PROPORCIONALIDAD GEOMETRICA

Ministerio de Educación y Ciencia
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

MATEMATICAS: 6

Centros de Profesores

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO

PROPORCIONALIDAD GEOMETRICA

CARMEN AZCARATE
MARTA BERINI
RUBI CORBERO
JORDI DEULOFEO
CARLOS LLEDO
(miembros del Grupo Zero).

Nivel: E.G.B. y EE.MM.

Colección: *"Documentos y propuestas de trabajo"*

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO
N.I.P.O. 176-87-153-2
I.S.B.N. 84-505-6333-X
Depósito Legal M- 26964 - 1987
Imprime MARIN ALVAREZ, Madrid

INDICE

Páginas

Páginas

IV. Prácticas de topografía.

PRESENTACION

En este fascículo proponemos cuatro trabajos que plantean distintos aspectos de la proporcionalidad geométrica.

En el 1º, "Semejanza de figuras", a partir de situaciones sencillas intentamos que el alumno avance hasta dar una definición precisa y cuantificable de semejanza.

En el 2º, "Mapas", y en el 3º, "Astronomía", proponemos dos trabajos interdisciplinares en los que el concepto básico matemático es la proporcionalidad geométrica.

En el 4º, "Prácticas de topografía", proponemos unas actividades, fuera del aula, en las que se aplican técnicas de medición basadas en la semejanza de figuras.

Todos estos trabajos ya han sido experimentados en diversas clases, durante algunos cursos.

El 1º, que corresponde a un nivel de 7º y 8º de E.G.B., incluye una introducción al concepto intuitivo de semejanza, seguido de un estudio más sistemático.

Los otros tres temas han sido desarrollados en cursos de 1º de B.U.P., en distintos Institutos de Bachillerato y, si bien no se ajustan, aparentemente, a temas del programa oficial, creemos que constituyen un complemento imprescindible para la formación matemática de los alumnos. En efecto, todos estos trabajos conllevan un repaso y un estudio de la geometría básica, relacionándola con diversos campos de aplicación; permiten también un enfoque práctico-instrumental e interdisciplinar de la Matemática.

I. SEMEJANZA DE FIGURAS

1. Introducción

La proporcionalidad geométrica se puede tratar en el marco de situaciones muy diversas. Es necesario garantizar unos cuantos conceptos básicos como son la idea de figuras semejantes, la idea de razón de dos magnitudes, la idea de escala y las propiedades fundamentales de figuras semejantes (igualdad de ángulos y proporcionalidad de segmentos). Estos conceptos deben trabajarse a partir de **situaciones concretas diferentes.**

En esta primera parte, proponemos actividades y ejercicios para la iniciación en dichos conceptos básicos. Queremos resaltar algunas características que nos parecen importantes:

- estas actividades están relacionadas con el tema de la medida (utilización de instrumentos de medida) y con conceptos geométricos básicos previos;

- la idea de razón puede tratarse (y de hecho así se hace) a partir de datos aritméticos; nosotros desarrollamos aquí la idea de razón de longitudes;

- obsérvese que se trabaja primero sobre la idea de "igualdad de forma" según un enfoque visual y geométrico y que, posteriormente, se introduce la razón de proporcionalidad que permite una definición más precisa y cuantificable.

2. Introducción a la semejanza: figuras de igual forma

Existen numerosas situaciones que pueden llevarnos al estudio de figuras semejantes, es decir, de formas iguales, como son, por ejemplo, la ampliación y reducción de dibujos, fotografías o fotocopias, los dibujos a escala (desde sencillos planos a mapas diversos), las maquetas (barcos, coches, aviones, proyectos urbanísticos, reproducciones de una ciudad o de una región, etc.). En una primera fase, se trata de reconocer si dos o más figuras tienen la misma forma, aplicando criterios visuales y geométricos, para pasar, posteriormente, a la necesidad de una definición más precisa: la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de segmentos.

SITUACION 1. AMPLIACIONES FOTOGRAFICAS. (S.M.P. 11-16 - ENLARGEMENT 1)

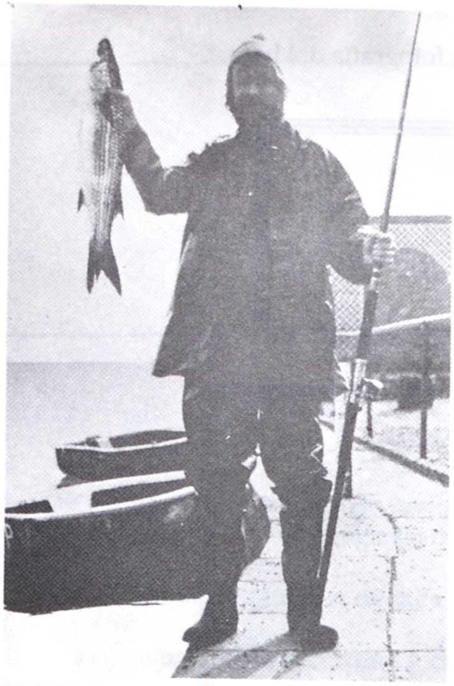
Carlos hizo una fotografía a su hermano, cuando éste ganó un concurso de pesca. Aquél le pidió algunas ampliaciones de la fotografía. ¿Sabrías decir cuáles de las siguientes fotografías corresponden, en realidad, a ampliaciones de la fotografía que le hizo Carlos a su hermano?

A

B

C

D

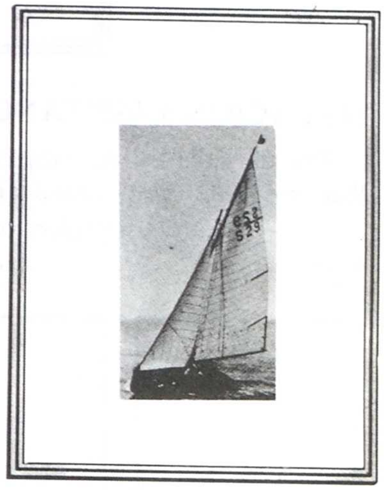


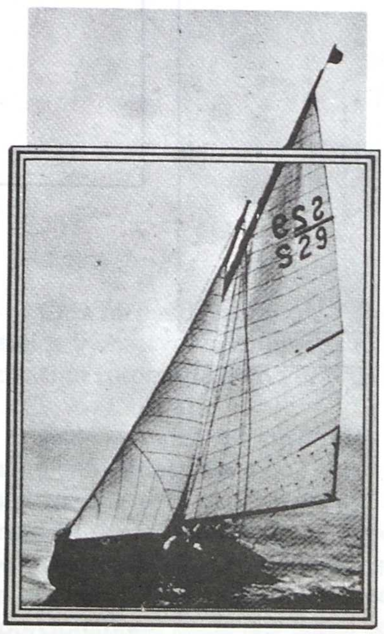
E

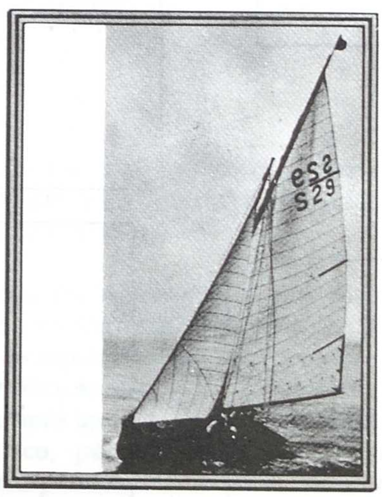
F

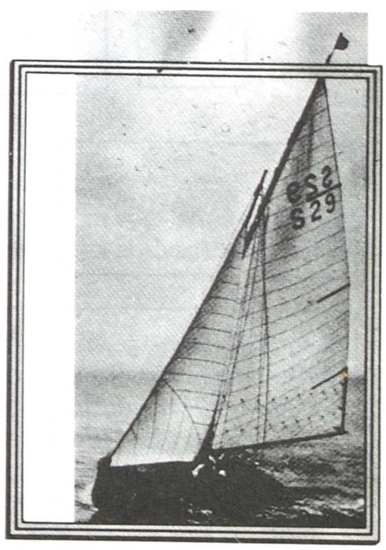
SITUACION 2. ENMARCAR UNA AMPLIACION FOTOGRAFICA (S.M.P. 11-16)

Alberto quiere enmarcar una ampliación de esta fotografía y compra un marco. Su hermano le hace varias ampliaciones pero ninguna encaja perfectamente en su marco.

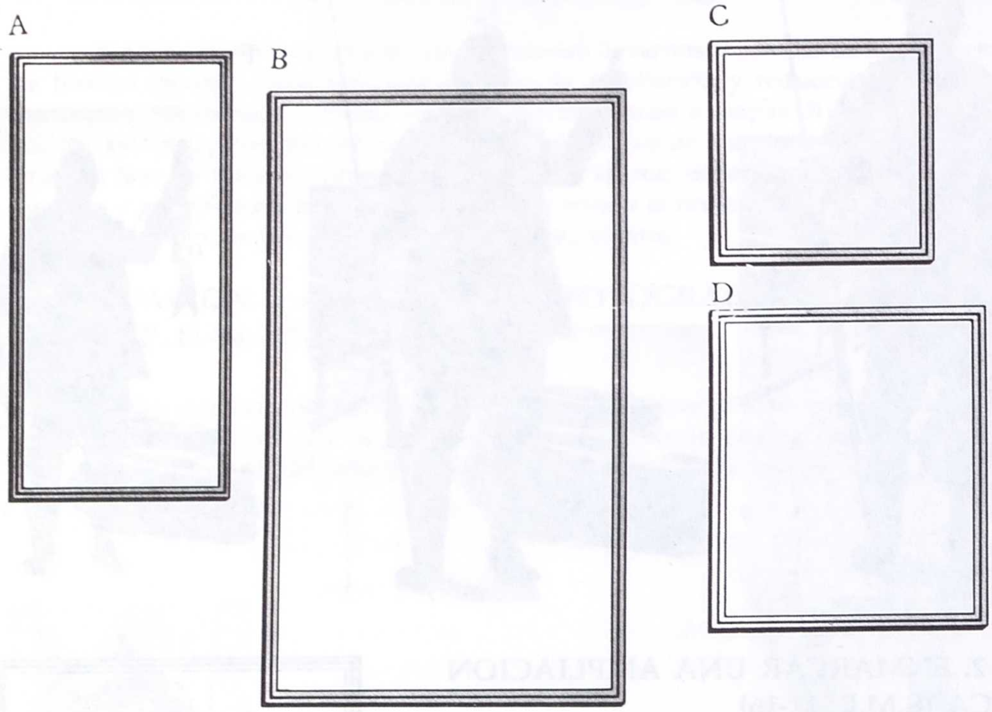








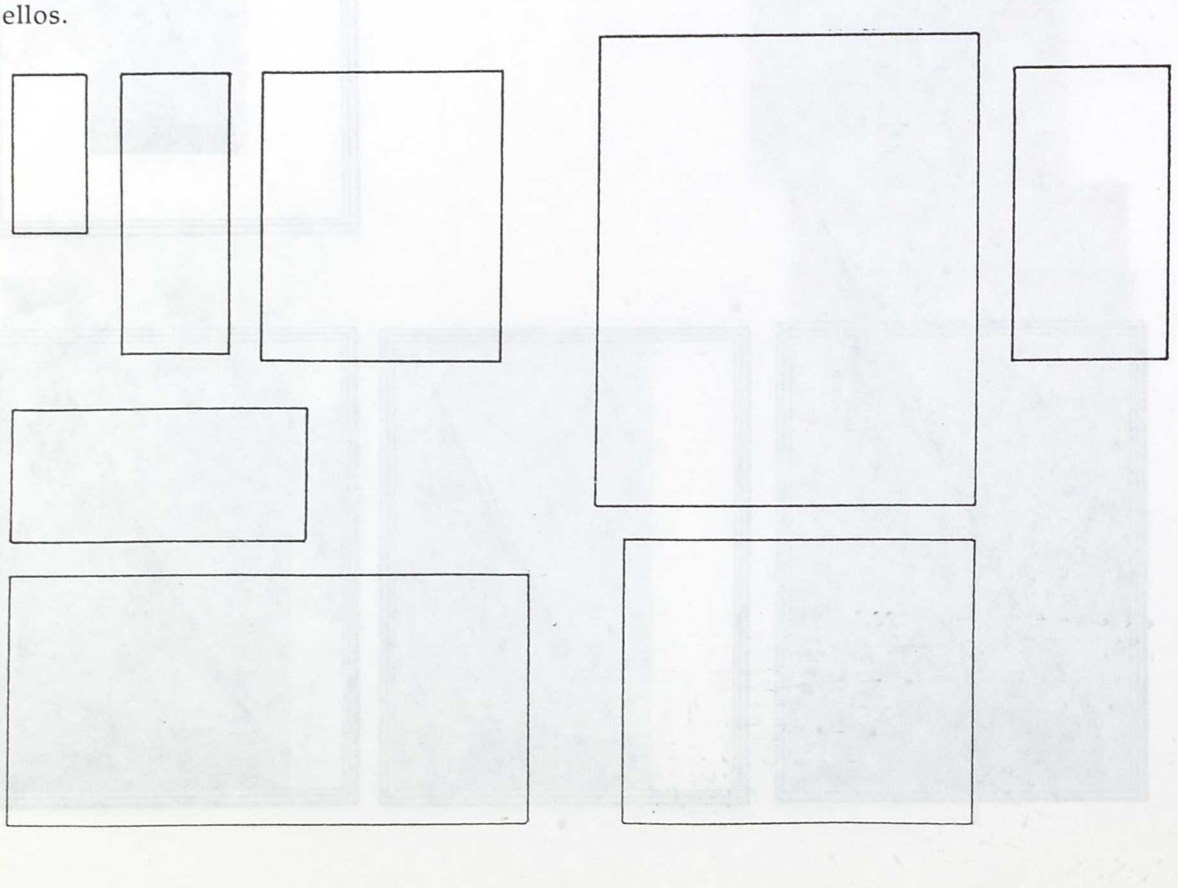
¿En cúal de los siguientes marcos encajará una ampliación de la fotografía del barco?

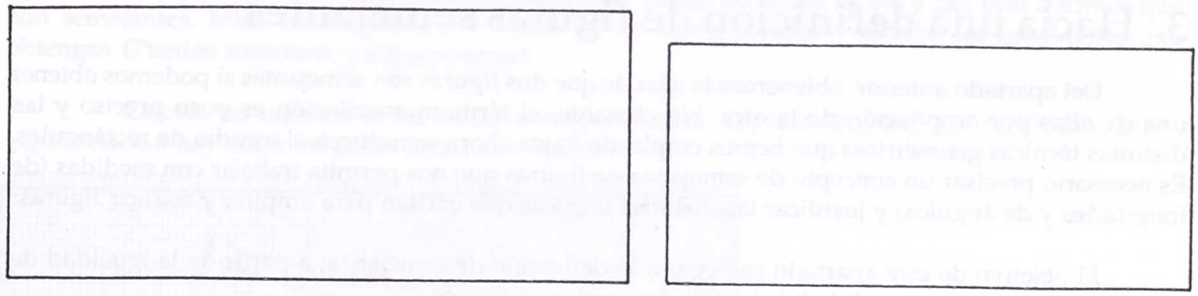


SITUACION 3. RECTANGULOS SEMEJANTES

Descubrimientos de propiedades geométricas de la semejanza de rectángulos. (D. Barba, E. Maestros Sant Cugat, U. Autónoma de Barcelona).

- Recorta esta colección de rectángulos y dibuja las diagonales, por detrás de cada uno de ellos.





- Coloca los rectángulos con la cara blanca hacia arriba y agrúpalos de manera que los rectángulos de cada montón tengan la misma forma, es decir, que sean semejantes.

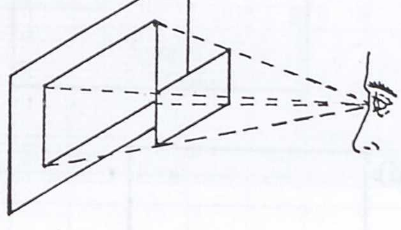
- Toma los rectángulos de cada montón y superponlos de varias maneras:

a) Con un vértice en común y correspondiéndose los lados largos y cortos de cada uno. ¿Qué observas?

b) Con el centro en común y correspondiéndose los lados largos y cortos, ¿qué observas?

c) Si tomas rectángulos de montones distintos y los haces coincidir en las condiciones anteriores, ¿qué sucede?

d) Traza una recta y coloca sobre ella dos rectángulos de un mismo montón de manera que sus bases estén sobre la misma. Une los vértices correspondientes de cada rectángulo por medio de rectas y prolonga éstas, ¿qué sucede? ¿Y, qué sucede si haces lo mismo con dos rectángulos de montones distintos?



Otra forma de comprobar que dos rectángulos son semejantes consiste en colocarlos en planos paralelos y observar si coinciden todos sus lados (ver dibujo). Notar que éste es el fundamento de la ampliación fotográfica o de la proyección de diapositivas.

Estas actividades pretenden una aproximación a la igualdad de formas, desde una óptica visual y geométrica. En todas ellas, se presentan varios rectángulos para su clasificación por formas. Obsérvese que el caso del rectángulo es especialmente interesante ya que, por un lado se consiguen numerosas situaciones concretas y, por otro, se trabaja con longitudes proporcionales ya que, en el caso de los rectángulos, los ángulos son siempre iguales. Todas estas situaciones estudiadas, de momento, bajo un aspecto visual y geométrico, pueden repetirse posteriormente, para observar la proporcionalidad entre los lados correspondientes de los rectángulos semejantes, que tratamos a continuación.

3. Hacia una definición de figuras semejantes

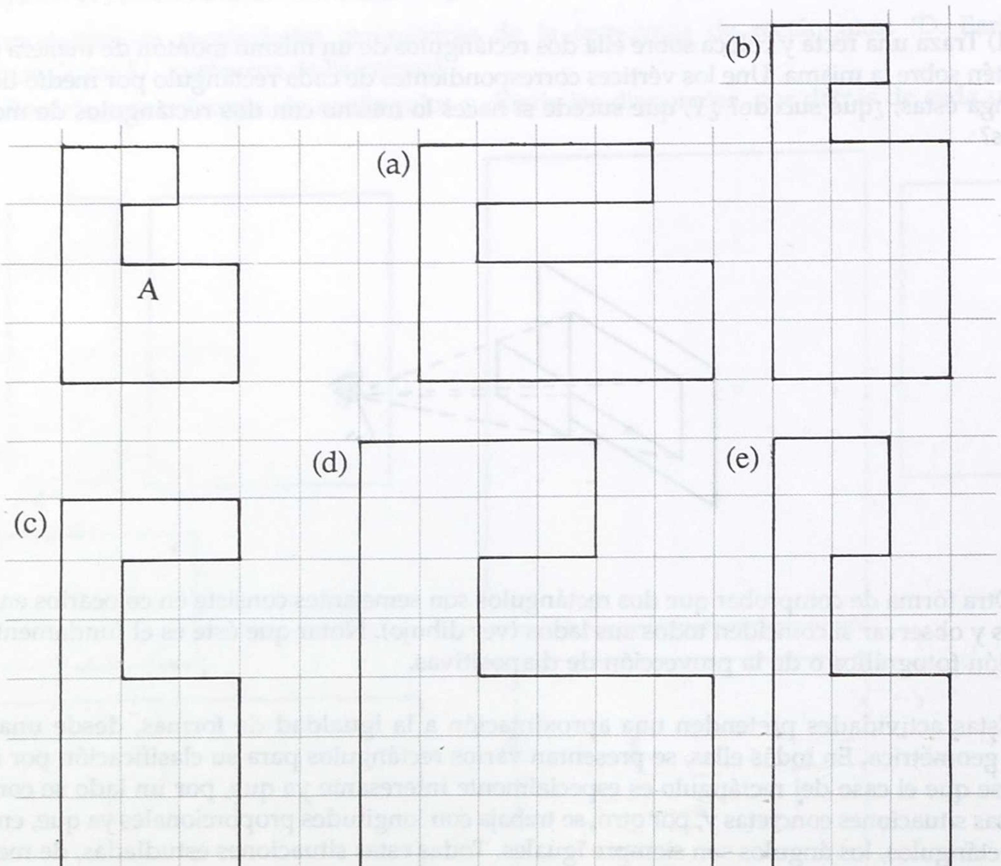
Del apartado anterior, obtenemos la idea de que dos figuras son semejantes si podemos obtener una de ellas por ampliación de la otra. No obstante, el término ampliación es poco preciso y las distintas técnicas geométricas que hemos empleado hasta ahora se reducen al estudio de rectángulos. Es necesario precisar un concepto de semejanza de figuras que nos permita trabajar con medidas (de longitudes y de ángulos) y justificar las distintas técnicas que existen para ampliar y reducir figuras.

El objetivo de este apartado es llegar a la definición de semejanza, a partir de la igualdad de ángulos y de la proporcionalidad de longitudes correspondientes.

Ejercicio 1. Utilizar las tres situaciones del apartado anterior para comprobar que los lados correspondientes de dos rectángulos semejantes son proporcionales. Obtener una primera idea de la razón de semejanza.

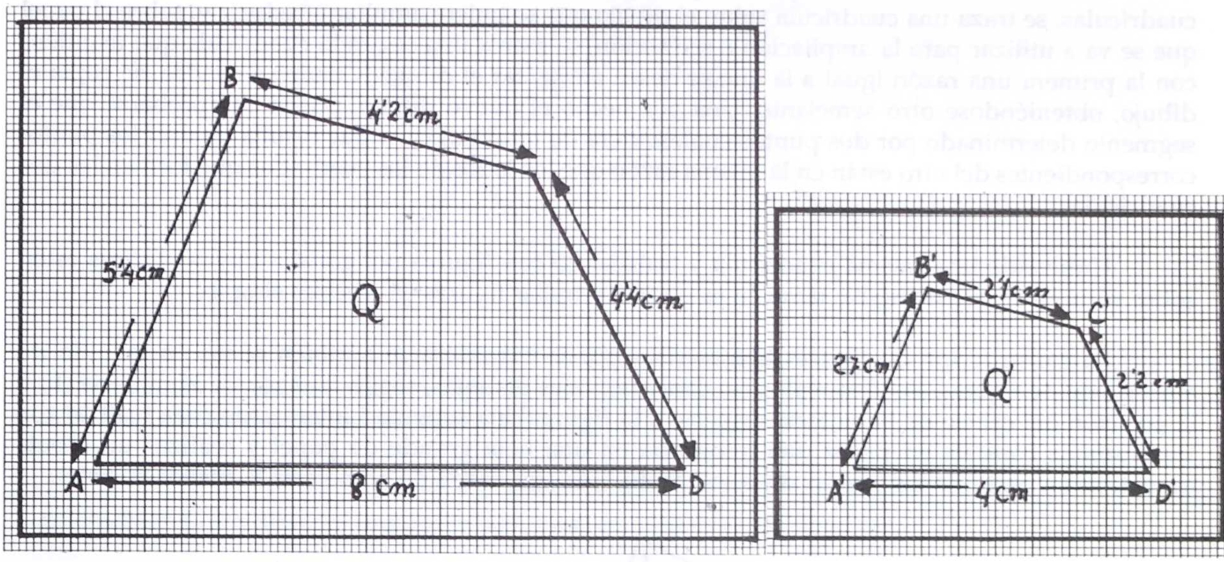
Ejercicio 2. Dibujar polígonos regulares (triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos) y discutir la semejanza de dos polígonos regulares del mismo número de lados.

Ejercicio 3. ¿Cuáles de las siguientes figuras son ampliaciones de A? Explica la respuesta para cada caso.



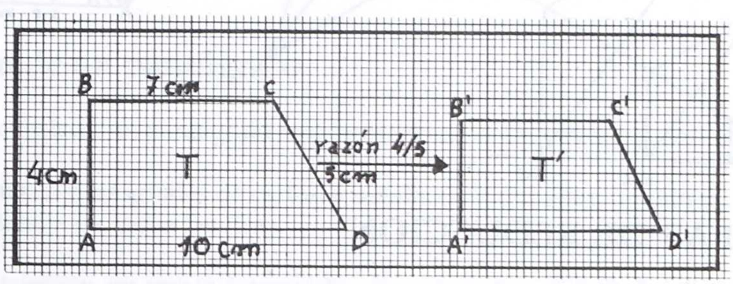
Ejercicio 4. Observa los dos cuadriláteros siguientes: tienen la misma forma y por esto decimos que son semejantes. Mide los ángulos, por medio de un transportador y escribe las igualdades que obtengas. (Pueden recortarse y superponerse).

- Calcula las razones de los lados correspondientes AB/A'B', BC/B'C', CD/C'D', DA/D'A'. ¿Qué relación hay entre los lados de las dos figuras?



Pueden repetirse ejercicios del mismo tipo, con otros polígonos, para pasar luego a otros ejercicios en los que se dé la razón de semejanza.

Ejercicio 5. Si la razón de semejanza del trapecio T respecto al T ' es 4/5, calcula las dimensiones de T'. (Los ejercicios 4 y 5 son del libro Estrategia, Matemáticas, 8º de E.G.B., Editorial Onda).



Una vez introducida la razón de semejanza, así como el papel que ésta juega en la ampliación de figuras, es necesario reforzar este concepto y contraponerlo con ejemplos de dos polígonos cuyos lados difieran en una constante aditiva.

Ejercicio 6. Imagínate que queremos poner una barra horizontal, alrededor de una pista de balonmano, para que los espectadores no entren en el campo. Si queremos que esté a dos metros de las líneas del campo ¿cuánto medirá la barra? El rectángulo formado por las líneas exteriores del campo y el formado por la barra ¿son semejantes? (Del libro **Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida.** Grupo Beta. ICE de la U. de Extremadura).

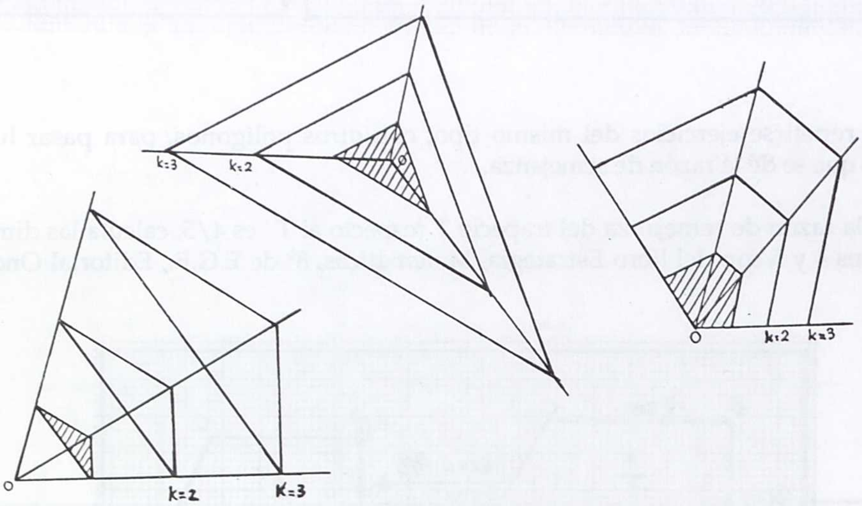
4. Aplicación del concepto de semejanza

4.1. METODOS PARA AMPLIAR Y REDUCIR FIGURAS

Existen diversos métodos para ampliar y reducir figuras. El más simple consiste en utilizar cuadrículas: se traza una cuadrícula sobre el dibujo que se quiere ampliar o reducir y, sobre el papel que se va a utilizar para la ampliación o reducción, se marca una segunda cuadrícula que mantiene con la primera una razón igual a la que se desea aumentar el dibujo. Cuadro a cuadro, se copia el dibujo, obteniéndose otro semejante. Una vez hecho el nuevo dibujo, puede comprobarse que el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de un dibujo y el que resulta de unir los puntos correspondientes del otro están en la misma razón que los lados de los cuadrados que forman las dos cuadrículas.

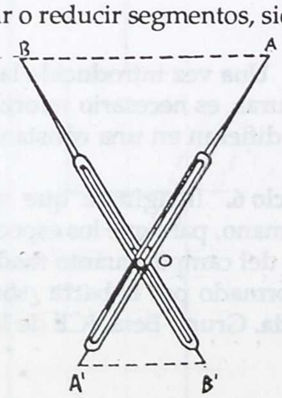
Utilizando una misma cuadrícula y trabajando con figuras poligonales cuyos vértices estén sobre vértices de la cuadrícula, también es posible ampliar figuras en razones simples.

La construcción de figuras homotéticas puede considerarse también como un método de ampliación de figuras. Pueden realizarse construcciones distintas, según la razón de homotecia (k) y la posición del centro de homotecia respecto a la figura. Una actividad interesante para realizar con los alumnos consiste en pegar una fotografía en una hoja grande de papel y realizar un dibujo homotético a partir de las figuras de la fotografía (con una razón de homotecia lo mayor posible).



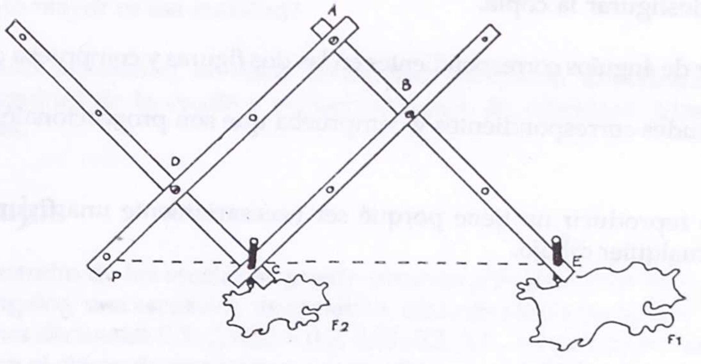
4.2. EL COMPAS DE REDUCCION

El compás de reducción es un instrumento que sirve para ampliar o reducir segmentos, siempre en una misma proporción. Se trata de un doble compás cuyos brazos tienen sendas ranuras que permiten situar el punto 0 de forma que cada uno de los dos brazos queda dividido en dos partes, según una razón determinada. Las ranuras tienen unas divisiones señaladas con los números 2, 3, 4, ... , que indican dónde se debe fijar la articulación para obtener la ampliación o reducción deseada. Puede proponerse su construcción, con dos pequeñas reglas de unos 20 cm y luego ampliar o reducir figuras poligonales dadas. Este ejercicio planteará la necesidad de triangular el polígono ya que de lo contrario podrían resultar figuras con los lados proporcionales pero no semejantes.



4.3. EL PANTÓGRAFO

El pantógrafo es un sencillo instrumento que permite obtener directamente figuras semejantes. En esencia, es un paralelogramo articulado ABCD con dos lados prolongados de forma que DP = DC y BE = BC y, por tanto, se deduce que: AP = AE.



Comprueba que los triángulos DPC y APE siempre son semejantes, que los puntos P, C, y E siempre están alineados y que cualquiera que sea el valor que tomen los ángulos del paralelogramo ABCD, al mover el pantógrafo PA : PD = PE : PC.

Así pues, fijando el punto P y pasando sobre la figura f_1 la punta colocada en E, el lápiz colocado en C nos dibujará una figura semejante (f_2) con razón k = PA : PD.

De la misma manera, si fijamos C, las figuras descritas por P y E serán semejantes y su razón será la misma k = PA : PD.

Si cambiamos la punta de seguimiento del dibujo original y el lápiz de lugar, la razón de semejanza será inversa.

Además, el pantógrafo permite variar k, variando la razón entre las longitudes del paralelogramo.

Construcción de un pantógrafo

Podemos construir un pantógrafo rudimentario de la manera siguiente:

- Corta cuatro tiras iguales de cartón y señala, en todas ellas, un punto cerca de cada extremo y a la misma distancia en todas las tiras.

- Señala también un punto intermedio, por ejemplo a 1/3 de la distancia entre los puntos extremos.

- Colócalas tal como indica la figura del principio de la página, únelas por medio de tornillos con tuerca, por ejemplo de tal manera que sea posible la articulación del paralelogramo ABCD formado.

Si fijamos el punto P a la mesa, y colocamos un lápiz en el agujero hecho en C, y un estilete, u otro lápiz, en el punto E, observaremos que al mover el estilete E, el lápiz señalará siempre un punto en C sobre la recta PE a distancia 1/3 de PE. Es decir, el lápiz dibujará una figura semejante a la seguida por E, pero cuyo tamaño ha sido reducido a una tercera parte ya que la razón de semejanza es precisamente k = 1/3.

Del mismo modo, se pueden construir pantógrafos que permitan operar con las razones 1/2 y 2,1/4 y 4, ... Cada grupo de la clase puede construir uno diferente.

Comprobación del funcionamiento

Utilizando los pantógrafos construidos (o los que venden en las tiendas especializadas) dibuja una copia de una figura cualquiera, ampliándola y reduciéndola con las razones 2 y 1/3. El dibujo, el papel de la copia y el punto fijo del pantógrafo deben estar muy bien sujetos a la mesa, pues cualquier movimiento hará desfigurar la copia.

Mide un par de ángulos correspondientes en las dos figuras y comprueba que son iguales.

Mide longitudes correspondientes y comprueba que son proporcionales. ¿Cuál es la razón de semejanza?

La figura a reproducir no tiene porqué ser necesariamente una figura geométrica, puedes ampliar o reducir cualquier dibujo.

5. Escalas

El tema de **escalas** está relacionado con una actividad que el alumno de E.G.B. ha desarrollado desde siempre: dibujar, reproducir la realidad que le rodea. Es, por tanto, un problema de cuantificación de esta representación: ¿cuál es la relación de tamaño entre la realidad y su representación? ¿cuánto mayor es esa realidad?

Parece adecuado introducir el tema de escalas mediante diferentes actividades que ordenamos por la magnitud de la escala y no por su grado de dificultad. Estas actividades son: dibujos, plano y mapas.

Actividad 1: dibujos

Para iniciar el estudio de las escalas se puede empezar dibujando un libro, la mesa, un lápiz, un transportador de ángulos, una escuadra, un cartabón, etc., con escalas sencillas (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 ... y sus expresiones decimales 0,5; 0,3333 = 0,3; 0,25; 0,2; 0,1 ...) y comparar las formas reales con las formas dibujadas con el objeto de comprobar que son figuras semejantes. La escala es precisamente la razón de semejanza de dichas figuras.

El tema de escalas de planos y mapas surge siempre que se representan edificios y terrenos. Los planos y los mapas no son sino figuras semejantes a la proyección del edificio o del terreno sobre un plano, es decir, algo parecido a tomar una fotografía desde un avión. Levantar un plano es construir una figura semejante al objeto real con una determinada razón de semejanza llamada escala. La escala de un plano 100 veces menor que la realidad se escribe 1:100 y significa que cada distancia del plano corresponde a una distancia 100 veces mayor en la realidad. Según la escala se puede hacer la clasificación:

– escala superior a 1:10.000: planos

– escala inferior a 1:10.000: mapas, que a su vez se pueden clasificar:

  - escala superior a 1:200.000: mapas de gran escala.

  - escala entre 1:200.000 y 1:1.000.000: mapas de escala mediana.

  - escala inferior a 1:1000.000: mapas de pequeña escala.

La escala gráfica es el segmento graduado en unidades de longitud (m, km, ... de la realidad) que permite conocer la razón de semejanza y facilita las lecturas y las medidas.

Para trabajar estos temas, sugerimos varias actividades y ejercicios. En todos ellos se utilizan diversos conceptos complementarios:

- cálculo de longitudes reales a partir del mapa o plano;

- dibujo de un plano a partir de las dimensiones reales y determinación de la escala adecuada; cálculo de las distancias del plano;

- determinación de la escala de un plano o mapa, conocidas las distancias reales.

Actividad 2: planos

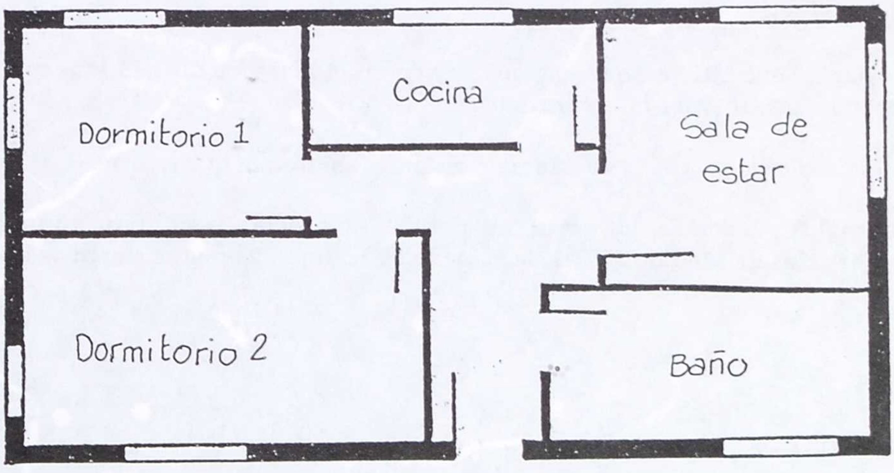
a) Sobre un plano de Barcelona hemos señalado el recorrido de una carrera en la cual la meta coincide con el punto de partida. Calcula la distancia recorrida por los participantes. (Se pueden poner ejemplos de carreras concretas como la Marathon, el recorrido de la Vuelta a España o de otros acontecimientos, como las cadenas humanas por la Paz, etc.).

b) Si se ha intentado dibujar el plano de una habitación en un folio y ha resultado que no cabía ¿cómo se tiene que tomar la nueva escala, menor o mayor?

c) Dibuja el plano de tu habitación. Haz el dibujo, con una escala adecuada, de manera que ocupe una hoja del tamaño de un folio.

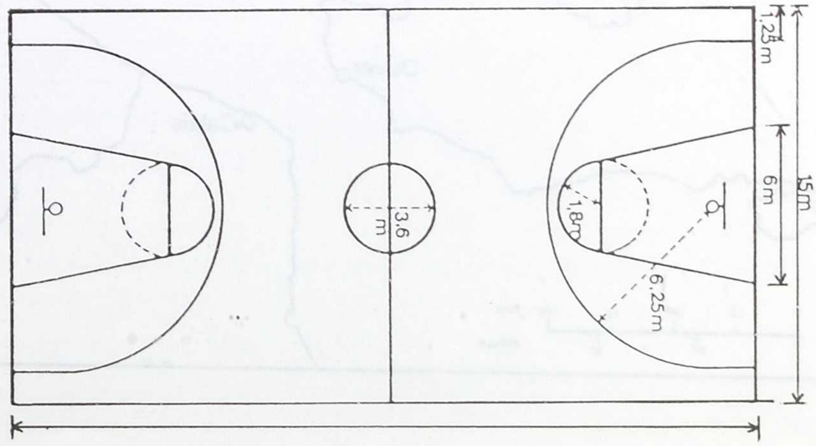
(Grup. Zero. Retrobem el mon de la Geometría. ICE - UAB)

d) En el siguiente plano de un piso dibujado a escala 1:100, calcula las dimensiones reales:



	Dimensiones sobre el plano		Dimensiones reales	
	Ancho	Largo	Ancho	Largo
Cocina				
Baño				
Sala de estar				
Dormitorio 1				
Dormitorio 2				

e) En este esquema tienes las dimensiones de un campo de baloncesto. Dibuja un plano, en un folio, aplicando la escala mayor que puedas:



f) Otro problema a proponer a los alumnos es que midan distancias reales a partir de un plano a escala. Evidentemente, el plano que se les presente debe ser el de su localidad o barrio. Un ejemplo de esta actividad puede ser el siguiente:

El plano que tienes delante es el de Sant Cugat y está hecho a escala uno por 10.000 (1:10.000), es decir, que cada centímetro del plano representa diez mil centímetros, o sea, 100 metros de la realidad. Contesta a las siguientes preguntas:

- Marca, con un punto rojo, la situación de tu casa y de la escuela. Señala con el mismo color el recorrido que haces cada día para ir de tu casa a la escuela (con segmentos rectos) y calcula la distancia real.

- La distancia entre las gasolineras que se ven en el plano es de 1,23 km, en la realidad. ¿Cuánto ha de medir en este plano? Compruébalo.

- Si queremos ir de casa a la estación ¿qué distancia tendremos que recorrer?

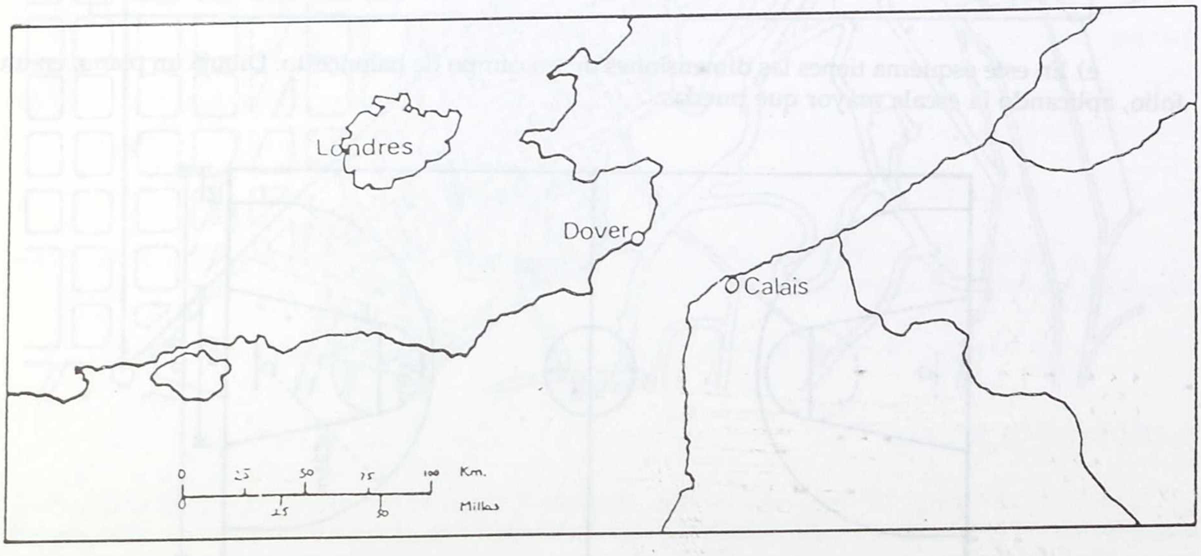
Otros ejemplos pueden ser los expuestos por el Grupo Beta, en su libro **Proporcionalidad Geométrica y Ejercicios de Medida,** ICE de la U. de Extremadura, del que adjuntamos las siguientes fotocopias:

Actividad 3: mapas

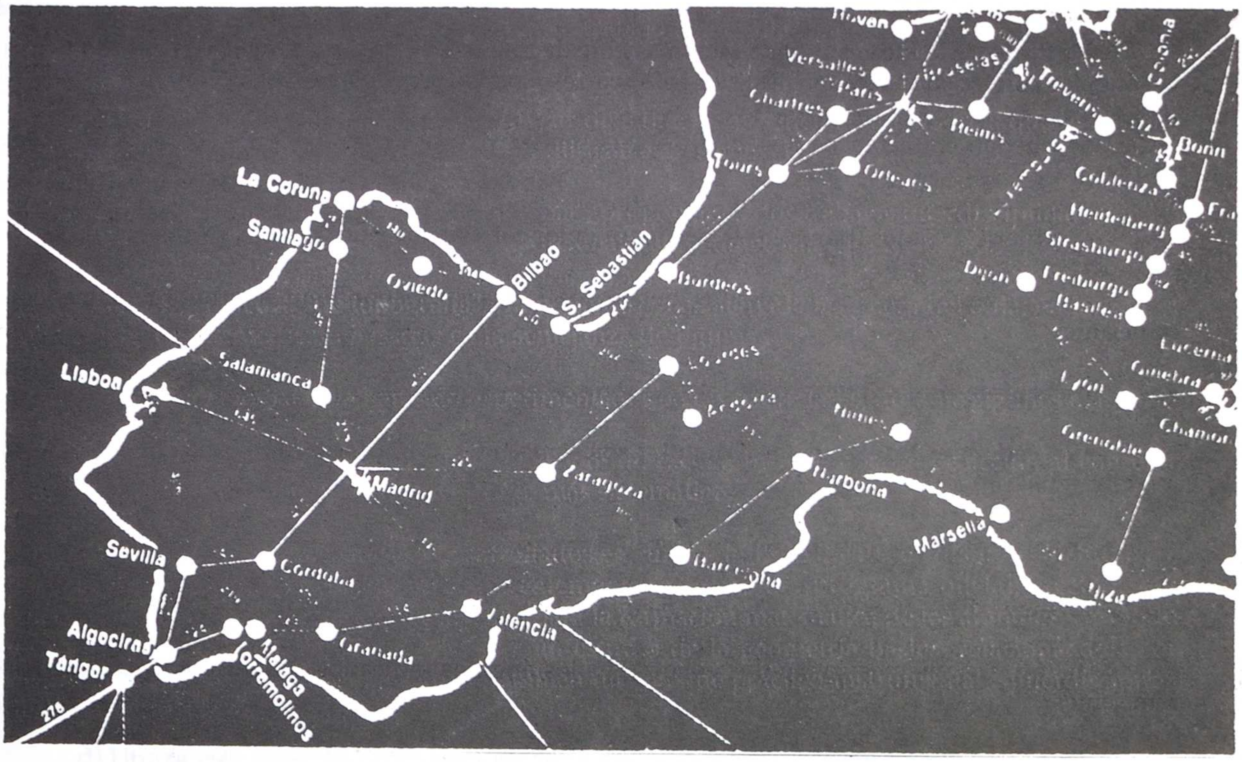
a) En un mapa de los Paises Catalanes hecho a escala 1:2.000.000 ¿cuántos cm. del mapa separan dos puntos que en la realidad distan 12 km.? ¿y si distan 100 km.?

b) Dos mapas de Cataluña están hechos a escala 1:500.000 y 1:700.000 ¿cuál de ellos es más detallado?

c) He aquí un mapa del Canal de la Mancha y su escala. Calcula en km. y en millas la distancia entre los puertos de Calais (Francia) y Dover (Inglaterra).



e) Construye una cuadrícula con los cuadraditos de tu cuaderno y dibuja el mapa de, ¿cuál es la escala de tu reducción?
(Estrategia - Onda)



6. Propiedades de la semejanza

Centraremos este estudio en las propiedades de triángulos, ya que permite abordar el tema de los criterios de semejanza con la ventaja adicional de que cualquier figura poligonal se puede descomponer en triángulos.

Partimos de la idea estudiada anteriormente de que dos figuras son semejantes cuando tienen los ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes proporcionales.

Se pueden enunciar los dos criterios más sencillos, dejando el otro para cursos posteriores (B.U.P.):

- Criterio 1: Si dos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales, son semejantes.

- Criterio 2 : Si dos triángulos tienen los lados correspondientes proporcionales, son semejantes.

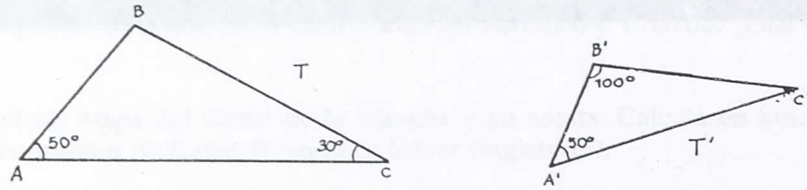
A partir de aquí se puede plantear una serie de ejercicios:

a) Averigua si los siguientes triángulos son semejantes; dibújalos y comprueba que tienen los ángulos iguales:

Triángulo T: AB = 6 cm, BC = 9 cm, CD = 7,5 cm

Triángulo T': A'B' = 10 cm, B'C' = 12,5 cm

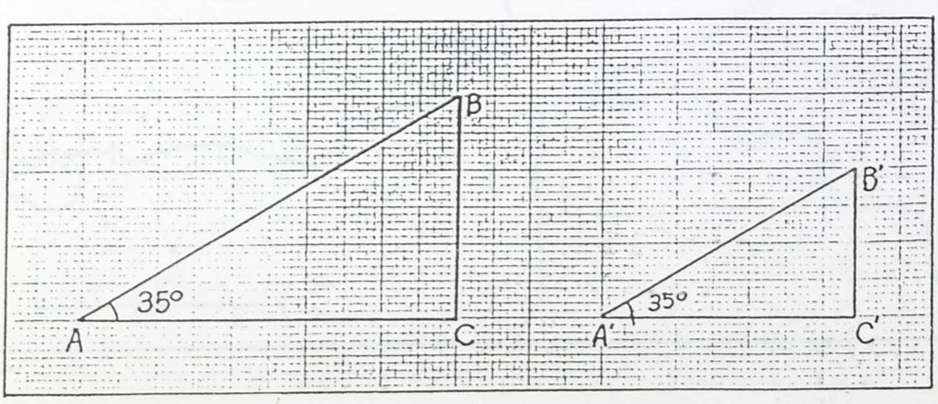
b) En los siguientes triángulos conocemos los ángulos indicados, ¿puedes afirmar que son semejantes?



c) Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de todos los triángulos es igual a 180°, enuncia nuevamente el Criterio 1 de semejanza de triángulos.

d) ¿Cómo son todos los triángulos equiláteros en función de los criterios de semejanza? razona tu respuesta.

e) Averigua si los siguientes triángulos rectángulos son semejantes y justifica tu respuesta:



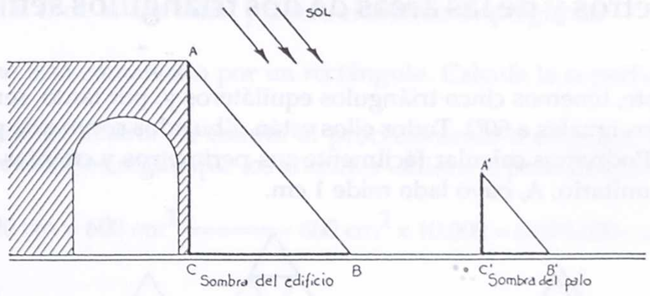
f) Enuncia el Criterio 1 para los triángulos equiláteros.

(Estrategia - Onda)

Sobre la base de estas propiedades, se pueden realizar varias actividades. En el caso de la razón de las alturas, los alumnos calcularán dicha razón mediante simple aplicación de los criterios anteriores.

Estudios con sombras

1) La idea de los triángulos rectángulos semejantes ya la aplicó el matemático griego Tales (siglo VI a. C.) para medir alturas de edificios, utilizando palos y midiendo sus sombras. Este procedimiento seguramente lo aprendió de los egipcios y está basado en la idea de que los rayos de sol son paralelos y, por tanto, forman ángulos iguales con la horizontal.



a) Entre los triángulos ABC y A'B'C' ¿qué ángulos son iguales? ¿cómo lo sabes?

b) Escribe la proporción entre los lados de los dos triángulos.

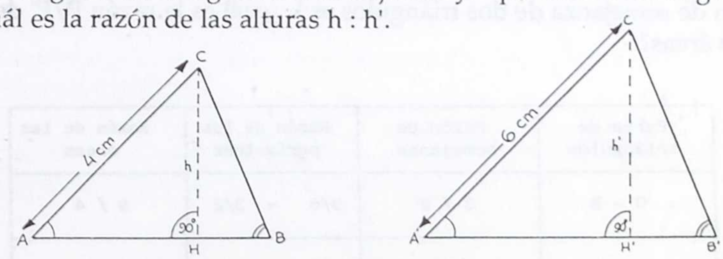
c) Si el palo mide 40 cm. y su sombra mide 25 cm., y si la sombra del edificio mide 5,2 m., calcula la altura AC del edificio.

d) Utiliza este procedimiento para medir la altura de tu escuela.

2) Queremos calcular la altura máxima del acueducto de Segovia. En un momento dado, la sombra del acueducto mide 31 m. y la de una farola de 2,9 m. de altura mide 3,1 m. Calcula la altura del acueducto.

Razón de las alturas de dos triángulos semejantes.

a) Los dos triángulos de la figura son semejantes ya que tienen los ángulos A = A' y B = B'. Queremos saber cuál es la razón de las alturas h : h'.



- calcula la razón de semejanza de los dos triángulos
- compara los dos triángulos ACH y A'C'H'
- calcula h : h'

b) Calcula la base de un triángulo, cuya altura mide 6 cm., semejante a un triángulo cuya base mide 12 cm. y cuya altura es de 8 cm.

(Los últimos ejercicios y actividades son de: Estrategia - Onda)

Otras actividades de aplicación de la semejanza de triángulos rectángulos han sido expuestas en otra parte de este informe y son adecuadas para alumnos de Ciclo Superior de E.G.B.

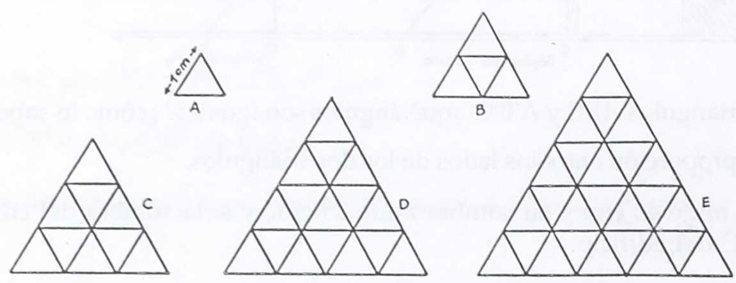
7. Razón de las áreas

El tema de la razón de las áreas presenta bastantes dificultades ya que comporta el paso a la segunda dimensión. Los textos clásicos parten del estudio del cuadrado (véase, por ejemplo, el libro de Emma Castelnuovo -**La Geometría**- La Nuova Italia, p. 114) que resulta claro y convincente.

Vamos a presentar dos tipos de actividades diferentes. La primera basada en el estudio de figuras derivadas del triángulo equilátero, que aborda, conjuntamente, el problema de la razón de los perímetros y el de las áreas y la segunda basada en el estudio de superficies tomadas de mapas (para ambas actividades ver Grup Zero - **Retrobem el mon de la Geometría** - ICE de la UAB y **Estrategia** - Onda).

Razón de los perímetros y de las áreas de dos triángulos semejantes

En la figura siguiente, tenemos cinco triángulos equiláteros y, por tanto, semejantes (recuerda: todos tienen los tres ángulos iguales a 60°). Todos ellos están dibujados sobre una pauta de triángulos equiláteros de lado 1 cm. Podremos calcular fácilmente sus perímetros y cuántas veces cada uno de ellos contiene el triángulo unitario, A, cuyo lado mide 1 cm.



- Para cada par de triángulos señalados en el cuadro, calcula: la razón de los perímetros y la razón de las áreas. El par C - B, significa que debes calcular la razón del triángulo C respecto al triángulo B.

- Compara las razones de los perímetros y las razones de sus áreas con las razones de semejanza.

- Si la razón de semejanza de dos triángulos es k ¿cuál es la razón P/P' de sus perímetros? ¿y la razón S/S' de sus áreas?

Pares de triángulos	Razón de semejanza	Razón de los perímetros	Razón de las áreas
C - B	3 / 2	9/6 = 3/2	9 / 4
D - B			
E - D			
B - E			
E - A			
A - D			
E - C			

Problema complementario: Los lados de un triángulo miden 9 cm., 6 cm. y 12 cm.

- ¿cuánto miden los de un triángulo semejante si la razón de semejanza es 2/3?

- calcula la razón de los perímetros de los dos triángulos anteriores;

- dibuja los dos triángulos y traza la altura correspondiente al lado mayor de cada uno. Mide las alturas y comprueba que la razón también es 2/3;

- calcula las áreas de los dos triángulos y halla su razón.

Superficies en mapas

En el ejercicio f) de la actividad planos, añadimos la pregunta:

- Este plano está enmarcado por un rectángulo. Calcula la superficie real del plano.

Esta pregunta es abierta en cuanto al procedimiento a emplear. Es interesante observar la disparidad de los resultados según que los alumnos utilicen el procedimiento:

- 30 cm x 20 cm = 600 cm^2 ======= 600 cm^2 x 10.000 = 6.000.000 cm^2 = 600 m^2 (procedimiento incorrecto)

o el procedimiento:

- 30 cm x 10.000 = 300.000 cm
  20 cm x 10.000 = 200.000 cm
  ======= 200.000 cm x 300.000 cm = 60.000.000.000 cm^2 =
  6.000.000 m^2 (procedimiento correcto)

Por supuesto, nadie realiza el procedimiento:

- 30 cm x 20 cm = 600 cm^2 ========= 600 cm^2 x (10.000)^2 =...= 6.000.000 cm^2. Esto es precisamente lo que se trata de averiguar y estudiar.

II. LOS MAPAS

1. Introducción

Dentro de las técnicas que sería necesario que los chicos desarrollaran durante su período de escolarización obligatoria, están todas aquéllas que hacen referencia a la comunicación, mediante símbolos y códigos, de observaciones, hechos, procesos, relaciones, situaciones, etc. En la revista **Perspectiva Escolar nº 27**,dedicada a "Les Ciencies a l'Escola", hay un inventario de estas técnicas:

a) Las que utilizan el dibujo: expresar el resultado de una observación con la ayuda de un dibujo acompañado de un texto, dibujando, con precisión y exactitud, un detalle significativo, respetando siempre las proporciones.

b) Las que utilizan esquemas: representar un montaje, una construcción, una estructura, mediante un esquema que sólo exprese las relaciones funcionales, con exclusión de cualquier otro detalle;saber hacer un esquema, respetando ciertos convenios: proyección sobre el plano, corte a un cierto nivel, mantenimiento de las proporciones, utilización de una escala, utilización de signos convencionales.

c) Las que requieren orientación en el espacio y en el tiempo, utilización de planos y mapas: saber definir una posición o un movimiento, en relación con el sujeto; saber orientar una dirección o un desplazamiento en relación a unas referencias universales (respecto a la horizontal, vertical, puntos cardinales); representar un camino, un trayecto, un perfil, mediante un esquema topológico, o mediante una representación a escala; hacer un plano a escala; interpretar un mapa reconociendo los elementos planimétricos y altimétricos.

En las líneas que siguen, nos centraremos en el tercer aspecto y, en particular, en **los mapas**, explicando una propuesta de trabajo, con mapas, en **primero de B.U.P.**

Los mapas

Podemos definir los mapas como representaciones reducidas, simbólicas y aproximadas de toda la superficie terrestre, o de una parte de ella. El hecho de que la representación se haga sobre una superficie plana cuando, realmente, la superficie terrestre no lo es, plantea una serie de problemas que la Cartografía ha ido resolviendo, a lo largo de los siglos.

Los mapas deben considerarse como un instrumento de trabajo imprescindible en los niveles de escolarización obligatoria, un instrumento a utilizar en las diversas asignaturas: Geografía e Historia, Ciencias Naturales, Lengua, Matemáticas. Si bien, para algunas materias, los mapas son una fuente de conocimiento ya que, seleccionando los elementos sobre ellos representados, podemos descubrir relaciones que, de entrada, habían pasado desapercibidas. Así, por ejemplo, en el libro de

M. Parés, G. Pou i J. Terrades, **Ecología d'una ciutat: Barcelona**, se propone, como herramienta fundamental de trabajo, el Mapa Ecológico, entendido "como una primera aproximación descriptiva, sintética, de elementos estructurales, que puede ser utilizada como marco de referencia de procesos funcionales y que contiene indicadores adecuados para analizar algunas relaciones básicas entre estructura y función en el ecosistema urbano".

Además, en Matemáticas, los mapas no tan sólo pueden ser objeto donde aplicar unos ciertos conocimientos sino también una manera de "materializarlos", para facilitar su comprensión, al mismo tiempo que son una fuente de nuevas situaciones desde las cuales se pueden afrontar nuevos problemas.

El trabajo con mapas a lo largo del período de escolarización

Muchas veces, en diversas materias, se ha venido utilizando los mapas, pensando que es una técnica que los alumnos ya dominan, cosa que no es cierto si, desde los primeros cursos de Básica, no se ha hecho un trabajo consciente encaminado a que aquéllos tengan: un conocimiento del espacio, capacidad de expresar la organización espacial de lo que observan, etc. (Puede verse el número 52 de **Perspectiva Escolar**, dedicado a "L'Espai").

Si bien, al finalizar 8º de E.G.B., los alumnos deberían poder interpretar y utilizar un mapa en sus aspectos planimétricos, hay dos aspectos que deberían tratarse en 1º de B.U.P. o F.P.:

- la representación del relieve,

- la realización de medidas y de cálculos, sobre el mapa, que serían incómodas o imposibles de hacer en la realidad.

Estos dos aspectos pueden tratarse en 1º de B.U.P. o de F.P., e incluso en 2º curso, una vez vista la Trigonometría. En 2º curso, el trabajo con mapas podría continuarse, tratando los problemas de proyección, una vez estudiadas la forma y las dimensiones de la Tierra y el sistema de referencia formado por las coordenadas geográficas de latitud y longitud.

En Matemáticas, como ya hemos apuntado antes, el trabajo que puede hacerse con mapas en 1º y 2º de B.U.P. - F.P. puede dar pie a la iniciación del estudio de temas de un nivel superior, como pueden ser la medida, la aproximación , errores, cálculo de áreas de figuras no regulares, etc.

2. El trabajo con mapas en 1º de B.U.P. o F.P.

La propuesta de trabajo que presentamos queda recogida en el cuadro que sigue:

SITUACIONES	TEMAS DE TRABAJO	HABILIDADES Y OTROS TEMAS	OBSERVACIONES
Trabajo con mapas a escala:	Interpretación de mapas.		Posible trabajo conjunto con otras materias.
1:5.000	Escala		
1:10.000 1:100.000	Cálculo de distancias	Cálculo de longitudes de trayectos no rectilíneos.	
	Cálculo de áreas	Unidades de superficie. Cálculo de áreas de figuras no poligonales. Densidad de población.	
	Representación del relieve: curvas de nivel	Cálculo de altitud. Pendiente de un trayecto.	
	Cortes topográficos.		
Trabajo con cartas náuticas.	Orientación	Introducción a las coordenadas polares. Unidades: milla marina.	

Esta programación puede llevarse a término en unas quince sesiones de clase que pueden organizarse de maneras diversas:

- Como una parte de un tema interdisciplinar, trabajando conjuntamente con otras materias, como por ejemplo el estudio de un habitat: el hayedo, el delta del Ebro; el estudio de una entidad geográfica: el río Ripoll, la Costa Brava.

- Como un tema específico de Matemáticas y que puede estudiarse, de manera intensiva, durante unas dos o tres semanas.

- Como un tema complementario del curso de Matemáticas y que puede trabajarse a razón de una hora semanal, durante un trimestre del curso escolar.

El trabajo en clase se centra en un dossier de documentación, que se entrega a los alumnos, en el que se recogen unas lecturas sobre el tema, que sirven para introducir los conceptos teóricos, y unos problemas a resolver. El trabajo de los alumnos queda recogido en otro dossier que entrega cada uno, al finalizar el estudio del tema. Este dossier, junto con una prueba, sirve para evaluar al alumno.

A continuación, describiremos, con un cierto detalle, la primera parte del dossier que se entrega a los alumnos. Al referirnos a los problemas, daremos exclusivamente los enunciados, prescindiendo de los mapas, ya que el profesor debe adecuarlos al lugar o lugares conocidos por sus alumnos.

3. Descripción del material de trabajo de los alumnos

A los alumnos se les entrega un dossier (1) que consta de unas veinte hojas ciclostiladas, en el que hay lecturas, mapas y ejercicios por realizar sobre ellos. Debido a que, por razones técnicas y económicas, los mapas del dossier no tienen sus colores originales, el seminario de Matemáticas, conjuntamente con el de Ciencias Naturales, que disponen de una colección de mapas (topográficos, temáticos, cartas náuticas) deben organizar, con dicho material, una exposición que los alumnos visitarán al iniciarse el tema.

Describiremos el citado dossier, paso a paso, dando algunas indicaciones y reseñando aquellos problemas que consideramos más interesantes.

Como indicamos anteriormente, los mapas que se deben mostrar a los alumnos son los de su zona, por lo que haría falta, en cualquier caso, un trabajo previo de los profesores, desde luego, nada fácil, en ciertos lugares, para preparar, con los mapas de zona en la que está "su" centro, el dossier que habrán de utilizar "sus" alumnos. Es casi inevitable tener que recorrer, al menos una vez, los Ayuntamientos, las Diputaciones, algunos organismos militares, etc., para disponer de los mapas sobre los que trabajar en clase.

Introducción y primeras lecturas

La introducción, aparte de un pequeño comentario sobre la importancia de los mapas, centra su atención sobre el término MAPA que figura en diferentes diccionarios y enciclopedias. Esto permite comentar las características generales de un mapa, hacer algunas aclaraciones sobre vocabulario y plantear algunas cuestiones que serán objeto de estudio a lo largo del tema.

La lectura nº 1, que sigue, define el concepto de ESCALA como: "la relación numérica entre la distancia, medida sobre el mapa, y la distancia correspondiente, medida sobre la superficie de la Tierra". Para ello, hemos utilizado un fragmento de la **Enciclopedia Ulisses (2)**, que nos pareció interesante porque plantea la relación: escala del mapa-superficie representada-detalle. (La reproducción que aquí presentamos es una traducción de la hoja entregada a los alumnos).

(1) Dossier "ELS MAPES", I.B. Joan Oliver, de Sabadell. Curso 1985/86.

(2) Enciclopedia Ulisses, volum. 9. Edicions Ulisses, S.A. 1982. Barcelona.

LECTURA 1

Podemos definir los mapas como representaciones reducidas, simbólicas y aproximadas de toda la superficie terrestre o de una parte. **¿ Cuántas veces menor es un mapa que la superficie que representa ? La siguiente lectura (Ulisses, vol.9) te explica qué es la escala de un mapa,** que es el concepto más importante para utilizar correctamente un mapa.

ESCALA Y MEDIDAS SOBRE MAPAS.

... en un mapa los ángulos entre meridianos y paralelos, entre dos ríos confluyentes, etc., pueden ser efectivamente idénticos a los de la superficie terrestre, longitudes y superficies estarán, forzosamente, muy reducidas: la importancia de esta reducción se expresa por medio de una relación llamada "escala" del mapa.

* ver bibliografía.

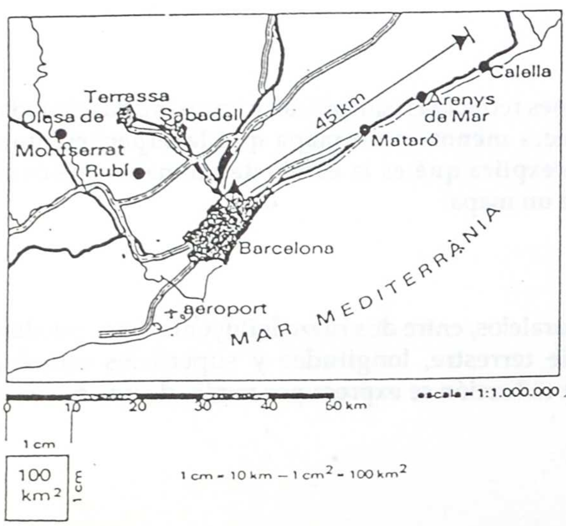
¿Qué es la escala de un mapa?

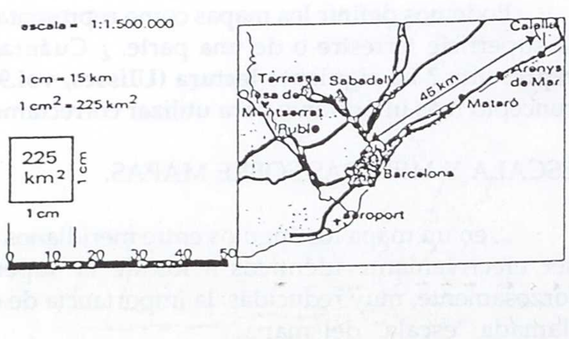
La escala se indica por medio de la relación numérica entre una distancia medida sobre el mapa y la distancia correspondiente medida sobre la superficie terrestre. Escala 1: 100.000 (escrito también 1 a 100.000 o bien 1 - 100.000) quiere decir que dos puntos que en el mapa distan un centímetro, un dedo, un palmo, un pie, etc., distan en la realidad 100.000 centímetro, dedos, palmos, pies o cualquier otra medida que se haya tomado sobre la mesa de trabajo por medio de una regla graduada. Si, faltos absolutamente de instrumentos, hubiésemos comprobado que dos puntos distan el largo de un cigarrillo, es querría decir que, en la realidad su distancia es de cien mil cigarrillos puestos en fila. Respecto a un mapa de escala 1: 100.000, otro de escala 1: 10.000 podrá dar más detalles, ya que en un centímetro sólo tendrá que representar 10.000 de la realidad y no 100.000 como en el primer caso. Análogamente, en caso contrario, un mapa a escala 1: 100.000 no será tan detallado como en el primer caso, puesto que las longitudes han de estar mucho más comprimidas. Por tanto, de las tres escalas indicadas, la 1: 10.000 es ciertamente la mayor, y permite mayor claridad de observación.

¿Cuál es la reducción de las áreas?

Hay que precisar con mucha atención que la escala expresa la relación entre medidas lineales, es decir, que indica la importancia de la reducción de las distancias. La importancia de la reducción de las áreas es, por tanto, igual al cuadrado de lo que indica la escala. Para aclararlo pongamos un ejemplo, tomemos un mapa a escala 1: 100, lo que significa que un centímetro medido sobre él equivale a 100 centímetros en la realidad. Pero un centímetro cuadrado de superficie de mapa no equivale a cien centímetros cuadrados en la realidad, sino a un cuadrado que mida, en la realidad, cien centímetros de lado, esto es, que tenga una superficie de diez mil centímetros cuadrados. Por consiguiente, en el caso del mapa a escala 1: 100, la relación entre las áreas es de 1: 10.000, o sea, 1: 100^2.

En la práctica, eso significa que para representar una cierta porción de superficie con los detalles dos veces mayores, hay que servirse de una hoja de papel cuatro veces mayor. Un mapa de los Paises Catalanes a escala 1: 500.000 necesita una hoja de papel de más de un metro cuadrado; a escala 1: 250.000 ha de menester más de cuatro metros cuadrados, y sería difícil encontrar una mesa sobre la que trabajar con un papel de estas dimensiones. A escala 1: 5.000, el mapa de los Paises Catalanes se extendería sobre una hectárea y sólo cabría en un museo, pero ciertamente no vale la pena hacerlo. En la práctica, se usan hojas de dimensiones cómodas en las que se representa solamente una porción limitada de la superficie terrestre.





Después de insistir en el concepto de escala, se hace una clasificación de los mapas según su escala (desde los mapamundis, hasta los mapas y planos que se utilizan en los trabajos de arquitectura y urbanismo) y se explicitan los elementos que componen un mapa topográfico: los elementos planimétricos, los elementos altimétricos y los elementos toponímicos. Si bien el dossier insiste fundamentalmente sobre los dos primeros elementos, los elementos toponímicos son importantes para, en primer lugar, reconocer la zona representada en el mapa y, en segundo lugar, por las posibilidades que tienen de ser tratados conjuntamente desde otras materias: Lengua, Historia, Ciencias Naturales.

Ejercicio sobre cálculo de distancias

Sobre mapas de escalas 1: 5.000 y 1: 10.000, se estudian, en un primer momento, aspectos de situación y reconocimiento para, a continuación, sobre el mapa urbano, a escala 1: 5.000, de la zona en la que está ubicado el Instituto, realizar, por ejemplo, el siguiente ejercicio:

– Sobre el mapa 1: 5.000, calcula:

a) la longitud de la calle Armand Obiols.
b) el perímetro del terreno sobre el que se halla el Instituto.

– Un grupo de jóvenes del barrio de la Planada quiere organizar una carrera popular de 1 km. Elabora un itinerario, por las calles de dicho barrio, para realizar la carrera y señálalo sobre el mapa 1: 5.000.

– Dibuja la zona limitada por las calles: Los Apeninos, Los Urales, Los Alpes e Himalaya, a escala 1: 1.000.

El perímetro del terreno sobre el que se halla el Instituto no es poligonal, con lo cual, para hallar su longitud, hay que utilizar métodos de aproximación, mediante una diagonal, o bien mediante métodos "mecánicos" como pueden ser un cordel o un odómetro.

El ejercicio sobre el itinerario para una carrera es interesante, no sólo porque es un problema inverso (de la realidad al mapa) sino porque permite darse cuenta de que para hacer ciertos cálculos es más práctico el mapa que la medida sobre la propia realidad.

El dibujo, a escala distinta, de un sector de plano si no se hace mediante un **pantógrafo**, es un buen ejercicio, pues hay que aplicar un factor de escala, para las distancias, pero los ángulos hay que reproducirlos sin variación (propiedad importante, en los mapas) y, para ello, hay que utilizar la regla, escuadra, cartabón y transportador de ángulos.

Ejercicios sobre cálculo de áreas

Sobre un mapa urbano, de escala 1: 5.000, se calculan las áreas de dos barrios próximos al Instituto para, a continuación, utilizando, por ejemplo, el censo de la ciudad de Sabadell de 1980, calcular la densidad de población de cada uno de los barrios. Este problema permite introducir unidades de superficie como el área y la hectárea, esta segunda de uso muy frecuente (por ejemplo, la superficie quemada en los incendios forestales se da en hectáreas).

En este primer ejercicio, las áreas a calcular son superficies de figuras poligonales y, por lo tanto, descomponibles en triángulos.

El cálculo del área de un triángulo es un ejercicio que consta de dos partes:

En primer lugar identificar el triángulo, operación que, para algunos alumnos, puede no ser fácil y que, para ello, hay que prescindir de ciertos detalles que figuran en el mapa para fijar la atención en el perímetro del barrio. Después, identificar el lado que consideraremos la base del triángulo y dibujar la altura relativa a dicha base. Por último, y sobre el mapa, medir la base y la altura del triángulo. (Este comentario puede parecer trivial, pero no lo es si pensamos que para dibujar la altura relativa a una determinada base, en un triángulo, se requiere el dominio de la escuadra y el cartabón).

El segundo paso es el de hacer operaciones para calcular el área del triángulo. Para ello pueden seguirse dos caminos:

– calcular las longitudes reales de la base y la altura a partir de las medidas hechas sobre el mapa, mediante la utilización de la escala, y después calcular el área; o bien

– calcular el área del triángulo, sobre el mapa, y después hallar el área de la realidad, mediante la utilización de la escala cuadrática.

La experiencia demuestra que el segundo camino es mucho más difícil, para los alumnos, que el primero. En una primera etapa, pueden utilizarse los dos.

A continuación, se plantea el siguiente ejercicio:

– Está establecido que un Instituto de 24 unidades sea edificado en un terreno de 1 hectárea.

Sobre el mapa a escala 1: 500.000 calcula el área del terreno sobre el que está edificado nuestro Instituto.

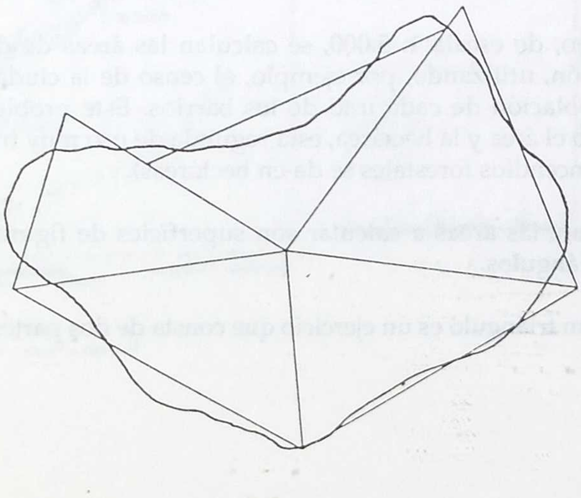
Puesto que el terreno de nuestro Instituto no es poligonal, el citado problema da pie a introducir dos nuevas técnicas para calcular áreas de figuras no poligonales:

– La técnica puede descomponer la figura no poligonal en triángulos, de manera que la suma de las áreas de todos ellos sea aproximadamente igual al área buscada.

Esta técnica puede usarse en segundo curso de B.U.P., una vez estudiada la Trigonometría, resolviendo el problema incluso sobre el terreno, con la ayuda de un taquímetro.

– La utilización de papel vegetal milimetrado:

Para utilizar esta técnica, se reproduce el perímetro de la figura de la cual hay que calcular el área sobre papel milimetrado y se calcula el número de unidades cuadradas (cm^2. mm^2) inscritas y el número de unidades cuadradas circunscritas en la figura y se hace la media aritmética de ambos; se puede calcular el error absoluto y el error relativo.



Este método es importante por las siguientes razones:

– La idea de encajar el área buscada entre dos áreas conocidas, una por defecto y otra por exceso, está en la base del cálculo integral.

– El propio método permite saber el error cometido, cosa que no ocurre con el método por triangulación; y, por último,

– Si es cierto que, de esta manera, podemos saber, sólo, un valor aproximado del área que buscamos, podemos reducir, tanto como queramos, el error cometido, si no prácticamente, al menos sí, en teoría. y ésta es una propiedad compartida con la medida de cualquier magnitud.

Damos, a continuación, dos ejemplos más de problemas de cálculo de áreas de figuras no regulares:

– El mapa que corresponde a la cuenca hidrográfica del río Ripoll, es decir, del territorio donde las aguas superficiales (fundamentalmente, debidas a la lluvia) desembocan en el río Ripoll.

Calcular el agua que recogería el río Ripoll si, un determinado día, lloviera, de manera uniforme, sobre todo la cuenca, a razón de 10'63 litros por metro cuadrado (10'63 l/m^2).

– Sobre un mapa topográfico comarcal, a escala 1: 10.000, se señala una base A B. Si sobre la base A B se construye una presa de una altura de 25 metros, calcular:

a) la longitud de su parte superior

b) si se llena el embalse conseguido con la citada presa, calcular el área, en planta, de la superficie inundada.

Algunos comentarios sobre estos dos problemas. El primer problema puede ser interesante puesto que es necesario determinar cuál es la cuenca hidrográfica del río. En este caso, hay que plantearlo después de introducir la representación de los elementos altimétricos, en un mapa, en particular, mediante la utilización de las curvas de nivel.

La determinación de la cuenca hidrográfica implica saber reconocer, sobre el mapa, el sentido de los desniveles representados por las curvas de nivel, para saber en qué sentido discurrirán las aguas superficiales. Por otro lado, puede ser interesante trabajar con la equivalencia "litros por metro cuadrado - altura en milímetros": si llueven 10'63 l/m^2 esto es equivalente a decir que, sobre cualquier superficie, el nivel del agua alcanzaría 10'63 mm.

El segundo problema podríamos calificarlo como de consolidación: hay que plantearlo después de haber trabajado sobre el cálculo de distancias, de áreas y después de saber reconocer el relieve del terreno mediante las curvas de nivel. El problema puede completarse con:

– determinación del perfil de la presa,

– cálculo del volumen aproximado del agua que quedará embalsada.

Este método es importante por las siguientes razones:

– La idea de encajar el área buscada entre dos áreas conocidas, una por defecto y otra por exceso, está en la base del cálculo integral.

– El propio método permite saber el error cometido, cosa que no ocurre con el método por triangulación; y, por último,

– Si es cierto que, de esta manera, podemos saber, sólo, un valor aproximado del área que buscamos, podemos reducir, tanto como queramos, el error cometido, si no prácticamente, al menos sí, en teoría, y ésta es una propiedad compartida con la medida de cualquier magnitud.

Damos, a continuación, dos ejemplos más de problemas de cálculo de áreas de figuras no regulares:

- El mapa que corresponde a la cuenca hidrográfica del río Ripoll, es decir, del territorio donde las aguas superficiales (fundamentalmente, debidas a la lluvia) desembocan en el río Ripoll.

  Calcular el agua que recogería el río Ripoll si, un determinado día, lloviera, de manera uniforme, sobre todo la cuenca, a razón de 10'65 litros por metro cuadrado (10'65 l/m^2).

- Sobre un mapa topográfico comarcal, a escala 1: 10000, se señala una base A B. Si sobre la base A B se construye una presa de una altura de 25 metros, calcular:

  a) la longitud de su parte superior.

  b) si se llena el embalse conseguido con la citada presa, calcular el área, en planta, de la superficie inundada.

Algunos comentarios sobre estos dos problemas. El primer problema puede ser interesante puesto que es necesario determinar cuál es la cuenca hidrográfica del río. En este caso, hay que plantearlo después de introducir la representación de los elementos altimétricos, en un mapa, en particular, mediante la utilización de las curvas de nivel.

La determinación de la cuenca hidrográfica implica saber reconocer, sobre el mapa, el sentido de los desniveles representados por las curvas de nivel, para saber en qué sentido discurrirán las aguas superficiales. Por otro lado, puede ser interesante trabajar con la equivalencia "litros por metro cuadrado - altura en milímetros" (si llueven 10 l/m^2 esto es equivalente a decir que, sobre cualquier superficie, el nivel del agua alcanzaría 10 mm).

El segundo problema podríamos calificarlo como de consolidación: hay que plantearlo después de haber trabajado sobre el cálculo de distancias, de áreas, y después de saber reconocer el relieve del terreno mediante las curvas de nivel. El problema puede completarse con:

– determinación del perfil de la presa,

– cálculo del volumen aproximado del agua que quedará embalsada.

III. ASTRONOMIA

1. Introducción

Dentro del tema general "La Proporcionalidad Geométrica" la Astronomía nos ofrece la posibilidad de acercarnos y utilizar sus conceptos desde una perspectiva interdisciplinaria y siguiendo, a grandes rasgos, el hilo de la Historia.

La importancia del trabajo interdisciplinar se basa en que la realidad no está compartimentada en sectores. Ni la realidad de nuestros alumnos ni la nuestra. Ha sido el hombre quien, a lo largo de la Historia, para conocer y poder transformar la Naturaleza ha desarrollado los distintos campos del cocnocimiento.

Por tanto, si queremos que los estudiantes encuentren sentido al trabajo propuesto desde las diversas asignaturas, es necesario partir de temas globalizados que supongan, para los alumnos, una propuesta de sistematización, de profundización o de búsqueda de respuesta y explicación a cuestiones concretas planteadas a su nivel.

La Astronomía, además de poder ser tratada interdisciplinariamente, nos permite observar y estudiar una serie de fenómenos siempre a nuestro alcance: el Sol, la Luna, los planetas, las estaciones, los eclipses, las estrellas, los cometas ... y también seguir el hilo de la Historia a través de una ciencia que ha influído sobre ella en gran manera. En efecto, la Astronomía es de gran riqueza, si queremos poner de manifiesto la relación constante entre ciencia y sociedad. Los metódos científicos fueron intuidos por los hombres cuando intentaban hallar un orden en los movimientos aparentemente caóticos de los objetos celestes. De los primeros esquemas astronómicos se derivan muchos de nuestros conceptos específicos de la Ciencia tales como espacio, tiempo, fuerza, movimiento ... Su lugar en la Ciencia es parte de la Historia. Por último, el estudio de la Astronomía nos da la oportunidad de observar el surgimiento y la caída de las teorías físicas, analizar su estructura y aclarar nuestra facultad de discriminación entre teorías útiles e inútiles.

Concretamente, el material que presentamos muestra cómo los primeros astrónomos, con sólo unas hipótesis básicas y el concepto de proporcionalidad, pudieron determinar el tamaño de la Tierra muy exactamente, y las distancias Tierra-Sol-Luna, y, si bien no con tanta precisión, sí utilizando un método perfectamente válido.

2. Objetivos específicos del tema

A partir de estas situaciones pretendemos especialmente que nuestros alumnos lleguen a:

1.- Saber enfrentarse a un problema, aunque no lleguen a su resolución correcta.

2.- Relacionar las observaciones que se pueden hacer cada día y de forma elemental con las experiencias y el trabajo de clase.

3.- Ver la Matemática como un instrumento para tratar, describir y explicar ciertos aspectos de hechos y fenómenos de la Naturaleza, y como un instrumento que los hombres han ido construyendo y moldeando según sus necesidades y las de la colectividad en la que se encuentran.

Presentamos, a continuación, la programación completa de este tema interdisciplinario, aunque solamente desarrollaremos los aspectos señalados con un asterisco:

SITUACIONES	TEMAS DE TRABAJO	HABILIDADES. OTROS TEMAS	OBSERVACIONES
La forma de la Tierra. El tamaño de la Tierra: Eratóstenes.	La esfera. Alguna de sus propiedades. Razón. Proporción. Proporción ángulo-arco. Proporción perímetro-diámetro, en la circunferencia. El número. *El cálculo de Eratóstenes.	Fracciones. Porcentajes.	*Obtención de Primeros cálculos. *Los rayos del Sol son paralelos.
Distancias de la Tierra a la Luna y al Sol: Aristarco.	Proporcionalidad de magnitudes geométricas. El Teorema de Tales. Triángulos semejantes. Figuras semejantes.	Construcciones geométricas. Utilización de la regla y la escuadra. División de un segmento. Construcción de triángulos.	Cálculo de alturas y distancias. *Pantógrafo. (ver II.4.3, pag)
Movimientos de la Tierra: Anual Diurno.	*Los cálculos de Aristarco. La medida del tiempo: el año y el día.	Angulos. Operaciones con ángulos.	*Construcción de la meridiana: observación de las sombras. Telurio.
Sistema solar.	Números grandes: Potencias de 10 Escalas en el sistema solar. Razones de distancia entre planetas. Razones de volúmenes.	Nuevas unidades de medida: Unidad astronómica año-luz.	Construcción de un modelo del sistema solar.
El Universo.	Números grandes. Constelaciones: de invierno. de verano. Coordenadas astronómicas.		

3. El radio de la Tierra: el cálculo de Eratóstenes

Ertóstenes (273 - 192 a. C.) sabía por los viajeros que llegaban a Alejandría, que en la ciudad de Siena (donde actualmente se encuentra Assuan, en el alto Nilo), el Sol, el día del solsticio de verano, pasaba, a mediodía, por el cénit, es decir, los rayos del Sol llegan perpendicularmente al suelo. En cambio, él había observado que, en el mismo momento, en Alejandría el Sol formaba con el cénit un ángulo de $7^{o}30'$.

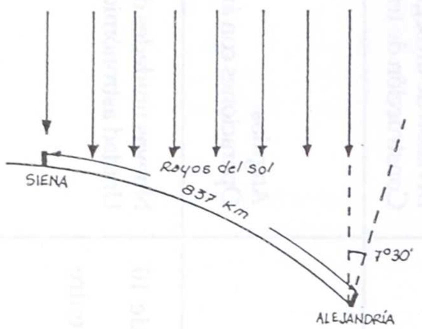
Por otra parte, Eratóstones creía que:

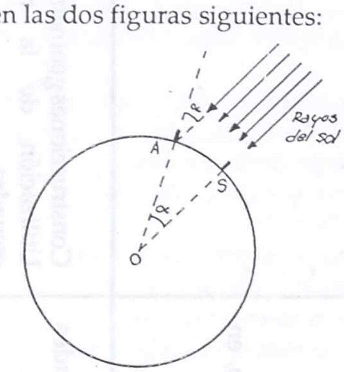
1º.- Los rayos del Sol son paralelos, cuando llegan a la Tierra, debido a la gran distancia que separa ambos cuerpos.

2º.- La distancia inclinación, en dos localidades muy distantes entre sí, de los rayos del Sol al mediodía de un mismo día era debida a que la Tierra es esférica.

3º.- Siena y Alejandría se encontraban a una distancia equivalente a 837 km sobre el mismo meridiano.

Por tanto, su hipótesis de trabajo queda recogida en las dos figuras siguientes:





Comparando el ángulo con el arco de meridiano Alejandría - Siena, que son conocidos, y recordando que la longitud de la circunferencia corresponde a un ángulo de 360^{o}, Eratóstenes calculó el radio de la Tierra.

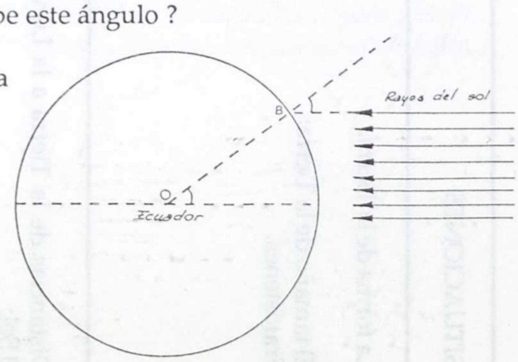
a) Halla el perímetro de la Tierra.

b) Halla el radio de la Tierra con los datos de Eratóstenes y compáralo con el valor conocido hoy en día.

c) Determinación de la latitud de un lugar:

Imaginemos que hacemos el cálculo de Eratóstenes el día del equinoccio de primavera. Ese día, los rayos del Sol, a mediodía, son paralelos al Ecuador. Tomaremos, como puntos, un lugar cualquiera de la Tierra y la intersección del Ecuador con el meridiano del lugar. Haz el dibujo correspondiente a Barcelona y fíjate en el ángulo que da la inclinación de los rayos del Sol respecto la vertical del lugar. Trasládalo al centro de la Tierra ¿ qué nombre recibe este ángulo ?

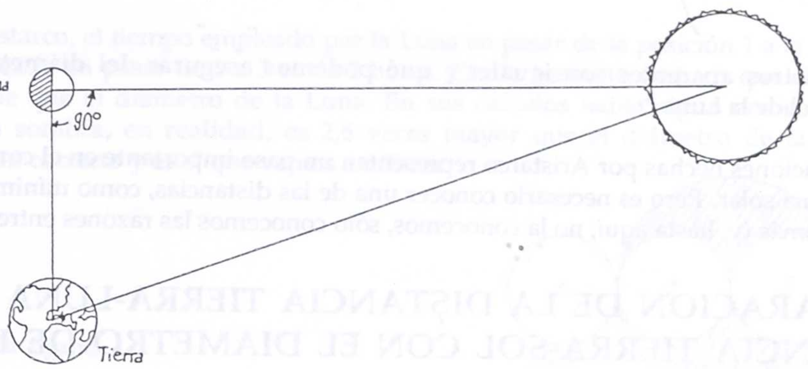
¿ Qué podríamos hacer, si no podemos esperar al día de equinoccio ? (ver apartado III. 7, 5, pág).



4. Distancias de la Tierra a la Luna y al Sol. Los cálculos de Aristarco

4.1. CALCULO DE LA RAZON DE LAS DISTANCIAS TIERRA-LUNA Y TIERRA-SOL

Aristarco de Samos, en el siglo III a. C., ideó un método muy ingenioso para calcular la razón entre las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol. En primer lugar, consideró el triángulo Tierra-Luna-Sol, TLS, y pensó que, en el momento del cuarto creciente o del cuarto decreciente, el triángulo era rectángulo en la Luna, por eso vemos exactamente la mitad de la cara de la Luna (mira la figura).



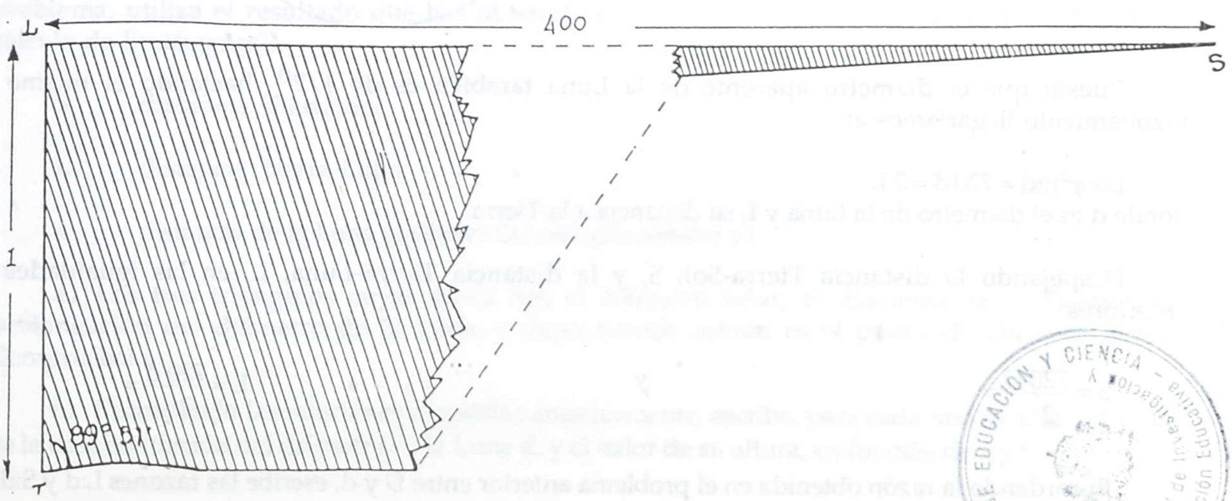
Después se las ingenió para medir el ángulo cuyo vértice es la Tierra. Así pudo obtener también el ángulo en el Sol y, por tanto, los tres ángulos del triángulo.

a) El valor del ángulo en la Tierra determinado por Aristarco fue de 87^{o}. Calcula el ángulo en el Sol correspondiente. ¿ Está determinado el triángulo ?

b) ¿ Podrías explicar un método para hallar las razones entre los lados del triángulo ?

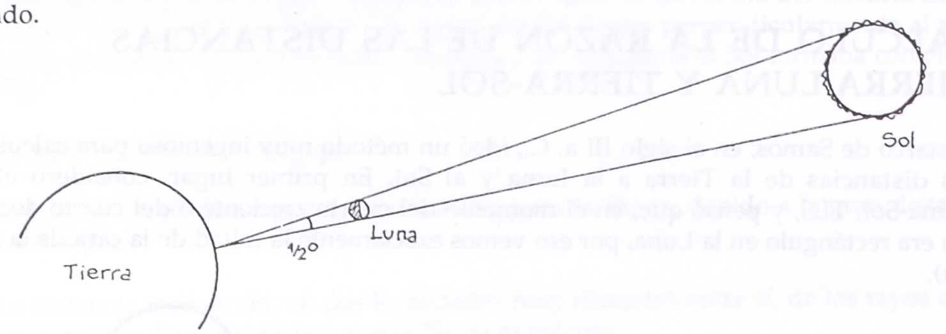
c) El triángulo de la figura no es correcto ya que, en el dibujo, el ángulo en T no es de 87^{o}. Dibuja correctamente un triángulo semejante a TLS que tenga el lado TL de un centímetro. Busca la razón entre los catetos y la razón entre el cateto TL y la hipotenusa TS. ¿ Cuántas veces mayor es la distancia de la Tierra al Sol que la distancia de la Tierra a la Luna ?

d) Actualmente se sabe que la medida de Aristarco es errónea y que el ángulo no mide 87o sino 89o51' y el triángulo TLS debería ser el de la figura:



Con estos nuevos datos repite el apartado anterior.

e) El diámetro aparente del Sol es de medio grado, eso significa que el ángulo bajo el que, desde un punto de la Tierra, se ven los dos extremos de un diámetro aparente de la Luna también es de medio grado.



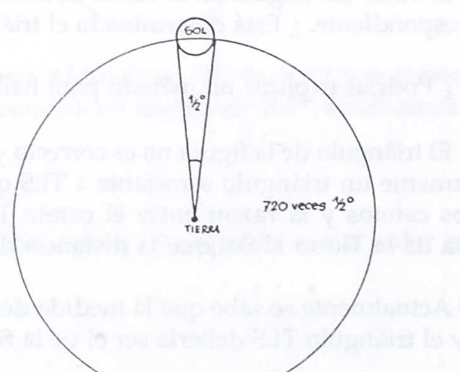
Si los diámetros aparentes son iguales ¿ qué podemos asegurar del diámetro del Sol en comparación con el de la Luna ?

Estas estimaciones hechas por Aristarco representan un paso importante en el conocimiento del tamaño del sistema solar. Pero es necesario conocer una de las distancias, como mínimo, para poder determinar las demás (y, hasta aquí, no la conocemos, sólo conocemos las razones entre distancias).

4.2. COMPARACION DE LA DISTANCIA TIERRA-LUNA Y LA DISTANCIA TIERRA-SOL CON EL DIAMETRO DE LA LUNA

Si el diámetro aparente del Sol es de $1/2^{\circ}$, necesitamos repetir 720 veces este diámetro para obtener una circunferencia completa alrededor de la Tierra. Si D es el diámetro del Sol, la longitud de la circunferencia será 720 D y, por tanto:

Longitud = 720 D = 2 S
donde S es el radio de esta circunferencia
(que es la distancia de la Tierra al Sol).



Puesto que el diámetro aparente de la Luna también es de $1/2^{\circ}$, haciendo el mismo razonamiento llegaríamos a:

Longitud = 720 d = 2 L
donde d es el diámetro de la Luna y L su distancia a la Tierra.

Despejando la distancia Tierra-Sol, S, y la distancia Tierra-Luna, L, en las igualdades anteriores:

$S = \frac{720\,D}{2} =$ y $L = \frac{720\,d}{2} =$

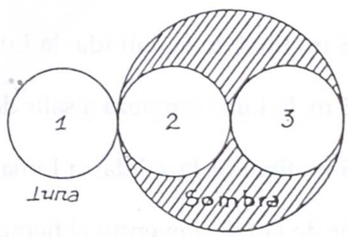
Recordando la razón obtenida en el problema anterior entre D y d, escribe las razones L:d y S:d.

Con estas razones damos un paso más para conocer las distancias que nos interesan, ya que sólo necesitamos saber el diámetro de la Luna, o el del Sol. Aristarco también halló un método para determinar el diámetro de la Luna en función del de la Tierra. El no llegó a calcular el diámetro de la Tierra, pero ya hemos visto cómo lo hizo Eratóstenes, algunos años después.

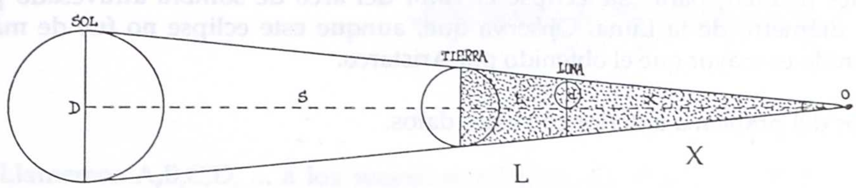
4.3. CALCULO DE LAS DISTANCIAS DE LA TIERRA A LA LUNA Y AL SOL

Durante un eclipse de Luna de máxima duración, es decir, del tipo en el que la Luna, en su recorrido, atraviesa la sombra de la Tierra por el centro, Aristarco comparó el tiempo que tarda en taparse completamente la Luna con el tiempo que tarda desde el momento en que empieza a entrar en la sombra hasta el momento en que empieza a salir, es decir, el tiempo que tarda un punto de la Luna en atravesar la sombra.

Según Aristarco, el tiempo empleado por la Luna en pasar de la posición 1 a la 2 es de 1 hora y el tiempo empleado en pasar de 1 a 3 es de 2 horas. Eso le permitió deducir que el diámetro de la sombra es doble que el diámetro de la Luna. En sus cálculos había algún error, por ejemplo, el diámetro de la sombra, en realidad, es 2,6 veces mayor que el diámetro de la Luna, pero su razonamiento era correcto y es el que vamos a utilizar.



Observa la figura:



intervienen las siguientes longitudes:

D diámetro del Sol

d diámetro de la Luna

diámetro de la Tierra (Aristarco no conocía este dato, sin embargo, para simplificar el problema, utiliza el resultado que has obtenido en el primer ejercicio, "El radio de la Tierra: el cálculo de Eratóstenes").

S distancia Tierra-Sol

L distancia Tierra-Luna

x distancia de la Luna al vértice del cono de sombra O.

a) Los tres triángulos cuyas bases son el diámetro solar, el diámetro de la Tierra y la prolongación del diámetro de la Luna, y cuyo vértice común es el punto O, son semejantes. Compruébalo.

b) Recordando las relaciones obtenidas anteriormente, escribe, para cada uno de ellos, el valor de la base en función del diámetro de la Luna d, y el valor de su altura, en función de x y L.

c) Escribe las razones de la base a la altura, para cada triángulo. Iguala las razones del triángulo mayor y del menor. Despeja el valor de x, que obtendrás en función de L.

d) Iguala las razones correspondientes al triángulo menor y al triángulo mediano, sustituye el valor obtenido para x y resultará una ecuación con d como incógnita.

e) Resuelve la ecuación.

f) Calcula L y S.

Un ejemplo concreto:

El día 9 de enero de 1982 tuvo lugar un eclipse total de Luna visible desde Cataluña. El horario del eclipse fue el siguiente:

18 h 13 m. entrada de la Luna en la sombra.

19 h 16 m. final de la entrada: la Luna ya está completamente tapada.

20 h 35 m. la Luna empieza a salir de la sombra.

21 h 38 m. final de la salida: la Luna, de nuevo, iluminada por completo.

A partir de la relación entre el tiempo que tarda la Luna en atravesar la sombra y el tiempo que tarda en entrar, puedes deducir, para este eclipse el valor del arco de sombra atravesado por la Luna, en función del diámetro de la Luna. Observa que, aunque este eclipse no fue de máxima duración, el valor obtenido es mayor que el obtenido por Aristarco.

Repite los cálculos del problema anterior con estos datos.

5. Los rayos de Sol son paralelos

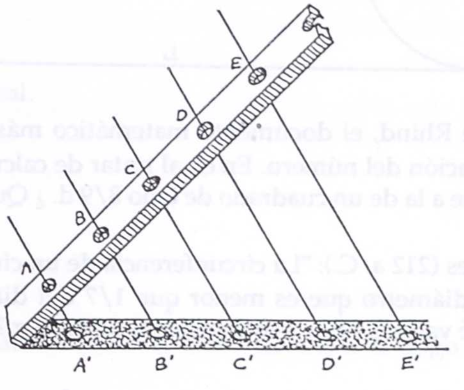
Necesitaremos un listón plano de madera de algo más de un metro de longitud. Cada 10 cm., le haremos un agujero de aproximadamente 8 mm. de diámetro.

Salimos al patio y colocamos el listón, apoyado por un extremo en el suelo, de forma que los rayos del Sol pasen a través de los agujeros.

En el suelo veremos la sombra del listón con los puntos de luz correspondientes a los agujeros.

Medid las distancias entre puntos de luz, ¿ cómo son entre sí ?

Cambiad la inclinación del listón respecto del suelo y volved a medir las distancias entre los puntos de luz, ¿ cómo son ahora ?



Llamemos A,B,C,D, ... a los sucesivos agujeros del listón y A',B',C',D', ... a sus respectivos puntos de luz. Estableced distintas razones entre las distancias de los agujeros y comparadlas con las razones de las correspondientes distancias sobre la sombra, ¿ cómo son estas razones ?

AC: BF   A'C': B'F';   BC:AD   B'C':A'D';   ...

La igualdad de estas razones demuestra que los rayos del Sol son paralelos, ¿ por qué ?

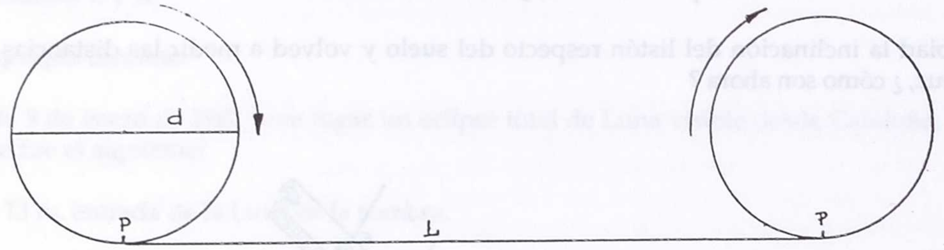
ATENCION; Debeis tomar las medidas sobre la sombra muy rápidamente; el Sol se mueve más aprisa de lo que parece y las variaciones en las sombras nos podrían engañar.

No es necesario disponer de material (¡el listón!) para hacer la práctica. Basta observar la sombra de cualquier objeto que nos permita tomar las medidas necesarias entre algunos de sus puntos y los correspondientes en su sombra. Por ejemplo, los barrotes de una barandilla, la cuadrícula de un enrejillado, ... Es importante que las longitudes sean del orden de los decímetros, pues, para distancias menores, los errores influyen demasiado en los resultados.

6. Obtención del número π. Primeros cálculos.

6.1 Mide la longitud recorrida, en una vuelta, por un punto señalado en el borde de un plato circular, de diámetro d. La longitud recorrida L es la longitud de la circunferencia del plato. Calcula la razón L:d. Repite la experiencia con otros objetos circulares, la rueda de tu bicicleta, un disco, la tapa del tambor de jabón de la lavadora ...

Reduce las razones obtenidas de forma que el segundo término sea la unidad, ¿ qué observas ? Compara con los resultados de tus compañeros. (Trabaja con el máximo de precisión posible, y, aún así deberás considerar los errores de medida. Efectúa las divisiones con tres decimales, como mínimo).



6.2 En el Papirus de Rhind, el documento matemático más antiguo que se conserva (1800 a. C.), aparece una aproximación del número. En él, al tratar de calcular el área de un círculo de diámetro d dice que es equivalente a la de un cuadrado de lado 8/9 d. ¿ Qué valor se obtuvo ?

6.3 Según Arquímedes (212 a. C.): "La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro más una cierta parte del diámetro que es menor que 1/7 del diámetro y mayor que 10/71 del mismo diámetro". ¿ Entre qué valores situó Arquímedes al número π ?

7. Construcción de una meridiana. Observación de las sombras

7.1. CONSTRUCCION Y OBSERVACIONES

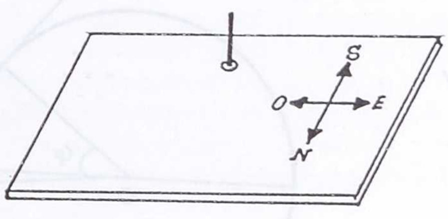
La meridiana consiste, simplemente, en un rectángulo de madera plana de 40 x 60 cm., aproximadamente, pintado de blanco y con una aguja vertical, de 10 a 15 cm. de longitud, clavada perpendicularmente cerca del centro de uno de los lados largos.

Además de la meridiana, necesitaremos un nivel, una brújula, un compás o un cordel y un reloj con la hora oficial exacta.

Para colocarla, hemos de vigilar, con el nivel, que el plano de la madera está perfectamente horizontal y orientarla de forma que el lado corto siga la dirección Norte - Sur, para lo que necesitaremos la brújula.

Con la meridiana podremos:

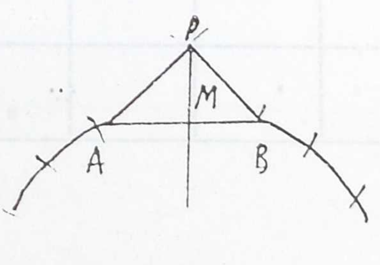
- Determinar el meridiano local.
- Calcular el mediodía solar.
- Calcular la longitud local.
- Calcular la latitud local.
- Observar la variación de la altura máxima diaria del Sol a lo largo del año.



7.2. DETERMINACION DEL MERIDIANO LOCAL

Una vez bien colocada la meridiana, marca con puntos, durante el tiempo que transcurre desde la salida hasta la puesta del Sol, la sombra del extremo de la aguja en la madera, cada media hora. Anota, al lado de cada punto, la hora exacta que le corresponde. Entre las 12 h. y las 14 h., haz la marca cada 10 minutos.

Si unes estos puntos obtendrás la rama de una hipérbola. Para hallar el meridiano local has de encontrar el punto M de la curva que corresponda a la sombra más corta de la aguja. El meridiano es la recta que pasa por M y por el pie de la aguja P. Para obtener M, señala con el compás dos puntos que equidisten de P y dibuja su mediatriz. El punto M es la intersección de la mediatriz con la curva. El meridiano es esa mediatriz. Dibuja, en el suelo, el meridiano.



7.3. CALCULO DEL MEDIODIA SOLAR

Una vez hallado el punto M, calculamos a qué hora la sombra del extremo de la aguja le corresponde. Esa hora es nuestro mediodía solar local, expresado en hora oficial.

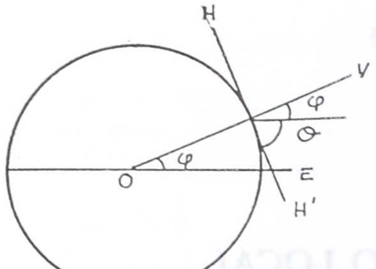
7.4. CALCULO DE LA LONGITUD LOCAL

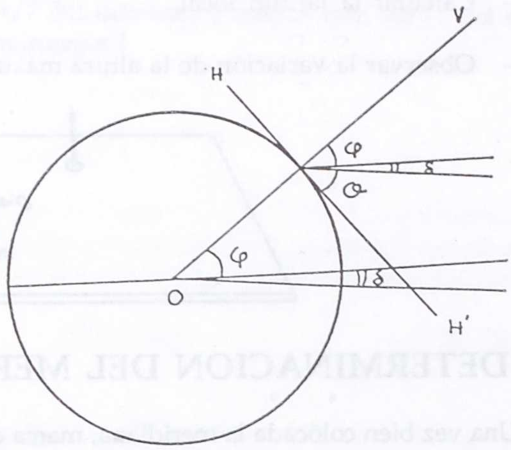
Calcula la diferencia de tiempo entre el momento de nuestro mediodía solar y las 13 h. (hora oficial del mediodía solar en Greenwich, que es el lugar por el que pasa el meridiano 0^{o}. Si el Sol recorre en 24 horas un ángulo de 360^{o} ¿ qué ángulo recorrerá en este tiempo calculado ? Este ángulo es nuestra longitud. Has de tener en cuenta la corrección de la ecuación del tiempo.

7.5. CALCULO DE LA LATITUD LOCAL

Los días de los equinoccios, los rayos del Sol son paralelos al plano del Ecuador. Si uno de estos días determinados el ángulo de la altura máxima del Sol sobre el horizonte, θ, utilizando la meridiana, el ángulo φ, que verifica, $\varphi + \theta = 90^{o}$; es, precisamente, la latitud buscada (la latitud es el ángulo complementario de θ).

Si no podemos esperar al día del equinoccio podemos determinar la latitud teniendo en cuenta el ángulo δ que forman los rayos del Sol, este día, con el plano del ecuador. El ángulo δ es la declinación del Sol y tiene un valor determinado para cada día del año. En este caso la latitud es el ángulo φ tal que: $\varphi + \delta + \theta = 90^{o}$





7.6. VARIACION DE LA ALTURA MAXIMA DEL SOL

Llena la tabla siguiente, midiendo, una vez a la semana, la sombra de la aguja a la hora del mediodía solar. Al acercarse los días de los solsticios y de los equinoccios, mide esta longitud a diario. Con estos datos, haz el gráfico de la relación: día del año ⟶ longitud de la sombra.

día del año							
longitud de la sombra							

IV. PRACTICAS DE TOPOGRAFIA

1. Introducción

La necesidad de medir es patente en todos los periodos de la historia de la humanidad. Desde los egipcios, que quisieron calcular la superficie inundada periódicamente por el Nilo, así como la altura de sus pirámides, hasta nuestros días cuando se quiere conocer la profundidad de una fosa marina o la distancia a la que estará de la Tierra el cometa Halley, en un momento dado.

La evolución de los métodos de medida es un tema de gran interés y del que se puede extraer experiencias de gran valor educativo.

El matemático Clairaut en el prólogo de sus "Elementos de geometría", después de comentar que la dificultad que los principiantes encuentran en el estudio de la Geometría es debida al método con el que se les enseña, les decir, con un gran número de definiciones, postulados y principios preliminares, que nada sugieren al estudiante demasiado joven para poder relacionar las ideas abstractas, escribe: "he pensado que esta ciencia (la Geometría), como todas las demás, ha debido de formarse gradualmente, que fue seguramente, alguna necesidad práctica lo que dio lugar a sus primeros pasos y que estos primeros pasos fueron hechos, en realidad, por principiantes. Alertado por esta idea, he intentado pensar qué fue lo que pudo haber hecho nacer la Geometría ... Me pareció que la medida del terreno debía de ser la causa del nacimiento de las primeras proposiciones de la Geometría, y es, de hecho, el origen de esta ciencia, pues Geometría significa, ni más ni menos que, "medida del terreno". Intentando seguir, en este libro, una vía similar a la de aquellos inventores, me propongo que el lector descubra de qué puede depender la simple medida del terreno y la medida de distancias accesibles o inaccesibles".

Después de este comentario, Clairaut habla de la equivalencia y, más adelante, de la igualdad y de la semejanza de figuras.

Basándonos en estas ideas hemos pensado en unas prácticas a realizar por los alumnos:

1º) búsqueda de una unidad de medida y sus divisiones,

2º) dibujo, a escala, de un campo de balonmano y

3º) cálculo de la altura de un poste de voleibol y posteriormente de la altura de un edificio cuyo pie es accesible, según el esquema siguiente:

IV. PRACTICAS DE TOPOGRAFIA

1. Introducción

La necesidad de medir es patente en todos los períodos de la historia de la humanidad. Desde los egipcios, que quisieron calcular la superficie inundada periódicamente por el Nilo, así como la altura de sus pirámides, hasta nuestros días, cuando se quiere conocer la profundidad de una fosa marina, o la distancia a la que estará de la Tierra el cometa Halley, en un momento dado.

La evolución de los métodos de medida es un tema de gran interés y del que se puede extraer experiencias de gran valor educativo.

El matemático Clairaut, en el prólogo de sus "Eléments de géometrie", después de comentar que la dificultad que los principiantes encuentran en el estudio de la Geometría es debida al método con el que se les enseña, (es decir, con un gran número de definiciones, postulados y principios preliminares que nada dicen al estudiante demasiado joven para poder relacionar las ideas críticas), escribe: "He pensado que esta ciencia (la Geometría), como todas las demás, ha debido de formarse gradualmente; que fue, seguramente, alguna necesidad práctica lo que dio lugar a sus primeros pasos y que estos primeros pasos fueron hechos, en realidad, por principiantes. Alertado por esta idea, he intentado pensar qué fue lo que pudo haber hecho nacer la Geometría ... Me pareció que la medida del terreno debió de ser la causa del nacimiento de las primeras proposiciones de Geometría, y es, de hecho, el origen de esta ciencia, pues Geometría significa, ni más ni menos que, "medida del terreno" ... Intentando seguir, en este libro, una vía similar a la de aquellos inventores, me propongo que el lector descubra de qué puede depender la simple medida del terreno y la medida de distancias accesibles y no accesibles".

Después de este comentario, Clairaut habla de la equivalencia y, más adelante, de la igualdad y de la semejanza de figuras.

Basándonos en estas ideas hemos pensado en unas prácticas a realizar por los alumnos:

1ª) búsqueda de una unidad de medida y sus divisiones,

2ª) dibujo, a escala, de un campo de balonmano y

3º) cálculo de la altura de un poste de voleibol y posteriormente de la altura de un edificio cuyo pie es accesible, según el esquema siguiente:

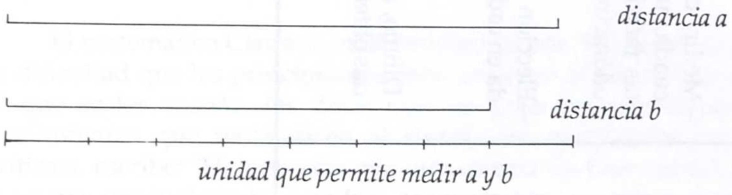
SITUACIONES	TEMAS DE TRABAJO	HABILIDADES Y OTROS TEMAS	OBSERVACIONES
– Cálculo de la longitud de un pupitre, utilizando una varita cualquiera.	– Unidad de medida de la longitud. – Fracciones. – Teorema de Tales.	– División de un segmento en partes iguales. – Operaciones con fracciones.	– Construcción de una meridiana. – Construcción de un taquímetro rudimentario.
– Dibujo a escala de un campo de balonmano.		– Medir, con la precisión adecuada, utilizando: regla, cintas métricas de 1 m. y 15 m., odómetro, taquímetro. – Elección de la escala adecuada en cada caso.	– Predicción de longitudes y alturas a medir. – Resolución gráfica y numérica de un problema y comparación de ambos resultados.
– Cálculo de la altura de un poste y de un edificio de pie accesible.	– Teorema de Tales. – Figuras semejantes. – Escalas.	– Dibujo, a escala, con las medidas obtenidas.	

2. El problema de la unidad de medida

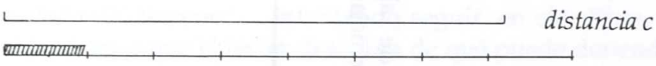
Antes de realizar esta práctica, proponemos comentar con los alumnos el siguiente texto:

Desde la más remota antigüedad, los hombres usaron los números para contar. Para saber si faltaban ovejas de un rebaño, hacía falta saber cuántas había el día anterior. En un principio, seguramente, a los hombres, que no conocían los números, se les ocurrió coger una piedra por cada oveja y guardar todas las piedras en una caja. Al día siguiente podrían volver a contar y ver si aún había tantas ovejas como piedras. Pero ésto era muy poco práctico. Así, más adelante, aprendieron a dar un nombre que se podía aplicar a todos los conjuntos que tenían el mismo "número" de elementos. Inventaron los números, uno, dos, tres ... (la notación actual decimal posicional es de adquisición mucho más tardía. Los hombres conocían los números naturales antes de aprender a escribir y, por lo tanto, antes de que empezara la Historia, mientras que la notación actual trajeron a Europa los árabes a través de España durante la Reconquista). Esto representó un gran paso para la humanidad.

Pero estos números no servían para comparar toda clase de cosas. Para medir distancias hacía falta unos instrumentos más precisos que los números naturales. Dadas dos distancias, la mayor no tiene por qué ser igual a un múltiplo exacto de la menor. Hace falta buscar una unidad menor que permita medir ambas distancias.



Pero si con esta unidad queremos medir una nueva distancia c nos podemos encontrar que no es posible:



Los hombres aprendieron a superar esta dificultad inventando las fracciones, que ya eran conocidas y dominadas por los egipcios (3000 a. C.). (De todas maneras, su notación era ambigua, porque no conocían el cero ni la notación decimal).

(GRUP ZERO. "LA MESURA I ELS NOMBRES". Vicens Vives, 1981)

A continuación se comienza el trabajo práctico.Cada alumno ha de traer una varita de longitud cualquiera, sin medida alguna. Tomando su varita intentará medir la longitud del pupitre. Generalmente, esta longitud L no será un número exacto de varitas y obtendrá:

n varitas < L < n + 1 varitas o, lo que es lo mismo, L = n varitas + x.

Ahora bien, como es necesario dar la medida del pupitre con más exactitud, habrá de dividir la varita (situando su longitud en una cartulina y utilizando el Teorema de Tales) en 2, 3, 4, 5 y 10 partes iguales y ver entre qué fracciones está situado el extremo del trozo x. En el caso de que coincida con alguna división de la varita, ya se ha encontrado su longitud, pero si, con 10 divisiones, aún no se ha conseguido la medida exacta, se ha de comentar en clase que, haciendo más divisiones, se puede aproximar la longitud del pupitre tanto como se quiera. (Hay alumnos que piensan que, haciendo más divisiones, se podría hallar la longitud exacta del pupitre; otros no están tan seguros y, de ellos, algunos piensan que no siempre es posible). Es un buen momento para tratar, con apoyo en la intuición, la no completitud de los números racionales.

Durante esta práctica se va repasando el concepto de fracción, equivalencia de fracciones, operaciones con fracciones, ordenación de fracciones, etc.

Una vez conocida, aproximadamente, la longitud del pupitre, se da la circunstancia de que cada alumno ha obtenido un resultado distinto, debido a que las varitas tomadas como unidades de medida por los alumnos son de distintas longitudes. De ahí la necesidad de escoger una longitud dada como unidad universal de medida de longitud (el metro) y, debido a que trabajamos en sistema decimal, hacer 10, 100, 1000 ... divisiones iguales en el metro, para tomar la aproximación necesaria en cada caso. En nuestro caso, hay que comentar con qué aproximación se ha de dar la longitud del pupitre.

También se puede comentar la existencia de las distintas unidades antropomórficas de medida (pie, palmo, pulgada ...) que se han utilizado a lo largo de la Historia y de la necesidad de introducir nuevas unidades, más adecuadas a las longitudes que se quieren medir (por ejemplo, el año luz, para las distancias astronómicas, o el ángstrom, para distancias interatómicas, a pesar de que, en la actualidad, la IUPAC recomienda utilizar, en todos los casos, el sistema internacional, es decir, múltiplos y submúltiplos del metro.

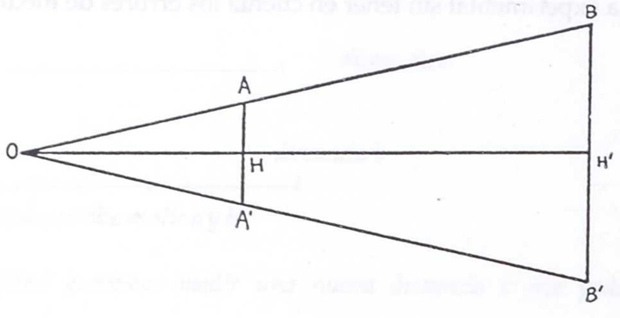
Esta práctica podría hacerse en el ciclo superior de E.G.B., pero la experiencia nos ha mostrado que, en general, nuestros alumnos de 1º de B.U.P. no dominan el concepto de unidad de medida y la necesidad de dividirla en partes iguales en situaciones reales y, además, creen en la exactitud de una medida experimental sin tener en cuenta los errores de medida y de redondeo.

NOTA: La división de la varita en partes iguales utilizando el Teorema de Tales puede ser un trabajo conjunto con el profesor de dibujo.

3. Dibujo del plano de un campo de balonmano

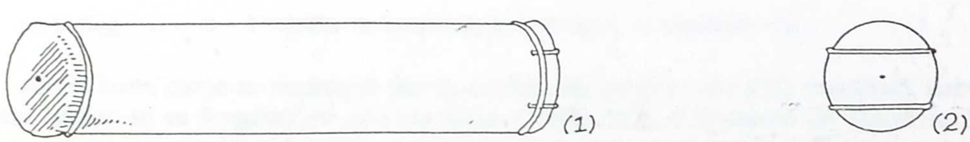
Se trata de que los alumnos tomen las medidas necesarias para dibujar, a escala, un campo de balonmano. Para medir todas las longitudes, utilizarán distintos aparatos de medida: cuerda de nudos, cinta métrica de 1 metro, de 15 a 20 metros, odómetro y taquímetro; es necesario que los alumnos se den cuenta de que, con la cuerda de nudos (cada nudo está a 1 metro del siguiente) no se puede aproximar más que hasta los metros (y, en cambio, con las cintas métricas o con el odómetro, podemos obtener una mejor aproximación. También es necesario que los alumnos reflexionen para deducir en qué circunstancias es más útil y cómodo medir con la cinta métrica y en cuáles lo es más con el odómetro.

Para construir un taquímetro rudimentario, previamente hay que repasar el Teorema de Tales en el caso particular de la relación de las bases AA', BB' ... con respecto a las alturas OH, OH'... en los triángulos OAA', OBB' ... de la figura adjunta. Creeemos que es conveniente que los alumnos dibujen distintos grupos de triángulos, como los de la figura, con distinta abertura en O, midan las longitudes AA', BB', OH y OH', hagan las divisiones correspondientes y comprueben que los cocientes son sensiblemente iguales en cada caso. (Los dibujos han de estar hechos en lápiz de punta muy fina y hay que tomar las medidas con mucha precisión).



Construcción del taquímetro

Se toma un cilindro, hueco, de cartón, abierto por los extremos, se tapa una base con papel translúcido y, en el centro del círculo formado, hacemos un agujero, utilizando una aguja muy fina (1). En el otro extremo, colocamos dos hilos paralelos y los pegamos al cartón con cinta adhesiva (2).



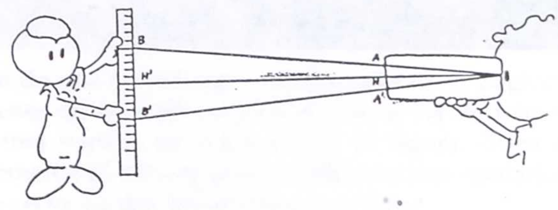
El taquímetro sirve para medir distancias horizontales entre dos puntos accesibles (en nuestro caso, O y H'), visibles cada uno de ellos desde el otro.

Utilización del taquímetro

Una persona se ha de situar en el punto O y mirar por el tubo, a través del agujero de la tapa, hacia el punto H', para ver dónde quedan proyectados los hilos.

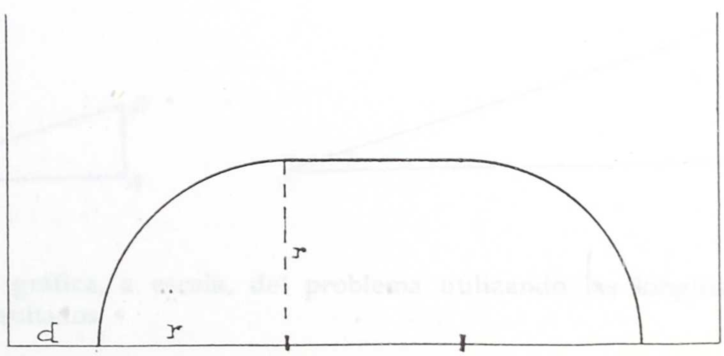
Otra persona se ha de situar en el punto H' con una vara larga (mejor, si está centimetrada) y una tercera persona, colocando los dedos sobre las proyecciones de los hilos en la vara, según lo que indique quien maneja el taquímetro, ha de medir la distancia entre las dos proyecciones. Midiendo la longitud del taquímetro, la distancia entre los dos hilos y la distancia entre sus proyecciones se puede aplicar el Teorema de Tales y obtener:

$$\frac{AA'}{OH} = \frac{BB'}{OH'}$$ siendo OH' la distancia buscada.



En el caso de que la razón del taquímetro construido sea $\frac{AA'}{OH} = 10$ pueden hacerse los cálculos mentalmente. (En los taquímetros que usan los topógrafos, esta razón es 1:100 y, por lo tanto, la distancia, en cm., de las proyecciones de los hilos es igual, en metros, a la distancia, sobre el terreno, buscada y no hay que hacer ningún cálculo.

Por lo que respecta a la línea que delimita el área de castigo del campo de balonmano, está formada por un cuarto de circunferencia, un segmento y otro cuarto de circunferencia, tal como indica la figura:



Midiendo, con el odómetro, este arco, se puede calcular el radio de la circunferencia y calcular dónde hay que situar, sobre el papel, el compás para dibujarla.

Antes de trazar el plano, en un papel milimetrado, el alumno ha de calcular la escala más conveniente para que el dibujo quede lo mayor posible.

4. Cálculo de alturas de pie accesible

Con esta práctica intentamos que los alumnos aprendan un método para calcular alturas de edificios de pie accesible, midiendo su sombra y utilizando el Teorema de Tales.

En una primera situación es conveniente calcular la altura de una barra larga colocada en vertical, o de cualquier edificio cuya altura se pueda medir con una cinta métrica para, después comparar los resultados y ver que el método de la sombra es correcto.

Para realizar esta práctica, pueden seguirse los siguientes pasos:

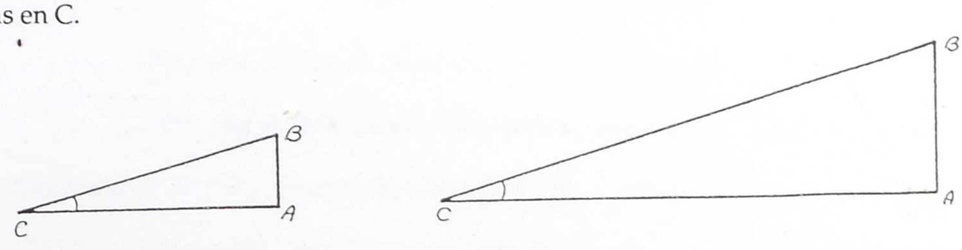
a) Lectura y comentario de la introducción al tema "Similitudine" del Libro de Emma Castelnuovo "La Matemática/La Geometría", (páginas 104, 105 y 106), editorial la Nuova Italia.

b) Estimación a simple vista, por cada alumno, de la altura a calcular, relacionándola con alguna altura conocida (por ejemplo, la suya).

c) Construcción de una Meridiana (ver apartado III. 7, página), que consiste en un tablero rectangular (es suficiente de 40 x 60 cm.) en el que se ha de fijar una cartulina blanca y clavar, perpendicularmente, una varilla, tal como indica la figura. (Para comprobar que la varilla está clavada perpendicularmente al tablero puede utilizarse una escuadra y verificar que la varilla y la madera formen ángulo recto, en dos direcciones distintas).

d) Medición de la longitud de la varilla, de su sombra y de la sombra de la barra vertical, en un mismo momento, ya que, si se tarda demasiado, la variación de la dirección del Sol hace que no podamos aplicar el Teorema de Tales con la suficiente exactitud.También se ha de tener en cuenta que las dos sombras han de quedar en un mismo plano.

e) Utilización del Teorema de Tales para calcular la altura de la barra vertical. (En el caso de que no se haya trabajado suficientemente sobre el Teorema de Tales, es conveniente que los alumnos dibujen triángulos, como los de la figura, y comprueben que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ para distintas aberturas en C.



f) Resolución gráfica, a escala, del problema utilizando las longitudes medidas, y comparación de los resultados.

g) Medición, con una cinta métrica, de la altura de la barra larga vertical y verificación de que la longitud medida es sensiblemente igual a la calculada gráfica y numéricamente.

h) Comparación de la estimación previa de cada alumno con el resultado hallado.

Observaciones.

- Esta práctica ha de repetirse a distintas horas del día para que los alumnos se den cuenta de que el método no depende del momento de la medición.

- Todo este trabajo podría hacerse igualmente intentando que los dos triángulos quedaran en posición de Tales aunque tiene la dificultad de conseguir que los extremos de las sombras coincidan.

- En una posterior puesta en común del trabajo realizado, conviene resaltar que este método tiene algunos inconvenientes:

a) que el Sol no luzca lo suficiente para ver la sombra claramente.

b) que hay horas en las cuales no se puede realizar la experiencia.

c) que hay edificios cuya sombra es imposible de medir.

- Este trabajo puede ser el prólogo de otro posterior, donde se introduzcan las razones trigonométricas, como base para resolver triángulos rectángulos (en particular, alturas de edificios de pie accesible, anchuras de ríos ...) utilizando goniómetros horizontales y verticales de fácil construcción por los alumnos y donde quedan solventados los inconvenientes, señalados anteriormente, respecto a la utilización de las sombras de algunos edificios.

- Con el fin de poder resolver todas las dificultades de los alumnos, es conveniente, en las prácticas 2 y 3, tener sólo la mitad de la clase, en grupos de cuatro alumnos y de forma que cada grupo tenga los instrumentos y materiales necesarios para realizar la práctica.

- Después de cada una de estas prácticas, el alumno debería realizar un trabajo (siguiendo un guión, dado por el profesor), en el que explique qué es lo que ha realizado en cada una de ellas, qué dificultades ha encontrado y cómo las ha resuelto, qué aparatos ha tenido que construir, así como la utilidad de los mismos, qué medidas ha tomado y la resolución gráfica y numérica de todos los problemas, utilizando las medidas tomadas por él.

BIBLIOGRAFIA

AZCARATE y otros. "Estrategia. Matemáticas 8º E.G.B. ". Barcelona. Onda 1981.

CAPSADA - ESTADEN "Ciutat i Matemàtica". Saber del. Col. Ullemc. Catalunya. 1981.

CASTELNUOVO, E. "La Geometría". Barcelona. Ketres. 1981.

" " "Matematica nella realta", Torino, Boringhieri. 1976.

DAN PEDOE "La Geometría en el Arte". Barcelona. Gustavo Gili. 1979.

FREUDENTHAL, H. "Las matemáticas en la vida cotidiana". Madrid. Guadarrama. 1967.

" " "En todos los niveles, Geometría". Zaragoza. Actas III, J.A.E.M. 1983.

CHYKA, M. "Estética de las proporciones en la naturaleza". Barcelona. Poseidón. 1983.

" " "El número de oro". Vol. 1 y 2. Barcelona. Poseidón. 1984.

GRUP ZERO "La mesura y els nombres". Barcelona. Vicens Vives. 1981.

" " "Retrobem el món de la Geometria". Barcelona. ICE de la Univ. Autònoma de Barcelona. 1988.

" " "Astronomia". Barcelona. ICE de la Univ. Politécnica de Catalunya. 1983.

" " "Dossier de la exposición Breu viatge pel món de les Matemàtiques".

GRUPO BETA "Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida." Badajoz. ICE de la Univ. de Extremadura. 1985.

GRUPPO DI GÉNOVA "Uomo e produzione". Vol. 3 del "Progettoper la Scuola Media, III". Génova. Instituto Matemático de la Universidad de Génova.1980.

INSTITUT JOANOT MARTORELL "Estudis ambientals d'Esplugues". Barcelona. ICE de la Univ. Autònoma de Barcelona. 1981.

JACOBS, H.R. "Geometry Freeman and Co". San Francisco. 1974.

LOMBARDO RADICE, L. "Il metodo matematico". Milán. Principato. 1977.

MOTTERSHEAD, L. "Sources of Mathematical discovery". Oxford. B. Blackwell. 1978.

N. C. T. M. "Simetría, congruencia y semejanza". México. Trillas. 1970.

POLYA, G. "Mathematics methods in Science". Washington. The Mathematical Association of America. 1957.

BIBLIOGRAFIA I

AZCARATE y otros. "Estrategia. Matemáticas 8º E.G.B. ". Barcelona. Onda 1981.

CAPSADA - ESTAUN "Ciutat i Matemàtica". Sabadell. Col. Llicenc. Catalunya. 1981.

CASTELNUOVO, E. "La Geometria". Barcelona. Ketres. 1981.

" " "Matematica nella realta". Torino. Boringhieri. 1976.

DAN PEDOE "La Geometría en el Arte". Barcelona. Gustavo Gili. 1979.

FREUDENTHAL, H. "Las matemáticas en la vida cotidiana". Madrid. Guadarrama. 1967.

" " "En todos los niveles, Geometria". Zaragoza. Actas III, J.A.E.M. 1983.

GHYKA, M. "Estética de las proporciones en la naturaleza". Barcelona. Poseidón. 1983.

" " "El número de oro". Vol. 1 y 2. Barcelona. Poseidón. 1984.

GRUP ZERO "La mesura y els nombres". Barcelona. Vicens Vives. 1981.

" " "Retrobem el món de la Geometria". Barcelona. ICE de la Univ. Autónoma de Barcelona. 1983.

" " "Astronomia". Barcelona. ICE de la Univ. Politécnica de Catalunya. 1983.

" " "Dossier de la exposición Breu viatge pel món de las Matemàtiques".

GRUPO BETA "Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida." Badajoz. ICE de la Univ. de Extremadura. 1985.

GRUPPO DI GENOVA "Uomo e produzione". Vol. 3 del "Progettoper la Scuola Media, III". Génova. Instituto Matemático de la Universidad de Génova.1980.

INSTITUT JOANOT MARTORELL "Estudis ambientals d'Esplugues". Barcelona. ICE de la Univ. Autónoma de Barcelona. 1981.

JACOBS, H.R. "Geometry Freeman and Co". San Francisco. 1974.

LOMBARDO RADICE, L. "Il metodo matematico". Milán. Principato. 1977.

MOTTERSHEAD, L. "Sources of Mathematical discovery". Oxford. B. Blackwell. 1978.

N. C. T. M. "Simetría, congruencia y semejanza". México. Trillas. 1970.

POLYA, G. "Mathematics methods in Science". Washington. The Mathematical Association of America. 1977.

PUIG ADAM, P. "Curso de Geometría Métrica. Vol. 1". 15ª ed. Madrid. Gómez Puig, Ed. 1980.

" " "Elementos de Geometría". Madrid. 1959.

" " "Libros de texto de bachillerato, 3º y 4º". Madrid. 1942.

QUINTANA, J. "Una experiència de Geometria: els quadrilàters i les ombres del Sol". Perspectiva Escolar nº 67. Barcelona. 1982.

BIBLIOGRAFIA II

AMPLIACION, PARA EL TRABAJO CON MAPAS:

DOMINGUEZ, A.	**"Qüestions d'orientació. Treballs amb mapes".** Barcelona. ICE de la Univ. de Barcelona. Julio, 1979.
PANAREDA, L. J. M.	**"Cómo interpretar el mapa topográfico".** Técnicas Didácticas Anaya (2).
SCIENTIFIC AMERICAN	**"La Ciudad".** Alianza editorial, LB, 48.
ROCH, F. -GUERRA, F.	**"¿Especulación del suelo?".** Nuestra Cultura. Hacer la ciudad.
STRAHLER, A.	**"Geografía física".** Omega. 1975.
VALDES, F.	**"Prácticas de topografía, cartografía y fotogrametría".** CEAC. 1981.
ZARATE, A.	**"El Mosaico Urbano".** Cincel. Otros cuadernos de estudio. Serie Geografía.

AMPLIACION PARA EL TRABAJO DE ASTRONOMIA:

ASIMOV, I.	**"El Universo".** Madrid. Alianza. LB 458.1973.
GAMOV, G.	**"Una estrella llamada Sol".** Espasa Calpe.1942.
HOGBEN, L.	**"La Matemática en la vida del hombre".** Barcelona. Iberia-Joaquín Gil Ed.
KUHN, T.S.	**"La Revolución Copernicana".** Barcelona. Ariel. 1978.
NICOLAU, F.	**"Viatge per la història de l'Astronomia".** Barcelona. La Galera. 1977.
RONAN, C.A.	**"Los Amantes de la Astronomía".** Blume. 1982.
HOYLE, F.	**"Astronomía".** Barcelona. Destino. 1967.
PACINI, F.	**"Il Univers". "Enciclopedia Ulisses VIII".** Barcelon. Edic. Ulisses. 1982.