

AULAS
DE
VERANO

Instituto
Superior de
Formación del
Profesorado

APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS



APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS



MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN
Instituto Superior de Formación del Profesorado

Edita:

© SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA
Subdirección General de Información y Publicaciones

N.I.P.O.: 651-07-078-4
I.S.B.N.: 978-84-369-4427-3
Depósito Legal: M-26290 - 2007

Imprime: SOLANA E HIJOS, A.G., S. A.

<http://publicaciones.administracion.es>

Colección: AULAS DE VERANO

Serie: Principios

APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS

El libro, dirigido a profesores de Educación Infantil y Primaria, se escribe desde la actualización científica y la fundamentación de metodología didáctica para la enseñanza de la Matemática, dirigiendo su lectura hacia el diseño y desarrollo de procedimientos significativos para el proceso de enseñanza-aprendizaje y la presentación de materiales, técnicas y recursos que puedan mejorar el desarrollo del pensamiento lógico y matemático de los alumnos de 3 a 12 años de edad, a través del carácter instrumental, formativo y de interpretación y aplicación de esta ciencia.

Los modelos europeos para el aprendizaje de la Matemática dan por válida aquella metodología que aporte **COMPRENSIÓN**. Aplicar correctamente los conceptos adquiridos al entorno inmediato en el que el alumno se desenvuelve, y construir otros nuevos que aporten al conocimiento amplitud intelectual. Desarrollar en el que aprende la observación, la imaginación, la intuición, el razonamiento lógico y la emoción. Este libro presenta, desde la teoría y la práctica educativa, una exposición de modelos que basan la educación matemática en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias, más que en la instrucción.

Dirección editorial del volumen *Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos*: JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO.

Coordinación: CAMARENA CABEZA, M. Dolores

Autores:

AIZPÚN LÓPEZ, Alberto
ATRIO CEREZO, Santiago
CANALS TOLOSA, M. Antonia
FERNÁNDEZ BRAVO, José Antonio
MARÍN RODRÍGUEZ, Margarita
PERALTA CORONADO, F. Javier
RAMÍREZ SILVA, Luis Fernando

ÍNDICE

<i>Metodología didáctica para la enseñanza de la matemática: variables facilitadoras del aprendizaje</i>	9
José Antonio Fernández Bravo	
<i>Un viaje por el fascinante mundo de los números</i>	27
Javier Peralta Coronado	
<i>La construcción progresiva del saber numérico desde infantil a primaria</i>	51
M. Antonia Canals Tolosa	
<i>El sentido de la matemática en la educación primaria</i>	59
Alberto Aizpún López	
<i>Apúntate un tanto y tantea el punto. Resolución de problemas matemáticos</i>	85
José Antonio Fernández Bravo	
<i>Competencias matemáticas del niño en la escuela infantil de 3 a 6 años</i>	103
Margarita V. E. Marín Rodríguez	
<i>La insumisión del algoritmo en el aula de educación primaria</i>	123
Santiago Atrio Cerezo	
<i>El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos</i> ..	141
Margarita V. E. Marín Rodríguez	
<i>Cuando dos más dos dan cinco: un abordaje emocional de las matemáticas</i>	155
Luis Fernando Ramírez Silva	
<i>Historias de la historia. ¿Tan sólo un recurso para la docencia de las matemáticas?</i>	165
Santiago Atrio Cerezo	
Ediciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado	181

METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: VARIABLES FACILITADORAS DEL APRENDIZAJE

José Antonio Fernández Bravo
Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco».
Madrid

INTRODUCCIÓN

1. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ACTUAL

- A) Las operaciones
- B) Pensamiento y matemáticas
- C) Cálculo y matemática
- D) Recuerdos de la enseñanza de la matemática

2. VARIABLES FACILITADORAS DEL APRENDIZAJE

- 2.1. Concepto frente a símbolo**
- 2.2. Desarrollo del pensamiento matemático**

3. PRINCIPIOS METODOLÓGICOS E INTERVENCIÓN EDUCATIVA

- A) Contenido frente a conocimiento
- B) ¿Enunciar-memorizar-comprender?
- C) Metalenguaje y lenguaje objeto
- D) La enseñanza de la matemática
- 3.1. Existencia y asistencia del pensamiento**
- 3.2. Etapas del acto didáctico**
- 3.3. Ideas sobre metodología didáctica para la enseñanza de la
matemática**

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Aún a pesar de estar totalmente admitido que la Matemática es una actividad mental, seguimos imponiendo, sin carácter científico y bajo la perezhosa sospecha de la apatía, ese dogma prescriptivo: «así se hace», «así se coloca», «así se resuelve», «así se calcula»,...; protocolo aburrido y penumbra intelectual de un extraño secreto, justificado por la orgullosa acción de terminar un programa sin calidad, que, por los resultados obtenidos de las evaluaciones externas, ni siquiera imprime cuantificación académica. Seguimos vistiendo a la Matemática, desde la enseñanza, con ese falso atavío de ojos tristes, símbolos mezquinos y largas faldas negras, y en su aprendizaje se la reconoce, entonces, lejos de esa razonada elegancia discreta que la caracteriza y que, quizás, no sepamos transmitir.

«Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. Los aderezos técnicos de esta materia, su simbolismo y expresiones formales, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos: todo ello tiende a ocultar su auténtico carácter (...) Esta ciencia no trata de símbolos y cálculos. (...) El objetivo de las matemáticas son los conceptos. Se trata sobre todo de ver el modo en que los diferentes conceptos se relacionan unos con otros. El objetivo de las matemáticas es comprender (...) No se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien en comprender por qué existe una respuesta, (...) Pero lo que sobre todo tienen es significado.»¹

1. ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ACTUAL

A) Las operaciones

Nos podríamos preguntar si actualmente tiene sentido hacer sumas, restas, multiplicaciones o divisiones, sin comprender lo que se está haciendo o para qué se hace²; pues una cosa es, por ejemplo, hacer multiplicaciones y,

¹ STEWART, Ian. *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy*. Crítica. Barcelona, 2004, págs. 13 y 14.

² Whitehead (1965), en un ensayo *Mathematics and liberal Education*, publicado por primera vez en 1912, decía que «Las matemáticas (se refiere a la enseñanza de la matemática)... deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio... La sola idea de aprender tiene un sentido muy extendido de aburrimiento. Yo lo atribuyo a que a los estudiantes se les enseñan muchas cosas simplemente en el aire, cosas que no tienen ninguna coherencia con los pensamientos que surgen naturalmente en cualquier persona que viva en este mundo moderno, independiente de que sea o no un intelectual».

otra, muy distinta, saber multiplicar. Así ocurre que muchos docentes se expresan diciendo: «*no lo entiendo, mira que multiplican bien pero les cuesta mucho ver los problemas*». Con experiencia apoyada en datos científicos podemos decir que si sus alumnos supieran qué es multiplicar, no tendrían dificultad alguna en identificar situaciones multiplicativas en la vida real; la dificultad educativa reside, en este caso, en que se confunde saber multiplicar con hacer multiplicaciones. Y, quizás de estas confusiones se obtenga como resultado, algo «*Didácticamente equivocado, conceptualmente hipertrófico, científicamente inútil e históricamente absurdo*», utilizando palabras de Pascal, como las refiere Rey Pastor³ en su libro *Elementos de Análisis Algebraico*. Lo esencial requiere la organización de procedimientos abiertos a la oportunidad de adaptar, de renovar, reorganizar, cambiar, seleccionar, de realizar, de crear⁴.

B) Pensamiento y matemáticas

Dicen que las matemáticas enseñan a pensar. Sin embargo, muchos docentes advierten que eso no sucede en la clase de matemáticas; en ella aseguran: *no se piensa*. Esto puede deberse a dos razones fundamentales: una, que las matemáticas no enseñen a pensar y hayamos sido víctimas de un engaño universal; otra, que en clase de matemáticas se haga de todo, menos Matemáticas. Son muchos los profesionales de la educación los que también admiten que **se pierde mucho tiempo en rellenar ejercicios de libros vacíos de actividad rentable**, con el único fin de entregar a los padres carpetas llenas de fichas o cuadernos repletos de números, prueba del trabajo y de la constancia y del contenido elaborado, pero lejos, muy lejos –como se puede comprobar– de explicar conocimiento⁵ alguno.

³ REY PASTOR, J. *Elementos de Análisis Algebraico*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1981, pág. 8.

⁴ Enseñar a sumar, restar, multiplicar y dividir, como fin en sí mismo, se exigía hace unos años en las escuelas porque se necesitaba entonces para abrirse camino en la vida, –y aproximadamente hasta finales de la primera mitad del siglo pasado–. Esto no quiere decir que no haya que hacer uso en la escuela actual de esas operaciones, pues cometeríamos un grave error si hiciéramos una falsa interpretación de estas ideas. Lo que se intenta decir es que el uso de las operaciones se haga desde una evidente realidad matemática y, más que la finalidad sea el cálculo de operaciones,... el objetivo consista en utilizarlas como medio para desarrollar el pensamiento. Pero estas expresiones que aquí hemos utilizado: si son fáciles de entender, no son fáciles de aceptar.

⁵ Nos referimos al conocimiento matemático. La elección, si cabe, entre proceso y resultado o la exactitud del número frente al rigor del pensamiento. Muchas veces se mutila el proceso afianzando una forma más cómoda, según el profesor, para responder a los «contenidos». «*Así pues dime, y sin miedo, qué es lo que tú piensas que es el conocimiento*». (Platón. «Teeto». En *Obras completas*. Aguilar. Madrid, 1979).

C) Cálculo y matemática

Que el cálculo sea el instrumento de la matemática, nadie lo pone en duda; que la matemática sea en sí misma cálculo es totalmente discutible. En modo alguno se está diciendo que el cálculo no sea importante⁶; más bien, que el cálculo es ese utensilio que se elige cuando se sabe qué hacer y qué conseguir con él. Reconocer una situación matemática con claridad, en la que se necesite llegar a un resultado, y elegir convenientemente el procedimiento que me permita llegar a conclusiones lógicas, pertenece, a mi juicio, al hacer matemático. Luego, de ser así, a este hacer matemático no le describe sólo el procedimiento, sino también el reconocimiento, la elección y el razonamiento. Ideas comprendidas, en suma, frente a formas de operar vacías de actividad rentable.

D) Recuerdos de la enseñanza de la matemática

Actualmente existe un claro rechazo al aprendizaje de la matemática. Incluso, son muchos los profesores, sobre todo en Educación Infantil y Educación Primaria, que huyen, de alguna forma, de su enseñanza. Sus recuerdos hacia la matemática, como ellos dicen, no son agradables. Yo les pregunto: ¿por qué?, ¿te ha pegado alguna vez el número siete?, ¿te ha arañado alguna vez el signo menos?, ¿te has hecho daño al caerte de una raíz cúbica de ocho metros de altura?,... No, me dicen sonriendo. No, no, no. No es que tengan un mal recuerdo de la matemática, de lo que realmente tienen un mal recuerdo es de su enseñanza, de la tensión que generaba una persona, que con un carné de profesor ignoraba como actividades prioritarias la duda, la investigación, la comprobación del error, la necesidad de someter a contraste las ideas, las alternativas que probasen o refutasen, la participación como búsqueda de conocimiento, la necesidad de inventar una expresión convencional, la conducción del pensamiento erróneo mediante preguntas que a modo de retos canalizasen las conclusiones, la utilización de ejemplos y contraejemplos, la comprensión de las ideas generadoras de nuevas relaciones, el descubrimiento de distintos teoremas, la necesidad de identificarlos y ponerles un nombre, la utilización de materiales y recursos... Todo esto no se hace habitualmente, simplemente se cambia, con la dudosa explicación ante la sociedad de que no hay tiempo, por cómodas acciones que subrayan como único protagonista al profesor de la asignatura; «de esta forma», «de esta

⁶ Gagné distingue el conocimiento declarativo del procedimental: Conocimiento declarativo sería el conocimiento sobre **qué** es algo, mientras que el conocimiento procedimental versa sobre **cómo** hacer algo. GAGNÉ, E. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Aprendizaje-Visor. Madrid, 1991.

forma se representa..., de esta forma se calcula el límite de..., de esta forma se expresa el teorema..., de esta forma...

2. VARIABLES FACILITADORAS DEL APRENDIZAJE

El desarrollo de cuatro capacidades favorece *el pensamiento lógico-matemático*:

La observación. Se debe potenciar sin imponer la atención del niño a lo que el adulto quiere que mire. La observación se canalizará libremente y respetando la acción del sujeto, mediante juegos cuidadosamente dirigidos a la percepción de propiedades y a la relación entre ellas. Esta capacidad de observación se ve aumentada cuando se actúa con gusto y tranquilidad y se ve disminuida cuando existe tensión en el sujeto que realiza la actividad. Según Krivenko⁷, hay que tener presentes tres factores que intervienen de forma directa en el desarrollo de la atención: el factor tiempo, el factor cantidad y el factor diversidad.

La imaginación. Entendida como acción creativa, se potencia con actividades que permiten una pluralidad de alternativas en la acción del sujeto. Ayuda al aprendizaje matemático por la variabilidad de situaciones a las que se transfiere una misma interpretación.

La intuición. Las actividades dirigidas al desarrollo de la intuición no deben provocar técnicas adivinatorias; el decir por decir no desarrolla pensamiento alguno. La arbitrariedad no forma parte de la actuación lógica. El sujeto intuye cuando llega a la verdad sin necesidad de razonamiento. Ciertamente, esto, no significa que se acepte como verdad todo lo que se le ocurra al niño, sino conseguir que se le ocurra todo aquello que se acepta como verdad.

El razonamiento lógico. El razonamiento es la forma del pensamiento mediante la cual, partiendo de uno o varios juicios verdaderos, denominados premisas, llegamos a una conclusión conforme a ciertas reglas de inferencia. Para Bertrand Russell⁸ la lógica y la matemática están tan ligadas que afirma: «*la lógica es la juventud de la matemática y la matemática la madurez de la lógica*». La referencia al razonamiento lógico se hace desde la dimensión intelectual que es capaz de generar ideas en la estrategia de actuación, ante un determinado desafío. El desarrollo del pensamiento es resultado de la influencia que ejerce en el sujeto la actividad escolar y familiar.

⁷ KRIVENKO, M. *Psicología*. Planeta. Barcelona, 1990.

⁸ RUSSELL, B. *Introducción a la filosofía matemática*. Paidós. Madrid, 1985, pág. 171.

Con estos cuatro factores hay que relacionar cuatro elementos que, para Vergnaud⁹, ayudan en la conceptualización matemática:

- Relación material con los objetos.
- Relación con los conjuntos de objetos.
- Medición de los conjuntos en tanto al número de elementos.
- Representación del número a través de un nombre con el que se identifica.



2.1. Concepto frente a símbolo

El pensamiento matemático hay que entenderlo, al menos, desde tres categorías básicas:

- Capacidad para generar ideas cuya expresión e interpretación sobre lo que se concluya sea: verdad para todos o mentira para todos.
- Utilización de la representación o conjunto de representaciones con las que el lenguaje matemático hace referencia a esas ideas.
- Comprender el entorno que nos rodea, con mayor profundidad, mediante la aplicación de los conceptos aprendidos.

Sobre estas indicaciones cabe advertir la importancia del orden en el que se han expuesto. Obsérvese que, en muchas ocasiones, se suele confundir la idea matemática con la representación de esa idea. Se le ofrece al niño,

⁹ VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas. México, 1991.

en primer lugar, el símbolo, dibujo, signo o representación cualquiera sobre el concepto en cuestión, haciendo que el sujeto intente comprender el significado de lo que se ha representado. Estas experiencias son perturbadoras para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Se ha demostrado suficientemente que el símbolo o el nombre convencional es el punto de llegada y no el punto de partida, por lo que, en primer lugar, se debe trabajar sobre la comprensión del concepto, propiedades y relaciones.

Para la formación del conocimiento matemático es necesaria la distinción entre la representación del concepto y la interpretación de éste a través de su representación. Se suele creer que cuantos más símbolos matemáticos reconozca el niño más sabe sobre matemáticas. Esto se aleja mucho de la realidad porque se suele enseñar la forma; así, por ejemplo, escuchamos: «*El dos es un patito*» o «*La culebra es una curva*» o... Tales expresiones pueden implicar el reconocimiento de una forma con un nombre, por asociación entre distintas experiencias del niño, pero en ningún modo contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, debido a que miente sobre el contenido intelectual al que se refiere, por ejemplo, el concepto dos: nunca designa a UN «patito». En resumen, lo que favorece la formación del conocimiento lógico-matemático es la capacidad de interpretación matemática, y no la cantidad de símbolos que es capaz de recordar por asociación de formas.

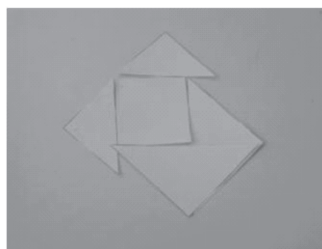
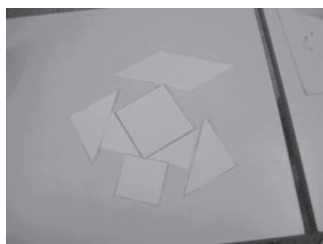
2.2. Desarrollo del pensamiento matemático

La Matemática es una actividad mental. El pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado; **rigor es, ante todo claridad mental**. El desarrollo del pensamiento no se consigue solo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. Formular unas cuantas observaciones indicativas con el fin de subrayar que el niño ha realizado actividades para desarrollar el pensamiento nada dice sobre el verdadero desarrollo, si descuidamos la emoción, la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento de las demás actuaciones, procesos, estrategias, comportamientos y diálogos. Toda acción lógica que opere significativamente en el aprendizaje de la Matemática debe, a nuestro juicio, desde la enseñanza:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en

la instrucción. Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el «bien» o «mal» como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.

- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven porque actualizan las necesidades del alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,...
- Habituarse al alumno a explicar; fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de «porque sí». Familiarizarlos con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.



Lo que se pretende desde la enseñanza de la matemática es poner a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección, para ello es necesario canalizar las estrategias didácticas hacia la comprensión, acción primordial para que los alumnos establezcan relaciones desde su realidad mental y la evidencia lógica. Estas estrategias didácticas no darán mucho éxito si no formulan preguntas que provoquen claros desafíos al pensamiento, ni favorecen creativamente la discusión y el diálogo dirigido a la investigación: «¿Qué pasaría si...?» «Supongamos que...»

El desarrollo del pensamiento lógico-matemático se puede recorrer didácticamente:

- a) Estableciendo relaciones, clasificaciones y mediciones.
- b) Ayudarles en la elaboración de las nociones espacio-temporales, forma, número, estructuras lógicas, cuya adquisición es indispensable para el desarrollo de la matemática.
- c) Impulsar a los alumnos a averiguar cosas, a observar, a experimentar, a interpretar hechos, a aplicar sus conocimientos a nuevas situaciones o problemas
- d) Desarrollar el gusto por una actividad del pensamiento a la que irá llamando matemática.
- e) Despertar la curiosidad por comprender un nuevo modo de expresión.
- f) Guiarle en el descubrimiento mediante la investigación que le impulse a la creatividad.
- g) Proporcionarles técnicas y conceptos matemáticos sin desnaturalización y en su auténtica ortodoxia.

Los procedimientos que se utilicen para la consecución de los objetivos presentados anteriormente serán válidos en tanto se apoyen, en un principio, lo más posible en la experimentación, obteniendo como resultado experiencias fructíferas que aseguren la fiabilidad del conocimiento lógico y matemático. Con razón escribía Puig Adam¹⁰. «*Si abstraer es prescindir de algo, debe existir ese algo del que se pueda prescindir*».



¹⁰ PUIG ADAM, P. *Didáctica. Matemática. Eurística*. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956, pág. 8.

3. PRINCIPIOS METODOLÓGICOS E INTERVENCIÓN EDUCATIVA

A) Contenido frente a conocimiento

Que el alumno sea el constructor de sus propios aprendizajes, se ha dicho de mil formas diferentes en diferentes reformas educativas. Yo creo en ello. No por oídas, sino por lo que la experiencia me ha dictado y me dicta. Por lo que no tengo inconveniente en afirmar, desde mi experiencia, que de otro modo el aprendizaje se verá desnaturalizado, aportando al alumno un contenido, que no un conocimiento. Ya he dicho en otras ocasiones, que contenido es lo que se enseña y conocimiento es lo que se aprende.

B) ¿Enunciar - memorizar - comprender?

Otra tesis en la que apoyo mi intervención como didacta de la matemática es el cambio de: «Enunciar, memorizar, comprender» por «Comprender, enunciar, memorizar y aplicar». Me explico: Habitualmente se empieza por el enunciado de los conceptos, las relaciones o su representación convencional, como segundo paso se hace que se retenga en la memoria y, finalmente, se realizan ejercicios para su comprensión. Este orden de presentación de la enseñanza de la matemática nunca me dio buenos resultados. Cambié, entonces. En primer lugar, elaboré actividades que mediante ejemplos y contraejemplos, y sin corregir en modo alguno el pensamiento del alumno, le ayudasen a generar ideas, a comprender el concepto identificado siempre desde su propio lenguaje. Posteriormente enunciaba correctamente el nombre o expresión convencional de aquello que habían comprendido. Por último trabajaba en su memorización. Claro está que la memoria es importante. Pero para evitar esfuerzos innecesarios conviene que memoricen cómo se llama aquello que saben que es.

C) Metalenguaje y lenguaje objeto

Es necesario, por tanto, como primera actividad, partir en todo momento del vocabulario del alumno¹¹. En la construcción del conocimiento

¹¹ FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación*. Editorial CCS. Madrid, 2002; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *El número de dos cifras*. Editorial CCS. Madrid, 2004; FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*. Grupo Mayéutica. Madrid, 2006.

científico se hace distinción entre metalenguaje y lenguaje objeto. El lenguaje objeto es el propio de la ciencia en cuestión y el metalenguaje es ese lenguaje que utiliza para describir los términos pertenecientes al lenguaje objeto. Después, muchos términos del lenguaje objeto se pueden ir explicando a través de otros términos de ese lenguaje objeto. Cierto esto, el metalenguaje del aula para la construcción del conocimiento es el propio del alumno. Posteriormente, identificaremos un término matemático a partir de su lenguaje. Llegará un momento, dependiendo de la edad, que en el vocabulario del alumno podamos encontrar ya varios términos del lenguaje objeto que utiliza la matemática, definiendo, entonces, otros a partir de éstos. En definitiva, creo que hablamos demasiado y demasiado mal, cuando lo que hay que intentar es evitar, en la medida de lo posible, la información verbal, y enunciar con la precisión que caracteriza a la matemática cuando tengamos que hacerlo. Si observamos la ambigüedad de expresión que existe actualmente en los libros de texto dirigidos principalmente a los escolares de infantil y primaria, nos preguntamos cómo pueden tener con esos materiales un pensamiento lógico, y si éste no existe cómo pueden acceder a un pensamiento matemático. Faltan didactas y, sobran intérpretes de libros de texto.

D) La enseñanza de la matemática

Generalmente se ha aceptado que el aprendizaje de la matemática se refería al número y a la cantidad, apoyadas principalmente sus actividades en el orden y la seriación, siendo el contar el trabajo máspreciado para la actividad matemática. Hoy la naturaleza de la enseñanza de la matemática se muestra diferente: como expresión, como un nuevo lenguaje y un nuevo modo de pensar con sus aplicaciones prácticas a su entorno circundante, mediante la contrastación de las ideas. Aunque la asociación matemática y número suele ser habitual, se hace necesario indicar que no siempre que aparece la matemática se refiere al número, del mismo modo que el hecho de utilizar números nada puede decir del hacer matemático, si este hacer no ha sido generado por una acción lógica del pensamiento.

Apoyamos la enseñanza de la matemática en lo que el profesor sabe, cuando deberíamos apoyarla en lo que el alumno desconoce. Damos por hecho que la simple información verbal de una situación clara para el docente, trasmite a la mente del alumno, con la misma claridad, lo que nosotros sobre ello comprendemos; y eso, mucho se aleja de la auténtica comprensión del concepto por la observación y experimentación de diversidad de situaciones en la que éste puede aparecer. Esto supone que muchos escolares reconozcan el concepto o la relación sólo cuando se le presenta de la misma forma como se le ha presentado para su aprendizaje. No puede reconocerlo

en otras diferentes situaciones, no es funcional su aprendizaje, la aplicación del concepto se apoya en el azar y la adivinación y es nula la transferencia de estos contenidos a otros nuevos para la construcción del conocimiento. Es necesario que el profesor sustituya la información verbal que dirige a sus alumnos por dudas, retos y desafíos mediante acertadas actividades, que cuidadosamente preparadas, permitan adquirir lo que se está trabajando con la solidez que como contenido matemático le caracteriza. Si el profesor dice: «esto es una recta», también está diciendo a la lógica interpretación del alumno que todo lo que no sea «esto», no se puede reconocer como «recta» (Wittgenstein)¹².

3.1. Existencia y asistencia del pensamiento

La existencia del pensamiento pertenece, todavía hoy, a un proceso mágico. Sin embargo, la asistencia al pensamiento se recoge, por su posibilidad de contrastación, en un proceso científico. La enseñanza debe permitir que el sujeto llegue a la adquisición de los conceptos por sus propios hallazgos. Su terminología específica y la simbología pertinente deben ser el punto de llegada en la construcción del conocimiento, y no el punto de partida. Enunciar el concepto es posterior a la comprensión de éste, porque creemos, al igual que Heidegger¹³, que «*El enunciado es la articulación de lo que se ha comprendido*».

Esta indicación, tan reconocida en la teoría como escasa en la práctica, señala unos procedimientos a la vez que anula otros. Se espera, que la pregunta reine de modo supremo en la expresión del profesor, pero las preguntas preestablecidas para respuestas preestablecidas no forman parte del desarrollo de la actividad intelectual. Que todo desafío implique una pregunta, no hace suponer que toda pregunta implique un desafío, porque éste aspira a provocar en el sujeto un estado de indagación cuyo resultado añada algo a lo que ya sabía. Los retos, los ejemplos y contraejemplos son los alimentos de los que se nutre la interacción profesor-alumno. Se puede partir, entonces, de las experiencias y conocimientos previos de los que aprenden, que tienen la oportunidad de jugar con las respuestas antes de escoger una de ellas; acción que resuelve con frecuencia, el grave problema para el aprendizaje que supone la falta de ideas, junto con la privación de autonomía, perseverancia y flexibilidad¹⁴.

¹² WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987.

¹³ HEIDEGGER, M. *El ser y el tiempo*. FCE. México, 1951, pág. 112.

¹⁴ STEPHEN, J. y ASHCROFT, J. R. *Mathematics for Dyslexics*. A teaching Handbook. Whurr Publishers. London, 1999.

3.2. Etapas del acto didáctico

Existen, a mi juicio, cuatro etapas¹⁵ fundamentales en el acto didáctico: Elaboración, Enunciación, Concretización y Transferencia o Abstracción. Este orden de presentación de las etapas es irremplazable.

1. Etapa de Elaboración. En esta etapa se debe conseguir la intelectualización de la/s estrategia/s, concepto/s, procedimiento/s que hayan sido propuestos como tema de estudio.

El profesor, respetando el trabajo del alumno y el vocabulario por él empleado, creará, a partir de las ideas observadas, desafíos precisos que sirvan para canalizarlas dentro de la investigación que esté realizando en su camino de búsqueda. Tal planteamiento, supone evitar la información verbal, así como las palabras correctivas: «bien» o «mal»; utilizando, en todo momento, ejemplos y contraejemplos que aporten continuidad a la pluralidad de respuestas que escuchemos. Estas respuestas, ya correctas o incorrectas, se forman a través de un diálogo entre todos y de un diálogo interior, y deben ser recogidas, como hipótesis, desde la motivación de comprobarlas por sus propios medios para establecer conclusiones válidas. La curiosidad por las cosas surge por la actualización de las necesidades de nuestros alumnos; necesidades, no solamente físicas o intelectuales sino también operativas en el pensamiento para buscar soluciones a las dudas que se reflejan en focos concretos de las situaciones propuestas.

Esta etapa subraya el carácter cualitativo del aprendizaje. El respeto al niño es obligación permanente para que su originalidad y creatividad tome forma en las estrategias de construcción del concepto o relación. Y es en esta etapa, más que en ninguna otra, donde el profesor pondrá a prueba el dominio que tiene sobre el tema. Un dominio sin el cual se perderá fácilmente.

2. Etapa de Enunciación. El lenguaje, que desempeña un papel fundamental en la formación del conocimiento lógico-matemático, se convierte muchas veces en obstáculo para el aprendizaje. Los niños no comprenden nuestro lenguaje. Si partimos de nuestras expresiones les obligaremos a repetir sonidos no ligados a su experiencia. Estas expresiones darán lugar a confusión y se verá aumentada la complejidad para la comprensión de los conceptos y la adquisición de otros nuevos. Por esto, llegados al punto en que el niño ha comprendido a partir de la generación mental de una serie de ideas expresadas libremente con su particular vocabulario, se hace necesario enun-

¹⁵ FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. «Las cuatro etapas del acto didáctico». *Comunidad Educativa*. ICCE, núm. 228, 1995.

ciar o simbolizar lo que ha comprendido, respecto a la nomenclatura o simbología correctas: *los convencionalismos*. Este es el objetivo de esta etapa: poner nombre o enunciar con una correcta nomenclatura y simbología. Por ello, la etapa anterior es de exagerada importancia y debe tener su particular evaluación para no considerar intelectualizado todo lo que en ella se ha visto, sino todo lo que en ella, ciertamente, se ha intelectualizado.

En esta etapa, se puede orientar al sujeto de esta forma: «Eso que tú dices... se dice...», «Eso que tú escribes como... se escribe...», «Lo que tú llamas... se llama...», «Lo que tú expresas de la forma... se expresa...», «Lo que tú indicas con... se indica...» (...)

3. **Etapas de Concretización.** Es la etapa en la que el alumno aplica, a situaciones conocidas y ejemplos claros *ligados a su experiencia*, la estrategia, el concepto o la relación comprendida con su nomenclatura y simbología correctas. Se proponen actividades similares a las realizadas para que el alumno aplique el conocimiento adquirido, y evaluar en qué medida ha disminuido el desafío presentado en la situación propuesta en la etapa de Elaboración.

4. **Etapas de Transferencia o Abstracción.** Etapa en la que el niño aplica los conocimientos adquiridos a cualquier situación u objeto *independiente de su experiencia*. Es capaz de generalizar la identificación de una operación o concepto y aplicarlo correctamente a una situación novedosa, tanto en la adquisición de nuevos contenidos, como en la interrelación con el mundo que le rodea. En muchas ocasiones, no se puede estudiar después de la etapa de Concretización; se confundiría con ella y su independencia como etapa no sería significativa. Existen niños que reproducen, sin dificultad alguna, formas de figuras inmediatamente después de haberlas trabajado, y, sin embargo, muchos de ellos no reconocen esas formas en los objetos del entorno en el que desenvuelven su actividad cotidiana, unos días más tarde. Se puede decir, que estos alumnos no han asimilado la relación o conjunto de relaciones trabajadas con anterioridad sobre el concepto. Si esto ocurre, el profesor revisará la preparación de las etapas anteriores y su actuación en ellas, desde una investigación-acción.



3.3. Ideas sobre metodología didáctica para la enseñanza de la matemática

1. Dominar la matemática que se está enseñando, distinguiendo la idea, de la notación de la idea. Una cosa es el concepto y otra, muy distinta, es la simbología que se utiliza para representarlo. Así, por ejemplo, el número cero no es esto: «0», eso es lo que se utiliza para representar la ausencia de elementos, siempre y cuando así se interprete. No faltan libros de texto en los que, confundiendo concepto y simbología, podemos leer que el cero es una *o*, que el cero es una rosquilla, que el dos es un patito, *o*, que el seis (6) es «el número que no quiso ser cero».

2. Dominar el arte de preguntar, partiendo siempre del lenguaje del alumno, como modelo de duda, desafío y camino de comprensión para el aprendizaje, en la adquisición del concepto que se esté elaborando intelectualmente; conduciendo al alumno mediante ejemplos y contraejemplos que fomenten la discusión y el diálogo, para que sea él, y sin corrección alguna por nuestra parte, el que advierta con claridad, por el diálogo interior provocado: el acierto o el error cometido.

3. Entender que la evidencia, la realidad, la necesidad y la curiosidad son las situaciones necesarias en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática; por lo que no debemos olvidar que los materiales que utilicemos pueden, por la metodología empleada, favorecer, o no, esas situaciones. Entendiéndose únicamente por material válido para el aprendizaje de la matemática, aquel que hace uso de ellas.

4. Utilizar modelos didácticos, fomentando la investigación y el método científico que, a modo de recurso, permita el descubrimiento de los conceptos, para facilitar que el alumno llegue al saber matemático con precisión de resultados y sin equivocación alguna.

5. Enunciar, representar y simbolizar, como un buen comunicador y con el rigor y la precisión científica que no impliquen ambigüedad alguna después, y sólo después, de que el alumno haya comprendido el concepto o relación. Relatar acontecimientos de la Historia de la Matemática que estén relacionados con el concepto trabajado, siempre que sea posible, y de manera sugerente y atractiva.

6. Presentar al alumno actividades matemáticas de cualquier tipo o modelo, desde las más sencillas a las más complejas, cuando el alumno tenga suficientes mecanismos de auto-corrección.

7. Fomentar en cualquier etapa educativa, con una correcta adaptación la aplicación, transferencia y abstracción de los contenidos enseñados, a cualquier campo científico, natural y social.

8. Apoyar la participación del alumno, de forma natural y espontánea, en la búsqueda del conocimiento, y no tan sólo y de forma exclusiva en el antojo de la enseñanza para obtener respuestas a preguntas pre-establecidas.

9. Motivar al aprendizaje de la matemática hacia el saber, hacia el sentir y hacia el querer.

10. Escuchar al alumno, atendiendo a modo científico:

- a) Que las respuestas que obtenemos no coincidan con las que esperamos implica simplemente discrepancia entre la enseñanza y el aprendizaje, y no significa en modo alguno que el niño no razone.
- b) El niño nunca responde por azar, si no ha sido intimidado.
- c) El niño nunca quiere fallar o hacerlo mal, si no ha sido irritado
- d) Ni existe, ni existirá método alguno de enseñanza superior a la capacidad de aprendizaje de la mente humana.

BIBLIOGRAFÍA

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. “Las cuatro etapas del acto didáctico”. *Comunidad Educativa*. ICCE, nº 228, 1995.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación*. Editorial CCS. Madrid, 2002.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *El número de dos cifras*. Editorial CCS. Madrid, 2004.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*. Grupo Mayéutica. Madrid, 2006.

GAGNÉ, E. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Aprendizaje-Visor. Madrid, 1991.

HEIDEGGER, M. *El ser y el tiempo*. FCE. México, 1951.

IAN STEWART. *De aquí al infinito. Las matemáticas hoy*. Crítica. Barcelona, 2004.

KRIVENKO, M. *Psicología*. Planeta. Barcelona, 1990.

PLATÓN. *Teeteto* en *Obras Completas*. Aguilar, 2ª ed., 4ª reim., Madrid, 1979.

PUIG ADAM, P. *Didáctica. Matemática. Eurística*. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956.

REY PASTOR, J. *Elementos de Análisis Algebraico*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1981.

RUSSELL, B. *Introducción a la filosofía matemática*. Paidós. Madrid, 1985.

STEPHEN J. y ASHCROFT, J. R. *Mathematics for Dyslexics*. A teaching Handbook. Whurr Publishers. London, 1999.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas. México, 1991.

WHITEHEAD A. N. “Mathematics and Liberal Education”. *Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of En-*

gland. Volume I, Number 1 in a philosopher looks at science, (Philosophers Library) New York, 1965.

WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1987.

UN VIAJE POR EL FASCINANTE MUNDO DE LOS NÚMEROS

Javier Peralta
Universidad Autónoma de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. “LA MATEMÁTICA EXPULSADA DE LA ESCUELA”
2. ¿Y QUÉ HACER ANTE ESTA SITUACIÓN? ALGUNAS SUGERENCIAS PARA MEJORAR LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
 - 2.1. Adivinación del día y el mes de nacimiento
 - 2.2. La conjetura $3x + 1$
 - 2.3. La conjetura de los capicúas
 - 2.4. Sugerencias didácticas
3. UTILIZACIÓN DE UNA METODOLOGÍA HEURÍSTICA
 - 3.1. Tres divisiones sucesivas
 - 3.2. Cálculo de la suma de los cien primeros números enteros positivos
 - 3.3. La criba de Eratóstenes
4. APLICACIONES DIDÁCTICAS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
 - 4.1. Forma de multiplicar de los egipcios
 - 4.2. Cuadrados mágicos
5. CURIOSIDADES NUMÉRICAS
 - 5.1. Una relación que sorprendió a Platón
 - 5.2. El número de la Bestia
6. JUEGOS NUMÉRICOS
 - 6.1. Una forma muy rápida de sumar cinco números de seis cifras
 - 6.2. Adivinación del número del DNI, del número de teléfono y de una casa rural buscada en una guía
7. REFLEXIÓN FINAL
 - 7.1. *¡Ojalá no hubiera números!*
 - 7.2. *El Principito*

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Como indica su título, en este artículo vamos a hablar de números. Para ello hemos seleccionado una serie de ejemplos, curiosidades, divertimentos, juegos, paradojas y conjeturas numéricos, que esperamos sean de interés al lector.

Debemos hacer antes de empezar, sin embargo, una observación: los problemas con números son a veces bastante sorprendentes¹. Así, algunos tienen apariencia sencilla y sus enunciados son perfectamente asequibles, por lo que pueden ser motivadores para la actividad matemática; aunque no siempre son fáciles de resolver, pues en ocasiones encierran cuestiones intrigantes y enigmáticas que han desafiado a muchas generaciones de matemáticos. Con otros problemas, en cambio, ocurre lo contrario: tienen un enunciado de aspecto más difícil y, no obstante, no presentan grandes dificultades en su resolución.

Por tanto, la situación que se crea en relación con los problemas numéricos puede tener algo de paradójica; o dicho de otro modo: de las actividades con números, no hay que fiarse.

1. “LA MATEMÁTICA EXPULSADA DE LA ESCUELA”

Comenzaremos comentando el artículo así denominado², basado en una investigación realizada por David Block y Martha Dávila. En él se plantean a diferentes personas problemas que se les pueden presentar en su vida cotidiana y que se resuelven con herramientas matemáticas. Dos de esas personas son Margarita y Talía.

Margarita es una humilde mujer trabajadora mejicana de 37 años, casada y con diez hijos, que nunca fue a la escuela, no sabe leer ni escribir, y sólo conoce la representación de los números del 1 al 10.

A Margarita se le hizo una entrevista en la que, por medio de diversas preguntas, se le propuso un problema referente a sus frecuentes viajes en autobús. En esencia, el problema fue el siguiente:

¹ WEIL, A. *Number Theory. An approach through history*. Birkhäuser. Basilea, 1983.

² BLOCK, D. y DÁVILA, M. “La Matemática expulsada de la escuela”. *Educación Matemática*, Vol. 5, N° 3. México, 1993.

Cada viaje en autobús le cuesta 20 pesos. Si hubiera gastado 540 pesos a lo largo de un mes en tales viajes, ¿cuántas veces habría usado el autobús?

Después de pensarlo, Margarita contestó sonriente: “*se subió veintisiete veces*”; respuesta a la que llegó razonando de este modo: “*(...) si cobran veinte pesos, cien pesos tiene cinco veintes, [luego] con cien pesos se sube cinco veces (...). Entonces, si se sube diez veces, son doscientos, si se sube quince veces son trescientos, si se sube veinte veces son cuatrocientos pesos y si se sube veinticinco veces son quinientos pesos y sobran otros dos veintes, [luego en total] son veintisiete veces*”.

Son de destacar en su respuesta la claridad en explicar los procedimientos que empleó para llegar a los resultados y la habilidad en el uso implícito de razonamientos matemáticos utilizados. Concretamente, realizó la división 540:20 mediante:

- La descomposición del dividendo: $540 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 20 + 20$.
- El cálculo de la división 100:20, averiguando cuántas veces «cabe» el 20 en 100:
 $100 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20$ (cabe cinco veces)
- La aplicación de la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición.

Talía es otra de las personas entrevistadas. Se trata de una niña de cuarto de Primaria, escolarizada según los cánones oficiales, a quien se le planteó el siguiente problema: *Jugué dos partidas de cartas. En el segundo juego gané 69 puntos. Junto con lo que gané en el primer juego, tengo en total 83 puntos. ¿Cuántos puntos gané en el primer juego?*

Y he aquí la respuesta, en forma de suma, dada por Talía:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 69 \\ 83 \\ \hline \end{array}$$

154 Respuesta: 154

Evidentemente, Talía no relaciona los datos del problema que aparecen en el enunciado de modo adecuado, sino que los usa todos indiscriminadamente, incluso los que no sirven para su resolución; aunque, ciertamente, sabe realizar las operaciones que ha aprendido en la escuela. A la vista de ello, no parece que sea capaz de emplear oportunamente –no lo ha sido al

menos en este caso— los conocimientos matemáticos para resolver problemas surgidos en su vida ordinaria, fuera del centro escolar.

Comparando los dos ejemplos, se evidencia que hay alumnos que no saben hacer matemáticas, aunque conozcan los conceptos y algoritmos aprendidos en el colegio; mientras que existen otras personas que nunca estuvieron escolarizadas y, en cambio, han desarrollado a lo largo de los años una capacidad para resolver problemas matemáticos relacionados con su vida diaria.

Aunque acaso, reflexionando como D. Block y M. Dávila, debiéramos preguntarnos: “*lo que hace Margarita para resolver problemas, ¿son matemáticas?*”

La contestación a esta pregunta dependerá, claro está, de lo que entendamos por hacer matemáticas. Si la concebimos como el conocimiento de un determinado lenguaje y de ciertos algoritmos canónicos, Margarita indudablemente no sabe matemáticas. Aunque, si la interpretamos como una capacidad para resolver problemas matemáticos que se presentan en la vida ordinaria, la respuesta sería afirmativa (lo que no cabría decir en cambio de algunos de nuestros alumnos).

Según la segunda de esas acepciones, es necesario señalar, no obstante, que Margarita aprendió matemáticas a fuerza de enfrentarse a numerosos problemas a lo largo de su vida y que sus conocimientos matemáticos —que tienen un límite concreto de eficacia— fueron adquiridos tras muchos años de experimentación. La escuela, sin embargo, proporciona instrumentos matemáticos potentes que han de permitir resolver una gran variedad de problemas de forma rápida; si bien, como ha sido puesto de manifiesto en el caso de Talía, a veces no logra cumplir satisfactoriamente su función que consideramos principal: formar personas competentes para resolver cuestiones que se plantean en la vida real utilizando esos instrumentos.

2. ¿Y QUÉ HACER ANTE ESTA SITUACIÓN? ALGUNAS SUGERENCIAS PARA MEJORAR LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La situación presentada en la sección anterior y las consideraciones posteriores llevadas a cabo en relación con ella, nos conducen a preguntarnos³ si es correcta la educación matemática de nuestros alumnos. Más en concreto, nos planteamos las siguientes cuestiones:

³ PERALTA, J. “Acerca de una defectuosa educación matemática”. *Tendencias pedagógicas*, nº 6, 2001, págs. 163-173.

- ¿Es buena la metodología que empleamos en nuestras clases?
- ¿Los alumnos entienden realmente lo que explicamos?
- ¿Somos capaces de motivar; es decir, de atraer la atención de los estudiantes hacia las matemáticas?
- ¿No será que nuestra enseñanza sea acaso desproporcionadamente académica y constreñida en exceso a los programas, temporalización, evaluaciones, etc?

Aunque dentro de poco se expondrán de una manera más ordenada algunas ideas y recursos para afrontar esta situación, se mostrarán a continuación tres ejemplos previos a modo de introducción.

2.1. Adivinación del día y el mes de nacimiento⁴

Se pide a los alumnos que escriban en un papel el número del día en que nacieron (el profesor no podrá ver lo que los estudiantes van escribiendo). Luego se dirá que multipliquen por 20 ese número; después, que sumen 73 al resultado anterior; más tarde que multipliquen dicho resultado por 5; y, para terminar, que sumen al último número obtenido el número del mes en que nacieron.

Después de hechos esos cálculos, se deberá comunicar al profesor cuál es el número resultante. Bastará entonces con que el maestro, sin que los alumnos vean qué operaciones realiza, reste 365 al número proporcionado por el alumno. Tendrá así un número de tres o cuatro cifras; las dos últimas corresponden al número del mes, y la primera o dos primeras, al número del día. ¿Por qué?

2.2. La conjetura⁵ $3x + 1$

Se pide a los alumnos que escriban un número entero positivo cualquiera. Si es par, que lo dividan entre 2 y, si es impar, que lo multipliquen por 3 y sumen 1. Continuar el proceso. ¿Qué se observa?

Partamos por ejemplo del número 53. Al realizar las operaciones indicadas se obtiene la siguiente serie:

⁴ PERALTA, J. *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Huerga y Fierro. Madrid, 1995.

⁵ LOBO, J. «Anecdótico. El problema $3x+1$ ». *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº 18, 1988, págs. 57-58.

53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Tomemos otro número cualquiera; por ejemplo, 34:

34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Tras probar con otros números, verán que antes o después siempre lleguen a obtener 1 y, por tanto, se obtiene un resultado que puede sorprendernos: la serie se estabiliza. Surge entonces la pregunta si esto es cierto siempre.

Por supuesto, con alumnos de Primaria o incluso de la ESO, se podría dar la respuesta por afirmativa, al haberlo comprobado un número suficiente de veces. Sin embargo, no se ha demostrado formalmente aún que esa propiedad sea verdadera, a pesar de haberlo probado con ayuda de ordenadores para todos los números hasta varios millones.

La propiedad, que sin duda tiene una apariencia sencilla, encierra sin embargo interesantes conexiones con cuestiones matemáticas de alto calado. De hecho, este problema, llamado *conjetura $3x+1$* , *problema de Collatz*, *problema de Kakutani*, etc, y considerado como extraordinariamente difícil, fue planteado hacia 1930 y aún no ha sido resuelto; es más, se han ofrecido premios económicos importantes a quien obtenga la demostración. Éste es un claro ejemplo de lo que de algún modo se había anunciado en la Introducción: un problema de apariencia bastante sencilla, que puede muy bien servirnos para motivar a que los alumnos de Primaria se ejerciten en el cálculo y que, en cambio, contiene elementos matemáticos muy complejos; hasta el punto de no haber sido todavía resuelto rigurosamente.

2.3. La conjetura de los capicúas⁶.

Se pide a los alumnos que escriban un número entero positivo cualquiera, luego que inviertan el orden de sus cifras y, finalmente, que sumen ambos. Deben repetir el proceso si es necesario varias veces hasta llegar a un capicúa. Probar luego con otros números. ¿Será cierto siempre?

Ejemplos:

$29 + 92 = 121$: capicúa

$57 + 75 = 132$; $132 + 231 = 363$: capicúa

$6789 + 9876 = 16665$; $16665 + 56661 = 73326$; $73326 + 62337 = 135663$; $135663 + 366531 = 502194$; $502194 + 491205 = 993399$: capicúa.

⁶ PERALTA, J. 1995, op. cit., pág. 134.

Como en el caso anterior, lo observado en estos ejemplos y en algunos más que deberían realizarse, sería suficiente para afirmar en un curso de Primaria que esta propiedad se cumple siempre. Sin embargo, no se puede asegurar tal cosa, ya que, en primer lugar, parece ser que no sucede con el número 196: el número más pequeño que probablemente lo incumple (se ha probado con él cientos de miles de veces y nunca se ha obtenido un capicúa). En segundo lugar, tampoco se ha demostrado formalmente que la propiedad funcione con todos los demás números, salvo el 196 (y sus derivados: $196+691=887$, $887+788=1675$, ...). Esta fundada sospecha no es por tanto un teorema matemático, sino una conjetura, llamada conjetura de los capicúas.

2.4. Sugerencias didácticas

Después de mostrados los tres ejemplos anteriores, y ahora ya de una forma más organizada, indicamos a continuación algunas sugerencias para mejorar nuestra enseñanza; concretamente sobre el aprendizaje de los números y de la aritmética. Son las siguientes, y serán analizadas en los próximos apartados:

- La utilización de una metodología heurística.
- La búsqueda de aplicaciones didácticas de la historia de las matemáticas.
- La presentación de curiosidades numéricas.
- La realización de juegos numéricos.

3. UTILIZACIÓN DE UNA METODOLOGÍA HEURÍSTICA

Como es sabido, el método heurístico de enseñanza⁷ consiste en buscar situaciones dinámicas motivadoras de la actividad creadora y descubridora de las cuestiones matemáticas por los propios alumnos. Con tal fin el profesor presenta un problema, una actividad o un conjunto de datos para que el alumno trabaje con ellos (experimente, busque regularidades, realice conjeturas, obtenga conclusiones ...) bajo la guía del profesor. Se trata, por tanto, de una metodología activa en la que el estudiante trabaja de forma creativa y participa en la construcción de las ideas, mientras la labor del profesor se concreta en despertar el interés (motivar) al plantear esa situación didáctica, y en orientar (guiar) la actividad de los alumnos.

Mostramos a continuación tres de esas posibles actividades:

⁷ PERALTA, J. 1995, op. cit., págs. 45-46.

3.1. Tres divisiones sucesivas⁸

El profesor pide a los alumnos que escriban en un papel un número de tres cifras, y luego que repitan a continuación el mismo número; de este modo se tendrá un número de seis cifras, cuyas tres primeras están repetidas. Después, les dirá que dividan ese número de seis cifras entre 7, y los alumnos verán que la división es exacta. Luego, les pedirá que dividan el cociente obtenido anteriormente entre 11, y asimismo la división tendrá resto 0; por último, les propondrá que dividan el último cociente entre 13. Tras haber obtenido de nuevo una división exacta, los estudiantes observarán que el cociente finalmente logrado coincide con el número de tres cifras de partida.

¿Por qué? Se tratará que los alumnos descubran por sí mismos la razón de este hecho, que está basado en que $7 \times 11 \times 13 = 1001$.

3.2. Cálculo de la suma de los cien primeros números enteros positivos

Se propone el problema sin dar ninguna indicación sobre su resolución.

Algunos alumnos tratan de realizar la suma directamente, lo que casi nunca conduce al resultado final, bien porque cometen errores o porque se cansan y no finalizan el proceso. Tras esperar un tiempo prudencial, se les van ocurriendo otras ideas⁹, generalmente consistentes en agrupar los sumandos de diferentes formas, tales como las siguientes:

$$1 + 11 + 21 + \dots + 91 = 460; 2 + 12 + 22 + \dots + 92 = 470;$$

de donde se deduce que cada vez hay que sumar 10 a la suma anterior, lo que puede conducirles a la solución

$$1 + 2 + \dots + 10 = 55; 11 + 12 + \dots + 20 = 155 ;$$

cada suma excede en 100 a la anterior, lo que también puede llevarles a encontrar el resultado.

Por último, es poco frecuente que se razone de este modo (como parece ser que procedió Gauss a la edad de diez años):

⁸ *ibídem*, pág. 129. VIZMANOS, J. R.; ANZOLA, M.; PERALTA, J. y BARGUEÑO, J. *Matemáticas 1º ESO (serie Gauss)*. S. M. Madrid, 2002, pág. 53.

⁹ PERALTA, J. 1995, op. cit., pág. 48.

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 101$$

como hay 50 parejas, la suma es: $101 \times 50 = 5050$.

Una vez que se ha hecho la suma, como es lógico, por procedimientos aritméticos, cabe pedir a los alumnos que la calculen por métodos geométricos.

Ese planteamiento no es, desde luego, ninguna extravagancia; sino que desde la antigüedad hasta al menos los siglos XV-XVI, buena parte de las identidades aritméticas y algebraicas se probaban geoméricamente. Nótese, sin ir más lejos, que 7^2 ó 5^3 tienen connotaciones geométricas: 7 al cuadrado (cuadrado de lado 7) ó 5 al cubo (cubo de arista 5). Y que, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides (siglo III a. C.) ya aparece esta “demostración” de la identidad que hoy escribiríamos¹⁰ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

Volviendo al problema propuesto, es normal que los alumnos no sepan por dónde empezar. Se les debe entonces recordar una conocida sugerencia didáctica para la resolución de problemas: si no se sabe resolver un problema, trata de plantearlo en términos más sencillos.

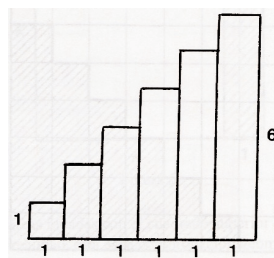
En este caso concreto calculemos geoméricamente¹¹, por ejemplo, $1+2+3+4+5+6$.

Tratemos de interpretar la suma como un área:

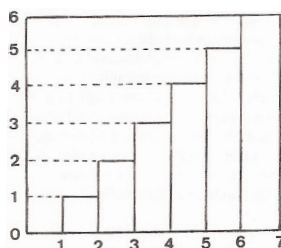
1 es el área de un cuadrado de lado 1, 2 es el área de un rectángulo de lados 1 y 2, 3 es el área de un rectángulo de lados 1 y 3, etc. Por tanto, la suma es el área de la figura:

¹⁰ HOGBEN, L. *El universo de los números*. Destino. Barcelona, 1966, pág. 16.

¹¹ PERALTA, J. “De los números poligonales a los números de Bernoulli”. *Educación Matemática*, Vol. 11, N° 2. México, 1999, págs. 103-104.



¿Y a qué es igual esa área? Podemos inscribir la figura en un rectángulo 6×7 :



El área pedida es entonces la mitad del área del rectángulo:

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \cdot 7}{2}$$

Generalizando el procedimiento al caso de 100 sumandos, la suma puede interpretarse como la mitad del área de un rectángulo 100×101 :

$$1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50100$$

3.3. La criba de Eratóstenes¹²

Digamos de entrada que los números primos juegan un papel fundamental en la Aritmética, hasta el punto de que todo número entero positivo queda determinado de forma única por su representación como producto de potencias de números primos, como afirma el Teorema fundamental de la

¹² PERALTA, J. 1995, op. cit., págs. 131-133. PERALTA, J. “Matemáticas para todos: Apología informal”. En *Actas de las Jornadas Provinciales (2000: Año Mundial de las Matemáticas)*. Consejería de Educación de la C.A.M. Madrid, 2001, pág. 56.

Aritmética. Podría decirse seguramente que los números primos constituyen el esqueleto de los números en cuanto a su estructura multiplicativa.

Eratóstenes, como es sabido, fue un importante matemático, astrónomo y geógrafo del siglo III a. C. Entre otras contribuciones, hay que resaltar que presentó al rey Tolomeo de Egipto una tabla de números primos, que realizó escribiendo los tres o cuatro mil primeros números naturales sobre una plancha y agujereando los compuestos.

Pediremos entonces a los alumnos que construyan una criba de Eratóstenes del modo que se muestra a continuación.

Se escriben en una tabla de seis columnas unos cuantos términos de la serie de números naturales, comenzando por el 2, tal como se indica en la primera tabla. Se pregunta que observen las columnas y digan dónde se encuentran los números compuestos.

Se deduce entonces que es posible tachar la primera columna (salvo el 2), pues todos los números que la forman son compuestos (múltiplos de 2). También se puede tachar la segunda columna (salvo el 3), pues los números correspondientes son compuestos (múltiplos de 3); la tercera, pues todos los números que la forman son múltiplos de 4; y, por último, la quinta, pues todos sus números son múltiplos de 6 (ver la segunda tabla).

La cuestión se ha simplificado, pues, considerablemente: aparte del 2 y del 3, todos los demás primos se encuentran exclusivamente en las columnas cuarta y sexta; esto es, el problema se ha reducido a su tercera parte.

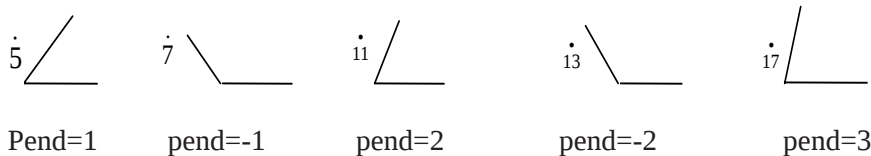
Se pedirá entonces que se sigan buscando números compuestos.

Evidentemente han sido eliminados los múltiplos de 2 y los múltiplos de 3, luego también los múltiplos de 4 y de 6. Respecto de los múltiplos de 5, puede verse que 5, 10, 15, 20 están sobre una recta transversal; 25, 30, 35, 40, 45 y 50 están en otra; y 55, 60, 65 ... en otra; y todas ellas son paralelas. El siguiente primo no tachado es el 7, y todos sus múltiplos están asimismo en rectas paralelas de una determinada pendiente; e igualmente sucede con los múltiplos de 11, 13, etc. (en realidad, no obstante, una vez suprimidas las columnas primera, segunda, tercera y quinta, y los múltiplos de 5 y de 7, casi todos los siguientes compuestos ya estaban tachados; si bien, éste sería el procedimiento a seguir si se tratara de una tabla más larga, o sea, de un conjunto mayor de números naturales consecutivos). Así pues, sea cual sea la longitud de la tabla, todos los múltiplos de un primo cualquiera se eliminan por rectas transversales de una pendiente característica (ver la tercera tabla).

2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	8	9	10	11	12	13	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	14	15	16	17	18	19	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	20	21	22	23	24	25	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	26	27	28	29	30	31	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	32	33	34	35	36	37	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	38	39	40	41	42	43	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	44	45	46	47	48	49	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	50	51	52	53	54	55	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	56	57	58	59	60	61	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	62	63	64	65	66	67	62	63	64	65	66	67
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

El siguiente problema que podríamos plantear, ya no dirigido a estudiantes de Primaria, sino a alumnos de Secundaria es: ¿cuál es la pendiente de esas rectas transversales?

La respuesta viene dada en las siguientes figuras:



La criba puede presentarse de otra forma más espectacular: si se escriben los números en una hoja de papel, de modo que el 2 y el 7 estén casi en los márgenes, y se pegan los bordes del papel de modo que el 8 quede a continuación del 7, se formará una superficie cilíndrica. En nuestra opinión, es bueno que los alumnos construyan este cuerpo, en el que la serie de los números naturales describe una hélice enrollada al cilindro, y las líneas transversales que se obtienen tachando los múltiplos de los sucesivos primos a partir del 5 serán líneas helicoidales. Así, el alumno tendrá su *cilindro de Eratóstenes* en su pupitre cuando trabaje con números primos, que puede servirle para familiarizarse con ellos.

4. APLICACIONES DIDACTICAS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS¹³

Como es conocido, la epistemología genética, elaborada por Piaget a mediados del siglo y fundada en trabajos relativos al nacimiento y desarrollo de la inteligencia del niño, aspira a señalar las estructuras comunes a la evolución psicogenética del niño y al progreso del conocimiento científico a lo largo de la historia. Su hipótesis fundamental establece un paralelismo entre dos procesos: el percibido en la organización lógica y racional del conocimiento científico y el que tiene lugar en la formación psicológica del niño.

Además de lo anterior, la historia de las matemáticas puede ser ciertamente un recurso pedagógico muy valioso para el profesor, pues permite extraer de ella situaciones didácticas adecuadas para el aprendizaje o descubrir anécdotas históricas, curiosidades y modelos que motiven a los alumnos.

Por ambas razones, hace ya muchos años que venimos subrayando la importancia didáctica de la historia de las matemáticas. Veamos algunos ejemplos.

4.1. Forma de multiplicar de los egipcios¹⁴

Los egipcios, 2000 años antes de nuestra era, no sabían en realidad multiplicar. Utilizaban para ello un método muy curioso para el que únicamente es necesario saber sumar, saber duplicar (multiplicar por 2) y hallar mitades (dividir entre 2), y que parece haber sido utilizado hasta hace poco en algunas regiones de la antigua Unión Soviética (por supuesto que para multiplicar por ejemplo 17 por 12 no hace falta saber multiplicar, sino que basta con sumar 17 doce veces; pero evidentemente no nos referimos a esto).

Para multiplicar, formaban una tabla encabezada por los dos factores: uno de ellos se va dividiendo sucesivamente entre 2, y en su columna se escriben los cocientes enteros correspondientes (se hace pues la división sin tener en cuenta los restos) hasta llegar a la unidad; el otro factor se multiplica sucesivamente por 2 tantas veces cuantas divisiones se hayan hecho en la otra columna, y los resultados se van colocando debajo del número en cuestión. Por ejemplo, calculemos 53×24 :

¹³ BOUVIER, A. *et al. Didactique des mathématiques*. CEDIC / Nathan. Paris, 1986, págs. 197-206. PERALTA, J. 1995, op. cit., págs. 100-111.

¹⁴ PERALTA, J. 1995, op. cit., págs. 127-128. REY, J. y BABINI, J. *Historia de la Matemática*, Vol. 1. Gedisa. Barcelona, 1986, págs. 31-32.

53	24
26	48
13	96
6	192
3	384
1	768

Hallemos ahora la suma de los números de la segunda columna que se encuentren enfrente de un número impar de la primera:

$$24 + 96 + 384 + 768 = 1272$$

Se pedirá entonces a los alumnos que efectúen, como saben, el producto de 53×24 . ¿Qué se observa? ¿Por qué?

La razón de que ambos resultados coincidan está en la utilización del sistema binario: 53 en base 2 es 110101; esto es, $1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$; luego

$$53 \times 24 = (1 + 2^2 + 2^4 + 2^5) \times 24 = 24 + 96 + 384 + 768 = 1272.$$

4.2. Cuadrados mágicos¹⁵

Como es sabido, un cuadrado mágico (CM) consiste en una disposición numérica en forma de matriz cuadrada, de modo que las sumas de los elementos por filas, por columnas y por diagonales coinciden.

Son numerosos los matemáticos que han trabajado con ellos a lo largo de prácticamente toda la historia. Parece ser que el más antiguo de ellos es el que se indica a continuación, que figura en un documento chino¹⁶ algunos siglos antes de nuestra era:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

¹⁵ PERALTA, J. 1995, op. cit., págs. 134-136. ROMO, C. «Los eternos cuadrados mágicos». *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, N° 43, 1996, págs. 61-66.

¹⁶ HOGBEN, L. *El universo de los números*. Destino. Barcelona, 1966, pág. 158.

En este CM de orden 3 (número de filas, o de columnas) se comprueba fácilmente que esa suma común es 15. Tiene además otras muchas propiedades, que se debe procurar deduzcan los alumnos con la guía del profesor. Algunas de ellas son las siguientes:

$$\begin{aligned} 492 + 357 + 816 &= 294 + 753 + 618 \\ 438 + 951 + 276 &= 834 + 159 + 672 \\ 492^2 + 357^2 + 816^2 &= 294^2 + 753^2 + 618^2 \\ 438^2 + 951^2 + 276^2 &= 834^2 + 159^2 + 672^2 \end{aligned}$$

A pesar de lo dicho anteriormente sobre su origen, los cuadrados mágicos tardaron bastante tiempo en conocerse en Europa. El matemático bizantino Moschopoulos (siglo XIV) se cree que fue al primero en escribir un tratado sobre los CM; en cualquier caso, en el Renacimiento ya eran bien conocidos en Occidente. En 1612, Bachet de Méziriac, escribe el primer tratado moderno de matemática recreativa en el que, entre otros temas, se ocupa de la construcción de cuadrados mágicos¹⁷.

Es famoso el siguiente, que aparece en un grabado de Dürero¹⁸



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

"Melancolía", grabado en cobre de Dürero
(1514, Lausana: colección Zafiropoulos)

Se trata de un CM de orden 4 cuya suma es 34, y los dos números centrales de la cuarta fila indican el año en que fue realizado (1514). Como el

¹⁷ ANDRADAS, C. *Póngame un kilo de Matemáticas*. S.M. Madrid, 2000, págs. 12-113. REY, J. y BABINI, J. *Historia de la Matemática*, Vol. 2. Gedisa. Barcelona, 1986, pág. 55.

¹⁸ ANDRADAS, C. op. cit., pág. 119.

anterior tiene también muchas propiedades que con alguna ayuda podrían descubrir los alumnos (al menos en parte), tales como que la suma de los cuadrados de los elementos de la primera y de la cuarta fila es la misma, la suma de los cuadrados de los elementos de la segunda y la tercera fila es la misma; y estas propiedades también se verifican entre sus columnas.

Por otra parte, es fácil comprobar que en todo CM de orden 4, la suma de los números situados en las diagonales es igual a la suma de los números que no están en las diagonales; pues bien, en este CM en particular eso sucede también con los cuadrados y con los cubos de dichos números; es decir:

$$\begin{aligned}(16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2) + (13^2 + 11^2 + 6^2 + 4^2) &= (3^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2) + \\ &+ (9^2 + 12^2 + 15^2 + 14^2) \\ (16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3) + (13^3 + 11^3 + 6^3 + 4^3) &= (3^3 + 2^3 + 5^3 + 8^3) + \\ &+ (9^3 + 12^3 + 15^3 + 14^3)\end{aligned}$$

El siguiente CM es debido a Fermat, quien da la regla para la construcción de cuadrados mágicos que siguen siéndolo después de haberles suprimido su contorno formado por las filas y columnas exteriores. De este tipo es el siguiente cuadrado mágico de orden 9 y suma 369:

2	11	12	13	77	78	79	81	16
6	18	27	26	61	62	65	28	76
7	59	30	35	51	53	36	23	75
8	58	32	38	45	40	50	24	74
73	57	49	43	41	39	33	25	9
72	22	48	42	37	44	34	60	10
68	19	46	47	31	29	52	63	14
67	54	55	56	21	20	17	64	15
66	71	70	69	5	4	3	1	80

Como el anterior, son muchos los matemáticos de prestigio que se han ocupado de los CM, como Pascal, Franklin, Cayley, etc., y muy en especial Euler. Este último construyó no exactamente un CM (según la definición que se ha dado), ya que aunque las sumas de cada fila y de cada columna son iguales (es 260), no coinciden en cambio con la suma de cada una de las diagonales (la diagonal principal suma 282 y la secundaria 210). Es el siguiente:

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

No obstante a lo dicho en el párrafo precedente, creemos que debe ser conocido, pues goza de dos propiedades, la segunda de las cuales es particularmente sorprendente:

- Puede descomponerse en cuatro cuadrados (como se indica en la figura), que no son exactamente mágicos, pero en los que sucede, como en el de partida, que cada suma y cada fila de cada uno de ellos es 130, aunque dicha suma no es coincidente con la suma de cada diagonal.
- Si consideramos al cuadrado como un tablero de ajedrez con sus 64 casillas, el tablero puede recorrerse a salto de caballo de ajedrez desde la casilla ocupada por el número 1, a la casilla ocupada por el número 2, y así sucesivamente, hasta la casilla ocupada por el número 64.

Para finalizar, mostramos un CM de orden 9 que puede descomponerse en 9 cuadrados mágicos de orden 3 (como se indica en la figura). Además, como es fácil comprobar, goza de la curiosa propiedad de que si se calculan las sumas correspondientes a cada uno de los 9 CM y dichas sumas se disponen a su vez en forma de cuadrado (que se ha situado a la derecha), se obtiene de nuevo un CM de orden 3 (de suma 369).

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

42	231	96
177	123	69
150	15	204

5. CURIOSIDADES NUMÉRICAS

Hemos seleccionado dos curiosidades que pensamos pueden tener algún interés didáctico o servir como complemento científico de los profesores; aunque desde luego existen muchas otras adecuadas a alumnos de Primaria, como la famosa anécdota¹⁹ entre Hardy y Ramanujan; las propiedades del número 153, que le hacen ser considerado como un *agujero negro*²⁰; etc.

5.1. Una relación que sorprendió a Platón

Platón es conocido fundamentalmente como filósofo, aunque también fue un amante de las matemáticas (recordemos por ejemplo su conocida prohibición: “*Nadie entre aquí que no sepa geometría*”, inscrita a la entrada de su Academia). En concreto, le sorprendió vivamente la relación²¹: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Esta identidad podría servir para preguntar a los alumnos: ¿al cubo de qué número es igual la suma del primer miembro de la identidad? O, dicho

¹⁹ PERALTA, J. “Anecdotario Matemático”. *Cátedra Nova*, N° 12 (Monográfico II: Año Mundial de las Matemáticas), 2000, pág. 402.

²⁰ SANTALÓ, L. A. “Matemáticas para profesores”. *Epsilon*, N° 38, 1997, págs. 202-203.

²¹ PERELMAN, Y. *Álgebra recreativa*. Mir. Moscú, 1978, pág. 153.

de otra forma; si tenemos tres cubos de aristas 3 cm, 4 cm y 5 cm, llenos de agua y los vaciamos en otro cubo que se llena completamente, ¿cuál será la arista de este nuevo cubo? Veremos entonces como anda su visión espacial y su intuición geométrica.

5.2. El número de la Bestia²²

Del estudio que asigna a las letras de una palabra un determinado número, se deriva la práctica poético-religiosa-cabalística denominada *isosefía* por los griegos; *gematría*, que significa «cálculo alfabético», por los rabinos y cabalistas judíos e *hisab aljuma*, que significa «cálculo de la suma», por los musulmanes.

La gematría no sólo se fundamenta en el valor de los números y de las letras, sino incluso en su grafía, mezclándose a veces la interpretación bíblica con la cabalística. Según esto, en el versículo 18, capítulo 13 del *Apocalipsis*, se dice: “¡Aquí está la sabiduría! Que el inteligente calcule la cifra de la Bestia, pues es la cifra de un hombre. Su cifra es 666” (*Bestia* significa el Anticristo).

La *Bestia* a veces se identifica con personajes como Nerón (primer emperador romano que persiguió a los cristianos), Diocleciano (en cuyo reinado se llevaron a cabo persecuciones contra los cristianos extremadamente sangrientas) o incluso con todo el Imperio Romano (que persiguió a las primeras comunidades cristianas). Si sumamos los valores numéricos de sus letras, en el caso de Nerón hay que recurrir al alfabeto hebreo, y si se trata del Imperio Romano, al alfabeto griego; por ello nos referiremos al emperador Diocleciano, ya que entonces sólo hay que acudir al alfabeto numeral romano (números romanos).

Diocleciano Augusto se escribe en latín DIOCLES AVGVSTVS. ¿Adivinan qué sucede si se suman los valores de las letras que representan números romanos? He aquí la respuesta:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \text{D} & \text{I} & \text{O} & \text{C} & \text{L} & \text{E} & \text{S} & & \text{A} & \text{V} & \text{G} & \text{V} & \text{S} & \text{T} & \text{V} & \text{S} \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 500+ & 1 & + & 100+50 & & + & & & & 5 & + & 5 & + & 5 & & = 666
 \end{array}$$

²² JIMÉNEZ, P. *Los números en la Biblia*. Discurso inaugural del año académico 2003-2004. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 2003, págs. 8-9.

6. JUEGOS NUMÉRICOS

Existen muchos juegos numéricos –alguno ya fue expuesto en páginas anteriores– que pueden servir en cierta medida para atraer a los alumnos hacia las matemáticas. Entre ellos se encuentran los siguientes:

6.1. Una forma muy rápida de sumar cinco números de seis cifras

El profesor o profesora dice a los alumnos que le digan un número cualquiera de seis cifras y, a continuación, que le digan otro; y los va escribiendo en la pizarra en columna. Luego, dice el profesor, *parece que me toca escribir uno cualquiera a mí*, y así lo hace (en realidad, escribe el número que resulta de restar de 999999 el primero que le dijeron; resta que hace mentalmente sin que se note). De nuevo propone que le dicten otro número de seis cifras, y el profesor repite lo mismo que antes, y escribe un *número cualquiera* (el que resulte de restar de 999999 el último que le han dicho). Al final, el profesor hace la suma rápidamente: el resultado es el número que le dictaron en segundo lugar, precedido de un 2 y habiendo restado 2 a la última o, eventualmente, las últimas cifras.

La justificación es sencilla. Si es N el segundo número propuesto, es fácil ver que la suma es:

$$2 \cdot 999999 + N = 2 \cdot (1000000 - 1) + N = 2000000 - 2 + N$$

6.2. Adivinación del número del DNI, del número de teléfono y de una casa rural buscada en una guía

Se pide a los alumnos que escriban un número cualquiera de tres cifras, A, en que la primera y la tercera sean distintas; luego que escriban el número B que resulta de invertir el orden de sus cifras y después que resten el menor de ellos dos del mayor, con lo que tendrán un número C de tres cifras (podría ser de dos, en cuyo caso se colocaría delante un cero para convertirlo en uno de tres). A continuación deben escribir el número D que se obtiene de invertir el orden de las cifras de C y, más tarde, sumar C y D: sea E dicho número²³.

El alumno a quien vamos a descubrir el número de su DNI, debe restar E de dicho número y decir el resultado al profesor. A quien le adivinare-

²³ VIZMANOS, J. R.; ANZOLA, M.; PERALTA, J. y BARGUEÑO, J. op. cit., pág. 21.

mos su teléfono, ha de sumar E al número de teléfono y asimismo comunicar el resultado al profesor. A quien se tratará de averiguar qué casa rural ha buscado en una guía que previamente se le habrá proporcionado, se le dice que mire en la página formada por las tres primeras cifras de E, la casa que figura en el lugar que indica la cuarta cifra de E.

Teniendo en cuenta que E será siempre 1089 (¿por qué?), extremo que no conocen los alumnos, el profesor podrá “adivinar” fácilmente el número del DNI: sumando 1089 al número dado por el alumno; el número de teléfono: restando 1089 y; en fin, los datos de la casa de la guía, que, antes de empezar el juego habrá anotado el profesor: la novena de la página 108.

Planteado todo en este clima de misterio, es posible que el alumno trate de descubrir cómo el profesor ha adivinado esos datos y, con su ayuda, intente buscar la causa.

7. REFLEXIÓN FINAL

Con independencia -obvio es decirlo- de la trascendencia de los números en las matemáticas a lo largo de su historia²⁴, sobre la que, por ejemplo, el filósofo pitagórico Filolao se manifiesta en estos términos²⁵: “*El número reside en todo lo que es conocido. Sin él es imposible pensar nada, ni conocer nada*”; parece conveniente hacer ahora una reflexión general acerca de la importancia de los números en nuestra vida cotidiana. Por ello se proponen las dos siguientes consideraciones, en cierta medida contradictorias.

7.1. ¡Ojalá no hubiera números!

Se recomienda la lectura de este librito de Esteban Serrano Marugán²⁶. Se trata de un cuento en el que un niño, cansado de “hacer cuentas”, un día exclama: “¡Ojalá no hubiera números!”. Por ello, Pitágoras V, el rey del país de las matemáticas, reacciona enfadado haciendo desaparecer efectivamente los números.

Se describe entonces el caos que se organiza en la vida de las personas por este motivo: no se puede leer la hora del reloj, las matrículas de los co-

²⁴ BOYER, C. B. *Historia de la Matemática*. Alianza. Madrid, 1986.

²⁵ LE LIONNAIS, F. et al. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. EUDEBA. Buenos Aires, 1976 (3ª edición), pág. 80.

²⁶ SERRANO, E. *¡Ojalá no hubiera números!* Nivola. Madrid, 2002.

ches están en blanco, los precios de las tiendas y los números de los portales han desaparecido, etc. Y todo vuelve a la normalidad cuando el niño protagonista, que es el único que sigue conociendo la existencia de los números, consigue explicar a su profesor de matemáticas qué son y cuál es su importancia. A partir de entonces, todo empieza a volver a la normalidad.

7.2. El Principito

Concluimos el artículo con los siguientes párrafos del famoso libro de Antoine de Saint-Exupéry²⁷, en donde se relativiza de algún modo la importancia de los números frente a otros aspectos no cuantificables de la vida y no por ello menos valiosos:

“Las personas grandes aman las cifras. Cuando les habláis de un nuevo amigo, no os interrogan jamás sobre lo esencial. Jamás os dicen: “¿Cómo es el timbre de su voz? ¿Cuáles son los juegos que prefiere? ¿Coleciona mariposas?”. En cambio os preguntan: “¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos tiene? ¿Cuánto pesa? ¿Cuánto gana su padre?” Sólo entonces creen conocerle. Si decís a las personas grandes: “He visto una hermosa casa de ladrillos rojos, con geranios en las ventanas y palomas en el techo ...”, no acertarán a imaginarse la casa. Es necesario decirles: “He visto una casa de cien mil francos.” Entonces exclaman: “¡Qué hermosa es!” (...)

Son así. Y no hay que reprocharles. Los niños deben ser muy indulgentes con las personas grandes.

Pero, claro está, nosotros que comprendemos la vida, nos burlamos de los números (...)

—En tu tierra —dijo el principito— los hombres cultivan cinco mil rosas en un mismo jardín... Y no encuentran lo que buscan(...)

—Y sin embargo, lo que buscan podría encontrarse en una sola rosa (...)

—Pero los ojos están ciegos. Es necesario buscar con el corazón”.

²⁷ SAINT-EXUPÉRY, A. de. *El Principito*. Salamandra. Barcelona, 2001, págs. 19-20 y 81.

BIBLIOGRAFÍA

- ANDRADAS, C. *Póngame un kilo de Matemáticas*. S.M. Madrid, 2000.
- BLOCK, D. y DÁVILA, M. “La Matemática expulsada de la escuela”. *Educación Matemática*, Vol. 5, N° 3. México, 1993.
- BOUVIER, A. *et al. Didactique des mathématiques*. CEDIC / Nathan. Paris, 1986.
- BOYER, C. B. *Historia de la Matemática*. Alianza. Madrid, 1986.
- HOGBEN, L. *El universo de los números*. Destino. Barcelona, 1966.
- JIMÉNEZ, P. *Los números en la Biblia*. Discurso inaugural del año académico 2003-2004. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 2003.
- LE LIONNAIS, F. *et al. Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. EUDEBA. Buenos Aires, 1976 (3ª edición).
- LOBO, J. “Anecdótico. El problema $3x+1$ ”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n° 18, 1988, págs. 57-58.
- PERALTA, J. *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Huerga y Fierro. Madrid, 1995.
- PERALTA, J. “De los números poligonales a los números de Bernoulli”. *Educación Matemática*, Vol. 11, N° 2, México, 1999.
- PERALTA, J. “Anecdótico Matemático”. *Cátedra Nova*, N° 12 (Monográfico II: Año Mundial de las Matemáticas), 2000, págs. 397-406.
- PERALTA, J. “Matemáticas para todos: Apología informal”, en *Actas de las Jornadas Provinciales (2000: Año Mundial de las Matemáticas)*. Madrid: Consejería de Educación de la C.A.M. Madrid, 2001, págs. 43-59.
- PERALTA, J. “Acerca de una defectuosa educación matemática”. *Tendencias Pedagógicas*, N° 6, 2001, págs. 163-173.
- PERELMAN, Y. *Álgebra recreativa*. Mir. Moscú, 1978.
- REY, J. y BABINI, J. *Historia de la Matemática*, Vol. 1 y 2. Gedisa. Barcelona, 1986.

ROMO, C. “Los eternos cuadrados mágicos”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, N° 43, 1996, págs. 61-70.

SAINT-EXUPÉRY, A. de. *El Principito*. Salamandra. Barcelona, 2001.

SANTALÓ, L. A. “Matemáticas para profesores”. *Epsilon*, N° 38, 1997, págs. 199-208.

SERRANO, E. *¡Ojalá no hubiera números!* Nivola. Madrid, 2002.

VIZMANOS, J. R.; ANZOLA, M.; PERALTA, J. y BARGUEÑO, J. *Matemáticas 1º ESO (serie Gauss)*. S. M. Madrid, 2002.

WEIL, A. *Number Theory. An approach through history*. Birkhäuser. Basilea, 1983.

LA CONSTRUCCIÓN PROGRESIVA DEL SABER NUMÉRICO DESDE INFANTIL A PRIMARIA

María Antonia Canals Tolosa
Universidad Autónoma de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. EL PASO DE INFANTIL A PRIMARIA

1.1. Los programas educativos

2. QUÉ ES EL CONOCIMIENTO DE LOS NÚMEROS

2.1. Condiciones para la adquisición del conocimiento numérico

3. ESQUEMA DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS Y DEL CÁLCULO

4. CRITERIOS METODOLÓGICOS PARA TRABAJAR EN EL AULA

5. CONCLUSIÓN

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Hoy todas y todos nosotros experimentamos no pocas dificultades en la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas de infantil y primaria. Al mismo tiempo, vemos que los resultados obtenidos en estos niveles son una preparación insuficiente y poco sólida para la secundaria de después.

Las dificultades vienen de muchos campos, que aun siendo en sí mismos externos a la escuela, influyen mucho en su quehacer diario. Quisiera intentar dar algunas pistas para salir al paso sólo de los fracasos que se refieren directamente a la metodología de la clase, y que por tanto son responsabilidad directa de los maestros y maestras, y únicamente en el ámbito del

cálculo, dado que la premura del tiempo no nos permite entrar en los otros campos que configuran el conjunto del aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

Ante todo creo que es importante que seamos suficientemente sinceros con nosotros mismos para reconocer que, por una parte vivimos en un mundo muy cambiante y normalmente reconocemos la necesidad de entrenar a nuestros alumnos para los cambios futuros que tendrán que vivir, pero, por otro lado, estamos muy apegados a nuestras viejas maneras de actuar y nos cuesta demasiado asumir los cambios necesarios en nuestra práctica docente.

A la vista de esta y otras contradicciones, me propongo compartir las reflexiones que hemos venido haciendo en diversos grupos de trabajo, o que últimamente he ido concretando yo misma, con el deseo de que puedan ayudarnos a replantear y mejorar algunos aspectos de la didáctica del cálculo, sobre todo del conocimiento de los números.

1. EL PASO DE INFANTIL A PRIMARIA

Durante el último curso de infantil y el primero de primaria los niños y niñas siguen un proceso muy importante en el aprendizaje de los números, que culmina en la adquisición de las nociones de cantidad y de operación, íntimamente ligadas entre sí. Así pues, por lo que a los números y cálculo se refiere, se trata de uno de los periodos más importantes de su escolaridad. Por esto es necesario que durante el mismo haya una verdadera continuidad en el aprendizaje numérico.

1.1. Los programas educativos

Los programas educativos en general suelen señalar el paso de una etapa a la otra precisamente en medio de este periodo, cosa que hasta cierto punto es natural, dado el gran cambio que la persona realiza a esta edad en los procesos cognitivos en general, y en particular en la maduración del pensamiento lógico. Pero eso mismo nos obliga a todos a cuidar de modo especial este periodo, haciendo todo lo posible para que, al pasar de la etapa infantil a la de primaria, nuestros niños y niñas no sufran un cambio de orientación que suponga un corte o interrupción en el desarrollo del aprendizaje matemático. Los educadores debemos trabajar para darles la posibilidad de continuar el proceso antes citado, iniciado en la etapa infantil y llevarlo a buen término.

Precisamente para ayudar en este sentido, reflexionaremos sobre qué entendemos por conocimiento de los números, y sobre el proceso a seguir para que los niños construyan su primera noción de cantidad, entre cinco y siete años aproximadamente. Este proceso podemos fácilmente extrapolarlo más adelante para la construcción de las primeras nociones de números fraccionarios y decimales.

2. QUÉ ES EL CONOCIMIENTO DE LOS NÚMEROS

En las primeras edades, el conocimiento de un número no consiste en el uso correcto de su grafía ni tampoco en el análisis de las unidades y decenas que contiene. Consiste más bien en haber llegado a una noción de su cantidad de elementos, con pleno significado, la cual es inseparable de la capacidad de clasificar y ordenar correctamente grupos de elementos por criterios de cantidad, del dominio mental de las primeras operaciones, y de la relación directa entre las cantidades conocidas y el conocimiento del entorno inmediato. Todo esto supone la maduración de una serie de habilidades matemáticas, que van desde la manipulación de materiales, pasando por la imaginación de la cantidad, hasta el cálculo mental.

Más adelante, progresar en el aprendizaje de los números, y llegar a conocerlos con cierta profundidad, supone ser capaz de considerarlos desde diferentes puntos de vista, de reconocerlos en contextos diversos, y de comprenderlos como el resultado de combinar de distintas maneras todas las operaciones numéricas conocidas.

Conocer un número es tener una visión mental fácil de la cantidad que representa, saber manipularla mentalmente y estar muy familiarizados con ella. Los números han de llegar a ser nuestros amigos. Este es su conocimiento real, significativo y práctico que deseamos que los niños y niñas de la clase de matemáticas adquieran.

2.1. Condiciones para la adquisición del conocimiento numérico

Para que este tipo de conocimiento real, significativo y práctico se produzca, tres condiciones son necesarias:

- que el punto de partida sea siempre el uso de materiales manipulables, no solamente en la etapa infantil, sino durante toda la primaria, cada vez que introducimos una relación o noción numérica nueva

- que la manipulación no sea un juego fácil, sino un conjunto de actividades encaminadas a actuar sobre los materiales, modificándolos y provocando con ello relaciones (tantos como, más que, menos que, y orden cuantitativo) y operaciones o cambios (añadir, quitar, ver cuantos faltan, doblar, repartir...)
- que de ningún modo estas actividades se planteen a los alumnos después del conocimiento y uso sistemático de sus grafías. Primero debe ser la construcción mental de la noción del número seguida de su expresión verbal, y sólo después su representación escrita, que en la clase no ha de ser sino un símbolo de un contenido previo.

De la forma en que se realicen estas actividades dependerá el tipo de conocimiento que los niños y niñas tengan de los números, y éste se desarrollará tan íntimamente ligado al aprendizaje del cálculo que durante toda la primaria será ya prácticamente inseparable de él.

3. ESQUEMA DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS Y DEL CÁLCULO

Detallaremos el proceso que siguen los niños y niñas en la construcción de la noción de cantidad, teniendo en cuenta que no podemos aplicarlo estrictamente en el orden en que lo planteamos ya que, como todo proceso vital, se realiza de forma distinta para cada persona, y por tanto únicamente lo damos a título orientativo.

1. Manipulación de objetos sueltos.
2. Contaje de uno en uno, y finalmente de forma inclusiva.
3. Series numéricas y primeras correspondencias.
4. Relación entre dos grupos de objetos, por criterios de más, menos o igual.
5. Clasificación de diversos grupos de objetos o dibujos basándose, como criterio, en la cantidad de elementos que los forman, más allá de las apariencias.
6. Ordenación de conjuntos de objetos teniendo en cuenta la cantidad de sus elementos, más allá de sus cualidades perceptivas (volumen u otras).
7. Expresión verbal de las acciones realizadas y de las relaciones numéricas descubiertas. Primer vocabulario numérico oficial en la clase.
8. Identificación de la grafía correspondiente a la cantidad de elementos de un grupo, en el entorno inmediato y luego en actividades escolares. Uso correcto de la misma para expresar números (cantidades) conocidos.

9. Imaginación de cantidades (menores que 10) sin necesidad del material.
10. Reconocimiento práctico de cambios de cantidad con ayuda del material, es decir, primeras operaciones (antes nombradas).
11. Las mismas operaciones realizadas mentalmente con estimación o en forma exacta.
12. Interiorización del orden correcto en la serie numérica (anterior, siguiente,...).
13. Resolución de problemas o juegos sencillos en que intervienen cantidades.
14. Primeros pasos en el cálculo escrito, usando distintas expresiones (flechas, diagramas, tablas,... y números y signos). Estos últimos de relaciones (mayor, menor, igual o desigual) y de operaciones.
15. Realización de las operaciones, tanto mentales como escritas, en forma directa y en forma inversa.
16. Organización y expresión de cantidades mayores que 10 en la base de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Cambios de unidades.
17. Práctica de todas las operaciones conocidas con números grandes, primero con material (regletas), y después por escrito, utilizando los algoritmos o con calculadora, según previa opción del equipo docente.
18. Resolución de problemas relacionados con los números, de diversos tipos.

Notas: Los ítems del 1 al 11 corresponden aproximadamente a infantil y primero de primaria. Del 12 en adelante son propios de primaria.

Una vez superados todos estos pasos para con los primeros números naturales, es conveniente repetirlos (insistimos, también los que se refieren al uso de materiales manipulables) al introducir los fraccionarios y decimales.

Ilustramos algunas de estas actividades con la presentación de los materiales correspondientes.

4. CRITERIOS METODOLÓGICOS PARA TRABAJAR EN EL AULA

Teniendo en cuenta el proceso antes descrito, podríamos preparar actividades, de acuerdo con los criterios siguientes:

- Trabajar con diversos temas: experiencias de la vida cotidiana, construcciones creativas, juegos lógicos y numéricos, cuentos y problemas de solución libre, sin utilizar todavía las grafías de los números.

- Usar una gran variedad de materiales manipulables: bolas, piedras, dados, ábacos, regletas, calculadora.
- Enfocar las actividades desde diferentes contextos, y no sólo en clase de matemáticas.
- Usar distintos lenguajes gráficos para expresar las acciones realizadas: dibujos, esquemas, flechas, y símbolos sencillos inventados por los mismos niños, antes de introducir la escritura numérica con cifras y signos matemáticos.
- A partir de primaria introducir la calculadora, para mejor conocimiento de la base decimal y para fomentar el cálculo mental.
- Asegurar la coherencia y continuidad entre el trabajo de infantil y el de primaria.

5. CONCLUSIÓN

Finalmente, conviene tener en cuenta que sólo podremos realizar lo que acabamos de exponer si sabemos despertar el interés de nuestros alumnos. Si ellos no tienen un interrogante en la mente, esa mente no se pondrá en marcha hacia un camino de búsqueda y descubrimiento propio. La motivación es esencial en todo aprendizaje; también en el de las matemáticas.

Los niños no sólo pueden, sino que han de ser felices haciendo matemáticas. Pero los niños no serán felices si nosotros no lo somos. Nuestras clases son un lugar de encuentro con los niños y niñas, humano y vital, en el que se transmiten conocimientos sobre las materias que deseamos que aprendan, pero se transmiten pero sobre todo actitudes, sobre estas materias. Si el o la maestra no tiene una actitud favorable hacia las matemáticas, muy poco podrá hacer con ellas. Nosotros hemos de ser felices haciendo matemáticas. Es algo esencial.

Tenemos que compartir el deseo implacable de trabajar para que la enseñanza de las matemáticas en la escuela vaya mejorando, aunque sea poco a poco, pero siempre hacia adelante, y creemos que algún día, de alguna manera que no alcanzamos a ver, este sueño será realidad.

BIBLIOGRAFÍA

CANALS, M.A. *Viure les matemàtiques de 3 a 6 anys*. Asociación de Maestros Rosa Sensat. Barcelona, 2000

SOLER, Joan (amb À. Alsina) (coords). *M. Antònia Canals. El compromís amb la renovació de l'escola*. Eumo Editorial. Vic, 2005.

— «M. Antònia Canals i la renovació pedagògica a Catalunya» Dins J. Alsina y J. Soler (coords.): *M. Antònia Canals. El compromís amb la renovació de l'escola*. Eumo Editorial. Vic, 2005.

EL SENTIDO DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Alberto Azipún López
Catedrático de Escuelas Universitarias

- 1. PRINCIPIOS QUE SE ACEPTAN COMO BASE**
 - 1.1. Sobre la Matemática**
 - 1.2. Sobre el material escolar y la construcción de conceptos**
 - 1.3. Sobre el perfil del Profesor**
 - 2. SUGERENCIAS DE INICIOS DE ALGUNOS TEMAS**
 - 2.1. Uso de distintos sistemas de numeración**
 - 2.1.1. Escritura de los números naturales*
 - 2.1.2. Adición y sustracción*
 - 2.2. Introducción al concepto de fracción**
 - 2.3. Primera aproximación al número entero**
 - 2.4. Una iniciación al vocabulario de la divisibilidad**
 - 3. LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA**
- BIBLIOGRAFÍA**

Este **capítulo**, los epígrafes 1 y 2, ofrecen una visión de las bases de partida en los desarrollos de los temas que se citarán. En el 1 se formulan las bases y las condiciones necesarias para desarrollar plenamente las actividades que se propongan. Son el recordatorio de ideas que se supone aceptadas por todos y que, a modo de axiomas, sirven de puntos de arranque para formular adecuadamente las propuestas de trabajo escolar para que éste sea, realmente, una actividad matemática. En el 2 se ejemplifican esas ideas con inicios de desarrollos de temas particulares. El epígrafe 3 sobre geometría debería comenzar por los epígrafes 1. Se pretende mostrar ejemplos de tratamientos escolares que se ajustan a aquellos epígrafes 1. Por tanto, no puede ser un recorrido detallado por todos los cursos de la Educación Primaria. Aun así, el número de figuras que se presentan en ella resulta excesivo; el tema-

rio demasiado largo, y los detalles, prolijos. Por ese motivo tenemos que limitarnos a hacer referencia a los titulares, junto con algún comentario sucinto sobre algunos de ellos.

1. PRINCIPIOS QUE SE ACEPTAN COMO BASE

1.1. Sobre la Matemática

1.1.1. La Matemática no se produce, ni existe, en el mundo sensorial que nos rodea. Solamente está en la mente de cada uno

La observación, la descripción y el intento de comprensión de ese mundo que nos rodea, es un objetivo esencial de la Educación. Desde cierto punto de vista podría aceptarse que no hay otro¹.

1.1.2. No existe una Matemática para adultos y otra para niños. La Matemática es única

La Matemática es única, pero su estudio presenta distintos niveles. El alumno de Primaria puede observar que si divide las sucesivas potencias de 10 por el divisor 7, los restos se repiten periódicamente. Más adelante, cuando alcance otro nivel mental, ese mismo alumno podrá entender la congruencia de Fermat sobre la cuestión general. Son dos niveles distintos, pero el capítulo de la Matemática es el mismo. Y cosa parecida puede decirse en muchos campos de la Matemática tradicionalmente evitados en Primaria: Probabilidad, Teoría de Juegos. Teoría de Grafos, Optimización, Topología, Programación Lineal, etc.

1.1.3. En cada tema de estudio, la distinción, si se hace, entre Matemática elemental y Matemática superior, es arbitraria, no objetiva

Por regla general, cada uno considera elemental todo lo que domina y superior lo que le resulta confuso o le es desconocido. Quien todavía no utiliza con seguridad la técnica de la división de naturales, toma la «prueba del

¹ El Profesor no debe olvidar que por fina e insistente que sea tal observación, no obtendrá Matemática como se obtiene petróleo de un pozo adecuadamente colocado. Lo que nos da esa observación del exterior es motivos y materiales para plantear preguntas sobre su funcionamiento, y las respuestas se obtienen mediante una actividad mental que es matemática.

9» como un truco que le han dado, procedente de un conocimiento superior; pero, cuando comprenda los criterios de divisibilidad, sabrá que esa prueba es falible y descubrirá, por sí mismo, en qué casos puede fallar. A partir de entonces ese conocimiento² pasará a ser elemental.

1.1.4. La Matemática tiene un modo peculiar de razonar que la caracteriza

Eso que caracteriza al razonamiento en Matemáticas es la demostración, inaccesible para el alumno de Primaria. Pero éste tiene métodos de razonamiento propios, no bien explorados ni conocidos todavía, que le permiten realizar ciertas actividades mentales, imprescindibles en la Ciencia Experimental y fácilmente provocables en el campo matemático: Formular claramente una situación, enunciar lo que se busca, experimentar, observar los resultados de la experimentación, sugerir una ley, comprobar si esa conjetura que formuló falla en algún caso, comunicar lo encontrado,... Mucho de todo eso es común a la Ciencia Experimental y a la Matemática. Por tanto, la imposibilidad de la demostración no impide que en la etapa de Primaria se recorra un largo camino matemático.

1.1.5. En todo capítulo de la Matemática existe, explícita o subyacente, una idea central: es la idea de función

Puesto que la Matemática se construye, se formula y se comprende, en términos de función, parece obligado que a las actividades didácticas se les de esa misma orientación.

1.2. Sobre el material escolar y la construcción de conceptos

1.2.1. El material se debe utilizar como un punto de partida y un punto de apoyo pero sin pretender que, en sí mismo, pueda contener concepto matemático alguno

Este apartado está incluido en el 1.1.1. y admite las mismas observaciones que en aquel se hicieron. Materiales sensoriales, imágenes, símbolos escritos u orales, son los instrumentos de que nos servimos para expresar nuestro conocimiento, **pero después de adquirido**. Se piensa, generalmente, que la manipulación previa del material sirve para presentar los problemas e iniciar un estudio que es mental, sin presencia del material.

² Por esa concepción, relativamente subjetiva, de la elementalidad conceptual, obligar a desarrollar Cuestionarios fijos para cada grupo de edad no es lo más acertado.

Una vez adquirido el conocimiento, es cuando se puede volver a la observación y ver reflejada en el material la matemática construida.

1.2.2. La construcción de un concepto no se hace como abstracción de las propiedades del material, sino a partir de la actividad mental que el alumno realiza con su ayuda

Este apartado es la repetición de los dos últimos párrafos explicativos del punto anterior. Las propiedades del material están ligadas a su presentación física (forma, color, constitución, volumen, etc.), mientras que los conceptos matemáticos son mentales

1.2.3. La construcción de un concepto exige la total familiaridad previa con las partes que lo constituyen

Puede parecer una trivialidad pero en la práctica no se atiende lo suficiente a ello. Por ejemplo, se dan técnicas para operar con fracciones cuando aún no se ha interiorizado la propia idea de fracción. De ahí las confusiones constantes que tienen muchos alumnos entre unas operaciones y otras.

1.2.4. Todo lo que se consigue dominar ha tenido una preparación remota

Es frecuente que al alumno se le presente a la vez un concepto, el vocabulario técnico del caso, el simbolismo que se utiliza, la operativa y sus aplicaciones prácticas. Es imposible que en la Primaria se asimile todo eso simultáneamente. Hay que procurar que lo que se quiera presentar para su aprendizaje no sea totalmente nuevo, lo que se puede conseguir si, desde antes, se han ido haciendo aproximaciones sucesivas. En el epígrafe 2 se verá algún ejemplo.

1.3. Sobre el perfil del profesor³

1.3.1. El profesor conoce, siquiera sucintamente, la evolución histórica de los conceptos fundamentales de la Matemática

No será necesario que estudie ampliamente lo que se llama Historia de las Matemáticas, pero en lo que concierne a los conceptos de Primaria sí debe

³ Este epígrafe (1.3.) es una versión muy reducida de un trabajo que en su día se llevó a cabo por los Profesores Pérez Fernández, Gimeno Sacristán y el firmante.

saber que en muchos de ellos emplea los mismos nombres que tuvieron en Grecia, aunque la idea que expresan hoy es muy distinta de la de entonces. Aunque ese conocimiento no lo transmite, debe tenerlo, como tantos otros. Un ejemplo se pone de manifiesto en la palabra «área» o en la «ecuación».

1.3.2. Domina los contenidos del currículum y conoce su proyección matemática posterior a la Primaria

Para transmitir y enseñar no basta el conocimiento somero de los conceptos; es imprescindible un grado de dominio grande para mostrar claramente lo más sencillo. En Primaria, en especial, se requiere que el Profesor conozca las repercusiones posteriores de lo que enseña. Un ejemplo: conoce el teorema de Pitágoras, pero quizá alguno ignore que su importancia estriba en que es la justificación de que se pueda medir longitudes como lo hacemos habitualmente. Deberían examinarse los conceptos de Primaria con esa visión posterior.

1.3.3. Sabe aplicar el proceso característico de investigación en Matemáticas al trabajo escolar diario

Lo que se dijo en 1.1.4. es aplicable aquí. Orientaciones de la actividad como las que allí se expresan constituyen, también, una preparación remota del tipo señalado en 1.2.4 para que el alumno alcance un desarrollo apreciable del sentido crítico; distinga lo que es un argumento de lo que es una demostración, una opinión o una conjetura; distinga entre definición y convenio; sepa expresar algún breve comentario sobre un tema de Matemáticas; sepa exponer, coherentemente escrita, la resolución de un problema; sepa leer un libro de Matemáticas con cuestiones a su alcance, etc.

1.3.4. En su trabajo didáctico sabe utilizar adecuadamente el auxilio de la Tecnología

Para ello no hay que olvidar lo señalado en 1.2.1., puesto que lo que la Tecnología aporta es instrumentos. Es la palabra «**adecuadamente**» lo que pretendemos subrayar en este apartado.

1.3.5. Sabe proponer y desarrollar cuestiones que introducen los problemas y técnicas actuales

Es una continuación natural de 1.3.3. Hay multitud de situaciones tratables en Primaria que se presentan en los problemas de optimización, en la

Teoría de Juegos, en la Programación Lineal, en Topología, en el cálculo de máximos y de mínimos, en la formación de estructuras algebraicas, en la Teoría de Conjuntos. Parece deseable que la Escuela de hoy muestre problemas y hechos de hoy,

2. SUGERENCIAS DE INICIOS DE ALGUNOS TEMAS

2.1. Uso de distintos sistemas de numeración

2.1.1. Escritura de los números naturales

El problema de escribir un número dado en un sistema de numeración dado es un problema de optimización. Escolarmente puede plantearse de varios modos, como todo. Por ejemplo, con una historia oral: «Hubo una vez un país en el que el valor de las distintas monedas era el mismo que el de las distintas potencias de a ($a = 2, 3, 4, \dots$). Como éstas:

$$\boxed{27} \quad \boxed{9} \quad \boxed{3} \quad 1$$

La Ley obligaba a hacer los pagos con el menor número de monedas posible. Fabricad monedas como esas (las que vayáis necesitando) y vamos a vivir un rato como los comerciantes de entonces.» ¿Cómo pagar 31? ¿63? Desde aquí se puede seguir descubriendo las ideas centrales.

O bien: cada alumno tiene ante sí cartones, o simples dibujos, en los que puede poner fichas.

$$\boxed{16} \quad \boxed{8} \quad \boxed{4} \quad \boxed{2} \quad 1$$

Con cada ficha anota tantos puntos como marque el cartón en el que la sitúe. El problema es de optimización: emplear el menor número de fichas posible para reunir los puntos prefijados. Se escribirá cuántas fichas y en qué cartón hay que poner. Así, aparecerán escrituras como 11010, 10011, etc. Se ve que ante cada una caben tres preguntas, que son: ¿cómo se lee? (uno, uno, cero, uno, cero, por ejemplo); ¿qué significa? (que hay una ficha en 16, una ficha en 8, ninguna en 4, una en 2 y ninguna en 1); ¿cuántos puntos gana? (ahora la respuesta exige operar : $16+8+2$).

Desde ese principio se puede seguir cuanto quiera el Profesor, utilizando distintos valores para la base a . En cada caso, un vocabulario como «el juego del 2», «el juego del 3», etc., resulta muy descriptivo. (¿Qué significa la escritura 10? ¿En qué juegos se podrá hacer la jugada 1302?, etc.).

2.1.2. Adición y sustracción

La razón de operar en distintos sistemas es que se comprende, realmente, la técnica que luego se utiliza para sumar o restar números de varias cifras en el sistema habitual de base diez.

En la figura se usa base 3. En la parte superior está marcado con & el número 1202 y en la inferior está marcado 221. La suma será el número que resulte después de optimizar lo que se ve.

&	&&		&&
27	9	3	1
	&&	&&	&

Todo consiste en descubrir (cosa que se habrá hecho en el punto 2.1. que tres fichas en una casilla hacen el mismo efecto que una sola en la potencia siguiente. Por tanto no hay que calcular. Eso es lo que luego se dice «llevar», pero que en base diez no se puede materializar porque el tercer cartón ya necesita cien fichas para completarse y en el ejemplo solamente 9. Las tres fichas del cartón del 1 se quitan y se pone una en el 3; así quedan tres en el 3, por lo que se quitan y se pone una en...

El resultado final es

&&	&&		
27	9	3	1

que se escribe 2200.

2.2. Introducción al concepto de fracción

He aquí un modo de atender a los puntos 1.1.5. y 1.1.4. La escritura $\times \frac{a}{b}$ será el nombre de una función, un operador, una orden: «¡multiplica por a y divide por b!». Si a y b son primos entre sí, actúa sobre los múltiplos de b y a cada uno le asocia un múltiplo de a. De la parte $\frac{a}{b}$ diremos que es una fracción.

Al escribir y calcular $15 \times \frac{7}{5} = (15 \times 7) : 5 = 21$ diremos que la frac-

ción actúa sobre el número 15 (Nota para el lector: escribir $15 \times \frac{7}{5} = 21$

evoca la representación funcional $f: x \rightarrow y$, mientras que escribir $\frac{7}{5} \times 15 = 21$

evoca la $f(x) = y$). Después de ejercicios de confirmación, se realizan los inversos: ¿Qué fracción a 21 le asocia 17? ¿Qué fracción deshace (o anula) la

acción de la $\frac{a}{b}$? En particular, se señalan las fracciones inversas una de otra:

una pasa del original a la imagen y la segunda retrocede de la imagen al original. Si se quiere, es la idea que permite definir la fracción cociente de dos.

Es inmediato el descubrimiento de que las fracciones de la forma $\frac{na}{nb}$

(a y b primos entre sí, $n = 1, 2, 3, \dots$) son equivalentes. Todas dan la misma

imagen para el mismo número: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots, \frac{2n}{3n}, \dots$ dan 12 como ima-

gen de 18.

También es inmediata la ordenación. Para ordenar las fracciones

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}$$

haremos que actúen sobre un número adecuado, por ejemplo 24. Las imágenes respectivas son 36, 4, 14, 15, 30. La ordenación de

éstas es $4 < 14 < 15 < 30 < 36$, y eso justifica escribir $\frac{1}{6} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$

Para buscar una fracción que se pueda llamar suma de otras dos puede

procederse como en el ejemplo que sigue. Se busca $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$. Para ello se hace

actuar a cada una sobre el mismo número. Actuando sobre 20, la primera da como imagen 15 y la segunda 8. La suma $15+8$ es 23. Así se ha pasado del original 20 a 23. ¿Qué fracción sirve para ello? (cosa ya entrenada). Por tanto

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$$

Como primera introducción no sería necesario seguir, pero si se quiere pasar a justificar el producto de fracciones, puede usarse la idea de función compuesta de dos. La figura lo ilustra.

$$15 \text{ ---- } 4/5 \text{ --- } \rightarrow 12 \text{ ----- } 2/3 \text{ -- } \rightarrow 8$$

¿Qué fracción hace pasar directamente de 15 a 8? Por eso puede escribirse $\frac{4}{5} \# \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Se utiliza un símbolo como # para evitar en este momento el x, que tiene un significado anterior. Pero a la operación # se le puede llamar «producto de fracciones».

La división puede presentarse como marcha atrás y la figura que sigue describe la situación $\frac{8}{15} : \frac{2}{3}$.

$$\text{--- } a/b \text{ -- } \rightarrow X \text{ ---- } 2/3 \text{ ---- } \rightarrow 8$$

$$\text{----- } 8/15 \text{ -----}$$

Se trata de calcular a/b. Se da marcha atrás desde 8. ¿Qué fracción pasa de 8 a X? (la 3/2). Luego X es $8 \times 3 : 2 = 12$. La fracción a/b hace pasar de 15

a 12 y por tanto es $\frac{12}{15}$. Así, $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{12}{15}$

Más adelante las fracciones serán números, pero para entonces las operaciones ya son familiares.

2.3. Primera aproximación al número entero

Un material de apoyo puede consistir en pequeños cartones, como los usados en 2.1., unos azules y otros blancos (por ejemplo). En cada uno hay escrito un número, no todos distintos. Regla para el juego: los cartones azules hacen ganar tantos puntos (no materializados) como señale el número escrito. Los cartones blancos los hacen perder.

Se trabaja con el material. Se toma, al azar, un conjunto de cartones para hacer una jugada. ¿Cuántos puntos hace ganar o perder esa jugada? Se plantea un problema de optimización: buscar otra jugada que produzca el mismo efecto pero con menos cartones; buscar la jugada con el mínimo de cartones. Entre las observaciones que se hagan estará la necesidad de tener algún cartón con cero. ¿Requiere alguno de los dos colores usados?

Paso al simbolismo: para referirse al número en un cartón azul escribiremos en la forma a^+ , y escribiremos b^- para los números en cartón blanco. Con pocos ensayos y observaciones se podrán escribir razonadamente igualdades como $9^+ + 6^- + 2^- + 4^+ = 5^+$; $3^- + 7^+ + 4^- = 0$; $8^- + 9^- + 5^+ = 12^-$, etc. Con un ejercicio suficiente, se distingue entre una referencia al cartón y una referencia al número que tiene escrito, así como el signo $+$ del superíndice $+$. El cartón es azul o es blanco; del número diremos que es positivo o es negativo. El 0 no tendrá signo y estará en un cartón de otro color.

Aparecen observaciones sobre la adición: si todos los cartones de la jugada son de un mismo color (todos los números del mismo signo), el cartón único resultante es... (el resultado es...).

También se puede iniciar una aproximación a la sustracción de enteros. Se toman dos cartones, por ejemplo los representados por 9^+ y por 5^- (Nota al lector: Vd. distingue cuando hablamos de cartones aunque escribamos números; no dibujamos cada cartón en figuras por comodidad tipográfica). Problema: puedes añadir otro cartón (y entonces habrá tres) o puedes retirar un cartón (y te quedarás con uno); en ambos casos, el resultado ha de hacer ganar 9 puntos. Pruebas suficientes hacen llegar a la conclusión de que restar a^+ equivale a sumar a^- y restar a^- equivale a sumar a^+ . No hay dificultad en escribir cosas como $2^+ - 5^+ + 3^- - 7^- = 2^+ + 5^- + 3^- + 7^+$ **sin hacer cálculos**. En su día, un alumno que haya pasado por esta aproximación nunca dirá, ni se le ocurrirá, lo de que «se pasa un número de un miembro al otro cambiándole de signo».

Está claro que no hemos usado números enteros, pero cuando se llegue a su introducción formal al alumno no le resultarán desconocidas las situaciones iniciales (Ver el punto 1.2.4.)

2.4. Una iniciación al vocabulario de la divisibilidad

En el epígrafe de «Geometría en la Educación Primaria» se consideran, por sí mismas, actividades consistentes en desplazarse por el plano siguiendo direcciones dadas. Son muy aprovechables para iniciar o apoyar el estudio de muchas cuestiones. Un ejemplo:

Cada alumno tiene una tabla como la de la figura:

27	54	108	216	432
9	18	36	72	144
3	6	12	24	48
1	2	4	8	16

Por las filas se avanza un paso hacia la derecha mediante $\times 2$; por las columnas se avanza un paso mediante $\times 3$. En realidad, en principio, el alumno ha de rellenar la tabla, en la que solamente ve el inicio, 1. Se recorren itinerarios partiendo de 1 (siempre hacia delante; no se permite retroceder): 1, 2, 6, 18, 36, 72; 1, 3, 6, 12, 24, 72; etc. Vocabulario: de los números escritos se dice que son **divisores** de 72. Ejercicios adecuados. ¿Cuántos divisores tiene 12? ¿Y 72?, etc. ¿Cómo lo calculas? Si prolongas la tabla, ¿aparecerán más divisores de cada número? (el número de divisores de un número es finito).

Hacemos caminos partiendo de 12: 12, 24, 72, 144; 12, 36, 108, 216; etc. Vocabulario: los números escritos son **múltiplos** de 12. Escribe más múltiplos de 12. Múltiplos de 18. De 24, etc. Si la tabla se prolonga, ¿aparecerán más múltiplos de cada número? (el número de múltiplos de un número es infinito).

Sales de 18 para hacer un camino y a la vez sales de 24 para hacer otro camino. ¿Cuál es la casilla más próxima en que se pueden encontrar? Vocabulario: ese número, 72, es el **mínimo común múltiplo** del par (18; 24). Ejercicios adecuados de consolidación.

Hay caminos que van sale de 1 hasta 36 y otros que van de 1 hasta 24. Busca dos que coincidan el mayor número de pasos posible. ¿En qué número se separan? Vocabulario: ese número es el **máximo común divisor** del par (36; 24). Ejercicios de consolidación. Etc.

Esta iniciación permite mucha más extensión y ha sido experimentada desde hace años con toda clase de alumnos. Siempre con éxito si no se quiere obtener más de lo que da de sí, que es mucho.

3. LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Es lo que recoge el recuadro. **La ordenación del mismo no supone ningún condicionamiento cronológico.**

G.1. OBSERVACIÓN Y RECONOCIMIENTO DE FORMAS

G.1.1. Observación de formas en el exterior

G.1.2. Reconocimiento de formas parciales

G.1.3. Sucesión de formas

G.1.4. Reconocimiento de la misma forma en distintos tamaños del objeto

- G.1.5. Reconocimiento de objetos iguales en distintas posiciones
- G.1.6. Reconocimiento de imágenes iguales en distinta posición
- G.1.7. Composición y descomposición de formas

G.2. POLÍGONOS.

- G.2.1. Reconocimiento y construcción de polígonos
- G.2.2. Clasificación de los polígonos
- G.2.3. Estudio particular de las distintas clases de polígono
- G.2.4. Relaciones métricas elementales entre lados y entre ángulos

G.3. ALGUNAS CONSTRUCCIONES

- G.3.1. Construcciones por plegado
 - G.3.1.1. Construcción de dos segmentos paralelos
 - G.3.1.2. Construcción de dos segmentos perpendiculares
 - G.3.1.3. De la mediatriz de un segmento
 - G.3.1.4. De la bisectriz de un ángulo
 - G.3.1.5. De un ángulo recto
 - G.3.1.6. De un triángulo rectángulo
 - G.3.1.7. De un triángulo equilátero
 - G.3.1.8. De un cuadrado
 - G.3.1.9. De un pentágono regular
- G.3.2. Construcciones de poliedros regulares por trenzado
 - G.3.2.1. Modelo para construir un cubo
 - G.3.2.2. Modelo del tetraedro
 - G.3.2.3. Modelo del octaedro
 - G.3.2.4. Modelo del icosaedro

G.4. RECORRIDOS DE CAMINOS

- G.4.1. Recorrido de laberintos
- G.4.2. Recorridos de caminos siguiendo distintas direcciones
- G.4.3. Cálculo del número de caminos
- G.4.4. Recorridos por cuadrículas
- G.4.5. Recorridos por distintos reticulados del plano
- G.4.6. Construcción de circuitos
- G.4.7. Simbolización de los recorridos
- G.4.8. Determinación de la posición de un punto por sus coordenadas
- G.4.9. Recorridos por las aristas de un cubo

G.5. TRANSFORMACIONES PLANAS

G.5.1. Transformaciones de igualdad

G.5.1.1. Observación, construcción e identificación de traslaciones

G.5.1.2. Construcción e identificación de simetrías

G.5.1.3. Composición de simetrías

G.5.1.4. Reconocimiento de rotaciones

G.5.1.5. Igualdad de figuras planas

G.5.2. Otras transformaciones planas

G.5.2.1. Observación y construcción de homotecias

G.5.2.2. Iniciación a la semejanza

G.6. CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

G.6.1. Utilización de materiales sensoriales

G.6.2. Utilización de imágenes

G.6.3. Cálculo de áreas con ayuda de un reticulado del plano

G.6.3.1. Contar unidades de área

G.6.3.2. Fórmula de Pick

G.6.3.3. Cálculos en reticulados no cuadrados

ALGUNAS PRECISIONES

GENERAL: Este epígrafe está dirigido al lector, quien, seguramente, será un Profesor de Educación Primaria. Por eso, utilizamos un lenguaje directo y general. Cuando escribimos cosas como «a cada par $(x; y)$ le corresponde el par $(ax+b; cy+d)$ » o «ese esquema tiene un circuito hamiltoniano», u otras de ese tipo, expresamos una idea en «lenguaje-Profesor», que éste podrá traspasar a sus alumnos con el habitual en el trabajo escolar.

G.1. Durante la enseñanza de las Matemáticas en la EDUCACIÓN Primaria, el aprendizaje de los comienzos de la Geometría tiene gran parecido con el de las Ciencias de la Naturaleza, porque, durante años, todo cuanto puede llamar la atención del niño está en su exterior: luz, sonido, objetos, formas, colores, tamaños, fenómenos físicos, le son de observación (de imposición) diaria. Cuando llega a la EDUCACIÓN Primaria, todo ello ya lo tiene observado, aunque no domine el vocabulario convencional adecuado. Y si ha pasado por la Educación Infantil, también se le ha hecho distinguir, ordenadamente, formas, colores, tamaños,...

Respecto a este epígrafe G 1, lo que hace el alumno en EDUCACIÓN Primaria es consolidar, clasificar y comprender lo que ya había visto. El lector sabe de sobra que una actividad como la que sugiere la figura 1 es un pri-

mer contacto con la idea de clasificación (clasificar, hacer clases). Se entiende que los triángulos son firmas físicas (de madera, plástico, papel, etc.). Se toma uno de ellos y se va colocando sobre cada uno de los demás, haciendo un montón con los iguales. Se recomienza con otra, y se sigue hasta haber hecho los montones (clases) a que haya lugar. Lo mismo cabe decir para la clasificación según cualquier otro atributo y sobre la ordenación (por tamaños, por número de vértices,...).

G.2. Se ha dicho, quizá exagerando un poco, que, «En Matemáticas, lo que no es función es vocabulario». En la EDUCACIÓN Primaria mucho de lo que concierne al contacto con polígonos es vocabulario y hay que irlo presentando paulatinamente. El Profesor ya sabe recorrer, a lo largo de los cursos escolares, la secuencia verbal desde «con puntas», «con cuatro puntas», «de cuatro vértices», «cuadrilátero», las posteriores clasificaciones y las líneas notables en cada uno⁴.

G.3. Las construcciones que se citan en los subepígrafes de G 3.1. no se trabajarán consecutivamente, sino durante la observación y el estudio de los elementos citados para ser contruidos. Si se habla, como iniciación, de ángulo recto, entonces se dirá cómo se construye por plegado un ejemplar y lo mismo para los demás.

Otra cosa es el trenzado para construir algunos poliedros regulares. Esa cómoda técnica no suele citarse con frecuencia y por eso damos como ejemplo en la figura 2 el modelo, a pequeña escala, para construir el cubo. La línea de puntos significa que la tira 1 con cuatro cuadrados y la tira 2 con cinco, están separadas. Se comienza colocando la cara E (encima) sobre la D (debajo) y luego se sigue el trenzado: 3 sobre 1; 2 sobre 3; 1 sobre 2; 3 sobre 1; 2 sobre 3; cierre (bajo E).

G 4. Uno de los descubrimientos que se consiguen con actividades de este epígrafe es el de coordenadas de un punto, fundamental, como se sabe, en la Matemática y perfectamente utilizable en la EDUCACIÓN Primaria. También se consigue familiaridad con muchos esquemas que, en estudios posteriores, se le mostrarán de nuevo para introducirle en conceptos como probabilidad, espacio vectorial, concepto de distancia, estudio de grafos, y otros muchos. Muchos de estas actividades están pensadas siguiendo la orientación dada en 1 2.4.

⁴ Será en el estudio de las simetrías axiales y en la manipulación de rotaciones donde cuadrado, triángulo equilátero, rectángulo, etc., serán observados como invariantes en algunas de esas transformaciones.

I.- Se pueden hacerse propuestas como la de la figura 3, en la que se trata de recorrer caminos desde la salida, S, y siguiendo las direcciones de las flechas; cada movimiento llevará desde un nudo hasta otro inmediato. Se comprueba que cada paseo desde S hasta M tendrá cinco pasos. Se comienza por dibujar caminos y luego contarlos ¿Cuántos paseos para ir desde S hasta cada uno de los puntos de la cuadrícula? ¿Cuántos que comiencen por un paso en la dirección --- $\rightarrow$?

¿Cuántos que no atraviesen la bisectriz del rectángulo total? ¿Cuántos que ni siquiera la toquen? Luego hay que decir las cosas por escrito (simbolismo). Si D (derecha) y A (adelante), significan cada una un paso en una u otra dirección, aparecerán escrituras como DDIDI, que luego hay que interpretar. En cada punto se destacará la escritura del camino con menos cambios de dirección (el más cómodo). Para M es el DDDII que se sintetiza en (3D; 2I) y, puesto que siempre empezamos por la derecha, basta poner (3; 2). Colocando la salida en puntos adecuados, los caminos tendrán pasos hacia la derecha, izquierda, adelante, atrás. Después de que se haya trabajado el tema del epígrafe 2.3., se puede llegar a las escrituras del tipo $(a+ ; b+)$, $(a+ ; b-)$, $(a- ; b+)$, $(a- ; b-)$.

II. Los esquemas dicotómicos y conmutativos son intercambiables, pero según el problema a resolver, hay unos más intuitivos que otros. Muy útil es el de la figura 4. Se recorren caminos siguiendo las flechas y en cada casilla se escribe el número de ellos que la tienen como meta. Así se ha conseguido construir el triángulo de Tartaglia y el Profesor verá cuáles de los numerosos problemas que lo tienen como base puede plantear en su aula., ahora o más tarde. Puede insistir: escribamos en cada fila, a la derecha, la suma de los números de la casilla de cada nivel (y se obtiene 2 , 22, 23, 24,). Se puede identificar cada flecha con «cara» o «cruz» de una moneda y hacer recorridos al azar. De ahí a poder resolver problemas de probabilidad en una distribución binómica hay un paso. En todo caso, es una gran preparación para estudios posteriores (ref. 1. 2.3.).

III. También se puede ir adquiriendo familiaridad de uso con grafos y circuitos . La figura 5 repite el conocido juego de Hamilton: Saliendo del punto señalado , ¿hay un camino para pasar por todos los puntos (casas) una sola vez y volver al de salida? Y en la figura 6, se pide estudiar si existe algún camino que saliendo de un punto (pueblo) permita recorrer todas las carreteras una sola vez. Sobra dar ningún vocabulario, porque solamente buscamos que el alumno entienda cuáles son los problemas que se plantean en los recorridos por grafos. Cuando tenga que tratar con «circuitos» , «ciclos» , «cadenas eulerianas» , etc. No partirá de la nada.

Una actividad bien acogida es la expresada en la figura 7. Hay que intentar dibujar cada figura sin levantar el lápiz (no es sino otro planteamiento de lo mismo). ¿Con cuáles se puede hacer? No se buscan las condiciones para ello, sino solamente un primer contacto con estas situaciones.

G.5. La idea fundamental a transmitir es que cada transformación geométrica queda definida por una operación aritmética sobre los pares de números que identifican a los puntos de la figura inicial. Sumar (restar), multiplicar (dividir), cambiar de signo, elevar al cuadrado, cualquier combinación de esas y otras operaciones, define una transformación geométrica. Por tanto, hay infinitas transformaciones geométricas⁵.

G.5.1. En la figura 8 el alumno observa los esquemas. Escribe las coordenadas de los vértices de cada figura. Cuestión: ¿Cómo se pasa de las coordenadas de cada punto de la primera figura (la más próxima al origen) a las de los puntos correspondientes de la segunda? Se encuentra la respuesta: En lugar de $(x; y)$ se escribe $(x+8; y+3)$. Se da un vocabulario: La operación que lleva de un par de números al otro es una suma; el paso del primer dibujo al segundo es una traslación. En el ejemplo, «traslación de vector 8^+ ; 3^+ »).

La misma figura 8 sirve para descubrir la traslación inversa de la dada. ¿Cómo se pasa de la segunda figura a la primera? Y con presentaciones del mismo tipo, que el lector conoce, se toma contacto con la composición de traslaciones.

Se subrayará la relación entre traslación (transformación geométrica) y suma de enteros (operación numérica); para cada entero (traslación), existe un entero opuesto (traslación inversa); la suma de dos enteros (composición de dos traslaciones) es un entero (una traslación), etc. (El lector sabe que el conjunto de las traslaciones del plano es un grupo conmutativo).

G.5.1.2. En esta primera aproximación hemos de reducirnos a utilizar ejes de simetría particulares, que ocasionan expresiones analíticas sencillas. Son: un eje coordenado como de simetría, paralelo a uno coordenado, y las bisectrices de uno u otro cuadrante. Para empezar, figura 9, se pide doblar la hoja por la recta para calcar la nueva posición del dibujo (por ejemplo, pinchando en los vértices de modo que queden las imágenes señaladas). Obtenida la imagen, se escriben las tablas de coordenadas de los puntos (originales, imágenes). Se comparan y se llega a descubrir la correspondencia

⁵ Resulta obvio que este punto de vista recuerda lo dicho en el epígrafe 1.1.5. En consecuencia, para cada transformación no se dejará de subrayar la transformación inversa y la compuesta de dos.

$(x, y) \longrightarrow (y, x)$. Inmediatamente se pide la expresión del paso inverso. Esta transformación es su propia inversa.

El siguiente ejercicio será de consolidación : el alumno hace un dibujo formado por segmentos con vértices en puntos de la cuadrícula y se le ordena hacer la transformación. En esa misma figura se inicia el vocabulario: «simetría de eje e», «eje de simetría», «punto simétrico de otro». Se comprobarán algunas propiedades de la simetría axial: el eje es la mediatriz de los segmentos que cada punto forma con su simétrico ; estos segmentos son paralelos entre sí. Propiedades que le servirán para decir algunas veces que lo que tiene delante no es una simetría.

Del mismo modo se estudiarán las simetrías de eje el de abscisas, o el de ordenadas, o una recta paralela a uno u otro de ellos. Se termina con un trabajo como el de la figura 10. ¿Cómo hallar la figura simétrica, si el eje no es ninguno de los estudiados? Se observa la solución antes de obtenerla dibujada: poniendo un espejo adecuadamente; después se aplican las propiedades estudiadas anteriormente

G.5.1.3. Sobre una hoja cuadriculada se presentan dos ejes, paralelos a uno de los coordenados; el alumno hace un dibujo, a partir del cual llega a descubrir que la compuesta de esas dos simetrías es una traslación y a fijar el vector de ésta . Después, se presenta la hoja cuadriculada de la figura 11 donde solamente aparecerán el origen y el dibujo (1º). Hay que hallar el dibujo simétrico del (1º) respecto del eje Y; para empezar, escribiendo tabla de coordenadas, y después haciendo el dibujo. Así aparecerá (2º). Luego se busca el simétrico de (2º) respecto a la bisectriz del primer cuadrante (3º) Se ve que el paso directo de (1º) a (3º) es $(x, y) \longrightarrow (y, x)$. No es una simetría, porque carece de las propiedades estudiadas en G 5.1.2. Tampoco es una traslación.

G.5.1.4. Es continuación inmediata del anterior. El alumno ha experimentado con rotaciones, aunque sin utilizar su nombre. Ahora conocerá su origen como compuesta de dos simetrías de ejes con punto común , y también el vocabulario usual.

G.5.1.5. Un ejercicio sobre igualdad de figuras que encierra otras consideraciones, es el siguiente: Se dan cuatro puntos que correspondan a los vértices de un triángulo equilátero y su centro. Se pide dibujar tres segmentos, con extremos en los puntos, de modo que ningún punto quede aislado.

En la figura 12 hay tres soluciones; son tres formas, pero dos de esas figuras son geoméricamente iguales. El problema es: ¿cuántas formas se pueden dibujar? ¿Cuántos modelos **distintos**?

El mismo problema es interesante con cuatro puntos, vértices de un cuadrado y el trazado de tres segmentos, así como con cinco puntos (vértices de un cuadrado y el centro) para dibujar cuatro segmentos. Nótese que si se da una hoja ya completada con todos los dibujos posibles, se podría emplear en los comienzos para el epígrafe G.1.6.

Y para la búsqueda y reconocimiento de transformaciones de igualdad (isometrías) es enriquecedor el ejercicio de buscar las isometrías que transforman un triángulo equilátero en sí mismo, o un cuadrado, o un rectángulo, o un polígono regular distinto de los dos citados

G 5.2. Con la idea de que toda transformación se define con una operación numérica, es elemental ensayar la $(x; y) \rightarrow (ax; y)$ o su análoga $(x; y) \rightarrow (x; by)$. Inmediatamente surge el ensayo de su compuesta $(x; y) \rightarrow (ax; by)$. En particular, nos detendremos en la homotecia $(x; y) \rightarrow (kx; ky)$. Podemos hacer observar sus propiedades y finalmente estudiar las compuestas de homotecias como esa con transformaciones de igualdad. En la figura 13 se presenta la correspondiente a la compuesta de la homotecia (centro en el origen) de razón 3 con la traslación de vector $(8; -2)$. Se sobreentiende que, en principio, se muestra solamente el polígono origen para que sea el alumno quien realice las figuras correspondientes y las observaciones adecuadas. Se finalizará haciendo un resumen de las propiedades de la semejanza y dando el vocabulario pertinente.

G.6. La ordenación del trabajo puede ser la sugerida por los subepígrafes destacados en G.6 pero, fiel al 1.1.5., el lector entiende que la palabra «área» expresa una correspondencia desde el conjunto de las figuras planas (En EDUCACIÓN Primaria) hacia los números reales positivos (rationales en EDUCACIÓN Primaria). Entre ellas, que la elección de la figura a la que corresponde 1 es arbitraria. Por tanto, el área de cada figura depende de la unidad elegida. Para resaltar esa idea parece conveniente presentar trabajos en distintos reticulados del plano y no sólo en cuadrículas, como se ve en la figura 14 y figura 15. En todo caso, el alumno comienza por contar las unidades de área encerradas por el borde de cada polígono y trabajará a partir de ahí. En la hoja cuadrículada observará o comprobará las fórmulas usuales para los polígonos convexos que aparecen en ella. Con todos los de la hoja se propone una investigación: se forma una tabla escribiendo para cada polígono tres datos: 1º) el área, obtenida contando unidades de área, (S); 2º) el

número de nudos de la cuadrícula que tiene el borde del polígono, (B); 3º) el número de nudos que aparecen en el interior del polígono, (I). Confeccionada la tabla, se trata de encontrar una relación entre los tres números que sirva para todos los ejemplos (fórmula de Pick⁶).

El mismo estudio, hecho en la hoja triangulada, hace ver enseguida que **las fórmulas obtenidas anteriormente no sirven ahora**. En esta segunda hoja, el área del triángulo equilátero se expresa por el cuadrado de la longitud de su lado (la unidad de longitud es el lado del triángulo elemental).

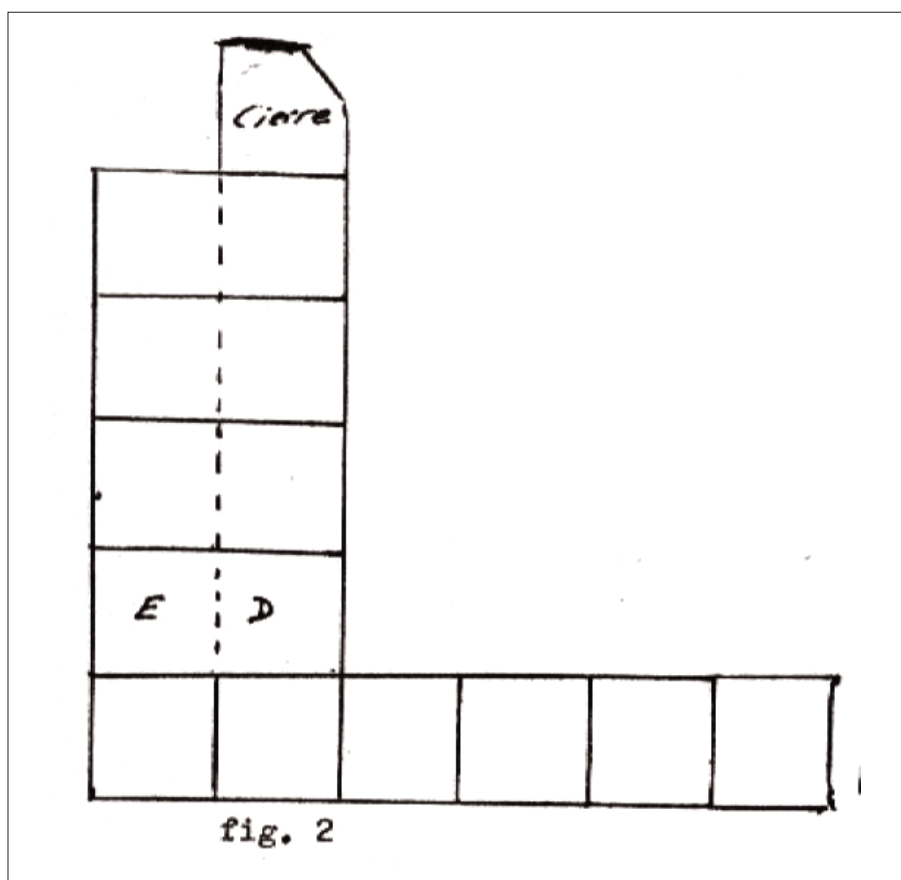
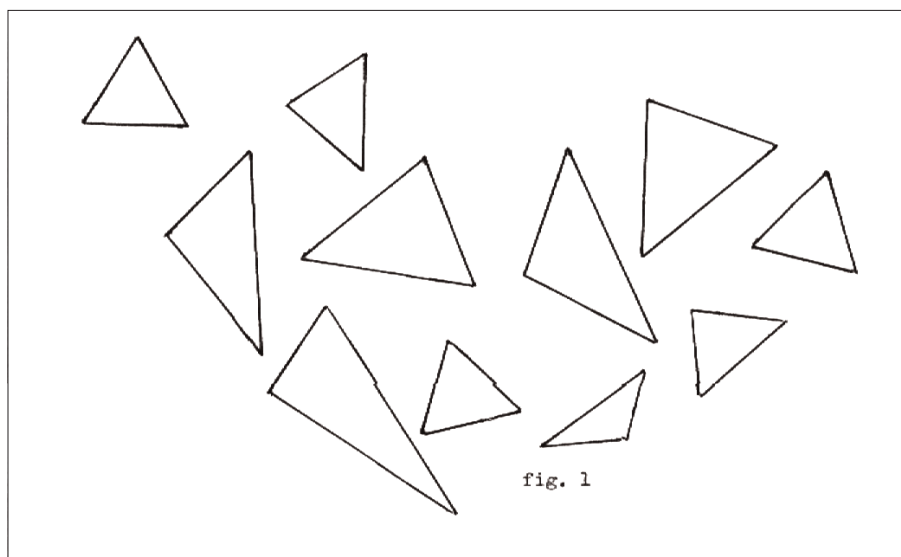
La fórmula de Pick⁷, hallada en la primera hoja como $S = \frac{1}{2} B + I - 1$, apa-

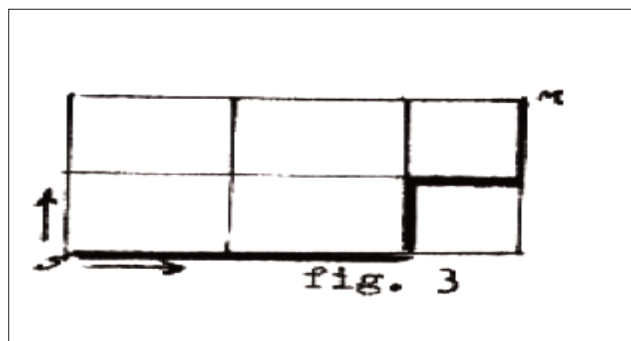
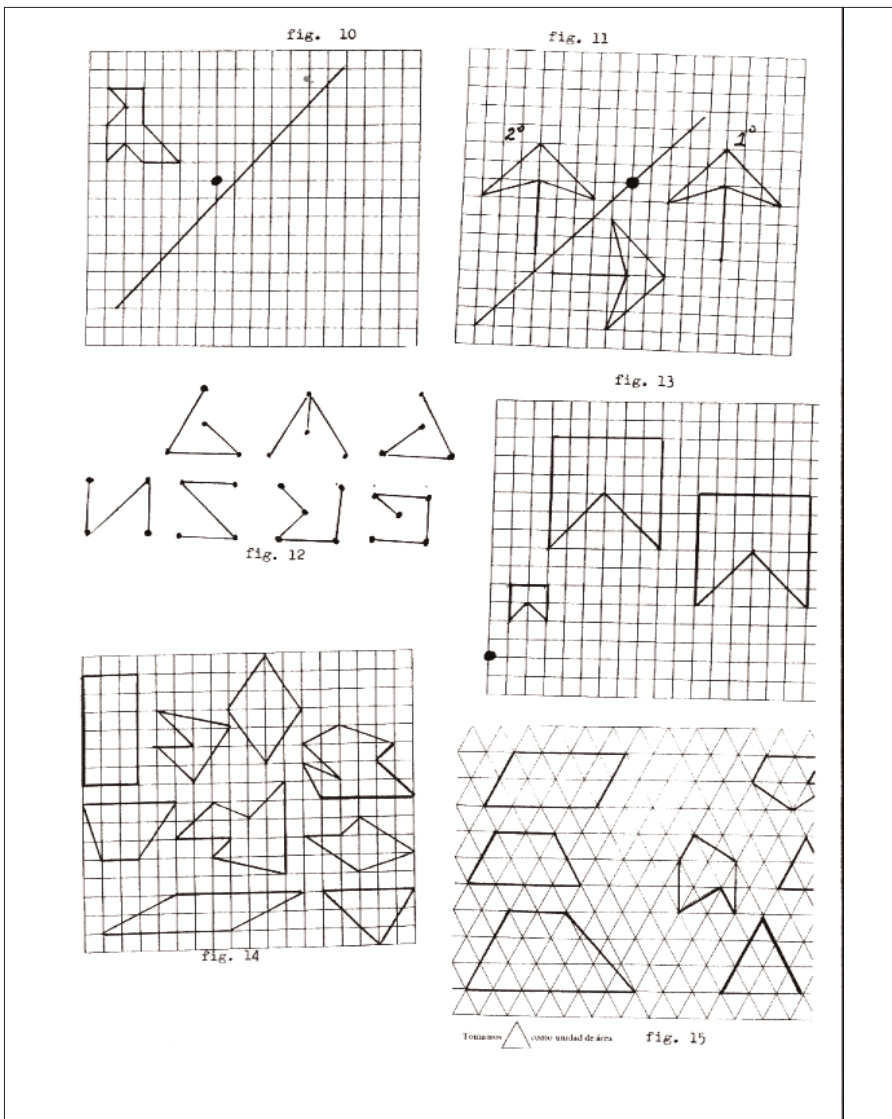
rece en la segunda como $S = B + 2I - 2$. No es necesario ir más allá, ni aprenderse ninguna fórmula. Las que se usan en la práctica son las que conocemos, pero la enseñanza está para saber cómo son las cosas. Lo que aplicamos, casi siempre son casos particulares de algo que pocas veces se muestra al alumno.

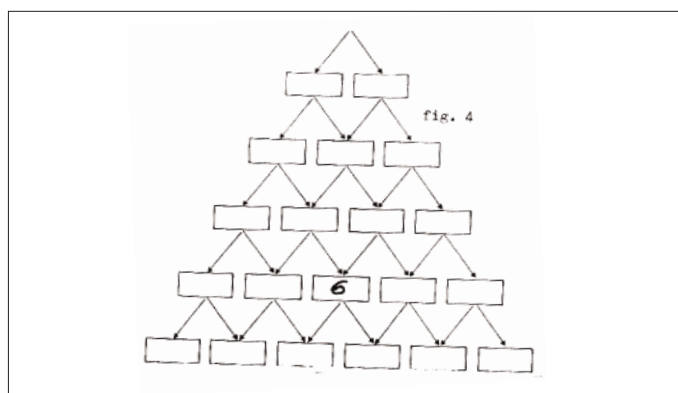
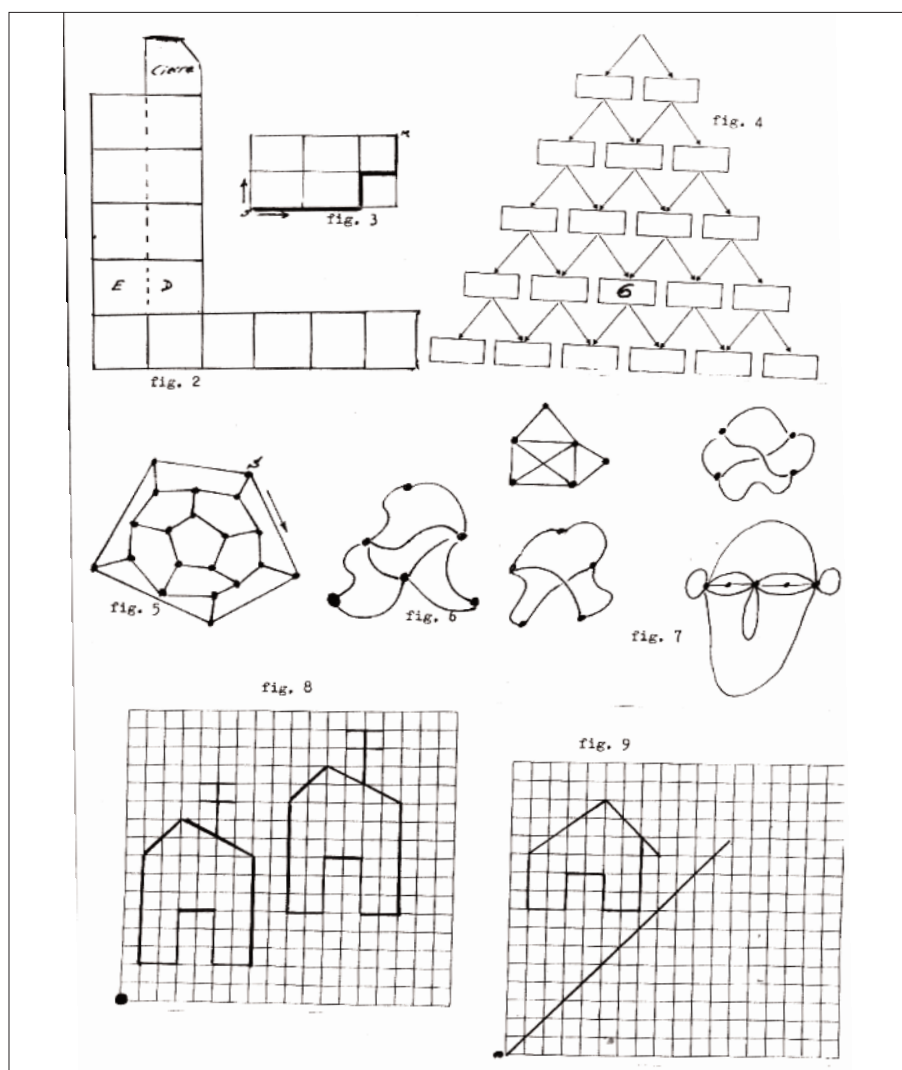
Con actividades análogas se estudiará la posible composición y descomposición de figuras (propiedad aditiva del área), las fórmulas de cálculo, aproximación para contornos curvos, etc.

⁶ George Alexander Pick fué un matemático austriaco nacido en Viena (1859) que murió en un campo de concentración nazi durante la II Guerra Mundial (se cree que en 1943). Estableció la relación que existe entre los nudos de una malla y el área de un polígono dibujado sobre ella. Cada punto de intersección de una recta horizontal y una vertical se denomina **nudo**.

⁷ DE TEMPLE: «*Piks formula: A retrospective*». Mathematics Notes WSU Vol 32 N.º 3-4, Nov. 1989. FUNCHENBUSCH. «*From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem*» Americall Math. Monthly, 81, June-July, 1974 p. 647-648. POLIS. «*Pick's theorem extended and generalized*» Mathematics tea- chef. May. 1991, p. 339-401.







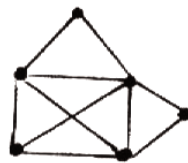
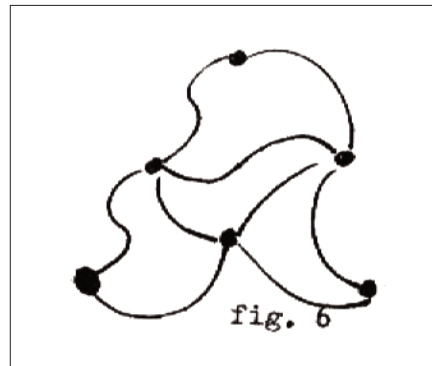
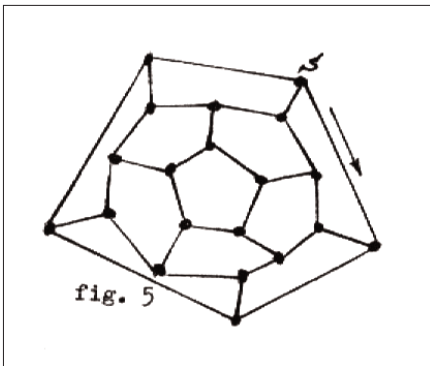
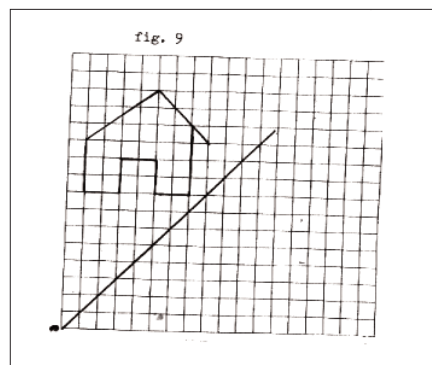
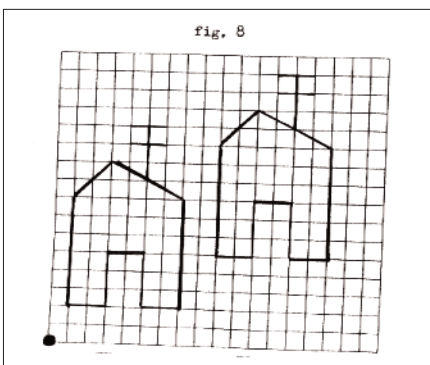
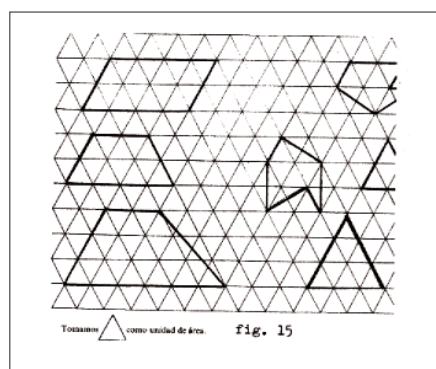
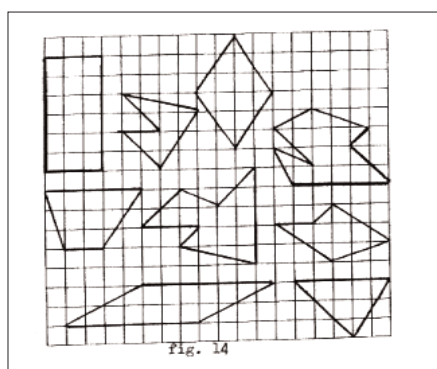
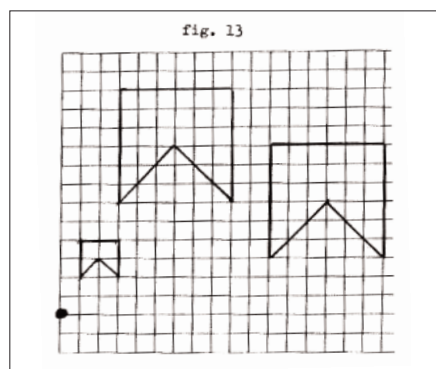
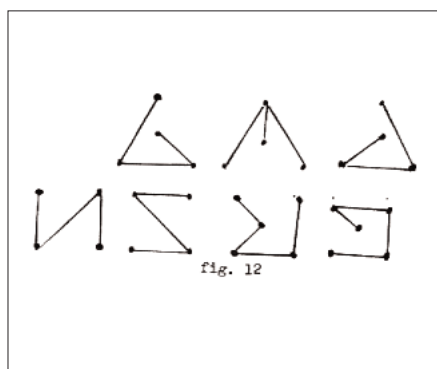
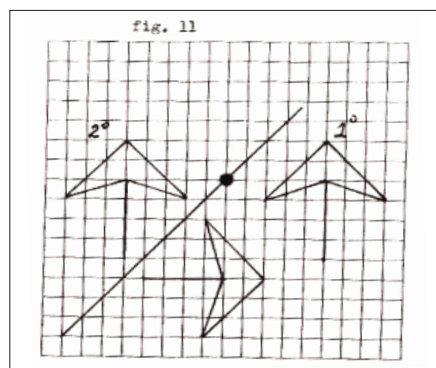
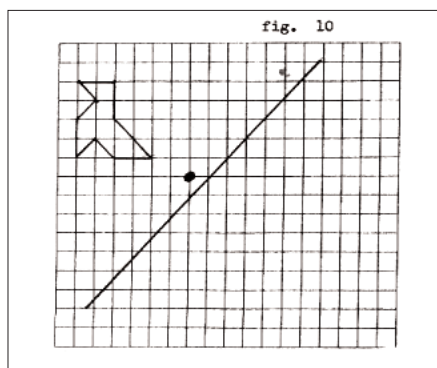


fig. 7





BIBLIOGRAFÍA

AIZPÚN LÓPEZ, A. *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Vicens-Vives. Barcelona, 1972. (Volumen 1 y 2)

DE TEMPLE: «*Piks formula: A restrospective*». Mathematics Notes WSU Vol 32 N°. 3-4, Nov. 1989.

FUNCHENBUSCH. «*From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem*» Americall Math. Monthly, 81, June-July, 1974 p. 647-648.

POLIS. «*Pick's theorem extended and generalized*» Mathematics tea- chef. May. 1991, p. 339-401.

STEINHAUSS. «*Mathematical Snopshots*» Oxford University Press, New York, 1969.

APÚNTATE UN TANTO Y TANTEA EL PUNTO. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

José Antonio Fernández Bravo
Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco». Madrid

INTRODUCCIÓN

1. LA INVENCIÓN COMO PROPUESTA DE MÉTODOS

2. METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

2.1. Modelos Generativos

2.2. Modelos de Estructuración

2.3. Modelos de Enlaces

2.4. Modelos de Transformación

2.5. Modelos de Composición

2.6. Modelos de Interconexión

3. DESDE LOS AÑOS OCHENTA

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Las emociones que nos presentan los alumnos cuando intentan resolver problemas matemáticos no son, generalmente, muy positivas. Empezamos, entonces, por un ligero desasosiego generado por el término «problema» y un exagerado rechazo al adjetivo «matemático». De las muchísimas causas que producen este efecto de repulsa, una de ellas es la falta de protagonismo del alumno en el problema en sí. Una de las actividades que más éxito ha demostrado en la intervención educativa para hacer partícipes a los alumnos, por su acción metacognitiva, es la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Son ellos, y no nosotros, quienes se deben «apuntar el tanto» del problema matemático, tanto en su formulación como en su re-

solución. Sin embargo, resolver un problema implica demostrar su solución o ausencia de ésta y no podríamos prescindir del razonamiento con la explicación, la verificación o la comprobación, por ello es necesario «tantear el punto» del «tanto que se han apuntado».

Los resultados de una investigación¹ realizada en Didáctica de la Matemática sobre invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, señalan un incremento significativo en los alumnos de los grupos experimentales, en la exposición de técnicas y destrezas, que sobresalen por el énfasis creativo con el que se desenvuelven para la construcción y resolución de los problemas matemáticos propuestos. Se llegó a las siguientes conclusiones:

- Cuánto más incompleta se presente una situación problemática, capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad que tiene de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Las situaciones que se presentan de forma completa y terminada debilitan el aprendizaje, al ignorarse la dinámica de relaciones intelectuales que han intervenido en el proceso de su construcción.
- La invención de situaciones problemáticas permite al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos. La concienciación del error es, para el alumno, reflexión, y para el profesor, disminución de la ignorancia que posee sobre lo que sus alumnos desconocen. Tal conocimiento adquiere un significado que da utilidad al medio en el que se desenvuelven las relaciones de enseñanza-aprendizaje. El diagnóstico, la detección, corrección y superación de los errores, como parte legítima de los procesos de mejora en el rendimiento de la resolución de problemas matemáticos, ha surgido en un marco conceptual consistente, basado en la aplicación de metamodelos y modelos².

1. LA INVENCION, COMO PROPUESTA DE MÉTODO

La Metodología didáctica para el aprendizaje de la matemática considera a «la construcción» y «el descubrimiento» valores formativos.

«El simple hecho de que al resultado de un trabajo original en el campo de la investigación matemática se le llame tanto creación o in-

¹ FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos de segundo ciclo de Educación Primaria para la resolución de problemas matemáticos*. Tesis Doctoral. UNED. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica. Publicado en CD, 1999.

² Ver apartado 3, Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas.

*vención como construcción o descubrimiento, revela toda la multifor-
midad de la experiencia matemática.» (Piaget y Beth)³*

Albert Einstein afirmaba que plantear un problema es casi siempre más decisivo, científicamente, que resolverlo. Hay que saber muy bien dónde está la dificultad, cuál es la deficiencia que intentamos superar o los obstáculos que frenan la realización de un objetivo nuevo.

Vigostky⁴ al relatar experiencias escolares en la Unión Soviética refleja lo positivo que es para los niños inventar situaciones a partir de los dibujos de diversos objetos en una hoja de papel. Muestra la pluralidad de alternativas que presenta un sólo dibujo ante un conjunto de sujetos, y la riqueza de la variedad de situaciones que se obtienen. Del mismo modo expone cómo a partir de una situación y dejando libertad para la expresión de preguntas, los alumnos son más conscientes de las relaciones del problema y son capaces de analizar sus propios errores.

Aizpún⁵ juega, desde el principio de variabilidad, con situaciones capaces de alejar el estereotipo y la rutina de la clase de matemáticas en la resolución de problemas. El alumno inventa y construye, generando ideas consciente de las relaciones implícitas en la situación. La comprensión de estas relaciones se da de forma tan natural y profunda que permite la extensión a nuevas situaciones de mayor dificultad. El hecho de que estas ideas se deban, según Aizpún, a Kerschensteiner⁶ y la escasa aplicación de ellas en la clase de matemáticas, demuestra que el reconocimiento de la teoría no implica el asentamiento en la práctica⁷.

³ PIAGET, J y BETH, E.W. *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Ciencia Nueva. Madrid, 1968, pág. 128.

⁴ VIGOSTKI, L. S. *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar*. Ed. LEONTIEV y LURIA. Moscú, 1956. Trad. Cast., E. BENÍTEZ, *Psicología y pedagogía*. Akal. Madrid, 1973.

⁵ AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972.

⁶ Georg Kerschensteiner, nació y murió en Munich (1854 – 1932). Pedagogo alemán que fijó una estrecha relación entre la teoría y la práctica educativas. Sus trabajos tuvieron mucha resonancia en la primera mitad del siglo XX. KERSCHENSTEINER, G. *Esencia y valor de la enseñanza científico-natural*. Barcelona, 1930; *La educación cívica*. Barcelona 1934; *Charakterbegriff und Charaktererziehung*. Leipzig, 1919; *Autorität und Freiheit als Bildungsprinzipien*. Leipzig, 1924.

⁷ «Y la experiencia dice que estos mismos enunciados (los derivados de la interpretación infantil a partir de expresiones matemáticas) son muchas veces punto de arranque de otras cuestiones importantes, como deben ser auténticamente los verdaderos. [...] En una segunda etapa, ya dirigida, no partiremos de igualdad alguna, sino que pediremos enunciados tales que para responder a la pregunta planteada hayan de

Del mismo modo que la encuesta de «L'Enseignement Mathématique» sobre el método de trabajo de los matemáticos [Publicada por H. Fehr con la colaboración de T. Flournoy y E. Claparède (París y Ginebra, 1908)], estimuló y provocó la conferencia de Poincaré en 1909 sobre «Invención matemática»⁸ y los trabajos posteriores de Hadamard⁹, pretendemos que se entienda la invención de situaciones problemáticas, como método capaz de desarrollar la actividad mental en la resolución de problemas, garantizando la autonomía de las sucesivas construcciones.

2. METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Fernández Bravo¹⁰, encuentra seis clases de metamodelos¹¹, y cuarenta y nueve modelos:

realizarse operaciones fijadas; por ejemplo, pediremos enunciados que exijan una adición y una multiplicación; que exijan dos adiciones; una sustracción y una multiplicación, etc. Esta actividad permite profundizar en muchas direcciones en el estudio de las propiedades de las operaciones, porque al no precisar el orden en que se exigen un alumno puede dar como esquema de su enunciado $(a \times b + c)$, otro dar como esquema del suyo $a \cdot (b + c)$, etc., y los modos como hay que alterar un enunciado para pasar al otro motivan observaciones de los alumnos ricas en consecuencias. Este modo de proceder hace que los niños comprendan en profundidad lo que es un problema, porque los han planteado antes de tener que resolver otros que le proporciona el Maestro y así nunca son trampas engorrosas que se le presentan. [...] Después de la etapa que se ha descrito, resulta muy conveniente que los niños superpongan un problema a otro u otros varios para redactar finalmente un enunciado total. De esta manera nos encontramos con que los problemas que plantean y resuelven los niños acaban pronto por ser mucho más «difíciles» que los que suelen aparecer en las colecciones de problemas escolares. [...] Tradicionalmente, es sólo el Maestro quien plantea los problemas, y se le suele aconsejar que lo haga utilizando estrictamente los datos precisos. El adulto que estudia Matemáticas sabe que así aparecen también los que se le ofrecen a él y este convenio tiene como base más lo que suele llamarse elegancia de planteo que otra cosa. Pero ni en el mundo de la investigación ni en el de las aplicaciones, ni aun siquiera en el de las relaciones humanas, surgen los problemas con tal limpieza conceptual de enunciado, sino que es el propio investigador quien ha de seleccionar los datos prescindiendo de los superfluos o eliminando los contradictorios.» (AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972, págs. 127-129)

⁸ POINCARÉ, H. *El valor de la ciencia*. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1946

⁹ HADAMARD, J. *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa Calpe. Buenos Aires, 1947

¹⁰ FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Ciss/Praxis Barcelona, 2000

¹¹ Entendemos por «Metamodelos» cada una de las distintas clases de «modelos de situaciones problemáticas», presentadas a la actividad del alumno, capaces de generar ideas válidas para la invención, reconstrucción, formulación, planteamiento y resolución de problemas matemáticos.

GENERATIVOS. Deben ser las primeras situaciones a las que se enfrenta el alumno, aunque no tienen que ocupar únicamente esos primeros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. El número es algo secundario. Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona. Se percibe la importancia de la ausencia de arbitrariedad en los problemas. Se desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.

De **ESTRUCTURACIÓN.** Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: enunciado, pregunta, resolución, solución. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen y la no-arbitrariedad entre ellas. Al implicar al alumno en la construcción del problema interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; distingue la solución del problema de la resolución de éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

ENLACES. Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

De **TRANSFORMACIÓN.** Utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se con-

solidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

De COMPOSICIÓN. Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de Análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.

De INTERCONEXIÓN. Extensión de las ideas. Apertura mental en la aplicación de los conceptos y operaciones. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

2.1. Modelos Generativos

1. Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna. ***Se dejan caer, una pelota que está encima de un armario y una pelota que está encima de una silla. ¿Qué pelota llegará antes al suelo? ¿Se han dejado caer las dos pelotas a la vez? ¿Dónde has supuesto que estuviera la silla? ¿Es el armario más alto que la silla? ¿Podría estar la silla en una posición más alta que el armario?*

2. Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios,... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas –aquellas que son verdad o mentira para todos– y no lógicas; así como, posibles –muy posibles, poco posibles– e imposibles. ***Roberto tiene monedas de 5 céntimos de euro y Sonia monedas de 1 céntimo de euro. ¿Quién de los dos se puede comprar más cosas?*

3. Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya

pidiendo. ****El lunes leí las 30 primeras páginas de un libro que empecé. El martes lo acabé. ¿Qué día leí más páginas de ese libro?**

4. Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea. ****Inventa un problema y resuélvelo a partir de lo que te sugiera una de estas frases: «Muchos de los accidentes son por culpa del alcohol» «Una buena alimentación ayuda a no coger mucho peso».**

5. Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía. ****Ayer fue Viernes. -Dije ayer. ¿Qué día será mañana?**

2.2. Modelos de Estructuración

6. Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida. ****Inventa un problema cuya solución sea 16 páginas.**

7. Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida. ****Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática: $(16 + 7 - 4) \times 5$.**

8. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones. Llegar a la solución dada y aplicar la/s operación/es indicada/s. ****Inventa y resuelve un problema. Operaciones (+ y -) Solución: 796 Un dato numérico del enunciado no se debe utilizar en la resolución del problema (Dato no significativo).**

9. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones. Llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado. ****Elige entre estos datos: « 315, 201, 192, 798, 405 », para inventar un problema cuya solución sea 597 sellos.**

2.3. Modelos de Enlaces

10. Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar te-

niendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida. ****Escribe preguntas que se puedan responder a partir del siguiente enunciado:** «Sonia ha estado viendo la televisión 137 minutos. Ramón ha estado viendo la televisión 29 minutos menos que Sonia».

11. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas. ****Escribe preguntas a partir del siguiente enunciado, fijándote en la operación que tienes que utilizar para responderlas:** «Joaquín tiene dos cuadernos de Plástica. El cuaderno número 1 es para pintar y le ha costado 147 céntimos de euro. El número 2 es para recortar y le ha costado 394 céntimos de euro.» _____? Operación: Sumar; _____? Operación: Multiplicación; _____? Operación: Restar.

12. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución. ****Un señor A gana en cuatro meses 536.000 céntimos de euro. Un señor B gana en un año 1.176.000 céntimos de euro. Un señor C gana en 24 meses 4.800.000 céntimos de euro. Sabiendo que las mensualidades de cada uno son siempre iguales, escribid la pregunta, según corresponda:**

_____? $(536.000 : 4)$; _____? $(1.176.000 : 12) \times 5$
 _____? (536.000×3) ; _____? $(4.800.000 : 2)$
 _____? $(1.176.000 : 4)$; _____? $(4.800.000 : 24) \times 12$
 _____? $(536.000 : 4) + 536.000$; _____? $(1.176.000 : 12) \times 5$

13. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta tiene una solución dada. ****Escribe la pregunta, según corresponda:** La catedral de Sevilla se comenzó a construir en el año 1402 y se terminó en el año 1519. Su planta es rectangular. La catedral de Santiago de Compostela, en Galicia, se construyó del año 1075 al año 1128.

_____? Sol.: 274 años ; _____? Sol.: 4.692 meses
 _____? Sol.: No ; _____? Sol.: La catedral de Santiago
 _____? Sol.: No se puede saber con los datos que se tienen

14. Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada, y resolver el problema. utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado. ****Inventa un enunciado y resuelve el problema:** ¿Cuántos libros tengo que meter en cada caja sabiendo que en cada caja hay un libro más que en la anterior?

15. Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema. utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado. ****¿Cuántas páginas le quedan a Susana por leer? Sol.: 32**

16. Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y la operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema. ****Inventa un enunciado para cada una de las siguientes preguntas. Resuelve los problemas con la operación que se indica en cada caso:**

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: Sumar

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: Restar

17. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y el proceso de resolución dado. ****Se te presenta la pregunta y el proceso de resolución de un problema. Escribe un enunciado que se corresponda utilizando tres datos numéricos, y sólo tres. ¿ Cuánto costó cada regalo?**

$570 - 80 = 490$; $570 + 490 = 1.060$;

$1060 - 300 = 760$

Solución: _____ euro; _____ euro; _____ euro

18. Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado. ****Selecciona los datos numéricos que se indican para construir el enunciado de los tres problemas siguientes. DATOS: 9, 12, 6, 4, 8, 10, 7**

¿Cuántas estrellitas se hicieron para adornar la clase?

Se hicieron 48 estrellitas para adornar la clase

¿Cuántos dibujos pusieron en la pared del pasillo, entre las tres clases? Pusieron 25 dibujos

¿Cuántas excursiones hicieron los niños de tercero más que los niños de segundo? Hicieron 3 excursiones más.

19. Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas. La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas. ****Inventa un enunciado, y sólo uno, que te permita responder a estas dos preguntas: ¿Cuántos minutos esperó Luis más que Arturo? ¿Cuántos minutos esperó Arturo menos que Sara?**

20. Inventar un enunciado, y sólo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas. Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de ope-

ración/es que se tienen que aplicar para llegar a su respuesta. ****Inventa un sólo enunciado para que puedas resolver las dos preguntas siguientes, atendiendo a las condiciones que se indican: ¿ Cuántos pasteles había en las siete bandejas? Operación: X; ¿Cuántos pasteles quedaron? Operación: +**

21. Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema. ****Inventa un sólo enunciado que se corresponda con las preguntas y sus soluciones: ¿Cuántos litros de vino hay en los tres barriles? 290 litros; ¿Cuántos litros de vino hay en el barril A más que en el barril C? 10 litros; ¿Cuántos litros de vino hay en dos de esos barriles? 200 litros**

22. Inventar un enunciado, y sólo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. ****Elige entre los siguientes datos para construir un sólo enunciado que se corresponda con las preguntas y soluciones dadas: 1.050, 3, 9, 12, 150.**

¿Cuánto dinero ha puesto cada amigo? 350 céntimos de euro; ¿Cuántas tortillas se han comprado? 3.

2.4. Modelos de Transformación

23. Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente. ****Sara sale de su casa con 2.000 céntimos de euro. Gasta 600 céntimos de euro en el cine y 580 céntimos de euro en un taxi para volver a casa. Antes de coger el taxi entró en unas tiendas. Volvió a casa con 240 céntimos de euro. ¿Compró algo en aquellas tiendas? ¿Qué cambiarías del enunciado para que la respuesta a la pregunta anterior fuese: NO?**

24. Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema. ****María tiene 1500 céntimos de euro. Su papá le da 380 céntimos de euro. Ahora María tiene mucho dinero y decide gastarse 590 céntimos de euro en pegatinas. ¿Cuántos céntimos de euro le quedan a María después de gastarse ese dinero en pegatinas? Cambia dos datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema. Cambia todos los datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema.**

¿Podrías cambiar un sólo dato del enunciado sin que varíe la solución del problema?

25. Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe. ****Resuelve el siguiente problema y, una vez resuelto, redáctalo dejando la mínima información que te permita llegar a la solución del problema sin que ésta varíe:** «Un señor, que es dueño de una tienda, tiene, actualmente, 57 años y es padre de tres hijos de edades consecutivas. La suma de las edades de sus hijos es 78 años. El primero de ellos nació cuando este señor tenía 20 años, el segundo cuando tenía 21 años y el tercero cuando tenía 22 años. ¿Qué edad tienen, actualmente, los hijos de este señor?»

26. Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos.

27. Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto. ****El cubo rosa pesa 8 Kg, el cubo azul pesa 12 Kg y el cubo verde pesa 15 Kg ¿Cuántos Kg pesan todos los cubos?** $8 \text{ litros} + 12 \text{ litros} + 15 \text{ litros} = 35 \text{ litros caben en los tres cubos llenos.}$

28. Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada. ****Averigua el dato falso del enunciado, sabiendo que hay uno, y sólo uno, y que la solución del problema es la correcta.** «En una hucha hay el mismo número de monedas de cada clase. Hay doce monedas de 20 céntimos de euro, doce monedas de 1 céntimo de euro y doce de 10 céntimos de euro» ¿Cuánto dinero hay en esa hucha? Sol.: 480 céntimos de euro.

29. Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente. ****Un niño tiene en su hucha tres monedas de 20 céntimos de euro, diez monedas de 5 céntimos de euro y tres monedas de 100 céntimos de euro. ¿Cuántas clases distintas de monedas tiene en su hucha?**

30. Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones.

31. Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado. Se resuelve un problema en cuyo enunciado intervienen dos y

solo dos proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. El último paso consiste en negar las dos proposiciones, se resuelve el problema resultante. Se observan las dificultades de precisar la solución, se comparan las cuatro soluciones. ***Juan se gastó más dinero que Luis. Luis se gastó más dinero que Javier. ¿Quién de los tres se gastó más dinero?*

32. Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones. ***Compraré un kilo de lentejas de 560 céntimos de euro/kilo y compraré dos kilos de judías pintas de 870 céntimos de euro/kilo o tres kilos de judías blancas de 720 céntimos de euro/kilo. ¿Cuánto dinero pagaré por esa compra?*

33. Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe. Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31, la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, cree una pregunta para todos y cada uno de los nuevos problemas, tal que su solución sea la misma.

34. Buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución. Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones, desordenadas pero que se corresponden entre sí. El trabajo del alumno consiste en buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución.

35. Mezclar las preguntas de dos problemas. Se presentan dos enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que se corresponden con cada uno de estos enunciados se han mezclado generando un sin sentido de palabras. La realización de la actividad consiste en resolver los dos problemas. ***Se han mezclado las preguntas de los dos problemas siguientes. Descífralas y resuelve los problemas.» Para ir de excursión, 115 niños contratan dos autobuses. En uno de esos autobuses viajan 57 niños» «En la biblioteca hay 369 libros de cuentos y 235 libros de poesía» ¿Cuántos en la biblioteca viajan hay ¿ en los otros cuentos? niños Cuántos libros de autobús y de poesía?*

36. Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos. Se advierte al alumno que todos o algunos de los datos que aparecen se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas. ***Ningún dato numérico del siguiente problema está donde le corresponde. Resuelve el problema. «Tengo 120 céntimos de euro. Una bolsa de gusanitos cuesta 80 céntimos de euro. Una bolsa de patatas cuesta 200 céntimos de*

euro. Una bolsa de pipas cuesta 75 céntimos de euro. Me he comprado la bolsa de pipas, aunque era lo más caro, y otra cosa. Me ha sobrado dinero. ¿Qué me he comprado?»

37. Mezclar el/los enunciado/s de un/os problema/s. Se presenta un problema cuyo enunciado es un sin sentido porque se ha desordenado, o se presentan dos enunciados mezclados. Se da al alumno lo necesario para que pueda ordenarlos sin ambigüedad alguna y resolver el/los problema/s. ***Se han mezclado dos enunciados. Sabiendo que los dos problemas tienen la misma solución, escribid los enunciados para que se correspondan con sus respectivas preguntas.» Ayer de lectura 682 céntimos de euro más que Julio. Cada 87 céntimos de euro Javier tiene 32. Pagué bolígrafo con cuatro libros. Julio un libro y compré. 6 me costó cada billete de 25 céntimos de euro monedas de 5000 monedas de 5 céntimos de euro y 30 bolígrafos tiene céntimos de euro» ¿Cuánto dinero me devolvieron? ¿Cuántos céntimos de euro tienen entre los dos?*

38. Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

39. Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una. Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.

3.5. Modelos de composición

40. Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema. ***Necesitamos un detective numérico. A los dos problemas siguientes se les han borrado los datos. Se sabe cuales son, pero no dónde estaban. Juega a ser detective colocando los datos según corresponda. DATOS: 3 / 21 / 18 / 6 / 8 / 108 / 48*

A) *En..... muebles, exactamente iguales, hay un total de.....estanterías. ¿Cuántas estanterías hay en.... de esos muebles? Sol.: Un dato del problema B*

B) *Un panadero forma dos filas de cestas de pan. Poniendo en la primera fila menos cestas que en la segunda. En la primera fila pone... cestas*

con.... barras de pan en cada una de ellas y en la segunda fila pone... cestas con... barras de pan en cada una de ellas. ¿Cuántas filas de pan hay en la primera fila de cestas más que en la segunda? Sol.: Un dato del problema A

41. Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda. ****Escribe los datos que faltan en el enunciado para que el problema esté bien resuelto:** «Sofía se compra... sobres de cromos. En cada sobre tienen que venir.... cromos, pero por un error de fábrica a Sofía le han dado... sobres vacíos. ¿Cuántos cromos tiene Sofía?» $17 - 3 = 14$; $14 \times 7 = 98$ Sofía tiene 98 cromos

42. Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda. ****Completa lo que falte en el enunciado, según corresponda, para que las respuestas sean correctas:** « A una panadería llevan 87 barras de pan sin sal y..... barras de pan con sal. La panadería vende 182 barras de pan con sal y vende..... barras de pan sin sal.» ¿Cuántas barras ha vendido en total la panadería? 251 barras; ¿Cuantas barras llevaron a la panadería? 282 barras

3.6. Modelos de Interconexión

43. Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención. ****Inventa un problema en el que incluyas el siguiente vocabulario, y resuélvelo.** Enunciado: «doble», «radiador», «abril» Pregunta: «mes», «día», «agua»

44. Inventar un problema con: un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución. ****Inventa un problema en el que incluyas el siguiente vocabulario, y resuélvelo mediante una multiplicación y una suma.** Enunciado: «doble», «radiador», «abril» Pregunta: «mes», «día», «agua»

45. Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada. ****Inventa y resuelve un problema que cumpla las siguientes condiciones:** Enunciado: «tecnología», «manufacturados», «bienestar» Pregunta: «obreros», «exportación» Sol.: 1.500 Euros

46. Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones. ***Un matrimonio va al mercado. Este matrimonio tiene cuatro hijos y comen, ahora doce kilos de naranjas por semana, ni más, ni menos; sólo doce. Hay una oferta de naranjas de la clase A: Una caja de 40 kilos 3840 céntimos de euro. Les parece una oferta interesante cuando comparan el precio de las naranjas de la clase B: Una bolsa de 8 kilos 1280 céntimos de euro. Se sabe que las naranjas de la clase B son mejores que las naranjas de la clase A. Se sabe que las naranjas de cualquier clase duran exactamente dos semanas. Este matrimonio está indeciso, quiere tardar el mayor tiempo posible en volver a comprar naranjas y ahorrar el mayor dinero posible en la compra que hagan de naranjas. Podrías aconsejarles: naranjas de la clase A o naranjas de la clase B?*

47. Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias,... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio,... para recoger la información necesaria. Como nuestros alumnos pertenecen al segundo ciclo de la Educación Primaria, es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor –adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno–, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

48. Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve,... ***¿En qué número está pensando el poeta? Mi cabeza está pensando, / bajo el sol y con sombrero, / un número curioso. ¿Quién lo adivina el primero? / Si lo divido por dos, / el resultado es par / y también menor que diez./ Juega conmigo a pensar, / que al dividirlo por tres / dos menos me quedarán.*

49. Relación entre lógica y matemática. ***¿Qué raras son estas calles! En una calle y sólo en una todos los números son números pares. En la calle A: no todos los números son pares; B: algunos números son pares; C: ningún número es par; D: son pares todos los que son pares; E: dos números suman 57; F: si sumo los números de esta calle dos a dos siempre me da un número par; G: no hay ninguno que haya en la calle C; H: todos los números se pueden dividir exactamente por dos y también todos se pueden dividir exactamente por tres. ¿Qué letra representa a la calle en la que todos los números son pares?*

3. DESDE LOS AÑOS OCHENTA

Desde los años ochenta (Hosford, Lesh, Landau, Hamilton y Shoenfeld, entre otros)¹², la resolución de problemas constituye una importante reflexión como tarea escolar. Podríamos señalar sus comienzos significativos en los congresos internacionales de educación matemática, particularmente en Adelaida (ICME-4, 1984) y Budapest (ICME-5, 1988), donde se convirtió en una corriente esencial para poner en práctica tratamientos didácticos enfocados a procesos específicos de resolución. En esta década fue objetivo principal de la enseñanza de la matemática, según la recomendación del documento *An agenda for action* publicado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics). Desde entonces, ha generado una inquietud de intensa búsqueda didáctica para evitar las numerosas dificultades que presentan nuestros alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

Todo planteamiento práctico, reconocido por la enseñanza en el aprendizaje de la matemática, apoya, al menos sus procesos, en firmes argumentos que se pueden inferir fácilmente de probadas teorías; dilatados esfuerzos y años de investigación que giran en torno a un objetivo central: mejorar el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos¹³.

«Nada hay mas importante que ver los caminos de la inventiva, que son, en mi opinión, más importantes que las invenciones mismas» (Leibniz)¹⁴

¹² HOSFORD, P.L. *What we know about teaching*. Association for Supervision and Curriculum Development. Alexandria, 1984; LESH, R; LANDAU, M. y HAMILTON, E. *Acquisition of Mathematics Concepts and Proceses*. Academic Press. New York, 1983; SHOENFELD, A. Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. MEC. Madrid, 1985.

¹³ SÁNCHEZ HUETE, J. C. y FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Enseñanza de la matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas*. Editorial CCS. Madrid, 2003.

¹⁴ LEIBNIZ, G. W. *De l'horizon de la doctrine humaine y La restitution universelle*. Edicion de Michel Fichant. Paris, 1991, pág 27.

BIBLIOGRAFÍA

AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos de segundo ciclo de Educación Primaria para la resolución de problemas matemáticos*. Tesis Doctoral. UNED. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica. Publicado en CD, 1999.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Ciss/Praxis Barcelona, 2000.

HADAMARD, J. *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa Calpe. Buenos Aires, 1947.

HOSFORD, P.L. *What we know about teaching*. Association for Sueprvision and Curriculum Development. Alexandria, 1984.

KERSCHENSTEINER, G. *Esencia y valor de la enseñanza científico-natural*. Barcelona, 1930; *La educación cívica*. Barcelona, 1934; *Charakterbegriff und Charaktererziehung*. Leipzig, 1919; *Autoritdt und Freiheit als Bildungsprinzipien*. Leipzig, 1924.

LEIBNIZ, G. W. *De l'horizon de la doctrine humaine y La restitution universelle*. Edicion de Michel Fichant. Paris, 1991.

LESH, R; LANDAU, M. y HAMILTON, E. *Acquisition of Mathematics Concepts and Proceses*. Academic Press. New York, 1983.

PIAGET, J y BETH, E.W. *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Ciencia Nueva. Madrid, 1968.

POINCARÉ, H. *El valor de la ciencia*. Espasa Calpe. Buenos Aires, 1946.

SÁNCHEZ HUETE, J. C. y FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Enseñanza de la matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas*. Editorial CCS. Madrid, 2003.

SHOENFELD, A. «Ideas y tendencias en la resolución de problemas». En *La Enseñanza de la matemática a debate*. MEC. Madrid, 1985.

VIGOSTKI, L. S. *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar*. Ed. Leontiev y Luria. Moscú, 1956. Trad. Cast., E. Benítez, *Psicología y pedagogía*. Akal. Madrid, 1973.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DEL NIÑO EN LA ESCUELA INFANTIL DE 3 A 6 AÑOS

Margariva V.E. Marín Rodríguez
Titular de Escuela Universitaria.
Universidad de Castilla La Mancha

INTRODUCCIÓN

1. CRECIMIENTO INTELECTUAL DEL NIÑO Y LA NIÑA

2. COMPETENCIA O ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

2.1. Competencias básicas a desarrollar

3. DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

3.1. Un ejemplo concreto

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

BIBLIOGRAFÍA

Partiendo de la asunción de *competencia o alfabetización matemática* como las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando afrontan problemas matemáticos en una variedad de contextos y situaciones, analizamos en este capítulo cuáles podemos comenzar a desarrollar en los niños de la etapa infantil y qué tipo de actividades y metodología serán los apropiados para conseguirlo. Nuestro objetivo será que los niños comprendan y utilicen las matemáticas a su nivel y desde sus capacidades intelectuales.

INTRODUCCIÓN

Los niños y adultos del siglo XXI del Primer Mundo vivimos en un entorno social caracterizado por el desarrollo y uso de la tecnología, funda-

mentalmente las Tecnologías de la Información y Comunicación basadas en las matemáticas. De hecho, las matemáticas, al igual que el viento que se cuela por cualquier rendija, están presentes y se utilizan en todos los ámbitos de la sociedad. Sin embargo, esta presencia es cada vez más difícil de percibir por el ciudadano de a pie debido, por una parte, a la propia dificultad intrínseca de las aplicaciones matemáticas y, por otra, a la falta de preparación matemática adecuada de los ciudadanos.

Podemos ilustrar el párrafo anterior con una situación real en la que simplemente nuestros conocimientos escolares matemáticos nos facilitan su óptima solución. Supongamos que vivimos en Ciudad Real y queremos visitar en Madrid la exposición «V1DA de los NÚM3ROS»¹ con motivo del International Congress of Mathematicians² que se celebra en Madrid a finales del mes de agosto. Lo primero es trasladarnos a Madrid, para lo cual, sin dudar, utilizamos el tren de Alta Velocidad; 50 minutos de cómodo viaje versus 120 minutos mínimos de viaje en coche, ¡la tecnología es así!

Una vez que tenemos el billete en nuestras manos observamos que está plagado de números y letras, dispuestos la mayoría dentro de una gran rectángulo central en el que además aparece una tabla con los datos fundamentales del viaje en tren.

Mod. 0150.8056
© CIT 1996
HUM
CONSERVESE HASTA EL FINAL DEL VIAJE
Condiciones Generales del Contrato en www.renfe.es
C.I.F. G-84144161

renfe
Billete y Reserva

BIL. IDA: 47232195257201110
496422162842 0111 POR CAMBIO

0036 AQBE4964
00000000 6286
09/08/06 14:04

Nombre:

 TREN	 CLASE	 FECHA	 HORA	 LUZ	 COCHE	 PLAZA	 Departamento
09731	T	09/08	15.47	16.43	0004	05D	NO FUMA

CDAD. REAL PTA. ATOCHA

417 CIERRE LANZADERA DIA T.AVE 080320583

TC DOC: 5489016773055202 IVA 7%:***0,69
NUEVO C.I.F.: G84144161
EL CONTROL DE ACCESO AL TREN SE CIERRA 2 MIN. ANTES DE SU SALIDA
Servicio cubierto por S.O.V. y S.R.C. 07100215267662
Tasa de seguridad, s.o.v., e I.V.A. incluidos

¹ Información disponible on-line: <http://www.bne.es/esp/actividades/vidanumeros.htm>

² Información disponible on-line: http://www.icm2006.org/paginas/?pagina=home_esp

Este billete impreso gracias a la tecnología es un canto de alabanza a las matemáticas; observemos:

- Desde el punto de vista geométrico, lo primero que nos llama la atención son las medidas rectangulares de este papel impreso; éstas son 14,8cm por 8,3cm que al dividir las nos dan un valor de 1,783, próximo a 1,618 de la **razón áurea**. Por tanto, el billete tiene unas medidas armoniosas que hacen que su tamaño sea agradable a la vista.
- La localización de mi asiento en el tren viene expresada por las **coordenadas**: «coche» y «plaza». Es curioso observar el número de coche de cuatro cifras de las cuales tres son ceros a la izquierda, expresión que colegialmente hablando no aceptaríamos, ya que les pedimos a los alumnos que quiten los ceros a la izquierda «por no tener valor».
- Desde el punto de vista aritmético observamos la profusión de **números naturales y decimales**, algunos de los primeros acompañados de letras formando un código alfanumérico como el que indica el número de tren o el número de asiento. Los decimales y su representación en el billete nos obligan a reflexionar: ¿se han decantado por el «punto» o la «coma» decimal? La clave está en el precio, en el que se emplea la coma.
- ¡Y qué decir de los grandes números! Creo que en la escuela ningún maestro se atrevería a escribir en la pizarra números naturales de tantas cifras como el que aparece para identificar el billete de ida: 47232195257201110; que sin embargo nos proporciona un buen caso para nombrar ese número correctamente como cuarenta y siete *mil* doscientos treinta y dos *billones* ciento noventa y cinco *mil* doscientos cincuenta y siete *millones* doscientos un *mil* ciento diez.
- Respecto la **representación**, se utilizan códigos empleados en el colegio con otro significado, como en el caso de la fecha: 09/08 ¿son nueve octavos? No. Significa día nueve de agosto. En esta representación el código «/» no significa división, sino mera separación de cantidades. Igualmente llama la atención la falta de uniformidad en la representación de la hora: tan pronto se emplea un «.» para separar las horas de los minutos caso de la hora de salida y llegada, como se emplean los «:», caso de la hora de compra del billete.
- Respecto al precio, podemos emplear algún tiempo del viaje en averiguar el precio neto del billete conociendo el total y el valor del IVA del 7%, o simplemente restando mentalmente los datos que nos proporciona el billete.

Para leer e interpretar este billete nuestros conocimientos de matemáticas escolares han sido suficientes.

Una vez llegados a Madrid Puerta de Atocha debemos trasladarnos a la Biblioteca Nacional sede de la exposición. ¿Cómo hacerlo? Preguntando a varias personas en la estación hemos llegado a la conclusión de que tenemos cuatro posibles caminos:

- a) Metro³: línea 1, sentido Pza. de Castilla, estación Bilbao, donde haremos trasbordo a la línea 4, sentido Parque de Sta. María, estación de Colón.
- b) Autobús⁴: línea 27, parada Pza. de Colón.
- c) Cercanías⁵: cualquiera de las líneas que va hacia Chamartín y parada en Recoletos.
- d) A pie por los paseos de «El Prado» y «Recoletos».

Para tomar una decisión por uno de estos cuatro medios de locomoción, **instintivamente** buscamos la solución óptima en función de las circunstancias del momento. Así, si tenemos premura por llegar, la más rápida es la opción de ir en Cercanías. Si no nos agobia el tiempo y deseamos disfrutar de la zona noble de Madrid, ir a pie es la opción adecuada. Por último, las más económicas dentro de los medios de transporte son las opciones Metro y Autobús, con la ventaja ésta última de ir por la superficie recreándonos en los edificios que bordean los paseos de «El Prado» y «Recoletos».

Matemáticamente hablando se nos ha presentado un problema abierto, hemos buscado los datos iniciales, conjeturado unas vías de solución y elegido una en función de unas variables personales que son nuestras circunstancias. Nuestra competencia en resolución de problemas nos ha llevado a buscar todos los datos y vías de solución posibles. En caso contrario, nos habríamos conformado con la primera opción que nos hubiesen dado al preguntar: Por favor, ¿cómo puedo llegar desde aquí a la Biblioteca Nacional?

Hemos resuelto esta situación real, nada complicada, con nuestra formación matemática escolar que nos ha dotado de recursos para razonar, resolver problemas, comunicarnos, interpretar códigos y representaciones, en cualquier contexto. Por ello, cuanto mejor sea la competencia matemática alcanzada a lo largo de nuestra escolarización, mejor preparados estaremos para tomar decisiones y comprender la sociedad tecnificada en la que nos movemos.

³ Plano disponible *on-line*: <http://www.ortegaygasset.edu/Biblioteca/metro.htm>

⁴ Información sobre las líneas de autobuses de Madrid disponible *on-line*: <http://www.emtmadrid.es/>

⁵ Información sobre Cercanías de Madrid disponible *on-line*: <http://www.renfe.es/cercanias/madrid/>

Pero, ¿qué significa *competencia matemática* en las edades de tres a seis años? El *qué* y el *cómo* conseguirlo a estas *edades tempranas* son los objetivos de este capítulo y el contenido de los epígrafes siguientes.

1. CRECIMIENTO INTELECTUAL DE NIÑO Y LA NIÑA

El niño, la niña, llegan a la escuela con 3 años, o a punto de cumplirlos, con un bagaje formativo heterogéneo proporcionado por su entorno familiar. En la escuela infantil pasarán sus próximos tres años recibiendo propuestas, estímulos y oportunidades que marcarán su evolución. Profesionales de la educación y psicólogos del aprendizaje coinciden al afirmar que en ninguna otra etapa escolar es tan notable el crecimiento cognitivo como en ésta. Es nuestra responsabilidad como formadores en esta etapa conseguir sembrar en estos niños la simiente de una humanización lo más rica posible, y nosotros vamos a ayudarlo a lograrlo.

De acuerdo con Selmi y Turrini (Selmi, L.; Turrini, A., 1997) el modelo de desarrollo-aprendizaje ofrecido por la escuela a estas edades debe asumir tanto el desarrollo del niño como un hecho natural desde una visión psicológica a considerarlo «*como un proceso que interactúa de forma compleja con la transmisión y elaboración del conocimiento, mediatizado por el ambiente sociocultural y las instituciones educativas*». (Selmi, Turrini, 1997: 12)⁶. En este desarrollo del infante es fundamental la calidad de la intervención educativa que debe proporcionar y facilitar la adquisición estable de habilidades y competencias que ayudan a la organización e instrumentación cognitiva. Por todo ello observamos la necesidad de una gran riqueza y calidad en la primera escolaridad. Las tareas propuestas serán pensadas con intencionalidad, no se dejarán al azar ni tendrán como misión «entretener» a los niños.

En el aspecto matemático estas ideas nos inducen a reflexionar sobre qué contenidos debemos trabajar en estas aulas para potenciar su red matemática inicial, y cuáles serían las tareas más adecuadas para su consecución, es decir, preparar su alfabetización matemática.

2. COMPETENCIA O ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

Desde hace unos años y debido fundamentalmente a la influencia de informes internacionales como TIMSS y PISA, basados los tests de éste úl-

⁶ SELMI, L.; TURRINI, A. *La escuela infantil a los cinco años*. MEC-Editiones Morata S.L. Madrid, 1997.

timo en «definiciones de competencia matemática», las palabras competencia y/o alfabetización matemática están de moda, pero ¿cuál es su significado?, ¿de qué estamos hablando?, teniendo en cuenta que según autores como Keitel (Keitel, 2004)⁷ son numerosas las concepciones contradictorias de competencia matemática.

Según Abrantes (Abrantes, 2001)⁸ en un principio la palabra **alfabetización** estaba identificada con la escolarización, para posteriormente asimilarse a la adquisición de conocimientos dentro o fuera de la escuela y, por último, la capacidad de poner en práctica dichos conocimientos en situaciones concretas pasó a ser el núcleo de la alfabetización. Por lo que, en palabras del propio Abrantes *«la alfabetización (matemática) puede interpretarse como la competencia (matemática) que todos los alumnos y alumnas deberían desarrollar en la escuela.»* (Abrantes, op. cit.: 125).

Continúa diciendo este autor que actualmente bajo el concepto **competencia** se acentúa la integración de conocimientos, habilidades y actitudes que se convierte en el concepto impulsor del plan de estudios.

Por su parte la OCDE, en su Informe Pisa 2003, especifica la **competencia o alfabetización matemática** como *«las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.»* (OCDE, 2005: 14)⁹. La consecución de esta competencia centra la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Las competencias seleccionadas en el estudio PISA son:

1. Pensar y razonar.
2. Argumentar.
3. Comunicar.
4. Modelar.
5. Plantear y resolver problemas.
6. Representar.
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones.

⁷ KEITEL, C. «¿Para qué necesitan nuestros estudiantes las matemáticas?» En Giménez, J.; Santos, L., Da Ponte, J.P. (Coords.). *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. Graó. Barcelona, 2004.

⁸ ABRANTES, P. «Revisión de los objetivos y la naturaleza de las matemáticas para todos en el contexto de un plan de estudios nacional. En Giménez, J. (coord.). *Matemáticas en Europa: diversas perspectivas*. Graó. Barcelona, 2001.

⁹ OCDE. *Pisa 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas*. MEC-IN-ECSE-SUMA. Madrid, 2005.

Y su desarrollo tiene como objetivo fundamental comprender y utilizar las matemáticas.

Lógicamente estas competencias son el objetivo final a conseguir por los estudiantes de 15 años al terminar su escolarización obligatoria. Pero, ¿cuáles de ellas podemos comenzar a trabajar en la escuela infantil?

Si buceamos en los *Principios y Estándares para la Educación matemática* del National Council of Teachers of Mathematics norteamericano, N.C.T.M. en adelante (N.C.T.M., 2004), además de averiguar el significado de competencia para esta representativa asociación, conoceremos la forma de hacer para su consecución en las aulas desde infantil hasta terminar la educación secundaria.

Según esta asociación la competencia matemática está ligada al entendimiento y uso de las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo; señalando además que la presencia de esta competencia abre puertas a un provenir productivo, mientras que su ausencia las mantiene cerradas.

2.1. Competencias básicas a desarrollar

Como decíamos en el epígrafe anterior, la red conceptual inicial en matemáticas se establece en estos primeros años. El niño es curioso por naturaleza, se interroga, nos cuestiona y se entusiasma fácilmente; el aprendizaje matemático debemos construirlo a partir de su curiosidad y su entusiasmo mediante tareas que conecten con su mundo y les ayuden a explorar, investigar, comunicar.

Sobre todo, al preparar estas tareas huyamos de dos tópicos extendidos: a) los estamos «preparando» para la escuela Primaria y b) la comprensión matemática es un «don», o se tiene o no se tiene.

El niño aprende explorando su mundo, lo interpreta desde sus conocimientos y en función de la evolución de los mismos. Sus abuelos, padres y familiares se sienten orgullosos de que diga su edad, verbal y representativamente con sus deditos, desde su primer año; le enseñan canciones populares en las que tienen que seguir y coordinar instrucciones y movimientos o aparece el conteo. El propio niño empieza a explorar el espacio en su gateo e intenta orientarse hacia delante, hacia detrás, hacia un lado en sus primeros pasos. Según va creciendo comienza a clasificar y ordenar sus juguetes, a razonar al comparar y construir con bloques, ensaya su visualización espacial al resolver un puzzle, es capaz de reconocer la estructura repetitiva de un

cuento o una canción. Es decir, el niño en sus juegos utiliza aspectos matemáticos de forma continua y es responsabilidad de todas las personas que le cuidan tener conocimientos de las muchas formas en que puede aprender matemáticas.

La comprensión y utilización de las matemáticas a su nivel conlleva la puesta en práctica de unos procesos, según la N.C.T.M. (N.C.T.M., op. cit.), o competencias, según la O.C.D.E. (O.C.D.E., op. cit.) que iniciamos en este nivel como son:

- Pensar y razonar.
- Comunicar.
- Representar.
- Plantear y resolver problemas.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones.

Comentemos cada una de ellas.

Por **pensar y razonar** se entiende la capacidad de explicar lo que uno piensa, dando razones. Es una destreza importante para el razonamiento formal que comienza en esta etapa.

El razonamiento lógico, entendido como sinónimo de sentido común, empieza antes de la etapa escolar y va evolucionando en función de las experiencias vivenciales hasta ser entendido como el razonamiento lógico matemático, en el estadio de las operaciones concretas según la psicología evolutiva de Jean Piaget.

Los niños de estas edades utilizan una combinación de métodos para justificar sus respuestas como son:

- La percepción.
- Las pruebas empíricas.
- Las cadenas cortas de razonamiento deductivo.

La capacidad de razonar de los niños a estas edades, que a veces explotamos escasamente en la escuela, queda maravillosamente reflejada en el siguiente chiste¹⁰ del genial Frato:

¹⁰ Disponible *on-line*: <http://jaio-la-espia.blogalia.com/documentos/Ojosdenin-hio/tonucci08.html>



Respecto a la competencia **comunicar** debemos tener en cuenta que la comunicación matemática comienza muy pronto. Esta comunicación depende de su madurez, de cómo se modela el lenguaje y de las experiencias y oportunidades de expresión que tenga el niño. Por ello, debemos animarle a expresar verbalmente la actividad realizada, con sus propias palabras, orientándole con cariño y ayudándole a organizar y esclarecer sus ideas si fuera necesario, para que logre comunicarse matemáticamente.

La competencia **representar** está íntimamente ligada a la de comunicar. Representamos las ideas en una gran variedad de códigos para comunicarnos con los otros.

Como bien dice la N.C.T.M. (N.C.T.M., op. cit.) la capacidad de representar ideas unida a la de conectar estas representaciones a las matemáticas forman el núcleo de la comprensión matemática. Estas representaciones hacen las ideas matemáticas más concretas y accesibles a la reflexión.

Debemos ayudar a los niños en la representación de las ideas matemáticas y su comprensión mediante una multiplicidad de códigos como son: el

lenguaje oral y escrito en el que se están iniciando, los gestos, los dibujos y diagramas, así como los símbolos inventados por los propios niños o los convencionales, sin olvidar el soporte tecnológico.

Además el reconocimiento de las semejanzas en las formas de representar situaciones diferentes ayuda a conseguir la abstracción.

Los docentes de esta etapa debemos crear un ambiente de aprendizaje que estimule a los niños a usar diversas representaciones.

En cuanto a la **resolución de problemas**, en estos primeros años todos hemos observado cómo los niños resuelven los pequeños problemas que se les presentan con inteligencia, curiosidad y flexibilidad, aunque algunas veces sus soluciones no sean del agrado de los adultos, como utilizar una caja de cartón para cruzar un río o sujetar el cuello de una tortuga con una pinza para así poder observar tranquilamente y en profundidad la cabeza del animal. Sin embargo, los docentes deberíamos construir sobre estas inclinaciones innatas y animar a los niños a usar las matemáticas que están aprendiendo para desarrollar estrategias de resolución de problemas.

Igualmente es fundamental proponer problemas referidos a una variedad de contextos, desde las rutinas diarias a las situaciones que surgen en los cuentos¹¹, así como generar nuevas preguntas en un contexto de problemas para cultivar y desarrollar una disposición matemática basada en el razonamiento. Claro ejemplo de esta situación es el diálogo mantenido entre Richard Feynman niño y su padre en uno de sus paseos por el parque: «*Me decía, «Por ejemplo, fíjate: el pájaro está constantemente picando entre sus plumas. ¿Ves cómo lo hace, ves que va caminando y al mismo tiempo picándose el plumaje?» «Sí.» Y entonces me preguntaba, «¿Por qué piensas que los pájaros se picotean entre las plumas?»»* (Feynman, 1990: 18)¹² Para continuar diciendo unos párrafos más adelante: «*Estoy siempre buscando, como un niño; buscando las maravillas que sé que he de encontrar- no siempre, quizás, pero sí de vez en cuando.*» (Feynman, op. cit.: 21) y agradecer a su padre la formación inicial que le dio y le permitió convertirse en un científico apasionado, renombrado y laureado.

Por último la capacidad de comprender y **utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones** se va a reducir a estas edades tempranas al aprendizaje funcional de los símbolos «+» y «-» dentro y fuera de la escuela.

¹¹ Consultar el capítulo de título «El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos» de la misma autora en este libro.

¹² Feynman, R. *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* Alianza Editorial. Madrid, 1990.

Cualquier niño de 4 ó 5 años sabe manejar con bastante soltura el mando de la televisión. Si observamos detenidamente este mando, veremos que la tecla «cambio de volumen», universalmente representada por un triángulo rectángulo escaleno, lleva grabados los símbolos «+» y «-»; y el niño *sabe*, porque su exploración y experiencia se lo han confirmado, que «+» aumenta el volumen y «-» lo disminuye. Luego en la escuela construiremos a partir de este conocimiento informal para aunar, en esta primera toma de contacto con estos símbolos, que «+» representa la suma, indicando un aumento de la cantidad y «-» la resta con una disminución de la cantidad.

Igualmente, aprovecharemos en el aula todos los usos sociales de ambos símbolos, sobre todo su empleo en publicidad, con el objetivo de que nunca los aspectos técnico y formal de las operaciones sean impuestos sin comprensión, consiguiendo el hundimiento del niño por lesión de autoconfianza que ya sabía sobre su significado. Esta situación queda cáusticamente reflejada en el siguiente chiste de Frato¹³:



(1974) La suma

¹³ Disponible on-line: <http://jaio-la-espia.blogalia.com/documentos/Ojosdenin-hio/tonucci29.html>

3. DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

Una vez expuestas las competencias que podemos comenzar a desarrollar en estas edades tempranas, continuamos con la forma de hacerlo en el aula.

Nuestro punto de partida para cualquier intervención es **la comprensión como fundamento del aprendizaje**; de esta manera conseguiremos que nuestros alumnos realicen aprendizajes funcionales que les permitirán utilizar sus incipientes conocimientos matemáticos para explicar su entorno y realizar nuevos aprendizajes.

Los adultos, en general, y docentes, en particular, que estamos con los niños de esta edades debemos fomentar su desarrollo matemático proporcionándoles ambientes ricos en lenguaje, que inciten a pensar y comunicar sus razonamientos, a explorar y explicar estas exploraciones. Así mismo, debemos prestar atención a las matemáticas de sus juegos y construir su conocimiento a partir de estos juegos. Igualmente les animaremos a resolver problemas y a ser persistentes buscando sus soluciones. Para fomentar esta persistencia tenemos un gran aliado en la tecnología; mi experiencia de aula es que un niño que se atasca resolviendo un puzzle de cartón o madera y lo abandona sin mayor interés, no se levantará de su silla delante del ordenador hasta que el programa le felicite por haberlo resuelto.

Igual que expresábamos en el epígrafe anterior, debemos conseguir que los niños aprendan a confiar en sus propias capacidades para dar sentido a las matemáticas. Esto implica respetar y valorar la singularidad, ya que cada niño se expresará de una manera, buscará y representará sus soluciones en función de su nivel de comprensión y maduración. Para conseguir esta autoestima y confianza en su incipiente quehacer matemático debemos elogiar las ideas y razonamiento de cada niño.

Utilizaremos una evaluación formativa para planificar una enseñanza que conecte los nuevos aprendizajes con los ya adquiridos.

Debemos proporcionar materiales que permitan aprender contando, construyendo, midiendo, jugando, haciendo puzzles, escuchando historias. Siempre dando a cada niño su tiempo de reflexión y asimilación para comprender los aspectos matemáticos trabajados.

Y por último es necesario un docente bien preparado, entusiasta, con grandes conocimientos sobre las muchas formas en que estos alumnos infantiles aprenden matemáticas, a la vez que es consciente de la especial impor-

tancia que tiene el desarrollo de una sólida base matemática en estos primeros años.

3.1. Un ejemplo concreto

Para conseguir el desarrollo de estas competencias descritas en el tercer epígrafe debemos proponer en clase unas tareas cuya actividad provoque en los aprendices el razonamiento, la comunicación, la representación, la resolución de problemas y el empleo, si es posible, de las operaciones.

La propia dinámica diaria de aula nos proporcionará más de una interesante tarea con la que trabajar estas competencias. Un ejemplo de ello es lo ocurrido en un aula de cinco años en el mes de mayo del año en curso; un día llegó una de las niñas de la clase con la gran novedad: se le había caído su primer diente y *El ratoncito Pérez* le había dejado un billete de 5 debajo de la almohada a cambio del mismo. La mañana de ese día se empleó en hablar de las caídas de dientes, las correspondientes visitas del *Ratón Pérez*, buscar posibles explicaciones de por qué no había visitado a dos mellados y a sembrar la pregunta ¿a cuántos niños y niñas de la clase se les ha caído algún diente? Esta situación fue el detonante de la siguiente tarea:

Seño, ¡se me ha caído un diente!

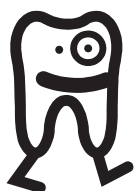
Con los niños ya suficientemente motivados diseñamos esta tarea con los siguientes contenidos, actividad del alumno, materiales empleados, procesos de aprendizaje desencadenados y las condiciones organizativas. Comenzamos con el relato del desarrollo de la actividad.



La búsqueda de respuesta a estas dos preguntas del docente exige a los niños **resolver un problema**, para lo cual tienen que completar el siguiente proceso: **reconocer** que existe un problema, **identificar** metas: ¿cuántos?, **planificar** una estrategia, y **observar** si la estrategia funciona.

La respuesta a ¿cuántos niños? la encontraron rápidamente: propusieron formar dos filas, una con los niños que NO habían perdido dientes y otra con los niños que SÍ habían perdido algún diente. A continuación, contaron los niños de esta última fila para decir cuántos niños eran en total. El simple hecho de comparar las longitudes de las dos filas condujo a exclamaciones como «¡Seño, somos más los que no se nos ha caído un diente!», que no responde a la pregunta del problema, pero sí informa a los niños sobre la moda de la clase: «está de moda no perder dientes», que ellos comprobaron en la práctica.

Para buscar la respuesta a la siguiente pregunta la maestra utilizó un material manipulable hecho por ella imprimiendo y recortando el siguiente clip-art:



Pidió a cada uno de los mellados que cogiese tantos dientes como los que había perdido, y, a continuación, con el grupo sentado en la alfombra y una gran caja de cartón en medio se fueron levantando uno a uno diciendo «A mi se me han caído... dientes», los enseñaba a la asamblea y los depositaba en la caja. Algunos los echaban juntos y otros, presumiendo, uno a uno, contando, según los dejaban caer. Al final contaron el total de dientes en la caja tantos niños como quisieron, diciendo «en nuestra clase se han caído en total... dientes».

Hasta ahora, con la actividad desarrollada los niños han razonado, comunicado, planificado y resuelto el problema con el material manipulable. Podemos elevar el nivel de abstracción orientándoles para representar el proceso seguido y utilizar la operación suma para expresar el total de dientes caídos.

La maestra, para esta representación, había dibujado una tabla en una cartulina poniendo la foto y nombre de cada niño en la primera columna según el orden de lista:

Carmen					
Javier					
Patricia					
Antonio					
Jose					
Carolina					
Ana					
Jaime					
Abigail					
Rober					
Nelson					
Rafa					
Lucía					
Julio					
Pedro					
Tomás					
Cristina					
Carmen M.					
Laura					
Pedro R.					

A continuación, se les explicó que, por orden de lista, iban a salir los niños y niñas que habían perdido dientes a colorear de negro tantas casillas como dientes se le habían caído. Con esta tabla estamos recogiendo y representando la información. Para interpretar esta tabla la maestra hizo las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos niños y niñas han perdido dientes? ¿Coincide vuestra respuesta con la dada anteriormente?
- ¿Cuántos no han perdido dientes? ¿Coincide vuestra respuesta con la dada anteriormente?
- ¿Quién ha perdido más dientes en la clase?
- ¿Cuántos han perdido **1** diente?
- ¿Cuántos han perdido **2** dientes?
- ¿Cuántos han perdido **3** dientes?
- ¿Cuántos han perdido **4** dientes?
- Y ¿Cuántos han perdido **0** dientes? ¿No lo sabíamos ya?
- Vamos a sumar el número de dientes caídos:

$$2 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1 = 15$$

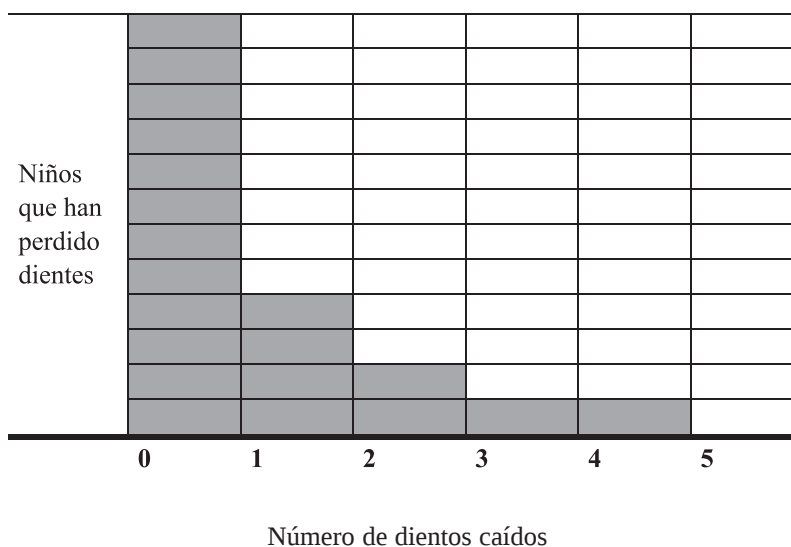
expresión escrita por los niños en su cuaderno y posteriormente por la maestra en la pizarra para comprobación de todos.

A partir de estos datos hacemos la representación en forma de pictograma de los dientes caídos. Es decir, matemáticamente hablando, vamos a considerar la variable estadística «número de dientes caídos» y representar su frecuencia.

Comenzamos representando la tabla anterior de forma abreviada:

 Dientes caídos	0	1	2	3	4
Niños y niñas	12	4	2	1	1

Cuyo diagrama es el siguiente (en clase se representó a cada niño por su foto):



Lo que nos llevaría a escribir:

$$\text{N}^\circ \text{ total de dientes caídos: } 0 \times 12 + 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 0 = 15$$

Expresión que no utilizamos en nuestra aula, conformándonos sólo con los diagramas y la suma expresada superiormente.

Esta espontánea tarea surgida de un hecho real en el mes de mayo nos sirvió para repasar el número cardinal, la cantidad y las actividades de con-

teo, introducir una pequeña estadística en el aula utilizando distintas representaciones y aplicar la noción de la operación suma ya explicada.

Los materiales empleados fueron los descritos en el desarrollo de la actividad, sencillos de elaborar y asequibles a cualquier presupuesto escolar.

Lo verdaderamente interesante de esta tarea son los procesos de aprendizaje que desarrolla, es decir, las competencias que fomenta:

- *Plantear y resolver problemas*: puesto que hemos partido de una situación del contexto vivencial en la que queremos averiguar un resultado a partir de unos datos iniciales.
- *Pensar y razonar*: para poder encontrar ese resultado, analizando lo que conocemos.
- *Comunicar*: a lo largo de toda la actividad la comunicación matemática entre los niños de la clase y los niños con la maestra ha sido fundamental en la búsqueda de la solución.
- *Representar*: con la ayuda de la maestra y a partir de la comprensión de la situación resuelta con el material manipulable, los niños y niñas han representado las sucesivas etapas de la resolución del problema.
- *Utilizar el lenguaje simbólico de las operaciones*: del conteo inicial de los dientes caídos hemos pasado a expresarlo simbólicamente mediante la operación suma.

Tareas como la descrita surgida de las experiencias de los niños aparecen de forma continua en las aulas de Infantil. Es labor del docente bien formado y preparado saberlas aprovechar para fomentar la alfabetización matemática de sus aprendices.

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

Los niños de tres a seis años llegan a la escuela con diversos grados de ilusión y desarrollo integral. Es labor de los docentes acompañarles y guiarles, juntamente con sus padres y familiares, en el desarrollo de su conducta en los tres planos: social, emocional e intelectual. Y es precisamente en este último plano, el intelectual, en el que debido a nuestra sólida formación profesional podemos ayudar a nuestros aprendices a ser competentes, especialmente en los aspectos matemáticos, sentando las bases de un buen razonamiento, una correcta comunicación apoyada en un lenguaje preciso y correcto, y fomentando su nivel de abstracción con la representación de ideas.

Para lograrlo, utilicemos las propias situaciones que nos brindan los niños en sus juegos, sus incipientes lecturas, sus experiencias familiares, etc., pues como decía el novelista francés Tristan Bernard «Un niño que hace una pregunta representa la voz de todo un mundo que quiere mejorar.».

BIBLIOGRAFÍA

AA.VV. «Competencias matemáticas». Revista *UNO*, nº 29, 2002.

ALSINA, Á. *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos, para niños y niñas de 6 a 12 años*. Narcea Ediciones. Madrid, 2004.

FEYNMAN, R. *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* Alianza Editorial. Madrid, 1990.

N.C.T.M. *Estándares curriculares y de educación matemática*. S.A.E.M. THALES. Sevilla, 1991.

N.C.T.M. *Estándares curriculares y de educación matemática: Nivel Inicial*. Serie ADDENDA nº 1, S.A.E.M. THALES. Sevilla, 1993.

N.C.T.M. *Estándares curriculares y de educación matemática: Desarrollo del significado numérico*. Serie ADDENDA nº 2, S.A.E.M. THALES. Sevilla, 1993.

N.C.T.M. *Estándares curriculares y de educación matemática: Geometría y sentido espacial*. Serie ADDENDA nº 4, S.A.E.M. THALES. Sevilla, 1995.

N.C.T.M. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. S.A.E.M. THALES. Sevilla, 2004.

SCHILLER, P.; PETERSON, L. *Actividades para jugar con las matemáticas*. Ediciones CEAC. Barcelona, 1999.

SELMÍ, L.; TURRINI, A. *La escuela infantil a los tres años*. MEC-Ediciones Morata, S.L. Madrid, 1999.

SELMÍ, L.; TURRINI, A. *La escuela infantil a los cuatro años*. MEC-Ediciones Morata, S.L. Madrid, 1997.

SELMÍ, L.; TURRINI, A. *La escuela infantil a los cinco años*. MEC-Ediciones Morata, S.L. Madrid, 1997.

THORNTON, S. *La resolución infantil de problemas*. Ediciones Morata, S.L. Madrid, 2000.

LA INSUMISIÓN DEL ALGORITMO EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Dr. D. Santiago Atrio Cerezo
Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco»
Madrid

INTRODUCCIÓN

1. LAS CUATRO REGLAS SEGÚN LO TRANSMITIDO POR MOHAMMED IBN MUSA (AL-KHWARIZMI) Y LEONARDO DE PISA (FIBONACCI)

1.1. Ábacos o algoritmos. Una lucha histórica

2. NUMERATOR. UN JUEGO PARA APRENDER LA NUMERA- CIÓN Y LAS CUATRO OPERACIONES MATEMÁTICAS

2.1. Reglas del juego

2.2. Algunos ejemplos de trabajo con el algoritmo de la adición

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

En diciembre de 2005 se publica el artículo titulado: «Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas», en el número cuatro de la Revista Iberoamericana de Educación Matemática, páginas 31-46¹. La lectura de este artículo suscitó en su momento mi interés y algunas reflexiones personales que ahora expongo en este trabajo: «*La insumisión del algoritmo en el aula de educación primaria*». Un algoritmo, nos dice el Dr. Fernández Bravo al comienzo de su estudio «*se identifica en el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea*

¹ FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas*. En línea: <http://www.fisem.org/descargas/4/Union_004_006.pdf> Consulta mayo 2006. Publicado 2005.

o la resolución de un problema»². Este, aparentemente sencillo ejercicio resulta, en muchas ocasiones, el primer recuerdo de frustración que tenemos de nuestros incipientes pasos en este arte del pensar que es la matemática. ¿Por qué ocurre esto? Por otro lado tenemos las palabras e ideas del tristemente desaparecido Don Miguel de Guzmán³, para intentarnos orientar sobre posibles remedios para combatir este mal: *«El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?»*⁴.

La finalidad de esta reflexión que ahora iniciamos es doble. Por un lado intentar responder a la pregunta: ¿son insumisos los alumnos, los algoritmos que presentamos a los alumnos o ambas cosas a la vez? Y en segundo lugar, el de presentar alguna técnica manipulativa y modelo constructivista que desde el Centro de Enseñanza Superior en Humanidades y Ciencias de la Educación Don Bosco de Madrid se nos proponen para contribuir a la solución de este problema. Además es una de las metodologías utilizadas para la formación de maestros en este Centro Universitario.

1. LAS CUATRO REGLAS SEGÚN LO TRANSMITIDO POR MOHAMMED IBN MUSA (AL-KHWARIZMI)⁵ Y LEONARDO DE PISA (FIBONACCI)⁶

Solemos atribuir a estos dos personajes, con los que no nos podemos detener mucho tiempo, el haber introducido en Occidente el sistema de numeración posicional decimal de tradición hindú y, en consecuencia, sus al-

² FERNÁNDEZ BRAVO. Op. Cit. p. 32.

³ Miguel de Guzmán Ozámiz nació en 1936 en Cartagena. Fue catedrático de Análisis de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1982, miembro correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina desde 1985. Desde el 91 al 98, presidente de la I.C.M.I., Comisión Internacional de Instrucción Matemática. Falleció a los 68 años un matemático universal, «el último de los pitagóricos».

⁴ PÉREZ SANZ, A. GUZMÁN, *In memoria*. En línea: <<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/miguel/Miguel%20de%20Guzm%E1n.htm>> Consulta mayo 2006.

⁵ Al-Khwarizmi (780, 850). Su nombre sugiere que era originario de Khwarizmi, en Asia central. Al parecer, pasó casi toda su vida en Bagdad y fue jefe de bibliotecarios en la Casa de la sabiduría. El padre de los algoritmos tal y como hoy los conocemos es, por lo tanto, Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi. De una de sus obras, *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, surgieron nuestras palabras álgebra, guarismo y algoritmo. Al-Khwarizmi en su tratado de álgebra, pretende enseñar un sistema aplicado

goritmos. Aparte del hecho de que sus vidas son referencias cronológicas relativamente recientes, llama la atención que en nuestro siglo XXI parezca que este sistema está preinstalado en la mente del niño o que se aprenda como la lectura o la escritura: siguiendo pautas nemotécnicas.

También resulta constatable que los niños para jugar al escondite utilizan la enumeración de los dígitos, quizás por tradición cultural, mucho antes de saber leer. Pero esta cantinela la podrían sustituir y ciertamente se divertirían más si cantasen una canción infantil o recitasen los nombres de sus héroes favoritos. Los dos casos son repetición de reglas nemotécnicas ordenadas según algún criterio más o menos lógico.

Esta tonadilla numérica, sin haber llegado todavía al algoritmo, no presenta una enumeración razonada según criterio alguno, ni tampoco es un proceso razonado de cálculo. Se trata del enunciado ordenado de una cadena que los adultos denominamos lógica y expresamos analíticamente con $n+1$.

Por lo tanto, en un lado podemos poner lo que los alumnos hacen y por otro, muchas veces muy alejado, lo que los adultos creemos y queremos deducir de su comportamiento.

Lo mismo nos ocurre con la representación de las cantidades de elementos que configuran un conjunto dado. Llegamos al diez, al niño se le acaban los dedos de sus manos y se le presenta un problema de representación que podemos y debemos plantearnos como profesores para acompañar a los niños en su proceso de descubrimiento y construcción. ¿Qué criterios seguiremos para representar el resto de los números? ¿Por qué ese criterio y no otro? El sistema de numeración, que curiosamente denominamos nuestro, lo presentamos como algo cerrado, hecho, impuesto por sociedades científicas o grandes genios desconocidos. Esto, además de ser falso, es para el alumno la primera de una serie de imposiciones con las que la palabra matemática va identificándose. Una asociación que empareja la matemática con una serie inacabable de reglas y procedimientos preestablecidos que han de ser dominados.

a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Traducido al latín por Gerardo de Cremona, se utilizó en las universidades europeas como libro de texto hasta el siglo XVI. De su aritmética, *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, sólo conservamos la versión latina, *Algoritmi de numero Indorum*, del siglo XII. En esta obra describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional en base diez y métodos para hacer cálculos con él.

⁶ Leonardo de Pisa o Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (c. 1170 - 1250), también llamado Fibonacci nació en Italia pero fue educado en el norte África y conoció las ventajas del sistema matemático de numeración usado por los árabes. Su tratado *Liber abaci*, fue publicado en el 1202 después de volver a Italia y esta basado en resúmenes de aritmética y álgebra que Fibonacci había acumulado durante su vida.

Si bien es cierto que el final del camino puede contener algunos de estos preceptos, no es menos cierto que no debemos de olvidarnos, en esta misma senda, de secuencias íntimas de descubrimiento personal que hagan sentir al alumno como constructor de su propio conocimiento y, sobre todo, que constituyan hitos exitosos de su aventura creativa personal.

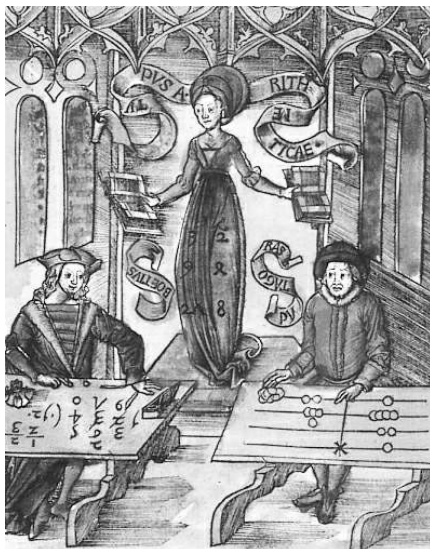


Imagen 1. La «Perla Filosófica», de Gregor Reisch (1.503). Grabado en madera.

Hasta bien entrado el siglo XVI⁷ el sistema de numeración decimal hindú-árabe no se acabó de imponer en Europa. Este hecho no perjudicó la enseñanza de las matemáticas, quizá sí a su desarrollo científico por parte de Occidente, pero en la introducción de esta ciencia en las primeras etapas de la educación no tiene trascendencia apreciable. Podíamos retroceder en el tiempo y llegar al tratado de los Elementos de Euclides para apreciar cómo el sistema de numeración, en sí mismo, no influye en el desarrollo de la docencia de esta disciplina. Este grabado, también conocido como «*Margarita Philosophica*», nos muestra una alegoría hecha en 1.503 sobre la aritmética

⁷ Gerberto de Aurillac (940-1003). El monje Gerberto sería en 999 Obispo de Roma con el nombre de Silvestre II. Supuestamente llegó a la Marca Hispánica en el siglo X, entre 967 y 970, para instruirse en los saberes matemáticos árabes. Boyer nos dice que estudió aritmética y geometría, «siguiendo probablemente en la línea de la tradición que partía de Boecio, ¡que había dominado en la enseñanza de las escuelas eclesíásticas de Occidente durante quinientos años sin experimentar ninguna mejora!» (BOYER, 1999: 323.) Gerberto conoció los numerales hindú-arábigos y posiblemente lo hizo por conocer ya los textos de Al-Khwarizmi. Este hecho constata que la introducción del sistema hindú-árabe está presente en occidente mucho antes que lo describiera Fibonacci aunque tardará muchos siglos en consolidarse.

arbitrando la rivalidad entre un partidario de las cifras y un adepto al cálculo mediante fichas. A uno y otro personaje están asociados por oposición los nombres de Boecio⁸ (muerto hacia el 525 y referencia obligada en el Medioevo Occidental) y Pitágoras (asociado a una representación geométrica de los números). El aire triunfal del primero, el aspecto confuso del segundo, así como la ropa llena de cifras de un árbitro imparcial que es la Aritmética, ponen de manifiesto que al comenzar el Renacimiento acababa de producirse una victoria parcial del primer bando.

Digo parcial pues el algoritmo que se intenta representar en este grabado, ni siquiera corresponde a uno real. Obsérvese que la secuencia que reproduce Gregor Reisch no tiene coherencia y tan sólo es la representación ordenada de símbolos numéricos.

1.1. Ábacos⁹ o Algoritmos. Una lucha histórica

En este momento de la exposición nos adentramos en el uso pedagógico de una herramienta de cálculo como es el ábaco chino. Tan sólo pretendemos acercarnos a una manera de expresar cantidades y de efectuar las cuatro operaciones clásicas con celeridad y exactitud.

Es una demostración de una de las realidades históricas que permitió la representación numérica y ejecución de algoritmos sin necesidad de la representación hindú-arábica. Del mismo modo constata la evidencia de poner en tela de juicio el tiempo dedicado a adiestrar a nuestros alumnos en procedimientos concretos sin mostrarles otras opciones del razonamiento humano.

Por poner un ejemplo que afecta tan sólo a una parte del continente americano, Struik¹⁰ cita una investigación de la Universidad de Stanford

⁸ Se desconoce la razón por la que el autor eligió a Boecio como representante del algoritmo actual. Anicio Manlio Severino Boecio (480-524) fue *magister officiorum*, el alto cargo del decadente imperio romano encargado de la supervisión de todos los funcionarios del estado. Aún con estos quehaceres tuvo tiempo para ser instruido como un neopitagórico convencido y en su tratado de aritmética sigue puntualmente las enseñanzas de su maestro Amonio que a su vez lo fue de Proclo, continuador de la obra científica de Platón. *Institutio Musical* y la *Arithmetica*, siguen el modelo del tratado del pitagórico Nicómaco de Gerasa.

⁹ La ilustración de la «Perla Filosófica», de Gregor Reisch representa una tabla que hoy conocemos como ábaco antiguo y que, en la edad media, fueron conocidos como tableros de contar. Más información en <<http://www.ee.ryerson.ca/~elf/abacus/espanol/history.html>> En línea. Consulta octubre de 2006.

¹⁰ Dirk J. Struik, «Stone Age mathematics», *Scientific American*, 179, diciembre de 1948, p.46-47.

sobre 307 sistemas de numeración que se encuentran en las tribus indígenas americanas, con 146 en agrupamientos de diez, 106 en agrupamientos de cinco y diez, 81 son binarios, 35 son de base veinte y de base cinco y veinte, 15 corresponden a agrupamientos de cuatro, 3 de tres y uno sólo de base ocho. *George Ifrah*, en su *Historia Universal de las Cifras*, nos describe más de 3.000 sistemas de numeración distintos utilizados en nuestro planeta.

Y por último, todo esto nos sitúa finalmente ante una clara evidencia. Si aquello que exponemos en el aula y que reflexionamos con nuestros alumnos no se apoya en un apartado lógico producto de su construcción personal, corremos el riesgo de imponer doctrinas en vez de suscitar razonamientos, preguntas y/o dudas.

La reflexión que nos ocupa se hace por tanto inabordable. Parece como si todo lo que hasta ahora eran certezas en la docencia de las matemáticas se conviertan en dudas y que unas pocas reflexiones hagan temblar los cimientos del aparente sólido edificio curricular en el que estamos viviendo cómodamente.

No persigo ni mucho menos este fin, pero si nos situamos en este debate, quizás concedamos algo de sentido investigador a nuestro trabajo y, finalmente, veamos alguna vía de atender a las necesidades de nuestro alumnado.

De este modo y para intentar llegar a alguna conclusión, después de mucho debatir y reflexionar, podríamos citar un decálogo de normas para orientar al docente del siglo XXI en su labor didáctica en el área de matemáticas.

1. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla constantemente al alumno, observándole constantemente

La preparación de una sesión de trabajo en el aula nos debería hacer reflexionar sobre una única pregunta que queramos proponer a nuestro alumnado. La primera. Luego será la propia interacción del aula la que nos conduzca por unos caminos u otros y, finalmente nos permita aventurar alguna respuesta a la duda planteada.

2. No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución

La génesis histórica se revela como un elemento que no podemos olvidar en el aula. No se trata de utilizarla como recurso para hacer más amenas nuestras explicaciones y asombrar a un público determinado. Se trata de hacer ver al discente que las matemá-

ticas son cultura, están presentes en nuestra historia y en el legado que hemos recibido de los que nos precedieron.

3. Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social

Hemos visto en numerosas ocasiones la necesidad de relacionar nuestra ciencia con los problemas de la denominada «vida cotidiana».

4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción

Punto fundamental en el que ya me he detenido anteriormente. Se trata de reflexionar sobre la conveniencia de presentar contenidos antes o después de otros. Lo que hoy en día denominamos secuenciación de contenidos matemáticos.

Es importante observar que la mente humana presenta numerosas ventanas abiertas al conocimiento. Muchas de ellas pueden abrirse y cerrarse con el paso del tiempo. Pero algunas de ellas, una vez cerradas no se vuelven a abrir nunca. Por ello es fundamental activar estas inteligencias múltiples desde la más tierna infancia y atender su evolución temporal.

5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno

Constructivismo. No por el hecho de hablar de él y afirmar mi adhesión a esta metodología logro estar dentro de esta forma de trabajar. Es una actitud que nos obliga a permanecer en constante vigilia innovando y testando las pautas que creemos pueden atender mejor los procesos de enseñanza aprendizaje de nuestro alumnado.

6. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento

Claro, pues el objeto del conocimiento no son los números, ni las formas, ni las asociaciones lógicas o la estadística. El objetivo de nuestra ciencia es el de contribuir al desarrollo personal en el ámbito del razonamiento lógico.

7. Promover en todo lo posible la auto-corrección

La mejor virtud para el aprendizaje es la duda. Descubrir que nos hemos equivocado puede ser tan enriquecedor o más que el observar la solución del problema.

8. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas

Lo cual resulta lógico pues el destino final de nuestra docencia es los alumnos lleguen a automatizar determinados procesos, los algoritmos entre ellos. Pero no se nos debe olvidar que, en el camino, deben conocer las razones íntimas de esos procesos.

9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento

Evidencia que en ocasiones olvidamos, pues permitimos que las expresiones de los alumnos no refieran con exactitud su pensamiento. Debemos desterrar esa frase cotidiana que reza: *«Bueno, pero me explico»*. Si la exposición no es correcta, su pensamiento contendrá errores.

10. Procurar en todo momento que el alumno obtenga éxitos que eviten su desaliento

Y en último lugar no olvidarnos de lo importante que es el refuerzo positivo y el éxito personal.

Este decálogo ni es mío ni reciente en el tiempo. Es actual y una guía efectiva que debemos tener presente para aventurarnos en este saber que denominamos matemáticas. Su autor además es español, cuestión que en ocasiones creemos imposible. Pues bien, también tenemos maestros nacidos en esta península ibérica que nos pueden hacer reflexiones tan fecundas. Su nombre es Don Pedro Puig Adam (1900-1960), fue uno de los pioneros en didáctica de las matemáticas y redactó este decálogo en 1955.

Sirva este trabajo de admiración por todos los que nos precedieron en este precioso arte de ayudar a otros a descubrir los límites de su propia mente.

2. NUMERATOR. UN JUEGO PARA APRENDER LA NUMERACIÓN Y LAS CUATRO OPERACIONES MATEMÁTICAS

Numerator es un material manipulativo¹¹ con el que podemos ayudar al alumno a descubrir los conceptos matemáticos. Estamos acostumbrados y

¹¹ Inventado por el profesor José Antonio Fernández Bravo, tras una rigurosa investigación longitudinal en el aula de más de diez años de duración. Permite la interacción para descubrir y comprender: las operaciones básicas, tanto el nuestro Sistema de Numeración Decimal como en otros sistemas de numeración posicionales; relaciones y propiedades fundamentales; el número decimal y sus operaciones; operaciones con polinomios, entre otros temas y conceptos.

conocemos comúnmente otra gran variedad de materiales y este, quizás por su reciente incorporación al mercado, sea algo desconocido. Por este motivo quiero presentarlo en este volumen.

Numerator es un juego dirigido al alumno. Por esto está en la línea que apuntaba Miguel de Guzmán al comienzo de este artículo. Es una propuesta metodológica que presenta nuestros insumisos algoritmos como lo que realmente son. Parte de un juego lógico creado por la mente humana para desarrollar sistemas que mejoren la resolución de los problemas cotidianos. Pero, siendo un juego, no invita a la dispersión. Es un juego matemático que como todos ellos, en caso de no ser utilizado con intención educativa, pierde todos los mimbres constructivistas con los que lo estamos adornando.

El material, por sí mismo, como cualquier material del mercado no es ni bueno ni malo. Estará en la labor reflexiva y en el estudio previo del docente, la guía para que su trabajo sea exitoso.

Este último paso es quizás el que se echa más en falta en nuestra sociedad. Los docentes son maestros y también deberían de ser investigadores. Tema complejo dado el gran volumen de trabajo que tenemos y el escaso tiempo para realizarlo. Quizás la especialización de profesionales en estos temas científicos permitiría abordar esta problemática pero es un tema que se escapa de los límites de este artículo.

Numerator es un juego creativo que, si se utiliza con intención pedagógica, puede ayudar al niño en sus procesos de:

- Comprensión del significado decimal y «posicional» de nuestro sistema de numeración.
- Lectura y escritura de cualquier número.
- Comprensión del significado de dichas expresiones orales o escritas.
- Descubrimiento de las propiedades y relaciones de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas.
- Estudio de otros sistemas, tanto en una base determinada como indeterminada.
- Trabajo con polinomios, cambios de unidades, etc.

Consta de 16 cartones cuadrados. Cuatro de color naranja y otros tantos verdes, amarillos y rojos. Los colores no son meramente decorativos. Representan el mismo criterio de color que las *regletas Cuisenaire*.

La regleta roja representa el doble de lo que represente la regleta blanca. Así, si la blanca representa el 1 la roja representará el número 2, por lo

que los cartones rojos los utilizaremos para la base dos. De este modo la regleta verde representa al número 3 y los cartones de este color la base tres, la regleta amarilla al número 5 y los cartones de este color la base cinco y la naranja al número 10, representando los cartones con este color la base diez.

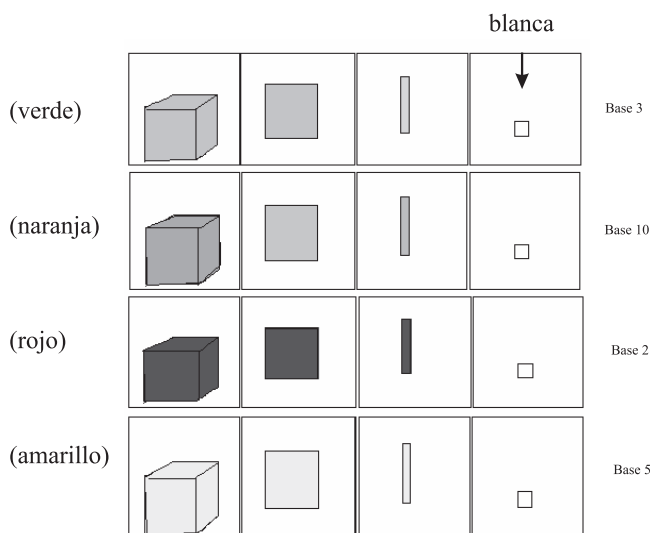


Imagen 2. Los 16 cartones del material Numerator

2.1. Reglas del juego

En un primer momento deberemos establecer un criterio de ordenaci3n para los cartones naranjas, que por corresponder a la base 10, ser3n los que utilizaremos. Los cartones suelen ser bautizados por los ni3os con nombres como dado, torre, pared o jaula.

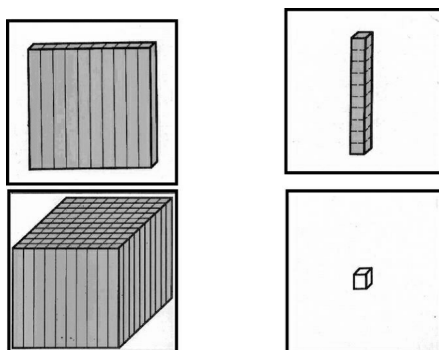


Imagen 3

Luego llegará el momento de sugerir un orden, de proponer una situación espacial concreta y de, finalmente, consensuar un ordenamiento que nos permita a todos jugar con la misma ubicación de los cartones sobre nuestra mesa.

No es un proceso definido por una regla dada, no es una imposición pues la única regla del juego naranja, base decimal, rezará que diez fichas de una carta equivalen a una ficha de la carta que está inmediatamente a su izquierda.

Es por este motivo que la situación de los cartones es previa y debe resolverse en el aula con tiempo suficiente.

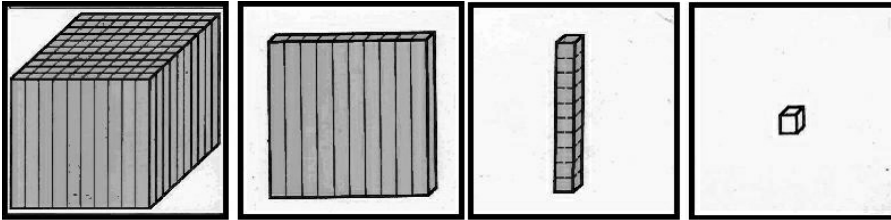


Imagen 4

Luego llegará el momento de situar las fichas sobre los cartones con órdenes sencillas.

- *Tres torres y dos paredes y una jaula*, es una de las expresiones que los niños oirán debiendo colocar tantas fichas como les decimos en su lugar correspondiente. Rápido observan que con esas seis fichas del ejemplo, se pueden generar múltiples combinaciones diferentes y que, utilizando todas el mismo número de fichas, representan conjuntos bien distintos.
- *Representa trece dados con el menor número de fichas posibles*,
- *Representa trece dados con el mayor número de fichas posibles* dirá el profesor.

Este tipo de preguntas motivarán que los alumnos deban inventar un criterio de cambio. Éste, sugerido o no por el profesor, se transformará finalmente en el criterio general de nuestro sistema de numeración posicional decimal.

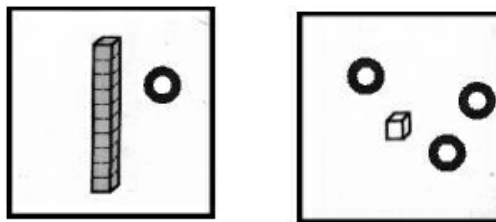


Imagen 5

Y todo esto sin hablar todavía de unidades, decenas, centenas o unidades de millar. Este proceso llegará ahora y nos servirá para ponernos en contacto con el resto del mundo en el que vivimos pues al dado lo llaman unidad, a la torre decena, a la pared centena y a la jaula unidad de millar.

2.2. Algunos ejemplos de trabajo con el algoritmo¹² de la adici3n

Seguimos atendiendo nuestro juego y en la mente despierta de los alumnos aparecen de forma natural las operaciones. La adici3n no es más que la soluci3n a preguntas concretas donde el cálculo del número de elementos resultante de la agrupaci3n de dos o más conjuntos sea el problema propuesto.

No aparecen las adiciones *sin llevadas* y *con llevadas*. No hay dos operaciones distintas sino una única que es la adici3n. Y sobre todo, no aparece el algoritmo como exposici3n de una metodología concreta que ha de ser asimilada por los niños ya que sus adultos así la usan. No es parte de un temario en el que en unas páginas determinadas de un libro dado, se expone un proceso que deban cumplir a rajatabla. La adici3n es algo natural presente en los problemas que la vida cotidiana nos propone y por ello el descubrimiento de metodologías que aceleren el proceso de cálculo debe ser presentado como un reto más que una imposici3n predeterminada. Serán los niños los que deberán investigar formas y maneras, los que deberán proponer métodos, los que tienen que unificar criterios y llegar a acuerdos que les permitan comunicar sus pensamientos sin error. Luego, si han sabido resolver este problema entre los 30 alumnos de una clase, podrán intentar ponerse de acuerdo con el resto del mundo.

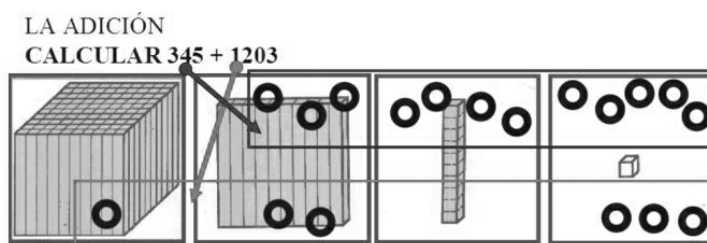


Imagen 6

¹² Por la brevedad del artículo tan sólo expondré algunas actividades sobre la adici3n. Recomiendo la lectura del libro del Dr. Fernández Bravo: *La numeraci3n y las cuatro operaciones matemáticas*, para encontrar respuesta al resto de algoritmos y completar el de la referida adici3n. En este tratado de 120 páginas se nos presentan técnicas y recursos para que los alumnos sean protagonistas activos en la construcci3n del conocimiento matemático.

Cuando en uno de los cartones de nuestro juego no aparecen representadas más de nueve fichas, el resultado de la operación es sencillo de expresar. Una unidad de millar y cinco centenas y cuatro decenas y ocho unidades. Pero si se da el caso contrario y en un cartón aparecen más de nueve fichas, podemos expresar el resultado de varias formas, todas correctas, pero deberemos unificarlas para exponer una respuesta común que nos permita entendernos en el futuro.

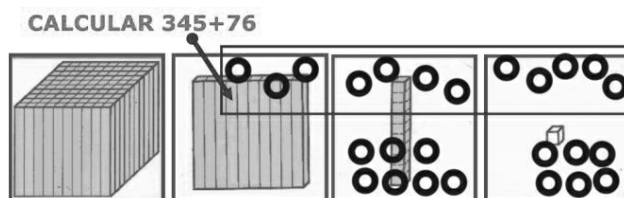


Imagen 7

El resultado de esta adición se puede expresar de forma correcta como tres centenas once decenas y once unidades. Y otro niño podría decir, con la misma corrección que el anterior, que el resultado es de tres centenas y doce decenas y una unidad.

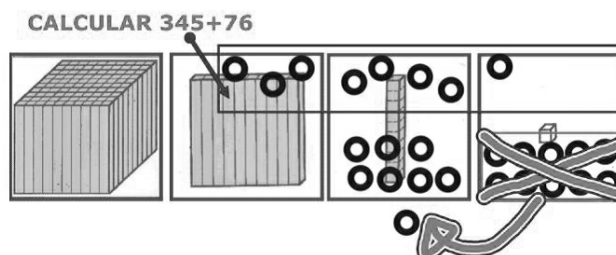


Imagen 8

Y un tercero asegurar que el resultado es de cuatro centenas y dos decenas y una unidad. Todos tienen razón, todos dicen la misma verdad y tan sólo se distinguen en el número de fichas que utiliza cada uno para dar su respuesta.

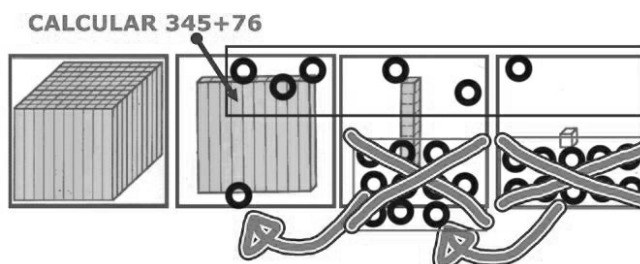


Imagen 9

Si el primero necesitó veinticinco fichas, el segundo tan sólo dieciséis y al tercero le bastaron siete para expresar el resultado de la operación.

Luego cuatro veces cien y dos veces diez y una unidad se verbalizará universal y comúnmente como cuatrocientos veinte y uno.

La construcción de estos procesos seguirá con la sustracción y con ella aparecerán nuevas posibilidades que harán que nuestro proceso adquiera mayor celeridad. Por ejemplo, si setenta y seis es cien menos veinticuatro, ($76=100-24$) podremos resolver la adición de $345+76$ como $345+100-24$, lo que resulta una operación mucho más rápida de resolver manipulando objetos, $345+100$ es 445 y menos 24 nos resultará cuatrocientos veinte y uno. De este modo, no necesitamos manipular tantas fichas. Nos bastará con tener desde el comienzo de la operación trece fichas en vez de las veinticinco que antes precisábamos.

Aprender jugando, creando, reinventando el universo abstracto que antes otros disfrutaron. Aprender conociendo, debatiendo y participando de una experiencia colectiva. Aprender consensuando resultados, analizando las ventajas e inconvenientes de una u otra solución. Y finalmente, asimilar de forma razonada, los extraños algoritmos que resuelven nuestros mayores con tanta naturalidad.

De este modo los algoritmos, les puedo asegurar, no son insumisos y, estos procesos constructivistas, a buen seguro contribuirán a que los niños quizás tampoco vean las matemáticas como una imposición irracional. En este mismo sentido, ya nos advertía Platón¹³ en su República, exponiendo sus enseñanzas en uno de sus maravillosos diálogos entre el maestro Sócrates y un discípulo llamado Glaucón.

«SÓCRATES: Pues en verdad que la aritmética y la ciencia del cálculo tienen por objeto los números.

GLAUCÓN: Es muy seguro.

SÓCRATES: De consiguiente la una y la otra conducen al conocimiento de la verdad.

GLAUCÓN: Pero de un modo admirable.

SÓCRATES: Esta pues sería una de aquellas ciencias que nosotros buscamos. Porque ella es necesaria al guerrero para disponer bien un ejército; al filósofo para salir de la existencia de las cosas y pasar hasta su esencia, sin lo cual jamás llegará a discurrir bien...

¹³ PLATÓN. *La República de Platón o Coloquios sobre la justicia*. Tomo I o «a» y tomo II o «b». Círculo del Bibliófilo. Collado J. Prólogo de Don Josef Collado. Madrid, 1805.

SÓCRATES: Conveniente pues sería, amigo Glaucón, establecer por ley y persuadir, que los que son destinados entre nosotros para ocupar los primeros empleos, se apliquen a la ciencia del cálculo, y que la estudien no superficialmente, sino hasta tanto que por la más pura luz del espíritu hayan llegado a conocer la naturaleza y las propiedades de los números: no para que les sirva como a los mercaderes y buhoneros en las ventas y compras; sino para facilitar al alma el tránsito de la generación a la verdad y a la esencia.»

PLATÓN, 1805b: 139

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, C. B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1999.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas*. CCS. Madrid, 2002.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Numerator*. CCS. Madrid, 2003.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. En línea: <http://www.fisem.org/descargas/4/Union_004_006.pdf> Consulta mayo 2006. Publicado 2005.

IFRAH, G. *Historia Universal de las Cifras*. Espasa Calpe. Madrid, 1997.

PÉREZ SANZ, A. GUZMÁN, M. *In memoria*. En línea: <<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/miguel/Miguel%20de%20Guzm%E1n.htm>> Consulta mayo 2006.

PLATÓN. *La República de Platón o Coloquios sobre la justicia*, tomo I o «a» y tomo II o «b». Círculo del Bibliófilo, Madrid, 1805.

STRUICK, D. J. «Stone Age mathematics». *Scientific American*, 179, diciembre de 1948, p.46-47.

EL VALOR DEL CUENTO EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Margarita V. E. Marín Rodríguez
Titular de la Escuela Universitaria.
Universidad de Castilla La Mancha

INTRODUCCIÓN

1. NIÑOS, APRENDIZAJE Y MATEMÁTICAS

2. CONTEMOS LAS MATEMÁTICAS

3. BUSCAMOS LOS CUENTOS

4. LOS CONTAMOS EN CLASE

5. ALGUNOS EJEMPLOS

6. PARA CONCLUIR

BIBLIOGRAFÍA

Innegablemente la narración de un cuento provoca la atención de niños y mayores. Su atracción radica por una parte en su propia estructura y por otra en que enlaza directamente con los sentimientos del oyente. Bajo estas premisas, ¿por qué no utilizar los cuentos como herramienta didáctica en las aulas de Infantil para enseñar los conceptos matemáticos y así facilitar a los niños la comprensión y asimilación de los mismos? A lo largo de este capítulo expondremos qué cuentos podemos utilizar, sugeriremos su metodología de aula y presentaremos algunos ejemplos concretos, resaltando los contenidos que se pueden trabajar a partir del cuento y cómo contribuye éste al desarrollo de competencias matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Las mágicas palabras «*Érase una vez...*» atraen poderosamente nuestra atención y nos tiene pendientes del narrador hasta escuchar «*...colorín colorado este cuento se ha acabado*», que marca el final y la resolución del conflicto planteado al principio. Por el camino nuestra imaginación nos ha permitido disfrazarnos de uno de los personajes y vivir con él, sentir como él, sufrir sus peripecias y gozar sus triunfos. Hemos aprendido nuevas cosas y conocemos su valor y utilidad independientemente de la edad que tengamos, pero no cabe duda de que es de los tres a los ocho años el período en el que la atracción por los cuentos es máxima.

Contamos cuentos a los niños para que sueñen despiertos con mundos diferentes, para entretenerlos, para ir a acostarse, para que aprendan un valor, una moraleja; pero si los cuentos ejercen esta atracción sobre ellos, ¿por qué no emplearlos en nuestras aulas para motivar y provocar el aprendizaje de los conceptos matemáticos que deben manejar a estas edades? ¿Cómo podríamos utilizar un cuento como herramienta didáctica de aprendizaje matemático? ¿Nos serviría cualquier cuento?

Intentaremos contestar a estas preguntas a lo largo de este capítulo, a partir de nuestra propia experiencia en las aulas de Infantil y la colaboración de alumnos y alumnas en prácticas de la Escuela de Magisterio de Ciudad Real.

1. NIÑOS, APRENDIZAJE Y MATEMÁTICAS

El niño de la etapa infantil está totalmente facultado para aprender; de hecho, según el National Council of Teachers of Mathematics, N.C.T.M. a partir de ahora, «*en ninguna etapa escolar es tan notable el crecimiento cognitivo*»¹ (N.C.T.M., 2004: 79). Bajo nuestro punto de vista y hablando metafóricamente, este niño aprende por ósmosis, imitando y haciendo todo aquello que observa en los adultos, sobre todo de los adultos en los que confía y admira.

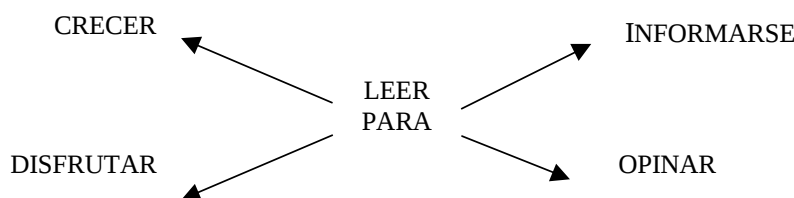
En este aprendizaje es fundamental su dominio paulatino del lenguaje, que le capacita para comunicarse, relacionarse, comprender, explicar. En esta comunicación no sólo emplea el lenguaje, también utiliza dibujos y otros medios simbólicos.

¹ N.C.T.M. Principios y Estándares para la Educación Matemática. S.A.E.M. THALES. Sevilla, 2004.

En la escuela, paralelo a este perfeccionamiento del lenguaje, comienza el niño a aprender a escribir y leer; es decir, a simbolizar mediante códigos universales esas palabras que ya sabe pronunciar y cuyo significado, la idea que vehiculan, conoce; sin olvidar que esta comprensión de la idea subyacente está mediatizada por el pensamiento concreto de los niños de esta etapa y que tan bien describen los psicólogos.

El niño comienza a tener contacto con sus primeros libros, generalmente álbumes ilustrados, llenos de vivas y sugerentes imágenes de color; libros instrumentales, en su mayoría dedicados a los números cardinales de 1 a 10; y cuentos, muchos cuentos. Cuentos en pictogramas, cuentos gráficos que puede leer él solo, cuentos con abundantes ilustraciones que le permiten recrear la historia después de leída la primera vez por un adulto mediador, y cuentos en formato equivocado para su edad, fruto de algún precipitado regalo de pariente o amigo.

Este niño, que comienza a explorar el mundo del libro, todavía no sabe que tiene ante sí un universo infinito de posibilidades de aprendizaje, pues como bien dice la cita de Josep M^a Espinás «*El libro es un alimento que no tiene fecha de caducidad*». El libro se convierte en un instrumento de aprendizaje y los adultos que rodeamos a los niños debemos asumir los diferentes objetivos de la lectura², a saber:



A estas tempranas edades el niño comienza a leer para «crecer», es decir, para adquirir conocimientos que le permitan desarrollarse a nivel social, emocional e intelectual; y para «disfrutar» con la lectura de cuentos en formato apropiado para ellos y contenidos adecuados a su nivel de comprensión. Esta situación de «soñar despierto» y «aprender sin darse cuenta» con las lecturas la refleja perfectamente Roald Dahl en *Matilda*³: «*Los libros la transportaban a nuevos mundos y le mostraban personajes extraordinarios que vivían unas vidas excitantes. Navegó en tiempos pasados con Joseph*

² II Jornadas sobre Bibliotecas escolares. En *Educación y Biblioteca*. Madrid, 1996, n.º 68, Págs. 14-16.

³ DAHL, R. *Matilda*. Alfaguara. Madrid, 2005.

Conrad. Fue a África con Ernest Hemingway y a la India con Rudyard Kipling. Viajó por todo el mundo, sin moverse de su pequeña habitación en aquel pueblecito inglés.» (Dahl, 2005:22)

Pero, innegablemente, la lectura, la narración oral más adecuada para estas edades son los cuentos. Un cuento es una **unidad narrativa** con un principio y final concreto y claro. En su comienzo nos sitúa las coordenadas espacio-temporales de forma general, «Érase una vez, hace mucho tiempo en un lejano lugar...», para plantear un conflicto o problema de algún tipo que se va a resolver a lo largo del relato. Todo lo que sucede en el cuento gira en torno a este cometido principal; se evitan los detalles innecesarios que desvían el interés de este cometido; tienen un ritmo sencillo, fácil de recordar, marcado por la secuencia lineal de planteamiento, nudo y desenlace que constriñe y cautiva la atención del pequeño.

Estas propiedades del cuento llevan a proponer al profesor australiano Kieran Egan «*Un modelo de enseñanza que se funde en la fuerza de la narración asegurará el planteamiento de un conflicto o un sentido de tensión dramática al principio de nuestras clases o unidades. De este modo, creamos una expectativa que se satisfará al final. El ritmo de expectativas y satisfacciones nos proporcionará la clave para seleccionar con precisión los contenidos.*»⁴ (Egan, 1994: 40-41). De esta manera, según Egan (Egan, op.cit.) evitaremos el aprendizaje de contenidos inertes, sin significado.

Por tanto, en las aulas de Infantil el cuento sería un elemento AGLUTINADOR de contenidos de diversas áreas y en concreto, respecto a los aspectos matemáticos que debemos trabajar, la utilización del cuento tiene unas claras ventajas:

- Presentan los aspectos matemáticos en CONTEXTO
- Nos permiten hacer las CONEXIONES matemáticas
- Ayudan a desarrollar las COMPETENCIAS básicas
- Provocan una alta MOTIVACIÓN en los aprendices

Ventajas que facilitan la comprensión de los aspectos matemáticos propios de su edad y por tanto favorecen su aprendizaje, ya que APRENDER matemáticas a un escolar de 3 a 6 años supone:

- El comienzo de su red matemática intelectual
- El gusto y una actitud positiva hacia la materia

⁴ EGAN, K. *Fantasía e imaginación: su poder en la enseñanza*. MEC – Morata. Madrid, 1994.

- La utilización de procedimientos básicos: clasificar, ordenar, organizar, interpretar
- La génesis de conceptos primarios a partir de la manipulación, reflexión y abstracción
- El desarrollo de las competencias básicas:
 - Pensar y razonar
 - Comunicar
 - Plantear y resolver problemas
 - Representar
 - Utilizar el lenguaje formal y técnico de las operaciones.

Objetivos que el cuento utilizado como «herramienta de aprendizaje» nos permite alcanzar.

2. CONTEMOS LAS MATEMÁTICAS

En el proceso de enseñanza aprendizaje que se realiza en las aulas el hecho comunicativo es fundamental. Esta comunicación se basa en un intercambio de información, que puede llegar a nosotros de forma oral o de forma escrita, en un contexto concreto y arropada por un texto. De hecho, según Goñi (Goñi, 2004) la **complejidad de un aprendizaje** es función de las siguientes variables:

- La Operación mental (competencia) a poner en juego (Op)
- El contenido o tema (T)
- El contexto de aprendizaje (c)
- El tipo de texto que soporta la información (tt)

Que podemos simbolizar con la siguiente expresión matemática de una función:

$$A = F (Op, T, c, tt)$$

El aprendizaje es siempre una combinación de estas cuatro variables y las cuatro se encuentran presentes en toda situación de enseñanza-aprendizaje.

Ejemplifiquemos esta idea con un relato concreto. *El topo que quería saber quién se había hecho aquello en su cabeza*⁵ es un magnífico cuento ilustrado que divierte y fascina a los niños por la temática de su historia. Esta

⁵ HOLZWARTH, W.; ERLBRUCH, W. *El topo que quería saber quién se había hecho aquello en su cabeza*. Alfaguara Infantil. Madrid, 2005.

historia está narrada en un lenguaje preciso y claro, con una escritura grande en la parte superior de la página y corta extensión: de tres a cuatro líneas; el resto del espacio lo ocupa la ilustración, lo que facilita la comprensión del niño. La secuencia narrativa es constante: página par pregunta del protagonista a un animal, casi siempre utilizando las mismas palabras; página impar este animal le responde que no, porque él lo hace así, y la explicación está en la ilustración. En este contexto de aprendizaje, con este texto sencillo y a la vez sugerente, el entablar un diálogo con los niños después de la lectura conjunta del cuento sobre el orden cronológico de la aparición de los personajes, antes/después, primero/último, el planteamiento del problema que le surge al topo un día al salir de su madriguera y cómo lo resuelve, es inherente a la propia situación y con este diálogo ayudamos a los niños a razonar y comunicarse empleando términos precisos de su incipiente lenguaje matemático así como a representar la acción.

Por tanto, de acuerdo con Egan (op. cit.), calificamos el cuento como «herramienta de aprendizaje» y como tal las razones para introducirlo en nuestras aulas de Educación Infantil, con el objetivo de facilitar al enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, serían las ya escritas por la autora en la *Revista Números* de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas (Marín, 1999):

- I. El cuento es un medio comunicativo que facilita la comunicación entre docente –narrador y discente– oyente.
- II. Nos permite utilizar la fantasía de los niños, su creatividad e imaginación, a la vez que las potencia.
- III. Facilita la unión del significado cognitivo con el afectivo, tan importante a estas edades y tan olvidado en una educación lógica y racional, sobre todo en Matemáticas.
- IV. Nos permite realizar una educación transversal, uniendo las «frías matemáticas» con los valores difundidos a través del cuento.
- V. Despierta sentimientos de simpatía en el niño que comienza a construir su estructura lógica-matemática con gusto y entusiasmo.
- VI. Al utilizar un elemento usual en el entorno lúdico del niño, éste disfrutará aprendiendo matemáticas.

Dadas estas razones, pasemos a analizar el tipo de cuentos a emplear.

3. BUSCAMOS LOS CUENTOS

En nuestras aulas podemos utilizar con buen aprovechamiento matemático tanto cuentos clásicos conocidos por los niños como inventados por los docentes para explicar un concepto concreto. En este último caso, a la hora de escribir el cuento siempre tendremos en cuenta los principios básicos de su estructura, como una unidad narrativa con un principio y un fin. Con la frase usual de comienzo *Érase una vez...* se crea una expectativa y se plantea un conflicto que se irá resolviendo a lo largo del relato. A partir de este momento, todo gira en torno a su resolución, eliminado lo superfluo, lo innecesario en el relato del mismo, hasta su final con alguna de las frases de cierre, como la usual... *colorín colorado, este cuento se ha acabado*. Así mismo, cualquier cuento bien elaborado tiene que suscitar nuestras respuestas afectivas. Los valores que aparecen en la narración inciden directamente en los sentimientos de las personas, motivándonos a escuchar o leer y a «vivir» las peripecias del o los personajes, por lo que el cuento perdura largamente en la memoria y por ende los aprendizajes realizados con o a partir de su lectura.

Un ejemplo de cuento escrito ex profeso para facilitar el aprendizaje matemático es el tierno y dulce relato *Sinnumerolandia*⁶ escrito por Ana Isabel Huertos Villareal e ilustrado por Yolanda Lázaro Manzano en el curso 1998-1999, cuando eran alumnas de la Escuela de Magisterio de Ciudad Real. Su objetivo al escribirlo era compartir con el niño el valor y la importancia del concepto «número» y por qué deben aprender a contar.

Lo realmente importante al utilizar un cuento es **saber leerlo con «ojos matemáticos»**, buscando las conexiones matemáticas del mismo, las ideas soportadas por el contexto de la narración, los conceptos explícitos e implícitos presentes en el mismo. Ejemplos de cuentos que se pueden explotar matemáticamente en el aula encontramos en el libro de la profesora Saá Rojo (Saá Rojo, 2002), quien además los clasifica por su tratamiento lógico, numérico y geométrico de los contenidos matemáticos. Igualmente las profesoras Schiller y Peterson (Schiller, P.; Peterson L., 1999), en su libro de actividades para la enseñanza de las matemáticas en la Etapa Infantil, comienzan cada capítulo con un cuento, ya que con el cuento se motiva, se contextualiza y sirve de puente hacia otros conceptos matemáticos.

⁶ Disponible on-line: <http://www.uclm.es/profesorado/mvmarin/sinnumero/sinnumero.html>

4. LOS CONTAMOS EN CLASE

En cuanto a las estrategias concretas a utilizar debemos recordar que nuestra intención es fomentar un **proceso activo de aprendizaje, basado en la comprensión**, en el que se conduce al párvulo a «descubrir» los conceptos disciplinares soportados por el cuento para su mejor asimilación y estructuración mental. Por ello, **nuestra metodología de trabajo** está fundamentada en:

- El **aprendizaje en contexto**, puesto que los contenidos matemáticos aparecen en la propia narración con una razón de ser, por lo que presentamos al aprendiz una visión amplia e integrada de las matemáticas, facilitando que éste perciba la vitalidad, riqueza y utilidad de las mismas.
- El **diálogo interactivo** entre el narrador y los oyentes, lo que permite el análisis de los conceptos matemáticos emergentes en el cuento y el razonamiento y comunicación matemáticos.
- La **realización de las actividades en pequeño y gran grupo**, lo que posibilita un aprendizaje cooperativo y colaborativo.

Así mismo, recordemos que en las aulas de Infantil la enseñanza debe ser globalizada por lo que de la narración de un cuento nos servirá para trabajar conjuntamente con otras áreas, así como la psicomotricidad.

A lo largo de este proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del cuento estaremos estimulando en el niño la observación, la intuición, la imaginación y el razonamiento que favorecen el desarrollo de su pensamiento lógico matemático.

5. ALGUNOS EJEMPLOS

El niño comienza a utilizar los números para contar y para ordenar en su propio entorno familiar. Respecto a los ordinales, frases como «somos los últimos de la cola», «ha llegado el primero», «es la segunda medalla conseguida», etc., pululan tempranamente en el entorno del niño y le son familiares. Podemos dotarles de su significado matemático en la escuela mediante la utilización de cuentos en los que aparecen los números ordinales; con este recurso literario comprenderán su significado y utilización correcta en un contexto concreto. Ejemplos para ello son los relatos *El reino de Comilonia*⁷ de Rodari, *Diez patitos de goma*⁸ de Carle, o *Ser quinto*⁹ de Jandl y Junge.

⁷ RODARI, G. *Cuentos por teléfono*. Editorial Juventud. Barcelona, 2002, pp. 39.

⁸ CARLE, E. *Diez patitos de goma*. Kókinos. Madrid, 2006.

⁹ JANDL, E.; JUNGE, N. *Ser quinto*. Lóguez. Santa Marta de Tormes, 2005.

En *Diez patitos de goma* se cuentan y ordenan de 1 a 10 las aves. Mediante el orden, el autor nos cuenta lo que le ocurrió al 1º, 2º, etc., hasta llegar al 10º, de una forma breve, clara y precisa, utilizando el lenguaje geométrico para situar espacialmente al patito en cuestión. Al igual que muchos libros para estas edades las ilustraciones juegan un papel relevante en la historia.

Ser quinto es un delicioso relato cuyo objetivo es desmitificar la visita al médico y erradicar el miedo intrínseco que conlleva. Sus protagonistas son cinco juguetes: pingüino, pato, oso de peluche, rana y un pinocho de madera, que esperan en la consulta de un médico para ser reparados. El último, el pinocho, va observando cómo, según sus compañeros entran en la consulta, pasa de ser quinto, a cuarto, a tercero, etc., hasta llegar su turno de consulta. En lenguaje coloquial podemos decir que tanto su simplificado texto a lo mínimo necesario, como sus magníficas ilustraciones «no tienen desperdicio matemático». Además del orden descendente que se establece, las nociones topológicas de dentro/fuera están presentes en texto e ilustración; igualmente el concepto de sustracción, pues el niño observa la perfecta correspondencia biyectiva inicial paciente/silla y cómo según entran en consulta se van quedando vacías una a una las sillas.

Por último el cuento de Rodari (op. cit.) nos permite ordenar hasta nueve y emplear nuevos símbolos para indicar esta ordenación como son los números romanos. El texto del relato es el siguiente:

*En el lejano y antiguo país de Comilonia, al este del ducado de Bebebién, reinó en **primer** lugar Comilón el Digeridor, así llamado porque después de haberse comido los fideos roía también el plato y lo digería como si tal cosa. Le sucedió en el trono Comilón **II**, llamado Tres Cucharas, porque comía el caldo del potaje utilizando a la vez tres cucharas de plata: dos las sostenía él con sus manos y la tercera se la aguantaba la reina, y pobre de ella si no estaba llena.*

Después de él, **en este orden**, subieron al trono de Comilonia, que estaba colocado en el extremo de una mesa servida noche y día:

*Comilón **III**, llamado Entremeses;*

*Comilón **IV**, llamado Chuleta a la Parmesana;*

*Comilón **V**, el Famélico;*

*Comilón **VI**, el Desgarrapavos;*

*Comilón **VII**, llamado ¿Queda Más Todavía?, que devoró incluso su corona, a pesar de que era de hierro;*

*Comilón **VIII**, llamado Corteza de Queso, que no encontró ya nada que comer en la mesa y se tragó el mantel;*

*Comilón **IX**, llamado Quijada de Acero, que se comió el trono con todos los cojines.*

Así terminó la dinastía.

Y nuestra propuesta de trabajo en las aulas de cinco años a partir de la narración del mismo es la siguiente:

Comenzamos entresacando las palabras con significado o relación matemático que aparecen en el texto y las clasificamos por los contenidos matemáticos a los que están ligadas; éstas son:

- Nociones de precálculo:
 - Aspecto cardinal del número: «Tres» cucharas, «dos», «una» mesa.
 - Aspecto ordinal del número: «primer» lugar, «segundo», «tercera/tercero», «cuarto», «quinto», «sexto», «séptimo», «octavo», «noven».
 - Cuantificadores: nada/todo, «en este orden».
- Nociones de medida:
 - Respecto la magnitud volumen-capacidad: «lleno - vacío» (... si no estaba llena.).
 - Respecto la magnitud tiempo: noche y día.
- Nociones geométricas:
 - Aspectos topológicos: «lejos-cerca» (En el lejano).
 - Situación espacial: este (al este del ducado de), extremo (colocado en el extremo).
- Temporalización de sucesos

Esta clasificación nos indica que el cuento es adecuado fundamentalmente para **trabajar los ordinales** en un contexto y con una razón de ser: enumerar cronológicamente a los sucesivos y glotones reyes de Comilonia. Por lo que, a nuestro entender, lo utilizaríamos para introducirlos en el aula de cuatro años para profundizar en los ordinales en el aula de cinco años, siempre teniendo en cuenta las unidades didácticas correspondientes de la programación de aula. Igualmente nos permite introducir o repasar los cuantificadores numéricos por sus valores opuestos: todo-nada; las relaciones de orden: quién fue el primero, quién fue el último, quién sigue al tercero, cuarto, etc.; la medida cualitativa de la magnitud volumen: lleno- vacío; las nociones topológicas lejos-cerca y las relativas a la orientación y situación espacial. Así mismo, mediante el coloquio dirigido analizamos la temporalización de sucesos: ¿qué se comieron antes el mantel o el trono?, etc. Finalizaríamos con la utilización del cuento en Primaria para introducir la numeración romana y su manejo en la numeración de eventos concretos, como en este caso los reyes de la dinastía.

En cuanto a los valores del cuento podemos utilizarlos para el tema transversal de «Educación para la salud» y las consecuencias de la glotonería que por su exceso consigue consumir y eliminar el reino.

6. PARA CONCLUIR

A lo largo de este capítulo he querido exponer y explicar que la utilización del cuento como herramienta didáctica de aprendizaje es un acierto en la enseñanza de las matemáticas, con niños y niñas de 3 a 6 años.

La aportación experiencial de mi alumnado de la Escuela de Magisterio de Ciudad Real ha sido un buen apoyo para fundamentar mis ideas, propuestas y conclusiones, ya que, en su período de prácticas, ha comprobado personalmente el interés y el ambiente mágico despertado por la narración de un cuento entre los niños y niñas de las aulas de Infantil. Éstos primeramente disfrutan y se dejan llevar por el placer del relato sumergiéndose en el mismo; posteriormente, a partir de esta narración, trabajan comprenden y asimilan los contenidos netamente matemáticos. Mi alumnado y yo hemos comprobado cómo los párvulos «viven» su proceso de aprendizaje como un juego más y asumen perfectamente su papel activo en el mismo. Los aprendizajes tienen una razón de ser y los niños colaboran con el docente en su consecución.

Por tanto, un consejo ¡¡contemos las matemáticas!! y las aprendemos con gusto e interés.

BIBLIOGRAFÍA

BRAVO-VILLASANTE, C. *China, china, capuchina, en esta mano está la china*. Susaeta S.A. Madrid, 1990.

EGAN, K. *Fantasia e imaginación: su poder en la enseñanza*. MEC - Morata. Madrid, 1994.

GOÑI, J.M. «Los textos en el currículo». *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 2004, 35, pp. 5-8.

MARÍN RODRÍGUEZ, M. «El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos». *Revista Números*, 1999, 39, pp. 27-38.

MARÍN RODRÍGUEZ, M. «Cuentos para aprender Matemáticas». *ACTAS III Jornadas Provinciales de Matemáticas*. Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid. Madrid, 2003, pp. 89-102.

N.C.T.M. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. S.A.E.M. THALES. Sevilla, 2004.

PIAGET, J. *Seis estudios de psicología*. Seix Barral. Barcelona, 1967.

RODARI, G. *Cuentos por teléfono*. Editorial Juventud. Barcelona, 2002.

SAÁ ROJO, M.D. *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Editorial EOS. Madrid, 2002.

SCHILLER, P.; PETERSON, L. *Actividades para jugar con las matemáticas*. Ediciones CEAC. Barcelona, 1999.

CUANDO DOS MÁS DOS DAN CINCO: UN ABORDAJE EMOCIONAL DE LAS MATEMÁTICAS

Luis Fernando Ramírez Silva
Centro para el Desarrollo de la Inteligencia (CDI).
Paraguay

INTRODUCCIÓN

- 1. LAS EMOCIONES, PILARES DEL PENSAMIENTO**
- 2. LA CONSTRUCCIÓN EMOCIONAL DE LA MENTE**
- 3. EMOCIONES Y MATEMÁTICAS**

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Emociones y Educación Matemática parecen espacios que no se conectan, cuyo punto de contacto es casi invisible o imperceptible.

Vivimos en una sociedad en la que nos enseñaron a vivir como si las cosas que nos ocurren no pasaran por nuestro cuerpo, como si fueran dos entes totalmente separados: emoción y cuerpo, intentando vivir desde la razón y tratando de explicar nuestras conductas desde ahí.

Hoy vemos sin embargo que, como antesala de la razón, existen un amplio mundo de sensaciones, emociones, sentimientos que terminan jugando un papel definitivo en la construcción de nuestro pensamiento, a la hora de tomar decisiones, de elegir sobre nosotros, sobre nuestro futuro y sobre todo a la hora de construir, desde el acto más simple hasta nuestro propio sentido de humanidad¹.

¹ ANTUNES, Celso. *A construçao do Afeito*. Augustus. San Pablo, 2001.

Vivimos en un mundo que se ha vuelto complejo, donde un solo estímulo produce un sinnúmero de respuestas, donde pasamos de la linealidad a una red compleja de interacciones. Hoy la vida es acción, pero no una acción dicotómica, dividida y sin sentido, la vida es acción global. Cómo pensamos la Escuela y su tarea educativa, en este mundo que se ha vuelto complejo, cómo vivimos sin perder nuestra la característica fundamental de seres humanos, es un desafío que como educadores nos planteamos en torno al contexto actual².

1. LAS EMOCIONES, PILARES DEL PENSAMIENTO

Autores como Stanley Greenspan, Antonio Damasio³ y otros, han estudiado los orígenes comunes de las capacidades mentales más elevadas: la inteligencia, el sentido de la moralidad y del sí mismo, considerando las emociones como los cimientos de la arquitectura mental.

Las preguntas planteadas son: ¿desempeñan las emociones un papel específico, decisivo, en el desarrollo de las inteligencias? ¿Se requiere experiencia emocional para adquirir las habilidades cognitivas clásicas?

La experiencia de estos autores señala que el papel más decisivo de las emociones consiste en crear, organizar y coordinar muchas de las más importantes funciones cerebrales, las emociones son artífices de una amplia gama de operaciones cognitivas a lo largo de todo el ciclo vital, posibilitando todo tipo de pensamiento creativo.

Antonio Damasio (1999), neurólogo, en sus estudios ha demostrado que las áreas responsables de la regulación, interacción y secuenciación emocional (el córtex prefrontal) muestran un incremento de actividad metabólica durante la segunda mitad del primer año de vida. Se ha descubierto que las neuronas se activan por medio de la experiencia, estas pueden producir cambios hormonales, así por ejemplo las caricias parecen liberar hormonas de crecimiento, el stress emocional se asocia además con alteraciones de la fisiología cerebral. A lo largo de este proceso todas las experiencias no tienen el mismo valor, los niños parecen requerir cierto tipo de interacciones emocionales en función de las necesidades específicas de su momento evolutivo.

² Las personas existen más allá de la presencia.

³ DAMASIO, Antonio. *El error de Descartes*. Crítica. Barcelona, 1999.

GREENSPAN, Stanley. *El crecimiento de la Mente*. Paidós. Barcelona, 1997.

GREENSPAN, Stanley. *Fios emocionalmente saudaveis*. Campus Rio do Janeiro, 2000.

Desde el punto de vista de la inteligencia, todos somos igualmente inteligentes y las diferencias se deben a alteraciones del crecimiento normal del sistema nervioso por aspectos genéticos nutricionales o traumáticos, la inteligencia es una condición básica; son las distintas y particulares experiencias emocionales las que tienen consecuencias diversas en el vivir inteligente. Así, la envidia, el miedo, la ambición, la competitividad restringen la conducta inteligente porque estrechan la mirada y la atención.

A partir de estos estudios ha surgido una nueva manera de entender el desarrollo mental en las primeras etapas de la vida, caracterizada por integrar la experiencia del niño procedente de las interacciones emocionales con el desarrollo de las capacidades intelectuales y de hecho con el sentido de sí mismo⁴.

2. LA CONSTRUCCIÓN EMOCIONAL DE LA MENTE

¿Cuál será el motivo por el que los seres humanos dependemos de los padres durante tanto tiempo en comparación con el resto de animales? La razón básica estriba en nuestro cerebro, cuya maduración requiere mucho más tiempo que el de la mayoría de las especies. Un bebé, sin embargo, tarda algo más de un año en empezar a caminar, por lo que su supervivencia depende en extremo de la protección de la madre. Un recién nacido sólo muestra un limitadísimo conjunto de capacidades si las comparamos con las que irá adquiriendo con el transcurso de los años. La mayoría de habilidades que posee están relacionadas con su supervivencia: succionar para poder alimentarse, llorar para atraer la atención de su madre, o cerrar las manos para intentar aferrarse a aquello que las toca.

Esta total indefensión es consecuencia de un cerebro aún por formar. Pero esta característica, que puede parecer en principio negativa conlleva, en realidad, una enorme ventaja: el bebé será capaz de adaptarse mucho mejor al entorno y a las circunstancias cambiantes que cualquier otro animal cuyo cerebro ya esté programado en el momento de nacer. Disponer de un cerebro moldeable es lo que ha permitido a la especie humana progresar y sobrevivir incluso ante las condiciones naturales más adversas.

Para que el bebé recién nacido, desbordado por una marea incontrolable de estímulos sensoriales rudimentarios, pueda convertirse en un niño

⁴ En la Educación, debemos insistir en generar los espacios para que este proceso profundamente humano se dé. De otra forma no tendremos posibilidad de educar Humanamente.

capaz de transformar sus sentimientos y sus experiencias en deseos y pensamientos, sea de forma consciente o inconsciente, evidentemente requiere un aprendizaje intenso en las primeras etapas de su vida. Este proceso consiste en seis etapas específicas, descritas por Stanley Greenspan (1997) que, en su conjunto, preparan al bebé para traducir la información no elaborada de sus sentidos y de sus sentimientos internos en imágenes que representan a ambos ante él y ante los demás. El dominio de las materias de aprendizaje de cada una de estas etapas forma la estructura mental y constituye, finalmente, la base para el pensamiento simbólico consciente e inconsciente.

Los diferentes niveles mentales podrían considerarse como los componentes estructurales más profundos de la mente, la arquitectura mental sobre la que recae todo el desarrollo posterior, requieren tanto de la naturaleza como de la educación para poderse desarrollar correctamente.

Estos niveles son etapas no cerradas o acabadas sino caminos, procesos que deben realizar los niños y las niñas y muchas veces los adultos, para llegar a manejar sus procesos de relación consigo mismo y con los otros. El no llegar a desarrollar estos estadios puede sí entorpecer el escenario emocional, la visión de sí mismo y su relación con los otros⁵.

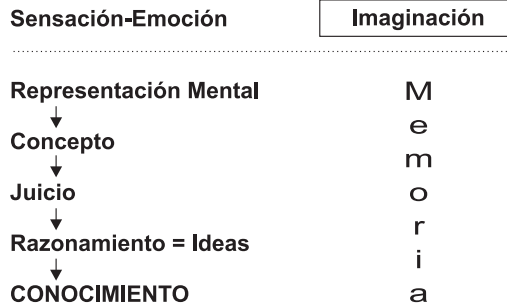
Incluso aquellas capacidades consideradas propias de la naturaleza humana, innatas o biológicas (como el lenguaje) deben estar ancladas en estos niveles más profundos para adquirir una función⁶. Sin esta estructura, la mente no puede funcionar de forma coherente sino, exclusivamente, de modo fragmentario y confuso. Con estos niveles evolutivos firmemente anclados en su sitio, la mente puede, entonces, operar con intencionalidad y de acuerdo con unos propósitos en busca de soluciones creativas para los problemas, asimilando las interacciones complejas de forma intuitiva y empática y permitiendo que surja la acogedora intimidad que hace que la vida relacional y familiar sea no sólo posible, sino también placentera.

⁵ MARINA, J. A., LÓPEZ PENAS, Marisa. *Diccionario de los Sentimientos*. Anagrama. Barcelona, 2001.

MARINA, José Antonio. *El laberinto sentimental*. Anagrama. Barcelona, 1996.

⁶ MATURANA, Humberto. *Formación y Capacitación Humana*. Dolmen. Santiago de Chile, 1997.

MATURANA, Humberto. *Emociones y Lenguaje en Educación y Política*. Dolmen. Santiago de Chile, 1997.



¿Cuándo acaba este proceso?

El sistema nervioso central continúa creciendo hasta los cuarenta y cinco o cincuenta años, así por ejemplo las vías nerviosas relacionadas con la capacidad de juicio y reflexión continúan absorbiendo mielina, por lo que el proceso se sigue enriqueciendo y fortaleciendo a través de los años, siendo los primeros años de vida los más importantes en el desarrollo de la arquitectura emocional⁷.

3. EMOCIONES Y MATEMÁTICAS

Existen diferencias en la manera que los individuos experimentamos y procesamos la información sensorial⁸. A medida que el niño va creciendo y explorando, cada vez más, el mundo que le rodea, las emociones les ayudan a comprender incluso lo que parecen relaciones físicas y matemáticas.

Percepciones algo más complejas como grande o pequeño, más o menos, aquí o allá, cerca o lejos, mucho o poco, tienen un origen en la relación del niño con el mundo. «Mucho» son las golosinas que quiere comer, «poco» es menos de lo esperado, «más» constituye otra dosis de placer o a veces de malestar, «lejos» siente a su mamá cuando esta se ausenta por un tiempo.

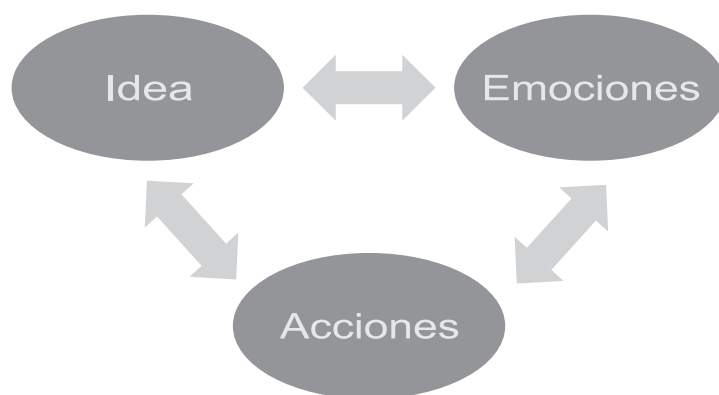
Los conceptos abstractos y aparentemente independientes, incluso aquellos que constituyen la base de las hipótesis científicas más teóricas tam-

⁷ Lo humano se constituye en el entrelazamiento de lo emocional con lo racional. Lo racional se constituye por un sistema argumentativo para defender o justificar nuestras acciones. Corrientemente vivimos nuestros argumentos racionales sin hacer referencia a la emoción que lo funda.

⁸ MORIN, Edgar. *Introducción al Pensamiento Complejo*. Gedisa. Barcelona, 2001.

bién reflejan en el fondo las vivencias que experimentan un niño y una niña. Los matemáticos y físicos manejan complicados símbolos para representar el espacio, el tiempo y la cantidad, pero antes tuvieron que comprender el sentido de estas entidades: cuando de pequeños, gateaban hacia la esquina opuesta de la sala en busca de un juguete, o esperaban a su madre para que le llenara el vaso de jugo, o se imaginaban cuántas galletas podrían comer hasta que les doliera el estómago.

Las ideas que los niños van elaborando a partir de las exploraciones lúdicas, de la imaginación, la intuición, la observación, posteriormente se traducirán en el riguroso pensamiento matemático⁹.



Pero no conviene olvidar que:

- La dicotomía entre las emociones y el intelecto, es la base de nuestro sistema educativo, socava su efectividad. La separación entre desarrollo emocional e intelectual ignora los niveles evolutivos y las diferencias individuales, dificultando así que el potencial de muchos niños se exprese en su plenitud.
- Son las imperfecciones del sistema educativo, y no las deficiencias de los niños, las que explican la gran mayoría de los fracasos. No podemos consentir que nuestra educación descansa en unas nociones del desarrollo humano que han resultado ser contraproducentes.

⁹ Cómo pensamos la Escuela y su tarea educativa, en un mundo que se ha vuelto complejo, donde un estímulo produce un sinnúmero de respuestas, donde dejamos atrás la linealidad del tiempo anterior; hoy la vida es acción, pero no una acción dicotómica, dividida, sin sentido, es una acción global tanto para hablar del ser humano en particular como para hablar del planeta. Cómo vivir sin perder nuestra característica fundamental: Lo humano.

- El auténtico abecé del rendimiento escolar se basa en la atención, en una sólida capacidad para establecer relaciones (una de las acciones fundamentales de la educación matemática es desarrollar la capacidad para establecer relaciones) y en nuestra comunicación, lo que los niños deben aprender a través interacciones que establecen con los adultos.

La formación en las primeras etapas debe seguir unos principios evolutivos para una enseñanza eficaz y efectiva de la matemática:

- Una enseñanza eficaz de la matemática debe estar en consonancia con la etapa evolutiva del propio niño.
- La enseñanza efectiva de la matemática no ofrece a los niños información para que la asimilen sin más, sino problemas que deben resolver por su iniciativa y participación activa. Debido al origen emocional del aprendizaje, que capacita al niño para asimilar y originar ideas, una buena enseñanza debe abarcar los sentimientos de un niño, alimentar su curiosidad y canalizar su energía.
- La enseñanza efectiva indica las indicaciones y perspectivas naturales del niño y las utiliza como un medio para ampliar sus conocimientos y su experiencia.
- Un profesor debe ofrecer las actividades de manera escalonada y a una velocidad ajustada a las habilidades cognitivas y al estilo del aprendizaje del niño.

BIBLIOGRAFÍA

- ANTUNES, C. *A construçao do Afeito*. Augustus. San Pablo, 2001.
- DAMASIO, A. *El error de Descartes*. Crítica. Barcelona, 1999.
- GOLEMAN, Daniel. *La psicología del Autoengaño*. Atántida. Buenos Aires, 1997.
- GOLEMAN, D., BENNETT, T. *Alquimia emocional. A mente pode curar o coração*. Objetiva. Río de Janeiro, 2001.
- GREENSPAN, Stanley. *Fios emocionalmente saudáveis*. Campus Rio do Janeiro, 2000.
- GREENSPAN, Stanley. *El crecimiento de la Mente*. Paidós. Barcelona, 1997.
- MARINA, José Antonio, LÓPEZ PENAS, Marisa. *Diccionario de los Sentimientos*. Anagrama. Barcelona, 2001.
- MARINA, José Antonio. *El laberinto sentimental*. Anagrama. Barcelona, 1996.
- MATURANA, Humberto. *Formación y Capacitación Humana*. Dolmen. Santiago de Chile, 1997.
- MATURANA, Humberto. *Emociones y Lenguaje en Educación y Política*. Dolmen. Santiago de Chile, 1997.
- MORIN, Edgar. *Introducción al Pensamiento Complejo*. Gedisa. Barcelona, 2001.

HISTORIAS DE LA HISTORIA¹. ¿TAN SÓLO UN RECURSO PARA LA DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS?

Dr. D. Santiago Atrio Cerezo
Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco».
Madrid

INTRODUCCIÓN

- 1. REFLEXIONES INICIALES. LA CUNA DE LAS MATEMÁTICAS**
- 2. MESOPOTAMIA. LA CIVILIZACIÓN BABILÓNICA**
 - 2.1. Sistema babilónico de numeración**
- 3. EGIPTO**
- 4. GRECIA**
- 5. EDAD MEDIA**
- 6. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS AULAS**
 - 6.1. La historia de las matemáticas desde la red**
 - 6.2. Beremiz Samir, el hombre que calculaba**

BIBLIOGRAFÍA

¹ Al ser la Historia de las Matemáticas un área de conocimiento tan amplia, he contextualizado este trabajo en torno a las culturas que, según mi criterio, en mayor medida han contribuido a configurar la actual Europa. Por ese motivo y por la brevedad del artículo no hago referencia a culturas que tienen una trascendencia fundamental en el estudio de esta disciplina.

INTRODUCCIÓN

«La historia de un arte o de una ciencia es una introducción inherente a su estudio, ya que proporciona una óptica clara y concisa de la manera en que han tenido lugar las innovaciones, constituye una garantía contra los errores futuros gracias al testimonio de los errores de los grandes sabios del pasado, y rinde un homenaje de estima y reconocimiento a los que hicieron a la humanidad beneficiaria de sus descubrimientos»². Conocer la historia de las matemáticas y usarla como hilo conductor de nuestra docencia es el modo que proponemos para acercar a los alumnos a nuestra área de conocimiento. Los avances históricos se fundamentan al apoyarse en los descubrimientos que hicieron los que nos precedieron.

Ya en el siglo XII, Juan de Salisbury³ (1115-1180) nos indicaba en su *Metalogicus*: «Bernardo de Chartres solía compararnos con enanos encaramados sobre hombros de gigantes. Señalaba que vemos más y más lejos que nuestros predecesores, no porque tengamos la vista más aguda o seamos más altos, sino porque nos levanta y nos mantiene en alto su gigantesca estatura». Esta idea que tanto se ha repetido en la historia⁴ ha sido usada por nombres tan ilustres como el de Newton y es la esencia de este artículo. Conocer la historia para poder valorar los avances de los que nos precedieron y, de este modo, poder acercarnos a los problemas que con tanta sabiduría consiguieron desentrañar.

Por este motivo, conocer la historia de la ciencia que pretendemos transmitir es esencial para comprender los enormes esfuerzos que la humanidad ha hecho para alcanzar el estado actual de las cosas.

No trato en este trabajo de acercar la historia al aula como recurso pedagógico para hacer más amenas nuestras sesiones de trabajo ni para deslumbrar con elocuentes hechos históricos nuestro discurso pedagógico. Más bien pretendo hablar de cultura, de la relevancia de conocer el pasado que ha hecho posible nuestro presente. Tan sólo pretendo reivindicar nuestra área de conocimiento como «*asignatura de letras*», cultural y no tan sólo técnica.

² COOPER, T. En Collete, J. P. *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A. (2 vol.). México, 1985, introducción.

³ Juan de Salisbury, *Metalogicus*. Obispo de Chartres, pertenece a la escuela de San Víctor. Discípulo de Abelardo en París y Chartres, entre sus obras destacan *Polycraticus*, la obra, escrita en 1.159 y dirigida a gobernantes en ejercicio, alentó las ideas que marcarán sobremanera su literatura política posterior, *Metalogicus* y *Entheticus*, crítica de los falsos filósofos, *Historia pontificalis* y sendas biografías de San Anselmo y Tomás Beckett.

⁴ William R. Cook y Ronald B. Herzman prologan su obra *La visión medieval del mundo*, tomando la cita de Juan de Salisbury.

1. REFLEXIONES INICIALES. LA CUNA DE LAS MATEMÁTICAS

¿Quién inventó las matemáticas? ¿Quién los números? ¿Cuándo, donde?, etc. Estas y muchas otras inocentes preguntas se deberían escuchar comúnmente en nuestras aulas, y si los alumnos no las formulan debería ser para sus educadores un motivo más de reflexión y estudio. Es una variable que confirma el hecho de la asimilación social de las matemáticas como parte de una serie de procesos preestablecidos que debemos dominar, situándolas muy lejos de concepciones culturales o históricas relevantes para nuestra sociedad europea actual.

Puede que estas preguntas no tengan contestación o que no la sepamos, pero deberían trabajarse, al menos, durante la formación universitaria de los maestros.

Si las anteriores preguntas son complejas y consideradas alejadas del fin último de nuestra materia, habría otras que no lo son tanto. ¿Por qué utilizamos la base diez y no otra? ¿Existen sistemas de numeración en otras bases? ¿Existen otros sistemas de numeración además del posicional? La ausencia de respuestas es habitual. Se suele indicar que la misma se dará en cursos superiores o en la Universidad y quizás estas contestaciones sean mejores que otras que den a entender al alumno que tenemos que usar esta base, «¡porque sí!, ¡porque es la nuestra!, ¡porque no hay otra!» O, aún peor, «¡porque no tengo tiempo que perder en este momento o curso!»

«Parece que las tribus más primitivas utilizaron primero el agrupamiento de dos en dos, después de cuatro en cuatro y de seis en seis. Ocasionalmente, las variantes corresponden a agrupamientos de tres en tres (tribus americanas). Un sistema muy natural y en boga corresponde a los dedos de la mano y puede así implicar agrupamientos de cinco en cinco (dedos), de diez en diez (dedos) y de veinte en veinte (dedos de los pies y de las manos). En un principio, este sistema presenta la ventaja, no solamente de preferir agrupamientos naturales y fácilmente accesibles, sino también de favorecer, por la disposición de los dedos, una distinción entre número cardinal y número ordinal»⁵. Si estos antepasados nuestros así lo hicieron, puede que reflexionar sobre las razones que les llevaron a tomar estas determinaciones no sea tan estéril como en un principio pudiera parecer.

⁵ COLLETTE, J. P. *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid, 1985, p. 9.

2. MESOPOTAMIA⁶. LA CIVILIZACIÓN BABILÓNICA

El conocimiento actual de las matemáticas babilónicas procede de las excavaciones arqueológicas emprendidas a partir de mediados del siglo XIX. Desde entonces se han recogido casi medio millón de tablillas de arcilla, de las cuales más de trescientas conciernen esencialmente al ámbito matemático. *«Las dimensiones de estas tablillas varían generalmente entre 12 cm² y 450 cm². Cada tablilla de arcilla, después de haber sido impresa con un estilete, tenía que ser cocida para que endureciese. Esto explica la abundancia de documentos babilónicos conservados, mientras que la naturaleza de otros, como el papiro egipcio o el bambú chino, los hace fácilmente perecederos»*⁷.

Su contribución a nuestra historia es notable pues la base sexagesimal fue la que utilizaron en su sistema de numeración posicional. Esta base, conocida y aplicada a la astronomía, la heredaron los griegos y nosotros de ellos, llegando a nuestros días con usos concretos como la división de la circunferencia en 360 partes, el minuto en 60 segundos, etc.

2.1. Sistema babilónico de numeración

El sistema babilónico de numeración es bastante diferente del egipcio que luego expondré. El primero es en base sesenta, como ya he dicho, mientras que el segundo es en base diez. El primero posicional y el segundo aditivo.

Y aunque nos parezca extraño podemos encontrar ventajas de la base sesenta sobre la base decimal que hiciesen más sencillo el cálculo a estos pueblos mesopotámicos.

«El número 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, mientras que nuestro sistema de numeración decimal sólo es divisible por 1, 2, 5 y 10. Esto motiva que los problemas de aritmética resueltos por el sistema se-

⁶ Los primeros en utilizar la denominación de Mesopotamia a los pueblos (sumerios, acadios, caldeos, asirios, babilonios y otros) que habitaron en los valles de los ríos Tigris y Éufrates, fueron los griegos. Mesopotamia no es por tanto un pueblo, sino la suma de varios. Los sumerios fueron los primeros. Sus ciudades de ladrillo gobernadas por un rey sacerdote datan de 5.000 a.C. Babilonia, fue fundada por los amonitas y hacia 1.800 a.C., un rey de esta ciudad, Hammurabi, consigue dominar toda Mesopotamia creando el gran imperio de Babilonia.

⁷ COLLETTE, J. P. *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid, 1985, p. 20.

xagesimal dieran resultados exactos con más frecuencia que el sistema de base diez»⁸.

De esta misma forma, el sistema en base doce también aventaja al decimal y, hemos de tener en cuenta que la ausencia de potentes instrumentos de cálculo hacían muy valiosos los resultados exactos.

Las civilizaciones babilónicas utilizaban tablillas con muescas o marcas en forma de cuña (cuneiforme); una cuña sencilla vertical representaba al uno y una marca de igual forma pero horizontal representaba al diez.

Los números menores que 59 estaban formados por adición de estos símbolos pero al llegar al número sesenta, comenzaba un sistema según el cual el valor de un símbolo venía dado por su posición dentro de la expresión del número completo. Por ejemplo, un número compuesto por el símbolo del 2, seguido por el del 27 y terminado con el del 10, representaba:

$$(2 \times 60^2) + (27 \times 60^1) + (10 \times 60^0) = 8.770$$

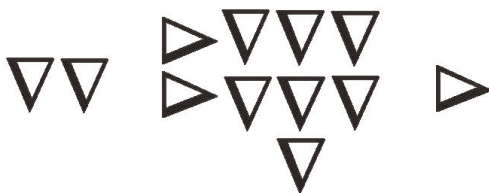


Ilustración 1.

Expresión en sistema cuneiforme del número 8770.

«A pesar del gran número de documentos escritos obtenidos en las excavaciones que comenzaron en el siglo pasado, habrá que esperar las contribuciones esenciales del francés Thureau-Dangin y del alemán Otto Neugebauer, hacia mediados del siglo XX, para apreciar verdaderamente los conocimientos matemáticos de los habitantes del Creciente Fértil. Esta larga espera se debió a las dificultades encontradas para descifrar estos textos de escritura cuneiforme. Gracias a los esfuerzos de Grottefend y Rawlinson, se pudo analizar estos textos y descubrir una parte de los conocimientos de los pueblos de Mesopotamia»⁹.

⁸ ARGÜELLES, J. *Historia de la matemática*. Ediciones Akal, S.A. Madrid, 1989, p. 17.

⁹ COLLETTE, J. P. *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid, 1985, p.20.

Conocían las ternas pitagóricas¹⁰. Secuencias de tres números que cumplen el teorema de Pitágoras, es decir que generan triángulos rectángulos que pueden tener aplicación para el replanteo de terrenos y/o consecución de ángulos rectos¹¹. Podían calcular las áreas de triángulos y trapecios, volúmenes de prismas rectos y cilindros, e incluso, como afirma Collette, conocían el teorema de Tales mil años antes que el de Mileto lo llegase a enunciar así como sus axiomas.

«Mucho es lo que se ha hecho por averiguar la influencia ejercida sobre los griegos por las técnicas y la ciencia escrita de Egipto y de Mesopotamia. Ambas eran importantes, pero la influencia de la última fue probablemente mayor. Ello sucede en parte porque el registro de sus realizaciones científicas es más notable»¹².

3. EGIPTO

Del legado egipcio hemos conservado varios papiros, Berlín, Moscú y sobre todo el de Rhind o Ahmes que nos permiten hacernos una idea de los grandes desarrollos matemáticos de los que fueron autores. Su sistema de numeración no era posicional sexagesimal sino aditivo y decimal, es decir que las potencias de diez (uno= 10^0 , diez= 10^1 , cien= 10^2 , mil= 10^3 , etc.) poseían símbolos propios y de la adición de estos símbolos aparece la cantidad buscada. Este sistema de numeración es semejante al usado por los romanos que describimos en las aulas a los alumnos del tercer ciclo de educación primaria.

Para sumar números, se sumaban por separado las unidades, las decenas, las centenas, etc. de cada número. La multiplicación estaba basada en duplicaciones sucesivas y la división era el proceso inverso. Por ejemplo, para multiplicar 25×13 procedían del modo siguiente:

$$25 \times (2+2+2+2+2+2+1)=50+50+50+50+50+50+25=325.$$

¹⁰ «Una tablilla originaria de Susa, datada entre el 1900 y el 1650 a.C., utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar el circunradio de un triángulo cuyos lados miden 50, 50 y 60.» (WELLS, 2000: 246).

¹¹ «La reconstrucción del método de su elección conduce, aparentemente, a las fórmulas: $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$, conocidas en la teoría de los números como diofánticas.» (RÍBNIKOV, 1987: 30).

¹² NEUGEBAUER, O. *Las ciencias exactas en la antigüedad*. Pricenton. Londres, 1951, p. 86.

Respecto de la geometría, repiten la búsqueda del ángulo recto¹³ y la utilización de las ternas pitagóricas como aplicación práctica de unos contenidos matemáticos teóricos. Tres, cuatro y cinco constituían la distribución de las doce partes de la cuerda del agrimensor que permitía a los tensadores de cuerda de Herodoto (484-426 a.C.) determinar con exactitud los ángulos rectos en el replanteo de un terreno.

Estos dos sistemas de numeración que hemos descrito, no sólo son el legado cultural de civilizaciones y pueblos que contribuyeron a construir la sociedad que actualmente disfrutamos. También son el reflejo de los dos tipos de sistemas que mostramos en la ecuación primaria: el hindú-árabe y el romano. Lo que hoy mostramos en nuestras aulas no es más que reflejo de la actividad intelectual de estas civilizaciones. Herencia de pueblos y personas que imaginaron soluciones para resolver el problema de la representación de cantidades.

4. GRECIA

De Grecia tenemos tanto y tan variado que es difícil hacer una breve reseña que no olvide alguno de sus importantes avances. Quizás los *Elementos* de Euclides reúna la mayoría de estos conocimientos, no sólo en aritmética sino en geometría, música y astronomía. El *cuadrivium*¹⁴ pitagórico ya estaba consolidado y desarrollado en tiempos de Euclides y desde esta época (300 a.C.) hasta el siglo XVI, estas cuatro artes constituirán el fundamento de los estudios matemáticos.

En las civilizaciones anteriores no se aprecia, quizás por la ausencia de material bibliográfico, este sentimiento que denominaron los griegos *paideia* (πάιδεια). Un deseo de transmitir a las generaciones venideras lo esencial de su pensamiento, su cultura y su ser griego.

«Así pues, los atenienses nacidos en la primera década del siglo V (Pericles, Sófocles, Fidias, etc) elevaron la cultura clásica a alto grado de madurez en

¹³ «Pánfilo escribe que habiendo aprendido de los egipcios la Geometría, inventó el triángulo rectángulo en un semicírculo y que sacrificó un buey por el hallazgo.» (LAERCIO, 2004: 11) En línea: <<http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/12140528718935940987213/index.htm>> Consulta: abril 2006.

¹⁴ «Arquitas parece haber prestado también una atención considerable al papel de la matemática en la educación, y a él se le ha atribuido la clasificación de las cuatro ramas del *cuadrivium* matemático: la aritmética, que estudia los números en reposo; la geometría, que estudia las magnitudes en reposo; la música, que estudia los números en movimiento, y la astronomía, que estudia las magnitudes en movimiento.» (BOYER, 1999: 104).

todos los campos -en la política, en las letras, en las artes-, habiendo recibido todavía una educación muy elemental cuyo nivel, desde el punto de vista de la instrucción, no sobrepasaba prácticamente el de nuestra actual enseñanza primaria»¹⁵.

Tras tantos avances parece que los romanos olvidaron los tratados antiguos y, despreocupándose por la ciencia matemática, dejaron aparentemente como herencia a la Edad Media una apatía casi total por esta parte del conocimiento humano. Parece que no aportaron nada, incluso parece que su exclusión de la historia en lo referente a las matemáticas puede hacerse sin perderse nada realmente significativo. Ciertamente, en el ámbito de los avances matemáticos, esa apreciación puede ser correcta. Pero desde el punto de vista pedagógico, las obras de Boecio o San Isidoro constituirán un referente claro de los modos de secuenciar el conocimiento, legarlo a nuestros herederos y ser esenciales para entender la transmisión de la herencia cultural griega.

5. EDAD MEDIA



Ilustración 2.

Speculum maius, de Vicente de Beauvais.

Si las épocas anteriores nos presentan grandes dudas, la edad media es una parte de la historia de las matemáticas que parece no existir. ¿Qué pasó desde la destrucción de la Biblioteca de Alejandría hasta la aparición de la denominada ciencia moderna de Bacon¹⁶? ¿No hubo matemáticas? Y dando

¹⁵ MARROU, H. I. *Historia de la Educación en la Antigüedad*. Editorial Fondo de Cultura Económica. Madrid, 1998, p.80.

¹⁶ (1561-1626), su trabajo filosófico se ocupa de la reforma de la metodología científica vigente en su época. En 1620 publicó *Novum organum*.

por hecho que las aportaciones de la matemática medieval en occidente fuesen limitadas, ¿qué contenidos matemáticos utilizaban en educación? Sólo desde el conocimiento de los hechos de la historia de la ciencia y la pedagogía que preceden a los grandes avances de los siglos XV y XVI, podremos comprender una secuencia lógica de acontecimientos y encontrar las aportaciones que esta época hizo a la Historia de la Educación.

Es un hecho constatable, que son muchos los documentos que conservamos la edad media y quizás falte un concienzudo estudio de su traducción y de la interpretación de sus contenidos pedagógicos.

«*La historia se hace con textos*¹⁷». Ésta afirmación nos debe conducir a la necesidad de la lectura de fuentes primarias y no sólo al estudio de las opiniones por otros vertidas. *La Aritmética* de Boecio o los *Elementos* de Euclides, deben ser entre otros, referentes en nuestra labor docente.

Hugo de San Víctor, en la introducción de su *Didascalicon de Studio Legendi*, nos muestra que lo importante para un maestro es saber qué y para qué vas a transmitir unos contenidos u otros. Pero no se queda en esta evidencia sino que nos indica el camino para conseguir el conocimiento, *scientia*, que es *lectio* y *meditatio*. Y para realizar la lectura nos revela tres reglas: la primera saber leer, la segunda en qué orden leer y en tercer lugar el modo en que se debe leer. La escuela de San Víctor nos introduce en el aspecto que quiero trabajar en esta historia de la educación medieval, la secuencia de los contenidos y las razones para presentarla de un modo u otro.

Una cosa son los conocimientos¹⁸ y otra el modo y orden en que los mismos son seleccionados para que pasen a engrosar el «currículo» elemental de este área de conocimiento en cualquier época. Por un lado se desarrolla la historia de los logros científicos y paralelamente se desarrolla la historia de los contenidos que son utilizados para ayudar al joven en su desarrollo intelectual. Los contenidos se seleccionan para configurar el conjunto de realidades que permitan formar al joven príncipe, al futuro monje, al aprendiz de una logia o a un estudiante del siglo XXI rodeado de Nuevas Tecnologías.

¹⁷ «*La historia se hace con textos: de golpe parecía desvanecerse la penetrante observación de los parajes, la aguda comprensión de las relaciones geográficas próximas y lejanas, el examen de las huellas dejadas sobre la tierra humanizada por el encarnizado trabajo de las generaciones desde los tiempos en los que el hombre del neolítico, realizaba la separación de lo que sería el bosque o se convertiría en tierra de labor, establecían para tiempos futuros los primeros tipos históricos conocidos de las instituciones primordiales de la humanidad.*» (FEBVRE, 1970: 17).

¹⁸ «*El aprendizaje de muchas cosas no enseña a comprender, de lo contrario hubiera adoctrinado a Hesíodo y Pitágoras, y luego también a Jenófanes y Hecateo.*» (HERÁCLITO, fragmento 40).

En el siglo XIII el fraile Vicente de Beauvais (h. 1190-1264) escribirá: el *Speculum maius*. «La obra que suponía todo un intento por ordenar y recoger todo el saber conocido hasta entonces, proyectaba un fuerte sentido gnóstico-pedagógico al cifrar en el conocimiento el iter o vía capital de acceso a la sabiduría»¹⁹. Dentro de su edición trífaria, el libro decimosexto del *Speculum doctrinale* aborda el estudio de la matemática y la metafísica en 75 capítulos, de los que los 55 primeros se ocuparán de nuestro área. Éste texto, su traducción y análisis fue el motivo de mi tesis doctoral y hasta esa fecha no había sido estudiado.

El libro decimosexto del *Speculum doctrinale* forma parte de una de las primeras Enciclopedias²⁰ de la Historia y, en el mismo, se recopila el saber matemático que nuestro fraile dominico creía necesario para alcanzar la iluminación. Saber necesario para que, como buen escolástico, a través de su secuenciada lectura y reflexión, lleguemos a contemplar a Dios reflejándonos en su realización terrenal.

Aunque a veces se dice que Aristóteles es el padre de la enciclopedia, la primera obra digna de este nombre parece haber sido escrita por el filósofo griego Espeusipo, discípulo de Platón, en el siglo IV a.C., aunque no se conserva ningún fragmento de la misma.

Son en estas obras bajo-medievales en las que descubrimos toda la potencia del legado cultural grecorromano. Las matemáticas se explican desde el cuadrivium. A la aritmética se le concede la categoría de Primera de las cuatro artes mayores. Sin su estudio y comprensión no se pueden entender,

¹⁹ VERGARA, J. *El Speculum doctrinale de Vicente de Beauvais: un ideal prehumanista en la escolástica medieval*. UNED. Madrid, 1999, p. 79.

²⁰ En la literatura romana, la primera obra de carácter enciclopédico fue escrita en el siglo I a.C. por Marco Terencio Varrón con el título *Rerum Humanarum et Divinarum Antiquitates* (Antigüedades de las cosas humanas y divinas). Tampoco se conserva, pero se sabe que trataba de gramática, dialéctica, retórica, geometría, aritmética, astrología, música, medicina y arquitectura, y se conocen algunos fragmentos citados por los primeros tratadistas cristianos y, sobre todo, por San Agustín en La ciudad de Dios.

La enciclopedia más antigua que se conserva completa es la Historia Natural de Plinio el Viejo, cuyos primeros libros aparecieron el año 77 d.C. Consta de 37 libros y 2.493 capítulos, en los que se incluyen descripciones físicas y matemáticas del universo, nociones de antropología y anatomía humana, de botánica, agricultura y horticultura, de zoología, de mineralogía y del uso de los metales y las piedras preciosas en las diversas artes. Esta obra, muy original en su tiempo por la inclusión de un índice temático y por una recopilación de las fuentes utilizadas similar en concepto a las bibliografías actuales, se mantuvo como obra de referencia para los estudiosos hasta la primera mitad del siglo XVI.

según la pedagogía bajomedieval, el resto de disciplinas. Los números en reposo serán clasificados y las descripciones de los algoritmos se presentarán ante nosotros haciendo hincapié, además de en las cuatro operaciones básicas, en dos algoritmos esenciales, la duplicación y la división por dos.

La segunda de las disciplinas, es la que trabajará con los números en movimiento. Los números que utilizando como medio el aire, son percibidos por nuestro sentido del oído. Se trata de la música, la disciplina que presenta las relaciones armónicas, los compases musicales, la percepción de unos sonidos que nuestra mente entiende como bellos por la participación en ellos de relaciones matemáticas, de quebrados.



Ilustración 3.

Interpretación del descubrimiento de los acordes musicales por parte de Pitágoras en la obra de Boecio.

A esta disciplina, parte de las matemáticas, Vicente de Beauvais le dará categoría de excelente y así, en el capítulo XXI de su libro decimosexto del *Speculum doctrinale* nos aportará la explicación de las proporciones musicales y su relación con lo expuesto en capítulos precedentes de su obra.

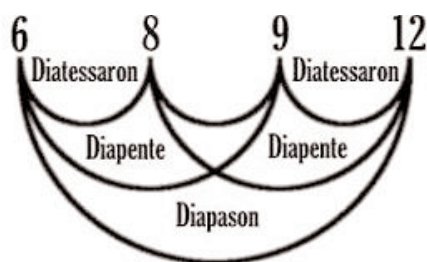


Ilustración 4.
Armonías musicales

Son enseñanzas tomadas de Boecio que nos hacen reflexionar sobre la sencillez de apreciar los sonidos más que de explicar los quebrados. De entender las proporciones como relaciones entre cuerdas, pesos de martillos, tamaños de flautas o tensiones de cuerdas que producen armonía cuando se mantienen unas relaciones numéricas constantes: «La octava (diapason), que corresponde a la razón doble (dupla), $12/6$, está representada por el gran arco superior que va de XII a VI. En la octava hay dos intervalos de quinta (diapente), en la razón sesquiáltera (vez y media), $12/8$ y $9/6$, representados en los dos arcos siguientes. Hay también dos intervalos de cuarta (diatessaron) en la razón sesquitercia (vez y un tercio), $12/9$ y $8/6$, representados por dos arcos menores. A las dos cuartas les falta para la octava (y a las dos quintas les sobra) un tono (tonus) de razón sesquioctava (vez y un octavo), $9/8$ »²¹.

Luego vendrá la geometría, las formas en reposo, el estudio de los trabajos de Euclides y finalmente las formas en movimiento, la astronomía. Un trabajo enciclopédico escrito para el rey de Francia, Luís IX²², que constituye una de las joyas de la cultura europea.

²¹ SOLÍS, C. y SELLÉS, M. *Historia de la Ciencia*. Espasa Calpe. Madrid, 2005, p. 167.

²² Para San Luís, rey francés de la séptima cruzada, Vicente de Beauvais escribe esta enciclopedia medieval en la que la obligada referencia a autores musulmanes o judíos es constante. Merece especial atención en el ámbito matemático referencia a la obra de AL-FARABI, *Catálogo de las ciencias*, al que Vicente de Beauvais acudirá constantemente. Aparecen también, entre otros: Al-Kindî a Ibn Khaldûn, Ibn Sîna (Avicena), Ibn Rushd (Averroes), Al-Ghazzalî, (Algazel), Alchidius (Al Kindi), Architas tarentinus, Aristoteles, Avicenna, Azo, Beda venerabilis, Bernardus clarevallensis, Boethius, Cassiodorus, Demosthenes, Epicurus, Euclides, Galenus, Hali (Ali ibn Abbas al Magusi), Hildebertus cenomanensis, Hippocrates, Hugo de Sancto Victore, Iohannicius (Hunain ibn Ishaq), Isaac Israeli, Isidorus hispalensis, Macrobius, Michael Scotus, Palladius, Plato, Rhazes (ar Razi), Richardus de Sancto Victore, Sextus pythagoricus, Socrates (philosophus), Tullius (Cicero), Valerius Maximus, Varro o Vegetius Renatus.

6. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS AULAS

Por eso en este momento en el que Europa se plantea modelos para la enseñanza de esta ciencia que llamamos matemáticas, deberíamos recordar todo este legado cultural que nos han entregado. Reivindicar las referencias culturales de esta área de conocimiento y ofrecerla a nuestros alumnos como la herencia que nos ha permitido contemplar la Europa que ahora disfrutamos.

Son muchos los materiales que podemos usar en el aula para contribuir a entender la historia de nuestra ciencia. Libros como *«El señor del cero»* de M^a Isabel Molina, premio CCEI de 1997, la antología de Alfredo Raúl Palacios de *«Cuentecitos & decires de matemáticos, de poetas o de filósofos»* o *«El tío Petros y la conjetura de Goldbach»*, son títulos que pueden hacer disfrutar a jóvenes y adultos. Describiré con un poco más de detenimiento dos materiales, que a modo de ejemplo, puedan ayudar al profesor a acercar al alumno su historia y su cultura:

6.1. La historia de las matemáticas desde la red

El proyecto Cifras del Ministerio de Educación es un ejemplo de las posibilidades pedagógicas de la historia. Como los otros trabajos que describo en este artículo, sus autores no pretenden mostrar al profesor cuentos o historietas que amenicen sus clases. Entienden la historia como recurso metodológico, pedagógico y didáctico, que permitirá al alumno entender una conexión entre hechos históricos, problemas planteados y soluciones propuestas, que han acompañado al ser humano a lo largo de su evolución.

Lo podemos encontrar en la red en la dirección:

<<http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/>>



Ilustración 5.

<http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/>

Son muchas las actividades propuestas y los recursos que se nos ofrecen en esta Web. Pero puedo destacar el referido a la historia de nuestra ciencia que podemos encontrar en: <http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/collegio/historia.html>



Ilustración 6.

Animación Flash en formato comic de la historia de las matemáticas

Por sus ilustraciones y lo conciso de sus textos, esta aplicación se puede utilizar desde el primer ciclo de educación primaria. La variedad de contenidos y de experiencias didácticas hacen que el material pueda continuar usándose a lo largo de toda la educación primaria y secundaria.

6.2. Beremiz Samir, el hombre que calculaba

Malba Tahan, autor de *El hombre que calculaba*, es el seudónimo con que el Profesor Julio César de Mello e Souza (1895-1974) firmó sus trabajos pedagógicos. Creó personajes ficticios que le permitiesen exponer problemas matemáticos a los alumnos dentro de contextos históricos. En el momento en que concibió esta propuesta pedagógica, «*en esa época, en que las actividades lúdicas eran casi una herejía*», como recuerdan sus alumnos, el carismático profesor los acercaba a la ciencia con sus historias, sus ejercicios y su informal manera de enseñar Matemática.

El trabajo nos presenta breves capítulos que son, cada uno de ellos, el enunciado y la resolución de un problema matemático clásico. Su utilización puede recomendarse desde el tercer ciclo de educación primaria y su lectura puede agradar por igual a pequeños y a mayores.

BIBLIOGRAFÍA

Obras fuentes

AL-FARABI. *Catálogo de las ciencias*. Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Letras. Prólogo y traducción de la obra de Al-Farabi por Don Ángel González Palencia. Madrid, 1932. Versión digital: <<http://www.filosofia.org/cla/isl/farabi.htm>> Fecha consulta: marzo 2006.

BEAUVAIS, V. *Speculum maius. Speculum quadruplex sive Speculum maius Vincentius Bellovacensis*. Publicación: Graz: Akademische Druck-u. Verlag-sanstalt, 1965. [Reprod. facs. de la ed. de: Duaci: ex officina typographica Baltazaris Belleri, 1624]

BOECIO, A. M. S. *Institutio Arithemtica. Fundamentos de Aritmética*. Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales de la Universidad de León. León, 2002. Traducción de doña María Asunción Sánchez Manzano Profesora titular de la Universidad de León, en el área de conocimiento «Filología Latina», adscrita al Departamento de Estudios Clásicos. Col. Ediciones Griegas y Latinas, N° 2. [Texto facs. en latín y traducción en español. Reprod. de la ed. de: Venetiis, 1499]

ISIDORO. *Etimologías*. Editorial Católica S.A. Madrid, 1951. Traducción y versión castellana de Cortés y Góngora, Luís. Introducción general e índices científicos de Don Santiago Montero Díaz. Catedrático de Historia Antigua Universal de la Universidad de Madrid.

LAERCIO, D. *Vidas de los filósofos mas ilustres; vidas de los sofistas*. Editorial Porrúa, S.A. México, 2004.

NEWTON, I. *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. Edición preparada e Introducción de Antonio Escohotado. Editora Nacional. Madrid, 1982.

Monografías y estudios

ARGÜELLES, J.A. *Historia de las matemáticas*. AKAL, Madrid, 1989.

BOYER, C. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1999.

COLERUS, E. *Breve historia de las matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972.

COLLETTE, J. P. *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A., México, 1985.

COOK, W. R. y HERZMAN, R.B. *La visión Medieval del Mundo*. Vicens-Vives. Barcelona, 1985. Traducción y apéndice bibliográfico de Milagros Rivera Carreta. Profesora Titular de Historia Medieval de la Universidad de Barcelona. Primera Edición. *The Medieval World view*. Oxford University Press, Inc. Oxford, 1985.

DOXIADIS, A. *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 2000.

FEBVRE, L. *Combates por la historia*. Examen de conciencia de una historia y de un historiador (1892 – 1933). Editorial Ariel S. A. Barcelona, 1970.

MALBA TAHAN. *El hombre que calculaba*. AEDO. Barcelona, 1996.

PALACIOS, A. *Cuentecitos & Decires de Matemáticas, de poetas o de filósofos*. Lumen. Argentina, 2000.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir. Moscú, 1987.

REY PASTOR, J. *Historia de la matemática*. Gedisa, Barcelona, 2000.

VERGARA, J. *El Speculum doctrinale de Vicente de Beauvais: un ideal pre-humanista en la escolástica medieval*. UNED. Madrid, 1999, VVAA, pp. 77-107.

VERGARA, J. *Didascalicon de Studio Legendi de Hugo de San Víctor*.

HERDER-UNED. Barcelona, 2006, edición promanuscrito. Introducción.

WELLS, D. *El curioso mundo de las matemáticas*. Gedisa. Barcelona, 2000.

**EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE
FORMACIÓN DEL PROFESORADO**

**Subdirección General de Información y Publicaciones
del Ministerio de Educación y Ciencia**

EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Subdirección General de Información y Publicaciones
del Ministerio de Educación y Ciencia

El Instituto Superior de Formación del Profesorado tiene como objetivo impulsar, incentivar, financiar, apoyar y promover acciones formativas realizadas por las instituciones, Universidades y entidades sin ánimo de lucro, de interés para los docentes de todo el Estado Español que ejercen sus funciones en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas. Pero, tan importante como ello, es difundir, extender y dar a conocer, en el mayor número de foros posible, y al mayor número de profesores, el desarrollo de estas acciones. Para cumplir este objetivo, el I.S.F.P. pondrá a disposición del profesorado español, con destino a las bibliotecas de Centros y Departamentos, **dos colecciones**, divididas cada una en cuatro series.

Con estas colecciones, como acabamos de señalar, se pretende difundir los contenidos de los cursos, congresos, investigaciones y actividades que se impulsan desde el Instituto Superior de Formación del Profesorado, con el fin de que su penetración difusora en el mundo educativo llegue al máximo posible, estableciéndose así una fructífera intercomunicación dentro de todo el territorio del Estado.

La primera de nuestras colecciones se denomina **Aulas de Verano**, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al conocimiento de las ponencias que se desarrollan durante los veranos en la *Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander*, en los cursos de la *Universidad Complutense en El Escorial*, en los de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila* y en los de la *Fundación Universidad de Verano de Castilla y León en Segovia*. En general, esta colección pretende dar a conocer todas aquellas actividades que desarrollamos durante el período estival.

Se divide en cuatro series, dedicadas las tres primeras a la Educación Secundaria (la tercera a F.P.), y la cuarta a Infantil y Primaria.

Colección **Aulas de Verano**, que se identifica con el
color “bermellón Salamanca”

- | | |
|-----------------------|----------------|
| • Serie “Ciencias” | Color verde |
| • Serie “Humanidades” | Color azul |
| • Serie “Técnicas” | Color naranja |
| • Serie “Principios” | Color amarillo |

La segunda colección se denomina **Conocimiento Educativo**. Con ella pretendemos difundir las investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, el contenido de aquellos cursos de verano de carácter más general, y dar a conocer aquellas acciones educativas que desarrolla el Instituto Superior de Formación del Profesorado durante del año académico.

La primera serie está dedicada fundamentalmente a investigación didáctica y, en particular, a las didácticas específicas de cada disciplina; la segunda serie se dirige al análisis de la situación educativa y estudios generales, siendo esta serie el lugar donde se darán a conocer nuestros Congresos EN_CLAVE DE CALID@D; la tercera serie, “Aula Permanente”, da a conocer los distintos cursos que realizamos durante el período docente y el contenido de los cursos de verano de carácter general y la cuarta serie, como su nombre indica, se dedica a estudios, siempre desde la perspectiva de la educación, sobre nuestro Patrimonio.

Colección **Conocimiento Educativo**, que se identifica con el
color “amarillo oficial”

- | | |
|---------------------------|---------------|
| • Serie “Didáctica” | Color azul |
| • Serie “Situación” | Color verde |
| • Serie “Aula Permanente” | Color rojo |
| • Serie “Patrimonio” | Color violeta |

Estas colecciones, como hemos señalado, tienen un carácter de difusión y extensión educativa, que prestará un servicio a la intercomunicación, como hemos dicho también, entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas de nuestro Estado. Pero, también, se pretende con ellas establecer un vehículo del máximo rigor científico y académico en el que encuentren su lugar el trabajo, el estudio, la reflexión y la investigación de todo el profesorado español, de todos los niveles, sobre la problemática educativa.

Esta segunda función es singularmente importante, porque incentiva en los docentes el imprescindible objetivo investigador sobre la propia función, lo que constituye la única vía científica y, por tanto, con garantías de eficacia, para el más positivo desarrollo de la formación personal y los aprendizajes de calidad en los niños y los jóvenes españoles.

Índices de calidad de las publicaciones

Los programas de publicación son aprobados por una comisión compuesta por el Director del Instituto Superior de Formación del Profesorado, la Directora de Programas y la Directora de Publicaciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado y los Directores (o persona en quien deleguen) del Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia y del INCE.

NORMAS DE EDICIÓN DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO:

- Los artículos han de ser inéditos.
- Se entregarán en papel y se añadirá una copia en disquete o CD con formato Word
- Los autores deben dar los datos personales siguientes: referencia profesional, dirección y teléfono personal y del trabajo y correo electrónico.
- Hay que huir de textos corridos y utilizar con la frecuencia adecuada, epígrafes y subepígrafes.
- Debe haber, al principio de cada artículo, un recuadro con un índice de los temas que trata el mismo, y que debe coincidir con los epígrafes y subepígrafes del apartado anterior.
- Cuando se reproduzcan textos de autores, se entrecomillarán y se pondrán en cursiva.
- Al citar un libro, siempre debe aparecer la página de la que se toma la cita, excepto si se trata de un comentario general.
- Se deben adjuntar fotografías, esquemas, trabajos de alumnos,... que ilustren o expliquen el contenido del texto.
- Al final de cada artículo, se adjuntará la lista de la bibliografía utilizada.
- La bibliografía debe ser citada de la siguiente manera: apellidos/s (con mayúsculas), coma; nombre según aparezca en el libro (en letra corriente), punto; título del libro en cursiva, punto; editorial, punto; ciudad de edición, coma y fecha de publicación, punto.

CENTRAL DE EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

- **Dirección y coordinación (I.S.F.P.):**
Paseo del Prado 28, 6.ª planta. 28014. Madrid. Teléfono: 91.506.57.17.
- **Suscripciones y distribución:**
Instituto de Técnicas Educativas. C/ Alalpardo s/n.
28806. Alcalá de Henares.
Teléfono: 91.889.18.54.
- **Puntos de venta:**
 - Ministerio de Educación y Ciencia. C/ Alcalá, 36. Madrid.
 - Subdirección General de Información y Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. C/ Juan del Rosal, s/n. Madrid.

TÍTULOS EDITADOS POR EL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

COLECCIÓN: AULAS DE VERANO

SERIE: Humanidades

La iconografía en la enseñanza de la Historia del Arte
La dimensión artística y social de la ciudad
La lengua, vehículo cultural multidisciplinar
El entorno de Segovia en la historia de la dinastía de Borbón
Aprendizaje de las lenguas extranjeras en el marco europeo
El impacto social de la cultura científica y técnica
Lenguas extranjeras: hacia un nuevo marco de referencia en su aprendizaje
Habilidades comunicativas en las lenguas extranjeras
Didáctica de la Filosofía
Nuevas formas de aprendizaje en las lenguas extranjeras
Filosofía y economía de nuestro tiempo: orden económico y cambio social
Las artes plásticas como fundamento de la educación artística
La ficción novelesca en los siglos de oro y la literatura española
La empresa y el espíritu emprendedor de los jóvenes
La dimensión humanística de la música: reflexiones y modelos didácticos
La enseñanza de las lenguas extranjeras desde una perspectiva europea
Valores del deporte en la educación (año europeo de la educación a través del deporte)

SERIE: Ciencias

La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos
El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones
Globalización, crisis ambiental y educación
La Física y la Química: del descubrimiento a la intervención
El número, agente integrador del conocimiento
De la aritmética al análisis: historia y desarrollo recientes en matemáticas
Los sistemas terrestres y sus implicaciones medioambientales
Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO
Últimas investigaciones en Biología: células madres y células embrionarias
Ramón y Cajal y la ciencia española
Usos matemáticos de internet
Química y sociedad, un binomio positivo
La empresa y el espíritu emprendedor de los jóvenes
Nuevos enfoques para la enseñanza de la Física

SERIE: Técnicas

Grandes avances de la ciencia y la tecnología
Nuevas profesiones para el servicio a la sociedad

Servicios socioculturales: la cultura del ocio
La transformación industrial en la producción agropecuaria
La formación profesional como vía para el autoempleo: promoción del espíritu emprendedor

SERIE: Principios

La Educación Artística, clave para el desarrollo de la creatividad
La experimentación en la enseñanza de las ciencias
Metodología en la enseñanza del Inglés
Destrezas comunicativas en la Lengua Española
Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas
La Geografía y la Historia, elementos del medio
La seducción de la lectura en edades tempranas
Aplicaciones de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de la Lengua Castellana
Lenguas para abrir camino
Los lenguajes de la expresión
La comunicación literaria en las primeras edades
Los lenguajes de las ciencias
Perspectivas para las ciencias en la Educación Primaria
Leer y escribir desde la Educación Infantil y Primaria
Números, formas y volúmenes en el entorno del niño
El lenguaje de las artes plásticas: sensibilidad, creatividad y cultura
Andersen, Ala de Cisne: actualización de un mito (1805 – 2005)
Aplicaciones educativas de las Tecnologías de la Información y la Comunicación

COLECCIÓN: CONOCIMIENTO EDUCATIVO

SERIE: Situación

EN CLAVE DE CALID@D: La Dirección Escolar
Investigaciones sobre el inicio de la lectoescritura en edades tempranas
EN CLAVE DE CALID@D: Hacia el éxito escolar

SERIE: Didáctica

Didáctica de la poesía en la Educación Secundaria
Los fundamentos teórico-didácticos de la Educación Física
La estadística y la probabilidad en el Bachillerato
La estadística y la probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria
Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Infantil
Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Primaria

SERIE: Aula Permanente

Contextos educativos y acción tutorial
Imagen y personalización de los centros educativos
Nuevos núcleos dinamizadores en los centros de Educación Secundaria: los Departamentos Didácticos
Diagnóstico y educación de los alumnos con necesidades educativas específicas: alumnos intelectualmente superdotados
Gestión de calidad en la organización y dirección de centros escolares
La orientación escolar en los centros educativos
El profesorado y los retos del sistema educativo actual
El tratamiento de la diversidad en los centros escolares

TÍTULOS EN COEDICIÓN

Internet en el aula: Abecedario para la Educación Primaria
Educación Intercultural en el aula de Ciencias Sociales
Prensa y educación: acciones para la desaparición de un gueto
Diagnóstico y educación de los más capaces

Colección Los Reales Sitios:

Palacio Real de Aranjuez
Palacio Real de Madrid
Real Monasterio de La Encarnación
Real Monasterio de Santa Clara de Tordesillas
Palacio Real de La Granja de San Ildefonso
Monasterio de San Lorenzo de El Escorial

TÍTULOS EN EL AÑO

	COLECCIÓN	SERIE
– <i>Del punto a los espacios multidimensionales</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias
– <i>El pensamiento científico en la sociedad actual</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>Hacia el aula intercultural. Experiencias y referentes</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>Participación de las familias en la vida escolar: acciones y estrategias</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Aula Permanente
– <i>Juego y deporte en el ámbito escolar: aspectos curriculares y actuaciones prácticas</i>	AULAS DE VERANO	Principios
– <i>La convivencia en las aulas: problemas y soluciones</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Situación
– <i>Actualización de las competencias profesionales: Sanidad y Formación Profesional</i>	AULAS DE VERANO	Técnicas
– <i>La biblioteca: un mundo de recursos para el aula</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>La disrupción en las aulas: problemas y soluciones</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Situación
– <i>El portfolio europeo de las lenguas y sus aplicaciones en el aula</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>Bases para un debate en Educación Artística</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Didáctica
– <i>Descubrir, investigar, experimentar: iniciación a las ciencias</i>	AULAS DE VERANO	Principios
– <i>Las lenguas españolas: un enfoque filológico</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>El espacio geográfico español y su diversidad</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias

– <i>El cuento como instrumento para el desarrollo de la creatividad artística</i>	AULAS DE VERANO	Principios
– <i>Personajes y temáticas en la literatura juvenil</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
– <i>La motivación de la lectura a través de la literatura infantil</i>	AULAS DE VERANO	Principios
– <i>La acción tutorial: su concepción y su práctica</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Aula Permanente
– <i>Las matemáticas y sus aplicaciones en el mundo social y económico</i> ..	AULAS DE VERANO	Ciencias

Este volumen tiene su origen en el CURSO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: “Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos”, que se celebró en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander, en el verano de 2006.



La primera de nuestras colecciones se denomina Aulas de Verano, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al conocimiento de las conferencias que se desarrollan durante los veranos en la *Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander*, en los cursos de la *Universidad Complutense en El Escorial*, en los de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila* y en los de la *Fundación Universidad de Verano de Castilla y León en Segovia*.

Colección Aulas de Verano, que se identifica con el color « <u>bermellón Salamanca</u> ».	
• Serie «Ciencias» • Serie «Humanidades» • Serie «Técnicas» • Serie «Principios»	Color verde Color azul Color naranja Color amarillo

La segunda colección se denomina Conocimiento Educativo. Con ella pretendemos tanto difundir investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, el contenido de aquellos cursos de verano de carácter más general y dar a conocer las acciones educativas que desarrolla el Instituto Superior de Formación del Profesorado durante el año académico.

Colección Conocimiento Educativo, que se identifica con el color « <u>amarillo oficial</u> ».	
• Serie «Didáctica» • Serie «Situación» • Serie «Aula Permanente» • Serie «Patrimonio»	Color azul Color verde Color rojo Color violeta

Estas colecciones tienen un carácter de difusión y extensión educativa, al servicio de la intercomunicación entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas de nuestro Estado.

