendremos la representación gráfica de $\ln k$ frente a $1/T$.
- En la segunda sesión estudiaremos las características del ajuste lineal por mínimos cuadrados. Obtendremos toda la información de interés sobre la recta ajustada y calcularemos los valores del factor pre-exponencial y de la energía de activación.

Fundamentos teóricos

La cinética química es la parte de química que se ocupa del estudio de la velocidad de las reacciones químicas, de acuerdo con el índice de cambio de la concentración de reactivos y productos con el tiempo, y establece cuál es la trayectoria seguida por la reacción en la transformación de reactivos en productos.

En la actualidad no podemos predecir a partir de predicciones exclusivamente teóricas la velocidad de cambio de una determinada reacción química. Son muchos los factores que afectan a la velocidad de una reacción química. Entre estos factores se encuentran: la concentración de reactivos y productos, el estado físico de las especies que reaccionan, la presión, la presencia de catalizadores o la temperatura.

En esta práctica vamos a analizar uno de los factores más empleados a la hora de modificar la velocidad de una reacción química, como es la temperatura. Si efectuamos diferentes experiencias para distintas temperaturas se advierte que este factor influye en el valor de la constante de velocidad, la cual aumenta al elevarse el valor de la temperatura. La temperatura afecta exclusivamente al valor de la constante de velocidad pero no varía el orden de reacción respecto a las especies involucradas en la ecuación de velocidad.

En 1889, Arrhenius demostró que la constante de velocidad crece de forma exponencial con la temperatura, de acuerdo con la expresión (5.1), la cual lleva su nombre:

$$k = A e^{\frac{-E_a}{RT}} \quad (\text{ec. 5.1})$$

donde A es el llamado factor *pre-exponencial* y E_a se conoce con el nombre de *energía de activación*.

Si tomamos logaritmos neperianos en la ecuación de Arrhenius (5.1), obtenemos la expresión (5.2):

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT} \quad (\text{ec. 5.2})$$

La ventaja de la ecuación (5.2.) reside en que, conocidos los valores de la constante de velocidad para diferentes temperaturas, podemos obtener el valor del factor pre-exponencial, A , y de la energía de activación, E_a , a partir de un ajuste lineal de $\ln k$ frente a $1/T$. A partir de dicha representación, se obtiene una línea recta de pendiente negativa igual a $-E_a/R$ y ordenada en el origen igual a $\ln A$. Por tanto, establecidos los valores de la ordenada en el origen y la pendiente de la recta podemos determinar los valores experimentales de A y E_a . Precisamente, ése es el

fundamento de la presente práctica.

Derivando la ecuación de Arrhenius respecto de la temperatura y considerando E_a independiente de la temperatura, tenemos:

$$\frac{d(\ln k)}{dT} = \frac{E_a}{R T^2} \quad (\text{ec. 5.3})$$

Si integramos la ecuación diferencial resultante entre dos temperaturas, T_1 y T_2 :

$$\int_{k_1}^{k_2} d(\ln k) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{E_a}{R T^2} dT \quad (\text{ec. 5.4})$$

obtenemos la expresión (5.5.):

$$\ln \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (\text{ec. 5.5})$$

Es decir, conocido el valor de k a la temperatura T_1 (k_1) se puede calcular el valor de k a la temperatura T_2 (k_2).

A partir de las reacciones anteriores, resulta fácil comprender que, a una temperatura determinada, cuanto mayor sea el valor de la energía de activación, tanto menor será la constante de velocidad y, por consiguiente, más lenta será la reacción. Esto significa que las reacciones rápidas tienen valores bajos de la energía de activación, mientras que para las reacciones lentas, los valores de E_a son elevados. De hecho, la mayor parte de las reacciones que se desarrollan con una velocidad razonable (es decir, aquellas para las cuales el equilibrio se alcanza en un tiempo que oscila entre unos cuantos minutos y unas pocas horas) tienen valores de E_a en torno a 20 Kcal/mol. En estas reacciones se puede utilizar la ecuación (5.1) para comprobar la regla general según la cual la reacción duplica su velocidad cuando la temperatura aumenta en unos 10° C.

Si pretendemos describir con detalle el significado de k hemos de buscar una justificación molecular a cerca de la naturaleza de A y E_a . Arrhenius propuso que las reacciones tenían lugar como resultado de las colisiones entre las moléculas. Razonó que no todas las colisiones producen una reacción y que sólo las moléculas que adquieren suficiente energía de activación pueden reaccionar para formar productos. Es decir, de las muchas colisiones que pueden ocurrir entre las moléculas de los reactivos, sólo una fracción de ellas dará como resultado un cambio químico.

Por la distribución de energía que establece la estadística de Maxwell-Boltzmann, la fracción de moléculas que tienen una energía de activación, E_a , a la temperatura T , viene dada por la expresión (5.6):

$$\frac{n_a}{n_t} = e^{\frac{-E_a}{R T}} \quad (\text{ec. 5.6})$$

donde n_a es el número de moléculas activadas por unidad de volumen; o sea, el número de moléculas que tiene la energía de activación necesaria para reaccionar, mientras que n_t es el número total de moléculas de reactivo por unidad de volumen.

Si se supone que la velocidad de reacción, v , es proporcional a la concentración de moléculas activadas, se puede escribir:

$$v = A n_a \quad (\text{ec. 5.7})$$

siendo A una constante de proporcionalidad. Si sustituimos n_a por su valor despejado en la ecuación (5.6) obtenemos:

$$v = A e^{\frac{-E_a}{RT}} n_t \quad (\text{ec. 5.8})$$

Como n_t representa la concentración total de moléculas de reactivo, podemos escribir en su lugar [reactivo]:

$$v = A e^{\frac{-E_a}{RT}} [\text{reactivo}] \quad (\text{ec. 5.9})$$

A partir de la expresión general para la velocidad de una determinada reacción química (ec. 5.10):

$$v = k [\text{reactivo}] \quad (\text{ec. 5.10})$$

obtenemos la forma para la expresión de la constante de velocidad, k , (ec. 5.11) que Arrhenius había obtenido de forma empírica (ec. 5.1):

$$k = A e^{\frac{-E_a}{RT}} \quad (\text{ec. 5.11})$$

Particular interés merece la naturaleza de las moléculas activadas. Estas especies activadas no son tan sólo una molécula de reactivo energéticamente simple sino un complejo de varias moléculas de reactivo unidas de alguna manera particular, el cual recibe el nombre de *complejo activado*. El complejo activado no es un compuesto intermedio único y simple, sino una molécula en la que los enlaces entre los átomos están en proceso de formarse y romperse. La energía del complejo activado es mayor que la de cualquier molécula de reactivo o producto y no puede determinarse mediante experimentos directos debido a que el complejo activado tiene una existencia efímera.

La teoría de Arrhenius representa un importante avance acerca del conocimiento de los procesos de las reacciones químicas. No obstante, esta teoría sólo ofrece una descripción cualitativa que no establece la dependencia del factor pre-exponencial con las propiedades de las moléculas en reacción y no permite evaluar de forma teórica el valor de la energía de activación.

Con posterioridad a la teoría de Arrhenius se han desarrollado dos importantes teorías: la *teoría de los choques moleculares* y la *teoría del estado de transición*. Con estas teorías se ha logrado interpretar el significado del factor pre-exponencial, si bien el valor de la energía de activación que corresponde al complejo activado se resiste a una evaluación cuantitativa, excepto en casos excepcionales de reacciones sencillas.

Metodología

La velocidad de descomposición del etanal (CH_3CHO) es de segundo orden y se midió en el intervalo de temperatura comprendido entre 700 y 1000 K. Los valores de las constantes de velocidad, k ($\text{M}^{-1} \text{s}^{-1}$), se incluyen en el cuadro 5.1:

T (K)	700	730	760	790	810	840	910	1000
k ($\text{M}^{-1} \text{s}^{-1}$)	0,011	0,035	0,105	0,343	0,789	2,17	20,0	145

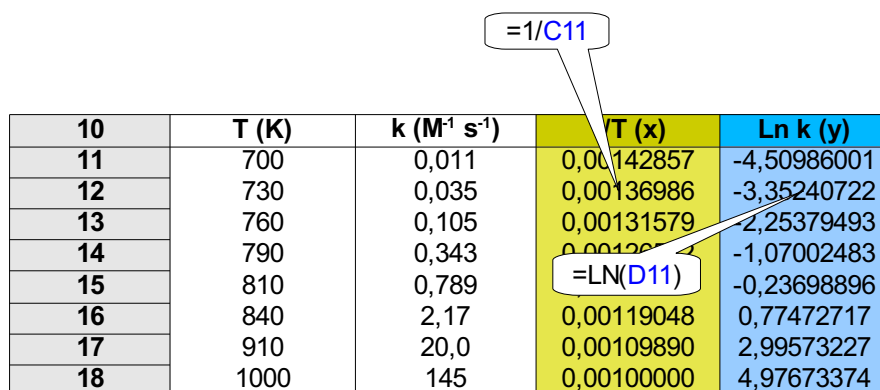
Fig. 5.1: Valores de la constante de velocidad, k ($\text{M}^{-1} \text{s}^{-1}$), para distintas temperaturas, T (K).

A partir de los resultados experimentales anteriores el objetivo de esta práctica consiste en determinar el valor del factor pre-exponencial (A) y la energía de activación (E_a) para la reacción de descomposición del etanal. Para ello, realizaremos los siguientes pasos:

- Tarea 1: creación del cuadro de valores

En primer lugar, implementaremos los datos de nuestro problema. Tal y como se observa en cuadro 5.2, en la columna C hemos introducido los valores de la temperatura, **T**, en K. En la columna D, se incluyen los correspondientes valores de la constante de velocidad, **k**, en unidades¹ de $M^{-1} s^{-1}$ para cada una de las temperaturas estudiadas.

Como hemos explicado en el apartado de *Fundamentos teóricos*, la ecuación de Arrhenius (5.1) se puede linearizar si tomamos logaritmos. El resultado de efectuar el logaritmo neperiano de la expresión (5.1) es la ecuación (5.2), la cual permite calcular A y E_a , a partir de la representación de $\ln k$ frente a $1/T$. Por lo tanto, en nuestro cuadro de valores deberemos calcular la inversa de la temperatura, $1/T$ (columna E) y el logaritmo neperiano de la constante de velocidad, $\ln k$ (columna F). Las formulas implementadas se incluyen en la figura 5.2.



10	T (K)	k ($M^{-1} s^{-1}$)	$1/T$ (x)	$\ln k$ (y)
11	700	0,011	0,00142857	-4,50986001
12	730	0,035	0,00136986	-3,35240722
13	760	0,105	0,00131579	-2,25379493
14	790	0,343	0,00126582	-1,07002483
15	810	0,789	0,00123457	-0,23698896
16	840	2,17	0,00119048	0,77472717
17	910	20,0	0,00109890	2,99573227
18	1000	145	0,00100000	4,97673374

Figura 5.2: Cuadro de valores con las entradas: T (K), k ($M^{-1} s^{-1}$), $1/T$ (K^{-1}) y $\ln k$.

- Tarea 2: graficación

El siguiente paso consistirá en representar $\ln k$ (columna F) frente a $1/T$ (columna E) mediante un gráfico de tipo XY en la variante *Sólo símbolos*. Dentro del menú *Serie de datos*, hemos entrado en la parte *Estadística*, y elegido la opción: *Regresión Lineal*. La hoja de calculo inserta la línea resultado del ajuste por mínimos cuadrados. El resultado de la representación gráfica se muestra en la figura 5.3:

¹ Las unidades de la constante de velocidad dependen del orden global de reacción.

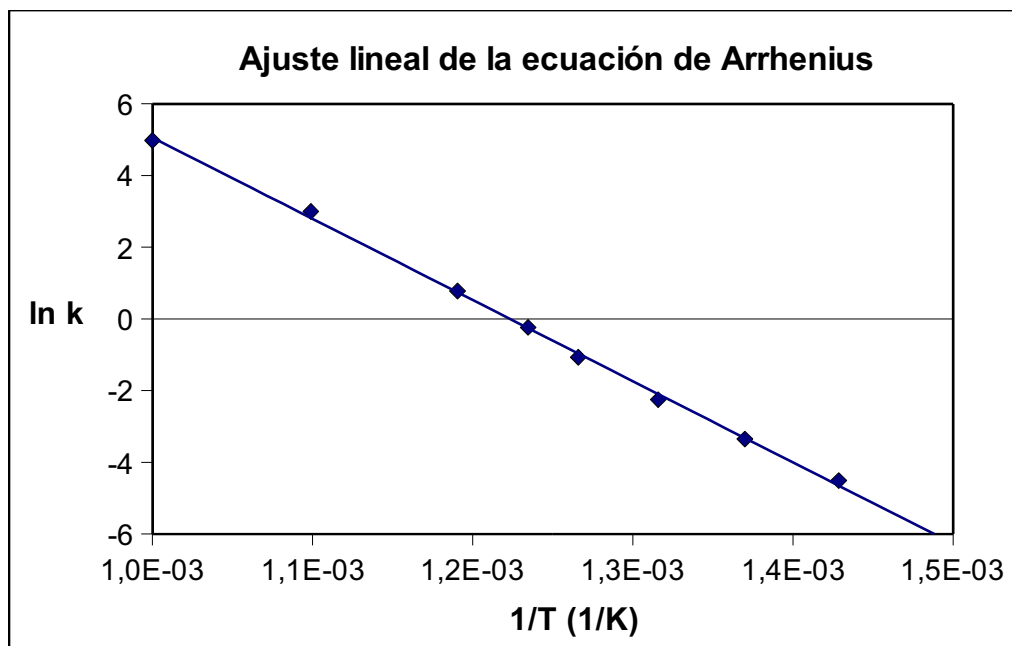


Fig. 5.3: Representación de $\ln k$ frente a $1/T$. Incluye la regresión lineal.

- Tarea 3: determinación de A y E_a

La información referente al ajuste lineal realizado se puede obtener mediante la función ESTIMACIÓN.LINEAL. Como señala el asistente de funciones de la hoja de cálculo, esta función devuelve una matriz con los datos de la recta que mejor se ajustan a los valores de x e y introducidos. En concreto, esta función devuelve: la pendiente (m), el valor del punto de corte con el eje de ordenadas (b), sus respectivas desviaciones (S_m y S_b), el coeficiente de correlación (r^2) y la desviación de la regresión (S_{reg}), junto con otros parámetros, como la F estadística o los grados de libertad, los cuales se escapan de los objetivos del presente libro.

La sintaxis de esta función es la siguiente: ESTIMACIÓN.LINEAL(Datos_y; Datos_x; tipo_lineal; estadística). En nuestro caso, rellenaremos el campo *Datos_y* con las celdas "F11:F18", y el campo *Datos_x* con las celdas "E11:E18". El campo *tipo_lineal* es opcional y de tipo lógico. Permite establecer si se trata de una recta con punto de corte con el eje de ordenadas distinto de 0; es decir, de la forma: $y = b + m x$, donde $b \neq 0$; ó, por el contrario, se trata de una recta del tipo: $y = m x$. Para el primer caso, debemos rellenar el campo con el valor: "verdadero" ó "1". En el segundo caso, escribiremos: "falso" ó "0". Por último, el campo *estadística* determina si queremos obtener toda la información estadística previamente mencionada, para lo cual escribiremos: "verdadero" ó "1"; ó, por el contrario, sólo nos interesa obtener el valor de la pendiente y la ordenada en el origen, para lo cual escribiremos: "falso" ó "0". Este campo también es opcional; es decir, se puede rellenar o no. No obstante, recomendamos cumplimentar todos los campos para evitar cualquier posible error.

Para obtener toda la información de interés acerca de la regresión lineal efectuada, seleccionaremos un área de 3 filas por 2 columnas e implementaremos la función ESTIMACIÓN.LINEAL con la sintaxis: "= ESTIMACIÓN.LINEAL (F11:F18;E11:E18;1;1)", tal y como se indica en la figura 5.4. Como resultado se obtiene una matriz ordenada de datos. La leyenda en el cuadro anexo de la figura 5.4. indica el significado de los valores obtenidos.

=ESTIMACIÓN.LINEAL(F11:F18;E11:E18;1;1)

	E	F
45	-22651	27,71
46	341	0,42
47	0,9986	0,1270

	E	F
45	m	b
46	Sm	Sb
47	r2	Sreg

Fig. 5.4: Cuadro resultado de aplicar la función ESTIMACIÓN.LINEAL a los datos del ajuste lineal. En la parte de la derecha, la leyenda indica la correspondencia de los valores obtenidos.

La ecuación de la recta obtenida es: $\ln k = 27,71 - 22651 / T^2$. El coeficiente de regresión, $r^2 = 0,9986$, refleja que nuestra serie de datos se ajusta a una recta, tal y como observábamos en la gráfica 5.3.

A partir de los valores de la ordenada en el origen y de la pendiente podemos determinar el factor pre-exponencial y la energía de activación, conocido el valor de la constante de los gases ideales, $R = 8,314 \text{ J / (K mol)}$, que definiremos en una celda.

El valor del factor pre-exponencial, A , se calcula como: $A = e^b$, donde b es el valor de la ordenada en el origen. El resultado es: $A = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

El valor de la energía de activación, E_a , se calcula como: $E_a = -m \cdot R$, donde m es el valor de la pendiente y R , la constante de los gases ideales. El resultado es: $E_a = 188318 \text{ J/mol}$. Normalmente, la energía de activación se expresa en KJ/mol o en Kcal/mol . Luego, $E_a = 188,32 \text{ KJ/mol}$.

En el cuadro 5.5 se incluyen las fórmulas implementadas para el cálculo de la energía de activación y el factor pre-exponencial:

	D
50	$R = 8,314$
51	$A = 1,08E+12$
52	$E_a = 188318$

=EXP(b)

=-m*R

Fig. 5.5: Cuadro donde se calcula A y E_a a partir del ajuste lineal realizado y la constante R .

Criterios de Evaluación

- Comprender e interpretar desde el punto de vista químico la ecuación de Arrhenius y los conceptos de factor pre-exponencial y energía de activación.
- Calcular el valor de la constante de velocidad para una temperatura cualquiera a partir de su valor a una temperatura distinta.
- Entender el fundamento del ajuste lineal por mínimos cuadrados y su utilidad práctica para el cálculo de constantes a partir de una serie de datos.
- Establecer la bondad de un ajuste lineal a partir de la representación gráfica y el coeficiente de regresión.

2 En la expresión de la ecuación de la recta no hemos redondeado el valor de la pendiente y del término independiente de acuerdo a sus correspondientes errores, S_m y S_b . En esta práctica, expresaremos los valores de A y E_a con un número de cifras significativas suficiente, pero no evaluaremos el error cometido.

- Obtener el factor pre-exponencial y la energía de activación para una reacción química conocidos distintos valores de la constante de velocidad para diferentes temperaturas.
- Conocer los conceptos fundamentales de la teoría del estado de transición y aplicarlos para interpretar el significado de la constante de velocidad.

Corolario

La teoría del estado de transición constituye una aproximación de tipo termodinámico que intenta evaluar la velocidad de una reacción química. Esta teoría centra su atención en el *complejo activado* o *estado de transición*, que se considera formalmente como una molécula a pesar de su naturaleza mal definida y de su existencia transitoria.

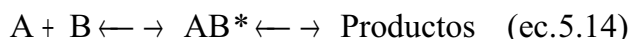
En esta teoría, desarrollada por Eyring, las velocidades de reacción se consideran en términos de un equilibrio termodinámico que se establece entre los reactivos y el complejo activado. La velocidad de reacción, v , se define como el número de moléculas de complejo activado que pasan por la barrera de potencial por unidad de tiempo. Es decir, la velocidad de reacción es el producto de la concentración de moléculas de complejo activado, $[AB^*]$, por la frecuencia de descomposición de estas moléculas, ν (ec. 5.12):

$$v = \nu[AB^*] \quad (\text{ec. 5.12})$$

La velocidad con la que un complejo activado se rompe se puede estimar suponiendo que éste se escindirá en las moléculas de los productos cuando una vibración con una amplitud suficientemente grande ayude a distender el complejo hasta su ruptura. La energía media por grado de libertad de vibración es del orden de la energía térmica, $E_v = \kappa T$, donde κ es constante de Boltzmann, $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Si aplicamos la relación de Planck, $E_v = h \nu$, al modo de vibración que produce la ruptura del complejo, y la igualamos a la energía clásica de vibración, obtenemos la frecuencia de vibración, ν , de acuerdo con la ecuación (5.13):

$$\nu = \frac{\kappa T}{h} \quad (\text{ec. 5.13})$$

Para calcular la concentración de las moléculas de complejo activado se supone que dichas moléculas están en equilibrio con las moléculas de reactivo:



De acuerdo con la expresión (5.14), la constante de equilibrio para el complejo activado será:

$$K^* = \frac{[AB^*]}{[A][B]} \quad (\text{ec.5.15})$$

de donde obtenemos la expresión para la concentración de moléculas de complejo activado:

$$[AB^*] = K^* [A][B] \quad (\text{ec. 5.16})$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.13) y (5.16) en la expresión de la constante de velocidad (ec. 5.12), obtenemos:

$$v = \frac{\kappa T}{h} K^* [A][B] \quad (\text{ec. 5.17})$$

de donde el valor de la constante de velocidad, k , resulta:

$$k = \frac{\kappa T}{h} K^* \quad (\text{ec. 5.18})$$

La ecuación (5.18) permite interpretar la constante de velocidad, k , en términos de la variación de la energía libre de Gibbs entre el complejo activado y los reactivos, ΔG^* , si sustituimos el valor de la constante de equilibrio para el complejo activado, K^* , por la relación (5.19):

$$K^* = e^{\frac{-\Delta G^*}{RT}} \quad (\text{ec. 5.19})$$

Además, la energía libre de Gibbs se puede relacionar con la entalpía y la entropía según la ecuación (5.20):

$$\Delta G^* = \Delta H^* - T \Delta S^* \quad (\text{ec. 5.20})$$

Al sustituir las ecuaciones (5.19) y (5.20) en la ecuación (5.18) obtenemos la expresión para la constante de velocidad, k :

$$k = \frac{\kappa T}{h} e^{\frac{\Delta S^*}{R}} e^{\frac{-\Delta H^*}{RT}} \quad (\text{ec. 5.21})$$

La ecuación (5.21) recuerda a la ecuación de Arrhenius (ec. 5.1) ya que la variación que determina el factor T es pequeña comparada con el factor exponencial. La principal diferencia reside en que el factor exponencial de la expresión (5.21) contiene ahora una entalpía, en lugar de la energía de activación. En los sistemas líquidos, la diferencia es despreciable mientras que, en los sistemas gaseosos, aunque pequeña es necesario calcular la diferencia a partir de la expresión: $RT \Delta n$, donde Δn es la variación en el número de moles gaseosos.

La teoría del estado de transición nos permite interpretar desde un punto de vista químico el significado del factor pre-exponencial, A , de la ecuación de Arrhenius, el cual presenta la forma descrita por la ecuación (5.22):

$$A = \frac{\kappa T}{h} e^{\frac{\Delta S^*}{R}} \quad (\text{ec. 5.22})$$

El cambio de entropía al pasar de las moléculas de reactivos al complejo activado es siempre negativo, ya que el complejo activado posee una configuración menos fortuita y más ordenada que las moléculas de reactivo³. Cuanto mayor sea la disminución en el desorden al formarse el complejo activado, más negativo será el valor de la variación de entropía, ΔS^* y, por tanto, la velocidad de reacción será más pequeña.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: La siguiente reacción química: $2 \text{DI} \rightarrow \text{D}_2 + \text{I}_2$ tiene una constante de velocidad igual a $k = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ l/(mol s)}$ medida a la temperatura de 660 K. Si su energía de activación es $E_a = 177 \text{ KJ/mol}$. Calcula el valor de la constante cinética a la temperatura de 720 K.

Sol. $k = 0,0176 \text{ l/(mol s)}$.

³ Recordemos que la entropía se puede interpretar como una medida del grado de desorden de un sistema.

- Ejercicio 2: Para la reacción en fase gas de hidrogenación del yodo: $\text{H}_2 + \text{I}_2 \rightarrow 2 \text{HI}$ se ha medido la constante de velocidad, k , a distintas temperaturas. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

k (s⁻¹)	0,54 10 ⁻³	2,5 10 ⁻³	14 10 ⁻³	25 10 ⁻³	64 10 ⁻³
T (K)	599	629	665	683	700

Calcula el valor del factor pre-exponencial, A , y de la energía de activación, E_a . Datos: $R = 8,314 \text{ J / (K mol)}$

Sol. $A = 6,5 \cdot 10^{10} \text{ l/(mol s)}$; $E_a = 161,55 \text{ KJ/mol}$.

- Ejercicio 3: Para la reacción: $2 \text{HI} \rightarrow \text{H}_2 + \text{I}_2$, los valores de la constante de velocidad medidos a las temperatura de 629 K y 700 K son: $3,0 \cdot 10^{-5} \text{ l/(mol s)}$ y $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ l/(mol s)}$, respectivamente. Calcula A y E_a .

Sol. $A = 1,87 \cdot 10^{11} \text{ l/(mol s)}$; $E_a = 190,19 \text{ KJ/mol}$.

- Ejercicio 4: Para la reacción de primer orden en fase gas: $\text{N}_2\text{O}_5 \leftrightarrow 2 \text{NO}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2$, las constantes de velocidad en función de la temperatura se indican en la siguiente tabla:

k (s⁻¹)	0,787 10 ⁻⁶	3,46 10 ⁻⁵	13,5 10 ⁻⁵	49,8 10 ⁻⁵	150 10 ⁻⁵	487 10 ⁻⁵
T (K)	273	298	308	318	328	338

calcula A y E_a .

Sol. $A = 3,82 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$; $E_a = 102,84 \text{ KJ/mol}$.

- Ejercicio 5: Calcula la energía de activación para una reacción química que se realiza originalmente a 298 K sabiendo que su constante de velocidad se duplica cuando la temperatura aumenta 10 K. Realiza el mismo cálculo, asumiendo que la constante de velocidad se triplica al aumentar la temperatura en 10 K.

Sol. $E_a = 52,87 \text{ KJ/mol}$; $E_a = 83,79 \text{ KJ/mol}$.

Capítulo VI: Determinación de la cinética de una reacción química

Objetivos

- Comprender el concepto de orden de reacción y la dependencia de la ley de velocidad con la concentración de reactivos.
- Obtener las ecuaciones de velocidad integradas para reacciones químicas descritas por cinéticas de orden: 0, 1 y 2.
- Desarrollar destrezas procedimentales relativas al ajuste lineal de funciones matemáticas por el método de mínimos cuadrados y a la obtención de los parámetros de la recta.
- Determinar la cinética de reacción y la constante de velocidad para una reacción química a partir de los datos de concentración de reactivo frente al tiempo.
- Conocer y utilizar métodos integrales y diferenciales para la determinación del orden de reacción de una cinética química.

Contenidos

Ley de velocidad, ecuación cinética integrada, orden de reacción parcial, orden de reacción global, métodos cinéticos de integración, métodos cinéticos diferenciales, ajuste lineal.

Contextualización

Pedagógica

La práctica se relaciona con los siguientes temas del currículo de Maturita (Anexo I):

Matemáticas

- Tema 8: Las funciones elementales
- Tema 9: Funciones exponenciales y logarítmicas
- Tema 16: Cálculo integral
- Tema 25: Estadística

Química

- Tema 8: Cinética química

Histórico-científica

La cinética química es la disciplina química que nos permite caracterizar la velocidad a la que transcurre un determinado proceso químico. La ley de velocidad describe la rapidez de una reacción química en función de la variación en la concentración de reactivos con el tiempo.

En esta práctica determinaremos el orden de reacción y la constante de velocidad para la reacción de descomposición del amoníaco en una superficie de molibdeno, a partir de los datos de concentración de amoníaco con el tiempo.

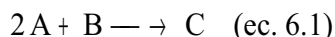
Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión estableceremos cuáles son las ecuaciones integradas correspondientes a las cinéticas de orden: 0, 1 y 2. Diseñaremos la hoja de cálculo generando un cuadro con las entradas relativas al tiempo (t), la concentración de amoníaco ($[\text{NH}_3]$), el logaritmo neperiano de la concentración de amoníaco ($\ln [\text{NH}_3]$) y la inversa de la concentración de amoníaco ($1/[\text{NH}_3]$).
- En la segunda sesión realizaremos las representaciones gráficas correspondientes a las cinéticas de orden: 0, 1 y 2. Mediante la función ESTIMACION.LINEAL obtendremos toda la información de interés sobre las rectas ajustadas. La bondad de los ajustes realizados y el coeficiente de regresión determinarán el orden de reacción. La constante de velocidad se obtendrá a partir del valor de la pendiente de la recta ajustada.

Fundamentos teóricos

La velocidad o rapidez de una reacción química se expresa en términos de la variación de la concentración con el tiempo de uno de los reactivos o productos involucrados en la reacción general. Si tomamos la reacción:



podemos expresar la rapidez de esta reacción por medio de cualquiera de las siguientes derivadas:

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{A}]}{dt} = -\frac{d[\text{B}]}{dt} = \frac{d[\text{C}]}{dt} \quad (\text{ec. 6.2})$$

Para conocer la velocidad de una reacción cuando ésta no es excesivamente rápida o muy lenta, basta provocar experimentalmente el proceso e ir determinando, en intervalos de tiempo constantes, las concentraciones que presenta el reactivo o el producto seleccionados.

La expresión matemática que relaciona la velocidad de una reacción con las concentraciones de los reactivos recibe el nombre de *ecuación de la velocidad* o *ley diferencial de la velocidad*. Con carácter general, la expresión general de la ecuación de la velocidad será:

$$v = k[\text{A}]^\alpha [\text{B}]^\beta \dots \quad (\text{ec. 6.3})$$

donde los exponentes: $\alpha, \beta, \dots$ se definen como los *órdenes parciales* de reacción respecto al reactivo $[\text{A}]$, $[\text{B}]$... Es preciso señalar que, en general, los órdenes parciales de la ley de velocidad pueden ser diferentes de los coeficientes estequiométricos de los reactivos que intervienen en la reacción química ajustada. La suma de los órdenes parciales de todas las especies involucradas en la expresión de la ley de velocidad recibe el nombre de *orden global* de reacción (n), $n = \alpha + \beta + \dots$

La constante k que interviene en la ley de velocidad se denomina *coeficiente de velocidad*, *constante de velocidad* o *factor de las concentraciones de los reactivos*, y depende considerablemente de la temperatura. Su dependencia con la temperatura viene determinada por la ecuación de Arrhenius, que fue estudiada en el capítulo anterior.

Resulta evidente a partir de la ecuación (6.2) que la velocidad de una determinada reacción química es dependiente de las concentraciones de las especies involucradas en la expresión de la constante de velocidad. Puesto que la concentración de reactivo cambia durante el tiempo de reacción, también varía la velocidad de cambio de dicha reacción. La velocidad de reacción sólo es constante durante todo el tiempo de reacción para el caso de una reacción de orden cero. En cambio, la constante cinética, k , es la misma a una determinada temperatura durante todo el tiempo de reacción.

Cuando la ley de velocidad es más compleja de lo indicado por la estequiometría de la reacción, ésta podría expresarse en términos de dos o más reacciones elementales. La totalidad de estas etapas constituye el mecanismo de la reacción. El orden respecto a cada reactivo en las reacciones elementales es un entero, generalmente 1 ó 2, y muy raramente 3. En estas reacciones elementales, los coeficientes estequiométricos de las especies involucradas son siempre iguales al orden de reacción parcial. En este caso, se habla de molecularidad de la etapa determinante de la velocidad.

El concepto de molecularidad es teórico, puesto que se establece para la etapa postulada en un mecanismo de reacción, mientras que el orden de reacción se aplica a la ley experimental de velocidades. A continuación, estudiaremos las cinéticas de reacción más comunes como son las de orden: 0, 1 y 2, describiendo la correspondiente ecuación cinética integrada y algún ejemplo típico que las ilustre.

- *Cinética de orden 0*

Se conocen numerosas reacciones químicas en las que la velocidad de reacción es independiente de la concentración de reactivo. Por ejemplo, las reacciones de descomposición del HI y del NH₃ en superficies de oro y de molibdeno, respectivamente, son ejemplos de cinéticas de orden cero.

La cinética de orden 0 se puede describir mediante la ecuación (6.4)¹:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^0 \quad (\text{ec. 6.4})$$

donde k presenta unidades de concentración por tiempo recíproco (M s⁻¹). Si integramos entre $[A]$ y $[A]_0$, para los tiempos t y $t = 0$, tenemos:

$$\int_{[A]_0}^{[A]} d[A] = -k \int_0^t dt \quad (\text{ec. 6.5})$$

A partir de la ecuación (6.5) obtenemos la ley de velocidad integrada para el caso de una cinética de orden cero (ec. 6.6):

$$[A] = [A]_0 - kt \quad (\text{ec. 6.6})$$

De acuerdo con la expresión (6.6) una representación de $[A]$ respecto a t debe dar una línea de pendiente negativa, $-k$, y cuya ordenada en el origen es $[A]_0$ para todas aquellas reacciones que sigan una cinética de orden 0.

- *Cinética de orden 1*

Para una reacción de primer orden, la velocidad de desaparición del reactivo $[A]$ se escribe según muestra la expresión (6.7):

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A] \quad (\text{ec. 6.7})$$

donde k es independiente de las unidades de concentración y se expresa en unidades de tiempo recíproco (s⁻¹), como se deduce al despejar el valor de k de expresión (6.7).

¹ El lector no debe confundir la concentración de la especie A elevada a la potencia nula, $[A]^0$, con la concentración inicial de A, $[A]_0$.

Si integramos la ecuación (6.8) entre las concentraciones $[A]$ y $[A]_0$, para los tiempos t y $t = 0$:

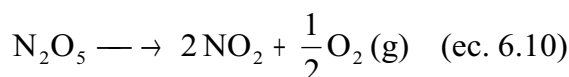
$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]} = -k \int_0^t dt \quad (\text{ec. 6.8})$$

obtenemos la ley general de velocidad para una cinética de primer orden respecto a $[A]$, la cual viene expresada en la ecuación (6.9):

$$\ln[A] = \ln[A]_0 - kt \quad (\text{ec. 6.9})$$

De acuerdo con la expresión (6.9), si representamos gráficamente $\ln[A]$ frente a t , obtendremos una línea de pendiente negativa, $-k$, y cuya ordenada en el origen es $\ln[A]_0$ para todas aquellas reacciones que sigan una cinética de orden 1.

Un ejemplo de reacción de primer orden es la descomposición del pentóxido de nitrógeno, N_2O_5 , en tetracloruro de carbono, CCl_4 , a la temperatura de 30°C . La reacción de descomposición es la siguiente:



Tanto el N_2O_5 como el NO_2 son solubles en CCl_4 y quedan en disolución. En cambio, el O_2 es insoluble y se escapa. El volumen de O_2 formado en la reacción se puede medir en una bureta fija al recipiente de la reacción. Si representamos los datos de $\ln [N_2O_5]$ frente al tiempo, t , obtenemos un ajuste lineal, del cual concluimos que la reacción es de primer orden.

- *Cinética de orden 2*

Para el caso de una cinética de segundo orden, la velocidad de desaparición del reactivo $[A]$ presenta la forma descrita por la expresión (6.11)²:

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2 \quad (\text{ec. 6.11})$$

donde las unidades de k son de tiempo y concentración recíprocos ($M^{-1}s^{-1}$), como se deduce al despejar el valor de k de expresión (6.11).

Al integrar la ecuación (6.11) entre las concentraciones $[A]$ y $[A]_0$, para los tiempos t y $t = 0$:

$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]^2} = -k \int_0^t dt \quad (\text{ec. 6.12})$$

obtenemos la ley general de velocidad para una cinética de segundo orden respecto a $[A]$, la cual viene dada por la expresión (6.13):

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt \quad (\text{ec. 6.13})$$

Tal y como se deduce de la expresión (6.13), si representamos gráficamente $1/[A]$ frente a t ,

² Hemos supuesto que la reacción es de orden global 2 respecto a $[A]$. Otra alternativa sería que los órdenes parciales respecto a los reactivos A y B fueran 1 en ambos casos. Para el caso en que las concentraciones iniciales, $[A]_0$ y $[B]_0$, sean las mismas, el problema es idéntico al mostrado. La integración es un poco más complicada cuando $[A]_0 \neq [B]_0$.

obtendremos una línea de pendiente positiva, $+k$, y cuya ordenada en el origen es $1/[A]_0$ para todas aquellas reacciones que sigan una cinética de orden 2.

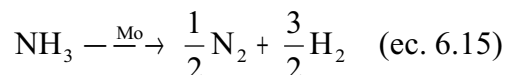
Un ejemplo típico de reacción de segundo orden es la hidrólisis de un éster con una base fuerte para originar un alcohol y la correspondiente sal de ácido orgánico. Por ejemplo, el acetato de etilo ($\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3$) en presencia de sosa (NaOH) produce acetato de sodio (CH_3COONa) y alcohol etílico ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$), según la expresión (6.14):



La reacción de hidrólisis descrita es de primer orden parcial respecto al acetato de etilo y la sosa. Es decir, $v = k [\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3] [\text{NaOH}]$.

Metodología

Al estudiar la reacción de descomposición del amoníaco (NH_3) en una superficie de molibdeno (ec. 6.15):



se obtuvieron los valores para la concentración de amoníaco, $[\text{NH}_3]$ (moles/L), en función del tiempo, t (s), que se recogen en el cuadro 6.1:

$[\text{NH}_3] \text{ (M)}$	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$4,12 \cdot 10^{-3}$	$2,82 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$
$t \text{ (s)}$	35	275	515	755	995

Fig. 6.1: Valores para la concentración de amoníaco, $[\text{NH}_3]$ (M), en función del tiempo, t (s).

El objetivo de esta práctica consiste en determinar el orden de reacción de la descomposición del amoníaco, a partir de los resultados experimentales del cuadro 6.1. Para ello, comprobaremos el acuerdo entre los datos experimentales y las cinéticas de orden: 0, 1 y 2.

- Tarea 1: creación del cuadro de valores

En primer lugar, implementaremos los datos de nuestro problema. Tal y como se observa en el cuadro 6.2, en la columna C hemos introducido los valores del tiempo, t , en segundos. En la columna D, se incluyen los correspondientes datos para la concentración de amoníaco, $[\text{NH}_3]$, en unidades de moles/L para cada una de los tiempos estudiados.

Nuestro objetivo es estudiar tres tipos distintos de cinéticas: la de orden 0, 1 y 2. Para ello, como hemos explicado en el apartado de *Fundamentos teóricos*, debemos comprobar el grado de ajuste a una recta de las leyes cinéticas correspondientes a los tres órdenes de reacción evaluados. En el cuadro (6.16) recordamos las ecuaciones de velocidad integradas para los órdenes de reacción: 0, 1 y 2.

$$\text{Orden 0: } [\text{NH}_3] = [\text{NH}_3]_0 - kt$$

$$\text{Orden 1: } \ln[\text{NH}_3] = \ln[\text{NH}_3]_0 - kt$$

$$\text{Orden 2: } \frac{1}{[\text{NH}_3]} = \frac{1}{[\text{NH}_3]_0} + kt \quad (\text{ec. 6.16})$$

Las representaciones gráficas que deberemos realizar para determinar el orden de reacción son las siguientes:

- Orden 0: Representación de $[NH_3]$ (M) frente a t (s).
- Orden 1: Representación de $\ln[NH_3]$ frente a t (s).
- Orden 2: Representación de $1/[NH_3]$ (M^{-1}) frente a t (s).

Por lo tanto, en el cuadro de valores deberemos introducir dos nuevas entradas. En la columna E se calcula el logaritmo neperiano de la concentración de amoníaco, $\ln[NH_3]$, mientras que en la columna F calcularemos la inversa de la concentración de amoníaco, $1/[NH_3]$ (M^{-1}), tal y como se indica en la figura 6.2.

	C	D	E	F
16	t (s)	$[NH_3]$ (mol/L)	$\ln [NH_3]$	$1/[NH_3]$ (L/mol)
17	35	0,00514	-5,2707	194,55
18	275	0,00412	-5,4919	242,72
19	515	0,00282	-5,8710	354,61
20	755	0,00158	-6,4503	632,91
21	995	0,00050	-7,6009	2000,00

Figura 6.2: Cuadro de valores con las entradas: t (s), $[NH_3]$ (M), $\ln [NH_3]$ y $1/[NH_3]$ (M^{-1}).

- Tarea 2: graficación

El siguiente paso consistirá en representar la ecuación lineal para los distintos órdenes de reacción que se muestran en la expresión (6.16). Como ejemplo, consideraremos una cinética de orden 0, para la cual debemos representar $[NH_3]$ (columna D) frente a t (columna C). Para esta representación utilizaremos un gráfico de tipo XY en la variante *Sólo símbolos*. Dentro del menú *Serie de datos* seleccionaremos la opción *Regresión Lineal* en la sección de *Estadística*, tal y como explicamos en la práctica anterior. El resultado de la representación gráfica se muestra en la figura 6.3:

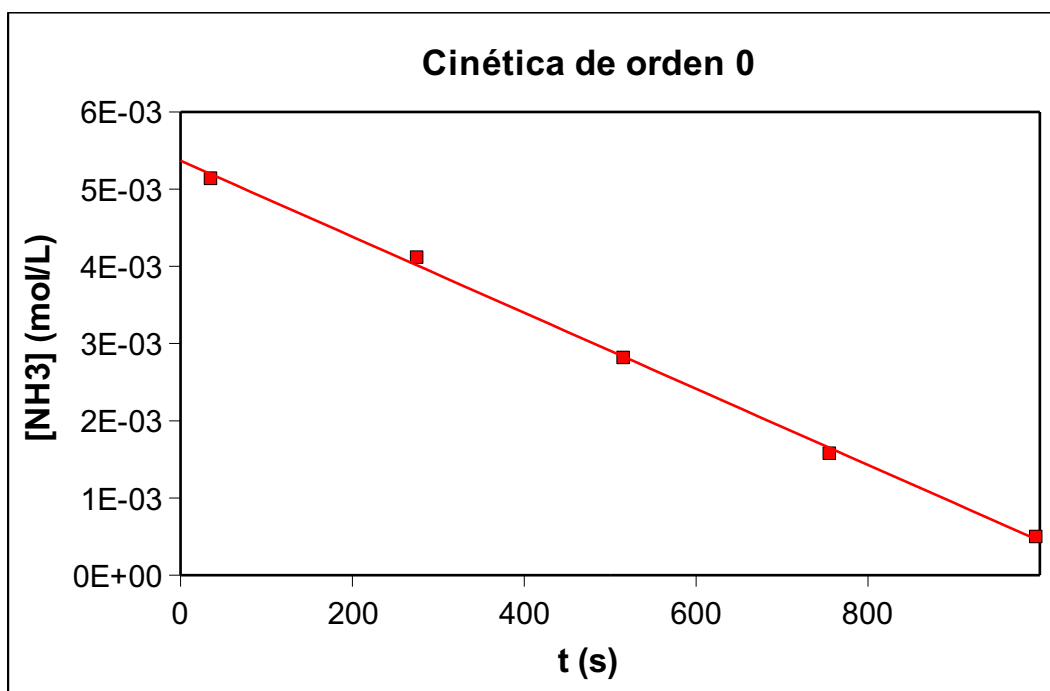


Fig. 6.3: Representación de la concentración de amoníaco $[\text{NH}_3]$ (moles/L) frente al tiempo t (s). La gráfica incluye la regresión lineal efectuada.

- Tarea 3: determinación del orden de reacción y la constante cinética, k .

Como explicamos en la práctica anterior, la información referente al ajuste lineal realizado se puede obtener mediante la función ESTIMACIÓN.LINEAL.

Para obtener la información de interés acerca de la regresión lineal efectuada, seleccionamos un área de 3 filas por 2 columnas e implementamos la función ESTIMACIÓN.LINEAL con la sintaxis: “=ESTIMACIÓN.LINEAL(D17:D21;C17:C21;1;1)”, tal y como se indica en la figura 6.4. Como resultado se obtiene una matriz ordenada de datos. La leyenda en el cuadro anexo de la figura 6.4 indica el significado de los valores obtenidos.

=ESTIMACIÓN.LINEAL(D17:D21;C17:C21;1;1)

	E	F
47	-4,93E-06	5,37E-03
48	1,09E-07	6,71E-05
49	0,9985	8,25E-05

	E	F
47	m	b
48	Sm	Sb
49	r2	Sreg

Fig. 6.4: Cuadro resultado de aplicar la función ESTIMACIÓN.LINEAL a los datos del ajuste lineal. En la parte de la derecha, la leyenda indica la correspondencia de los valores obtenidos.

La ecuación de la recta obtenida es: $[\text{NH}_3] = 5,37 \cdot 10^{-3} - 4,93 \cdot 10^{-6} t$. El coeficiente de regresión, $r^2 = 0,9985$, refleja que nuestra serie de datos se ajusta a una recta, tal y como observábamos en la gráfica 6.3.

Análogamente, procederemos para las cinéticas de orden 1 y 2. A partir de las representaciones gráficas correspondientes y de los valores del coeficiente de regresión para las cinéticas de orden 1 y 2 ($r^2 = 0,9076$ y $r^2 = 0,7035$, respectivamente) se concluye que la cinética de descomposición del amoníaco es de orden 0. El valor de la constante de velocidad, k , es el opuesto

de la pendiente. Es decir, $k = 4,93 \cdot 10^{-6} \text{ M/s}$.

Criterios de Evaluación

- Comprender y emplear los conceptos cinéticos básicos relativos a la ecuación de velocidad y el orden de reacción.
- Obtener las ecuaciones cinéticas integradas correspondientes a los órdenes de reacción: 0, 1 y 2.
- Emplear el ajuste lineal por mínimos cuadrados para determinar la cinética de una reacción química y su constante de velocidad.
- Aplicar métodos cinéticos de integración y diferenciales para establecer el orden de reacción.

Corolario

Los métodos cinéticos para determinar el orden de reacción se clasifican en dos tipos fundamentalmente: *métodos de integración* y *métodos diferenciales*.

Los *métodos de integración* son los que hemos empleado en esta práctica. La filosofía de estos métodos consiste en asumir *a priori* el orden de reacción respecto a una determinada especie química. Esta técnica emplea la ecuación cinética integrada correspondiente al orden de reacción que hemos asumido previamente (por ejemplo, 0). A partir de la representación gráfica de los datos experimentales de concentración y tiempo, tratados convenientemente para adaptarse a la forma de ecuación de velocidad linealizada, se establece si la reacción sigue o no la cinética inicialmente propuesta. De igual forma se procede para el resto de órdenes de reacción: 1, 2, 3...

Aquella representación que mejor se adapte a la ecuación de una recta determinará el orden de reacción. A partir del valor de la pendiente de la recta ajustada se obtendrá la constante de velocidad de la reacción química.

Los *métodos diferenciales* emplean las ecuaciones diferenciales y son útiles en el caso de reacciones con ecuaciones de velocidad complejas (difíciles de integrar). El método más común es el de las velocidades iniciales.

Consideremos la siguiente reacción química general:



la ecuación de velocidad podrá escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^{\alpha}(b-x)^{\beta}(c-x)^{\gamma} \quad (\text{ec. 6.18})$$

donde a , b y c son las concentraciones iniciales de los reactivos A, B y C, mientras que x mide la concentración de producto producido en el tiempo t . Si consideramos que en el momento de iniciarse la reacción la cantidad de producto producido es despreciable, la ecuación (6.18) se simplifica:

$$\frac{dx}{dt} = k a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \quad (\text{ec. 6.19})$$

El siguiente paso consistirá en realizar una serie de experiencias en las cuales se mantengan constantes las concentraciones b y c (mediante algún método químico o asumiendo que están en

gran exceso respecto a la concentración a) y sólo varíe la concentración a . Si b y c son constantes se pueden incluir en la expresión de la constante de velocidad, que ahora designaremos como k_1 . Tomando logaritmos en la expresión (6.19) resulta:

$$\log\left(\frac{dx}{dt}\right) = \log k_1 + \alpha \log a \quad (\text{ec. 6.20})$$

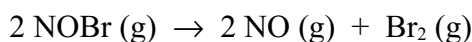
donde $k_1 = k b^\beta c^\gamma$.

Si representamos el logaritmo de la velocidad de reacción inicial, $\log(dx/dt)$, medida a partir de la aparición de una pequeña cantidad de producto frente al logaritmo de la concentración inicial de la especie A, $\log(a)$, obtendremos una recta con ordenada en el origen igual a $\log(k_1)$ y pendiente de valor igual a α , que es el orden de reacción parcial respecto a la especie A.

Una vez determinado α se procede de manera similar, manteniendo constantes las concentraciones de las especies A y C, para determinar β . Finalmente, se determina el orden de reacción respecto a C, γ , manteniendo constante los valores de a y b . El orden de reacción total, n , será la suma de los órdenes de reacción parciales, $n = \alpha + \beta + \gamma$.

Propuesta de trabajos

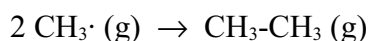
- Ejercicio 1: Para la siguiente reacción química:



la velocidad con que varía la cantidad de NO es de $1,6 \cdot 10^{-4}$ moles/s. Si el reactor donde se realizó la reacción es un recipiente cerrado con una capacidad de 1 dm^3 , determina: a) la velocidad de reacción; b) la velocidad de variación de la concentración de NOBr.

Sol. a) $v = 8 \cdot 10^{-5} \text{ M/s}$; b) $d[\text{NOBr}]/dt = -1,6 \cdot 10^{-4} \text{ M/s}$.

- Ejercicio 2: En un recipiente cerrado de 5 dm^3 de capacidad, la velocidad con que varía la concentración de radicales $\text{CH}_3\cdot$ según la reacción:



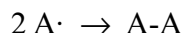
es de $-1,2$ moles/s. Calcula a) la velocidad de reacción; b) la velocidad de variación de la concentración de $\text{CH}_3\text{-CH}_3$ con el tiempo.

Sol. a) $v = 0,12 \text{ M/s}$; b) $d[\text{CH}_3\text{-CH}_3]/dt = 0,12 \text{ M/s}$.

- Ejercicio 3: La reacción en fase gas: $2 \text{NO}_2 + \text{O}_3 \rightarrow \text{N}_2\text{O}_5 + \text{O}_2$ tiene una constante cinética cuyo valor es $k = 2,0 \cdot 10^4 \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$ medida a la temperatura de 300 K . ¿Cuál es el orden de reacción?

Sol. Orden de reacción = 2.

- Ejercicio 4: Un cierto óxido de nitrilo (A) se dimeriza en una disolución de etanol a la temperatura de 40° C, según la reacción química:



A partir de los datos de concentración de A, $[A]$, frente al tiempo, t , obtenidos experimentalmente, determina el orden de reacción mediante el método de integración:

k (mmol/dm³)	68,0	50,2	40,3	33,1	28,4	22,3	18,7	14,5
t (min)	0	40	80	120	160	240	300	420

Sol. Cinética de orden 2.

- Ejercicio 5: Los siguientes datos pertenecen a una hipotética reacción que, en los instantes iniciales de reacción, sigue la ley de velocidad $v = k [A]_0^\alpha [B]_0^\beta [C]_0^\gamma$. Calcula: a) los órdenes parciales de reacción; b) el orden global, a partir de los valores de las concentraciones iniciales de reactivos: $[A]_0$, $[B]_0$, $[C]_0$ y de la variación de la concentración de la especie A en los primeros 0,01 segundos: $d[A]$.

Experimento	$[A]_0$	$[B]_0$	$[C]_0$	$d[A]$
1	0,1	0,1	0,1	-0,011
2	0,2	0,1	0,1	-0,015
3	0,1	0,2	0,1	-0,023
4	0,1	0,1	0,2	-0,021

Sol. a) $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; b) $n = 2,5$.

- Ejercicio 6: Para la reacción en fase gas: $2 N_2O_5 \rightarrow 4 NO_2 + O_2$ la constante de velocidad, k , medida a la temperatura de 25° C tiene un valor igual a $k = 1,73 \cdot 10^{-5} s^{-1}$. Si la ecuación cinética para esta reacción es: $v = k [N_2O_5]$, determina: a) la velocidad de reacción, sabiendo que la presión de N_2O_5 a la temperatura de 25° C es de 0,1 atm y que la reacción tiene lugar en un recipiente de 12 dm³ de capacidad; b) la variación de la concentración de N_2O_5 con el tiempo; c) el número de moléculas de N_2O_5 que se descomponen en un segundo en las condiciones anteriores; d) los valores de la velocidad y la constante de velocidad si la reacción de descomposición que tuviera lugar fuera: $N_2O_5 \rightarrow 2 NO_2 + 1/2 O_2$.

Sol. a) $v = 7,08 \cdot 10^{-8} M/s$; b) $d[N_2O_5]/dt = -1,416 \cdot 10^{-7} M/s$; c) $n^o = 1,023 \cdot 10^{18}$ moléculas/s; d) $v' = 1,416 \cdot 10^{-7} M/s$; $k' = 3,46 \cdot 10^{-5} s^{-1}$.

- Ejercicio 7: Para la reacción: $2 \text{O}_3 \rightarrow 3 \text{O}_2$, la velocidad de producción de oxígeno, O_2 , medida a la temperatura de 373 K es de $1,32 \cdot 10^{-3} \text{ M/s}$ cuando la concentración de ozono, O_3 , es 0,1 M. Calcula la constante de velocidad si la ley de velocidad es: $v = k [\text{O}_3]^2$.

Sol. $k = 0,044 \text{ M}^1\text{s}^{-1}$.

- Ejercicio 8: Supón que la velocidad de una reacción se cuadruplica cuando la concentración de uno de los reactivos, A, se duplica, manteniendo constante la concentración del resto de reactivos. Determina el orden parcial respecto a la especie A.

Sol. $n = 2$.

Introducción a la parte de Física

Las prácticas de Física parten de la propuesta de currículo para el examen eslovaco de Maturita que adjuntamos en el Anexo I, que a su vez es un compendio de las programaciones de bachillerato de segundo a quinto curso bilingüe. Cubrir todo el currículo supone una tarea más ambiciosa que la planteada en esta obra, por lo que nos hemos visto forzados a centrarnos en una parte del mismo. Los criterios de selección de materias han sido: buscar temas desarrollados habitualmente en todas las secciones bilingües, que supongan un planteamiento atractivo de cuestiones clásicas y que toquen a cada uno de los cursos del programa. El orden de las prácticas responde a la dificultad de conceptos de hoja de cálculo y no al orden curricular del anexo.

Así, en el capítulo VII, *Caída libre en el sistema solar*, proponemos la cinemática unidimensional, movimientos rectilíneos uniforme y uniformemente acelerado, en el contexto astronómico. La materia se trabaja en el primer año de física (segundo curso) y supone a la vez una introducción al manejo de la hoja de cálculo.

Con *Dilatación térmica*, capítulo VIII, pasamos al estudio de las propiedades del estado sólido y de los procesos de transferencia de calor, que habitualmente se imparte en tercer curso. La dificultad en la hoja cálculo es similar a la de la práctica anterior, mientras que los conceptos físicos y matemáticos permiten su eventual introducción en el segundo año bilingüe.

El capítulo IX, *Circuitos de corriente alterna*, posee un nivel matemático que obliga a trabajarlo en tercer o cuarto curso. A la vez, nos dará un buen ejemplo de la potencia y la utilidad de la hoja de cálculo, en casos en los que lo interesante es la visualización completa de las funciones de intensidad y voltaje, para los que se precisan un elevado número de operaciones, más que la determinación de valores de estas funciones en instantes concretos de tiempo (que son los ejercicios típicos de examen de la materia).

Con la práctica siguiente, capítulo X, *Superposición de ondas*, esperamos motivar a los alumnos a través de un problema a la vez tecnológico y físico, el de la transmisión de señales telemáticas. Éste se trabajará en cuarto o quinto curso.

En *Rebotes*, capítulo XI, regresamos a temas del inicio del currículo, *cinemática, dinámica, trabajo y energía*, con un nivel tanto matemático como de operaciones en hoja de cálculo notablemente superior. Nuestra idea es acercar al alumno a un problema de simulación numérica, añadiendo progresivamente condiciones que lo hagan más y más aplicable. De esta manera, el tema puede introducirse como ampliación en el currículo de segundo curso (cinemática en dos dimensiones) o como un buen repaso de cara a la prueba de Maturita en último año.

Por último, hemos querido dar una idea de las posibilidades de la hoja cálculo que tienen que ver con la construcción de formularios, añadiendo controles dinámicos en el capítulo XII, *Osciladores Armónicos*. Éstos permitirán al alumno seguir paso a paso el movimiento de un oscilador. La práctica puede plantearse como tema avanzado para cuarto o quinto, o bien como sesión ilustrativa (con la hoja de cálculo ya realizada por el profesor) en el tema de osciladores.

Al final de cada tema hemos incluido una propuesta de ejercicios variada en nivel. Existe el peligro de que para algunos alumnos las sesiones en el aula informática consistan en *copiar fórmulas* sin trabajar la creatividad y el razonamiento. Por ello los ejercicios evaluadores, al igual que en las clases tradicionales, son el test definitivo para corroborar el aprovechamiento de las sesiones.

Capítulo VII: Caída libre en el Sistema Solar

Objetivos

- Manejar las ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (caída libre)
- Aplicar las propiedades de las funciones cuadráticas y afines a la resolución de problemas de cinemática
- Comprender el concepto de aceleración de la gravedad en superficie, y utilizarlo para comparar los efectos de este fenómeno físico en distintos cuerpos del Sistema Solar
- Representar funciones cuadráticas y afines en la hoja de cálculo
- Resolver ecuaciones de segundo grado en la hoja de cálculo
- Modificar las características de un gráfico
- Modificar los formatos de celdas

Contenidos

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado, Constante de Gravitación, Gravitación Universal, Ecuaciones de Segundo Grado, Funciones Cuadráticas, Raíces de la ecuación de segundo grado

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas de segundo de bachillerato:

Matemáticas

- Tema 5: Ecuaciones lineales y cuadráticas
- Tema 8: Las funciones elementales

Física

- Tema 2: Cinemática
- Tema 3: Dinámica
- Tema 5: Campo gravitatorio

Ofrecemos dos opciones para abordar la práctica:

- En el segundo semestre, después de que se hayan trabajado todos estos temas: tres sesiones seguidas.
- Repartida a lo largo de todo el curso: una sesión en el primer trimestre para calcular las gráficas $t-h$ y $t-v$ de la caída libre en la Tierra; la siguiente, unas semanas más tarde, cuando se hubiera trabajado en matemáticas la ecuación de segundo grado, para determinar los tiempos de retorno y las alturas máximas; y la tercera hacia el final del curso para repetir los cálculos en otros objetos del Sistema Solar, una vez que se hubiese estudiado campo gravitatorio.

Histórico-científica

Galileo Galilei (1564-1642) estableció las fórmulas correctas para la caída de los cuerpos en la Tierra en alturas relativamente pequeñas. Isaac Newton (1642 – 1727) refrendó estas fórmulas en base a sus principios de la dinámica y ley gravitatoria. Según esta última, la fuerza de atracción a la que un cuerpo se ve sometido en un planeta o satélite es:

$$\vec{F} = G \frac{M m}{r^2} \vec{u} \quad (\text{ec. 7.1})$$

donde M y m son las masas del planeta y del objeto en kilogramos, r es la distancia en metros entre los centros de ambos cuerpos y $\vec{u}$ es el vector unitario de dirección la de la línea que une los centros y sentido dirigido al centro del planeta.

$G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ es la constante de gravitación universal, cuyo valor fue determinado por primera vez en el famoso experimento de Henry Cavendish para *pesar la Tierra*.

Si combinamos la ley de gravitación universal con el principio fundamental de la dinámica, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, podemos despejar el valor de la aceleración que sufre el objeto, cuyo módulo usualmente se denota con la letra g :

$$g = \frac{G M}{R^2} \quad (\text{ec. 7.2})$$

Observamos que este valor es, como demostró Galileo lanzando bolas desde la Torre de Pisa¹, independiente de la masa del objeto que cae. Aquí R indica el radio del planeta. La fórmula es válida en el caso en que la altura a la que se encuentra el cuerpo es muy pequeña comparada con las dimensiones del astro ($R \approx r$).

Si mejoramos el análisis precedente para alturas cualesquiera, con herramientas del cálculo diferencial, se demuestra que el valor de la aceleración² es igual a:

$$g(h) \approx \begin{cases} g_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} \right) & h > 0 \\ g_{\max} & h = 0 \\ g_{\max} \cdot \left(1 + \frac{2h}{R} \right) & h < 0 \end{cases} \quad (\text{ec. 7.3})$$

Aquí h es la altura en metros y $g_{\max}$ es el valor máximo de la aceleración, que se alcanza justamente sobre la superficie. En el caso de la Tierra, este valor, medido a nivel del mar³ es:

$$g_{\max} \approx 9,80665 \text{ m/s}^2 \quad (\text{ec. 7.4})$$

En el Anexo 7.I hemos incluido los valores de $g_{\max}$ para otros cuerpos del Sistema Solar, con los que realizaremos la práctica.

¹ Al parecer esta anécdota es sólo una leyenda.

² La fórmula nos dice que la gravedad varía aproximadamente con el cuadrado de la altura cuando ésta es positiva y es lineal respecto a la profundidad alcanzada.

³ El valor de $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ es también el valor exacto de esta magnitud en la ciudad alemana de Darmstadt

El experimento que tratamos de modelar numéricamente es el del lanzamiento vertical de un objeto en la superficie de un astro. Para justificar la validez de nuestro modelo, asumiremos las siguientes restricciones:

- No se tiene en cuenta el rozamiento de la atmósfera
- No se tiene en cuenta la reducción de la aceleración como consecuencia de la fuerza centrífuga. Relacionado con esto, consideramos equivalentes todas las latitudes.
- Las alturas manejadas serán *pequeñas*, es decir, la velocidad inicial de lanzamiento será lo suficientemente pequeña como para que pueda suponerse que la aceleración gravitatoria es constante e igual a g_{max}
- No estudiamos el caso en el que el cuerpo *se introduce* en el planeta. Este sería el caso de los grandes gigantes gaseosos como Júpiter o Neptuno, donde habría que modificar el valor de la aceleración según el modelo lineal antes expuesto. (En rigor, en todos los casos la atmósfera del planeta queda por encima del lanzamiento)
- No se tienen en cuenta, especialmente en el caso solar, los efectos de la radiación y la temperatura.
- Por último, las microvariaciones gravitatorias debidas a diferencias de densidad en la composición planetaria tampoco se consideran.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en tres sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión repasaremos los conceptos teóricos de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) y caída libre. Realizaremos las tablas de datos para alturas y las gráficas t-h, comparando los valores obtenidos en los distintos astros.
- En la segunda, ampliaremos lo visto a las tablas y gráficas para la velocidad, y se atenderán aspectos de la representación gráfica y el formato.
- En la tercera realizaremos una propuesta de actividades y evaluaremos la práctica.

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Las ecuaciones del MRUA son:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \end{cases} \quad (\text{ec. 7.5})$$

donde s y s_0 denotan las posiciones instantánea e inicial, v y v_0 las velocidades instantánea e inicial, a la aceleración (constante), y t el tiempo.

El movimiento en *caída libre* es el caso particular en que la aceleración a corresponde a la generada por el campo gravitatorio, usualmente denotada por g .

Normalmente se toma el sentido positivo de la altura como el ascendente. En este caso la aceleración gravitatoria es negativa (ya que va en sentido contrario). Teniendo en cuenta tal detalle,

las ecuaciones de la caída libre quedan como:

$$\left\{ \begin{array}{l} h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v = v_0 - g \cdot t \end{array} \right\} \quad (\text{ec. 7.6})$$

Al ir variando el tiempo, las ecuaciones anteriores pueden verse como *funciones* de variable independiente t : función altura, $h(t)$, y función velocidad, $v(t)$. La altura es por tanto una *función cuadrática* y la velocidad una *función afín*.

Inversamente se puede plantear el siguiente problema: determinar el tiempo t en que se alcanza una altura h determinada. En este caso se trata de resolver la ecuación de segundo grado, en la incógnita t :

$$h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (\text{ec. 7.7})$$

Aplicando la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, obtenemos:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2g(h - h_0)}}{g} \quad (\text{ec. 7.8})$$

Obsérvese que hay dos soluciones. Estas corresponderán a los dos instantes en los que el objeto, en su movimiento ascendente y descendente pasa por una altura determinada. Por ejemplo, si la altura inicial es nula, y queremos hallar el *tiempo de retorno* en el que el cuerpo vuelve al suelo, entonces⁴:

$$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2g(0 - 0)}}{g} = \frac{2v_0}{g} \quad (\text{ec. 7.9})$$

Un último problema: *¿cuál es la altura máxima alcanzada por el cuerpo?* Remitiéndonos a las propiedades de las funciones cuadráticas, éstas alcanzan su extremo en el valor de la abscisa

$x = \frac{-b}{2a}$ (en el caso de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$). En general:

$$y_{\max} = f(-b/2a) = \frac{-b^2}{4a} + c \quad (\text{ec. 7.10})$$

En el caso que nos ocupa:

$$h_{\max} = \frac{-v_0^2}{4 \cdot (-1/2g)} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0 \quad (\text{ec. 7.11})$$

Otra forma de razonar esto: cuando la altura inicial es nula, hemos visto que el tiempo de subida y bajada del cuerpo es $2v_0/g$. Por simetría del movimiento, la altura máxima se alcanzará en la mitad de este tiempo, v_0/g , y para este instante el valor de h es justamente $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$, el obtenido antes.

⁴ Sólo se toma la solución correspondiente al signo +, ya que la otra corresponde al instante inicial.

Por último, el método más clásico para justificar esta fórmula consiste en percatarse de que cuando el móvil alcanza la posición más alta, su velocidad se hace nula. Así que haciendo $v=0$ en (ec. 7.6), obtenemos $t=v_0/g$, valor del tiempo que sustituido de nuevo en (ec. 7.6) nos da el resultado de (ec. 7.11).

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

- Primera parte: gráficas t-h
- Tarea 1: Introducción de los datos iniciales y constantes

Incluimos aquí las constantes de la ecuación del movimiento, así como el primer instante de tiempo para el que efectuaremos los cálculos y el incremento de tiempo que asumiremos para cálculos posteriores. Es importante que el alumno escriba siempre las unidades de las diferentes magnitudes, aunque estas sean prescindibles en la construcción de la hoja de cálculo.

Datos iniciales

Altura inicial (h0)	0 m
Velocidad inicial (v0)	20 m/s
Primer instante representado	0 s
Incremento de tiempo	0,5 s

Fig. 7.1- Datos iniciales

- Tarea 2: Discretización de la ecuación del movimiento

En primer lugar construimos los tiempos de cálculo, utilizando los dos últimos datos de la tabla anterior. Seguimos con la implementación de la ecuación de la altura, y por último modificamos los formatos de celdas para que se representen en rojo los términos negativos. El significado de las celdas que se detallan a continuación queda explícito en la Figura 7.4.

Discretización de la ecuación del movimiento ($h=h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$)						
Tiempo (en segundos)	Sol	Júpiter	Neptuno	Saturno	Urano	
0	0	0	0	0	0	0
0,5	-24	7	9	9	9	
1	-7	8	14	15	16	
1,5	-	2	18	18	20	
2	-5	-10	18	19	22	
2,5	-8	-28	15	17	22	
3	-11	-52	10	13	20	
3,5	-16	82	2	6	16	
4	-212	8	-9	-4	9	
4,5	-269		-22	-16	0	

$=B\$4$

$=B\$4+A21$

$=B\$2+B\$3*A21-0,5*B\$8*A21^2$

Fig. 7.2- Implementación de la función espacio

- Tarea 3: Elaboración del gráfico

Comenzamos seleccionando las celdas correspondientes a los astros y a los valores numéricos debajo de ellos. A continuación pulsamos el botón *Gráfico*⁵ y efectuamos las siguientes operaciones: 1) Tipo de gráfico, *Línea* >> *Sólo línea* ; 2) Rango de datos, el que tenemos seleccionado, marcando además la casilla *Primera fila como etiqueta* ; 3) Series de datos, en el apartado de *Categorías*, seleccionamos los valores de la columna de tiempos; 4) Elementos del gráfico, escribimos el *Título*, el nombre de los *Ejes X e Y*, y marcamos las casillas *Mostrar cuadrículas* >> *Eje X*, *Eje Y*; 5) Colocación del gráfico y redimensionamiento; 6) Escala del eje Y, hacemos doble clic en el gráfico y marcamos con el ratón el eje de ordenadas, para a continuación seleccionar *Botón derecho* >> *Propiedades del Objeto* >> *Escala* >> *Mínimo*, deseleccionamos la casilla *Automático* y escribimos 0; 7) Resaltado de la gráfica terrestre, marcamos con el ratón la línea de la Tierra, y acto seguido *Botón derecho* >> *Propiedades del Objeto* >> *Línea* >> *Ancho*, escribimos 0,04". El resultado se observa en la Figura 7.3.

Es conveniente que todos los elementos creados se sitúen en la hoja de manera que el alumno pueda visualizarlos simultáneamente. Así podrá ver cómo los cambios en los datos iniciales generan automáticamente nuevas gráficas. Esto facilitará la realización de los ejercicios de clase.

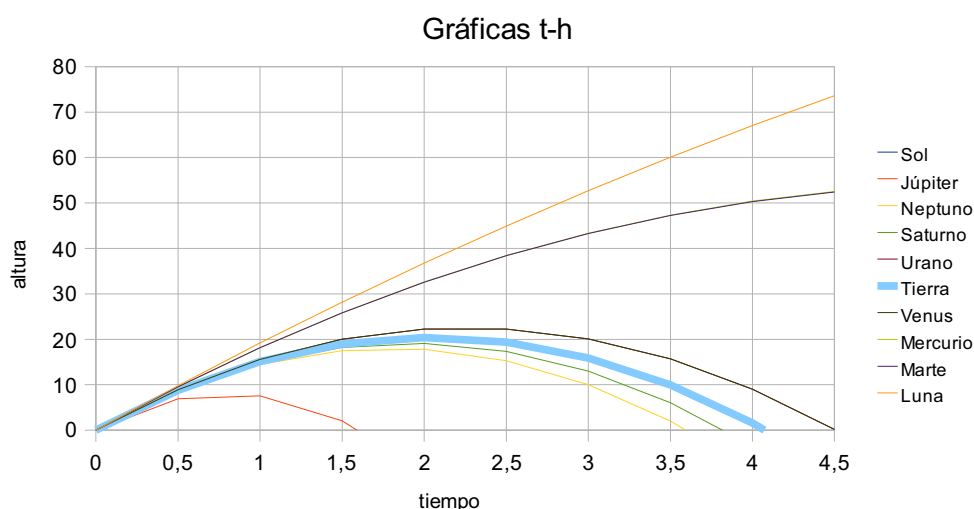


Fig. 7.3: Gráficas t - h de cada astro

La hoja de cálculo quedaría de la siguiente forma:

⁵ También en *Menú Insertar* >> *Gráfico*

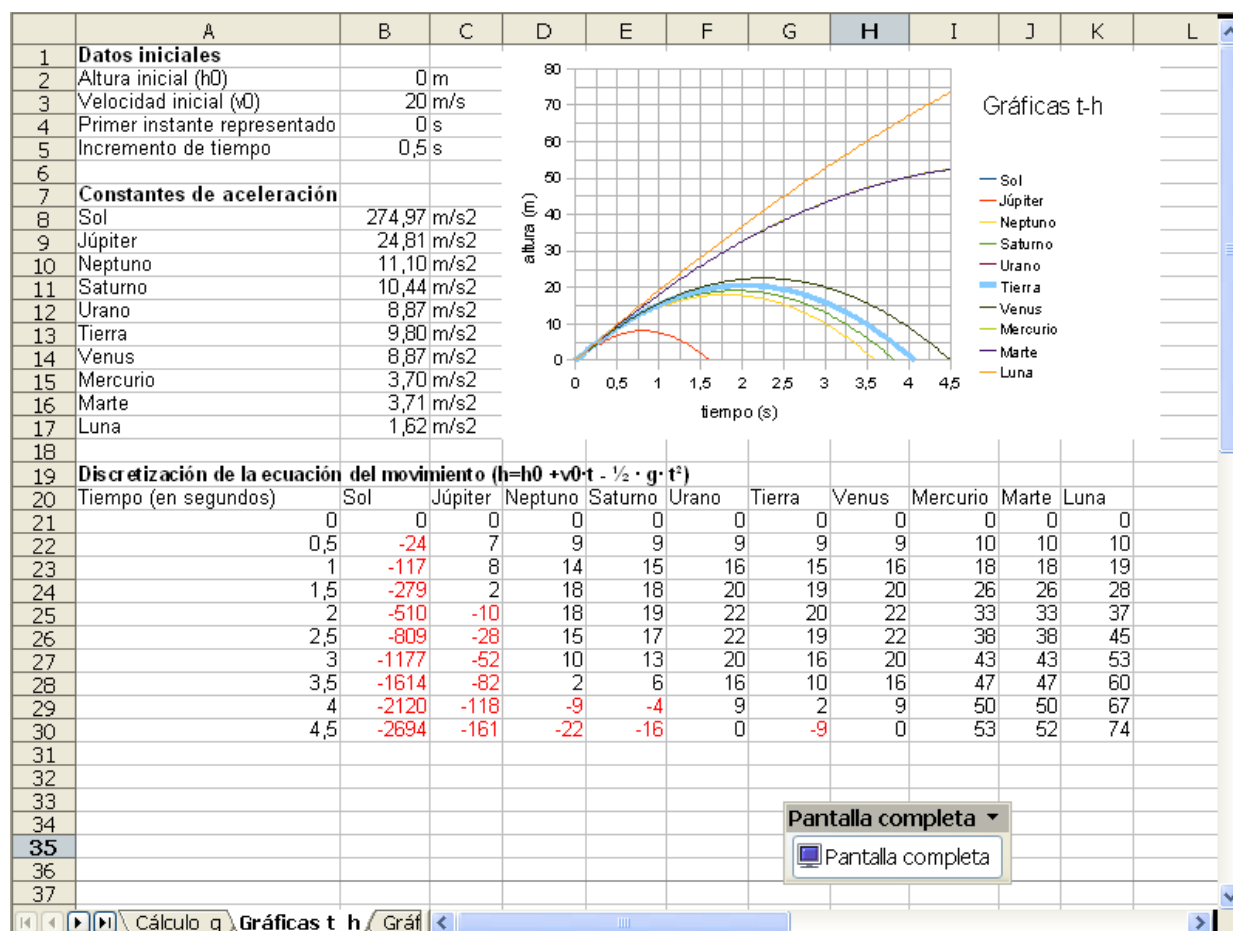


Fig. 7.4- Aspecto de la hoja para Gráficas t-h

Segunda parte: gráficas t-v

El procedimiento a seguir es completamente análogo al de las gráficas t-h. Se trata ahora de implementar la ecuación de la velocidad, $v(t) = v_0 - g \cdot t$.

Esta tarea se puede realizar más rápidamente copiando la hoja anterior. Para ello seleccionamos la *Pestaña Gráficas t_h* >> *Botón Derecho* >> *Mover / Copiar Hoja* >> *Casilla Copiar*. Debe tenerse en cuenta que en todo este proceso los datos del gráfico se referirán a los de la hoja anterior. Por ello la graficación habrá que realizarla de nuevo o bien modificar los *Rangos de Datos* del objeto gráfico.

En la figura 7.5 vemos la hoja de cálculo correspondiente a esta parte.

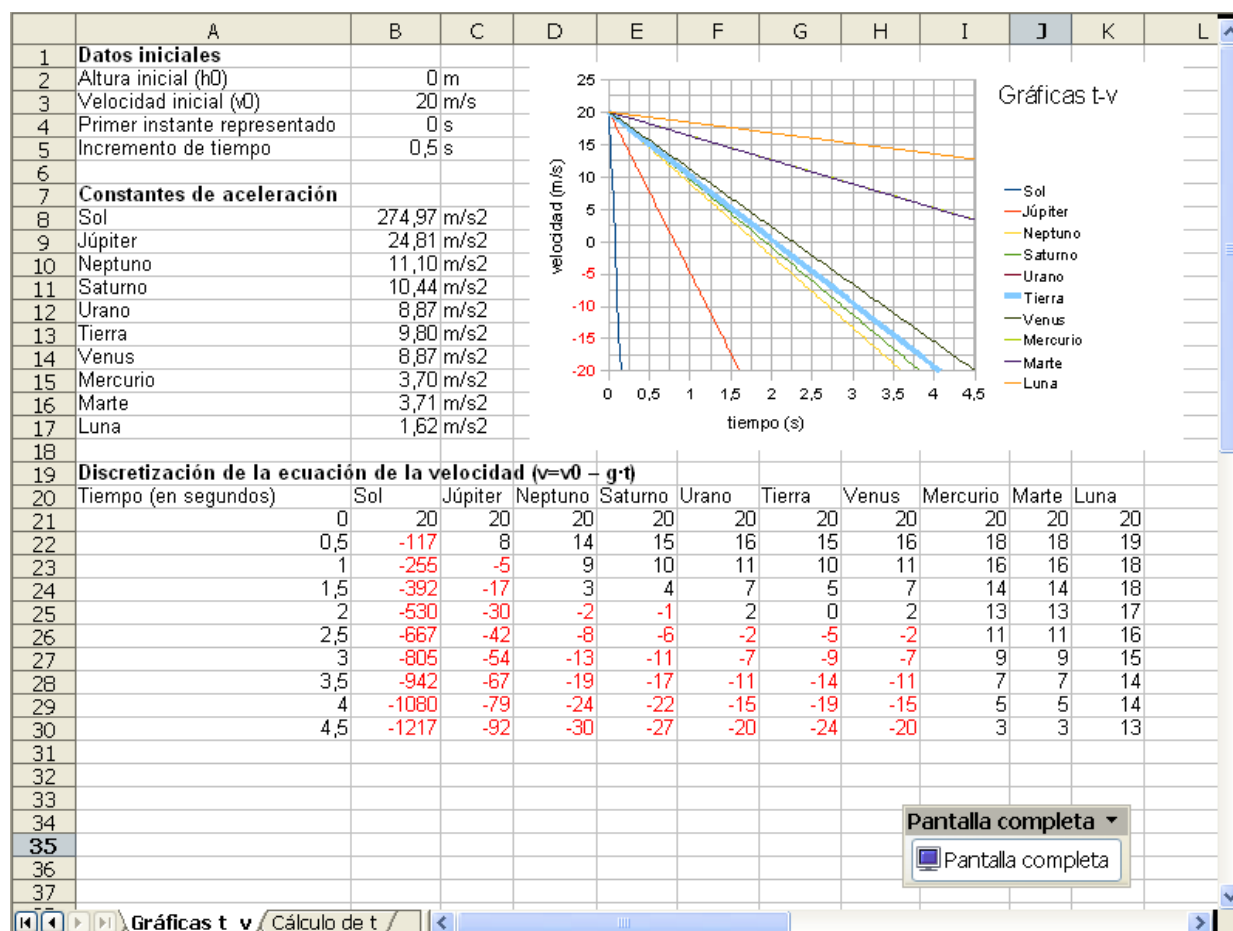


Fig. 7.5- Aspecto de la hoja para Gráficas t-v

Tercera parte: Cálculo de tiempos de retorno y alturas máximas

- Tarea 1: Copiamos otra vez la hoja, quedándonos con los *Datos Iniciales* y las *Constantes de Aceleración*.
- Tarea 2: Calculamos los coeficientes de la ecuación de segundo grado. Aunque las fórmulas pueden introducirse sin necesidad de este paso, conceptualmente es más sencillo e instructivo para el alumno
- Tarea 3: Calculamos tiempos y alturas.
- Tarea 4: Graficamos los tiempos y las alturas. En este caso utilizamos *Gráficos en Columna*.

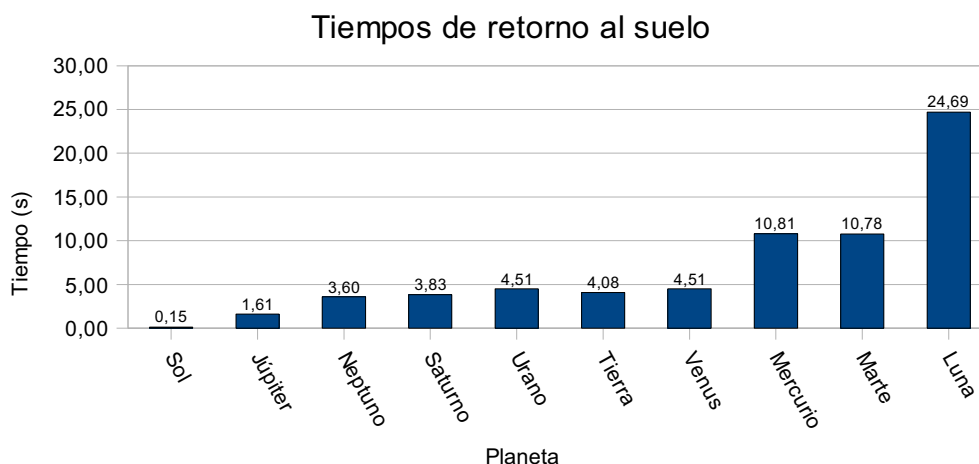


Fig. 7.6- Tiempos de retorno

Una opción interesante es la de que aparezca sobre cada columna el dato numérico con la que se grafica. Para ello hacemos doble clic sobre el gráfico, seleccionamos las columnas y a continuación *Botón Derecho >> Propiedades del Objeto >> Etiquetas de Datos >> Mostrar valor*.

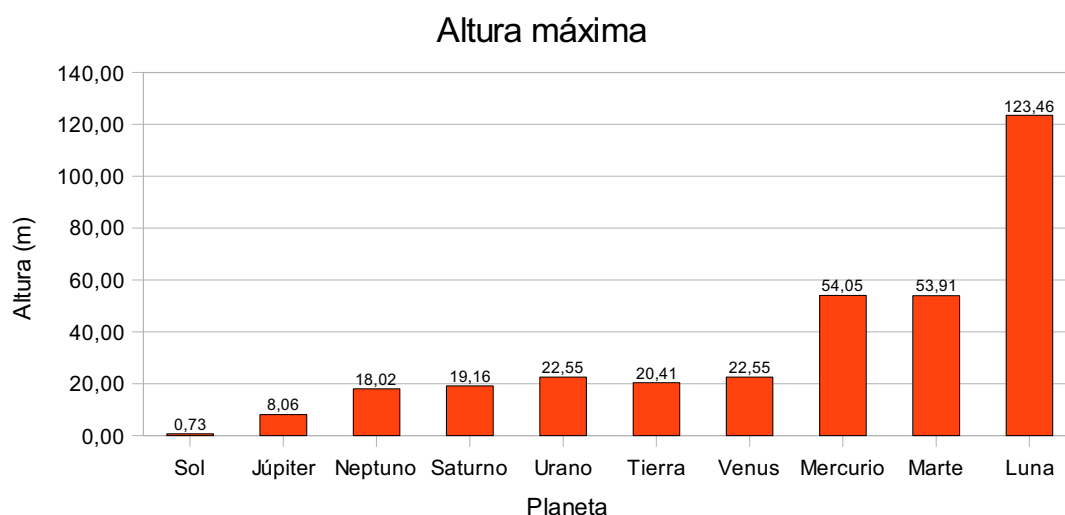


Fig. 7.7- Alturas máximas según astro

Criterios de Evaluación

- Comprender y manejar las ecuaciones del MRUA.
- Interpretar correctamente el significado físico y matemático de los coeficientes de las funciones de espacio y velocidad.
- Reconocer la variación de aceleraciones en los distintos astros, y explicar este fenómeno en base a la Ley de Gravitación Universal.
- Realizar en la hoja de cálculo las operaciones y gráficos explicados en la práctica.
- Resolver problemas de física utilizando las hojas creadas por el alumno.
- Elaborar la tarea con orden y criterio en la escritura de los datos y en el dibujo de gráficos.

Corolario

La práctica que proponemos puede servir al alumno para afianzar los contenidos que previamente hayamos desarrollado en el aula convencional.

La potencia de cálculo a su disposición mediante el *software* CALC le permitirá modificar los valores iniciales de un problema de MRUA para resolverlo mediante técnicas de ensayo y error, difíciles de llevar a cabo con lápiz y papel.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Calcula la altura a la que se encuentra un móvil lanzado verticalmente hacia arriba a 12 metros del suelo con velocidad inicial de 4 m/s, a los 2 segundos del lanzamiento. Efectúa los cálculos en Saturno y en la Tierra.
Sol. $h_{Tierra} \approx 0,40 \text{ m}$, $h_{Saturno} = 0 \text{ m}$
- Ejercicio 2: Determina el módulo de la velocidad de una piedra que se deja caer desde 200 metros de altura a los 10 segundos de comenzar su movimiento. Efectúa los cálculos en la Luna y en Mercurio.
Sol. $v_{Luna} = 16,20 \text{ m/s}$, $v_{Mercurio} = 37 \text{ m/s}$
- Ejercicio 3: ¿Cuál es la velocidad lanzamiento necesaria para alcanzar los 100 metros de altura en la Luna? ¿Y en la Tierra?
Sol. $v_0(Tierra) \approx 138,60 \text{ m/s}$, $v_0(Luna) \approx 22,91 \text{ m/s}$
- Ejercicio 4: Supongamos que el lanzamiento vertical se realiza en las profundidades de un cráter marciano situado a -25 metros respecto al nivel medio de la superficie en este planeta. ¿Cuál es la velocidad mínima para que el objeto salga del cráter? Si lanzamos a 20 m/s, ¿en qué instantes pasará el objeto por el nivel cero de la superficie?
Sol. $v_0 = 11,46 \text{ m/s}$, $t_1 = 1,32 \text{ s}$, $t_2 = 23,37 \text{ s}$
- Ejercicio 5: (de ampliación) Utiliza la estimación de g en función de la altura para determinar los valores de la aceleración gravitatoria en el punto más alto (monte Everest, 8.848 m) y más bajo (Fosa de las Marianas, -10.923 m) de la Tierra.
Sol. $g_{Marianas} \approx 9,773 \text{ m/s}^2$, $g_{Everest} \approx 9,780 \text{ m/s}^2$
- Ejercicio 6: (Propuesta de ampliación) Desarrolla una tabla de datos que indique cómo varía la gravedad terrestre en función de la altura. Supón en estos cálculos que un hipotético móvil puede lanzarse también hacia el centro del planeta por un tunel especial. Grafica el resultado obtenido.
- Ejercicio 7: (de investigación) Busca información acerca del modelo matemático para estudiar la caída libre cuando se considera el efecto del rozamiento del aire. Plantea una simulación numérica y gráficala.

ANEXO 7.I: Aceleraciones de la gravedad en la superficie de cuerpos del Sistema Solar

La siguiente tabla se ha elaborado en base al modelo $g = \frac{GM}{R^2}$, siendo R el radio del planeta.

Tal simplificación está justificada por las aproximaciones que citamos en la contextualización científica.

Astro	Masa (en kg)	Radio ecuatorial (en m)	g (en m/s ²)
Sol	1,99E+030	6,95E+008	274,97
Júpiter	1,90E+027	7,15E+007	24,81
Saturno	5,68E+026	6,03E+007	10,44
Neptuno	1,02E+026	2,48E+007	11,1
Urano	8,68E+025	2,56E+007	8,87
Tierra	5,97E+024	6,38E+006	9,8
Venus	4,87E+024	6,05E+006	8,87
Marte	6,42E+023	3,40E+006	3,71
Mercurio	3,30E+023	2,44E+006	3,7
Luna	7,35E+022	1,74E+006	1,62

Capítulo VIII: Dilatación Térmica

Objetivos

- Conocer la ley de dilatación térmica lineal de sólidos
- Aplicar la ley de dilatación lineal a la obtención de aproximaciones de las leyes de dilatación superficial y cúbica.
- Conocer los coeficientes de dilatación (lineal, superficial y cúbico) y las relaciones entre ellos.
- Conocer los coeficientes de dilatación lineal de algunos materiales, y aplicarlos en la resolución de problemas.
- Introducir fórmulas en CALC y utilizar las opciones de arrastre y el operador \$.
- Modificar las opciones de formato de celdas, utilizando notación científica y aproximaciones decimales del orden requerido.
- Utilizar distintos tipos de gráficos. Modificar las características de un gráfico.

Contenidos

Dilatación térmica de sólidos, Leyes de dilatación lineal, superficial y cúbica, Coeficientes de dilatación, Determinación de fórmulas aproximadas.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas de Matemáticas y Física, impartidos normalmente en tercero de bachillerato:

Matemáticas

- Tema 4: Expresiones algebraicas
- Tema 8: Funciones elementales

Física

- Tema 8: La materia
- Tema 11: El estado sólido y el estado líquido

Histórico-científica

Llamamos *dilatación térmica* al aumento de volumen de un cuerpo al variar éste su temperatura. Este fenómeno queda determinado por multitud de factores como la geometría del cuerpo, su estado de agregación, su composición, la presión, etc. Se trata pues de una cuestión muy compleja, que abordaremos asumiendo ciertas hipótesis:

- Nos restringimos a cuerpos sólidos
- No tenemos en cuenta fenómenos de cambio de estado (el rango de temperaturas se encuentra contenido entre el cero absoluto y el punto de fusión)
- Asumimos que los materiales se comportan isotrópicamente con respecto a la temperatura

(la deformación es constante en cada una de las dimensiones espaciales)

- Suponemos que el calor se transmite a todo el cuerpo uniformemente
- Suponemos condiciones de presión constante
- La validez de las aproximaciones en las fórmulas queda justificada cuando tomamos incrementos pequeños de temperatura.

En este contexto, podemos definir el volumen de un cuerpo como función de su temperatura, $V \equiv V(T)$. En tal caso, el aumento de volumen está descrito por la ecuación diferencial:

$$\gamma = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \quad (\text{ec. 8.1})$$

donde γ es una constante llamada Coeficiente de Dilatación Cúbica, medido en K^{-1} ó $^{\circ}C^{-1}$.

La teoría cinético-molecular explica las dilataciones y contracciones al aumentar y disminuir la temperatura respectivamente de la siguiente manera. Las moléculas de un sólido se encuentran en vibración alrededor de posiciones fijas en la estructura reticular del mismo. Un aumento de temperatura implica un mayor movimiento molecular, que a su vez se traduce en un incremento de las distancias intermoleculares medias. Macroscópicamente observamos que el cuerpo varía su volumen.

En general la dilatación de materiales por efecto del calor es un fenómeno “tecnológicamente inadecuado”. Multitud de diseños deben tenerlo en cuenta para evitar roturas. En algún caso, como el termostato, la dilatación se emplea beneficiosamente. Citamos algunas implicaciones prácticas de las leyes expuestas:

- Termómetro metálico. Dos varillas unidas con distinto CDL¹ que se curva según las variaciones de temperatura.
- Termostato. Variante del anterior capaz de interrumpir una corriente eléctrica cuando la temperatura sobrepasa un nivel dado.
- Remaches metálicos. Para unir planchas de metal, los remaches se introducen al rojo, de manera que al enfriarse disminuyen en longitud y los extremos esféricos de la pieza aprietan con fuerza las planchas.
- Rodillos en los extremos de puentes. Capaces de “ajustar” la longitud de los mismos según las variaciones estacionales.
- Juntas de dilatación. En puentes y otras construcciones. Al igual que los rodillos, contribuyen a disminuir las tensiones internas del material.
- Diseño de sustancias para laboratorio. El vidrio pyrex, por ejemplo, se desarrolla con un CDL especialmente bajo, de manera que los recipientes contruidos con este material serán capaces de soportar grandes temperaturas sin romperse. Otro caso de bajo CDL es el de la aleación invar (hierro, níquel y carbono). Esta se emplea en la construcción de patrones de medida, en relojes de precisión, trabajos de geodesia, etc.

1 Coeficiente de Dilatación Lineal

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión construimos las gráficas de temperatura frente a dilatación de la longitud para diversos materiales. Construimos también un diagrama de barras de longitudes de cada material a una temperatura fija.
- En la segunda sesión los alumnos desarrollan como trabajo personal las dilataciones superficial y cúbica, y realizan ejercicios de ampliación.

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Todo sólido sujeto a cambios de temperatura experimenta variaciones de volumen. Pero ocurre que si el cuerpo tiene forma alargada (una varilla, una viga) o plana (una plancha, un recipiente), entonces los cambios en algunas de sus dimensiones son depreciables frente a las otras.

Esto permite hablar de dilatación (térmica) lineal, y de dilatación superficial, cuando consideramos un objeto alargado o plano respectivamente.

Tal aproximación permite además describir las leyes físicas sin recurrir al cálculo diferencial.

La ley de dilatación lineal se expresa diciendo que “el incremento de longitud ($l - l_0$) es proporcional a la variación de temperatura (ΔT) y a la longitud inicial del sólido (l_0)”. Matemáticamente:

$$l - l_0 \propto l_0 \cdot \Delta T \quad (\text{ec. 8.2})$$

Definimos el Coeficiente de Dilatación Lineal (α) de una sustancia como la constante de proporcionalidad en la relación anterior, que así queda:

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \Delta T) \quad (\text{ec. 8.3})$$

En el Anexo 8.I hemos incluido los CDL de algunas sustancias.

A partir de la ley lineal podemos deducir aproximaciones a los casos bidimensional y tridimensional.

Consideremos una plancha metálica rectangular de área S_0 a la temperatura inicial. Podemos escribir $S_0 = a_0 \cdot b_0$ y en general $S(T) = a(T) \cdot b(T)$, denotando por a y b al largo y ancho de la plancha. Al incrementar la temperatura, en cada dimensión observaremos el fenómeno lineal, con lo que deducimos:

$$S = a \cdot b = a_0(1 + \alpha \Delta T) \cdot b_0(1 + \alpha \Delta T) = a_0 b_0 (1 + \alpha \Delta T)^2 = S_0(1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2) \quad (\text{ec. 8.4})$$

Ahora bien, como $\alpha \ll 1$, la cantidad $\alpha^2 \Delta T^2$ se hace despreciable frente al resto. Llegamos así a la aproximación:

$$S \approx S_0(1 + 2\alpha \Delta T) \quad (\text{ec. 8.5})$$

Buscando la analogía con el caso lineal, definimos el Coeficiente de Dilatación Superficial, β , como la constante en la ley:

$$S = S_0(1 + \beta \Delta T) \quad (\text{ec. 8.6})$$

Los cálculos nos permiten relacionar ambos coeficientes: $\beta = 2\alpha$.

En el caso tridimensional o cúbico, razonamientos análogos concluyen que:

$$V = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3 \quad (\text{ec. 8.7})$$

La aproximación se realiza escribiendo:

$$\begin{aligned} V &= V_0(1 + \alpha \Delta T)^3 \\ &= V_0(1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3) \quad (\text{ec. 8.8}) \end{aligned}$$

Si consideramos constante el Coeficiente de Dilatación Lineal α dentro del rango de temperaturas evaluado, y de valor suficientemente pequeño, podemos desprestigiar en la (ec. 8.8) los términos cuadrático y cúbico, obteniendo:

$$V \approx V_0(1 + 3\alpha \Delta T) \quad (\text{ec. 8.9})$$

La ley cúbica se expresará por tanto como:

$$V = V_0(1 + \gamma \Delta T) \quad (\text{ec. 8.10})$$

siendo γ el Coeficiente de Dilatación Cúbica. Claramente $\gamma = 3\alpha$.

Es importante insistir en que gracias a las aproximaciones realizadas conseguimos un tratamiento matemático y empírico unificado, pero al precio de restringir aun más la validez de las leyes.

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

Primera parte: Dilatación Lineal

- Tarea 1: Introducción de condiciones iniciales

Estas son la longitud de la barra sólida, la temperatura inicial y el incremento de temperatura.

Datos iniciales	
Longitud inicial	10 m
Temperatura inicial	20 °C
Incremento de temperatura	30 °C

Fig. 8.1 - Datos iniciales

- Tarea 2: Discretización de la ecuación de la longitud

Escribimos en una fila varias temperaturas, comenzado con la inicial y sumando el incremento. En una columna introducimos los CDL de las sustancias citadas en el anexo. Por último introducimos la fórmula de la dilatación y usamos la opción de arrastre en CALC para generar todos los datos. Dos apuntes prácticos: el hecho de que los CDL sean números tan pequeños hace conveniente utilizar el formato científico en las celdas apropiadas. Otra cuestión es que al realizar el arrastre de fórmulas todas las longitudes obtenidas son iguales. Esta falsa impresión se debe al redondeo provocado por ser el número de posiciones decimales por defecto igual a 0. Lo corregiremos con las opciones de formato de celda. Obsérvese el uso que hacemos del operador \$

para conseguir que el arrastre de las fórmulas hacia la derecha y hacia abajo las copie correctamente.

Material	CDL(en °C ⁻¹)	Temperaturas					
		20	50	80	110	140	170
		Dilatación ($l = l_0(1+\alpha \cdot \Delta t)$) (en metros)					
Vidrio pyrex	3,00E-007	10,00000	10,00009	10,00018	10,00027	10,00036	10,00045
Aleación invar	9,00E-007	10,00000	10,00002	10,00005	10,00008	10,00010	10,00013
Platino	9,00E-006	10,00000	10,00009	10,00054	10,00081	10,00108	10,00135
Vidrio corriente	9,00E-006	10,00000	10,00009	10,00054	10,00081	10,00108	10,00135
Hierro	1,20E-005	10,00000	10,00012	10,00024	10,00036	10,00048	10,00060
Cobre	1,70E-005	10,00000	10,00017	10,00034	10,00051	10,00068	10,00085
Latón	2,00E-005	10,00000	10,00020	10,00040	10,00060	10,00080	10,00100
Aluminio	2,20E-005	10,00000	10,00022	10,00044	10,00066	10,00088	10,00110
Cinc	3,00E-005	10,00000	10,00030	10,00060	10,00090	10,00120	10,00150
Plomo	3,10E-005	10,00000	10,00031	10,00062	10,00093	10,00124	10,00155

Fig. 8.2: Incrementos de longitud en dilatación lineal

- Tarea 3: Gráficas de dilatación lineal

Realizamos una representación conjunta de los datos de la tabla anterior. Así obtendremos las funciones de dilatación lineal para el rango de temperaturas introducido de los diversos materiales. Es conveniente que modifiquemos la escala del eje y (Formato>>Eje>>Eje Y>>Escala) para representar un rango pequeño de longitudes. En el siguiente gráfico, hemos resaltado además los datos de las rectas con pendientes extremas (Botón derecho sobre la línea>>Propiedades del Objeto>>Línea)

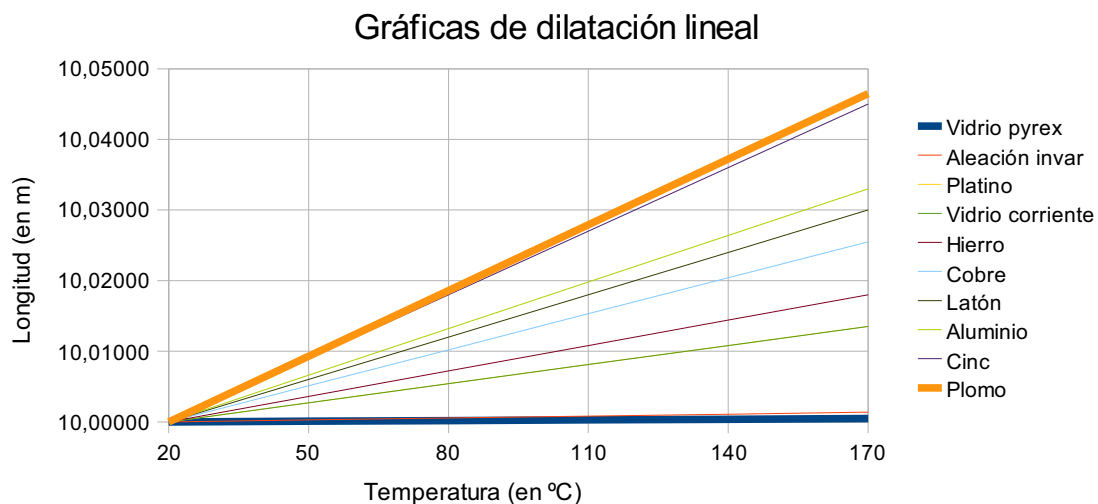


Fig. 8.3: Representación conjunta de las longitudes

- Tarea 4: Estudio de la dilatación lineal a una temperatura dada.

Hacemos un gráfico de barras horizontales con los datos de una sola columna. El resultado nos da una idea de las diferencias de dilatación según el tipo de material empleado. Como antes, prestaremos atención a las escalas, especialmente a las del eje de abscisas.

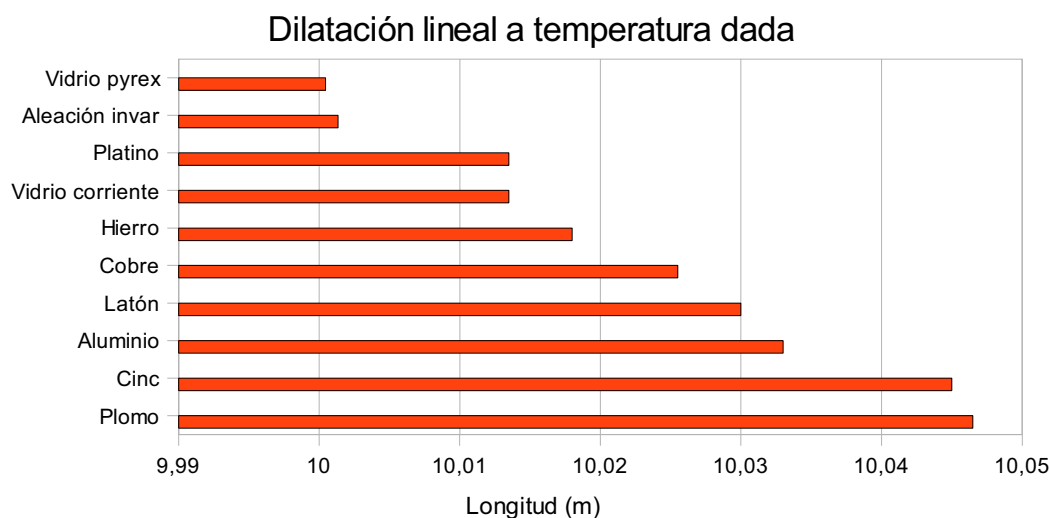


Fig. 8.4: Longitudes a 170°C

Segunda parte: Dilatación Cúbica

Con un plan de trabajo similar al anterior, implementaremos y graficaremos la ley de dilatación en tres dimensiones.

Conviene que la escala en la representación de las funciones lineales se elija como en el caso unidimensional, de manera que el alumno aprecie la variación con respecto a aquél.

En el dibujo a una temperatura prefijada, podemos elegir el tipo “barras tridimensionales” para simular un efecto más real.

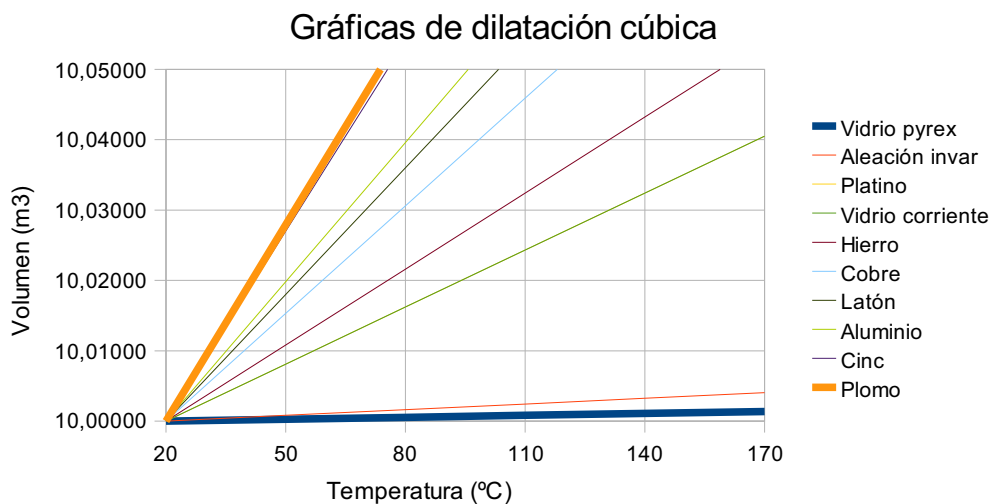


Fig. 8.5: Variaciones de volumen a distintas temperaturas

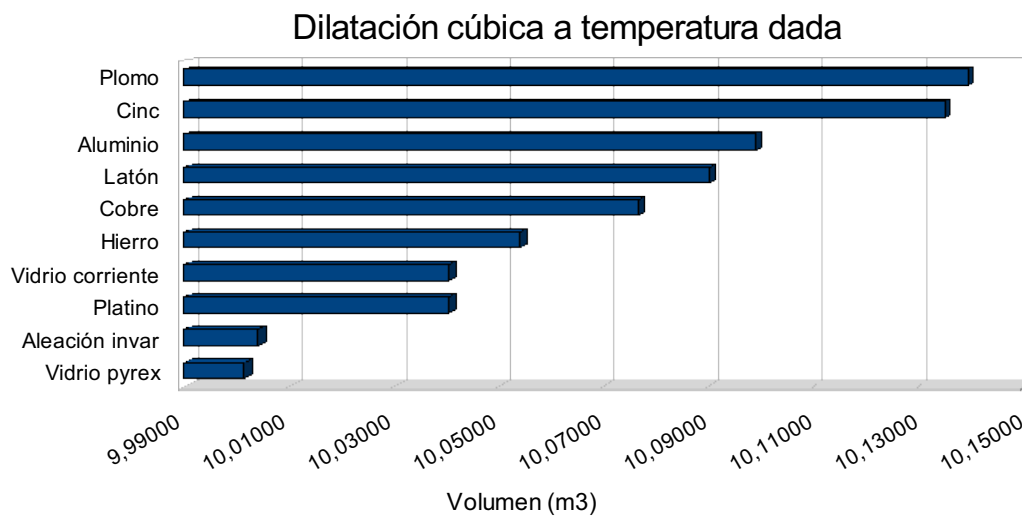


Fig. 8.6: Dilataciones tridimensionales a 170°C

Criterios de Evaluación

- Introducir los CDL, trabajando adecuadamente con la notación científica, y manejar aproximaciones decimales.
- Implementar correctamente las leyes de dilatación
- Graficar las leyes de dilatación, como funciones lineales y como diagramas de barras para una temperatura fija.
- Resolver ejercicios numéricamente con ayuda de las hojas de cálculo desarrolladas
- Realizar actividades de ampliación sobre el tema.

Corolario

La práctica que proponemos puede servir al alumno para afianzar los contenidos que previamente hayamos desarrollado en el aula convencional. Además le permitirá resolver ejercicios mediante métodos numéricos y estimaciones. Por último, posibilita realizar ejercicios de ampliación con aquellos alumnos más adelantados.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Determina la dilatación de una varilla de platino de 40 cm a 25°C cuando se calienta uniformemente hasta los 200°C.

Sol. $l - l_0 = 6,3 \cdot 10^{-4} m$

- Ejercicio 2: Calcula la longitud de una viga de hierro una noche de invierno en la que el termómetro marca -15°C sabiendo que su longitud es de 2 metros un día de verano en el que la temperatura es de 30°C.

Sol. $l = 1,99892 m$

- Ejercicio 3: ¿Cuánto debería calentarse un recipiente cúbico de vidrio pyrex cuya arista mide 3 dm a temperatura ambiente para que su volumen aumente un 0,02%? ¿Qué volumen tendría en ese caso un recipiente de plomo de análogas características?

Sol. $\Delta T = 2,2 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$, $V_{\text{plomo}} = 2,755 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

- Ejercicio 4 (de ampliación): Realiza las tablas y gráficas para la Ley de Dilatación Superficial.
- Ejercicio 5 (de ampliación): Modifica los datos numéricos para las dilataciones en más de una dimensión, utilizando las fórmulas no aproximadas:

$$S = S_0 (1 + \alpha \Delta T)^2$$

$$V = V_0 (1 + \alpha \Delta T)^3$$

- Ejercicio 6 (de investigación): Busca información acerca de la Dilatación Anómala del Agua. Calcula y grafica la densidad frente a la temperatura.

ANEXO 8.I: Coeficientes de Dilatación Lineal

Material	CDL(en °C ⁻¹)
Vidrio pyrex	$3 \cdot 10^{-7}$
Aleación invar	$9 \cdot 10^{-7}$
Platino	$9 \cdot 10^{-6}$
Vidrio corriente	$9 \cdot 10^{-6}$
Hierro	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Cobre	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Latón	$2 \cdot 10^{-5}$
Aluminio	$2,2 \cdot 10^{-5}$
Cinc	$3 \cdot 10^{-5}$
Plomo	$3,1 \cdot 10^{-5}$

Capítulo IX: Circuitos de Corriente Alterna

Objetivos

- Estudiar señales sinusoidales de voltaje, y sus elementos básicos (pulso, voltaje máximo, fase inicial)
- Reconocer los elementos básicos de un circuito de Corriente Alterna (CA): resistores, condensadores, bobinas de autoinducción; conocer sus características: resistencia, capacidad, coeficiente de autoinducción.
- Conocer ángulo de desfase, capacitancia, inductancia, reactancia e impedancia, así como las relaciones entre ellas.
- Determinar la señal de intensidad de corriente eléctrica a partir de un voltaje sinusoidal en los siguientes casos: circuito de CA con resistor, con condensador, con bobina y LRC.
- Implementar en CALC las señales de intensidad y voltaje para un intervalo de tiempo dado; graficar los resultados obtenidos y utilizar la hoja de cálculo para resolver problemas en CA.
- Utilizar las funciones trigonométricas, sus inversas y la constante π en CALC.

Contenidos

Circuito de CA, Señales sinusoidales, Resistores, Condensadores, Bobinas de autoinducción, Circuito LRC, Capacitancia, Inductancia, Reactancia, Impedancia, Ángulo de desfase, Relaciones entre Voltaje e Intensidad en cada tipo de circuito, Valores eficaces, Valores medios, Ley de Ohm generalizada.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas de tercero, cuarto y quinto de bachillerato (la planificamos para su desarrollo en cuarto, de manera que los contenidos de cursos anteriores o posteriores se refresquen o se adelanten según convenga):

Matemáticas

- Tema 12: Funciones goniométricas
- Tema 14: Derivadas
- Tema 15: Análisis de funciones: representación gráfica y elementos
- Tema 16: Cálculo integral

Física

- Tema 13: La corriente eléctrica en metales
- Tema 16: Campo magnético variable
- Tema 18: Corriente alterna

Histórico-científica

Estamos familiarizados con la presencia de la corriente eléctrica en nuestras vidas. Sin embargo la física y la tecnología que hay detrás de ella empiezan a desarrollarse sólo a partir del siglo XVIII. La comprensión profunda de los fenómenos implicados se consiguió gracias a los avances en electromagnetismo. En un periodo breve de tiempo éstos se tradujeron en multitud de aplicaciones prácticas.

El estudio de circuitos y componentes electrónicos, en el que la informática puede verse como una derivación, comienza con los de Corriente Continua (CC) y sigue en Corriente Alterna (CA) con tres elementos:

- Resistores. Componentes que dificultan el paso de la corriente, disipando parte de la energía en forma de calor.
- Condensadores. Componentes capaces de almacenar energía en forma de campo eléctrico.
- Bobinas. Componentes que almacenan energía en forma de campo magnético.

Otras partes de los circuitos más sofisticadas se estudian en niveles superiores o no son más que combinaciones inteligentes de éstos. Además, en todo circuito podemos encontrar los tres fenómenos descritos, aunque en magnitudes que justifican normalmente el que no sean tenidos en cuenta algunos de ellos.

El empleo de la CA presenta muchas ventajas desde el punto de vista tecnológico, entre las que podemos citar su facilidad para el transporte (optimización de las pérdidas energéticas) y para los cambios de voltaje. El análisis matemático y físico en CA es enriquecedor para la teoría y la práctica. De hecho aun no se conoce bien el comportamiento de algunos circuitos eléctricos, cuyas ecuaciones diferenciales tienen soluciones desconocidas y fenómenos caóticos.

Por estas razones acotamos nuestro estudio al caso de voltajes sinusoidales y a circuitos con “pocos” elementos.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en tres sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión introduciremos las fórmulas de voltaje e intensidad para un circuito con resistor y, según el ritmo de trabajo, uno con condensador.
- En la segunda sesión completaremos lo de la anterior a circuitos con bobina y al caso LRC
- En la tercera resolveremos ejercicios con ayuda de las hojas creadas y eventualmente realizaremos actividades de ampliación.

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Consideremos un circuito con los siguientes elementos:

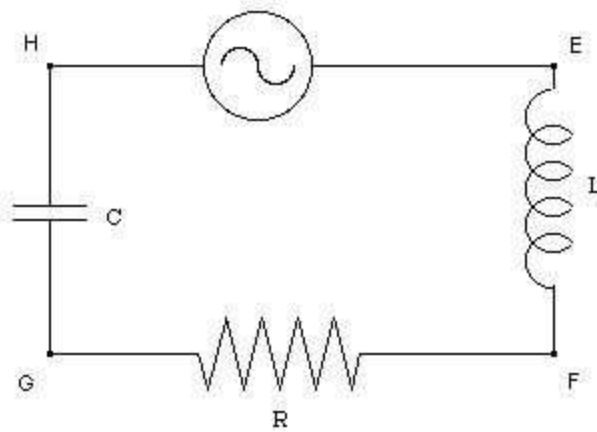


Fig. 9.1: Esquema de un circuito LRC

- Un generador de corriente alterna que produce una fuerza electromotriz (f.e.m.) del tipo $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \beta)$ siendo V_0 el voltaje máximo, ω la pulsación o velocidad angular y β la fase inicial
- Una bobina de autoinducción con coeficiente de autoinducción L (en henrios)
- Un resistor de resistencia R (en ohmios)
- Un condensador de capacidad C (en faradios)

Este es el circuito LRC, cuyo comportamiento es el de un oscilador armónico.

Para proceder a su estudio, tendremos en cuenta que el voltaje total es igual a la suma de los voltajes en cada uno de sus tramos (leyes de Kirchhoff), esto es:

$$V_{TOTAL} = V_{EF} + V_{FG} + V_{GH} \quad (\text{ec. 9.1})$$

Pasamos a considerar cada parte:

- Tramo EF. Utilizando las leyes de Faraday y de Kirchhoff, sabemos que en el caso de una bobina, el voltaje es proporcional a la variación de la intensidad de corriente con respecto al tiempo, $V_{EF}(t) = L \frac{dI}{dt}$, siendo L el coeficiente de autoinducción.
- Tramo FG. La ley de Ohm en CC sigue verificándose en el caso de una resistencia en CA, de manera que la relación en este caso es muy sencilla: $V_{FG}(t) = R \cdot I(t)$
- Tramo GH. La carga almacenada entre las armaduras de un condensador es proporcional a la diferencia de potencial entre sus extremos: $Q(t) = C \cdot V(t)$. Además de la definición de intensidad de corriente eléctrica sabemos que $I(t) = \frac{dQ}{dt}$, con lo que podemos establecer

la relación $V_{GH}(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$

En resumen, conocido el voltaje, la intensidad es la solución de la siguiente ecuación:

$$V(t) = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad (\text{ec. 9.2})$$

Derivando una vez, obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden¹:

$$L \cdot I'' + R \cdot I' + \frac{1}{C} I = V' \quad (\text{ec. 9.3})$$

donde V' es una función conocida, así como las constantes L , R y C .

La resolución de este tipo de ecuaciones se escapa de los objetivos del bachillerato. Por ahora bástenos saber que cuando la f.e.m. es sinusoidal, la solución adquiere la forma:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \beta + \varphi) + A \cdot e^{-bt} \quad (\text{ec. 9.4})$$

Es interesante observar que el resultado se compone de una senoide, y del término $A \cdot e^{-bt}$. Dado que $b > 0$, se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A \cdot e^{-bt} = 0 \quad (\text{ec. 9.5})$$

esto significa que en el modo estacionario del sistema², la intensidad de corriente es en efecto una senoide, valiendo la aproximación:

$$I(t) \approx I_0 \sin(\omega t + \beta + \varphi) \quad (\text{ec. 9.6})$$

Queda solamente la cuestión de cuál es el valor de las constantes I_0 , intensidad máxima, y φ , desfase de la señal con respecto al voltaje. Su cálculo se logra sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial e igualando los coeficientes resultantes. Se obtienen las fórmulas³:

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} \quad (\text{ec. 9.7})$$

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} \quad (\text{ec. 9.8})$$

donde $X = X_C - X_L = \frac{1}{C\omega} - L\omega$ es la reactancia del circuito (diferencia entre la capacitancia y la inductancia), y $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ es la impedancia.

A partir de estos cálculos, podemos deducir la forma de la intensidad de corriente en casos más sencillos (en todos ellos suponemos que el voltaje es $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \beta)$):

- Circuito de CA con Resistor

Esto se da suponiendo que no hay bobina ($L=0$) y que las armaduras del condensador están muy próximas ($C \approx \infty$). Entonces:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 9.9})$$

- Circuito de CA con Condensador

Ahora $R=0$, no hay resistencia, y $L=0$. La intensidad de corriente será⁴:

$$I(t) = \frac{V_0}{X_C} \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{ec. 9.10})$$

1 Empleamos la notación I , I' , I'' , ... para la intensidad y sus derivadas primera y segunda con respecto al tiempo.

2 Es decir, cuando ha transcurrido un cierto tiempo desde la conexión del circuito.

3 La (ec. 9.8) se conoce como *Ley de Ohm de la Corriente Alterna*. Su deducción figura en el Anexo 9.I.

4 La intensidad está adelantada $\pi/2$ radianes con respecto al voltaje

- Circuito de CA con Bobina de Autoinducción
Ocurrirá si $R=0$ y $C \approx \infty$, con lo que⁵:

$$I(t) = \frac{V_0}{X_L} \text{sen}(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{ec. 9.11})$$

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

Primera parte: Circuito de CA con Resistor.

- Tarea 1: Introducción de los datos iniciales.

Escribimos todas las constantes de las ecuaciones de voltaje e intensidad. También especificamos el tiempo inicial y el incremento de tiempo para discretizar las funciones.

<u>Datos iniciales</u>	<u>Unidades</u>	<u>Datos para la representación gráfica</u>	
Voltaje máximo	5 voltios	Tiempo inicial	0 segundos
Resistencia	3 ohmios	Incremento	0,2 segundos
Frecuencia	0,5 hercios		
Periodo	2 segundos		
Pulsación	3,14 radianes / segundo		
Fase inicial	1,05 radianes		

Fig. 9.2: Datos iniciales en circuito con Resistor

Los valores de periodo y pulsación se calculan a partir de la frecuencia (también es posible elegir otro orden). Para ello implementamos en CALC las fórmulas⁶ $T = \frac{1}{f}$ y $\omega = 2\pi f$

- Tarea 2: Discretización de las funciones $V(t)$ e $I(t)$.

Para lograr la representación gráfica, elegimos un intervalo de tiempo, y dentro de éste valores equidistantes. Obtendremos una tabla como la expuesta a continuación:

	Tiempo	Voltaje	Intensidad de corriente eléctrica
	0	4,33	1,44
	0,2	4,97	1,66
	0,4	3,72	1,24
	0,6	1,04	0,35
	0,8	-2,03	0,68
	1	-4,33	-1,44
	1,2	-4,97	-1,66
	1,4	-3,72	-1,24
	1,6	-1,04	-0,35
	1,8	2,03	0,68
	2	4,33	1,44

Fig. 9.3: Cálculo de V e I en circuito con Resistor

⁵ La intensidad está retrasada $\pi/2$ radianes con respecto al voltaje

⁶ La constante π en CALC se introduce como PI()

Obsérvese el uso de las constantes introducidas en la Tarea 1, y la introducción de las funciones vistas en Fundamentos Teóricos.

- Tarea 3: Gráficas de voltaje e intensidad.

Con los datos anteriores, podemos graficar los resultados, obteniendo:

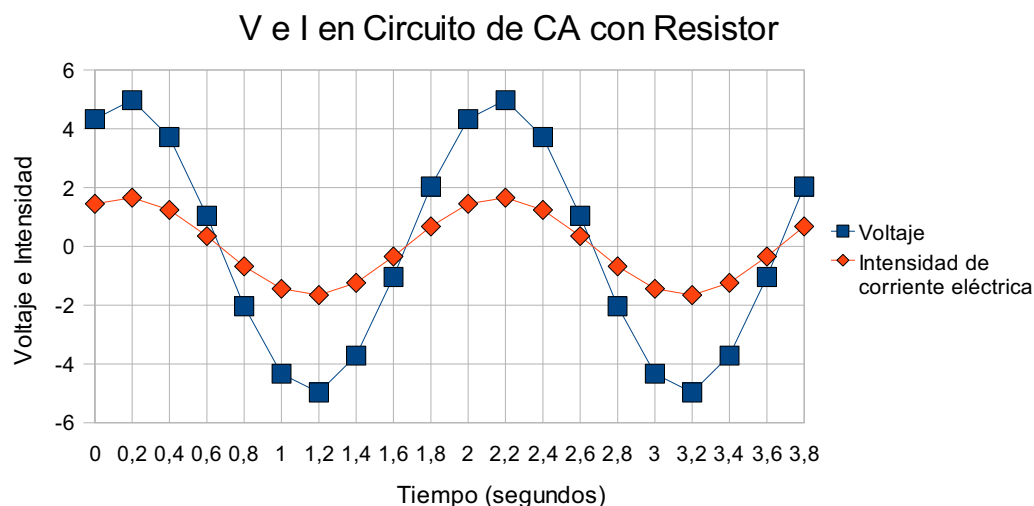


Fig. 9.4: Gráficas en circuito con Resistor

El dibujo nos confirma que ambas señales están en fase (coinciden las abscisas donde se alcanzan los valores máximos y mínimos).

Segunda parte: Circuito de CA con Condensador

Es posible reutilizar el trabajo hecho para el caso de una Resistencia. Para ello pulsamos el botón derecho del ratón sobre la pestaña de la hoja actual y seleccionamos “Mover/Copiar hoja... >> Casilla Copiar >> Aceptar”. A partir de aquí sólo tenemos que añadir y modificar algunos cálculos⁷.

- Tarea 1: Introducción de los datos iniciales.
Cambiamos Resistencia por Capacidad y añadimos la variable Capacitancia.
- Tarea 2: Cálculo de funciones.
Adaptamos las fórmulas de la resistencia al caso del condensador.
- Tarea 3: Graficación.
Igual que antes, usamos un gráfico de línea con los datos de la última tabla.

⁷ Esto no es válido para el gráfico, ya que por defecto CALC utiliza los datos de la hoja original (y no los de la hoja que acabamos de copiar) para construirlo.

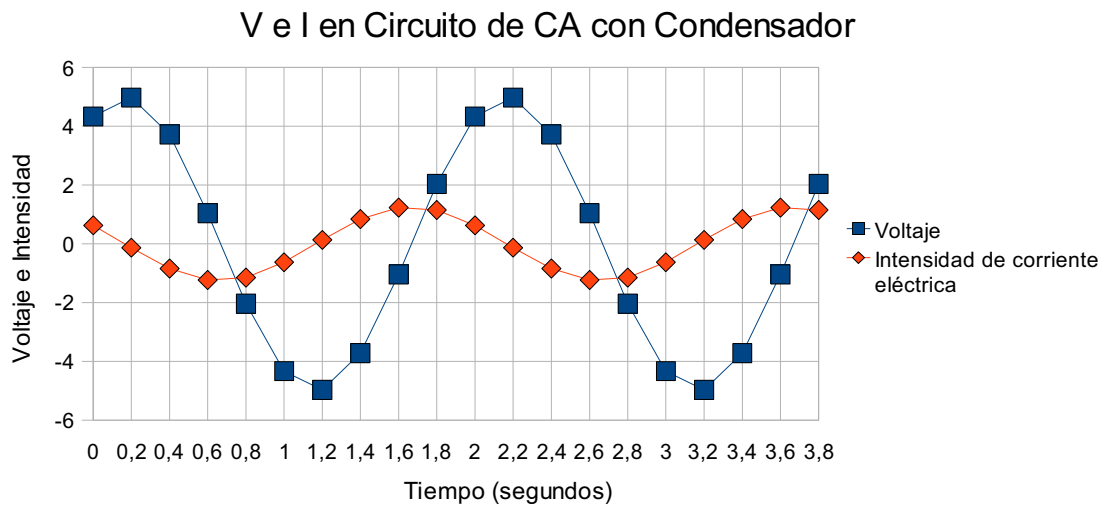


Fig. 9.5: Gráficas en circuito con Condensador

Se observa que la intensidad está adelantada $\frac{\pi}{2}$ radianes con respecto al voltaje (los extremos de una de las funciones se dan en los ceros de la otra y viceversa)

Tercera parte: Circuitos con Bobina y LRC

Con un procedimiento similar, trabajamos el resto de circuitos. El resultado final, serán gráficas del tipo siguiente:

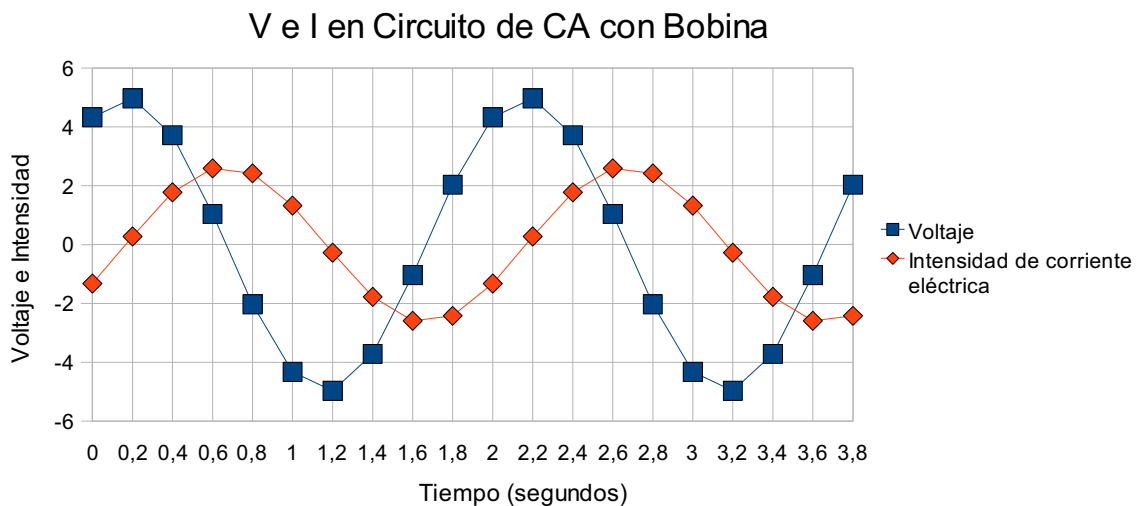


Fig. 9.6: Gráficas en circuito con Bobina de Autoinducción

Se observa que la intensidad queda retrasada $\frac{\pi}{2}$ radianes con respecto al voltaje.

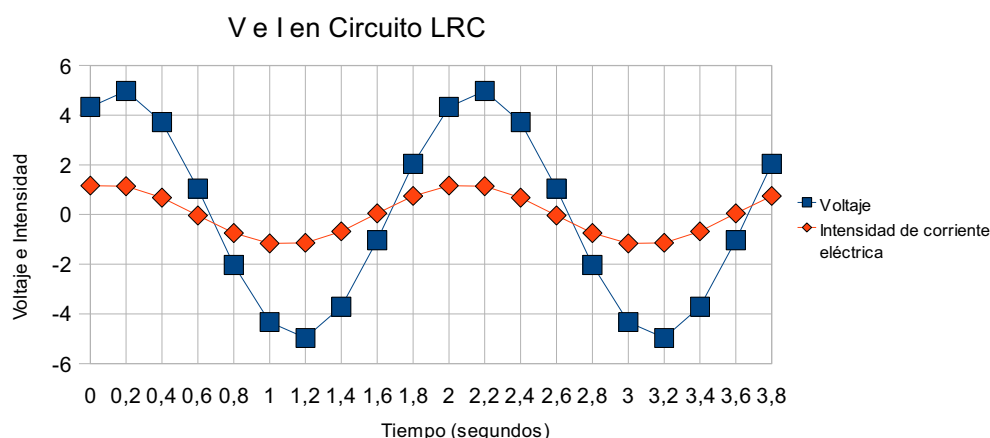


Fig. 9.7: Gráficas en circuito LRC

Criterios de Evaluación

- Calcular periodo, frecuencia y pulso conocida una de las tres magnitudes, e implementar estas fórmulas en CALC.
- Calcular capacitancia, inductancia, reactancia, impedancia y ángulo de desfase, e implementar estas fórmulas en CALC.
- Construir una tabla de valores discreta para las señales de intensidad y voltaje de los circuitos estudiados en el tema; graficar los resultados obtenidos.
- Utilizar las hojas de cálculo de cada circuito para resolver problemas de señales sinusoidales en CA.
- Realizar ejercicios de ampliación.

Corolario

La práctica que proponemos puede servir al alumno para afianzar los contenidos que previamente hayamos desarrollado en el aula convencional.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Determina los valores de voltaje e intensidad para un tiempo $t = 2,5$ s, en el caso de un circuito de CA con resistor. Datos: voltaje máximo, 5 V; fase inicial, 30° ; frecuencia, 5 Hz; resistencia, 0,02 ohmios.

Sol. $V(2,5) = -2,5$ V , $I(2,5) = -125$ A

- Ejercicio 2: Determina los valores de voltaje e intensidad para un tiempo $t = 0,5$ s, en el caso de un circuito de CA con condensador. Datos: voltaje máximo, 3 V; fase inicial, $-\pi$ radianes; pulso, 0,2 radianes/segundo; capacidad, 30 microfaradios.

Sol. $V(0,5) = -0,30$ V , $I(0,5) = -1,8 \cdot 10^{-5}$ A

- Ejercicio 3: Determina los valores de voltaje e intensidad para un tiempo $t = -10$ s, en el caso de un circuito de CA con bobina. Datos: voltaje máximo, 15 V; fase inicial, 0 radianes; periodo, 0,03 segundos; coeficiente de autoinducción, 9 henrios.

Sol. $V(-10) = -12,99 V$, $I(-10) = 0,0040 A$

- Ejercicio 4: Determina los valores de voltaje e intensidad para un tiempo $t = 6,1$ s, en el caso de un circuito LRC. Datos: voltaje máximo, 60 V; fase inicial, 0,6 radianes; frecuencia, 15 Hz; resistencia, 7 ohmios; capacidad, 0,013 faradios; coeficiente de autoinducción, 2,3 henrios.

Sol. $V(6,1) = -33,88 V$, $I(6,1) = 0,22 A$

- Ejercicio 5: Estima los instantes de tiempo entre 0 y 10 segundos en los que la intensidad de corriente es máxima en cada uno de los circuitos anteriores.
- Ejercicio 6: (De ampliación) Implementa en CALC la expresión para la frecuencia de resonancia de un circuito LRC. Calcula su valor para los datos del ejercicio 4. ¿Cómo deberíamos modificar la capacidad del condensador para que la frecuencia de resonancia valiera 10 KHz?
- Ejercicio 7: (De ampliación) Implementa en CALC las fórmulas para la potencia instantánea y media en un circuito LRC. Añade una columna a la tabla de voltaje e intensidad que contenga estos valores, y grafica los resultados con los datos del ejercicio 4.
- Ejercicio 8: (De ampliación) Realiza las hojas de cálculo para los circuitos LR, RC y CL.
- Ejercicio 9: (De investigación) La solución general de la ecuación de intensidad para un LRC con voltaje sinusoidal es $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \beta + \varphi) + A \cdot e^{-bt}$. Los valores de I_0 y φ se determinan con las fórmulas ya estudiadas. Supondremos que la constante A es igual a 1. La constante b sale de la expresión:

$$b = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (\text{ec. 9.12})$$

Realiza la hoja de cálculo para el circuito LRC con perturbación inicial. Grafica los resultados con los datos del ejercicio 4. Estima el tiempo necesario para que el circuito llegue a modo estacionario. ¿Cuál es el valor máximo de la intensidad de corriente?

ANEXO 9.I: Cálculo de I_0 y φ en un circuito LRC

Partimos de la hipótesis de que la señal de voltaje es:

$$V(t) = V_0 \sen(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 9.13})$$

Sabemos que la intensidad de corriente se rige por la ecuación diferencial:

$$L \cdot I'' + R \cdot I' + \frac{1}{C} I = V' \quad (\text{ec. 9.14})$$

Asumimos que nuestra solución es de la forma:

$$I(t) = I_0 \sen(\omega t + \beta + \varphi) \quad (\text{ec. 9.15})$$

Analicemos cada uno de los sumandos de la parte izquierda de la ecuación diferencial. Aplicamos las propiedades de la derivación, y las fórmulas de la trigonometría para la suma de ángulos:

$$\frac{1}{C} I = \frac{I_0}{C} \sen(\omega t + \beta + \varphi) = \frac{I_0}{C} \cos \varphi \sen(\omega t + \beta) + \frac{I_0}{C} \sen \varphi \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 9.16})$$

$$R \cdot I' = R I_0 \omega \cos(\omega t + \beta + \varphi) = -R I_0 \omega \sen \varphi \sen(\omega t + \beta) + R I_0 \omega \cos \varphi \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 9.17})$$

$$\begin{aligned} L \cdot I'' &= -L I_0 \omega^2 \sen(\omega t + \beta + \varphi) \\ &= -L I_0 \omega^2 \cos \varphi \sen(\omega t + \beta) - L I_0 \omega^2 \sen \varphi \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (\text{ec.9.18})$$

Al sumar y agrupar por senos y cosenos de la fase, obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{I_0}{C} \cos \varphi - R I_0 \omega \sen \varphi - L I_0 \omega^2 \cos \varphi \right) \sen(\omega t + \beta) \\ &+ \left(\frac{I_0}{C} \sen \varphi + R I_0 \omega \cos \varphi - L I_0 \omega^2 \sen \varphi \right) \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (\text{ec.9.19})$$

En el miembro derecho de la ecuación diferencial tenemos, $V' = V_0 \omega \cos(\omega t + \beta)$

Para que las funciones de ambos miembros coincidan, debe verificarse el sistema que resulta de igualar los coeficientes; este es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{I_0}{C} \cos \varphi - R I_0 \omega \sen \varphi - L I_0 \omega^2 \cos \varphi = 0 \\ \frac{I_0}{C} \sen \varphi + R I_0 \omega \cos \varphi - L I_0 \omega^2 \sen \varphi = V_0 \omega \end{array} \right\} \quad (\text{ec.9.20})$$

Si en este sistema agrupamos por seno y coseno, cancelamos $I_0 \omega$ de la primera ecuación y ω de la segunda, nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} -R \sen \varphi + \left(\frac{1}{C \omega} - L \omega \right) \cos \varphi = 0 \\ \left(\frac{1}{C \omega} - L \omega \right) \sen \varphi + R \cos \varphi = \frac{V_0}{I_0} \end{array} \right\} \quad (\text{ec.9.21})$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{C \omega} - L \omega = X_C - X_L = X$ (definiciones de capacitancia,

inductancia y reactancia):

$$\begin{cases} -R \operatorname{sen} \varphi + X \cos \varphi = 0 \\ X \operatorname{sen} \varphi + R \cos \varphi = \frac{V_0}{I_0} \end{cases} \quad (\text{ec.9.22})$$

De la primera ecuación, deducimos directamente que $\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}}$, fórmula para el ángulo de desfase.

Si elevamos al cuadrado ambas ecuaciones, y las sumamos, llegamos a:

$$X^2(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + R^2(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{V_0^2}{I_0^2} \quad (\text{ec.9.23})$$

Gracias al teorema fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, concluimos:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{X^2 + R^2}} \quad (\text{ec.9.24})$$

Y por último, de la definición de impedancia, $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$, llegamos a la *ley de Ohm generalizada*, fórmula que permite determinar la intensidad máxima:

$$\boxed{I_0 = \frac{V_0}{Z}} \quad (\text{ec.9.25})$$

Capítulo X: Superposición de Ondas

Objetivos

- Estudiar ondas mecánicas transversales: armónicas y escalonadas.
- Estudiar el principio de superposición de ondas.
- Implementar en CALC la superposición de distintos tipos de ondas, tanto numérica como gráficamente.
- Utilizar la superposición de ondas y la función BUSCARV de CALC para la elaboración de señales que codifiquen una palabra dada.

Contenidos

Onda transversal armónica, Onda transversal escalonada, Ecuación de onda, Fase, Fase inicial, Número de ondas, Longitud de onda, Frecuencia, Pulso (frecuencia angular), Periodo, Principio de Superposición, Interferencias destructivas y constructivas, Onda estacionaria, Nodos, Funciones de búsqueda, Codificación de señales.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas: (éstos se imparten normalmente en 4º / 5º de bachillerato)

Matemáticas

- Tema 7: Funciones
- Tema 12: Funciones goniométricas

Física

- Tema 19: Mecánica ondulatoria

Histórico-científica

Una *onda* es una perturbación que se propaga a través del espacio y del tiempo. Por *perturbación* podemos entender varios fenómenos físicos: variaciones de presión en un gas (ondas sonoras), movimiento transversal de los elementos de una cuerda, vibraciones consecutivas en un medio sólido (como es el caso de las ondas sísmicas), variaciones del campo electromagnético, etc.

La característica esencial en este tipo de fenómenos es la transmisión de energía de un punto a otro del espacio.

Las ondas no deben confundirse con el estudio de osciladores (trabajado en otro capítulo). En éstos no puede hablarse de desplazamiento de la vibración a lo largo del espacio o de transmisión de energía. Ocurre, sin embargo, que el tratamiento matemático tiene puntos en común con el caso ondulatorio, y que algunos conceptos son comunes en las dos situaciones: periodo, amplitud, fase, etc.

La física ondulatoria alcanza durante los últimos siglos una relevancia sin par, tanto por sus

implicaciones teóricas como prácticas. Valga de ejemplo la aserción de De Broglie¹:

“Toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico”.

En este tema nos centraremos en las ondas *transversales* mecánicas y electromagnéticas. En ellas la perturbación se produce perpendicularmente a la dirección de propagación.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en tres sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión graficaremos cinco ondas transversales armónicas y la superposición de todas ellas.
- En la segunda sesión ampliaremos lo anterior al caso de ondas escalonadas, y lo aplicaremos a la codificación de palabras.
- En la tercera sesión completaremos las actividades anteriores, realizaremos ejercicios individuales y un ejercicio de grupo de “simulación de transmisión telemática de mensajes”.

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Consideremos la siguiente función de dos variables:

$$f(t, x) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (\text{ec. 10.1})$$

Tal es la forma matemática de un *onda armónica*. Físicamente, podemos imaginarnos esta función a partir de los pulsos sobre una cuerda tensa horizontal. Cada elemento de la cuerda se desplazará verticalmente, de manera que la separación o altura respecto de su posición de equilibrio será una cierta cantidad $f(t, x)$.

Su significado es el siguiente:

- t es el tiempo en segundos
- x es la posición en metros
- A es la elongación o altura máxima, en metros
- k se denomina número de ondas². Sus unidades en el Sistema Internacional (S.I.) son radianes / metro. Su significado físico queda claro a través de la fórmula $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ que lo relaciona con la longitud de onda, λ , o distancia entre dos picos consecutivos
- ω es la velocidad angular, medida en radianes / segundo. Recordemos que esta magnitud está vinculada al periodo y la frecuencia respectivamente mediante: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- El argumento de la función seno recibe el nombre de fase. La variable φ denota a la fase inicial (en radianes)

¹ Premio Nobel de Física en 1929.

² En inglés *wave number*, en muchos textos traducido como *número de onda*. Hemos preferido la denominación en plural puesto que con k representamos el número de pulsos completos que caben en 2π radianes.

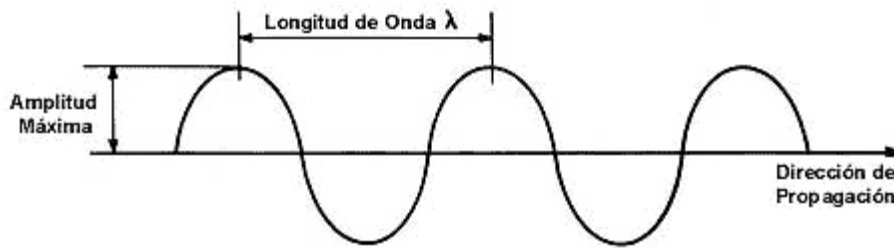


Fig. 10.1: Onda transversal en un instante dado

La representación gráfica de una función real de dos variables queda fuera de los objetivos del bachillerato, pero en este caso podemos usar un truco útil y con significado físico. Consiste en fijar instantes sucesivos de tiempo y en representar cada una de las funciones de una variable (la posición x) resultantes. Tendremos así *instantáneas* o *fotografías* del movimiento ondulatorio.

Por supuesto, no todas las ondas están definidas mediante la función seno, aun cuando ésta aparece con frecuencia en los problemas prácticos. Otro ejemplo lo dan las *funciones escalonadas*, que podemos definir así:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - \alpha t - \varphi| > k \\ A & \text{si } |x - \alpha t - \varphi| \leq k \end{cases} \quad (\text{ec. 10.2})$$

Aquí:

- α es la *rapidez*³ de desplazamiento de la onda. Se mide en metros / segundo
- k es la longitud del escalón, en metros
- A da la altura del escalón, en metros
- φ representa la posición del *centro* del escalón en el instante inicial. Es por tanto el análogo escalonado de la fase inicial en las funciones armónicas, aunque en este caso se mide en metros.

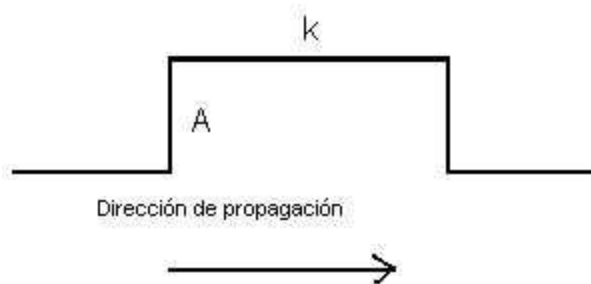


Fig. 10.2: Onda transversal escalonada

Una de las propiedades características de las ondas es el fenómeno de *interferencia* o *superposición*. Este se da cuando dos o más perturbaciones actúan simultáneamente en un punto del

3 Usaremos para α también el término *velocidad* o *velocidad de onda*, teniendo la precaución de no confundir este concepto con la *función velocidad*, $v(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$

espacio, dando como resultado una nueva onda. Las características de la onda final, se conocen gracias al *Principio de Superposición*:

“Cuando dos ondas se encuentran en un punto o una región del espacio, el resultado es una nueva onda cuya perturbación es la suma de las perturbaciones de las dos ondas originales”.

Veamos tres casos típicos de superposición. Supongamos que en una cuerda tensa provocamos dos perturbaciones dadas por las fórmulas:

$$f_1(t, x) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (\text{ec. 10.3})$$

$$f_2(t, x) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (\text{ec. 10.4})$$

En este caso, las ondas originales tienen iguales la amplitud, la longitud de onda y la frecuencia, y difieren en la fase inicial (asumimos, sin pérdida de generalidad, que en el primer caso ésta es nula y en el segundo vale φ ⁴).

Por el Principio de Superposición, la onda resultante será:

$$f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x) \quad (\text{ec. 10.5})$$

Ahora utilizamos las fórmulas de la trigonometría de transformación de sumas en productos, recordemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B &= 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B &= 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} & \cos A - \cos B &= -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \end{aligned} \quad (\text{ec. 10.6})$$

Así podemos escribir la siguiente expresión para $f(t, x)$:

$$f(t, x) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{ec. 10.7})$$

Dado que el término $\cos \frac{\varphi}{2}$ es constante, el resultado es una onda armónica con las siguientes características:

- Su longitud de onda y su frecuencia son las mismas que las de las ondas originales.
- Está desfasada $\frac{\varphi}{2}$ radianes respecto a las ondas originales.
- Su amplitud depende del valor de la fase inicial. De hecho se dan estos dos casos extremos:
 - Si $\varphi = 0$, esto es, si las ondas de partida *están en fase*, la amplitud resulta el doble de la original. Hablamos entonces de *interferencia constructiva*.
 - Si $\varphi = \pi$, es decir, cuando las ondas *están en oposición de fase*, la onda resultante se anula completamente. Se trata de una *interferencia destructiva*.

4 Se dice que la segunda señal está desfasada φ radianes con respecto a la primera.

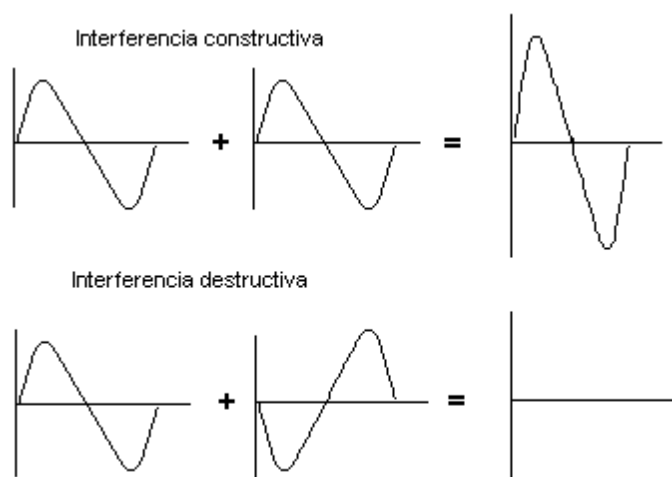


Fig. 10.3: Interferencias

El tercer caso de interferencia que estudiamos aquí es el de las *ondas estacionarias*. Un ejemplo de este fenómeno lo tenemos en el funcionamiento de los instrumentos musicales de cuerda. Al efectuar una pulsación sobre una cuerda tensa sujeta por uno de sus extremos, transmitimos una onda transversal que se refleja al llegar al extremo sujeto, dando lugar a una segunda onda de características idénticas a la primera, pero de sentido opuesto. Matemáticamente, las ondas que interfieren en tal situación son:

$$f_1(t, x) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (\text{ec. 10.8})$$

$$f_2(t, x) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (\text{ec. 10.9})$$

La resultante es:

$$f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x) = 2A \cos(\omega t) \operatorname{sen}(kx) \quad (\text{ec. 10.10})$$

Se observa que ya no se trata de una onda del mismo tipo que las originales. Sin embargo esta nueva perturbación tiene la propiedad curiosa de que en ciertas posiciones la elongación es nula en cualquier instante. Así ocurrirá cuando $\operatorname{sen} kx = 0$, o $x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots$. Estos puntos reciben el nombre de *nodos* de la onda estacionaria. Si los expresamos en función de la longitud de onda, vemos que son múltiplos enteros de la mitad de dicha magnitud, $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$.

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

Primera parte: Superposición de ondas armónicas.

- Tarea 1: Introducción de los datos fijos.

Nuestro objetivo es representar distintas ondas armónicas. Para esto graficaremos las ondas en un instante prefijado de tiempo. Es decir, vamos a “fotografiar” la onda en un momento concreto. El tiempo, la amplitud y el intervalo espacial representado se introducen en la sección de Datos Fijos.

Como siempre, recomendamos que el alumno escriba las unidades en columna separada, aun cuando éstas no son necesarias para la construcción de la hoja de cálculo.

<u>Datos fijos</u>	<u>Unidades</u>
Posición inicial	0 metros
Incremento	0,5 metros
Amplitud	1 metros
Instante	2 segundos

Fig. 10.4: Datos fijos

- Tarea 2: Tabla de datos numéricos de las señales

Preparamos una tabla para estudiar la superposición de cinco ondas. Por simplicidad, asumiremos que todas ellas tienen la misma amplitud y que su fase inicial vale 0. La expresión de cada señal vendrá dada por $f_i(t, x) = A \sin(k_i x - \omega_i t)$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Introduciremos pues dos columnas para los datos variables de cada onda, e implementaremos la fórmula anterior para diez valores de x . Por último consideraremos la suma de todas las señales o *superposición*.

	Nº de onda (rad/m)	Pulso (rad/s)	Posición											
			0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5		
1ª señal	1	1	-0,91	-1	-0,84	-0,48	0	0,48	0,84	1	0,91	0,6		
2ª señal	2	2	0,76	-0,14	-0,91	-0,84	0	0,84	0,91	0,14	-0,76	-0,96		
3ª señal	3	3	0,28	0,5	0,14	-1	0	1	0,14	-0,98	-0,28	0,94		
4ª señal	4	4	-0,99									0,99	-0,54	
5ª señal	5	5	0,54	-0,94	0,36	-0,6	0	0,6	-0,36	0,94	-0,54	-0,07		
Superposición			-0,32	-0,82	-0,18	-3,83	0	3,83	0,18	0,82	0,32	-0,03		

Fig. 10.5: Valores numéricos de las ondas armónicas en un instante dado

- Tarea 3: Gráficas de las ondas.

A partir de los datos anteriores, construiremos un gráfico de línea con las siguientes opciones:

Rango de datos: los valores numéricos calculados, incluyendo la superposición.
 Valores del eje de abscisas: hacemos referencia al intervalo espacial introducido.
 Etiquetas: usamos los nombres que hemos puesto a las ondas: 1ª señal, 2ª señal, etc.
 Grosor de línea: resaltamos la correspondiente a la suma.

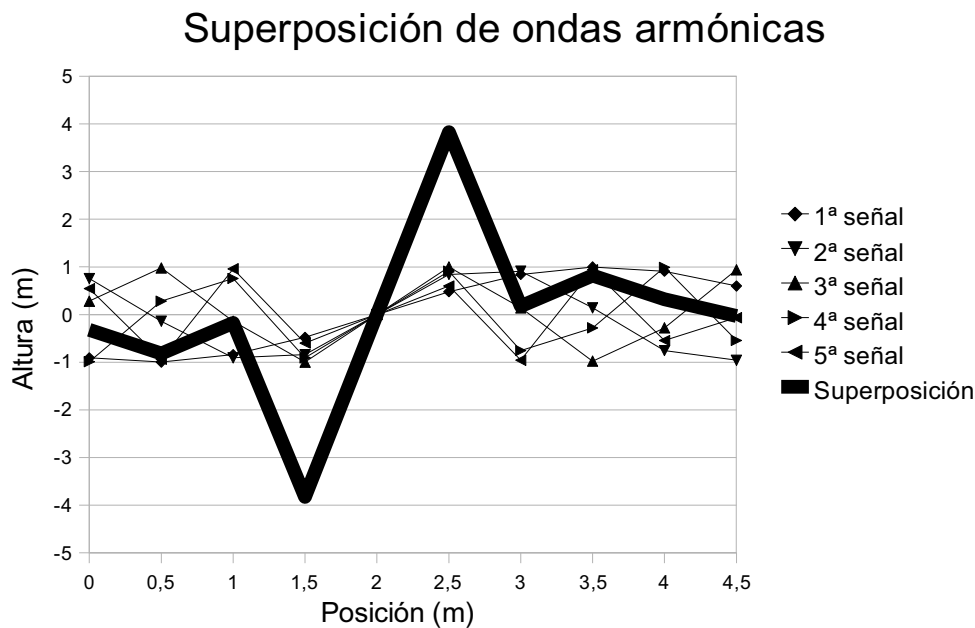


Fig. 10.6: Algunas ondas armónicas y su interferencia

Segunda parte: Superposición de ondas escalonadas

Podemos reutilizar la hoja anterior. Para ello: botón derecho del ratón sobre la pestaña de la hoja actual y seleccionamos “Mover/Copiar hoja... >> Casilla Copiar >> Aceptar”. A partir de aquí sólo tenemos que añadir y modificar algunos cálculos⁵.

- Tarea 1: Datos fijos

No es necesario realizar cambios aquí.

- Tarea 2: Valores numéricos

Las variables número de ondas y pulso se tornan en *escalón* y *velocidad*. La fórmula que implementamos para el cálculo de la elongación en cada punto es⁶:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - \alpha t| > k \\ A & \text{si } |x - \alpha t| \leq k \end{cases}, \text{ donde } k \text{ y } \alpha \text{ son respectivamente el escalón y la rapidez.}$$

- Tarea 3: Gráfico

Basta repetir los pasos anteriores o bien usar el siguiente truco: doble pulsación sobre el gráfico >> Botón derecho >> Rango de datos >> Cambiamos el nombre la hoja original (por ejemplo, *armónicas*) por el de la hoja actual (por ejemplo, *escalonadas*).

El resultado de estos procesos debería ser algo como lo siguiente:

⁵ Esto no es válido para el gráfico, ya que por defecto CALC utiliza los datos de la hoja original (y no los de la hoja que acabamos de copiar) para construirlo.

⁶ Por simplicidad, hemos supuesto que la posición inicial φ es nula.

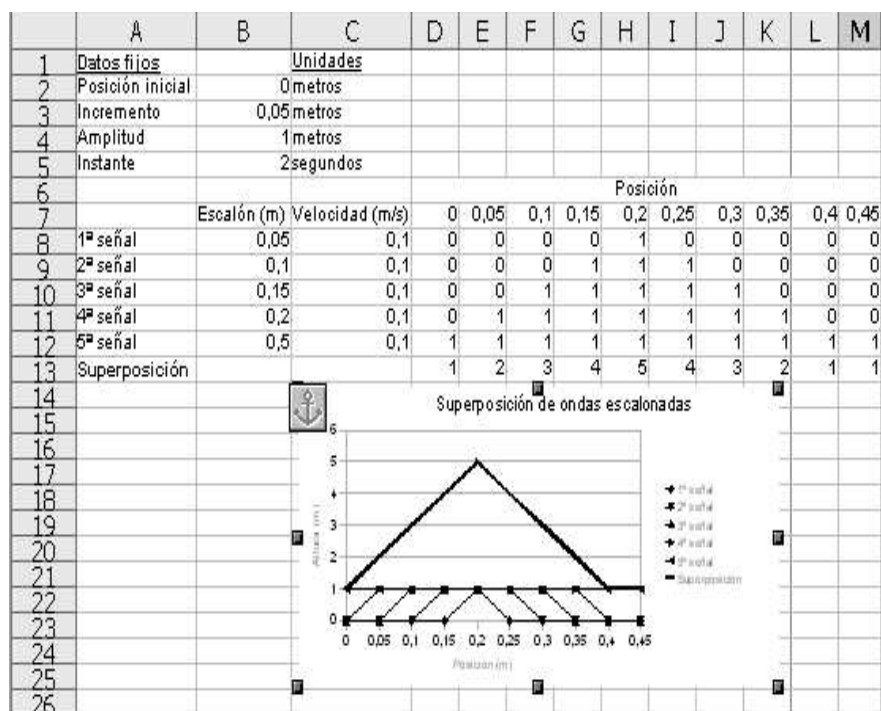


Fig. 10.7: Hoja de cálculo para la superposición de ondas escalonadas

Tercera parte: Aplicación a la codificación de señales.

La *Telemática* es la aplicación de las técnicas de la telecomunicación y de la informática a la transmisión de información computarizada⁷. Entre sus aplicaciones se encuentran las revoluciones tecnológicas de las últimas décadas, como la telefonía móvil, la televisión digital o la web sin cables.

Un problema básico de esta disciplina consiste en cómo transmitir un mensaje mediante ondas electromagnéticas. Parte de la solución pasa por un proceso de transformación del texto original en ondas armónicas y viceversa. Ahora proponemos usar la superposición de ondas para realizar una parte de dicho proceso.

Para ello comenzamos creando una nueva hoja, *Códigos*, en la que introduciremos los signos del alfabeto castellano y los diez dígitos numéricos. Añadiremos dos columnas con los números asociados a cada símbolo.

Símbolo	Código de escalón	Código de frecuencia
a	0,01	0,01
b	0,02	0,02
c	0,03	0,03
d	0,04	0,04
e	0,05	0,05
f	0,06	0,06
g	0,07	0,07
h	0,08	0,08
i	0,09	0,09

Fig. 10.8: Códigos

La codificación simple que realizaremos consistirá en escribir una palabra de a lo más cinco letras, asociando a cada una de ellas una señal escalonada cuyo código de escalón sea el incluido en la tabla de códigos. El mensaje final será la onda superpuesta de cada una de las letras⁸.

⁷ Diccionario de la RAE

⁸ Esta forma de proceder tiene el inconveniente de que se representan con la misma señal palabras como AMOR y RAMO (que contienen las mismas letras). La solución de tal problema pasa por asignar un valor adicional al código, dependiente de la posición que ocupa cada letra. Dejamos esta tarea para los ejercicios de alumno. En el anexo 10.I, proponemos una posible respuesta.

A continuación, copiamos la hoja *escalonadas*, llamando a la nueva hoja *codificación*. Aquí añadimos una nueva columna en la que introduciremos las cinco letras de la palabra. Después sólo tenemos que modificar el gráfico, para que su rango de datos corresponda a la hoja actual y añadir una fórmula en la columna de escalón, para que su valor se busque en la hoja de códigos.

Usamos aquí la función BUSCARV, cuya sintaxis es la siguiente:

=BUSCARV(criterio de búsqueda;matriz;índice;ordenado)

siendo:

- Criterio de búsqueda: valor que buscamos. En nuestro caso, cada una de las letras de la palabra.
- Matriz: rango de datos donde buscar. En nuestro caso será la referencia *Códigos.A1:C39*.
- Índice: se refiere a la columna, dentro del rango especificado, donde se busca el valor que devuelve la función. Escribiremos "2" para que la codificación se efectúe con la columna *escalón*.
- Ordenado: es un parámetro opcional, que rellenaremos como "0" para que la búsqueda sea más precisa.

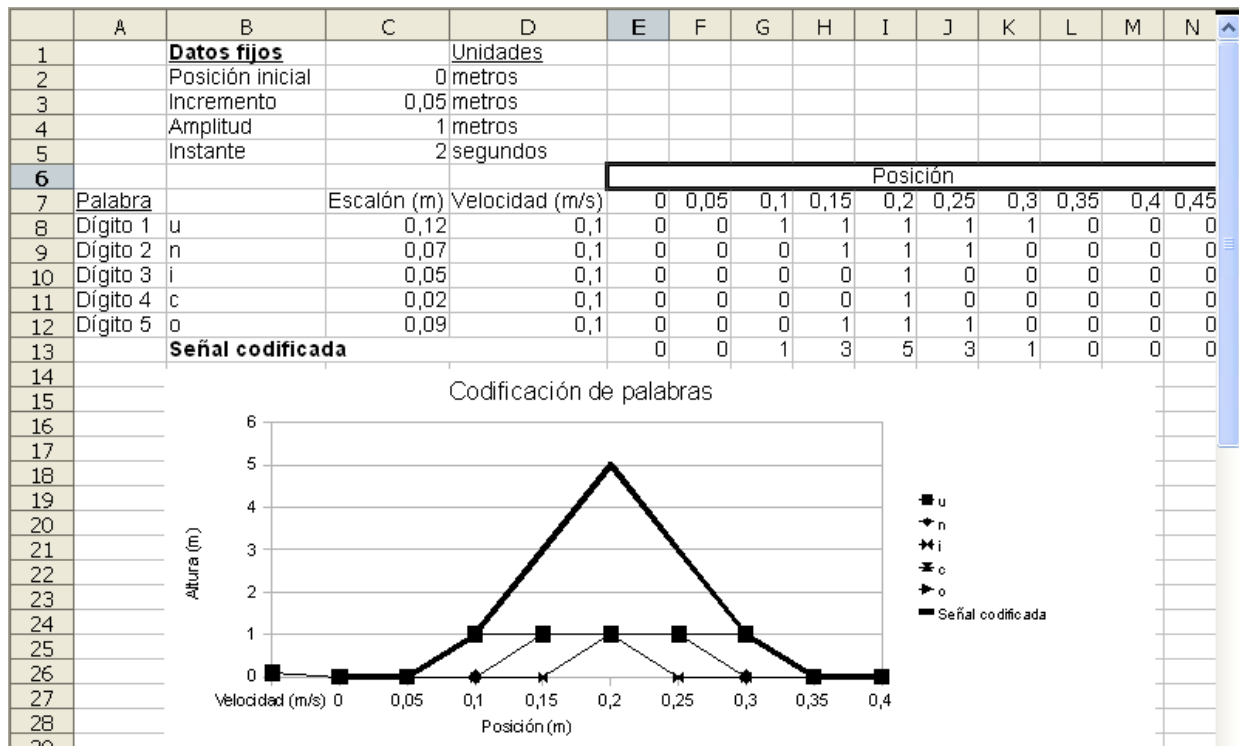


Fig. 10.9: Hoja para la codificación de palabras

Criterios de Evaluación

- Determinar la longitud de onda y el número de ondas; determinar el periodo, la frecuencia y la pulsación; implementar las fórmulas en la hoja de cálculo.
- Implementar en CALC las fórmulas de ondas transversales armónicas y escalonadas y realizar gráficos de línea con estos resultados.

- Implementar en CALC la interferencia de varias señales armónicas y escalonadas.
- Utilizar las hojas de cálculo para resolver problemas de mecánica ondulatoria.
- Efectuar la codificación de palabras sencillas transformándolas en ondas transversales.
- Realizar ejercicios de ampliación.

Corolario

La práctica que proponemos puede servir al alumno para afianzar los contenidos que previamente hayamos desarrollado en el aula convencional. Además permitirá experimentar con la superposición de ondas, ya que una vez construida la gráfica, el alumno puede modificar fácilmente los parámetros de cada señal y ver la onda superpuesta inmediatamente. Por último, el aspecto de codificación de señales supondrá una introducción elemental a los problemas de la telemática.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: En un instante dado, la diferencia entre dos crestas consecutivas de una onda armónica vale 3 metros. Determina el número de ondas.

Sol. $k = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m}$

- Ejercicio 2: Calcula el periodo y la velocidad angular de una onda transversal armónica sabiendo que su frecuencia es de 60 Hz.

Sol. $T = 0,017 \text{ s}$, $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$

- Ejercicio 3: Determina la ecuación de onda de una señal transversal armónica a partir de los siguientes datos: amplitud, 2 m; longitud de onda, 1 m; periodo, 0,03 s; fase inicial, 2 rad. Calcula la elongación en la posición $x = 0,02 \text{ m}$ en los instantes de tiempo $t_1 = 0 \text{ s}$ y $t_2 = 1 \text{ s}$.

Sol. $f(t_1, 0,02) = 1,7 \text{ m}$, $f(t_2, 0,02) = 0,06 \text{ m}$

- Ejercicio 4: Una onda escalonada se transmite según la expresión:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - 5t - 1| > 3 \\ 10 & \text{si } |x - 5t - 1| \leq 3 \end{cases}$$

Identifica la velocidad de la onda y determina la elongación en el instante $t = 3 \text{ s}$ en las posiciones $x_1 = 2 \text{ m}$ y $x_2 = 4 \text{ m}$

Sol. $f(3, x_1) = 0$, $f(3, x_2) = 0$

- Ejercicio 5: Una onda armónica $f(t, x) = 3 \text{ sen}(\frac{\pi}{2}x - \pi t + \frac{\pi}{6})$ se transmite por una cuerda fija en uno de sus extremos, y se refleja produciendo una onda simétrica

$f(t, x) = 3 \text{ sen}(\frac{\pi}{2}x + \pi t + \frac{\pi}{6})$. Determina numérica y gráficamente la interferencia de

ambas señales. Estima, representando las gráficas en diversos instantes de tiempo, las posiciones de los nodos.

- Ejercicio 6: (Actividad de grupo) Representa un mensaje secreto utilizando la hoja *Codificación*, copia el gráfico obtenido e intercámbialo con un compañero. Trata de descifrar el mensaje que te dan realizando pruebas gráficas con la hoja de cálculo.
- Ejercicio 7: (De ampliación) La codificación que presentamos en esta práctica no distingue el orden en el que se introducen los símbolos. Añade una tercera columna, *posición inicial*, a la hoja de cálculo *Codificación*, en la que podamos introducir el valor de la posición inicial según el orden de cada símbolo. Modifica los cálculos y los gráficos convenientemente.
- Ejercicio 8: (De ampliación) Determina la interferencia de *ondas triangulares*⁹, con la metodología seguida en este capítulo.
- Ejercicio 9: (De investigación) Busca información acerca del *Análisis de Fourier*: en qué consiste y cómo se aplica para *decodificar* señales.



Fig. 10.10: Onda triangular

⁹ Una *onda triangular* es la que obedece a una expresión del tipo

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - \varphi - \alpha t| > k/2 \\ 2Ax/k + A - (\varphi + \alpha t)2A/k & \text{si } 0 \leq \varphi + \alpha t - x \leq k/2 \\ -2Ax/k + A + (\varphi + \alpha t)2A/k & \text{si } 0 \leq x - \varphi + \alpha t \leq k/2 \end{cases}$$

siendo

- φ la abscisa del pico de la cresta de la onda en el instante inicial
- A la amplitud de la onda
- k la longitud de la base del triángulo
- α la velocidad de la onda

ANEXO 10.I: Codificación según amplitudes. Decodificación de palabras

En nuestro planteamiento original, cada letra del alfabeto se traduce en una longitud distinta para el escalón. Ahora elegimos otro procedimiento, que tiene la ventaja de que cada uno de los dígitos queda representado en un extremo distinto de la gráfica final.

Consideremos de nuevo la función de onda escalonada:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - \alpha t - \varphi| > k \\ A & \text{si } |x - \alpha t - \varphi| \leq k \end{cases} \quad (\text{ec. 10.11})$$

Fijemos la longitud del escalón k y la velocidad de onda α . Y consideremos para cada letra de la palabra a codificar, una amplitud distinta, A . Los valores constantes se introducirán en el apartado de “datos fijos” como hacemos habitualmente. Las amplitudes, se añadirán en una nueva columna de la hoja de cálculo codificación. Consideremos asimismo que la fase inicial φ representa la posición del dígito en la palabra.

Entonces, aplicando el mismo procedimiento que el estudiado en la práctica, obtenemos una codificación como la expuesta en la siguiente figura. Por simplicidad, hemos elegido el instante inicial nulo.

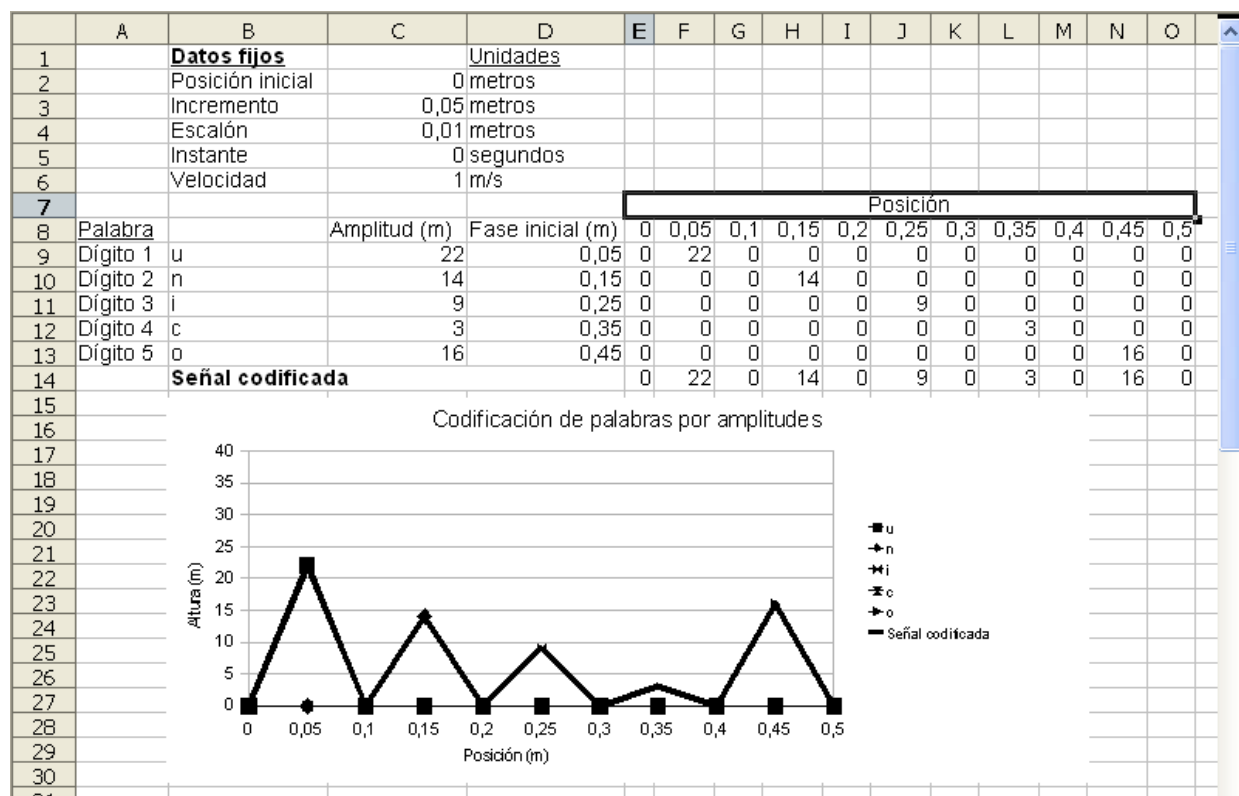


Fig. 10.11: Codificación de palabras por amplitudes.

A continuación, nos planteamos el problema inverso: dados los datos numéricos correspondientes a la onda superpuesta (fila “Señal codificada”), se quiere obtener la palabra de la que provienen.

Para esto, creamos una nueva hoja de cálculo en la que introducimos dichos datos y utilizamos la función BUSCARV de forma inversa. El único detalle técnico a sortear, es que esta función busca los datos siempre en la primera columna de la matriz especificada. Por ello, añadimos una columna anexa a la de “Amplitudes” en la hoja de “Códigos” repitiendo los símbolos asociados a cada número.

El resultado de ambas operaciones lo tenemos en los gráficos que vemos a continuación.

	A	B	C	D	E
1	Símbolo	Código de escalón	Código de frecuencia	Código de amplitud	Símbolo
2	a	0,010	0,01	1	a
3	b	0,015	0,02	2	b
4	c	0,020	0,03	3	c
5	d	0,025	0,04	4	d
6	e	0,030	0,05	5	e
7	f	0,035	0,06	6	f
8	g	0,040	0,07	7	g
9	h	0,045	0,08	8	h
10	i	0,050	0,09	9	i
11	j	0,055	0,1	10	j
12	k	0,060	0,11	11	k
13	l	0,065	0,12	12	l
14	m	0,070	0,13	13	m
15	n	0,075	0,14	14	n
16	ñ	0,080	0,15	15	ñ
17	o	0,085	0,16	16	o
18	p	0,090	0,17	17	p

Fig. 10.12: Modificación de la hoja "Códigos".

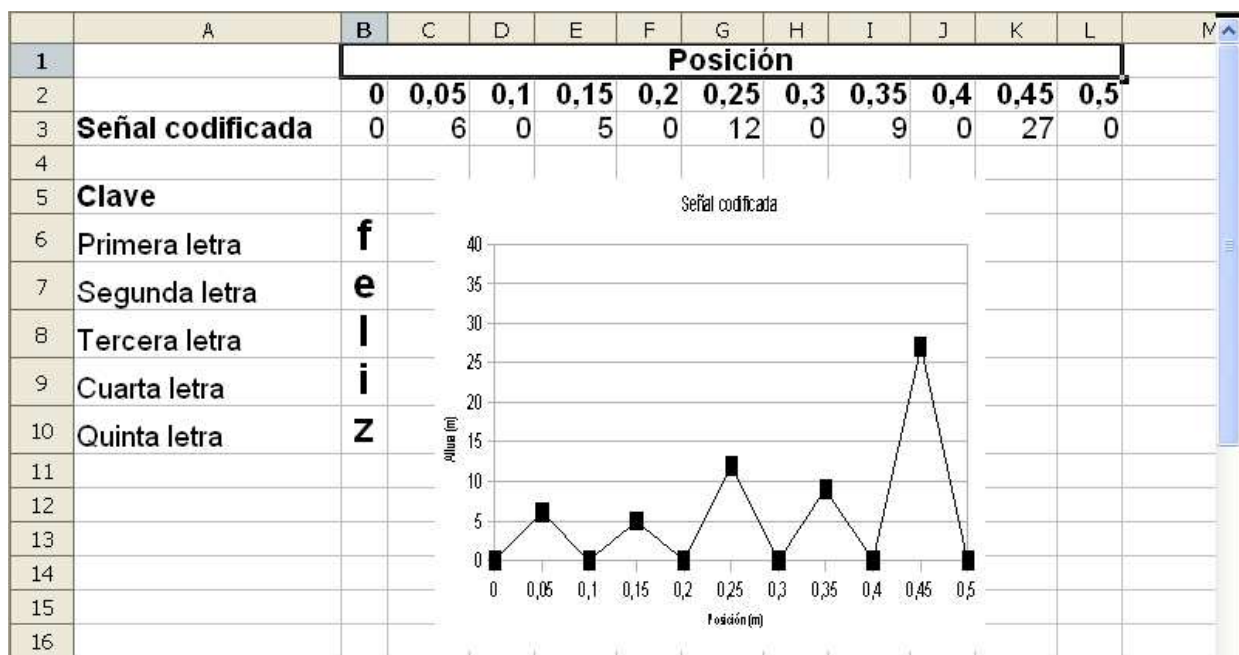


Fig. 10.13: Decodificación de señales.

Por simplicidad, en la hoja de cálculo de la figura 10.13 hemos decodificado fijándonos, una a una, en las posiciones no nulas de la señal superpuesta, esto es:

Primera letra: =BUSCARV(C3;Códigos.\$D\$1:\$E\$39;2;0)

Segunda letra: =BUSCARV(E3;Códigos.\$D\$1:\$E\$39;2;0)

Tercera letra: =BUSCARV(G3;Códigos.\$D\$1:\$E\$39;2;0)

Cuarta letra: =BUSCARV(I3;Códigos.\$D\$1:\$E\$39;2;0)

Quinta letra: =BUSCARV(K3;Códigos.\$D\$1:\$E\$39;2;0)

Un ejercicio interesante de ampliación, consiste en modificar estas fórmulas para el caso en el que la señal nos viene dada en un tiempo $t > 0$.

Capítulo XI: Rebotes de una pelota

Objetivos

- Estudiar la cinemática de dos dimensiones, a través de la caída libre de un objeto con velocidad inicial horizontal no nula.
- Representar gráfica y numéricamente en CALC la simulación de rebotes de una pelota sin pérdidas de energía.
- Estudiar el efecto de las pérdidas energéticas por choque en la caída libre en dos dimensiones.
- Representar gráfica y numéricamente en CALC la simulación de rebotes de una pelota con pérdidas de energía por choques.
- Realizar gráficos de doble entrada.
- Utilizar las funciones BUSCARV, CONTAR.SI y CONCATENAR de CALC.

Contenidos

Cinemática de dos dimensiones, Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.), Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.), Posición, Velocidad, Aceleración, Tratamiento vectorial de las magnitudes cinemáticas, Componentes de la velocidad, Energía cinética, Energía potencial gravitatoria, Energía total, Teorema de conservación de la energía, Pérdidas energéticas, Periodicidad de funciones, Funciones definidas a trozos.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta del currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas:

Matemáticas

- Tema 7: Funciones.
- Tema 8: Las funciones elementales.
- Tema 22: Sucesiones de números reales.

Física

- Tema 2: Cinemática.
- Tema 4: Trabajo y energía.

Histórico-científica

La *balística*¹ es la ciencia que estudia la trayectoria de los proyectiles. Esta rama de la física tiene un origen antiguo, ligado a sus aplicaciones militares y cinegéticas. En la actualidad la encontramos también vinculada a campos más pacíficos, como la *balística forense* o el que centra esta práctica, el deportivo.

¹ Esta es la acepción clásica admitida por la RAE. Otra definición más precisa se circunscribe al movimiento de proyectiles en el interior y el exterior de las armas de fuego.

En la Edad Media, siguiendo a Aristóteles, se pensaba que un objeto lanzado horizontalmente con una cierta inclinación, ascendía por una línea recta oblicua hasta llegar a su altura máxima, para caer a continuación verticalmente. Esta era el modelo físico para la catapulta.

Tras sufrir algunas modificaciones², la citada teoría se mantuvo hasta la llegada de la pólvora y la invención de las primeras armas de fuego. Entonces la experiencia de los artilleros indujo a pensar que una bala de cañón se movía en línea recta horizontal cuando era disparada con inclinación nula, mientras que en el resto de casos describía dos líneas rectas concatenadas con un arco de circunferencia.

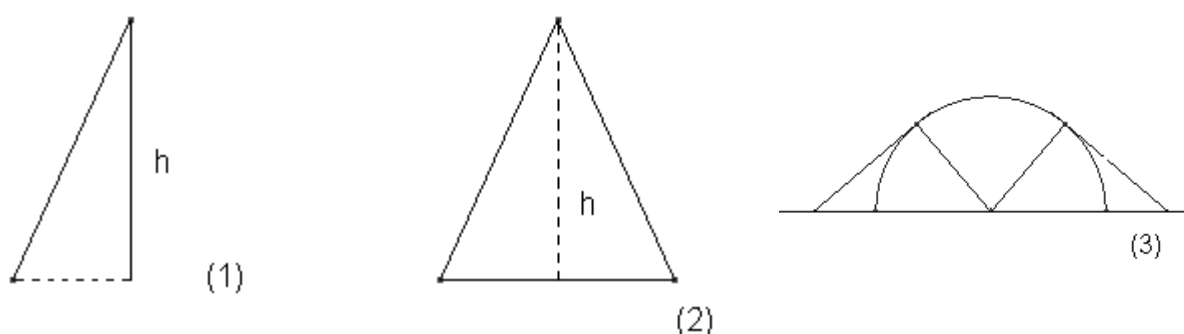


Fig. 11.1: Trayectorias prerrenacentistas. (1) Modelo aristotélico; (2) Modelo triangular; (3) Rectas y arco de circunferencia

Ya en el Renacimiento, Niccolo Fontana, alias Tartaglia (1500-1557), razona que la trayectoria del proyectil debía ser *continuamente curva*. Tal idea empírico-deductiva se ve refrendada por los estudios de Galileo Galilei (1564-1642). El famoso científico toscano trabajó durante algún tiempo como asesor militar de la República Veneciana. Fruto de ello se obtuvo la formulación actual correcta: en ausencia de rozamiento, la bala sigue siempre una parábola. Años más tarde, la dinámica y gravitación newtonianas consiguieron explicar porqué son las curvas de Apolonio las que están detrás de estos fenómenos físicos.

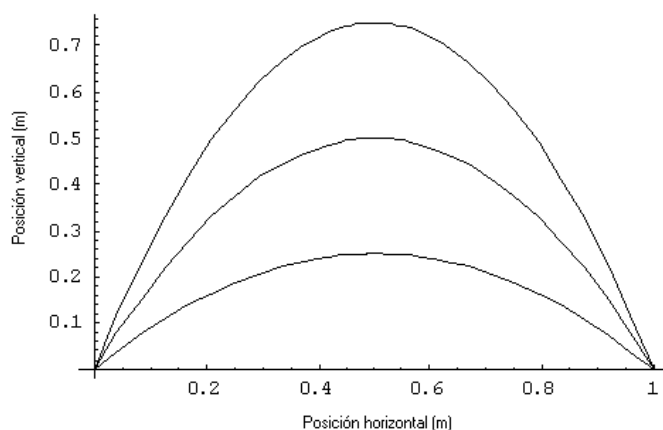


Fig. 11.2: Trayectorias parabólicas.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

² Otro modelo indicaba que la curva descrita forma un triángulo isósceles con base el desplazamiento total horizontal.

- En la primera sesión repasaremos la caída libre en dos dimensiones y estudiaremos con CALC los rebotes de una pelota de tenis bajo la hipótesis de ausencia de pérdidas energéticas.
- En la segunda sesión, ampliaremos la práctica al caso en el que en cada bote se pierde un porcentaje de la energía total. Resolveremos ejercicios individuales y de ampliación.

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Cuando pasamos de la cinemática unidimensional a la plana o espacial, la noción de vector resulta una herramienta muy útil. Así consideramos los vectores posición, velocidad y aceleración, respectivamente $\vec{s}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$, que en el caso plano tendrán dos componentes. De forma genérica, escribiremos un vector cualquiera como $\vec{u}=(u_x, u_y)$.

Nos planteamos describir la posición en cada instante de una pelota de tenis. Por tanto, las magnitudes citadas serán en realidad *funciones vectoriales* dependientes del tiempo.

La única fuerza que actúa en nuestro problema, una vez dado el impulso inicial a la pelota, es el peso. Por tanto el vector aceleración será³ $\vec{a}=(0, g)$.

Por otro lado, si descomponemos el vector posición en sus componentes horizontal y vertical, $\vec{s}(t)=(x(t), y(t))$, observamos que la primera coordenada no tiene aceleración, siguiendo un M.R.U., mientras que la segunda posee la aceleración gravitatoria y es entonces un M.R.U.A.

Por último, el impulso dado a la pelota en el instante inicial se traduce en el vector velocidad inicial, que denotaremos como⁴ $\vec{v}(0)=(v_x, v_y(0))$.

Llegamos así a las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_x t \\ y(t) &= y_0 + v_y(0)t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{ec. 11.1})\end{aligned}$$

Dado que la posición horizontal es lineal respecto al tiempo, podemos sustituir éste por x en la expresión de la posición vertical, obteniendo así y como función cuadrática de x . Es decir, la *trayectoria* del móvil corresponde a una parábola, tal como demostró Galileo.

Este modelo físico debe completarse teniendo en cuenta la restricción que supone el bote en el suelo. Esto plantea dos cuestiones: *¿cómo hacer para que la componente vertical no tome valores negativos?*, *¿cuáles son las funciones que describen el movimiento tras el primer rebote?*

Para la primera, basta determinar el tiempo que tarda el móvil en regresar a la ordenada nula. Éste será la primera⁵ solución positiva de la ecuación $y(t)=0$. Resolviendo, vemos que:

3 g es la aceleración de la gravedad con signo. Elegiremos un sistema de referencia con origen en el suelo en el que la altura hacia arriba es positiva. Por tanto, $g = -9,8 \text{ m/s}^2$

4 Insistimos en que la componente horizontal de la velocidad es constante, y por eso $v_x \equiv v_x(0)$. Por comodidad indicaremos también $v_y(0) \equiv v_0$.

5 Cuando la ordenada inicial no sea nula (en ese caso será la segunda).

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{g} \quad (\text{ec. 11.2})$$

de donde:

$$t_1 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{g} \quad (\text{ec. 11.3})$$

En ese instante, el choque de la bola de tenis con el suelo produce un nuevo “impulso inicial” que, bajo la *hipótesis de ausencia de pérdidas energéticas*, será exactamente igual al del bote anterior. Esto significa que se reproduce la misma parábola una y otra vez. Matemáticamente hablamos de una *función periódica*, $y(t+p)=y(t) \quad \forall t$. El periodo p será igual a la diferencia entre dos “suelos” consecutivos, es decir, a la resta de las soluciones obtenidas en la ecuación $y(t)=0$:

$$p = \frac{-2\sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{g} \quad (\text{ec. 11.4})$$

En el caso $y_0=0$ (cuando la pelota sale del suelo) el primer bote se escribe con la expresión simplificada $y(t)=v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, mientras que la función que describe la componente vertical de *todos* los rebotes se define como:

$$f(t) = y(t \text{ MOD } p) \quad (\text{ec. 11.5})$$

Aquí *MOD* indica el resto módulo p de t , es decir⁶, $t \text{ MOD } p = t - \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor p$.

Si la posición inicial no tiene altura cero, entonces hemos de *desplazar* convenientemente la curva. Para ello determinamos el parámetro *desfase*, d , definido como el primer instante negativo, en valor absoluto, en el que la pelota debía estar en el suelo. Esta es justamente la otra solución de la ecuación $y(t)=0$, a saber:

$$d = \left| \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{g} \right| \quad (\text{ec. 11.6})$$

Entonces la función que nos da los botes sin pérdidas energéticas o *rebotes perfectos* será:

$$f(t) = y((t+d) \text{ MOD } p - d) \quad (\text{ec. 11.7})$$

La (ec. 11.7) se obtiene observando que el primer bote completo ocurre en el *intervalo fundamental* $I = [-d, p-d]$. Para hallar los botes sucesivos, hemos de trasladar los intervalos $[p-d, 2p-d], [2p-d, 3p-d], [3p-d, 4p-d], \dots$ al fundamental. esto se consigue por medio de la transformación:

$$J = [p-d, 2p-d] \xrightarrow{+d} [p, 2p] \xrightarrow{\text{MOD } p} [0, p] \xrightarrow{-d} I = [-d, p-d] \quad (\text{ec. 11.8})$$

⁶ $\lfloor x \rfloor$ es la función *parte entera*.

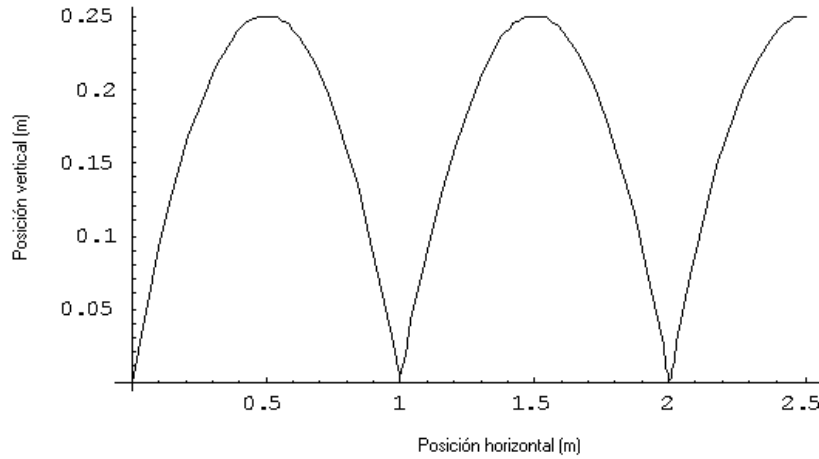


Fig. 11.3: Ejemplo de función periódica para la posición vertical de la pelota.

No debemos confundir la gráfica de esta función con la *trayectoria* del móvil. En la gráfica, los ejes indican el tiempo (abscisas) y la altura (ordenadas).

Pasamos ahora al caso de la pelota que se amortigua en cada golpe con el suelo, que llamaremos de *rebotes amortiguados*.

Como las únicas pérdidas de energía se deben al contacto con el suelo⁷, el primer tramo del móvil resulta igual que en el caso anterior. Quedan planteadas las mismas dos cuestiones que en aquel caso. La respuesta a la primera de ellas, cuándo toca la bola el suelo por primera vez, no varía.

Pero ahora ya no podemos hablar de periodicidad de la función, ya que el impulso que recibirá la bola tras el bote será una fracción del impulso inicial. Lo que sí que está claro es que la componente horizontal del movimiento no va a modificarse, mientras que la vertical corresponderá a una función cuadrática del tiempo *con distintos parámetros en cada rebote*.

Fijemos alguna notación. Sean $t_0, t_1, t_2, \dots$ los instantes en los que la pelota toca el suelo, $h_0, h_1, h_2, \dots$ las alturas máximas en cada rebote, $v_0, v_1, v_2, \dots$ las velocidades máximas en cada rebote. Escribamos como EP_n, EC_n, ET_n las energías potencial, cinética y total de la bola en el n -ésimo rebote. Representemos las pérdidas energéticas mediante la relación $ET_n = r ET_{n-1}$, siendo pues r el tanto por uno de tasa de reducción de energía de un bote al siguiente.

Por simplicidad en los cálculos, supondremos que la pelota parte del suelo, $y_0=0$. Entonces las velocidades máximas se alcanzarán siempre en el momento de partida de cada bote (o de llegada justo antes del bote siguiente). Sea $y_n(t) = v_n(t - t_n) + \frac{1}{2}g(t - t_n)^2$ la función que representa al bote n -ésimo⁸, cuyo dominio se restringe al intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Es decir, la altura en este problema se escribirá así:

⁷ No tenemos en cuenta el rozamiento del aire, ni otros efectos.

⁸ La aceleración gravitatoria no cambia obviamente en los botes sucesivos.

$$f(t) = y_n(t) \quad \text{si} \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{ec. 11.9})$$

Hemos de determinar, por tanto, los valores de los tiempos de contacto y de las velocidades máximas. En el segundo caso utilizaremos un razonamiento energético: en el momento de tocar el suelo, la energía potencial es nula y la cinética iguala a la total. Entonces:

$$ET_n = r ET_{n-1} \Rightarrow EC_n = r EC_{n-1} \Rightarrow \frac{mv_n^2}{2} = r \frac{mv_{n-1}^2}{2} \Rightarrow v_n = \sqrt{r} v_{n-1} \quad (\text{ec. 11.10})$$

Lo que nos dice que las velocidades forman una progresión geométrica de razón $\sqrt{r}$; luego:

$$v_n = (\sqrt{r})^n v_0 = r^{n/2} v_0 \quad (\text{ec. 11.11})$$

En cuanto a los tiempos, observemos que los ceros de y_n son t_n y $t_{n+1} = t_n + \frac{-2v_n}{g}$; luego:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{-2v_{n-1}}{g} + \frac{-2v_n}{g} = \dots = t_0 + \frac{-2v_0}{g} + \frac{-2v_1}{g} + \dots + \frac{-2v_n}{g} \quad (\text{ec. 11.12})$$

Puesto que $t_0 = 0$ y $v_n = \sqrt{r} v_{n-1}$:

$$t_{n+1} = \frac{-2}{g} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{-2v_0}{g} (1 + r^{1/2} + r^1 + r^{3/2} + \dots + r^{(n+1)/2}) \quad (\text{ec. 11.13})$$

Finalmente, usando la fórmula para la suma de una progresión geométrica, obtenemos:

$$t_{n+1} = \frac{-2v_0}{g} \left(\frac{1 - r^{\frac{n+1}{2}}}{1 - r^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{ec. 11.14})$$

Con estos datos se termina el modelo de rebotes con pérdidas de energía⁹.

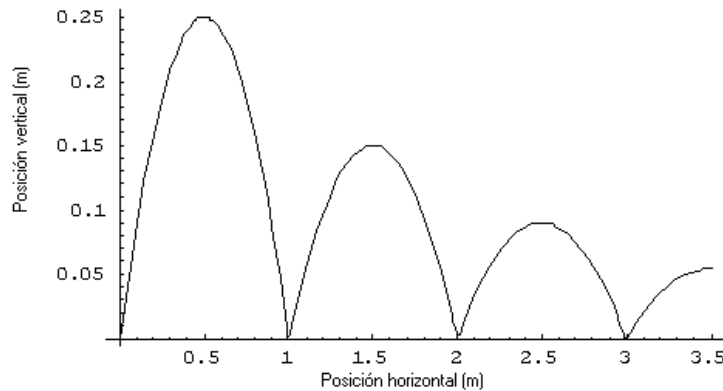


Fig. 11.4: Rebotes amortiguados. En este caso se pierde un 40% de energía en cada bote.

⁹ Como ejercicio, proponemos modificar ligeramente este planteamiento añadiendo una *condición de parada*, ya que con el actual los botes se perpetúan indefinidamente.

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

Primera parte: Rebotes perfectos.

- Tarea 1: Introducción de datos fijos

Comenzamos creando una nueva hoja de cálculo, *Rebotes perfectos*, y escribiendo los valores de los parámetros del problema: posición inicial (horizontal y vertical), velocidad inicial (horizontal y vertical) y aceleración gravitatoria. También añadimos los datos para la representación gráfica: primer instante de tiempo e incremento de tiempo.

<u>Datos fijos</u>	<u>Unidades</u>
x_0	0 m
v_x	1 m/s
y_0	3 m
v_{y0}	3 m/s
g	-9,8 m/s ²
<u>Datos para la representación</u>	
Tiempo inicial	0 s
Incremento de tiempo	0,3 s

Fig. 11.5: Datos iniciales.

- Tarea 2: Cálculo de parámetros

En este caso se trata de hallar el periodo de los rebotes y el desfase inicial, con las fórmulas que mencionamos en el apartado de *Fundamentos Teóricos*.

Periodo	1,68 s	$=(2/B6)*(-RAÍZ(B5^2-2*B6*B4))$
Desfase	0,53 s	$=(B5-RAÍZ(B5^2-2*B6*B4))/B6$

Fig. 11.6: Parámetros calculados

- Tarea 3: Tabla de valores de las posiciones horizontal y vertical

Implementamos las fórmulas de $x(t)$ e $y(t)$ para 16 instantes de tiempo. La función MOD se escribe en CALC como RESIDUO. Así la fórmula para la altura quedará del estilo siguiente:

Tiempo	$x=x_0+v_x t$	$y=y_0+v_{y0} t+1/2gt^2$
0	0	3
0,3	0,3	3,46
0,6	0,6	3,04
0,9	0,9	1,73
1,2	1,2	0,43
1,5	1,5	2,3
1,8	1,8	3,29
2,1	2,1	3,4
2,4	2,4	2,62
2,7	2,7	0,97
3	3	1,28
3,3	3,3	2,8
3,6	3,6	3,44
3,9	3,9	3,19
4,2	4,2	2,07
4,5	4,5	0,06

Annotations:

- $=B\$9$ points to the first row of the table.
- $=E2+B\$10$ points to the second row of the table.
- (I) points to the third row of the table.
- $=B\$2+B\$3*E12$ points to the third row of the table.

Fig. 11.7: Posición de la partícula

$$(I) = B\$4+B\$5*(RESIDUO(E2+B\$14;B\$13)-B\$14) + 0,5*B\$6*(RESIDUO(E2+B\$14;B\$13)-B\$14)^2$$

- Tarea 4: Gráfico

Con los datos anteriores, realizamos un gráfico de doble entrada, siguiendo estos pasos:

Selección: las columnas numéricas de $x(t)$ e $y(t)$.

Tipo de gráfico: *XY (dispersión)*; opción *Solo puntos*.

En rango de datos: *Serie de datos en columnas*.

Título de gráfico y de ejes: completamos convenientemente.

Desactivamos la opción *Mostrar leyenda*.

Tamaño del gráfico: con el ratón, lo alargamos horizontalmente.

Doble click sobre *Punto de datos* >> Pestaña *Línea* >> *Símbolo* >> *Selección* >> *Galería*.

Elegimos un icono que se asemeje a una pelotita. Por ejemplo la *perla blanca*, *whtpearl.gif*.

Además en la pestaña *Etiquetas de datos* seleccionamos *Mostrar categoría*. Cambiando en

Rango de datos los nombres de las etiquetas de datos por los tiempos, conseguiremos que encima de cada bolita aparezca el tiempo al que corresponde.

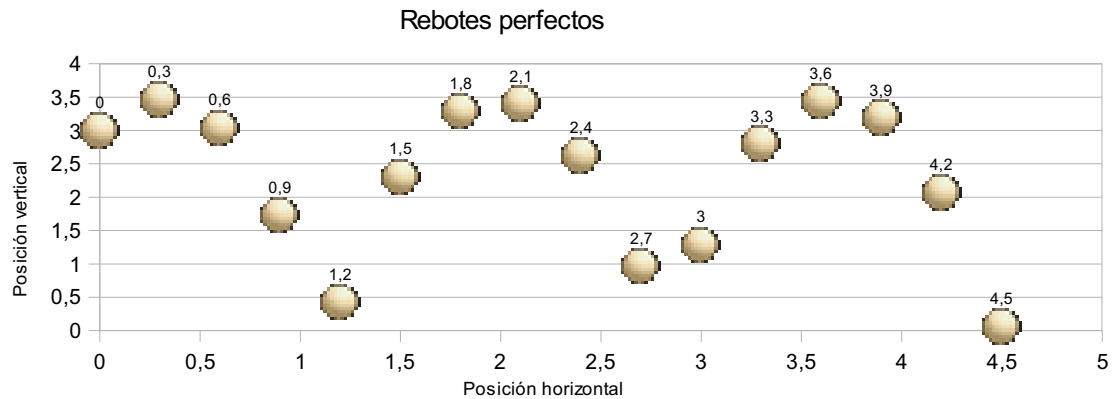


Fig. 11.8: Fotografía 'de cámara de niebla' de los rebotes cuando no se toman en cuenta las pérdidas de energía.

Segunda parte: Rebotes amortiguados.

- Tarea 1: Datos fijos.

A los de la hoja anterior, añadimos el parámetro *razón de energías*. Dejamos la altura inicial, aunque recordemos que nuestro modelo asume que esta es nula.

- Tarea 2: Cálculo de parámetros.

En este caso no se habla ni de periodo ni de desfase. Elaboramos una tabla con los tiempos en los que se inicia cada bote. El primero, por hipótesis, será nulo. El segundo será el *tiempo de retorno* (determinado con la misma fórmula que el *periodo* en la hoja anterior). Los restantes se calculan con la fórmula recurrente de la serie geométrica.

	K	L	
1	Bote	Tiempo inicio bote	
2	0		=-2*\$B\$5/\$B\$6
3	1	1,0204	
4	2	1,8741	
5	3	2,5884	
6	4	3,1860	
7	5	3,6860	
	6	4,1044	
	7	4,4544	
	8	4,7472	
11	9	4,9922	
12	10	5,1972	
13			

=L7+RAÍZ(\$B\$7)^K7*\$B\$14

Fig. 11.9: Parámetros.

- Tarea 3: Valores discretos de la posición (tabla numérica).

La posición horizontal se calcula con la fórmula del M.R.U. y no merece más comentario. Para determinar la vertical, necesitamos saber, dado un tiempo, a qué bote corresponde. Esto significa determinar el número de bote n y el tiempo de inicio del bote t_n . Tales números estarán en la tabla de parámetros de la tarea anterior¹⁰.

La localización de los valores correspondientes se hace mediante las funciones de CALC *CONTAR.SI*, *BUSCARV* e incidentalmente, *CONCATENAR*.

CONTAR.SI(Área;Criterios) nos dice el número de celdas en el área especificada que cumplen con unos criterios dados. Si lo que queremos es comparar con un valor numérico, el criterio será la *cadena de texto* "<4".

Pero si este valor se encuentra en una celda, pongamos B21, CALC no interpreta correctamente la cadena "<B21". Debemos construirla mediante una función especial: *CONCATENAR*.

En cuanto a *BUSCARV*, ya hemos comentado su manejo en el capítulo de superposición de ondas. Recordemos de nuevo su sintaxis:

=*BUSCARV*(criterio de búsqueda;matriz;índice;ordenado)

La tabla numérica queda de la siguiente manera (solo incluimos a continuación los siete primeros instantes de tiempo):

	Tiempo	Bote actual	t_n	$x=x_0+v_x t$	$y_n=v_n(t-t_n)+1/2g(t-t_n)^2$
	0	0	0	0	0
(I)	0,2	0	0	0,2	0,8
	0,4	0	0	0,4	1,22
	0,6	0	0	0,6	1,24
	0,8	0	0	0,8	0,86
(II)	1	0	0	1	0,1
	1,2	1	1,02	1,2	0,59

Fig. 11.10: Valores discretos para rebotes amortiguados.

donde:

(I) =*CONTAR.SI*(\$L\$3:\$L\$12;*CONCATENAR*("<";E2))

(II) =*BUSCARV*(F5;\$K\$2:\$L\$11;2;0)

(III) = $\$B\$7^{(F2/2)}*\$B\$5*(E2-G2)+0,5*\$B\$6*(E2-G2)^2$

¹⁰ Por esto hemos creado una tabla para diez botes, que en la mayoría de las simulaciones y ejercicios será suficiente. De otro modo habría que ampliar la tabla lo que fuera necesario.

● Tarea 4: Gráfico.

Se realizan las mismas operaciones que en la hoja anterior.

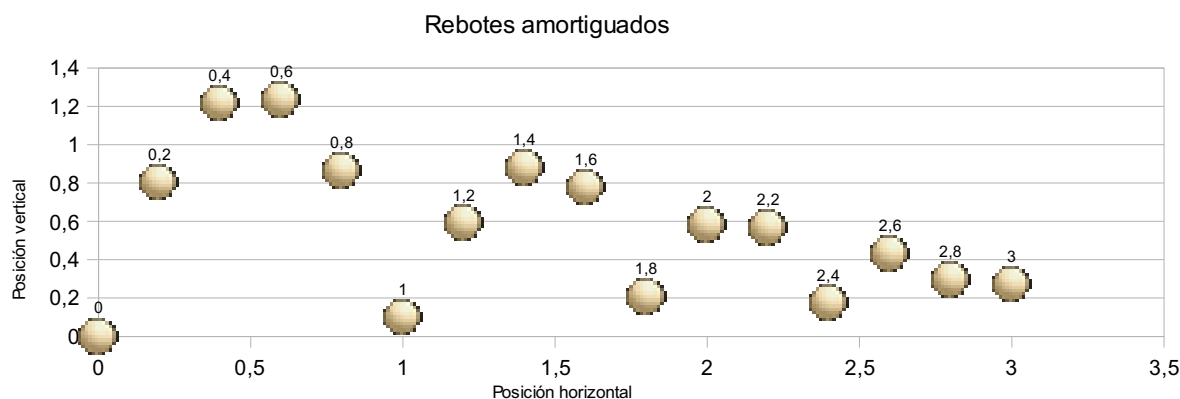


Fig. 11.11: Instantáneas de los rebotes, con tasa de energía $r=0,70$

Criterios de Evaluación

- Determinar altura y desplazamiento horizontal en un tiro parabólico para instantes de tiempo prefijados, utilizando la hoja de cálculo.
- Determinar la posición de un objeto en función del tiempo en el caso de rebotes amortiguados.
- Realizar gráficas de doble entrada a partir de los cálculos, e interpretar el resultado en el contexto del problema.
- Utilizar adecuadamente las funciones *CONTAR.SI*, *BUSCARV* y *CONCATENAR* de la hoja de cálculo.
- Resolver ejercicios de tiro parabólico con ayuda de las hojas de cálculo construidas.
- Realizar ejercicios de ampliación.

Corolario

La práctica resultará útil para afianzar las nociones básicas de cinemática (M.R.U. y M.R.U.A.) y energía. A la vez introducirá al alumno en el tratamiento vectorial de estos conceptos y en la metodología de trabajo con funciones periódicas y tablas y gráficos de doble entrada.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Un jugador de baloncesto lanza la pelota desde 2 metros de altura con velocidad inicial $\vec{v}(0)=(2, 3)$. Determina la posición de la pelota en los instantes $t_1=1,2s$ y $t_2=1,8s$. Calcula el tiempo necesario para que la pelota toque el suelo por segunda vez. Supóngase la ausencia de pérdidas de energía.

Sol. $\vec{s}(t_1)=(2.4, 1.12)$, $\vec{s}(t_2)=(3.6, 2.43)$, $t(\text{suelo})\approx 2.42\text{ s}$.

- Ejercicio 2: Repite la actividad anterior asumiendo que en cada bote se pierde un 20% de energía. Tómese la altura inicial nula.

Sol. $\vec{s}(t_1)=(2.4, 0.19)$, $\vec{s}(t_2)=(3.6, 0.23)$, $t(\text{suelo})\approx 0.61\text{ s}$.

- Ejercicio 3: Calcula la velocidad y aceleración de una pelota de tenis en el instante $t=5\text{ s}$ a partir de los siguientes datos: posición inicial, $\vec{s}(0)=(-3, 0)$; velocidad inicial, $\vec{v}(0)=(3.7, 5)$. Caso amortiguado.

Sol. $\vec{v}(5)=(3.7, 0.27)$ $\vec{a}(5)=(0, -9.8)$

- Ejercicio 4: (De ampliación) Añade tres columnas a la hoja *Rebotes perfectos* mostrando las energías cinética, potencial y total en cada instante. Grafica los resultados, corroborando el principio de conservación de la energía.
- Ejercicio 5: (De ampliación) Repite el ejercicio 4 con la hoja *Rebotes amortiguados*. ¿Qué ocurre con la energía que desaparece en cada bote?
- Ejercicio 6: (De ampliación) ¿Cómo deberían modificarse los cálculos para, en el caso de los rebotes amortiguados, considerar también alturas iniciales distintas de cero?
- Ejercicio 7: (De ampliación) Repite los ejercicios 1 y 2 suponiendo que la situación tiene lugar en una base en la Luna ($g_{\text{Luna}}=1.62\text{ m/s}^2$).
- Ejercicio 8: (De ampliación) Demuestra que cuando una bola rebota con tasa de pérdida de energía r , entonces la altura máxima que alcanza en el n -ésimo bote es $h_n=r^n h_0$, donde h_0 representa a la altura máxima en el primer bote.
- Ejercicio 9: (De investigación) Estudia cómo se ve afectado el movimiento de un objeto por el rozamiento del aire. Escribe las ecuaciones de los desplazamientos horizontal y vertical en ese caso y adapta la práctica para lograr una simulación más acertada.

Capítulo XII: Osciladores Armónicos

Objetivos

- Describir cualitativa y cuantitativamente el funcionamiento de osciladores armónicos simples (resorte colgante, péndulo con oscilaciones pequeñas)
- Construir con CALC un simulador de oscilaciones simples
- Describir cualitativa y cuantitativamente el funcionamiento de osciladores armónicos amortiguados
- Construir con CALC un simulador de oscilaciones amortiguadas
- Utilizar campos de control de formulario en la hoja de cálculo (barra de desplazamiento) y vincularlos a la construcción de gráficos dinámicos
- Utilizar funciones condicionales en CALC

Contenidos

Movimiento Armónico Simple (M.A.S), Oscilador Armónico, Amplitud, Pulso, Periodo y Frecuencia, Fase y Fase Inicial, Constante de Elasticidad, Oscilador Amortiguado, Constante de Amortiguamiento, Frecuencia Amortiguada, Energía en un M.A.S. y en un Movimiento Amortiguado, Campos de Control, Gráficos Dinámicos, Funciones Condicionales.

Contextualización

Pedagógica

Según la propuesta de currículo que incluimos en el Anexo I, la práctica está relacionada con los siguientes temas de tercero y cuarto de bachillerato:

Matemáticas

- Tema 11: Trigonometría
- Tema 12: Funciones goniométricas

Física

- Tema 17: Movimiento oscilatorio
- Tema 19: Mecánica ondulatoria

Histórico-científica

El estudio de los fenómenos oscilatorios o vibraciones se remonta a los inicios de la ciencia. Ya Pitágoras, en sus trabajos sobre música, describe la vibración de cuerdas tensas.

Con el renacer de la física en el siglo XVI, Galileo¹ relaciona las oscilaciones de un péndulo al diseño de un

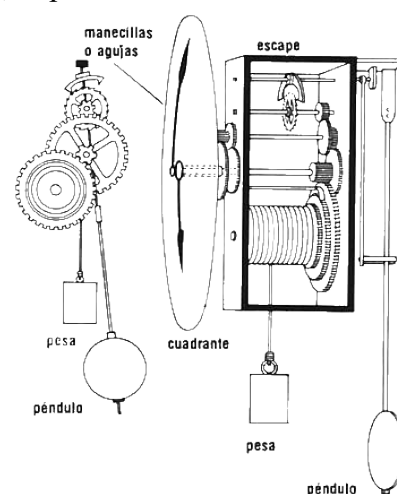


Fig. 12.1: Esquema del reloj de péndulo

¹ La leyenda cuenta que Galileo llegó a estas ideas observando las oscilaciones de una lámpara de aceite en la catedral de Pisa, durante los servicios religiosos. El científico italiano, usando su propio pulso para medir el periodo, descubrió empíricamente que mientras que la amplitud del péndulo (amortiguado) decrece sucesivamente, la frecuencia de las oscilaciones permanece constante.

aparato capaz de medir el tiempo con precisión no igualada hasta entonces. Aunque este modelo no llegó a construirse con precisión suficiente, unos años más tarde Christian Huygens añade la guía cicloide y el resorte en espiral permitiendo así la fabricación de los primeros relojes mecánicos “serios”.

La teoría de las vibraciones se extendió progresivamente a otros campos de la Física (electromagnetismo, mecánica cuántica...) al tiempo que se desarrollaban las aplicaciones en ingeniería (vibración de materiales en un terremoto, construcción de relojes, diseño de instrumentos musicales, transmisión de señales, etc...). Un ejemplo notable lo da el propio Huygens al establecer un método para la medida de la longitud terrestre con su cronómetro recién construido, procedimiento de enorme importancia comercial y militar en la marina de la época.

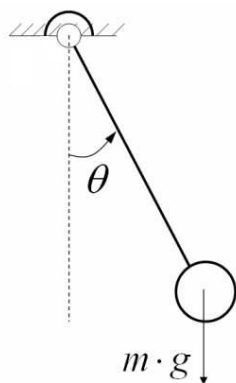


Fig. 12.2: Péndulo simple

En este tema vamos a centrarnos en dos ejemplos típicos de osciladores armónicos: el péndulo de resorte y el péndulo simple. El primero consiste en un objeto colgado de un resorte (de masa despreciable). El segundo no es más que una masa suspendida de un hilo (también de masa despreciable). Veremos que en ambos casos la interacción gravitatoria provoca oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, aunque cuando tratamos con el péndulo esta ley se restringe a valores pequeños del ángulo.

Por último trabajaremos con oscilaciones amortiguadas de estos dispositivos.

Temporalización

La práctica está diseñada para su realización en dos sesiones de 45 minutos cada una.

- En la primera sesión adiestraremos a los alumnos en el uso de controles de formulario en CALC y crearemos el simulador de péndulo de resorte.
- En la segunda, los alumnos realizarán el simulador de péndulo simple y ejercicios propuestos.

Otra posibilidad consiste en trabajar directamente los ejercicios con los simuladores ya realizados por el profesor (una sola sesión).

Fundamentos teóricos

RESUMEN TEÓRICO

Llamamos *movimiento oscilatorio* al de un objeto que se mueve periódicamente alrededor de una posición fija o de equilibrio. El *movimiento armónico simple (M.A.S.)* es un caso particular de éste. En un M.A.S. la elongación (distancia a la posición de equilibrio) es por definición una función seno del tiempo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 12.1})$$

Aquí:

- A : amplitud del movimiento o elongación máxima.
- ω : velocidad angular². Mide la rapidez de las oscilaciones.
- β : fase en el instante inicial.

La amplitud y la fase inicial pueden calcularse también a partir de la frecuencia y la posición y velocidad iniciales:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\omega x_0}{v_0} \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (\text{ec. 12.2}) \end{aligned}$$

Si derivamos con respecto al tiempo, obtenemos fácilmente las expresiones para velocidad y aceleración:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 12.3})$$

$$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 12.4})$$

De esta última deducimos que $a(t) = -\omega^2 x(t)$, y por tanto la fuerza que produce el M.A.S. debe verificar la relación:

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x = -k \cdot x \quad (\text{ec. 12.5})$$

siendo $k = m\omega^2$ la *constante elástica o recuperadora*.

Recíprocamente, la solución general de la ecuación:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -k x \quad (\text{ec. 12.6})$$

es una función seno. Esto significa que la ley anterior es una condición necesaria y suficiente sobre una fuerza para que ésta genere un M.A.S.

A continuación demostraremos que dicha ley es verificada por un péndulo con resorte y por un péndulo simple, esto es, veremos que efectivamente ambos dispositivos son osciladores armónicos.

Péndulo con resorte

Supongamos una masa m que cuelga verticalmente de un resorte de masa despreciable y con constante de elasticidad³ k . En la posición de equilibrio el cuerpo queda suspendido por la igualdad de módulos de la fuerza recuperadora (del muelle) y de la gravedad (el peso). De esta igualdad deducimos que:

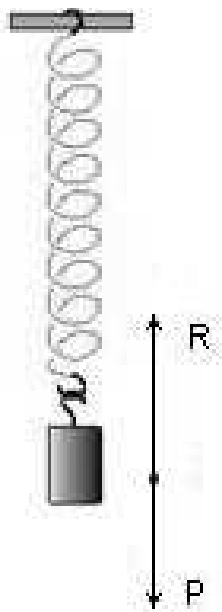


Fig. 12.3: Péndulo de resorte

² También *pulso* o *frecuencia angular*.

³ Esta se refiere a la constante de la ley de Hooke para resortes, $R = -kl$.

$$\begin{aligned} P &= R \\ mg &= kl \\ k &= \frac{mg}{l} \end{aligned} \quad (\text{ec. 12.7})$$

donde g es la aceleración de la gravedad y l es el estiramiento que sufre el muelle al colgarlo verticalmente.

Pongamos ahora que el objeto se estira hacia abajo una distancia positiva x de su posición de equilibrio. Entonces tenemos las fuerzas representadas en la figura 3, cuya resultante será la fuerza neta $F=ma$. Teniendo en cuenta que los módulos de las fuerzas son $P=mg$ y $R=k(l+x)$, y la relación $mg=kl$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} F &= R - P \\ ma &= k(l+x) - mg \\ ma &= k(l+x) - kl \\ ma &= kx \\ a &= \frac{kx}{m} \end{aligned} \quad (\text{ec. 12.8})$$

Por último $F=ma=m\frac{kx}{m}=kx$, que es la relación de módulos para un M.A.S.

Una consecuencia de estos cálculos es que la constante de elasticidad vale $k=\frac{mg}{l}$. Sabemos que en un M.A.S. dicha constante permite calcular la rapidez de las oscilaciones:

$$\begin{aligned} k &= \omega^2 m \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned} \quad (\text{ec. 12.9})$$

y así la frecuencia del movimiento es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (\text{ec. 12.10})$$

Recordemos que el periodo (tiempo necesario para la repetición del movimiento) se define como:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{ec. 12.11})$$

Esta ecuación se enuncia diciendo que *el periodo del movimiento no depende ni de la masa ni de la elongación inicial* (solo de las características del muelle y de la constante gravitatoria).

Péndulo simple

Sea ahora un objeto de masa m que cuelga verticalmente de un hilo (de masa despreciable) de longitud l . En la posición de equilibrio el peso y la tensión del hilo son iguales en módulo.

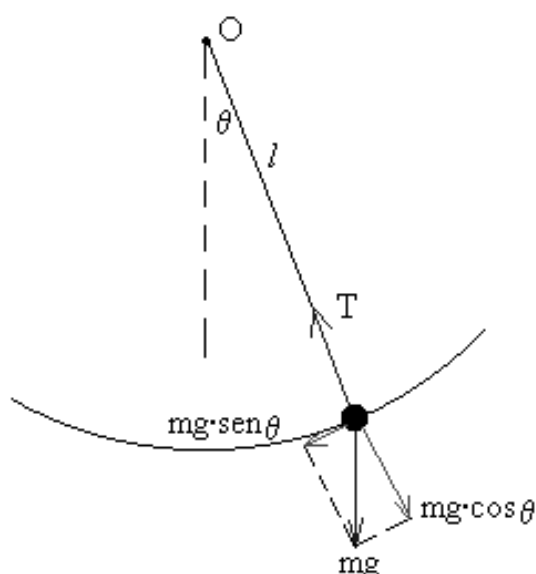


Fig. 12.4: Diagrama de fuerzas en un péndulo simple

Supongamos que se separa la masa un ángulo de θ radianes de la posición inicial. Las fuerzas presentes en ese instante siguen siendo el peso y la tensión. Pero la primera de ellas se divide en una componente tangencial a la trayectoria, $F_t = mg \sen \theta$, responsable de la aceleración del objeto, y en otra componente normal, cuya dirección coincide con la tensión y que se anula con esta. La fuerza neta será por tanto:

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= F_t \\ ma &= mg \sen \theta \quad (\text{ec. 12.12}) \\ a &= g \sen \theta \end{aligned}$$

En rigor, en esta situación no se cumple la ley armónica. Pero si consideramos ángulos pequeños, entonces es válida la aproximación⁴ $\sen \theta \approx \theta$. Además, si tenemos en cuenta la fórmula para la longitud de arco, $x = l \theta$, resulta que:

$$\begin{aligned} a &\approx g \theta = g \frac{x}{l} \\ F &= mg \frac{x}{l} = k x \end{aligned} \quad (\text{ec. 12.13})$$

definiendo en este caso $k = \frac{mg}{l}$ como la constante elástica.

Las fórmulas para la constante de elasticidad y por tanto para el periodo, la frecuencia y la velocidad angular coinciden con las que obtuvimos en el péndulo con resorte. También llegamos al mismo corolario final: el periodo de las oscilaciones solo depende de la constante gravitatoria y de la longitud del hilo⁵.

Un último comentario: la ley definitoria de un M.A.S., (ec. 12.6) se ha corroborado en los dos casos anteriores para los *módulos* de las fuerzas netas. Si tenemos en cuenta que en ambas situaciones la elongación y la fuerza son vectores de sentidos opuestos, se obtiene la expresión deseada $F = -kx$.

4 El argumento matemático para esto es que las funciones identidad y seno son infinitésimos equivalentes en el cero, esto es, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1$. Por ejemplo, si el ángulo es menor que 14° , el error cometido no supera el 1%.

5 Por cierto que este hecho da un método clásico para medir el valor de la constante gravitatoria a partir de las oscilaciones de un péndulo.

Oscilaciones amortiguadas

Los modelos descritos anteriormente son irreales, en el sentido de que se basan en la suposición de que no hay pérdidas energéticas. La energía en ellos se transforma sucesivamente de cinética a potencial elástica (péndulo con resorte) o gravitatoria y viceversa, pero la energía total neta siempre suma una cantidad fija.

Una mejor aproximación se obtiene suponiendo la existencia de una tercera fuerza, de rozamiento, de sentido contrario a la velocidad y cuyo módulo vendrá dado por la expresión $F_{\text{rozamiento}} = -\lambda v$. La constante λ depende del sistema físico objeto de estudio. Por ejemplo, puede representar la viscosidad del aire cuando se tiene en cuenta el rozamiento de éste.

En estas condiciones la resultante de las fuerzas que actúan en el péndulo de resorte será:

$$ma = -kx - \lambda v \quad (\text{ec. 12.14})$$

ecuación que puede expresarse en términos diferenciales como:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{ec. 12.15})$$

siendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $2\gamma = \frac{\lambda}{m}$. γ se llama *constante de amortiguamiento*⁶.

La solución general de la ecuación diferencial nos da la elongación en un instante cualquiera:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (\text{ec. 12.16})$$

siendo la frecuencia angular $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$.

Esto significa que las oscilaciones decrecen gradualmente moduladas por una función exponencial.

Para valores de γ grandes, la expresión que define la frecuencia angular queda sin solución. Esto ocurre en el caso de *oscilaciones sobreamortiguadas*. Las *oscilaciones críticas* se dan cuando la constante de amortiguamiento es tal que $\omega = 0$. En ambos casos no hay, en rigor, oscilaciones, sino que el móvil se mueve progresivamente a la posición de equilibrio, donde se para.

⁶ Sus unidades en el S.I. son los Hercios (Hz).

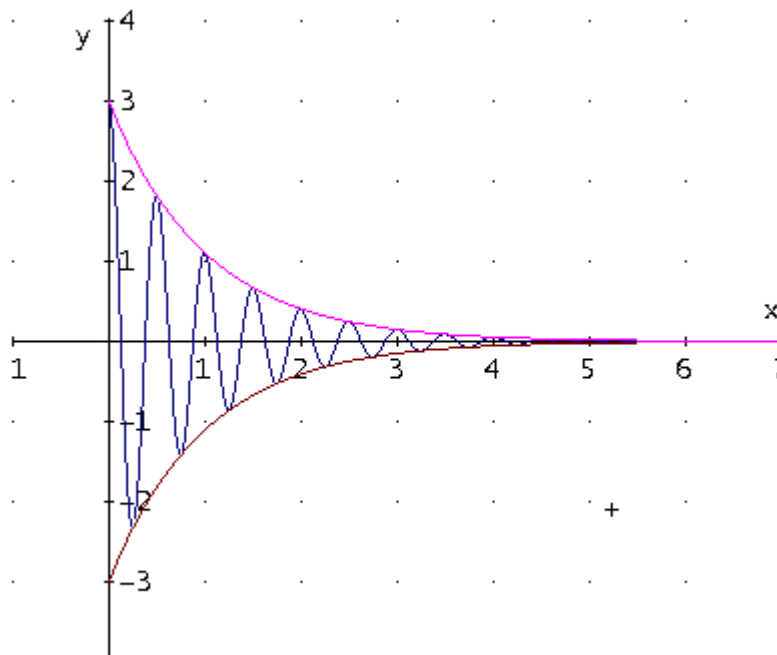


Fig. 12.5: Ejemplo de oscilaciones de amplitud modulada

Metodología

DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA

Primera parte: Simulador de péndulo de resorte armónico

- Tarea 1: Datos iniciales

Introducimos los parámetros que determinan la elongación en función del tiempo, esto es, amplitud, masa, constante elástica y fase inicial. Determinamos también el periodo, la frecuencia y el pulso a partir de estos. Podemos utilizar los de la tabla siguiente, que serán modificados por el alumno en la resolución de ejercicios.

- Tarea 2: Datos para la representación gráfica

Además de especificar el tiempo inicial y el incremento⁷, introducimos las variables contador y tiempo actual. La primera quedará vinculada al control Barra de Desplazamiento. La segunda se calculará como $\text{Incremento} \times \text{Contador}$ y nos servirá como criterio en la función condicional de la tarea 5.

- Tarea 3: Discretización de la función elongación

Introducimos en la primera columna los valores de la variable tiempo y en la segunda los correspondientes a $x(t) = A \sin(\omega t + \beta)$. Más adelante modificaremos la fórmula para que la construcción del gráfico sea dinámica.

Altura de un resorte colgante

Datos iniciales

	Unidades
Amplitud	1 metros
Masa	0,5 kilogramos
Constante elástica	19,74 N/m
Fase inicial	1,57 radianes
Periodo	1 segundos
Frecuencia	1 hercios
Pulso	6,28 rad/s

Fig. 12.6: Datos iniciales

⁷ Este procedimiento para discretizar una función continua es análogo al que empleamos en prácticas anteriores.

Tiempo	Elongación
0	1
0,1	0,81
0,2	0,31
0,3	-0,31
0,4	-0,81

Fig. 12.7: Elongaciones (primera parte)

- Tarea 4: Construcción del gráfico

Realizamos un gráfico de línea a partir de los datos calculados para la elongación. Modificamos los valores del eje de abscisas para que estos incluyan los tiempos. Es muy importante que especifiquemos unos valores máximos y mínimos fijos para el eje de ordenadas (de otro modo en la modificación dinámica de los datos del gráfico no obtendremos el efecto deseado). Esto se consigue haciendo doble clic sobre el gráfico y a continuación Menú Formato >> Eje >> Eje Y >> Pestaña Escala >> Escala de Ejes >> Desactivamos “Automático” de los valores máximo y mínimo >> Introducimos los valores adecuados (por ejemplo, para una elongación $A=1$ escribimos -1,5 y 1,5).

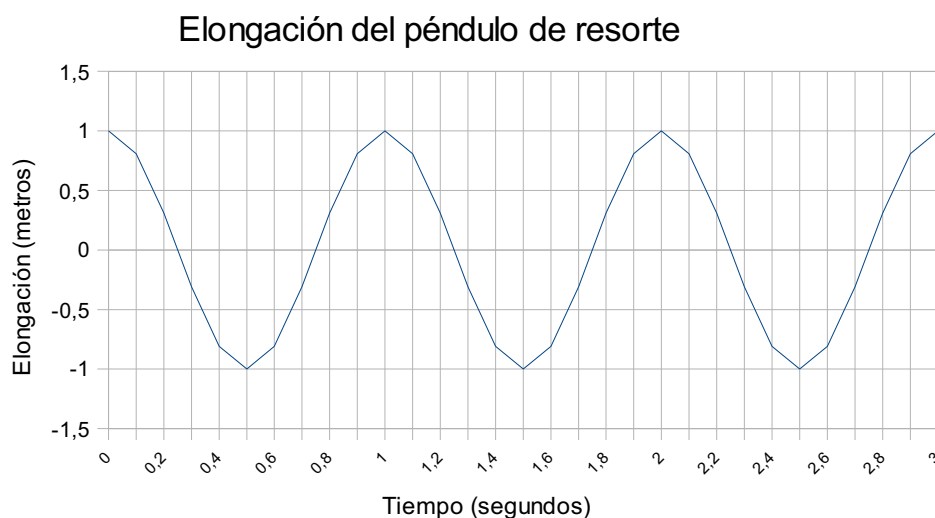


Fig. 12.8: Gráfica de elongación (no dinámica)

- Tarea 5: Barra de desplazamiento y gráfico dinámico

Introducimos un control *Barra de Desplazamiento*. Los controles de formulario en *Open Office* se encuentran en una barra de herramientas especial, desactivada por defecto. Por ello nuestro primer paso será activarla con la secuencia “Menú Ver >> Barras de Herramientas >> Campos de Control de Formulario”.



Fig. 12.9: Barra de herramientas para los controles de formulario

A continuación nos aseguramos de que estamos en “Modo Diseño” pulsando el botón correspondiente, e insertamos el control “Barra de Desplazamiento” seleccionándolo y dibujándolo sobre la hoja de cálculo. Modificamos sus características de acuerdo a lo siguiente (Botón Derecho sobre el control >> Campo de Control):

- ◆ Alineación : Pasamos de Vertical (por defecto) a Horizontal
- ◆ Valor mínimo de desplazamiento: 0
- ◆ Valor máximo de desplazamiento: 30 (el número de filas que hemos utilizado para representar la función elongación)
- ◆ Pestaña Datos >> Celda Vinculada: la que escribimos antes como Contador.

De esta forma conseguimos que al mover la barra cambien el valor de la celda *Contador* y de la celda *Tiempo Actual*. Resta vincular esto a los valores con los que construimos el gráfico. Para ello modificamos la fórmula en CALC para la elongación (ver figura 7) por la siguiente:

$$=SI(A12<= \$F\$5;B\$3*SENO(\$B\$9*A12+\$B\$6);" ")$$

Lo que hacemos es comparar el valor del tiempo con el del “tiempo actual” (que a su vez se modifica según la variable Contador. Si este resulta mayor, entonces no se calcula la elongación (cadena de texto “”).

- Tarea 6: Representación de la elongación actual mediante gráfico de barra.

Añadimos una celda nueva “Elongación en tiempo actual” a la que vinculamos un gráfico de barra construido con un solo dato numérico. Eligiendo adecuadamente en la pantalla la posición de este gráfico, conseguimos una simulación de la posición del muelle al tiempo que vemos como se va construyendo la función seno.

En la figura 12.10 aparece el resultado final de esta hoja de cálculo.

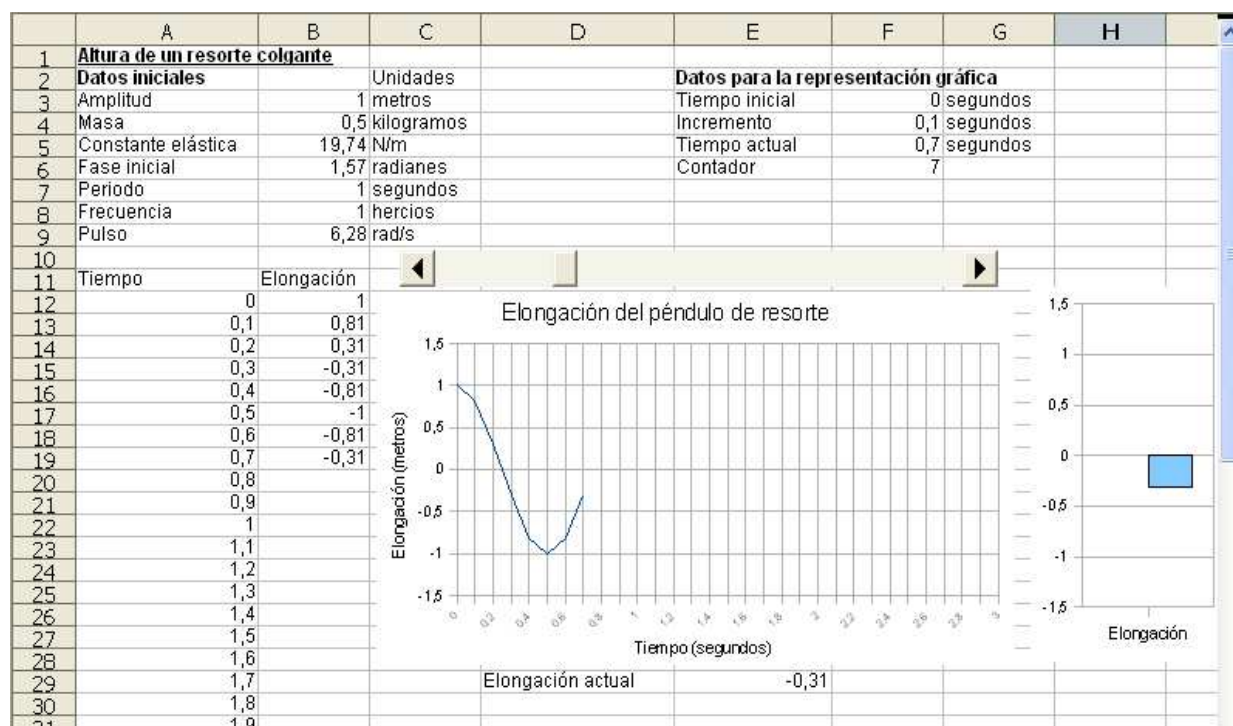


Fig. 12.10: Vista del simulador de péndulo de resorte con M.A.S.

Segunda parte: Simulador de péndulo de resorte amortiguado

Los pasos son análogos a los de la primera parte. Es posible reutilizar el trabajo ya realizado copiando la hoja, aunque en este caso hemos de recordar que los gráficos se remiten a los datos de la hoja original, y deberán ser convenientemente modificados.

Los cambios más notables ahora serán:

- Datos iniciales: Introducimos un nuevo dato, la Constante de Amortiguamiento, y un nuevo cálculo, la Frecuencia Amortiguada.
- Elongación: La fórmula del caso armónico lleva ahora un factor exponencial, quedando, $=SI(A14<=\$F\$5;B\$3*EXP(-\$B\$10*A14)*SENO(\$B\$11*A14+\$B\$6);" ")$

Finalmente la hoja quedará con el siguiente aspecto:

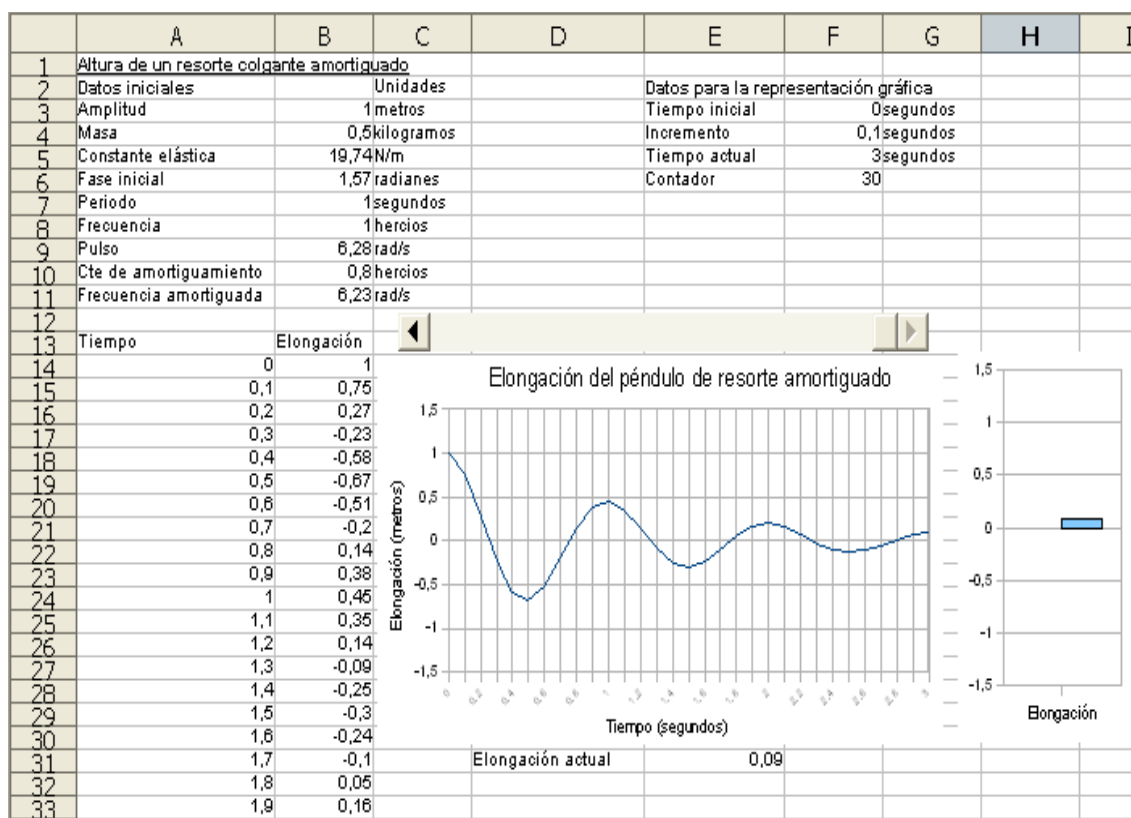


Fig. 12.11: Vista del simulador de péndulo de resorte amortiguado

Criterios de Evaluación

- Calcular el periodo, la frecuencia y la velocidad angular a partir de la masa y la constante elástica del resorte
- Determinar la elongación en función del tiempo (para un oscilador armónico y para un oscilador amortiguado), e implementar los cálculos en una tabla de CALC
- Construir gráficos dinámicos de la elongación utilizando el control barra de desplazamiento y la función condicional SI()
- Resolver ejercicios de osciladores utilizando el simulador construido en CALC
- Realizar actividades de ampliación

Corolario

La práctica que proponemos puede servir al alumno para afianzar los contenidos que previamente hayamos desarrollado en el aula convencional.

Propuesta de trabajos

- Ejercicio 1: Calcula la elongación de un péndulo de resorte con los siguientes datos en los instantes de tiempo (en segundos) $t_1=2$, $t_2=4$ y $t_3=10,5$. Datos: amplitud, 30cm;

fase inicial, 15° ; masa, $0,4 \text{ kg}$; constante elástica, 8 N/m .
Sol. $x(2)=0,07 \text{ m}$, $x(4)=-0,19 \text{ m}$, $x(10,5)=-0,03 \text{ m}$

- Ejercicio 2: Repetir el ejercicio anterior en el caso amortiguado. Dato adicional: constante de amortiguamiento, $0,3 \text{ Hz}$.

Sol. $x(2)=0,04 \text{ m}$, $x(4)=-0,06 \text{ m}$, $x(10,5)=1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

- Ejercicio 3: Determina los cuatro primeros instantes de tiempo (a partir del inicial) en los que la elongación es igual a la amplitud. Datos: amplitud: $0,56 \text{ m}$; fase inicial, 0 radianes ; masa; 350 g ; periodo, 3 s . ¿Cuál es el valor de la constante elástica en este caso?
Sol. $t_1=0,75 \text{ s}$, $t_2=t_1+1,5$, $t_3=t_2+1,5$, $t_4=t_3+1,5$, $k=1,54 \text{ N/m}$

- Ejercicio 4: (De ampliación) En la situación del ejercicio 2, ¿a partir de qué instante de tiempo no serán observables las oscilaciones por el ojo humano?
- Ejercicio 5: Añade dos columnas al simulador de resorte armónico, con la velocidad y la aceleración en cada instante. Grafica los resultados.
- Ejercicio 6: Añade dos columnas al simulador de resorte amortiguado, con la velocidad y la aceleración en cada instante. Grafica los resultados.
- Ejercicio 7: (De ampliación) Añade tres columnas al simulador de resorte (casos armónico y amortiguado) con las energías cinética, potencial y total en cada caso.
- Ejercicio 8: (De ampliación) Estudia, con las técnicas expuestas en este capítulo, las oscilaciones de un péndulo (casos simple y amortiguado).
- Ejercicio 9: (De investigación) La fórmula para la elongación amortiguada no es válida cuando el pulso amortiguado toma valor cero (caso crítico) o imaginario (caso sobreamortiguado). Busca información acerca de cuál es el modelo matemático en estas situaciones y representa los resultados en CALC con las técnicas del capítulo.

Anexo I: Currículos de Química, Física y Matemáticas

Currículo de Química

1. La materia. Aspectos cualitativos y cuantitativos de las sustancias químicas

- 1.1. Estados de agregación de la materia. Cambios de estado.
- 1.2. Clasificación de las sustancias químicas. Tipos de sustancias.
- 1.3. Técnicas de separación de los componentes de una mezcla.
- 1.4. Leyes ponderales:
 - Ley de Lavoisier o de conservación de la masa.
 - Ley de Proust o de las proporciones definidas.
 - Ley de Dalton o de las proporciones múltiples.
- 1.5. Teoría atómica de Dalton.
- 1.6. Principio de Avogadro.
- 1.7. Masa atómica y molecular. Concepto de mol. Número de Avogadro.
- 1.8. Composición centesimal. Fórmula empírica y molecular de un compuesto.

2. Estructura del átomo

- 2.1. Primeros modelos atómicos:
 - Modelo de Dalton.
 - Modelo de Thomson.
 - Modelo de Rutherford.
- 2.2. Número atómico y número másico. Isótopos.
- 2.3. Estructura electrónica del átomo. Espectros atómicos.
- 2.4. Teoría cuántica de Planck.
- 2.5. Efecto fotoeléctrico.
- 2.6. Modelo atómico de Bohr. Correcciones y limitaciones del modelo de Bohr.
- 2.7. Modelo mecano-cuántico:
 - Principio de dualidad onda-corpúsculo de De Broglie.
 - Principio de incertidumbre de Heisenberg.
 - Ecuación de onda de Schrödinger.
- 2.8. Números cuánticos.
- 2.9. Orbitales atómicos. Forma y tipo de los orbitales.

3. Configuraciones electrónicas y Tabla Periódica

- 3.1. Configuración electrónica de un átomo. Reglas de llenado de los orbitales.
 - Principio de mínima energía o Aufbau.
 - Principio de exclusión de Pauli.
 - Principio de máxima multiplicidad de Hund.
- 3.2. Configuraciones electrónicas de átomos e iones. Alteraciones en las configuraciones.
- 3.3. Primeras clasificaciones de los elementos.
- 3.4. Tabla periódica de Mendeleiev y Meyer.
- 3.5. Tabla periódica actual:

- Número cuántico.
 - Ley periódica.
 - Grupos y periodos.
- 3.6. Propiedades periódicas: radio atómico, energía de ionización, afinidad electrónica, electronegatividad, carácter metálico.

4. Enlace químico

- 4.1. Definición de enlace químico. Energía y distancia de enlace.
- 4.2. Regla del octeto. Electronegatividad y tipos de enlaces. Representación de Lewis.
- 4.3. Enlace iónico. Estructura de los compuestos iónicos. Índice de coordinación.
- 4.4. Energía de red. Ciclo de Born-Haber.
- 4.5. Propiedades de los compuestos iónicos.
- 4.6. Enlace covalente. Representación de Lewis del enlace covalente.
- 4.7. Enlace covalente coordinado o dativo. Estructuras resonantes.
- 4.8. Polaridad y forma geométrica de las moléculas covalentes. Teoría de repulsión de los pares electrónicos de la capa de valencia (TRPECV).
- 4.9. Teoría del enlace de valencia. Enlaces múltiples. Enlaces sigma (σ) y pi (π).
- 4.10. Sólidos covalentes.
- 4.11. Propiedades de los compuestos covalentes.
- 4.12. Enlace metálico. Modelo de la nube de electrones. Modelo de bandas.
- 4.13. Propiedades de los metales.
- 4.14. Fuerzas intermoleculares:
 - Fuerzas de Van der Waals.
 - Enlace por puente de hidrógeno.

5. Mezclas y disoluciones

- 5.1. Clases de mezclas.
- 5.2. Disoluciones. Componentes de una disolución. Tipos de disoluciones.
- 5.3. Medida de la concentración de una disolución: porcentaje en masa, porcentaje en volumen, molaridad, molalidad y fracción molar.
- 5.4. Solubilidad. Disolución concentrada, diluida y saturada. Factores que afectan a la solubilidad.
- 5.5. Propiedades coligativas de las disoluciones:
 - Presión de vapor. Ley de Raoult.
 - Puntos de ebullición. Ascenso ebulloscópico.
 - Punto de congelación. Descenso crioscópico.
 - Presión osmótica. Ósmosis.
- 5.6. Leyes de los gases. Ecuación de los gases ideales.
- 5.7. Ley de Dalton de las presiones parciales.

6. Reacciones químicas

- 6.1. Concepto de reacción química. Ecuaciones químicas.
- 6.2. Ajuste de ecuaciones químicas.
- 6.3. Tipos de reacciones químicas en función de la transformación que tiene lugar: síntesis, descomposición, desplazamiento y doble desplazamiento.
- 6.4. Tipos de reacciones en función de las partículas transferidas: ácido-base y redox.
- 6.5. Reacciones de combustión.
- 6.6. Cálculos estequiométricos:

- Cálculos con masas.
- Cálculos con volúmenes de gases en condiciones normales y no normales.
- Cálculos con reactivos en disolución.
- Reactivo limitante
- Reactivo impuro. Pureza de los reactivos.
- Rendimiento de la reacción.

7. Energía de las reacciones químicas. Termoquímica

- 7.1. Primer principio de la termodinámica.
- 7.2. Calor de reacción. Reacciones exotérmicas y endotérmicas.
- 7.3. Calor de reacción a volumen constante y a presión constante.
- 7.4. Entalpía de reacción. Entalpía estándar. Ley de Hess.
- 7.5. Entalpía estándar de formación.
- 7.6. Entalpía de enlace.
- 7.7. Segundo principio de la termodinámica. Entropía.
- 7.8. Tercer principio de la termodinámica.
- 7.9. Energía libre de Gibbs. Equilibrio y espontaneidad de un proceso.
- 7.10. Cálculos de la energía libre de reacción.

8. Cinética química

- 8.1. Cinética química. Velocidad de reacción.
- 8.2. Velocidad instantánea de una reacción.
- 8.3. Ecuación de velocidad. Orden de reacción.
- 8.4. Mecanismo de reacción. Molecularidad. Etapa determinante.
- 8.5. Teorías de las reacciones químicas:
 - Teoría de los choques moleculares.
 - Teoría del estado de transición.
- 8.6. Energía de activación.
- 8.7. Factores que influyen en la velocidad de reacción.
- 8.8. Catálisis homogénea y heterogénea.
- 8.9. Catálisis enzimática. Biocatalizadores.

9. Equilibrio químico

- 9.1. Estado de equilibrio químico. Reacciones reversibles.
- 9.2. Constante de equilibrio: K_c . Ley de acción de masas.
- 9.3. Constante de equilibrio: K_p .
- 9.4. Relación entre las constantes de equilibrio K_c y K_p .
- 9.5. Estudio cuantitativo de equilibrios homogéneos. Grado de disociación.
- 9.6. Equilibrios heterogéneos.
- 9.7. Principio de Le Chatelier. Factores que afectan al equilibrio: concentraciones de las sustancias, temperatura y presión.

10. Reacciones ácido-base

- 10.1. Reacciones ácido-base o de transferencia de protones. Concepto de ácido y de base.
- 10.2. Teoría de Arrhenius. Reacción de neutralización.
- 10.3. Teoría de Brönsted-Lowry. Pares ácido-base conjugados. Anfóteros.
- 10.4. Teoría de Lewis.

- 10.5. Equilibrio de autoionización del agua. Concepto de pH.
- 10.6. Fuerza de los ácidos y las bases. Constantes de acidez y basicidad.
- 10.7. Cálculos de constantes de equilibrio. Grado de ionización.
- 10.8. Ácidos polipróticos.
- 10.9. Fuerza de los ácidos y su estructura química: hidrácidos y oxoácidos.
- 10.10. Cálculo del pH en disoluciones ácidas y básicas.
- 10.11. Hidrólisis de una sal.
- 10.12. Disoluciones amortiguadoras o tampón. Efecto del ion común.
- 10.13. Indicadores del pH.
- 10.14. Valoración ácido-base. Curvas de valoración.

11. Reacciones redox. Electroquímica

- 11.1. Reacciones redox o de transferencia de electrones. Número de oxidación.
- 11.2. Conceptos generales: oxidante, reductor, semirreacciones de oxidación-reducción.
- 11.3. Ajuste de ecuaciones redox.
- 11.4. Valoración redox.
- 11.5. Pilas electroquímicas o voltaicas.
- 11.6. Tipos de pilas: alcalinas, de botón y recargables.
- 11.7. Tipos de electrodos. Electrodo normal de hidrógeno.
- 11.8. Potencial estándar de electrodo. Ecuación de Nernst. Potencial estándar de una pila.
- 11.9. Espontaneidad de las reacciones redox. La corrosión.
- 11.10. Electrólisis. Cuba electrolítica. Electrólisis del agua y de una sal. Ley de Faraday.
- 11.11. Comparación entre una pila electrolítica y una cuba electrolítica.

12. Química Inorgánica Descriptiva I. Grupos Ia-Va

- 12.1. Grupo Ia: metales alcalinos.
- 12.2. Compuestos de sodio.
- 12.3. Grupo IIa: metales alcalinotérreos.
- 12.4. Compuestos de calcio.
- 12.5. Grupos IIb-IIIb: elementos de transición.
- 12.6. Elementos de transición interna: lantánidos y actínidos.
- 12.7. Grupo IIIa: térreos.
- 12.8. Aluminio: métodos de obtención, propiedades y aplicaciones.
- 12.9. Grupo IVa: carbonóideos.
- 12.10. Carbono: propiedades y compuestos.
- 12.11. Plomo: propiedades y aplicaciones.
- 12.12. Grupo Va: nitrogenóideos.
- 12.13. Nitrógeno: métodos de obtención, propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 12.14. Importancia biológica del nitrógeno. Ciclo del nitrógeno.
- 12.15. Fósforo: métodos de obtención, propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 12.16. Importancia biológica del fósforo. Ciclo del fósforo.

13. Química Inorgánica Descriptiva II. Hidrógeno y grupos VIa-0

- 13.1. Hidrógeno: propiedades, compuestos y reactividad.
- 13.2. Grupo VIa: anfígenos.
- 13.3. Oxígeno: métodos de obtención, propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 13.4. Ozono. Capa de ozono. Ciclo del oxígeno.
- 13.5. Óxidos.

- 13.6. Agua.
- 13.7. Azufre: métodos de obtención, propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 13.8. Ciclo del azufre.
- 13.9. Grupo VIIa: halógenos.
- 13.10. Flúor: propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 13.11. Cloro: propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 13.12. Bromo: propiedades, compuestos y aplicaciones.
- 13.13. Haluros de hidrógeno y oxoácidos.
- 13.14. Grupo 0: gases nobles.

14. Química Orgánica I. Introducción

- 14.1. Química del carbono.
- 14.2. Átomo de carbono: estructura y propiedades. Enlaces del carbono.
- 14.3. Cadenas hidrocarbonadas. Fórmulas de los compuestos orgánicos.
- 14.4. Grupos funcionales. Series homólogas.
- 14.5. Hidrocarburos cíclicos y aromáticos.
- 14.6. Concepto de isomería.
- 14.7. Isomería estructural: de cadena, de posición y de función.
- 14.8. Estereoisomería:
 - Isomería geométrica cis-trans.
 - Isomería óptica. Enantiómeros y mezclas racémicas.
- 14.9. Proyección de Fisher.

15. Química Orgánica II. Reactividad de los compuestos orgánicos

- 15.1. Efectos electrónicos: inductivo (I) y resonante (R).
- 15.2. Clases de reacciones orgánicas.
- 15.3. Ruptura de los enlaces: ruptura homolítica y heterolítica.
- 15.4. Clases de reactivos: radicales libres, electrófilos y nucleófilos.
- 15.5. Tipos de reacciones orgánicas:
 - Reacciones de adición.
 - Reacciones de sustitución.
 - Reacciones de eliminación.
 - Reacciones de transposición.
 - Reacciones de polimerización.
 - Reacciones de oxidación-reducción.

16. Química Orgánica III. Hidrocarburos lineales, cíclicos, aromáticos y haluros de alquilo

- 16.1. Alcanos: nomenclatura, estructura, isomería y propiedades físicas.
- 16.2. Reactividad de los alcanos: sustitución, craqueo o pirólisis y combustión.
- 16.3. Alquenos: nomenclatura, estructura, isomería y propiedades físicas.
- 16.4. Reactividad de los alquenos: adición electrófila, oxidación y combustión.
- 16.5. Alquinos: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 16.6. Reactividad de los alquinos: adición electrófila y combustión.
- 16.7. Hidrocarburos cíclicos: cicloalcanos, cicloalquenos y cicloalquinos.
- 16.8. Reactividad de los cicloalcanos: sustitución, hidrogenación y apertura del anillo.
- 16.9. Reactividad de los cicloalquenos y los cicloalquinos: adición electrófila.
- 16.10. Hidrocarburos aromáticos. Estructura y aromaticidad del benceno.

- 16.11. Reactividad de los hidrocarburos aromáticos: sustitución electrófila, adición y reducción.
- 16.12. Haluros de alquilo: nomenclatura y propiedades físicas.
- 16.13. Reactividad de los haluros de alquilo: sustitución nucleófila, eliminación, síntesis de compuestos organometálicos y síntesis de Wurtz.

17. Química Orgánica IV. Compuestos orgánicos oxigenados: alcoholes, fenoles, éteres, aldehídos, cetonas, ácidos carboxílicos y ésteres

- 17.1. Alcoholes: nomenclatura, estructura, isomería y propiedades físicas.
- 17.2. Reactividad de los alcoholes: sustitución nucleófila, deshidratación y oxidación.
- 17.3. Fenoles: nomenclatura y propiedades físicas.
- 17.4. Reactividad de los fenoles: sustitución electrófila aromática.
- 17.5. Éteres: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 17.6. Reactividad de los éteres: neutralización y rotura del enlace éter.
- 17.7. Aldehídos y cetonas: nomenclatura, estructura, isomería y propiedades físicas.
- 17.8. Reactividad de aldehídos y cetonas: adición al grupo carbonilo, halogenación, condensación aldólica, reducción y oxidación.
- 17.9. Ácidos carboxílicos: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 17.10. Reacciones de obtención de ácidos carboxílicos.
- 17.11. Reactividad de ácidos carboxílicos: neutralización, sustitución nucleófila y oxidación.
- 17.12. Ésteres: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 17.13. Reactividad de ésteres: sustitución nucleófila y reducción.

18. Química Orgánica V. Compuestos nitrogenados: aminas, amidas, nitrilos y nitroderivados

- 18.1. Aminas: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 18.2. Reacciones de obtención de aminas.
- 18.3. Reactividad de las aminas: formación de sales de amonio, reacción con ácido nitroso, reacción con halogenuros de alquilo, acilación y alquilación.
- 18.4. Amidas: nomenclatura, estructura y propiedades físicas. La urea.
- 18.5. Reactividad de amidas: hidrólisis, reacción con ácido nitroso, halogenación del grupo amino, degradación de Hoffmann y reducción.
- 18.6. Nitrilos: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 18.7. Reacciones de obtención de nitrilos.
- 18.8. Reactividad de los nitrilos: hidrólisis, reactivos de Grignard y reducción.
- 18.9. Nitroderivados: nomenclatura, estructura y propiedades físicas.
- 18.10. Reacciones de obtención de nitroderivados.
- 18.11. Reactividad de los nitroderivados: reducción.

19. Composición de la materia viva

- 19.1. Bioelementos y biomoléculas.
- 19.2. Composición y estructura del agua.
- 19.3. Propiedades físico-químicas del agua.
- 19.4. Funciones del agua en los seres vivos: disolvente, bioquímica, transportadora, estructural, amortiguadora y termorreguladora.
- 19.5. Formas de encontrar el agua en los seres vivos.
- 19.6. Obtención del agua por los seres vivos.
- 19.7. Sales minerales: disueltas y precipitadas.

- 19.8. Funciones de las sales minerales disueltas: homeóstasis, grado de salinidad, actividad enzimática, presión osmótica y volumen celular, potenciales eléctricos y pH.
- 19.9. Funciones de las sales precipitadas: estructural, de protección y sostén.
- 19.10. Ósmosis. Osmorregulación en vegetales y animales.
- 19.11. Dispersiones coloidales. Clasificación de las dispersiones coloidales.
- 19.12. Propiedades de las dispersiones coloidales: efecto Tyndall, movimiento browniano, sedimentación, viscosidad y adsorción.
- 19.13. Diálisis. Hemodiálisis.

20. Glúcidos

- 20.1. Características y clasificación de los glúcidos.
- 20.2. Monosacáridos. Composición.
- 20.3. Propiedades de los monosacáridos: capacidad reductora, isomería y actividad óptica.
- 20.4. Estructura de los monosacáridos: fórmulas lineales (proyecciones de Fisher) y cíclicas (proyecciones de Haworth). Enlace hemiacetalico. Formas α y β .
- 20.5. Monosacáridos de importancia biológica: ribosa, glucosa, fructosa, galactosa, manosa.
- 20.6. Derivados de los monosacáridos: fosfatos de azúcares, desoxiazúcares, polialcoholes, y aminoazúcares.
- 20.7. Oligosacáridos: composición y estructura. Enlace O-glucosídico.
- 20.8. Disacáridos de importancia biológica: sacarosa, lactosa y maltosa.
- 20.9. Polisacáridos: composición y estructura.
- 20.10. Funciones y clasificación de los polisacáridos:
 - Polisacáridos de reserva: almidón y glucógeno.
 - Polisacáridos estructurales: celulosa y quitina.
- 20.11. Heteropolisacáridos estructurales.
- 20.12. Heterósidos: glucolípidos y glucoproteínas.

21. Lípidos

- 21.1. Composición, características y clasificación de los lípidos.
- 21.2. Clasificación de los lípidos según su función biológica.
- 21.3. Clasificación de los lípidos según su estructura molecular.
- 21.4. Ácidos grasos: composición, estructura y propiedades físico-químicas.
- 21.5. Lípidos saponificables: acilglicéridos, ceras, fosfoglicéridos y esfingolípidos.
- 21.6. Lípidos insaponificables: terpenos, esteroides y prostaglandinas.
- 21.7. Lípidos con funciones específicas: hormonas esteroides y vitaminas.

22. Aminoácidos y proteínas

- 22.1. Aminoácidos: composición, características y clasificación. Aminoácidos esenciales.
- 22.2. Propiedades de los aminoácidos: carácter ácido-base, punto isoelectrico, isomería.
- 22.3. Péptidos y oligopéptidos. Enlace peptídico.
- 22.4. Estructura de las proteínas:
 - Estructura primaria.
 - Estructura secundaria: hélice α y lámina β .
 - Estructura terciaria. Fuerzas de atracción entre grupos funcionales.
 - Estructura cuaternaria.
- 22.5. Propiedades de las proteínas: especificidad, solubilidad, desnaturalización, capacidad amortiguadora.

- 22.6. Clasificación de las proteínas: holoproteínas y heteroproteínas.
- 22.7. Funciones de las proteínas: estructural, reserva, transportadora, contráctil, defensiva, catalizadora o enzimática, reguladora u hormonal y homeostática.

23. Nucleótidos y ácidos nucleicos

- 23.1. Composición de los nucleótidos: pentosa, bases nitrogenada y ácido fosfórico.
- 23.2. Nucleósidos. Enlace N-glucosídico.
- 23.3. Ácidos nucleicos. Enlace fosfodiéster.
- 23.4. Composición y características del ácido desoxirribonucleico (ADN).
- 23.5. Estructura del ADN:
 - Estructura primaria. Enlace fosfodiéster.
 - Estructura secundaria. Modelo de la doble hélice de Watson y Crick
 - Estructura terciaria. Nucleosoma. Histonas. Primer nivel de empaquetamiento.
 - Nivel superior de empaquetamiento. Cromatina. Cromosomas.
- 23.6. ADN eucariota, procariota y vírico.
- 23.7. Propiedades del ADN: solubilidad, desnaturalización y renaturalización.
- 23.8. Función del ADN. Mecanismo de duplicación del ADN.
- 23.9. ARN: composición, estructura y características.
- 23.10. Tipos de ARN: mensajero, ribosómico, de transferencia y nucleolar.
- 23.11. ARN vírico.
- 23.12. Funciones del ARN. Mecanismo de transcripción.
- 23.13. Nucleótidos libres: transportadores de energía (ATP/ADP), mensajeros intracelulares (AMP_c) y coenzimáticos (NAD, FAD, Coenzima A).

24. Metabolismo celular

- 24.1. Concepto de metabolismo: anabolismo y catabolismo.
- 24.2. Tipos de metabolismo: organismos autótrofos y heterótrofos.
- 24.3. Reacciones de oxidación y reducción en la célula. Reacciones endergónicas y exergónicas.
- 24.4. Transporte de energía.
 - Adenosín trifosfato (ATP).
 - Transportadores de electrones: NAD⁺, NADP⁺, FAD y FMN.
- 24.5. Regulación del metabolismo. Enzimas: composición, estructura y clasificación.
- 24.6. Actividad enzimática. Especificidad. Mecanismo de acción: modelo de la llave y la cerradura.
- 24.7. Clasificación de los enzimas.
- 24.8. Cinética enzimática. Modelo de Michaelis-Menten. Factores que afectan la velocidad de las reacciones enzimáticas: Enzimas alostéricos.
- 24.9. Vitaminas. Clasificación de las vitaminas: hidrosolubles y liposolubles.
- 24.10. Acoplamiento energético. Balance energético del metabolismo.

25. Catabolismo

- 25.1. Concepto de catabolismo. Procesos catabólicos en condiciones aerobias.
- 25.2. Catabolismo de los glúcidos. Glucólisis. Etapas y balance energético.
- 25.3. Respiración aeróbica celular:
 - Oxidación del ácido pirúvico a acetil-CoA.
 - Ciclo de Krebs o del ácido cítrico.
 - Fosforilación oxidativa. Cadena de transporte de electrones. Síntesis de ATP.

- Balance energético de la respiración aerobia.
- 25.4. Respiración anaerobia. Fermentación láctica y alcohólica. Balance energético.
- 25.5. Catabolismo de los lípidos. β -Oxidación de los ácidos grasos. Balance energético.
- 25.6. Catabolismo de las proteínas:
 - Eliminación del grupo amino: transaminación y desaminación oxidativa.
 - Oxidación de la cadena carbonada.
- 25.7. Catabolismo de los ácidos nucleicos.

Currículo de Física

1. Magnitudes y vectores

- 1.1. Magnitudes fundamentales y derivadas.
- 1.2. Magnitudes escalares y vectoriales.
- 1.3. Múltiplos y submúltiplos.
- 1.4. Operaciones con vectores (gráficamente y numéricamente). Base vectorial.
- 1.5. Sistemas de referencia.

2. Cinemática

- 2.1. El movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.).
- 2.2. El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.).
- 2.3. Caída libre y lanzamiento vertical.
- 2.4. El movimiento circular uniforme.
- 2.5. Composición de movimientos.

3. Dinámica

- 3.1. Fuerzas.
- 3.2. Equilibrio, reposo y movimiento.
- 3.3. Principio de relatividad de Galileo.
- 3.4. Sistemas de Referencia Inercial y No Inercial (SRI, SRNI).
- 3.5. Leyes de Newton.
- 3.6. Cantidad de movimiento.
- 3.7. Impulso.
- 3.8. Fuerzas ficticias. Fuerzas centrípeta y centrífuga.
- 3.9. Rozamiento.

4. Trabajo y energía

- 4.1. Trabajo.
- 4.2. Energía. Relación trabajo – energía.
- 4.3. Energía potencial. Energía cinética. Energía mecánica.
- 4.4. Principio de conservación de la energía.
- 4.5. Potencia mecánica.
- 4.6. Eficiencia mecánica.

5. Campo gravitatorio

- 5.1. Ley de Newton.
- 5.2. Campo gravitatorio. Intensidad de campo.
- 5.3. Peso. Aceleración de la gravedad.
- 5.4. Potencial gravitatorio. Energía en el campo gravitatorio.
- 5.5. Movimiento cerca de la superficie terrestre. Tiro horizontal, vertical y oblicuo.
- 5.6. Leyes de Kepler.
- 5.7. Movimiento lejos de la superficie terrestre. Satélites.

6. Dinámica de rotación

- 6.1. Traslación y rotación.
- 6.2. Momento de una fuerza. Par de fuerzas.
- 6.3. Composición y descomposición de fuerzas. Fuerzas concurrentes. Fuerzas paralelas.

- 6.4. Centro de gravedad.
- 6.5. Momento de inercia. Ecuación fundamental de la Dinámica de Rotación.
- 6.6. Equilibrio estable e inestable. Reposo.
- 6.7. Energía cinética de rotación.

7. Hidrostática e Hidrodinámica

- 7.1. Densidad de los cuerpos.
- 7.2. Presión en fluidos.
- 7.3. Ley de Pascal.
- 7.4. Principio de Arquímedes.
- 7.5. Fluidos ideales y reales.
- 7.6. Ecuación de continuidad.
- 7.7. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones (teorema de Torricelli, sustentación, efectos, ...).
- 7.8. Flujo laminar y turbulento (rozamiento, ley de Stokes, número de Reynolds).

8. La materia

- 8.1. Movimiento browniano.
- 8.2. Teoría cinética.
- 8.3. Estados de agregación de la materia (diferenciación molecular y relaciones energéticas)

9. El estado gaseoso

- 9.1. El gas ideal.
- 9.2. Distribución de velocidades moleculares. Velocidad cuadrática media.
- 9.3. Ecuación de estado de los gases ideales.
- 9.4. Procesos termodinámicos.

10. Termodinámica

- 10.1. Energía interna. Cambios de energía interna.
- 10.2. El calor.
- 10.3. Calor específico, calor latente de fusión y calor latente de evaporación.
- 10.4. Ecuación calorimétrica..
- 10.5. 1ª ley de la termodinámica.
- 10.6. Trabajo con presión constante y con presión variable.
- 10.7. Ciclos termodinámicos.
- 10.8. 2ª ley de la termodinámica.
- 10.9. Entropía.
- 10.10. Ciclo de Carnot. Máquina de Carnot.

11. El estado sólido y el estado líquido

- 11.1. Materia cristalina y amorfa.
- 11.2. Materia cristalina, ideal y perfecta.
- 11.3. Deformaciones. Ley de Hooke.
- 11.4. Dilatación térmica.
- 11.5. Propiedades superficiales en un líquido.
- 11.6. Tensión y fuerza superficial. Procesos de borde de recipiente.
- 11.7. Capilaridad.

- 11.8. Dilatación.
- 11.9. Fusión y solidificación.
- 11.10. Vaporización y licuación.
- 11.11. Sublimación.
- 11.12. Curvas de estado y diagrama de fase.

12. Campo eléctrico

- 12.1. Carga eléctrica. Propiedades.
- 12.2. Ley de Coulomb. Intensidad de campo eléctrico.
- 12.3. Trabajo y energía potencial electrostática.
- 12.4. Potencial electrostático y su diferencial.
- 12.5. Capacidad eléctrica.
- 12.6. Condensadores en serie y en paralelo.

13. La corriente eléctrica en metales

- 13.1. Conductores y aislantes.
- 13.2. Inducción electrostática en conductores.
- 13.3. Polarización en aislantes.
- 13.4. La corriente eléctrica como proceso.
- 13.5. Intensidad de corriente.
- 13.6. Generadores eléctricos.
- 13.7. Ley de Ohm.
- 13.8. Resistividad.
- 13.9. Leyes de Kirchhoff.
- 13.10. Potencia y energía.
- 13.11. Ley de Joule.

14. La corriente eléctrica en semiconductores, en líquidos y en gases

- 14.1. Semiconductor.
- 14.2. Teoría de bandas.
- 14.3. Semiconductores puros y dopados.
- 14.4. Diodos.
- 14.5. Transistores.
- 14.6. Electrolisis.
- 14.7. Dependencia de la corriente con la tensión.
- 14.8. Leyes de Faraday.
- 14.9. Pilas y acumuladores.
- 14.10. Ionización.
- 14.11. Curva de histéresis.
- 14.12. Ionización temporal y permanente.
- 14.13. Termoemisión de electrones.

15. Campo magnético estacionario

- 15.1. El magnetismo.
- 15.2. Campo magnético.
- 15.3. Acción conjunta de corriente y magnetismo.
- 15.4. Inducción magnética.
- 15.5. Fuerza de Lorentz.

16. Campo magnético variable

- 16.1. Inducción magnética de corrientes.
- 16.2. Inducción electromagnética.
- 16.3. Ley de Faraday.
- 16.4. Ley de Lenz.
- 16.5. Autoinducción.

17. Movimiento oscilatorio

- 17.1. El movimiento oscilatorio.
- 17.2. Cinemática del movimiento oscilatorio.
- 17.3. Fases del movimiento oscilatorio. Diagrama de fases.
- 17.4. Dinámica del movimiento oscilatorio.
- 17.5. Energía.
- 17.6. Resonancia oscilatoria.
- 17.7. Oscilador electromagnético.
- 17.8. Oscilaciones amortiguadas y forzadas.

18. Corriente alterna

- 18.1. La corriente alterna.
- 18.2. Circuitos de corriente alterna (RLC).
- 18.3. Circuitos compuestos.
- 18.4. Impedancia.
- 18.5. Rendimiento.
- 18.6. Rectificador de puente de diodos.
- 18.7. Generador de corriente alterna.
- 18.8. Sistema trifásico.
- 18.9. Transformadores.
- 18.10. Electromotor.
- 18.11. Funcionamiento de centrales y distribución de corriente eléctrica.

19. Mecánica ondulatoria

- 19.1. Movimiento ondulatorio del sistema discreto al continuo.
- 19.2. Ondas en medios isótropos.
- 19.3. Principio de Huygens.
- 19.4. Reflexión y refracción de ondas.
- 19.5. Interferencias.
- 19.6. Superposición de ondas.
- 19.7. El sonido: ondas sónicas. Intensidad. Velocidad. Ultrasonido. Infrasonido.

20. Ondas electromagnéticas

- 20.1. Formación, propagación, dipolos electromagnéticos.
- 20.2. Interacción electromagnética.
- 20.3. Tipos de ondas.
- 20.4. La luz.
- 20.5. Velocidad de la luz.
- 20.6. Reflexión y refracción.
- 20.7. Dispersión.

21. Óptica geométrica y propiedades ondulatorias de la luz

- 21.1. Bases de la óptica.
- 21.2. Formación de imágenes por reflexión (en superficies planas y curvadas).
- 21.3. Formación de imágenes por refracción: el dioptrio.
- 21.4. Sistemas ópticos. Lentes delgadas.
- 21.5. Instrumentos ópticos: telescopio, ojo humano.
- 21.6. El espectro electromagnético, colores.
- 21.7. Difracciones por rendijas estrechas; dobles rendijas.
- 21.8. Polarización. Polarización por reflexión y difundida.

22. Radiación electromagnética. Aspectos energéticos

- 22.1. Análisis espectral.
- 22.2. Relaciones energéticas.
- 22.3. Radiación térmica.
- 22.4. El cuerpo negro.
- 22.5. Rayos X.

23. Física cuántica básica: átomos. Física nuclear

- 23.1. El origen de la cuantización, Plank, efecto fotoeléctrico y Compton.
- 23.2. Modelo atómico de Bohr.
- 23.3. Modelo de la mecánica cuántica, orbitales, electrones.
- 23.4. El espín de Pauli.
- 23.5. El núcleo atómico, constituyentes.
- 23.6. Reacciones entre átomos.
- 23.7. Potencial de Yukawa.
- 23.8. Radiactividad.
- 23.9. Fusión y fisión.
- 23.10. Radiactividad artificial y natural. Usos.

24. Astrofísica y cosmología

- 24.1. La radiación: producción, transporte, interpretación.
- 24.2. Las estrellas: fuentes energéticas, estructura, evolución, diagrama HR.
- 24.3. El sistema solar: su origen.
- 24.4. Estructura del universo: galaxias, objetos lejanos y misteriosos.
- 24.5. Cosmología. Origen y evolución del universo.

25. Relatividad especial básica

- 25.1. Relatividad newtoniana: principio de relatividad de Galileo.
- 25.2. Los orígenes de la teoría de la relatividad.
- 25.3. Sucesos simultáneos. Dilatación temporal. Contracción de longitudes.
- 25.4. Transformaciones de Lorentz.
- 25.5. Dinámica relativista.
- 25.6. Relación masa – energía.

Currículo de Matemáticas

1. Lógica proposicional

- 1.1. Proposiciones. Valor de las proposiciones.
- 1.2. Operadores lógicos, proposiciones compuestas, fórmulas con proposiciones.
- 1.3. Tautología, Contradicción e indeterminación.
- 1.4. Cuantificadores, leyes de la lógica.

2. Teoría de conjuntos

- 2.1. Definiciones, diagramas de Venn.
- 2.2. Operaciones: unión, intersección y complemento. Operaciones derivadas.
- 2.3. Propiedades de las operaciones con conjuntos. Leyes de Morgan.
- 2.4. Conjuntos numéricos, relaciones entre los conjuntos numéricos.
- 2.5. Intervalos de la recta real: nomenclatura, representación y operaciones.
- 2.6. Criterios de divisibilidad, máximo común divisor (mcd), mínimo común múltiplo(mcm).

3. Las demostraciones en matemáticas

- 3.1. Teorema matemático, axioma, hipótesis, corolario, lema.
- 3.2. Técnicas matemáticas de demostración:
 - a) Demostración directa.
 - b) Demostración indirecta.
 - c) Demostración por equivalencia.
 - d) Demostración por inducción.
 - e) Reducción al absurdo.
 - f) Ejemplos.

4. Expresiones algebraicas

- 4.1. Expresiones algebraicas, su tratamiento, simplificación y valor numérico.
- 4.2. Polinomios, operaciones con polinomios.
- 4.3. Identidades notables. Binomio de Newton.
- 4.4. Igualdades y desigualdades con parámetros.

5. Ecuaciones lineales y cuadráticas

- 5.1. Ecuaciones equivalentes (manejo de las ecuaciones).
- 5.2. Ecuaciones lineales con una incógnita.
- 5.3. Ecuaciones con valor absoluto.
- 5.4. Ecuaciones con raíces.
- 5.5. Ecuaciones cuadráticas. Discriminante.
- 5.6. Ecuaciones bicuadradas.
- 5.7. Inecuaciones de primer grado.
- 5.8. Inecuaciones de segundo grado.
- 5.9. Ecuaciones con parámetros.

6. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

- 6.1. Sistemas de ecuaciones lineales.
- 6.2. Tipos de sistemas según su número de soluciones.

- 6.3. Métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción, doble reducción, método de Gauss y regla de Cramer.
- 6.4. Sistemas con parámetros.
- 6.5. Sistemas de ecuaciones no lineales.
- 6.6. Inecuaciones.
- 6.7. Sistemas de inecuaciones con una incógnita.
- 6.8. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.
- 6.9. Introducción a la programación lineal.

7. Funciones

- 7.1. Definición. Formas de expresar una función.
- 7.2. Operaciones. Composición de funciones.
- 7.3. Gráfica de una función.
- 7.4. Características de las funciones (monotonía, simetría, periodicidad, acotamiento, ...).

8. Las funciones elementales

- 8.1. Funciones constantes, lineales y afines.
- 8.2. Función cuadrática.
- 8.3. Función de proporcionalidad inversa.
- 8.4. Funciones polinómicas.
- 8.5. Funciones racionales.
- 8.6. Presencia de las funciones elementales en el arte, la ciencia y la técnica.

9. Funciones exponenciales y logarítmicas

- 9.1. Función logarítmica y exponencial.
- 9.2. Logaritmos. Propiedades.
- 9.3. Sistemas de logaritmos.
- 9.4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- 9.5. Presencia de las exponenciales y los logaritmos en el arte, la ciencia y la técnica.

10. Razones trigonométricas.

- 10.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- 10.2. La circunferencia goniométrica. Ampliación de la definición a ángulos cualesquiera.
- 10.3. Signos de las razones trigonométricas.
- 10.4. Reducción al primer cuadrante.
- 10.5. Teorema fundamental de la trigonometría y corolarios.
- 10.6. Teoremas de adición de ángulos.
- 10.7. Transformación de sumas en productos.
- 10.8. Ecuaciones goniométricas.

11. Trigonometría

- 11.1. Resolución de triángulos rectángulos.
- 11.2. Teoremas del seno y del coseno.
- 11.3. Resolución de triángulos: caso general.
- 11.4. Rudimentos de topografía.

12. Funciones goniométricas

- 12.1. Funciones trigonométricas.

- 12.2. Funciones trigonométricas derivadas.
- 12.3. Funciones trigonométricas inversas.
- 12.4. Tablas de valores; manejo.
- 12.5. Uso de la calculadora.
- 12.6. Representaciones gráficas.
- 12.7. Anexo: funciones hiperbólicas.

13. Límites y continuidad

- 13.1. Definición de límite.
- 13.2. Propiedades y operaciones con límites.
- 13.3. Límites infinitos, límites en el infinito e indeterminaciones.
- 13.4. Definición de continuidad. Propiedades
- 13.5. Discontinuidad. Tipos.
- 13.6. Funciones continuas.
- 13.7. Funciones compuestas.
- 13.8. Asíntotas: tipología y cálculo.
- 13.9. Gráficas de funciones.

14. Derivadas

- 14.1. Definición de derivada de una función en un punto.
- 14.2. Interpretación geométrica y física de la derivada.
- 14.3. Derivabilidad y continuidad.
- 14.4. Derivadas de las funciones elementales.
- 14.5. Regla de la cadena.
- 14.6. Derivada de la función inversa.
- 14.7. Derivación logarítmica.
- 14.8. Cálculo de derivadas.
- 14.9. Aplicación al cálculo de indeterminaciones: Regla de L' Hôpital.
- 14.10. Derivadas sucesivas.
- 14.11. Fórmula de Taylor y desarrollos de McLaurin.

15. Análisis de funciones: representación gráfica y elementos

- 15.1. Dominio y rango.
- 15.2. Monotonía.
- 15.3. Extremos absolutos y relativos.
- 15.4. Convexidad; puntos de inflexión.
- 15.5. Asíntotas.
- 15.6. Gráficas. Ejemplos.

16. Cálculo integral

- 16.1. Función primitiva. Propiedades.
- 16.2. Cálculo de primitivas I: primitivas inmediatas.
- 16.3. Cálculo de primitivas II: método de sustitución e integración por partes.
- 16.4. Cálculo de primitivas III: primitivas de las funciones racionales.
- 16.5. Cálculo de primitivas IV: algunas primitivas irracionales, exponenciales, trigonométricas y logarítmicas.
- 16.6. La integral definida: definición y propiedades. Interpretación geométrica.

- 16.7. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Interpretación física de la integral.
- 16.8. Aplicaciones del cálculo integral:
 - a) Área limitada por dos curvas.
 - b) Volumen de revolución.
 - c) Superficie de revolución.
 - d) Cálculo de la posición a partir de la velocidad y la aceleración.

17. Geometría sintética en el plano

- 17.1. Elementos básicos.
- 17.2. Segmentos y ángulos.
- 17.3. Triángulos: tipología y puntos y rectas notables.
- 17.4. Circunferencia: propiedades y elementos.
- 17.5. Construcción de figuras en el plano.
- 17.6. Transformaciones geométricas en el plano.
 - a) Movimientos: giros, traslaciones, simetrías axiales y simetrías centrales.
 - b) Homotecias.
 - c) Semejanzas.

18. Vectores en el plano y en el espacio

- 18.1. Vectores; operaciones; representación gráfica.
- 18.2. Combinación lineal. Independencia. Bases.
- 18.3. Producto escalar, vectorial y mixto.

19. Geometría analítica en el plano

- 19.1. Puntos y rectas.
- 19.2. Ecuaciones de la recta.
- 19.3. Posición relativa de rectas: paralelismo y perpendicularidad.
- 19.4. Distancias entre puntos, rectas y puntos y rectas.
- 19.5. Ángulo entre dos rectas.

20. Geometría analítica en el espacio

- 20.1. Puntos, rectas, planos y semiplanos.
- 20.2. Posición relativa entre rectas, planos y rectas y planos: paralelismo, perpendicularidad.
- 20.3. Distancia entre puntos, rectas y planos.
- 20.4. Ángulos.

21. Problemas métricos en el plano y en el espacio.

- 21.1. Interpretaciones geométricas de los productos escalar, vectorial y mixto.
- 21.2. Determinación de distancias.
- 21.3. Determinación de áreas.
- 21.4. Determinación de volúmenes.
- 21.5. Determinación de ángulos.

22. Sucesiones de números reales.

- 22.1. Sucesiones; término general; sucesiones recurrentes.
- 22.2. Propiedades de las sucesiones. Límite de una sucesión.

- 22.3. Progresiones aritméticas.
- 22.4. Progresiones geométricas.
- 22.5. Matemática financiera básica: interés simple y compuesto.
- 22.6. Series. Serie geométrica.

23. Combinatoria

- 23.1. Definición de combinatoria. Técnicas de recuento.
- 23.2. Variaciones. Variaciones con repetición.
- 23.3. Permutaciones. Permutaciones con repetición.
- 23.4. Combinaciones.
- 23.5. Números factoriales y combinatorios.
- 23.6. Propiedades de los números combinatorios. Triángulo de Tartaglia.
- 23.7. Binomio de Newton y fórmula de Leibniz.
- 23.8. Resolución de problemas de recuento.

24. Probabilidad

- 24.1. Espacio muestral. Sucesos.
- 24.2. Probabilidad de un suceso. Propiedades.
- 24.3. Probabilidad compuesta y condicionada.
- 24.4. Teorema de la probabilidad total.
- 24.5. Teorema de Bayes

25. Estadística

- 25.1. Variables estadísticas, tablas de frecuencias, representación gráfica.
- 25.2. Medidas de tendencia central: media, mediana, moda.
- 25.3. Medidas de dispersión: recorrido o rango, desviación media, varianza, desviación típica.
- 25.4. Tablas de doble entrada.
- 25.5. Recta de regresión y correlación.

Anexo II: Prácticas resueltas

Práctica I: Espectro de emisión del átomo de hidrógeno

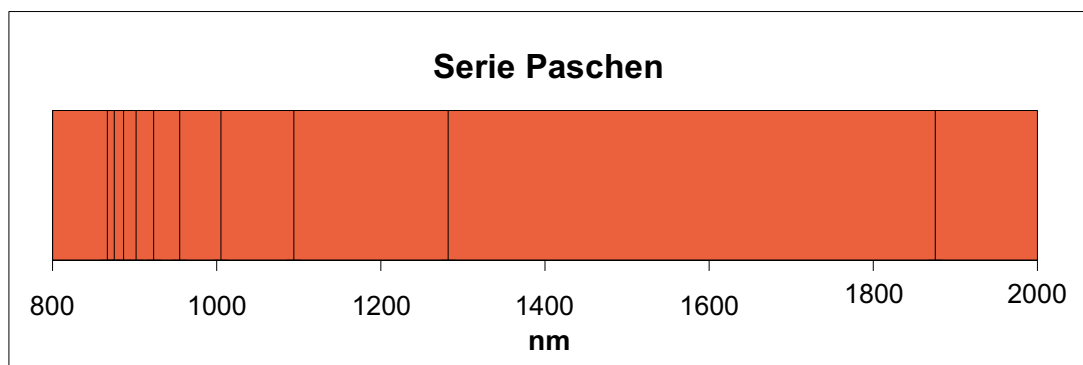
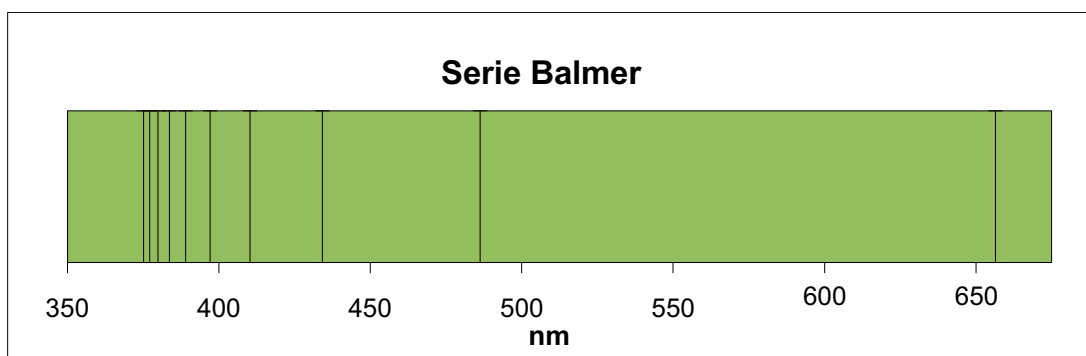
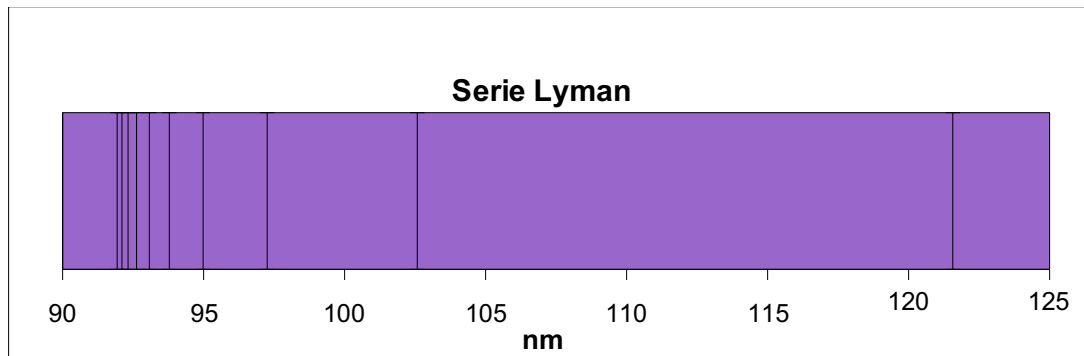
Infrarrojo > 1000 nm
 Rojo: 700 nm
 Amarillo: 580 nm
 Azul: 470 nm
 UV < 300 nm

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad R = 109677,6 \text{ cm}^{-1}$$

$n_2 = n_1 + 1$
 Serie Lyman: $n_1 = 1$
 Serie Balmer: $n_1 = 2$
 Serie Paschen: $n_1 = 3$

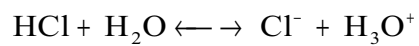
C Ridberg = 109677,6
 cm⁻¹ → nm 1E+07

Intensidad	i	n ₁	n ₂	ν (cm ⁻¹)	λ (nm)		
1	1	1	2	82258,2	121,57	Ultravioleta	Lyman
1	2	1	3	97491,2	102,57		
1	3	1	4	102822,8	97,25		
1	4	1	5	105290,5	94,98		
1	5	1	6	106631,0	93,78		
1	6	1	7	107439,3	93,08		
1	7	1	8	107963,9	92,62		
1	8	1	9	108323,6	92,32		
1	9	1	10	108580,8	92,10		
1	10	1	11	108771,2	91,94		
1	1	2	3	15233,0	656,47	Visible	Balmer
1	2	2	4	20564,6	486,27		
1	3	2	5	23032,3	434,17		
1	4	2	6	24372,8	410,29		
1	5	2	7	25181,1	397,12		
1	6	2	8	25705,7	389,02		
1	7	2	9	26065,4	383,65		
1	8	2	10	26322,6	379,90		
1	9	2	11	26513,0	377,17		
1	10	2	12	26657,8	375,13		
1	1	3	4	5331,6	1875,63	Infrarrojo próximo	Paschen
1	2	3	5	7799,3	1282,17		
1	3	3	6	9139,8	1094,12		
1	4	3	7	9948,1	1005,22		
1	5	3	8	10472,7	954,86		
1	6	3	9	10832,4	923,16		
1	7	3	10	11089,6	901,74		
1	8	3	11	11280,0	886,53		
1	9	3	12	11424,8	875,29		
1	10	3	13	11537,4	866,74		



Práctica II

pH de un ácido fuerte

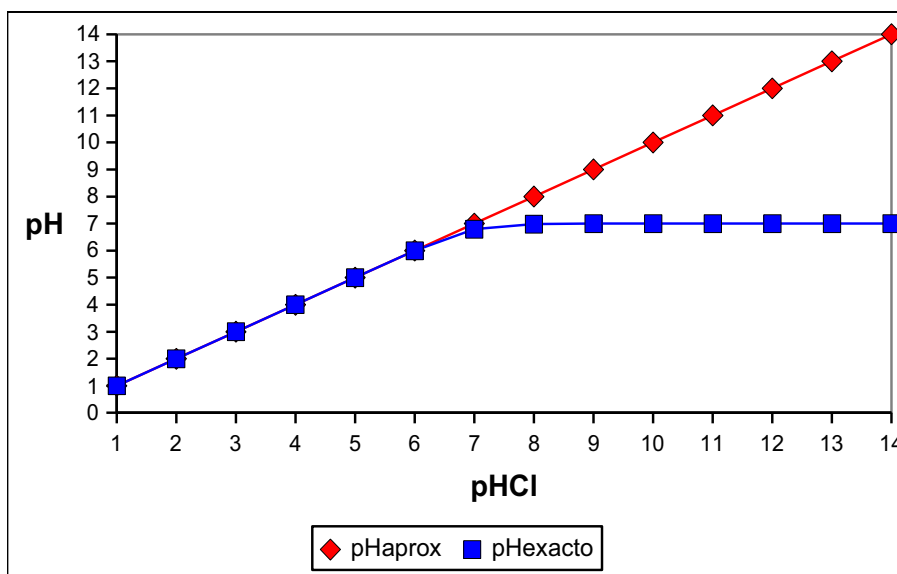


$$\text{pH}_{\text{aprox}} = -\log[\text{Ca}]; \quad \text{pH}_{\text{aprox}} = \text{pCl}$$

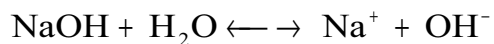
$$\text{pH}_{\text{exacto}} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]; \quad [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - \text{Ca}[\text{H}_3\text{O}^+] - K_w = 0$$

$$K_w = 1,00\text{E-}14$$

Ca	pHCl	pHaprox	pHexacto
1E-01	1	1	1,0000000
1E-02	2	2	2,0000000
1E-03	3	3	3,0000000
1E-04	4	4	3,9999996
1E-05	5	5	4,9999566
1E-06	6	6	5,9957208
1E-07	7	7	6,7910124
1E-08	8	8	6,9782943
1E-09	9	9	6,9978285
1E-10	10	10	6,9997829
1E-11	11	11	6,9999783
1E-12	12	12	6,9999978
1E-13	13	13	6,9999998
1E-14	14	14	7,0000000



pH de una base fuerte

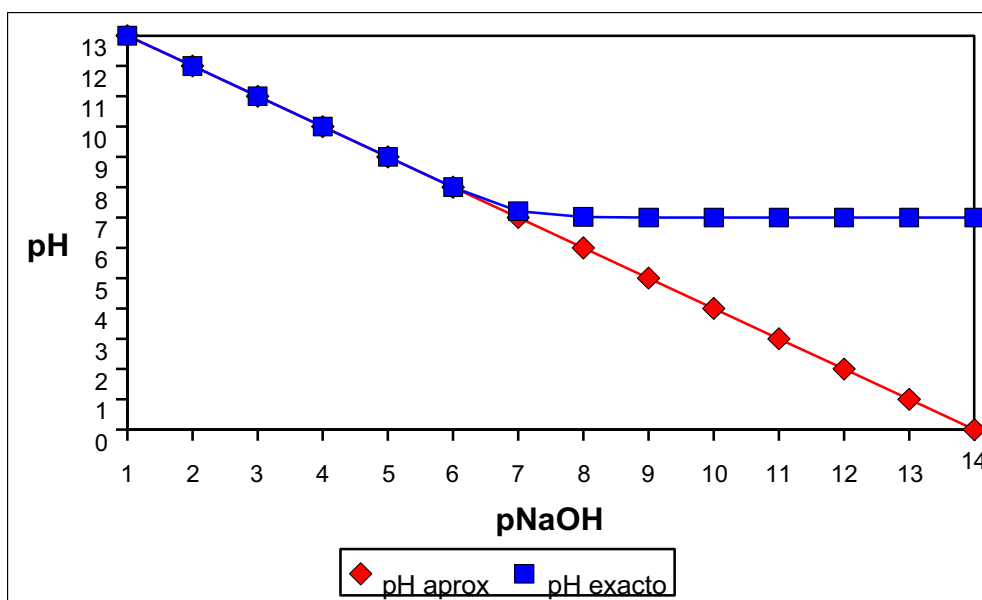


$$\text{pH}_{\text{aprox}} = \text{pK}_w - \text{pOH}; \quad \text{pH}_{\text{aprox}} = 14 - \log[\text{Cb}]$$

$$\text{pH}_{\text{exacto}} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]; \quad [\text{H}_3\text{O}^+]^2 + \text{Cb}[\text{H}_3\text{O}^+] - K_w = 0$$

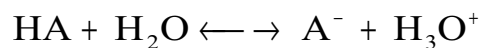
$$K_w = 1,00\text{E-}14$$

Cb	pNaOH	pH aprox	pH exacto
1E-01	1	13	12,9999855
1E-02	2	12	11,9999998
1E-03	3	11	11,0000000
1E-04	4	10	10,0000004
1E-05	5	9	9,0000434
1E-06	6	8	8,0042792
1E-07	7	7	7,2089876
1E-08	8	6	7,0217057
1E-09	9	5	7,0021715
1E-10	10	4	7,0002171
1E-11	11	3	7,0000217
1E-12	12	2	7,0000022
1E-13	13	1	7,0000002
1E-14	14	0	7,0000000



Práctica III

pH de un ácido débil



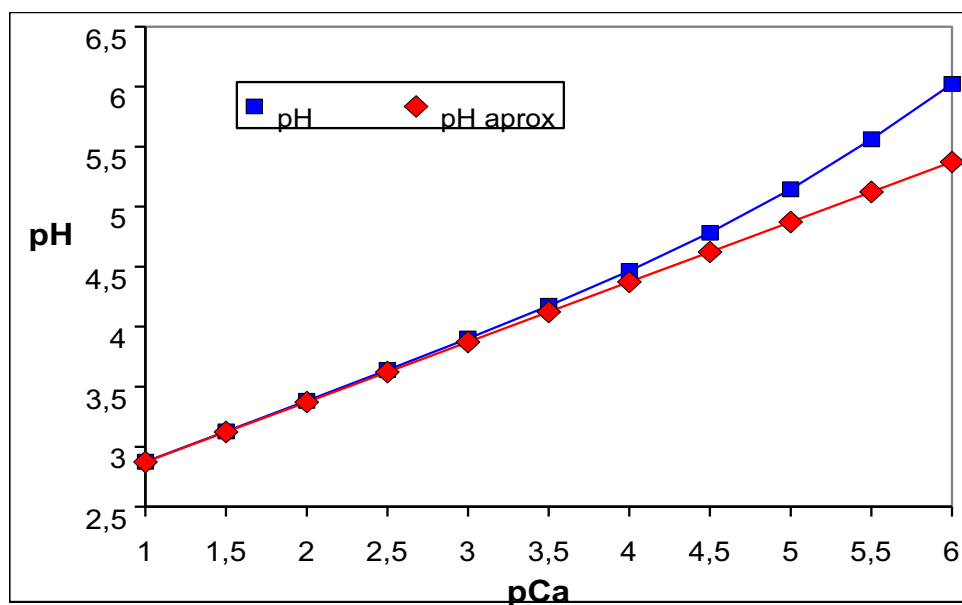
$$\text{pH: } [\text{H}_3\text{O}^+]^2 + K_a[\text{H}_3\text{O}^+] - \text{Ca}K_a = 0$$

$$\text{pH}_{\text{aprox}} : [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - \text{Ca}K_a = 0$$

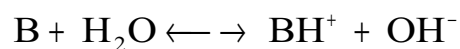
$$K_a = 1,80\text{E-}05$$

$$K_w = 1,00\text{E-}14$$

Índice	Ca	pCa	[H ⁺]	pH	[H ⁺] aprox	pH aprox
1	1,00E-01	1	1,33E-03	2,875	1,34E-03	2,872
2	3,16E-02	1,5	7,46E-04	3,128	7,54E-04	3,122
3	1,00E-02	2	4,15E-04	3,382	4,24E-04	3,372
4	3,16E-03	2,5	2,30E-04	3,639	2,39E-04	3,622
5	1,00E-03	3	1,25E-04	3,901	1,34E-04	3,872
6	3,16E-04	3,5	6,70E-05	4,174	7,54E-05	4,122
7	1,00E-04	4	3,44E-05	4,464	4,24E-05	4,372
8	3,16E-05	4,5	1,65E-05	4,783	2,39E-05	4,622
9	1,00E-05	5	7,16E-06	5,145	1,34E-05	4,872
10	3,16E-06	5,5	2,74E-06	5,562	7,54E-06	5,122
11	1,00E-06	6	9,50E-07	6,022	4,24E-06	5,372



pH de una base débil



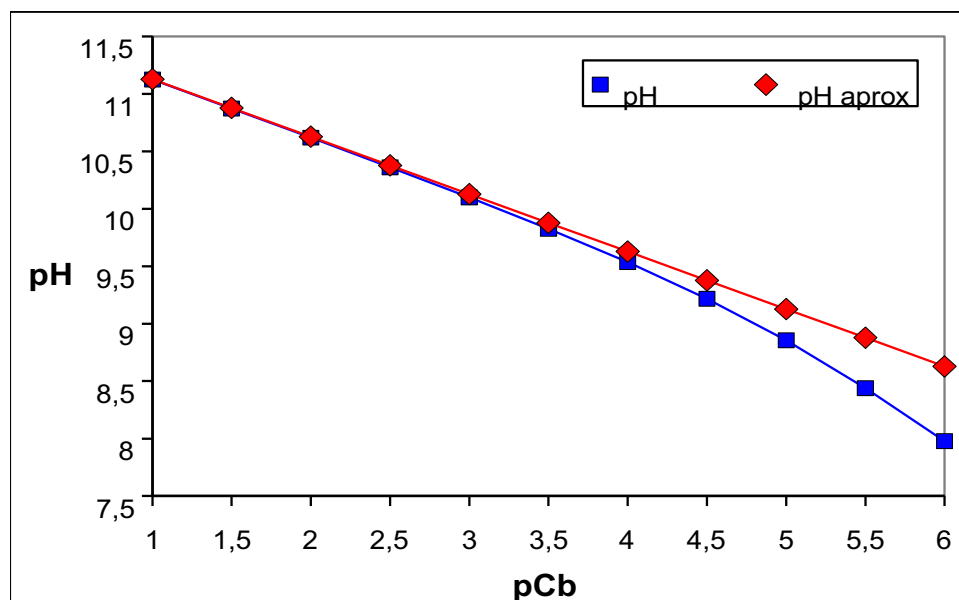
$$pH = 14 - pOH: [OH^-]^2 + K_b[OH^-] - C_bK_b = 0$$

$$pH_{aprox} = 14 - pOH: [OH^-]^2 - C_bK_b = 0$$

$$K_b = 1,80E-05$$

$$K_w = 1,00E-14$$

Índice	Cb	pCb	[OH-]	pH	[OH-] aprox	pH aprox
1	1,00E-01	1	1,33E-03	11,125	1,34E-03	11,128
2	3,16E-02	1,5	7,46E-04	10,872	7,54E-04	10,878
3	1,00E-02	2	4,15E-04	10,618	4,24E-04	10,628
4	3,16E-03	2,5	2,30E-04	10,361	2,39E-04	10,378
5	1,00E-03	3	1,25E-04	10,099	1,34E-04	10,128
6	3,16E-04	3,5	6,70E-05	9,826	7,54E-05	9,878
7	1,00E-04	4	3,44E-05	9,536	4,24E-05	9,628
8	3,16E-05	4,5	1,65E-05	9,217	2,39E-05	9,378
9	1,00E-05	5	7,16E-06	8,855	1,34E-05	9,128
10	3,16E-06	5,5	2,74E-06	8,438	7,54E-06	8,878
11	1,00E-06	6	9,50E-07	7,978	4,24E-06	8,628



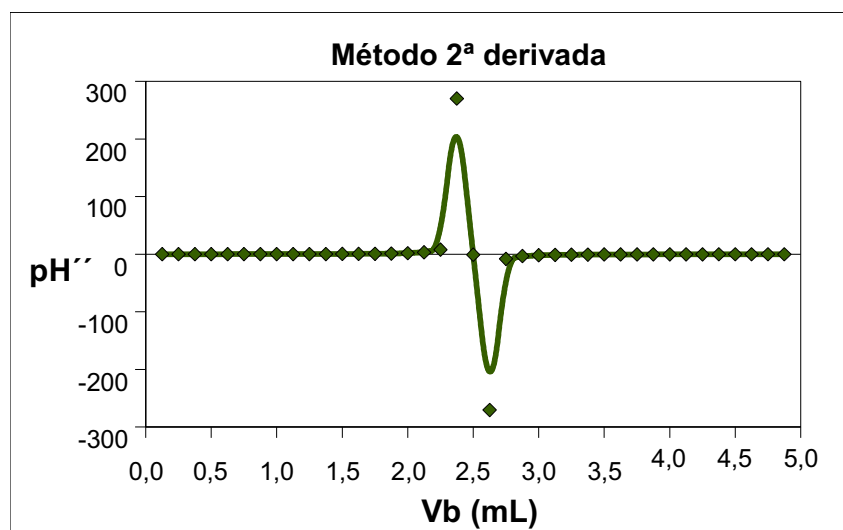
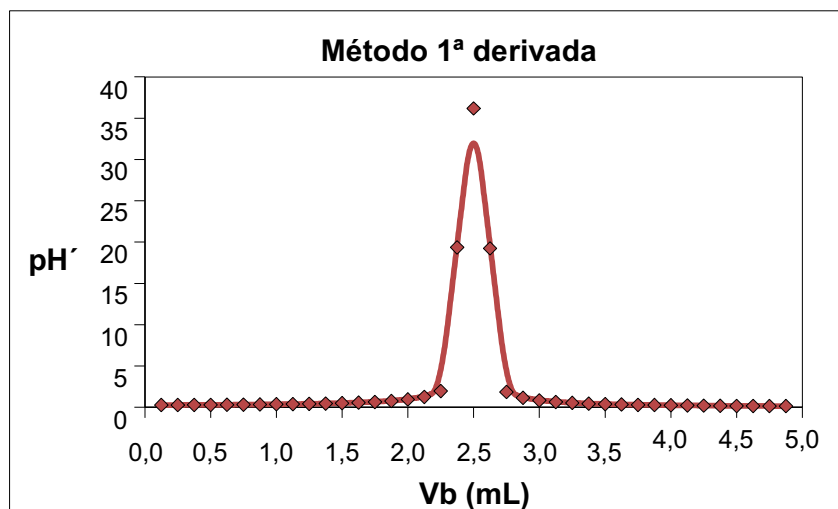
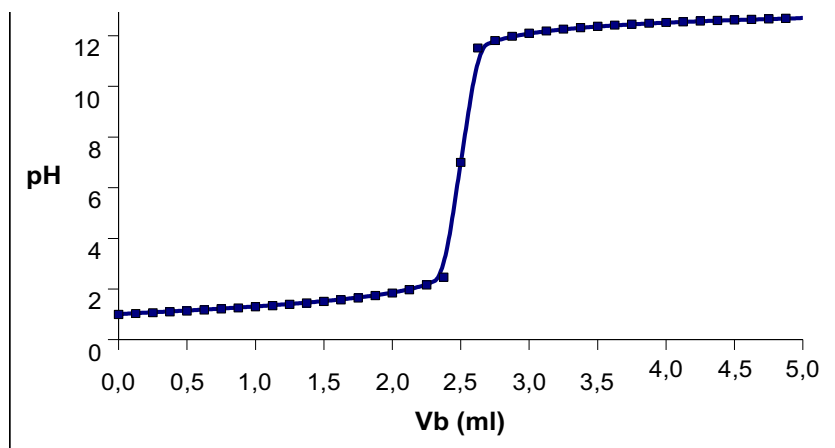
Práctica IV

Valoración ácido fuerte – base fuerte

$C_a = 1,00E-01$
$V_a = 5$
$k_w = 1,00E-14$

$C_b = 2,00E-01$
$V_{eq} = 2,5$

n	Vb (mL)	M	pH	pH'	pH''
0	0,000	1,00E-01	1,0000		
1	0,125	9,27E-02	1,0330	0,2678	0,060561
2	0,250	8,57E-02	1,0669	0,2760	0,070158
3	0,375	7,91E-02	1,1020	0,2854	0,081306
4	0,500	7,27E-02	1,1383	0,2964	0,094426
5	0,625	6,67E-02	1,1761	0,3092	0,110079
6	0,750	6,09E-02	1,2156	0,3241	0,129035
7	0,875	5,53E-02	1,2571	0,3417	0,152370
8	1,000	5,00E-02	1,3010	0,3626	0,181627
9	1,125	4,49E-02	1,3478	0,3876	0,219085
10	1,250	4,00E-02	1,3979	0,4181	0,268227
11	1,375	3,53E-02	1,4523	0,4558	0,334594
12	1,500	3,08E-02	1,5119	0,5034	0,427442
13	1,625	2,64E-02	1,5781	0,5653	0,563213
14	1,750	2,22E-02	1,6532	0,6489	0,773472
15	1,875	1,82E-02	1,7404	0,7675	1,125451
16	2,000	1,43E-02	1,8451	0,9494	1,784974
17	2,125	1,05E-02	1,9777	1,2651	3,265205
18	2,250	6,90E-03	2,1614	1,9684	7,987815
19	2,375	3,39E-03	2,4698	19,3545	270,190334
20	2,500	0,00E+00	7,0000	36,1835	-0,926580
21	2,625	-3,28E-03	11,5157	19,2387	-270,190845
22	2,750	-6,45E-03	11,8097	1,8524	-7,988844
23	2,875	-9,52E-03	11,9788	1,1490	-3,266773
24	3,000	-1,25E-02	12,0969	0,8331	-1,787051
25	3,125	-1,54E-02	12,1871	0,6509	-1,128018
26	3,250	-1,82E-02	12,2596	0,5319	-0,776733
27	3,375	-2,09E-02	12,3201	0,4479	-0,566830
28	3,500	-2,35E-02	12,3716	0,3855	-0,431754
29	3,625	-2,61E-02	12,4164	0,3373	-0,339470
30	3,750	-2,86E-02	12,4559	0,2990	-0,273578
31	3,875	-3,10E-02	12,4912	0,2678	-0,225097
32	4,000	-3,33E-02	12,5229	0,2420	-0,188386
33	4,125	-3,56E-02	12,5517	0,2202	-0,159792
34	4,250	-3,78E-02	12,5779	0,2016	-0,136917
35	4,375	-4,00E-02	12,6021	0,1856	-0,119378
36	4,500	-4,21E-02	12,6243	0,1717	-0,103639
37	4,625	-4,42E-02	12,6450	0,1595	-0,091555
38	4,750	-4,62E-02	12,6642	0,1487	-0,081597
39	4,875	-4,81E-02	12,6822	0,1390	-0,072739
40	5,000	-5,00E-02	12,6990		

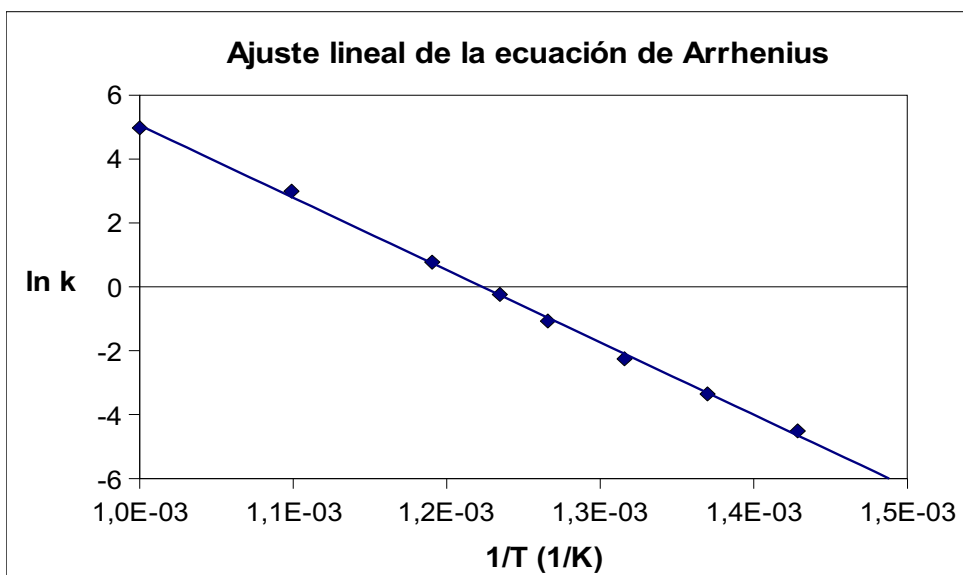


Práctica V

Dependencia de la constante de velocidad con la temperatura

$$k = A e^{\frac{-E_a}{RT}}; \quad \ln k = \ln A - \frac{E_a}{R} \frac{1}{T}$$

T (K)	k (M ⁻¹ s ⁻¹)	1/T (x)	Ln k (y)
700	0,01	0,00142857	-4,50986001
730	0,04	0,00136986	-3,35240722
760	0,11	0,00131579	-2,25379493
790	0,34	0,00126582	-1,07002483
810	0,79	0,00123457	-0,23698896
840	2,17	0,00119048	0,77472717
910	20	0,00109890	2,99573227
1000	145	0,00100000	4,97673374



ESTIMACION.LINEAL			
m	b	-22651	27,71
Sm	Sb	341	0,42
r2	Sreg	0,9986	0,1270

R = 8,314
A = 1,08E+12
Ea = 188318

Práctica VI

Determinación del orden de reacción

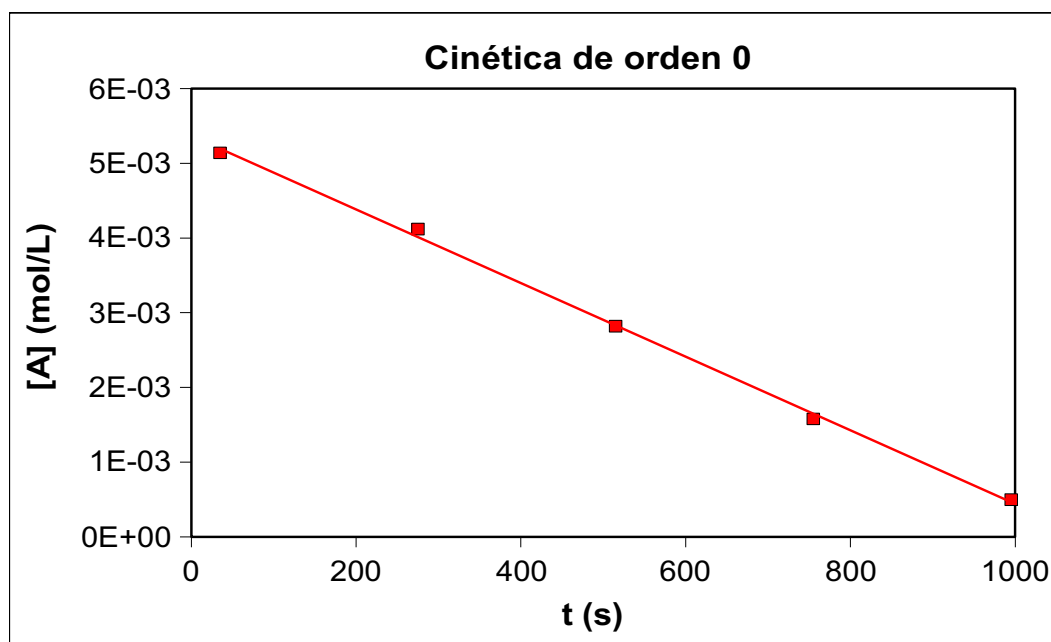


Orden 0: $[A] = [A]_0 - kt$

Orden 1: $\ln [A] = \ln [A]_0 - kt$

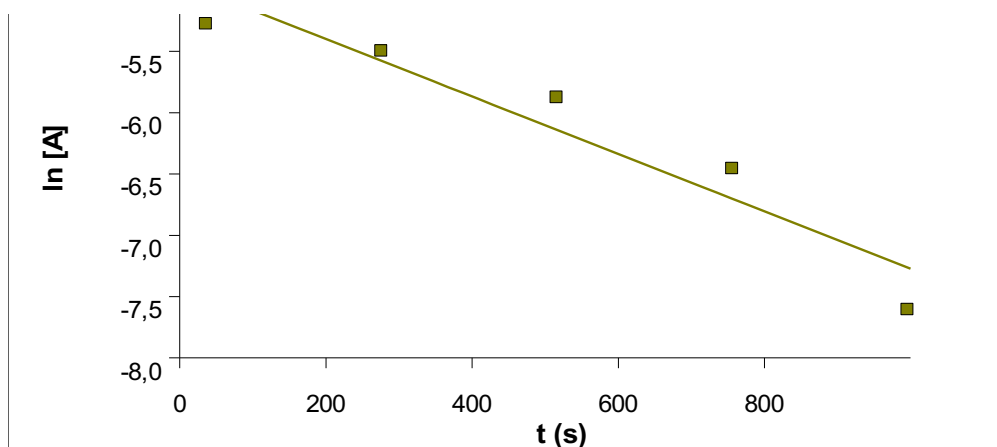
Orden 2: $\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$

t (s)	[A] (mol/L)	ln [A]	1/[A] (L/mol)
35	0,00514	-5,2707	194,55
275	0,00412	-5,4919	242,72
515	0,00282	-5,8710	354,61
755	0,00158	-6,4503	632,91
995	0,00050	-7,6009	2000,00



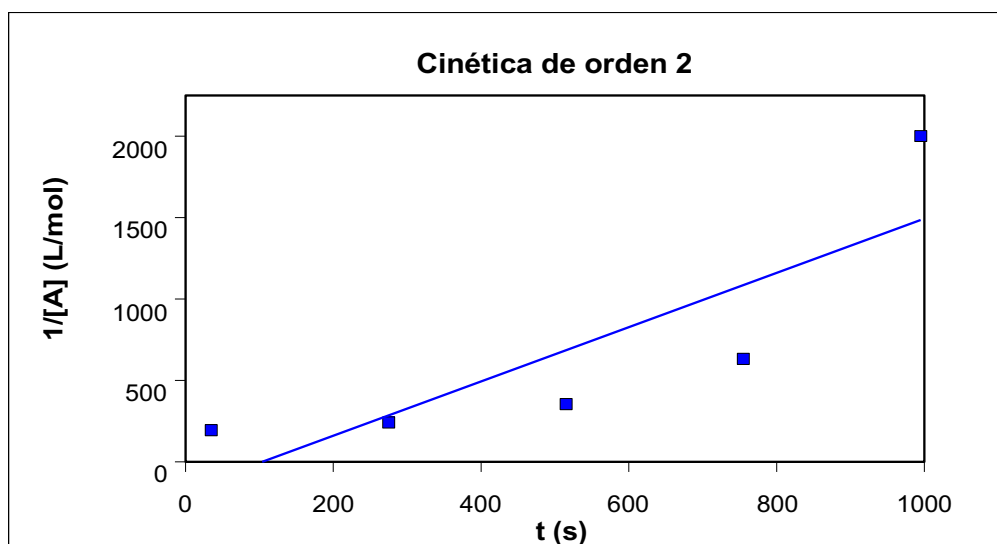
ESTIMACION.LINEAL			
m	b	-4,93E-06	5,37E-03
Sm	Sb	1,09E-07	6,71E-05
r2	Sreg	0,9985	8,25E-05

k = 4,93E-06



ESTIMACION.LINEAL			
m	b	-2,34E-03	-4,93E+00
Sm	Sb	4,31E-04	2,66E-01
r2	Sreg	0,9076	0,3273

$k = 2,34E-03$



ESTIMACION.LINEAL			
m	b	1,67E+00	-1,74E+02
Sm	Sb	6,26E-01	3,86E+02
r2	Sreg	0,7030	474,8253

$k = 1,67E+00$

Práctica VII: Caída libre en el Sistema Solar

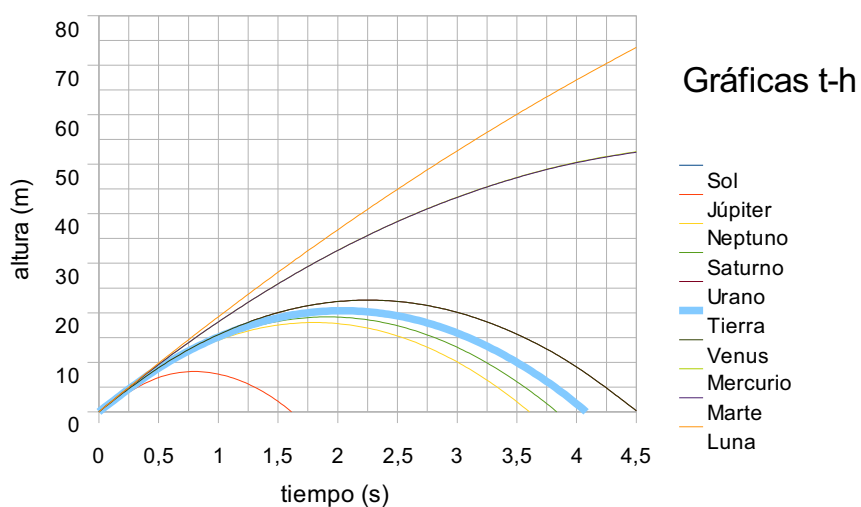
Cálculo de la aceleración de la gravedad en superficie

Nos basamos en la aproximación $g=GM/R^2$

Astro	Masa (en kg)	Radio ecuatorial (en m)	g (en m/s ²)
Sol	1,99E+030	6,95E+008	274,97
Júpiter	1,90E+027	7,15E+007	24,81
Saturno	5,68E+026	6,03E+007	10,44
Neptuno	1,02E+026	2,48E+007	11,1
Urano	8,68E+025	2,56E+007	8,87
Tierra	5,97E+024	6,38E+006	9,8
Venus	4,87E+024	6,05E+006	8,87
Marte	6,42E+023	3,40E+006	3,71
Mercurio	3,30E+023	2,44E+006	3,7
Luna	7,35E+022	1,74E+006	1,62

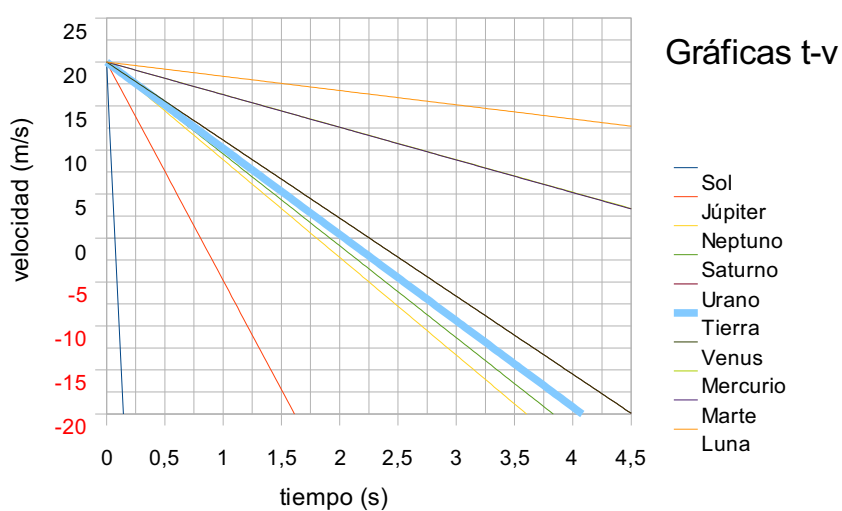
Discretización de la ecuación del movimiento ($h=h_0+v_0\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$)

Tiempo	Sol	Júpiter	Neptuno	Saturno	Urano	Tierra	Venus	Mercurio	Marte	Luna
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	-24	7	9	9	9	9	9	10	10	10
1	-117	8	14	15	16	15	16	18	18	19
1,5	-279	2	18	18	20	19	20	26	26	28
2	-510	-10	18	19	22	20	22	33	33	37
2,5	-809	-28	15	17	22	19	22	38	38	45
3	-1177	-52	10	13	20	16	20	43	43	53
3,5	-1614	-82	2	6	16	10	16	47	47	60
4	-2120	-118	-9	-4	9	2	9	50	50	67
4,5	-2694	-161	-22	-16	0	-9	0	53	52	74



Discretización de la ecuación de la velocidad ($v=v_0 - g \cdot t$)

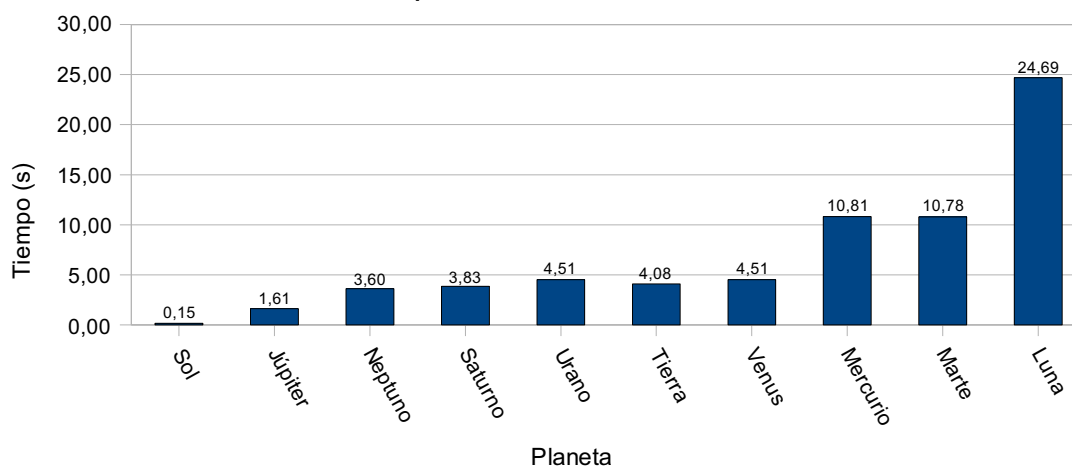
Tiempo	Sol	Júpiter	Neptuno	Saturno	Urano	Tierra	Venus	Mercurio	Marte	Luna
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
0,5	-117	8	14	15	16	15	16	18	18	19
1	-255	-5	9	10	11	10	11	16	16	18
1,5	-392	-17	3	4	7	5	7	14	14	18
2	-530	-30	-2	-1	2	0	2	13	13	17
2,5	-667	-42	-8	-6	-2	-5	-2	11	11	16
3	-805	-54	-13	-11	-7	-9	-7	9	9	15
3,5	-942	-67	-19	-17	-11	-14	-11	7	7	14
4	-1080	-79	-24	-22	-15	-19	-15	5	5	14
4,5	-1217	-92	-30	-27	-20	-24	-20	3	3	13



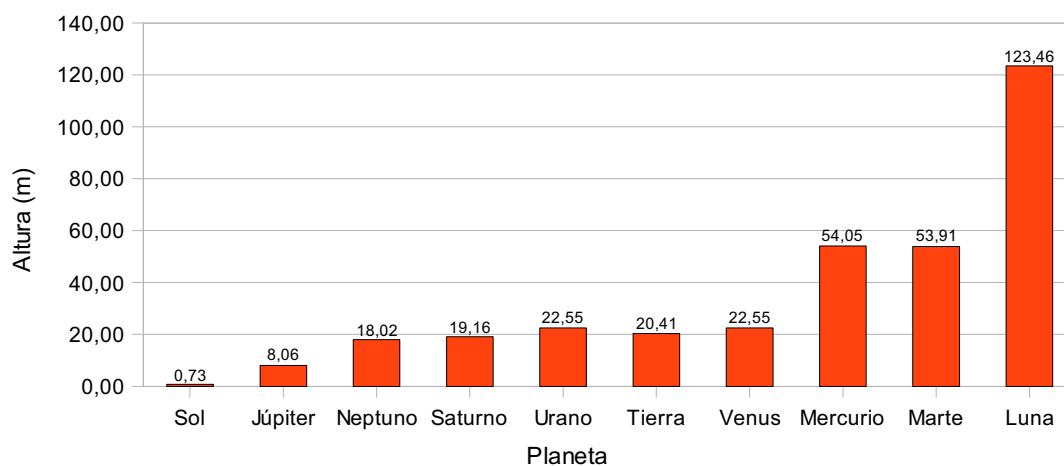
Cálculo del tiempo necesario para alcanzar una posición dada (ecuación $h=h_0+v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$)

	Coefficiente a	Solución 1 (+)	Solución 2 (-)	Altura máx
Sol	-137,49	0,00	0,15	0,73m
Júpiter	-12,41	0,00	1,61	8,06m
Neptuno	-5,55	0,00	3,60	18,02m
Saturno	-5,22	0,00	3,83	19,16m
Urano	-4,44	0,00	4,51	22,55m
Tierra	-4,90	0,00	4,08	20,41m
Venus	-4,44	0,00	4,51	22,55m
Mercurio	-1,85	0,00	10,81	54,05m
Marte	-1,86	0,00	10,78	53,91m
Luna	-0,81	0,00	24,69	123,46m

Tiempos de retorno al suelo



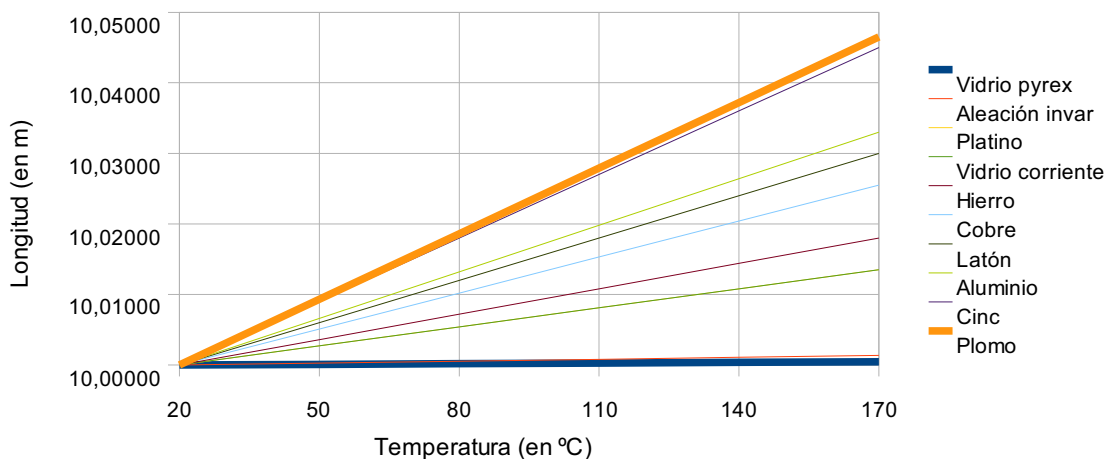
Altura máxima



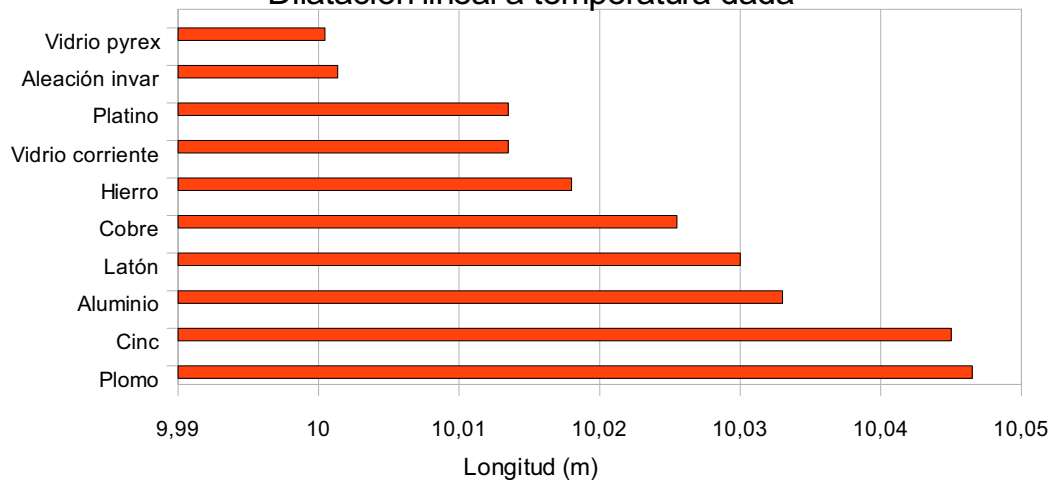
Práctica VIII: Dilatación térmica

Material	Temperaturas						
	CDL(en °C ⁻¹)	20	50	80	110	140	170
	Dilatación ($l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$) (en metros)						
Vidrio pyrex	3,00E-007	10,00000	10,00009	10,00018	10,00027	10,00036	10,00045
Aleación invar	9,00E-007	10,00000	10,00027	10,00054	10,00081	10,00108	10,00135
Platino	9,00E-006	10,00000	10,00270	10,00540	10,00810	10,01080	10,01350
Vidrio corriente	9,00E-006	10,00000	10,00270	10,00540	10,00810	10,01080	10,01350
Hierro	1,20E-005	10,00000	10,00360	10,00720	10,01080	10,01440	10,01800
Cobre	1,70E-005	10,00000	10,00510	10,01020	10,01530	10,02040	10,02550
Latón	2,00E-005	10,00000	10,00600	10,01200	10,01800	10,02400	10,03000
Aluminio	2,20E-005	10,00000	10,00660	10,01320	10,01980	10,02640	10,03300
Cinc	3,00E-005	10,00000	10,00900	10,01800	10,02700	10,03600	10,04500
Plomo	3,10E-005	10,00000	10,00930	10,01860	10,02790	10,03720	10,04650

Gráficas de dilatación lineal

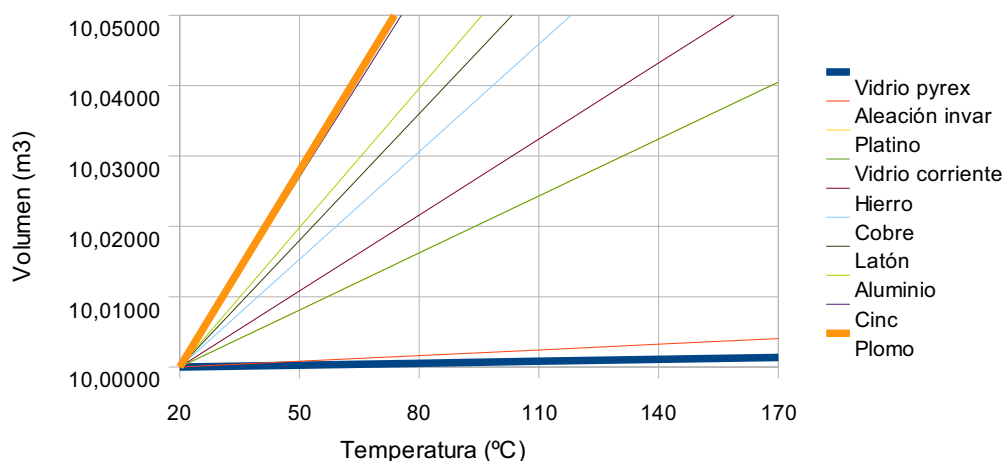


Dilatación lineal a temperatura dada

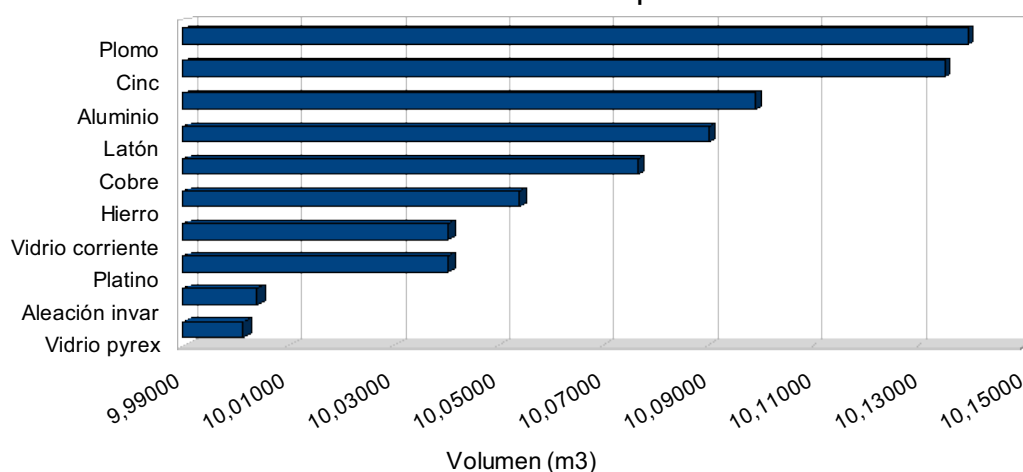


Material	Temperaturas						
	CDL(en °C ⁻¹)	20	50	80	110	140	170
	Dilatación (V = V _o (1+3α·Δt)) (en metros cúbicos)						
Vidrio pyrex	3,00E-007	10,00000	10,00027	10,00054	10,00081	10,00108	10,00135
Aleación invar	9,00E-007	10,00000	10,00081	10,00162	10,00243	10,00324	10,00405
Platino	9,00E-006	10,00000	10,00810	10,01620	10,02430	10,03240	10,04050
Vidrio corriente	9,00E-006	10,00000	10,00810	10,01620	10,02430	10,03240	10,04050
Hierro	1,20E-005	10,00000	10,01080	10,02160	10,03240	10,04320	10,05400
Cobre	1,70E-005	10,00000	10,01530	10,03060	10,04590	10,06120	10,07650
Latón	2,00E-005	10,00000	10,01800	10,03600	10,05400	10,07200	10,09000
Aluminio	2,20E-005	10,00000	10,01980	10,03960	10,05940	10,07920	10,09900
Cinc	3,00E-005	10,00000	10,02700	10,05400	10,08100	10,10800	10,13500
Plomo	3,10E-005	10,00000	10,02790	10,05580	10,08370	10,11160	10,13950

Gráficas de dilatación cúbica



Dilatación cúbica a temperatura dada



Práctica IX: Circuitos de corriente alterna

Circuito de Corriente Alterna con Resistencia

Datos iniciales

	Unidades
Voltaje máximo	5 voltios
Resistencia	3 ohmios
Frecuencia	0,5 hercios
Periodo	2 segundos
Pulsación	3,14 radianes / segundo
Fase inicial	1,05 radianes

Datos para la representación gráfica

Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,2 segundos

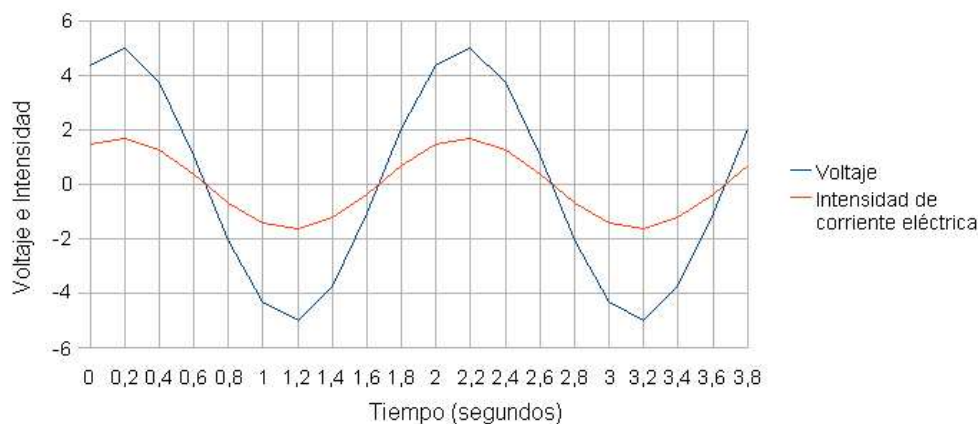
Expresión para el voltaje: $v(t) = v_0 \sin(\omega t + b)$

Expresión para la intensidad: $i(t) = i_0 \sin(\omega t + b)$

Relación entre voltaje e intensidad máximos: $i_0 = v_0 / R$

Tiempo	Voltaje	Intensidad de corriente eléctrica
0	4,33	1,44
0,2	4,97	1,66
0,4	3,72	1,24
0,6	1,04	0,35
0,8	-2,03	-0,68
1	-4,33	-1,44
1,2	-4,97	-1,66
1,4	-3,72	-1,24
1,6	-1,04	-0,35
1,8	2,03	0,68
2	4,33	1,44
2,2	4,97	1,66
2,4	3,72	1,24
2,6	1,04	0,35
2,8	-2,03	-0,68
3	-4,33	-1,44
3,2	-4,97	-1,66
3,4	-3,72	-1,24
3,6	-1,04	-0,35
3,8	2,03	0,68

V e I en Circuito de CA con Resistencia



Anexo II: Prácticas resueltas

Circuito de Corriente Alterna con Condensador

Datos iniciales

	Unidades
Voltaje máximo	5 voltios
Capacidad	8,00E-002 faradios
Frecuencia	0,5 hercios
Periodo	2 segundos
Pulsación	3,14 radianes / segundo
Fase inicial	1,05 radianes
Capacitancia	3,98 ohmnios

Datos para la representación gráfica

Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,2 segundos

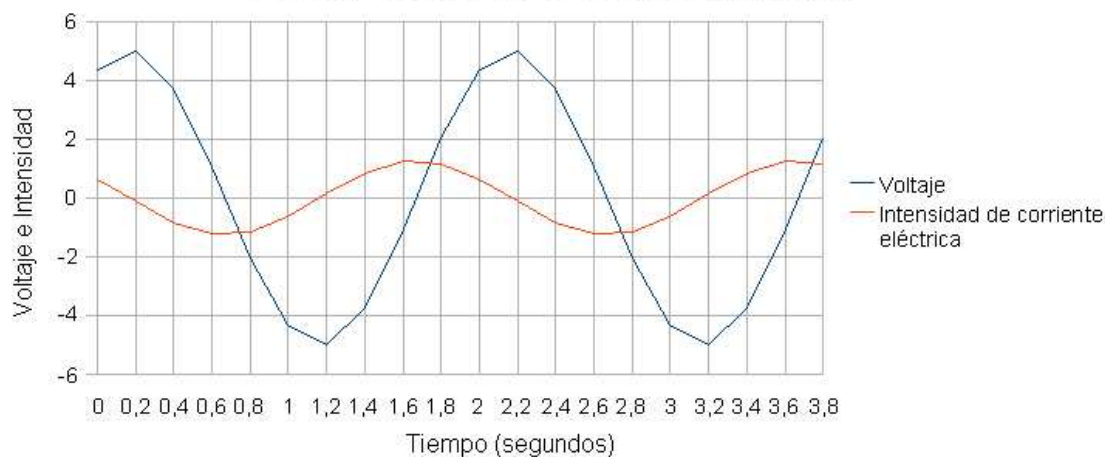
Expresión para el voltaje: $v(t) = v_0 \cdot \sin(\omega t + b)$

Expresión para la intensidad: $i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + b + \pi/2)$

Relación entre voltaje e intensidad máximos: $i_0 = v_0 / X_c = v_0 \cdot \omega \cdot C$

Tiempo	Voltaje	Intensidad de corriente eléctrica
0	4,33	0,63
0,2	4,97	-0,13
0,4	3,72	-0,84
0,6	1,04	-1,23
0,8	-2,03	-1,15
1	-4,33	-0,63
1,2	-4,97	0,13
1,4	-3,72	0,84
1,6	-1,04	1,23
1,8	2,03	1,15
2	4,33	0,63
2,2	4,97	-0,13
2,4	3,72	-0,84
2,6	1,04	-1,23
2,8	-2,03	-1,15
3	-4,33	-0,63
3,2	-4,97	0,13
3,4	-3,72	0,84
3,6	-1,04	1,23
3,8	2,03	1,15

V e I en Circuito de CA con Condensador



Circuito de Corriente Alterna con Bobina de Autoinducción

Datos iniciales

	Unidades
Voltaje máximo	5 voltios
Coef autoinducción	6,00E-001 henrios
Frecuencia	0,5 hercios
Periodo	2 segundos
Pulsación	3,14 radianes / segundo
Fase inicial	1,05 radianes
Inductancia	1,88 ohmnios

Datos para la representación gráfica

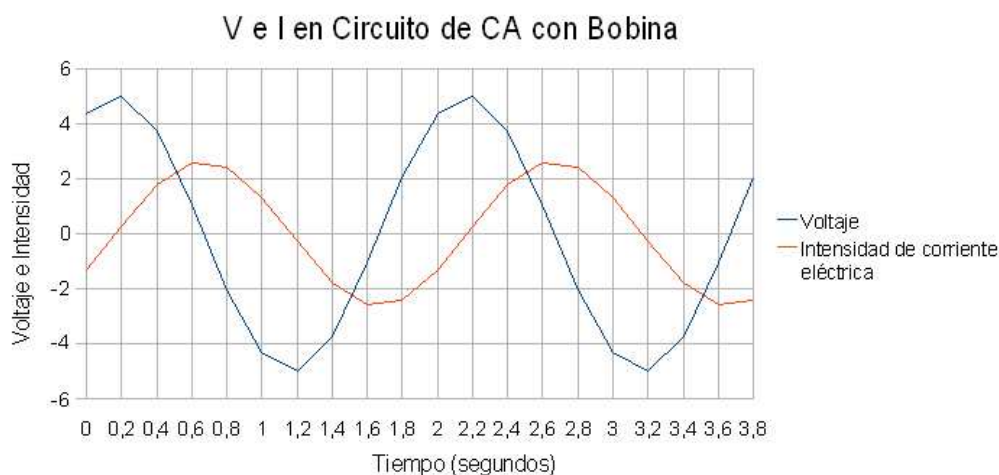
Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,2 segundos

Expresión para el voltaje: $v(t) = v_0 \sin(\omega t + b)$

Expresión para la intensidad: $i(t) = i_0 \sin(\omega t + b - \pi/2)$

Relación entre voltaje e intensidad máximos: $i_0 = v_0 / X_L = v_0 / (L \cdot \omega)$

Tiempo	Voltaje	Intensidad de corriente eléctrica
0	4,33	-1,33
0,2	4,97	0,28
0,4	3,72	1,77
0,6	1,04	2,59
0,8	-2,03	2,42
1	-4,33	1,33
1,2	-4,97	-0,28
1,4	-3,72	-1,77
1,6	-1,04	-2,59
1,8	2,03	-2,42
2	4,33	-1,33
2,2	4,97	0,28
2,4	3,72	1,77
2,6	1,04	2,59
2,8	-2,03	2,42
3	-4,33	1,33
3,2	-4,97	-0,28
3,4	-3,72	-1,77
3,6	-1,04	-2,59
3,8	2,03	-2,42



Anexo II: Prácticas resueltas

Circuito LRC

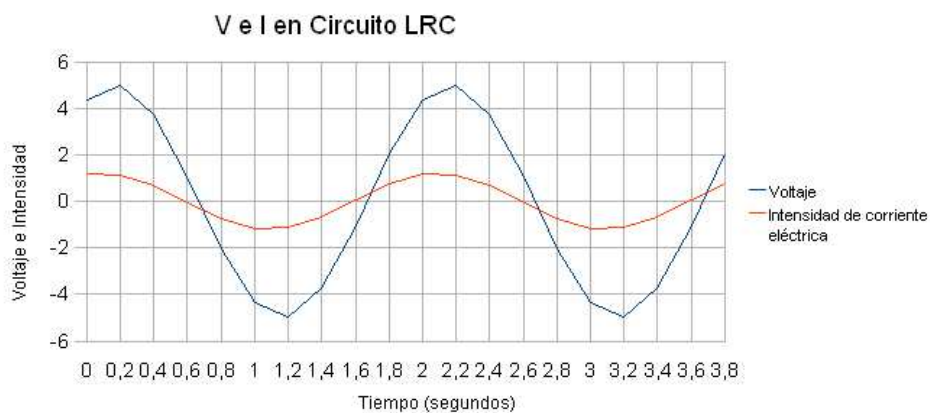
Datos iniciales

	Unidades
Voltaje máximo	5 voltios
Coef autoinducción	2,00E-002 henrios
Resistencia	4,00E+000 ohmios
Capacidad	3,00E-001 faradios
Frecuencia	0,5 hercios
Periodo	2 segundos
Pulsación	3,14 radianes / segundo
Fase inicial	1,05 radianes
Inductancia	0,06 ohmnios
Capacitancia	1,06 ohmnios
Reactancia	1 ohmnios
Impedancia	4,12 ohmnios
Ángulo de desfase	0,24 radianes
Expresión para el voltaje: $v(t)=v_0 \text{sen}(wt+b)$	
Expresión para la intensidad: $i(t)=i_0 \text{sen}(wt+b+\varphi)$	
Relación entre voltaje e intensidad máximos: $i_0 = v_0/Z$	

Datos para la representación gráfica

Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,2 segundos

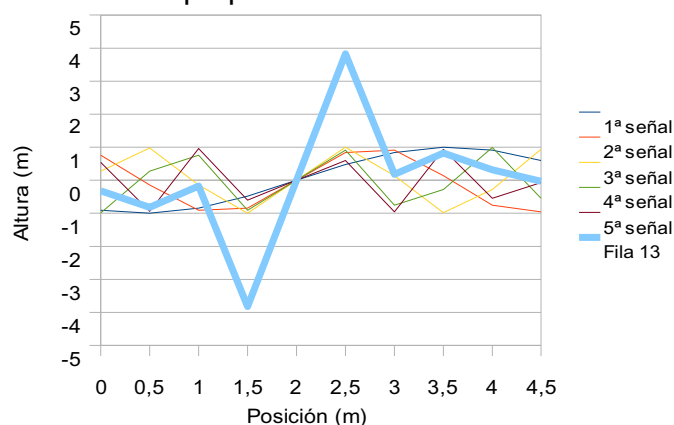
Tiempo	Voltaje	Intensidad de corriente eléctrica
0	4,33	1,17
0,2	4,97	1,14
0,4	3,72	0,68
0,6	1,04	-0,04
0,8	-2,03	-0,75
1	-4,33	-1,17
1,2	-4,97	-1,14
1,4	-3,72	-0,68
1,6	-1,04	0,04
1,8	2,03	0,75
2	4,33	1,17
2,2	4,97	1,14
2,4	3,72	0,68
2,6	1,04	-0,04
2,8	-2,03	-0,75
3	-4,33	-1,17
3,2	-4,97	-1,14
3,4	-3,72	-0,68
3,6	-1,04	0,04
3,8	2,03	0,75



Práctica X: Superposición de ondas

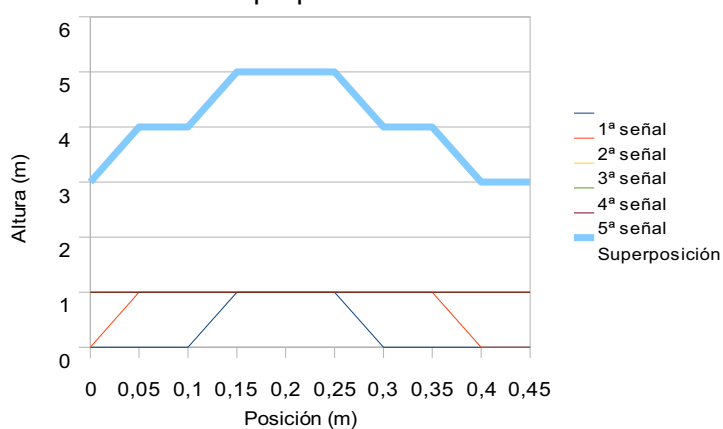
			Posición									
	Nº de onda	Pulso	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
1ª señal	1	1	-0,91	-1	-0,84	-0,48	0	0,48	0,84	1	0,91	0,6
2ª señal	2	2	0,76	-0,14	-0,91	-0,84	0	0,84	0,91	0,14	-0,76	-0,96
3ª señal	3	3	0,28	0,98	-0,14	-1	0	1	0,14	-0,98	-0,28	0,94
4ª señal	4	4	-0,99	0,28	0,76	-0,91	0	0,91	-0,76	-0,28	0,99	-0,54
5ª señal	5	5	0,54	-0,94	0,96	-0,6	0	0,6	-0,96	0,94	-0,54	-0,07
Superposición			-0,32	-0,82	-0,18	-3,83	0	3,83	0,18	0,82	0,32	-0,03

Superposición de ondas armónicas



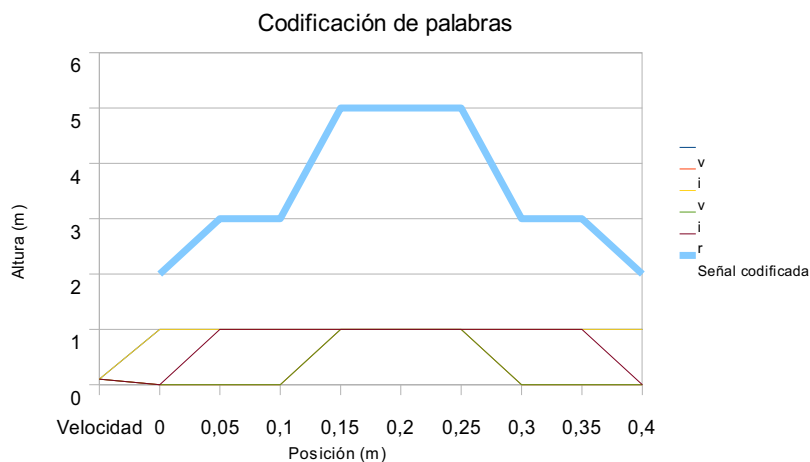
			Posición										
	Escalón (m)	Velocidad (m/s)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	
1ª señal	0,1	0,1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	
2ª señal	0,2	0,1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	
3ª señal	0,3	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
4ª señal	0,4	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
5ª señal	0,5	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Superposición			3	4	4	5	5	5	4	4	3	3	

Superposición de ondas escalonadas



Símbolo	Código de escalón	Código de frecuencia
a	0,01	0,01
b	0,02	0,02
c	0,03	0,03
d	0,04	0,04
e	0,05	0,05
f	0,06	0,06
g	0,07	0,07
h	0,08	0,08
i	0,09	0,09
j	0,1	0,1
k	0,11	0,11
l	0,12	0,12
m	0,13	0,13
n	0,14	0,14
ñ	0,15	0,15
o	0,16	0,16
p	0,17	0,17
q	0,18	0,18
r	0,19	0,19
s	0,2	0,2
t	0,21	0,21
u	0,22	0,22
v	0,23	0,23
w	0,24	0,24
x	0,25	0,25
y	0,26	0,26
z	0,27	0,27

Palabra		Escalón	Velocidad	Posición									
				0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
Dígito 1	v	0,23	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Dígito 2	i	0,09	0,1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
Dígito 3	v	0,23	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Dígito 4	i	0,09	0,1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
Dígito 5	r	0,19	0,1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
Señal codificada				2	3	3	5	5	5	3	3	2	0



Práctica XI: Rebotes

Datos fijos

x_0	0 m
v_x	1 m/s
y_0	3 m
v_{y0}	3 m/s
g	-9,8 m/s ²

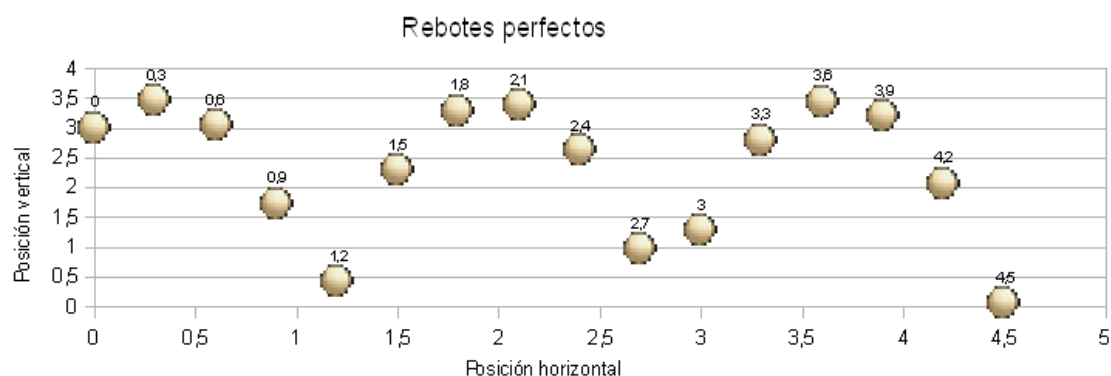
Datos para la representación

Tiempo inicial	0 s
Incremento de tiempo	0,3 s

Datos calculados

Periodo	1,68 s
Desfase	0,53 s

Tiempo	$x=x_0+v_x t$	$y=y_0+v_{y0} t+1/2gt^2$
0	0	3
0,3	0,3	3,46
0,6	0,6	3,04
0,9	0,9	1,73
1,2	1,2	0,43
1,5	1,5	2,3
1,8	1,8	3,29
2,1	2,1	3,4
2,4	2,4	2,62
2,7	2,7	0,97
3	3	1,28
3,3	3,3	2,8
3,6	3,6	3,44
3,9	3,9	3,19
4,2	4,2	2,07
4,5	4,5	0,06



Datos fijos **Unidades**

x_0	0 m
v_x	1 m/s
y_0	0 m
v_{y0}	5 m/s
g	-9,8 m/s ²
Razón de energías	0,70

Datos para la representación

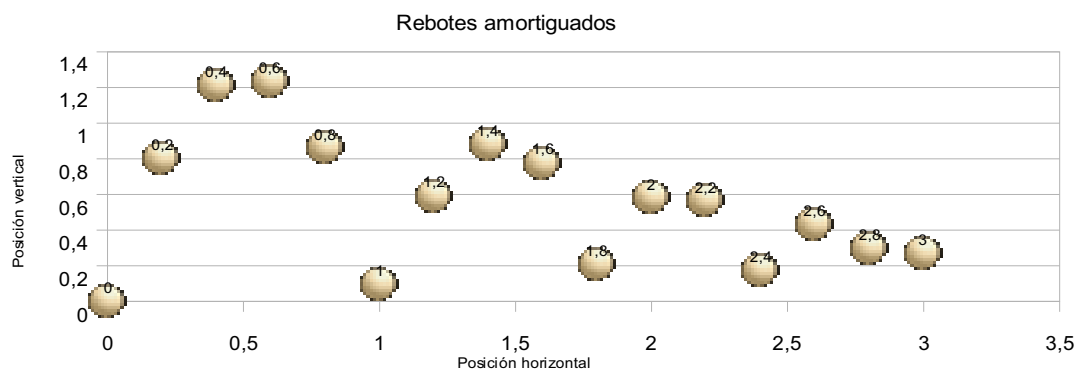
Tiempo inicial	0 s
Incremento de tiempo	0,2 s

Datos calculados

Tiempo retorno suelo	1,02 s
----------------------	--------

Tiempo	Bote actual	t_n	$x=x_0+v_x t$	$y_n=v_n(t-t_n)+1/2g(t-t_n)^2$
0		0	0	0
0,2		0	0,2	0,8
0,4		0	0,4	1,22
0,6		0	0,6	1,24
0,8		0	0,8	0,86
1		0	1	0,1
1,2	1	1,02	1,2	0,59
1,4	1	1,02	1,4	0,88
1,6	1	1,02	1,6	0,78
1,8	2	1,73	1,8	0,21
2	2	1,73	2	0,58
2,2	2	1,73	2,2	0,57
2,4	3	2,33	2,4	0,18
2,6	3	2,33	2,6	0,43
2,8	3	2,33	2,8	0,3
3	4	2,83	3	0,27

Bote	Tiempo inicio bote
0	0
1	1,0204
2	1,7347
3	2,3323
4	2,8323
5	3,2506
6	3,6006
7	3,8935
8	4,1385
9	4,3435
10	4,5150



Práctica XII: Osciladores armónicos

Altura de un resorte colgante

Datos iniciales	Unidades
Amplitud	1 metros
Masa	0,5 kilogramos
Constante elástica	19,74 N/m
Fase inicial	1,57 radianes
Periodo	1 segundos
Frecuencia	1 hercios
Pulso	6,28 rad/s

Datos para la representación gráfica

Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,1 segundos
Tiempo actual	0,7 segundos
Contador	7
Elongación actual	-0,31 metros

Tiempo	Elongación
0	1
0,1	0,81
0,2	0,31
0,3	-0,31
0,4	-0,81
0,5	-1
0,6	-0,81
0,7	-0,31
0,8	
0,9	
1	
1,1	
1,2	
1,3	
1,4	
1,5	
1,6	
1,7	
1,8	
1,9	
2	
2,1	
2,2	
2,3	
2,4	
2,5	
2,6	
2,7	
2,8	
2,9	
3	



Anexo II: Prácticas resueltas

Altura de un resorte colgante amortiguado

Datos iniciales	Unidades
Amplitud	1 metros
Masa	0,5 kilogramos
Constante elástica	19,74 N/m
Fase inicial	1,57 radianes
Periodo	1 segundos
Frecuencia	1 hercios
Pulso	6,28 rad/s
Cte de amortiguamiento	0,8 hercios
Frecuencia amortiguada	6,23 rad/s

Datos para la representación gráfica

Tiempo inicial	0 segundos
Incremento	0,1 segundos
Tiempo actual	2,5 segundos
Contador	25
Elongación actual	-0,13 metros

Tiempo	Elongación
0	1
0,1	0,75
0,2	0,27
0,3	-0,23
0,4	-0,58
0,5	-0,67
0,6	-0,51
0,7	-0,2
0,8	0,14
0,9	0,38
1	0,45
1,1	0,35
1,2	0,14
1,3	-0,09
1,4	-0,25
1,5	-0,3
1,6	-0,24
1,7	-0,1
1,8	0,05
1,9	0,16
2	0,2
2,1	0,16
2,2	0,07
2,3	-0,03
2,4	-0,11
2,5	-0,13
2,6	
2,7	
2,8	
2,9	
3	



Anexo III: Contenidos y glosario de la hoja de cálculo

Presentamos a continuación una guía de las funciones, instrucciones, procedimientos y gráficos de *Calc* utilizados en cada uno de los capítulos. Esperamos que sea de utilidad tanto para el alumno como para el docente, a la hora de establecer un orden de lectura pedagógico (desde el punto de vista del *software*) o simplemente para saber qué tipo de contenidos de manejo de *OpenOffice* serán necesarios en cada tema.

	Funciones e instrucciones	Procedimientos	Gráficos
Capítulo I: El espectro de emisión del átomo de hidrógeno	- Operadores matemáticos elementales - Operador \$ - Exponenciación	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	Tipo XY con barras de error
Capítulo II: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases fuertes	- Operadores matemáticos elementales - Operador \$ - Exponenciación - RAÍZ() - LOG10()	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	Tipo XY con líneas y puntos
Capítulo III: Cálculo del pH de disoluciones de ácidos y bases débiles	- Operadores matemáticos elementales - Operador \$ - Exponenciación - RAÍZ() - LOG10()	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	Tipo XY con líneas y puntos
Capítulo IV: Curvas de valoración ácido-base	- Operadores matemáticos elementales - Operador \$ - Exponenciación - RAÍZ() - LOG10()	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	Tipo XY con líneas y puntos
Capítulo V: Dependencia de la constante de velocidad con la temperatura	- Operadores matemáticos elementales - EXP(), LN() - ESTIMACIÓN.LINEAL()	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	- Tipo XY con líneas y puntos - Regresión lineal
Capítulo VI: Determinación de la cinética de una reacción química	- Operadores matemáticos elementales - LN() - ESTIMACIÓN.LINEAL()	- Definición de constantes - Formatos de celdas - Arrastre de celdas - Opciones de gráfico	- Tipo XY con líneas y puntos - Regresión lineal

	Funciones e instrucciones	Procedimientos	Gráficos
<u>Capítulo VII:</u> Caída libre en el Sistema Solar	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● Exponenciación	● Formatos de celdas ● Formatos condicionales de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico	● De línea ● De barras (en columna)
<u>Capítulo VIII:</u> Dilatación térmica	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● Exponenciación	● Formatos de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico	● De línea ● De barras (en columna y tridimensionales)
<u>Capítulo IX:</u> Circuitos de corriente alterna	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● Constante PI() ● SENO(), COS(), TAN() ● RAÍZ()	● Formatos de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico	● De línea
<u>Capítulo X:</u> Superposición de ondas	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● SENO() ● SUMA() ● BUSCARV()	● Formatos de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico	● De línea
<u>Capítulo XI:</u> Rebotes de una pelota	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● Exponenciación ● RAÍZ() ● RESIDUO() ● BUSCARV() ● CONTAR.SI() ● CONCATENAR()	● Formatos de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico	● Tipo XY de puntos
<u>Capítulo XII:</u> Osciladores armónicos	● Operadores matemáticos elementales ● Operador \$ ● Exponenciación ● SENO() ● SI() ● EXP()	● Formatos de celdas ● Arrastre de celdas ● Opciones de gráfico ● Controles de formulario	● De línea ● Gráficos dinámicos

Terminamos con un glosario de las funciones, instrucciones y procedimientos de la hoja de cálculo *OpenCalc* empleados para la resolución de las prácticas propuestas en este libro.

Funciones e instrucciones

Todas las funciones de la hoja de cálculo se encuentran disponibles en la opción *Función...*, situada dentro del campo *Insertar* en el menú principal. Esta opción nos muestra la sintaxis adecuada para introducir una determinada función y nos ofrece una breve descripción sobre el propósito de cada función. Todas las funciones de la hoja de cálculo se encuentran agrupadas por categorías. A continuación ofrecemos un breve resumen de las funciones e instrucciones utilizadas en este libro.

- = El signo igual precede a la introducción de cualquier fórmula matemática. En ausencia del signo igual, la hoja de cálculo interpreta que la fórmula contenida en la celda es un texto. Este hecho se puede verificar fácilmente porque el contenido de la celda se alinea, automáticamente, a la izquierda. En cambio, los contenidos de tipo numérico se alinean a la derecha. Los números pueden introducirse en una celda sin necesidad del signo igual.
- \$ El signo dólar, colocado delante del valor de la fila o la columna correspondientes a las coordenadas de una celda en una expresión matemática, fija la coordenada (fila o columna) a la que precede, de modo que aunque arrastremos la fórmula, la coordenada fijada por el signo dólar permanece inalterada.
- + Las sumas se realizarán intercalando el signo + entre las celdas que deseemos sumar.
- - La resta de celdas se expresa mediante el signo -.
- * El asterisco permite multiplicar celdas.
- / La división se expresa mediante el signo /.
- ^ Para exponenciar el contenido de una celda, indicaremos la celda seguida del signo de exponenciación. El exponente será el dígito que introduzcamos justo después del símbolo ^.
- () Los paréntesis determinan el orden de prioridad a la hora de efectuar las operaciones matemáticas en una expresión algebraica.
- **BUSCARV** – Busca un valor dado en una matriz. La búsqueda se realiza por filas, y la función devuelve el dato de la fila encontrada correspondiente a una columna especificada. La sintaxis de esta función es: **BUSCARV**(valor_buscado; matriz_buscar_en; índice; ordenado).
- **CONCATENAR** – Agrupa varias cadenas de texto en una sola. La sintaxis de esta función es: **CONCATENAR**(texto1; texto2; ...).
- **CONTAR.SI** – Cuenta el número de argumentos presentes en la región “área” que cumplen las condiciones dadas. La sintaxis de esta función es: **CONTAR.SI**(área; criterios).
- **ESTIMACIÓN.LINEAL** - Calcula los parámetros de una regresión lineal y los muestra en forma matricial. En concreto, esta función devuelve: la pendiente (m), el valor del punto de corte con el eje de ordenadas (b), sus respectivas desviaciones (S_m y S_b), el coeficiente de correlación (r^2) y la desviación de la regresión (S_{reg}), junto con otros parámetros como la F estadística o los grados de libertad, los cuales se escapan de los objetivos del presente libro.

La sintaxis de esta función es: **ESTIMACIÓN.LINEAL** (datos_Y; datos_X; tipo_lineal; estadística). El campo *tipo_lineal* es opcional y de tipo lógico. Permite establecer si se trata de una recta con punto de corte con el eje de ordenadas distinto de 0; es decir, de la forma: y

$= b + m x$, donde $b \neq 0$; ó, por el contrario, se trata de una recta del tipo: $y = m x$. El campo *estadística* determina si queremos obtener toda la información estadística previamente mencionada, para lo cual escribiremos: “verdadero” ó “1”. Si sólo nos interesa obtener el valor de la pendiente y la ordenada en el origen escribiremos: “falso” ó “0”. Para obtener la información de interés acerca de una regresión lineal debemos seleccionar previamente un área de celdas de 3 filas por 2 columnas e implementar la función ESTIMACIÓN. LINEAL con la sintaxis descrita anteriormente.

- **EXP** – Determina la función exponencial del argumento. Nos referimos a la función matemática $f(x)=e^x$. La sintaxis de esta función es: EXP(número).
- **LN** - Calcula el logaritmo de un número en la base natural, esto es, el valor de la función $f(x)=\ln x$. La sintaxis de esta función es: LN(número).
- **LOG** - Calcula el logaritmo de un número en la base que especifiquemos, esto es, el valor de la función $f_b(x)=\log_b x$. La sintaxis de esta función es: LOG(número; base).
- **LOG10** - Calcula el logaritmo en base 10 de un número, esto es, $f(x)=\log_{10} x$. La sintaxis de esta función es: LOG10(número).
- **PI** – Devuelve el valor del número π . La sintaxis de esta constante es: PI().
- **RAÍZ** - Devuelve la raíz cuadrada de un número. La sintaxis es: RAÍZ(número).
- **RESIDUO** – Calcula el residuo o resto de una división. La sintaxis de esta función es: RESIDUO(dividendo; divisor).
- **SENO, COS, TAN** – Esta es la nomenclatura para las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Hay que tener en cuenta que sus argumentos se toman por defecto *en radianes*. Si queremos pasar un valor a grados o radianes de forma rápida, podemos utilizar las funciones **GRADOS(número)** y **RADIANES(número)**, respectivamente. La misma observación es válida para las funciones trigonométricas inversas, **ASENO(número)**, **ACOS(número)** y **ATAN(número)**. La sintaxis de estas funciones es: SENO(número), COS(número), TAN(número).
- **SI** – Realiza una prueba lógica. Este es el operador condicional en la hoja de cálculo. La sintaxis de esta función es: SI(prueba_lógica; valor_si_verdadero; valor_si_falso).
- **SUMA** – Devuelve la suma total de sus argumentos, que pueden especificarse uno a uno o como un rango. A esta función, utilizada frecuentemente en la hoja de cálculo, se puede acceder también con el botón *sigma mayúscula* de la barra de herramientas de fórmulas, Σ . La sintaxis de esta función es: SUMA(número 1; número 2; ...).

Procedimientos de la hoja de cálculo

Además de las funciones e instrucciones, la hoja de cálculo *OpenCalc* contiene una serie de herramientas que recogemos bajo el epígrafe *Procedimientos*.

- **Formato de celdas** Si seleccionamos la opción del menú *Formato>>Celdas...* aparece un cuadro de diálogo con diferentes viñetas que nos permiten modificar a voluntad las características de la/s celda/s seleccionadas. En particular, la viñeta *Bordes* controla el

grosor del marco para cada celda. El color de una celda está determinado por nuestra elección en la viñeta *Fondo*. Finalmente, podemos proteger la fórmula contenida en una celda o esconder su contenido. Es posible seleccionar estas opciones en la viñeta *Protección de celda*. Según el contenido de una celda sea de tipo texto o numérico tendremos diferentes opciones de formato.

- **Formato de texto** La opción del menú *Formato>>Celdas...>>Fuentes* permite seleccionar el tipo de letra, el estilo y el tamaño que deseemos. La pestaña *Formato>>Celdas...>>Efectos de Fuente* incluye funciones adicionales como el subrayado o la elección del color del texto. Además, la orientación del texto se puede escoger en la pestaña *Formato>>Celdas...>>Alineación*.

- **Formato numérico** Esta opción resulta de enorme utilidad para la expresión del resultado numérico de una celda. En el menú *Formato>>Celdas...>>Número* se puede seleccionar la categoría: *número, porcentaje, moneda, fecha, hora, científica, fracción, lógica* o *texto*, a la que pertenece el valor de una celda. Para nuestros propósitos serán de especial utilidad las categorías *numérica* y *científica*, las cuales permiten escoger a voluntad el número de cifras decimales y la forma con la que deseemos expresar el valor de una celda.

- **Combinar celdas** En ocasiones nos interesa agrupar varias celdas para formar una única celda. Esto se consigue seleccionando la opción *Formato>>Combinar Celdas*, tras seleccionar previamente las celdas que deseamos agrupar. En caso de que lo pretendamos sea desagrupar un conjunto de celdas basta con desactivar la opción *Combinar Celdas*. Los cambios que efectuemos sobre un conjunto de celdas que se encuentren agrupadas afectarán a todo el bloque.
- **Definir celdas** Cualquier constante se puede incluir en la hoja de cálculo definiendo un nombre para la celda que contenga su expresión numérica. Para ello, seleccionaremos la opción del menú principal *Insertar>>Nombre>>Definir*. El cuadro de diálogo que aparece permite asignar un nombre a la celda que elijamos, de forma que al teclear dicho nombre en cualquier otra celda de la hoja de cálculo, ésta le atribuye su correspondiente valor numérico. Otra forma más rápida para realizar este proceso consiste en escribir en el cuadro de nombres que está situado a la izquierda de la línea de comandos el nombre de la constante.
- **Arrastrar celdas** Posiblemente sea la opción más utilizada de todas las que nos ofrece la hoja de cálculo ya que simplifica mucho el trabajo al repetir una misma operación para diferentes valores ordenados en filas o columnas. Para arrastrar una fórmula al resto de celdas debemos seleccionar la celda que contenga la fórmula matemática y situarnos con el ratón en el margen inferior derecho de la celda, donde aparece un pequeño cuadrado negro. Es fácil reconocer que estamos en la zona correcta porque la flecha del puntero se transforma en una cruz. Si apretamos el botón izquierdo del ratón encima del vértice inferior derecho de la celda donde está la fórmula y nos desplazamos en vertical o en horizontal arrastraremos la fórmula seleccionada a las celdas adyacentes.

Otra forma de realizar este proceso consiste en seleccionar la opción del menú *Edición>>Rellenar*. Este procedimiento consiste en situarse en la celda que deseamos arrastrar, manteniendo presionada la tecla *Mayúsculas* marcamos la celda hasta la cual deseamos arrastrar la fórmula y seleccionamos la opción *Edición>>Rellenar*. Este procedimiento permite arrastrar hasta celdas muy alejadas sin necesidad de realizar farragosas operaciones con el ratón.

- **Representaciones gráficas** Una de las principales herramientas de la hoja de cálculo es la posibilidad de realizar representaciones gráficas. Para ello, debemos seleccionar la opción del menú *Insertar>>Gráfico...* Esta opción da paso a un cuadro de diálogo que recoge 4 entradas que comentamos a continuación:

- *Tipo de gráfico*. Las opciones entre las cuales podemos elegir son: columnas, barras, tarta, área, línea, XY, red... Dentro de cada tipo de gráfico se puede seleccionar la opción de formato que mejor se adapte a nuestros intereses.

- *Rango de datos*. Una vez seleccionado el tipo de gráfico, debemos indicar el conjunto de celdas donde se encuentran los valores a representar. Para ello basta con marcar el área de la hoja de cálculo que contiene dichos valores.

- *Serie de datos*. Las distintas series de datos introducidas se pueden etiquetar convenientemente y gestionar desde este cuadro diálogo. Podemos modificar el rango de celdas seleccionado para una serie y añadir o suprimir series.

- *Elementos del gráfico*. Permite añadir un título, incluir una leyenda o etiquetar los ejes.

Una vez se ha creado el gráfico podemos realizar ulteriores modificaciones seleccionando con un doble *click* de ratón el gráfico. Estas modificaciones abarcan desde el rango, las separaciones, tamaño de los números o texto de los ejes, hasta modificaciones relativas al trazo de las línea, los símbolos empleados, la existencia de mallado... Para las gráficas del tipo XY, en las que se representan parejas de valores, resulta particularmente interesante la opción *Estadística*, que se encuentra dentro del menú *Serie de datos*, el cual aparece al seleccionar con un doble *click* del botón izquierdo del ratón los datos de la gráfica. Esta opción permite establecer un ajuste tipo lineal o polinómico para los datos representados.

- **Campos de control de formulario** Las hojas de cálculo pueden modificarse para que tengan un comportamiento dinámico, haciendo las veces de pequeños programas. La forma más sencilla para lograr esto consiste en insertar controles dinámicos en la hoja. Esto se consigue activando la barra de herramientas *Campos de control de formulario* (Menú Ver >> Barras de Herramientas >> Campos de control de formulario). A continuación seleccionamos los controles que queremos añadir y los dibujamos en el área deseada. Con este procedimiento podemos insertar *Casillas de verificación*, *Campos de texto*, *Botones*, *Campos de Opción*, *Barras de desplazamiento*, etc. Las propiedades de tales elementos se modifican, en *modo diseño*, con la secuencia *Botón derecho sobre el control >> Campo de control...*



Bibliografía y Referencias Web

Informática y matemáticas

- [1] **Excel for Chemists**, E. J. Billo, *Wiley-vch*, Nueva York, 1977.
- [2] **Spreadsheet Applications in Chemistry using Microsoft Excel**, D. Diamond; V. C. A. Hanratty, *John Wiley & Sons*, Nueva York, 1997.
- [3] **How to use EXCEL in Analytical Chemistry**, Robert de Levie, *Cambridge University Press*, Londres, 2001.
- [4] **Informática aplicada a la química**, Josep Planelles Fuster; Roque Serrano Gallego, *Publicacions de la Universitat Jaume I*, Castellón, 2002.
- [5] **Proyecto Descartes; matemáticas en la secundaria española**.
<http://descartes.cnice.mec.es/>
- [6] **Open Office en español**.
<http://es.openoffice.org/>

Física y química

- [I] **Físicoquímica**, P. W. Atkins, *Addison-Wesley Iberoamericana*, Buenos Aires, 1987.
- [II] **Físicoquímica**, Ira N. Levine, *McGraw-Hill*, Madrid, 1991.
- [III] **Physical Chemistry**, Gordon M. Barrow, *McGraw-Hill*, Madrid, 1996.
- [IV] **Ionic Equilibrium. A Mathematical Approach**, J. N. Butler, *Addison-Wesley*, Reading (Massachussetts), 1964.
- [V] **Principios del Equilibrio Químico**, K. G. Denbigh, *Editorial AC*, Madrid, 1985.
- [VI] **Química Analítica Cualitativa**, F. Burriel; F. Lucena; S. Arribas; J. Hernández, *Editorial*

Paraninfo, Madrid, 1992.

[VII] **Química**, Fernando Latre David; José Usó Mañanós; Vicente Blasco Marzá, *JV ediciones*, Castellón, 1993.

[VIII] **Proyecto Newton; física en la secundaria española.**

<http://newton.cnice.mec.es/>

[IX] **Proyecto Ulloa; química en la secundaria española.**

<http://recursos.cnice.mec.es/quimica/>

[X] **Capítulo VII: Caída libre en el Sistema Solar.**

[X.a] Wikipedia: Intensidad de Campo Gravitatorio.

http://es.wikipedia.org/wiki/Intensidad_de_campo_gravitatorio

[X.b] Wikipedia: Constante de Gravitación Universal.

http://es.wikipedia.org/wiki/Constante_de_gravitaci%C3%B3n_universal

[X.c] Datos de los planetas.

<http://www.astronomia.com>

[X.d] Agencia Espacial Europea.

<http://www.esa.int/esaCP/Spain.html>

[XI] **Capítulo VIII: Dilatación térmica.**

[XI.a] Wikipedia: Dilatación Térmica.

http://es.wikipedia.org/wiki/Dilataci%C3%B3n_t%C3%A9rmica

[XI.b] Wikipedia: Coeficiente de Dilatación.

http://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_dilataci%C3%B3n

[XI.c] Portal Planeta Sedna: La Dilatación Térmica.

<http://www.portalplanetasedna.com.ar/dilatacion.htm>

[XII] **Capítulo IX: Circuitos de corriente alterna.**

[XII.a] Wikipedia: Corriente Alterna.

http://es.wikipedia.org/wiki/Corriente_Alterna

[XII.b] Wikipedia: Alternating Current (en inglés).

http://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_current

[XII.c] La web de Física: Electromagnetismo.

<http://www.lawebdefisica.com/rama/em.php>

[XIII] **Capítulo X: Superposición de ondas.**

[XIII.a] Curso de Acústica en Bachillerato: superposición de ondas.

<http://www.ehu.es/acustica/espanol/basico/suones/suones.html>

[XIII.b] Wikipedia: Interferencia (en inglés).

<http://en.wikipedia.org/wiki/Interference>

[XIII.c] Wikipedia: Ondas (en inglés).

<http://en.wikipedia.org/wiki/Wave>

[XIV] **Capítulo XI: Rebotes.**

[XIV.a] Enciclopedia Encarta: Balística.

http://es.encarta.msn.com/encyclopedia_761573872/Bal%C3%ADstica.html

[XIV.b] Balística exterior: resumen histórico (en inglés).

<http://www.exteriorballistics.com/ebexplained/4th/30.cfm>

[XIV.c] Wikipedia: movimiento parabólico.

http://es.wikipedia.org/wiki/Tiro_parab%C3%B3lico

[XV] **Capítulo XII: Osciladores armónicos.**

[XV.a] Física con Ordenador: Oscilaciones libres y amortiguadas.

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/teoria/A_Franco/oscilaciones/libres/libres.htm

[XV.b] Física con Ordenador: Oscilaciones amortiguadas.

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm>

[XV.c] Física con Ordenador: Coeficiente de restitución.

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/teoria/A_Franco/cinematica/restitucion/restitucion.htm#restitución

[XV.d] Wikipedia: Movimiento armónico simple (en inglés).

http://en.wikipedia.org/wiki/Simple_harmonic_motion

[XV.e] Wikipedia: Péndulo (en inglés).

<http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>



EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN