AULAS DE VERANO

Instituto Superior de Formación del Profesorado

DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS: HISTORIA Y DESARROLLO RECIENTES EN MATEMÁTICAS

Coordinación:
Roberto Rodríguez del Río
Enrique Zuazua

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS:
Historia y desarrollos recientes en Matemáticas

COORDINACIÓN:

Roberto Rodríguez del Río

Enrique Zuazua

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL

INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
Instituto Superior de Formación del Profesorado

Edita:
© *SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA*
Subdirección General de Información y Publicaciones

N.I.P.O.: 176-04-148-7
I.S.B.N.: 84-369-3845-3
Depósito Legal: M-32242-2004

Imprime: SOLANA E HIJOS, A.G., S. A.

Colección: AULAS DE VERANO
Serie: Ciencias

DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS: HISTORIA Y DESARROLLOS RECIENTES EN MATEMÁTICAS

El objetivo del volumen es el de, a través del contacto con algunas cuestiones relacionadas con los grandes bloques temáticos de los nuevos currícula de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria, proporcionar a los profesionales de las Matemáticas, educadores, científicos y cualquiera que quiera conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, la posibilidad de actualizar sus conocimientos científicos y conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, así como la influencia de éstas en el desarrollo histórico de la Ciencia.

Los temas elegidos giran en torno al Álgebra, el Análisis, la Estadística y la Probabilidad y también sobre el papel que las Matemáticas han desempeñado, desde un punto de vista histórico, en el desarrollo de las Ciencias, la Ingeniería y la Tecnología.

Dirección editorial del volumen ***De la Aritmética al análisis: Historia y desarrollos recientes en matemáticas:***
ENRIQUE ZUAZUA

Coordinación: *RODRÍGUEZ DEL RÍO, Roberto.*

Autores:

ARRIETA, José M.
CUEVAS, Antonio.
GONZÁLEZ-VEGA, Laureano.
MUÑOZ NUÑEZ, Agustín.
RECIO, Tomás.
RODRÍGUEZ DEL RÍO, Roberto.
VÁZQUEZ, Juan Luis.
ZUAZUA, Enrique.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Roberto Rodríguez del Río
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Enrique Zuazua Iriondo
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

El objetivo del volumen es el de proporcionar a los Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria la posibilidad de actualizar sus conocimientos científicos a través del contacto con algunas cuestiones relacionadas con los grandes bloques temáticos de los nuevos currícula de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. En consecuencia, los temas elegidos giran en torno al Álgebra, el Análisis, la Estadística y la Probabilidad y también sobre el papel que las Matemáticas han desempeñado, desde un punto de vista histórico, en el desarrollo de las Ciencias, la Ingeniería y la Tecnología.

Los artículos están realizados por científicos del más alto nivel que se caracterizan por su gran capacidad de comunicación, así como por su compromiso con la enseñanza de las Matemáticas.

Es para nosotros una gran satisfacción ver que el esfuerzo que los profesores realizaron preparando las notas será de utilidad para otros muchos profesionales de las Matemáticas, educadores, científicos y cualquiera que quiera conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, así como la influencia de éstas en el desarrollo histórico de la Ciencia.

Cuando lo diseñamos, lo hicimos con la idea de que fuese un libro fundamentalmente de Matemáticas, cuyos destinatarios fuesen quienes las enseñan. Al hacerlo, éramos conscientes de que la apuesta era arriesgada. En efecto, en muchas ocasiones, estos textos escapan de los contenidos rigurosos y se dedican más a cuestiones de tipo metodológicas o pedagógicas. Nada tenemos en contra de ello pero creímos que nuestra condición de matemáticos profesionales nos obligaba a poner a las Matemáticas en el centro de gravedad. Este hecho no es ajeno a nuestra visión del complejo mundo de las Matemáticas y de su enseñanza. Hay quienes creen que los estudiantes no aprenden Matemáticas y que éstas no les gustan porque los profesores saben demasiadas y profundizan en exceso. Nosotros somos de la opinión contraria. Creemos que la mejor receta para garantizar una buena enseñanza de esta materia es que el profesor sepa muchas matemáticas, conociendo también el contexto histórico y las motivaciones que influyeron en su creación y desarrollo. Sólo de este modo el profesor puede ser capaz de transmitir con claridad lo esencial de cada concepto, en el momento adecuado, sin excesos técnicos ni lagunas insalvables para el alumno. Los Profesores de Enseñanza Secundaria que han tenido acceso a este material previamente, con su interés y entusiasmo nos confirmaron que hay margen sobrado para que este tipo de apuestas sean bien acogidas.

Sabíamos de la dificultad de escribir de Matemáticas de alto nivel y actualidad ante un público variado y, frecuentemente, a veces a su pesar, acostumbrado ya al universo de las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato. Por ello solicitamos su participación a una excelente plantilla de matemáticos. Todos contribuyeron con un grado de ilusión, entrega y acierto que superó nuestras expectativas. A ellos también nuestro más sincero agradecimiento.

Como complemento a estos materiales remitimos a los lectores al Boletín de SEMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) (núm. 24, 2003), la Gaceta de la RSME (Real Sociedad española de Matemáticas) (vol. 6, número 2, 2003) y la revista Cátedra Nova (número 17, 2003) donde se aborda la problemática de la enseñanza de las Matemáticas en la ESO y Bachillerato. Asimismo, el lector interesado puede consultar el artículo «Enseñar y aprender Matemáticas» publicado en la Revista de Educación del MEC (n.º 329, 2002, páginas 239-256).

Por último, queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento al Instituto Superior de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, por la edición definitiva de este libro.

EL CÁLCULO Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

José M. Arrieta
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

INTRODUCCIÓN

Al oír el nombre de Cálculo (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral) se nos viene a la mente inmediatamente conceptos como derivada, integral, función continua, tangentes, áreas, límites, sucesiones, series, coordenadas polares, áreas en coordenadas polares, longitudes de arco, área superficial, así como innumerables resultados relacionados con estos conceptos: entre dos ceros de una función existe un cero de la derivada, los máximos y mínimos de una función se obtienen con los ceros de la derivada, la derivación y la integración son procesos inversos, etc,. Típicos problemas de Cálculo estudiados en las aulas de la Enseñanza Secundaria y universitaria incluyen el análisis del dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función como $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ o si se quiere un poco más de emoción, se propone la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)-1}{x\log(x)-2}$. De esta forma, se presenta el Cálculo como un conjunto de definiciones, reglas y operaciones a realizar sobre algo que denominamos funciones, entes estos de los que la única visión que tenemos es el tímido gráfico que dibujamos sobre un papel. Para los estudiantes, significa una materia que necesariamente tienen que superar para seguir sus estudios y para nosotros es, ¡qué remedio!, una materia que hay que enseñar.

Por otra parte, dentro del currículum universitario y para la mayoría de los estudios de ciencias e ingeniería se incluye un curso de ecuaciones diferenciales. La emoción ahora está en resolver ecuaciones del tipo $y' = 2y(1-y)$, o bien $y''+3\operatorname{sen}(y) = \cos(\pi x)$, es decir, hallar una función $y(x)$ que verifique la ecuación propuesta. Para desempeñar tal tarea se requiere, indudablemente, haber adquirido destreza con las herramientas del cálculo, pues la cantidad de veces que se integra, se deriva, se cambia de variable, se aplica la regla de la cadena es innumerable. Estas ecuaciones se clasifican en ordinarias o en derivadas parciales, lineales o no, de primer orden, segundo orden, etcétera y se proponen métodos efectivos para su resolución.

Visto de esta forma, da la impresión que en un momento dado de la historia, los padres fundadores del Cálculo dibujaron sobre sus respectivas pizarras una función y se preguntaron qué es lo que podían hacer con ella. Como respuesta a su propia pregunta, la derivaron, integraron, calcularon sus máximos, mínimos, su área, etc,. Y después de descansar, se preguntaron si servía para algo. Y se dieron cuenta de que todo valía para resolver ecuaciones en donde además de la función, aparecía la derivada de la función y se dedicaron a resolver ecuaciones diferenciales y a convencer a otros de resolver más ecuaciones diferenciales.

Es evidente que la estructura curricular de las distintas asignaturas en el nivel de Bachillerato y Universidad es una tarea bastante difícil y elaborada. Pero, al mismo tiempo, es responsabilidad nuestra, de los docentes, el tener una perspectiva clara y acertada sobre las distintas materias que se están impartiendo, tanto en relación a los contenidos como de fidelidad con el desarrollo histórico que han seguido. En este sentido, considerar el Cálculo como una entelequia abstracta que tan sólo trata de estudiar funciones sin saber de donde vienen es faltar a la fidelidad histórica y al objetivo del Cálculo. De forma similar, desligar las Ecuaciones Diferenciales, tanto de los problemas del mundo real, como situar el origen de éstas alejado del mismo origen del Cálculo, no responde a la realidad histórica, ni a la evolución del presente.

En este artículo pretendemos presentar una visión más unificadora del Cálculo, las Ecuaciones Diferenciales y la Modelización Matemática, entendida esta última como la obtención de modelos matemáticos de problemas del mundo real.

En la siguiente sección, esbozamos unas notas sobre los orígenes del Cálculo poniendo especial énfasis en los problemas reales que se estaban abordando en los siglos XVI-XVII. Posteriormente, en la sección 2, desarrollamos algunos modelos de la Mecánica que se encuentran íntimamente relacionados con la aparición del Cálculo. Estudiaremos las vibraciones de un péndulo y su relación con la construcción de relojes de precisión. También analizaremos en detalle el movimiento planetario. En la sección 3, estudiamos cómo el Cálculo se puede aplicar al estudio de la Biología Matemática, en particular, a los problemas sobre dinámica de poblaciones. Obviamente, estas dos ramas de la ciencia (Mecánica y Biología) no constituyen las únicas en donde se pueden aplicar las herramientas del Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, pero constituyen dos buenos ejemplos que ilustran el procedimiento, las técnicas y el desarrollo moderno que se está viendo en el área de la Matemática Aplicada. Parte de este desarrollo moderno, cuyo nacimiento se puede atribuir a Henri Poincaré, se analiza en la ultima sección.

1. NOTAS SOBRE LOS ORÍGENES DEL CÁLCULO

La construcción de lo que hoy entendemos por Cálculo por parte de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), así como por los numerosos predecesores en esta tarea, Arquímedes (285-212 ac), Galileo Galilei (1564-1642) Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Johannes Kepler (1571-1630), Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677), etcétera; y el posterior desarrollo que ha seguido por científicos de la talla de Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli, Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustin Cauchy (1789-1857) y Henri Poincaré (1854-1912) entre muchos otros, está íntimamente ligado y viene motivado por los numerosos problemas del mundo real que estos científicos estaban abordando.

Hay un aspecto importante a la hora de mirar retrospectivamente a la actividad científica de los siglos *XVI-XVII*. La mayoría de los científicos de la época se sitúan entre dos épocas de la historia que se caracterizan por su distinta visión del mundo y en particular de la astronomía. La mayoría de ellos nacieron y fueron educados desde la visión Aristotélica, en donde la teoría geocéntrica era la imperante y los planetas se movían en órbitas circulares. Si se argumentaba que las órbitas eran circulares, no era por motivos científicos sino por razones filosófico-estéticas: el círculo es la curva perfecta y los astros son perfectos, por tanto, su órbita no puede ser otra más que la circunferencia. Nicolás Copérnico (1473-1543) defendió la teoría heliocéntrica en su obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, 1543, pero seguía manteniendo que las órbitas de los planetas eran circulares. Posteriormente, Kepler, estudiando las órbitas planetarias en base a los datos experimentales de la órbita de Marte del astrónomo Tycho Brahe (1546-1601), intentó ajustar estos datos a un círculo. Después de innumerables cálculos pesados e infructuosos, llegó a dar el paso de plantearse la posibilidad de que la órbitas no fueran círculos. Este paso es extremadamente importante: dar valor a *los datos experimentales*, a *la naturaleza*, y *de ahí obtener las ecuaciones* y postulados matemáticos. Quien realmente llegó a dar este salto de gigante y fundar así lo que hoy entendemos por ciencia moderna es Galileo. El descubrimiento de los cuatro satélites de Júpiter fue un golpe duro a la teoría geocéntrica que afirmaba que todo, absolutamente todo, giraba alrededor de la Tierra. La observación por primera vez de las manchas solares significó que los astros no eran perfectos y las fases de Venus eran inexplicables por medio de la teoría geocéntrica. Los datos experimentales y la observación echaron por tierra esta teoría geocéntrica del universo. A partir de Galileo, la ciencia se desliga de preconceptos acientíficos (incluso anticientíficos) y se une de la mano de la experiencia y la observación. El mundo empieza a ser observado y estudiado de forma sistemática y científica.

La cantidad de problemas científicos que emerge en esta época es impresionante. Según Morris Kline[1], durante los siglos XVI -XVII había cuatro tipos principales de problemas:

[1]KLINE, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días.* I, II y III. Alianza Universidad. Madrid, 1994.

I) Conocida la distancia que recorre un cuerpo en función del tiempo, calcular su velocidad y aceleración y viceversa, conocida la aceleración de un cuerpo, calcular su velocidad y la distancia recorrida. Este es el problema del movimiento de cuerpos donde las velocidades y aceleraciones varían de instante en instante.

II) Obtener la tangente a una curva dada en un punto de ella. Además de las motivaciones meramente geométricas de este problema era importante resolverlo por la cantidad de aplicaciones científicas que tenía. La aplicación de las leyes de la óptica para el diseño de lentes y construcción de telescopios pasaba forzosamente por el calculo de la recta normal a una curva, que es la recta perpendicular a la tangente a la curva. Por otra parte, en el estudio del movimiento surgía también el problema de las tangentes, pues la dirección del movimiento de un cuerpo móvil lo hace en la dirección de la recta tangente.

III) Calcular el valor máximo y/o mínimo de una función. Este problema surgía en balística al calcular el ángulo de disparo de un cañón que alcanzaría la máxima distancia posible. También aparecía este problema en el estudio del movimiento de los planetas, al querer calcular la distancia máxima y mínima de los planetas al sol.

IV) Hallar la longitud de arco de una curva dada. De nuevo en los problemas del movimiento planetario se necesitaba calcular la distancia recorrida por un planeta en un periodo de tiempo. También se incluye en este apartado el cálculo de áreas encerrados por curvas, el de volúmenes limitados por superficies, el del cálculo de la fuerza de la gravedad que ejerce un cuerpo no puntual sobre una masa.

Estos problemas se convierten en el germen motor del desarrollo de los conceptos que hoy entendemos por derivada, integral y límite, que constituyen el cuerpo de lo que hoy denominamos Cálculo.

La mayoría de estos problemas tienen un carácter dinámico. En ellos se pretende analizar el comportamiento de una cantidad que está en movimiento y que obedece alguna ley de la ciencia (un cuerpo bajo la acción de una fuerza, la densidad de una sustancia química en reacción, la trayectoria de un rayo de luz al atravesar una lente, etc.). Es precisamente esta dimensión de cambio de instante a instante en las magnitudes en cuestión lo que conduce a que ya desde tiempos anteriores a Newton y Leibniz se hiciera patente la necesidad de tratar estas magnitudes en lo "infinitamente pequeño".

Ya Galileo, en su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, 1638, analiza, entre otras cosas, el movimiento de un cuerpo uniformemente acelerado y utiliza argumentos de tipo geométrico que se pueden considerar auténticos precursores del Cálculo. Galileo utilizó el concepto de "indivisibles", que fue posteriormente desarrollado por su discípulo Cavalieri, para probar que el espacio recorrido por un cuerpo que partiendo del reposo, se desplaza con un movimiento uniformemente acelerado coincide con el espacio recorrido por otro cuerpo si el movimiento fuera con velocidad constante e igual a la mitad de la velocidad final del primer cuerpo.

Si representamos el tiempo por el segmento AB entonces la velocidad en un tiempo C viene dada por la magnitud CE, ver Figura 1. El área del triángulo ABD está formada por la agregación de "indivisibles", dados estos por todas las lineas paralelas a CE que unen AB con AD. Por otra parte, a todo indivisible CE le corresponde un indivisible del espacio recorrido que es de la misma magnitud y, por tanto, el área del triángulo ABD se corresponde con el espacio recorrido. Pero si trazamos el rectángulo $ABFG$ y utilizando de nuevo los indivisibles, éste tendrá el mismo área que el del triángulo ABD, puesto que a todo indivisible de la forma JK le corresponde otro igual y de la misma magnitud LM, lo que prueba que el triángulo AGI tiene el mismo área que DFI. Pero el área del rectángulo representa el espacio recorrido por un móvil con velocidad HI, que es la que se alcanza a tiempo medio.

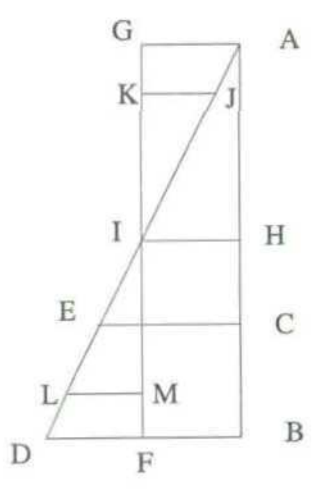

Figura 1. Demostración de Galileo.

Los indivisibles se presentan, por tanto, como precursores de los incrementos infinitesimales y se aplican directamente para analizar problemas dinámicos.

También Kepler utiliza el concepto de indivisibles y lo aplica al cálculo del área de una elipse. No olvidemos que sus tres leyes sobre el movimiento planetario hacen constante referencia a esta cónica. Kepler calculaba el área de la elipse de la siguiente forma. Era entonces bien conocido que la elipse de semiejes a, b se obtiene contrayendo un círculo de radio a en la dirección vertical por un factor b/a.

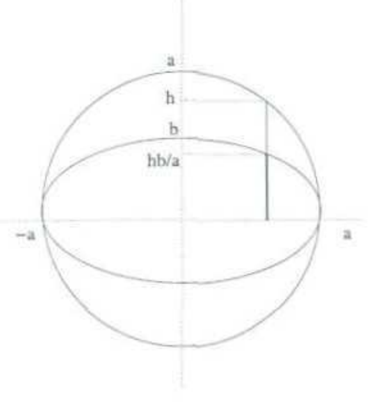

Figura 2. Cálculo del área de la elipse por Kepler.

Si consideramos que el área del círculo (y el de la elipse) está formado por la agregación de todos los indivisibles verticales y estos son contraídos por un factor b/a, entonces, el área debe ser contraído de nuevo por el mismo factor. Así, el área de la elipse debe ser $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$.

No obstante, el concepto de "indivisibles" y de "agregación infinita" de indivisibles para el cálculo de áreas no era del todo satisfactorio: se puede construir fácilmente dos figuras A y B con los mismos indivisibles (es decir, que a todo indivisible de A le corresponde uno y sólo un indivisible de B, y viceversa) pero que el área es obviamente distinto, ver figura 3.

El esfuerzo por encontrar un método general para el cálculo de áreas y la necesidad de trabajar con magnitudes que varían de instante a instante, culminó con la creación del Cálculo por parte de Newton y Leibniz. Pero no nos olvidemos de que en la base de esta creación está la necesidad de resolver problemas importantes de la época, problemas en su mayoría de carácter dinámico que involucraban a cantidades que

Figura 3. Dos figuras con los mismos indivisibles y distinto área.

variaban de instante en instante.

El mismo concepto que tenía Newton de curva (o función) es un concepto dinámico. Para éste, una curva no es más que el lugar que ocupa un objeto que se mueve, que fluye. Si en nuestra terminología actual, una curva viene dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, para Newton, ésta representaba una relación entre dos *fluentes*, x e y, que son dos cantidades que fluyen en el tiempo (en nuestra terminología, escribiríamos $x(t)$, $y(t)$). Sus variaciones con respecto al tiempo son las *fluxiones*, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Ya en su obra *El método de fluxiones y series infinitas*, 1671, Newton plantea los dos problemas principales del Cálculo:

1. Dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.

2. Dada una ecuación para las fluxiones, determinar la relación entre las cantidades fluentes.

El primer problema consiste en calcular la derivada de una función dada. El segundo problema consiste en resolver ecuaciones diferenciales. Vemos, por tanto, que el arranque de lo que hoy entendemos por Ecuaciones Diferenciales es simultáneo al del Cálculo. Además, el desarrollo posterior de ambos ha ido de forma paralela y siempre guiado por el deseo de entender, cada vez más, los fenómenos importantes del mundo real, ya sean físicos, biológicos, económicos o de otra índole. El aplicar las herramientas del Cálculo a estos problemas reales y obtener un conjunto de ecuaciones que rigen el proceso en cuestión, que en la mayoría de los casos, son ecuaciones diferenciales, es lo que entendemos por Modelización Matemática. Una vez deducidas las ecuaciones, es tarea del matemático obtener información, ya sea cuantitativa o cualitativa, sobre el comportamiento de sus soluciones. La validez o no del modelo diseñado se decidirá contrastando los datos experimentales del proceso con los obtenidos por la ecuación en cuestión.

2. MECÁNICA

En la monumental obra, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, 1687, Isaac Newton estableció, entre otras muchas leyes y principios, las que rigen el movimiento de los cuerpos bajo la acción de unas fuerzas. Estas tres leyes dicen:

1. Todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza se mueve con velocidad constante.

2. Si sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza F, entonces, el cuerpo experimenta una aceleración a siguiendo la ley $F = ma$.

3. Ley de acción y reacción: a toda fuerza (acción) se le opone otra fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario (reacción).

Estas tres leyes, junto con la ley de la gravitación universal, que establece que la fuerza ejercida por un cuerpo de masa M sobre otro de masa m es directamente proporcional al producto de ambas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, constituyen las bases de la mecánica y a partir de ellas se puede establecer de forma clara el comportamiento dinámico de los cuerpos bajo la acción de la fuerza de la gravedad.

Para la aplicación de estas leyes a problemas concretos se hacen indispensables los conceptos y herramientas del Cálculo, desarrollados por Newton y Leibniz. Este desarrollo paralelo del Cálculo, la Mecánica y, por ende, las Ecuaciones Diferenciales no es accidental. En base a la aplicación del Cálculo a problemas de la Mecánica se obtienen Ecuaciones Diferenciales como modelos que rigen el comportamiento dinámico del problema en cuestión.

2.1. El péndulo

Veamos un ejemplo importante que ha constituido, a través de los siglos una fuente inagotable de problemas, ideas y técnicas.

El interés por el péndulo fue y aún sigue siendo inmenso. Por un lado, y como veremos más abajo, el período de un péndulo no es propiamente independiente de la amplitud inicial de la oscilación. Esto quiere decir que un péndulo no podría ser utilizado para la construcción de relojes de precisión. Este hecho motivó el problema de encontrar una curva sobre la cual las oscilaciones debidas a la acción de la gravedad fueran independientes de la posición inicial. Christiann Huygens (1629-1695) llegó a demostrar, con argumentos geométricos, que esta curva era una cicloide.

Por otra parte, el estudio del péndulo estaba ligado a dos problemas fundamentales de la época: la forma de la Tierra y la verificación de la ley del cuadrado de los inversos de la atracción gravitatoria. Aunque el período de oscilación de un péndulo depende de la amplitud de oscilación, con una buena aproximación y para oscilaciones pequeñas, éste viene dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. De esta forma, si se calculan los distintos valores de g a lo largo de un meridiano de la Tierra y se sabe la relación entre g y la distancia al centro de gravedad, se puede obtener la forma de la Tierra.

También, conocida la forma de la Tierra, se podría utilizar esta fórmula para verificar la ley de la gravitación universal combinando el hecho de que la Tierra gira y, por tanto, todo cuerpo sobre la superficie experimenta dos fuerzas, una fuerza centrípeta por la rotación que es conocida si se sabe la forma de la Tierra y la fuerza de la gravedad. El valor experimental de g obtenido es una combinación de las dos fuerzas.

Vamos a analizar ahora en detalle la ecuación del péndulo. Supongamos que la masa del péndulo es m y la longitud de la varilla que lo sostiene l, ver figura 4. Vamos a expresar la posición del péndulo en cada instante t por la función $\theta(t)$ que expresa el desplazamiento angular de la masa con respecto a su posición de equilibrio, $\theta = 0$.

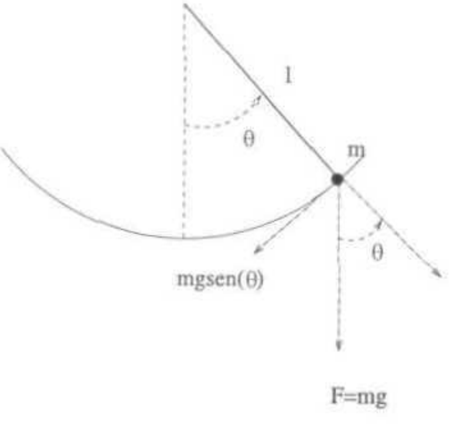

Figura 4. El péndulo.

Al moverse el péndulo, la masa describe arcos de circunferencia de radio l y al trasladarse del ángulo θ_1 hasta θ_2, la masa ha recorrido la longitud $l(\theta_2 - \theta_1)$. Por tanto, el espacio recorrido por la masa entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es $l(\theta(t_2) - \theta(t_1))$. La velocidad y la aceleración instantánea serán respectivamente, $l\theta'(t)$, $l\theta''(t)$.

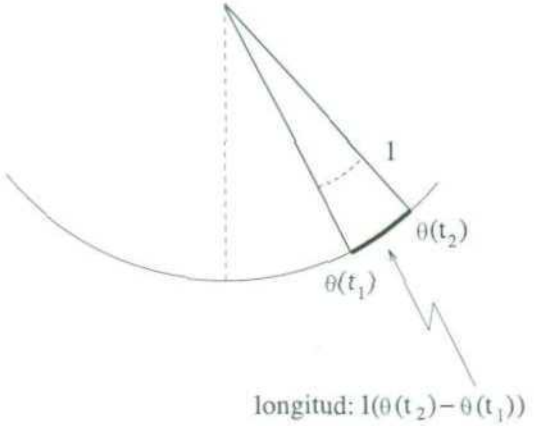

Figura 5. Longitud recorrida por el péndulo.

La fuerza de la gravedad que actúa sobre la masa cuando está en la posición θ viene dada por el vector $F = (0, -mg)$. Descomponiendo este vector en su componente normal y tangencial al movimiento, podemos ver que la fuerza responsable del movimiento es $-mg\,\mathrm{sen}(\theta)$, ver Figura 6. La componente normal se anula por la ley de acción y reacción. Suponiendo la situación ideal en donde no hay rozamiento de ningún tipo y de acuerdo al balance de fuerzas dado por la segunda ley de Newton, tendremos que $ml\theta''(t) = -mg\,\mathrm{sen}(\theta(t))$ o lo que es equivalente,

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = 0$$

Analicemos el comportamiento del péndulo cuando la masa se suelta desde el reposo a un cierto ángulo $\theta_0 \in (0, \pi)$, es decir, prefijamos las condiciones iniciales del movimiento por $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$.

Multiplicando la ecuación por $\theta'(t)$ obtenemos por una parte, el término

$$\theta''(t)\theta'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\theta'(t))^2$$

y por otra parte

$$\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta(t))\theta'(t) = -\frac{g}{l}\frac{d}{dt}\cos(\theta(t)),$$

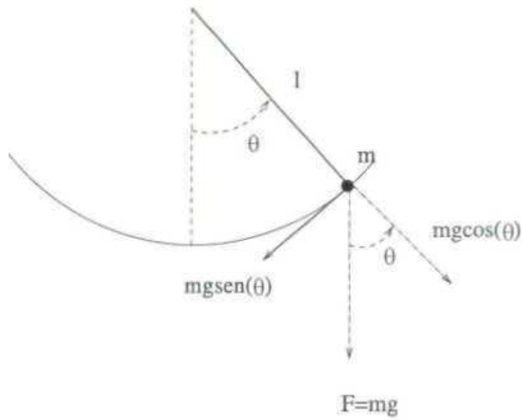

Figura 6. Fuerzas que actúan sobre el péndulo.

de donde deducimos que

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}\cos(\theta(t))) = 0.$$

Por tanto, la cantidad $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}\cos(\theta(t))$ se conserva a lo largo del movimiento. Esto no es más que la ley de conservación de la energía, pues la energía total, energía cinética más potencial, viene dada por

$$E = \frac{1}{2}(l\theta')^2 - gl\cos(\theta).$$

En particular, tenemos que dada la posición inicial del péndulo θ_0 y asumiendo que la masa se deja caer del reposo, tendremos que para todo tiempo t,

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}\cos(\theta(t)) = -\frac{g}{l}\cos(\theta_0)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 = \frac{g}{l}(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)) \tag{2.1}$$

En particular, puesto que $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 \geq 0$, tendremos que $\cos(\theta(t)) \geq \cos(\theta_0)$, lo que implica que siempre tendremos que $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$.

Una de las características importantes del péndulo es el periodo de oscilación $T(\theta_0)$, es decir, el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$ y

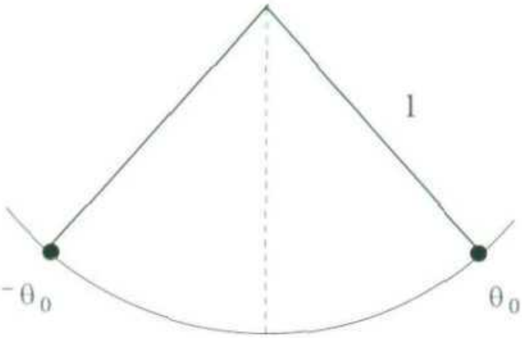

Figura 7. Recorrido del péndulo.

volver de nuevo a θ_0. Obviamente, por simetría, este tiempo es el doble que el que toma en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$. Mientras el péndulo va desde θ_0 hasta $-\theta_0$, tendremos que $\theta'(t) < 0$. Despejando de la última ecuación obtenemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

Separando las variables e integrando, obtenemos que si τ es el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$, entonces

$$-\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = \int_0^{\tau} dt = \tau.$$

Por tanto, el período viene dado por

$$\begin{aligned} T(\theta_0) = 2\tau &= 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} \\ &= 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \end{aligned}$$

Tras un cambio de variable, el valor de $T(\theta_0)$ se puede expresar por la integral

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}}$$

donde $k = \sin(\theta_0/2)$. La integral de la última expresión se conoce como integral elíptica de primera especie.

Se sabe que $T(\theta_0)$ realmente depende de θ_0. De hecho, la gráfica de $T(\theta_0)$ es como la de la figura 8. Observese que para oscilaciones