

AULAS
DE
VERANO

Instituto
Superior de
Formación del
Profesorado

DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS: HISTORIA Y DESARROLLO RECIENTES EN MATEMÁTICAS

Coordinación:

Roberto Rodríguez del Río
Enrique Zuazua



MINISTERIO
DE EDUCACIÓN
Y CIENCIA

**DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS:
Historia y desarrollos recientes en Matemáticas**

COORDINACIÓN:
Roberto Rodríguez del Río
Enrique Zuazua





MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA
SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
Instituto Superior de Formación del Profesorado

Edita:

© SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA
Subdirección General de Información y Publicaciones

N.I.P.O.: 176-04-148-7
I.S.B.N.: 84-369-3845-3
Depósito Legal: M-32242-2004

Imprime: SOLANA E HIJOS, A.G., S. A.

Colección: AULAS DE VERANO

Serie: Ciencias

DE LA ARITMÉTICA AL ANÁLISIS: HISTORIA Y DESARROLLOS RECIENTES EN MATEMÁTICAS

El objetivo del volumen es el de, a través del contacto con algunas cuestiones relacionadas con los grandes bloques temáticos de los nuevos currícula de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria, proporcionar a los profesionales de las Matemáticas, educadores, científicos y cualquiera que quiera conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, la posibilidad de actualizar sus conocimientos científicos y conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, así como la influencia de éstas en el desarrollo histórico de la Ciencia.

Los temas elegidos giran en torno al Álgebra, el Análisis, la Estadística y la Probabilidad y también sobre el papel que las Matemáticas han desempeñado, desde un punto de vista histórico, en el desarrollo de las Ciencias, la Ingeniería y la Tecnología.

Dirección editorial del volumen *De la Aritmética al análisis: Historia y desarrollos recientes en matemáticas:*

ENRIQUE ZUAZUA

Coordinación: *RODRÍGUEZ DEL RÍO, Roberto.*

Autores:

ARRIETA, José M.

CUEVAS, Antonio.

GONZÁLEZ-VEGA, Laureano.

MUÑOZ NUÑEZ, Agustín.

RECIO, Tomás.

RODRÍGUEZ DEL RÍO, Roberto.

VÁZQUEZ, Juan Luis.

ZUAZUA, Enrique.

ÍNDICE

<i>Introducción</i>	9
Roberto Rodríguez del Río. Enrique Zuazua	
<i>El cálculo y la modelización matemática</i>	11
José M. Arrieta	
<i>El análisis estadístico de grandes masas de datos: algunas tendencias recientes</i>	59
Antonio Cuevas	
<i>Publicación de contenidos matemáticos en la web</i>	91
Agustín Muñoz Nuñez	
<i>Una introducción al Álgebra Computacional y a la Geometría Algorítmica y su incidencia en la Secundaria y el Bachillerato</i> ..	107
Tomás Recio y Laureano González-Vega	
<i>Gráficas con Matlab</i>	139
Roberto Rodríguez del Río	
<i>Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera</i>	183
Juan Luis Vázquez	
<i>Las Matemáticas del Control</i>	245
Enrique Zuazua	
Ediciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado ..	319

INTRODUCCIÓN

Roberto Rodríguez del Río
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Enrique Zuazua Iriondo
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

El objetivo del volumen es el de proporcionar a los Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria la posibilidad de actualizar sus conocimientos científicos a través del contacto con algunas cuestiones relacionadas con los grandes bloques temáticos de los nuevos currícula de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. En consecuencia, los temas elegidos giran en torno al Álgebra, el Análisis, la Estadística y la Probabilidad y también sobre el papel que las Matemáticas han desempeñado, desde un punto de vista histórico, en el desarrollo de las Ciencias, la Ingeniería y la Tecnología.

Los artículos están realizados por científicos del más alto nivel que se caracterizan por su gran capacidad de comunicación, así como por su compromiso con la enseñanza de las Matemáticas.

Es para nosotros una gran satisfacción ver que el esfuerzo que los profesores realizaron preparando las notas será de utilidad para otros muchos profesionales de las Matemáticas, educadores, científicos y cualquiera que quiera conocer algunas de las tendencias actuales en Matemáticas, así como la influencia de éstas en el desarrollo histórico de la Ciencia.

Cuando lo diseñamos, lo hicimos con la idea de que fuese un libro fundamentalmente de Matemáticas, cuyos destinatarios fuesen quienes las enseñan. Al hacerlo, éramos conscientes de que la apuesta era arriesgada. En efecto, en muchas ocasiones, estos textos escapan de los contenidos rigurosos y se dedican más a cuestiones de tipo metodológicas o pedagógicas. Nada tenemos en contra de ello pero creímos que nuestra condición de matemáticos profesionales nos obligaba a poner a las Matemáticas en el centro de gravedad. Este hecho no es ajeno a nuestra visión del

complejo mundo de las Matemáticas y de su enseñanza. Hay quienes creen que los estudiantes no aprenden Matemáticas y que éstas no les gustan porque los profesores saben demasiadas y profundizan en exceso. Nosotros somos de la opinión contraria. Creemos que la mejor receta para garantizar una buena enseñanza de esta materia es que el profesor sepa muchas matemáticas, conociendo también el contexto histórico y las motivaciones que influyeron en su creación y desarrollo. Sólo de este modo el profesor puede ser capaz de transmitir con claridad lo esencial de cada concepto, en el momento adecuado, sin excesos técnicos ni lagunas insalvables para el alumno. Los Profesores de Enseñanza Secundaria que han tenido acceso a este material previamente, con su interés y entusiasmo nos confirmaron que hay margen sobrado para que este tipo de apuestas sean bien acogidas.

Sabíamos de la dificultad de escribir de Matemáticas de alto nivel y actualidad ante un público variado y, frecuentemente, a veces a su pesar, acostumbrado ya al universo de las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato. Por ello solicitamos su participación a una excelente plantilla de matemáticos. Todos contribuyeron con un grado de ilusión, entrega y acierto que superó nuestras expectativas. A ellos también nuestro más sincero agradecimiento.

Como complemento a estos materiales remitimos a los lectores al Boletín de SEMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) (núm. 24, 2003), la Gaceta de la RSME (Real Sociedad española de Matemáticas) (vol. 6, número 2, 2003) y la revista Cátedra Nova (número 17, 2003) donde se aborda la problemática de la enseñanza de las Matemáticas en la ESO y Bachillerato. Asimismo, el lector interesado puede consultar el artículo «Enseñar y aprender Matemáticas» publicado en la Revista de Educación del MEC (n.º 329, 2002, páginas 239-256).

Por último, queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento al Instituto Superior de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, por la edición definitiva de este libro.

EL CÁLCULO Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

José M. Arrieta
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. Notas sobre los orígenes del Cálculo.
2. Mecánica.
 - 2.1. El péndulo.
 - 2.2. El péndulo linealizado.
 - 2.3. Construcción de relojes.
 - 2.4. Movimiento planetario.
3. Dinámica de Poblaciones.
 - 3.1. Crecimiento exponencial.
 - 3.2. Migraciones.
 - 3.3. Tasas de crecimiento y de migración variables.
 - 3.4. Recursos limitados.
 - 3.5. Modelo depredador-presa.
4. Sistemas dinámicos.

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

Al oír el nombre de Cálculo (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral) se nos viene a la mente inmediatamente conceptos como derivada, integral, función continua, tangentes, áreas, límites, sucesiones, series, coordenadas polares, áreas en coordenadas polares, longitudes de arco, área superficial, así como innumerables resultados relacionados con estos conceptos: entre dos ceros de una función existe un cero de la derivada, los máximos y mínimos de una función se obtienen con los ceros de la derivada, la derivación y la integración son procesos inversos*, etc.. Típicos

problemas de Cálculo estudiados en las aulas de la Enseñanza Secundaria y universitaria incluyen el análisis del dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función como $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ o si se quiere un poco más de emoción, se propone la función $f(x) = \frac{\text{sen}(x) - 1}{x \log(x) - 2}$. De esta forma, se presenta el Cálculo como un conjunto de definiciones, reglas y operaciones a realizar sobre algo que denominamos funciones, antes estos de los que la única visión que tenemos es el tímido gráfico que dibujamos sobre un papel. Para los estudiantes, significa una materia que necesariamente tienen que superar para seguir sus estudios y para nosotros es, ¡qué remedio!, una materia que hay que enseñar.

Por otra parte, dentro del currículum universitario y para la mayoría de los estudios de ciencias e ingeniería se incluye un curso de ecuaciones diferenciales. La emoción ahora está en resolver ecuaciones del tipo $y' = 2y(1-y)$, o bien $y'' + 3\text{sen}(y) = \cos(\pi x)$, es decir, hallar una función $y(x)$ que verifique la ecuación propuesta. Para desempeñar tal tarea se requiere, indudablemente, haber adquirido destreza con las herramientas del cálculo, pues la cantidad de veces que se integra, se deriva, se cambia de variable, se aplica la regla de la cadena es innumerable. Estas ecuaciones se clasifican en ordinarias o en derivadas parciales, lineales o no, de primer orden, segundo orden, etcétera y se proponen métodos efectivos para su resolución.

Visto de esta forma, da la impresión que en un momento dado de la historia, los padres fundadores del Cálculo dibujaron sobre sus respectivas pizarras una función y se preguntaron qué es lo que podían hacer con ella. Como respuesta a su propia pregunta, la derivaron, integraron, calcularon sus máximos, mínimos, su área, etc. Y después de descansar, se preguntaron si servía para algo. Y se dieron cuenta de que todo valía para resolver ecuaciones en donde además de la función, aparecía la derivada de la función y se dedicaron a resolver ecuaciones diferenciales y a convencer a otros de resolver más ecuaciones diferenciales.

Es evidente que la estructura curricular de las distintas asignaturas en el nivel de Bachillerato y Universidad es una tarea bastante difícil y elaborada. Pero, al mismo tiempo, es responsabilidad nuestra, de los docentes, el tener una perspectiva clara y acertada sobre las distintas materias que se están impartiendo, tanto en relación a los contenidos como de fidelidad con el desarrollo histórico que han seguido. En este sentido, considerar el Cálculo como una entelequia abstracta que tan sólo trata de estudiar funciones sin saber de donde vienen es faltar a la

fidelidad histórica y al objetivo del Cálculo. De forma similar, desligar las Ecuaciones Diferenciales, tanto de los problemas del mundo real, como situar el origen de éstas alejado del mismo origen del Cálculo, no responde a la realidad histórica, ni a la evolución del presente.

En este artículo pretendemos presentar una visión más unificadora del Cálculo, las Ecuaciones Diferenciales y la Modelización Matemática, entendida esta última como la obtención de modelos matemáticos de problemas del mundo real.

En la siguiente sección, esbozamos unas notas sobre los orígenes del Cálculo poniendo especial énfasis en los problemas reales que se estaban abordando en los siglos XVI-XVII. Posteriormente, en la sección 2, desarrollamos algunos modelos de la Mecánica que se encuentran íntimamente relacionados con la aparición del Cálculo. Estudiaremos las vibraciones de un péndulo y su relación con la construcción de relojes de precisión. También analizaremos en detalle el movimiento planetario. En la sección 3, estudiamos cómo el Cálculo se puede aplicar al estudio de la Biología Matemática, en particular, a los problemas sobre dinámica de poblaciones. Obviamente, estas dos ramas de la ciencia (Mecánica y Biología) no constituyen las únicas en donde se pueden aplicar las herramientas del Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, pero constituyen dos buenos ejemplos que ilustran el procedimiento, las técnicas y el desarrollo moderno que se está viendo en el área de la Matemática Aplicada. Parte de este desarrollo moderno, cuyo nacimiento se puede atribuir a Henri Poincaré, se analiza en la última sección.

1. NOTAS SOBRE LOS ORÍGENES DEL CÁLCULO

La construcción de lo que hoy entendemos por Cálculo por parte de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), así como por los numerosos predecesores en esta tarea, Arquímedes (285-212 ac), Galileo Galilei (1564-1642) Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Johannes Kepler (1571-1630), Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677), etcétera; y el posterior desarrollo que ha seguido por científicos de la talla de Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli, Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustin Cauchy (1789-1857) y Henri Poincaré (1854-1912) entre muchos otros, está íntimamente ligado y viene motivado por los numerosos problemas del mundo real que estos científicos estaban abordando.

Hay un aspecto importante a la hora de mirar retrospectivamente a la

actividad científica de los siglos XVI-XVII. La mayoría de los científicos de la época se sitúan entre dos épocas de la historia que se caracterizan por su distinta visión del mundo y en particular de la astronomía. La mayoría de ellos nacieron y fueron educados desde la visión Aristotélica, en donde la teoría geocéntrica era la imperante y los planetas se movían en órbitas circulares. Si se argumentaba que las órbitas eran circulares, no era por motivos científicos sino por razones filosófico-estéticas: el círculo es la curva perfecta y los astros son perfectos, por tanto, su órbita no puede ser otra más que la circunferencia. Nicolás Copérnico (1473-1543) defendió la teoría heliocéntrica en su obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, 1543, pero seguía manteniendo que las órbitas de los planetas eran circulares. Posteriormente, Kepler, estudiando las órbitas planetarias en base a los datos experimentales de la órbita de Marte del astrónomo Tycho Brahe (1546-1601), intentó ajustar estos datos a un círculo. Después de innumerables cálculos pesados e infructuosos, llegó a dar el paso de plantearse la posibilidad de que las órbitas no fueran círculos. Este paso es extremadamente importante: dar valor a los datos experimentales, a la naturaleza, y de ahí obtener las ecuaciones y postulados matemáticos. Quien realmente llegó a dar este salto de gigante y fundar así lo que hoy entendemos por ciencia moderna es Galileo. El descubrimiento de los cuatro satélites de Júpiter fue un golpe duro a la teoría geocéntrica que afirmaba que todo, absolutamente todo, giraba alrededor de la Tierra. La observación por primera vez de las manchas solares significó que los astros no eran perfectos y las fases de Venus eran inexplicables por medio de la teoría geocéntrica. Los datos experimentales y la observación echaron por tierra esta teoría geocéntrica del universo. A partir de Galileo, la ciencia se desliga de preconceptos acientíficos (incluso anticientíficos) y se une de la mano de la experiencia y la observación. El mundo empieza a ser observado y estudiado de forma sistemática y científica.

La cantidad de problemas científicos que emerge en esta época es impresionante. Según Morris Kline¹, durante los siglos XVI -XVII había cuatro tipos principales de problemas:

¹KLINE, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*. I, II y III. Alianza Universidad. Madrid, 1994.

I) Conocida la distancia que recorre un cuerpo en función del tiempo, calcular su velocidad y aceleración y viceversa, conocida la aceleración de un cuerpo, calcular su velocidad y la distancia recorrida. Este es el problema del movimiento de cuerpos donde las velocidades y aceleraciones varían de instante en instante.

II) Obtener la tangente a una curva dada en un punto de ella. Además de las motivaciones meramente geométricas de este problema era importante resolverlo por la cantidad de aplicaciones científicas que tenía. La aplicación de las leyes de la óptica para el diseño de lentes y construcción de telescopios pasaba forzosamente por el cálculo de la recta normal a una curva, que es la recta perpendicular a la tangente a la curva. Por otra parte, en el estudio del movimiento surgía también el problema de las tangentes, pues la dirección del movimiento de un cuerpo móvil lo hace en la dirección de la recta tangente.

III) Calcular el valor máximo y/o mínimo de una función. Este problema surgía en balística al calcular el ángulo de disparo de un cañón que alcanzaría la máxima distancia posible. También aparecía este problema en el estudio del movimiento de los planetas, al querer calcular la distancia máxima y mínima de los planetas al sol.

IV) Hallar la longitud de arco de una curva dada. De nuevo en los problemas del movimiento planetario se necesitaba calcular la distancia recorrida por un planeta en un período de tiempo. También se incluye en este apartado el cálculo de áreas encerrados por curvas, el de volúmenes limitados por superficies, el del cálculo de la fuerza de la gravedad que ejerce un cuerpo no puntual sobre una masa.

Estos problemas se convierten en el germen motor del desarrollo de los conceptos que hoy entendemos por derivada, integral y límite, que constituyen el cuerpo de lo que hoy denominamos Cálculo.

La mayoría de estos problemas tienen un carácter dinámico. En ellos se pretende analizar el comportamiento de una cantidad que está en movimiento y que obedece alguna ley de la ciencia (un cuerpo bajo la acción de una fuerza, la densidad de una sustancia química en reacción, la trayectoria de un rayo de luz al atravesar una lente, etc.). Es precisamente esta dimensión de cambio de instante a instante en las magnitudes en cuestión lo que conduce a que ya desde tiempos anteriores a Newton y Leibniz se hiciera patente la necesidad de tratar estas magnitudes en lo "infinitamente pequeño".

Ya Galileo, en su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, 1638, analiza, entre otras cosas, el movimiento de un cuerpo uniformemente acelerado y utiliza argumentos de tipo geométrico que se pueden considerar auténticos precursores del Cálculo. Galileo utilizó el concepto de “indivisibles”, que fue posteriormente desarrollado por su discípulo Cavalieri, para probar que el espacio recorrido por un cuerpo que partiendo del reposo, se desplaza con un movimiento uniformemente acelerado coincide con el espacio recorrido por otro cuerpo si el movimiento fuera con velocidad constante e igual a la mitad de la velocidad final del primer cuerpo.

Si representamos el tiempo por el segmento AB entonces la velocidad en un tiempo C viene dada por la magnitud CE , ver Figura 1. El área del triángulo ABD está formada por la agregación de “indivisibles”, dados estos por todas las líneas paralelas a CE que unen AB con AD . Por otra parte, a todo indivisible CE le corresponde un indivisible del espacio recorrido que es de la misma magnitud y, por tanto, el área del triángulo ABD se corresponde con el espacio recorrido. Pero si trazamos el rectángulo $ABFG$ y utilizando de nuevo los indivisibles, éste tendrá el mismo área que el del triángulo ABD , puesto que a todo indivisible de la forma JK le corresponde otro igual y de la misma magnitud LM , lo que prueba que el triángulo AGI tiene el mismo área que DFI . Pero el área del rectángulo representa el espacio recorrido por un móvil con velocidad HI , que es la que se alcanza a tiempo medio.

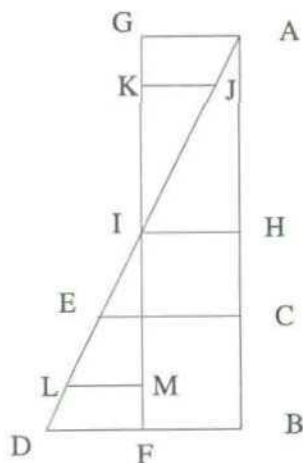


Figura 1. Demostración de Galileo.

Los indivisibles se presentan, por tanto, como precursores de los in-

crementos infinitesimales y se aplican directamente para analizar problemas dinámicos.

También Kepler utiliza el concepto de indivisibles y lo aplica al cálculo del área de una elipse. No olvidemos que sus tres leyes sobre el movimiento planetario hacen constante referencia a esta cónica. Kepler calculaba el área de la elipse de la siguiente forma. Era entonces bien conocido que la elipse de semiejes a , b se obtiene contrayendo un círculo de radio a en la dirección vertical por un factor b/a .

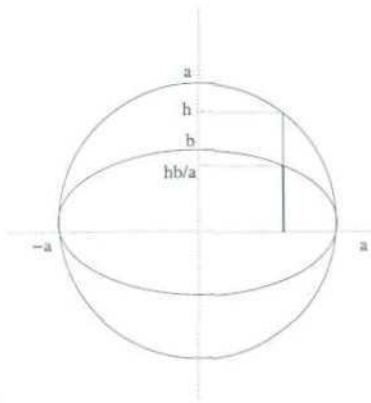


Figura 2. Cálculo del área de la elipse por Kepler.

Si consideramos que el área del círculo (y el de la elipse) está formado por la agregación de todos los indivisibles verticales y estos son contraídos por un factor b/a , entonces, el área debe ser contraído de nuevo por el mismo factor. Así, el área de la elipse debe ser $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$.

No obstante, el concepto de “indivisibles” y de “agregación infinita” de indivisibles para el cálculo de áreas no era del todo satisfactorio: se puede construir fácilmente dos figuras A y B con los mismos indivisibles (es decir, que a todo indivisible de A le corresponde uno y sólo un indivisible de B , y viceversa) pero que el área es obviamente distinto, ver figura 3.

El esfuerzo por encontrar un método general para el cálculo de áreas y la necesidad de trabajar con magnitudes que varían de instante a instante, culminó con la creación del Cálculo por parte de Newton y Leibniz. Pero no nos olvidemos de que en la base de esta creación está la necesidad de resolver problemas importantes de la época, problemas en su mayoría de carácter dinámico que involucraban a cantidades que



Figura 3. Dos figuras con los mismos indivisibles y distinto área.

variaban de instante en instante.

El mismo concepto que tenía Newton de curva (o función) es un concepto dinámico. Para éste, una curva no es más que el lugar que ocupa un objeto que se mueve, que fluye. Si en nuestra terminología actual, una curva viene dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, para Newton, ésta representaba una relación entre dos *fluentes*, x e y , que son dos cantidades que fluyen en el tiempo (en nuestra terminología, escribiríamos $x(t)$, $y(t)$). Sus variaciones con respecto al tiempo son las *fluxiones*, \dot{x} , \dot{y} .

Ya en su obra *El método de fluxiones y series infinitas*, 1671, Newton plantea los dos problemas principales del Cálculo:

1. Dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.
2. Dada una ecuación para las fluxiones, determinar la relación entre las cantidades fluentes.

El primer problema consiste en calcular la derivada de una función dada. El segundo problema consiste en resolver ecuaciones diferenciales. Vemos, por tanto, que el arranque de lo que hoy entendemos por Ecuaciones Diferenciales es simultáneo al del Cálculo. Además, el desarrollo posterior de ambos ha ido de forma paralela y siempre guiado por el deseo de entender, cada vez más, los fenómenos importantes del mundo real, ya sean físicos, biológicos, económicos o de otra índole. El aplicar las herramientas del Cálculo a estos problemas reales y obtener un conjunto de ecuaciones que rigen el proceso en cuestión, que en la mayoría de los casos, son ecuaciones diferenciales, es lo que entendemos por Modelización Matemática. Una vez deducidas las ecuaciones, es tarea del matemático obtener información, ya sea cuantitativa o cualitativa, sobre el comportamiento de sus soluciones. La validez o no del modelo diseñado se decidirá contrastando los datos experimentales del proceso con los obtenidos por la ecuación en cuestión.

2. MECÁNICA

En la monumental obra, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, 1687, Isaac Newton estableció, entre otras muchas leyes y principios, las que rigen el movimiento de los cuerpos bajo la acción de unas fuerzas. Estas tres leyes dicen:

1. Todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza se mueve con velocidad constante.
2. Si sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza F , entonces, el cuerpo experimenta una aceleración a siguiendo la ley $F = ma$.
3. Ley de acción y reacción: a toda fuerza (acción) se le opone otra fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario (reacción).

Estas tres leyes, junto con la ley de la gravitación universal, que establece que la fuerza ejercida por un cuerpo de masa M sobre otro de masa m es directamente proporcional al producto de ambas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, constituyen las bases de la mecánica y a partir de ellas se puede establecer de forma clara el comportamiento dinámico de los cuerpos bajo la acción de la fuerza de la gravedad.

Para la aplicación de estas leyes a problemas concretos se hacen indispensables los conceptos y herramientas del Cálculo, desarrollados por Newton y Leibniz. Este desarrollo paralelo del Cálculo, la Mecánica y, por ende, las Ecuaciones Diferenciales no es accidental. En base a la aplicación del Cálculo a problemas de la Mecánica se obtienen Ecuaciones Diferenciales como modelos que rigen el comportamiento dinámico del problema en cuestión.

2.1. El péndulo

Veamos un ejemplo importante que ha constituido, a través de los siglos una fuente inagotable de problemas, ideas y técnicas.

El interés por el péndulo fue y aún sigue siendo inmenso. Por un lado, y como veremos más abajo, el período de un péndulo no es propiamente independiente de la amplitud inicial de la oscilación. Esto quiere decir que un péndulo no podría ser utilizado para la construcción de relojes de precisión. Este hecho motivó el problema de encontrar una curva sobre la cual las oscilaciones debidas a la acción de la gravedad fueran independientes de la posición inicial. Christiann Huygens (1629-1695)

llegó a demostrar, con argumentos geométricos, que esta curva era una cicloide.

Por otra parte, el estudio del péndulo estaba ligado a dos problemas fundamentales de la época: la forma de la Tierra y la verificación de la ley del cuadrado de los inversos de la atracción gravitatoria. Aunque el período de oscilación de un péndulo depende de la amplitud de oscilación, con una buena aproximación y para oscilaciones pequeñas, éste viene dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. De esta forma, si se calculan los distintos valores de g a lo largo de un meridiano de la Tierra y se sabe la relación entre g y la distancia al centro de gravedad, se puede obtener la forma de la Tierra.

También, conocida la forma de la Tierra, se podría utilizar esta fórmula para verificar la ley de la gravitación universal combinando el hecho de que la Tierra gira y, por tanto, todo cuerpo sobre la superficie experimenta dos fuerzas, una fuerza centrípeta por la rotación que es conocida si se sabe la forma de la Tierra y la fuerza de la gravedad. El valor experimental de g obtenido es una combinación de las dos fuerzas.

Vamos a analizar ahora en detalle la ecuación del péndulo. Supongamos que la masa del péndulo es m y la longitud de la varilla que lo sostiene l , ver figura 4. Vamos a expresar la posición del péndulo en cada instante t por la función $\theta(t)$ que expresa el desplazamiento angular de la masa con respecto a su posición de equilibrio, $\theta = 0$.

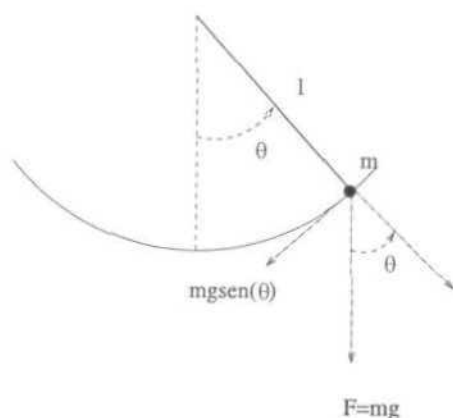


Figura 4. El péndulo.

Al moverse el péndulo, la masa describe arcos de circunferencia de

radio l y al trasladarse del ángulo θ_1 hasta θ_2 , la masa ha recorrido la longitud $l(\theta_2 - \theta_1)$. Por tanto, el espacio recorrido por la masa entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es $l(\theta(t_2) - \theta(t_1))$. La velocidad y la aceleración instantánea serán respectivamente, $l\theta'(t)$, $l\theta''(t)$.

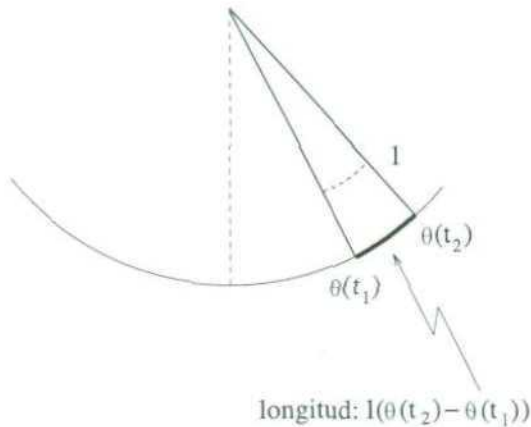


Figura 5. Longitud recorrida por el péndulo.

La fuerza de la gravedad que actúa sobre la masa cuando está en la posición θ viene dada por el vector $F = (0, -mg)$. Descomponiendo este vector en su componente normal y tangencial al movimiento, podemos ver que la fuerza responsable del movimiento es $-mg \operatorname{sen}(\theta)$, ver Figura 6. La componente normal se anula por la ley de acción y reacción. Suponiendo la situación ideal en donde no hay rozamiento de ningún tipo y de acuerdo al balance de fuerzas dado por la segunda ley de Newton, tendremos que $ml\theta''(t) = -mg \operatorname{sen}(\theta(t))$ o lo que es equivalente,

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$$

Analicemos el comportamiento del péndulo cuando la masa se suelta desde el reposo a un cierto ángulo $\theta_0 \in (0, \pi)$, es decir, pre fijamos las condiciones iniciales del movimiento por $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$.

Multiplicando la ecuación por $\theta'(t)$ obtenemos por una parte, el término

$$\theta''(t)\theta'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\theta'(t))^2$$

y por otra parte

$$\frac{g}{l} \operatorname{sen}(\theta(t))\theta'(t) = -\frac{g}{l} \frac{d}{dt} \cos(\theta(t)),$$

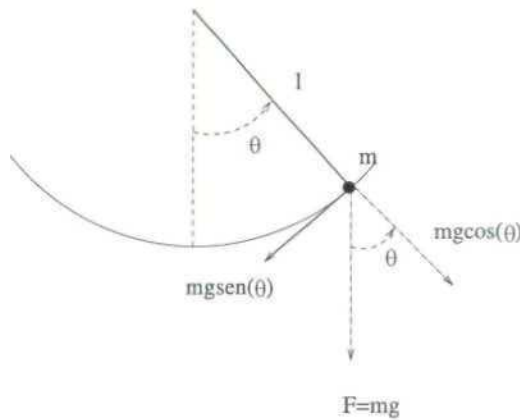


Figura 6. Fuerzas que actúan sobre el péndulo.

de donde deducimos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\theta'(t))^2 - \frac{g}{l} \cos(\theta(t)) \right) = 0.$$

Por tanto, la cantidad $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l} \cos(\theta(t))$ se conserva a lo largo del movimiento. Esto no es más que la ley de conservación de la energía, pues la energía total, energía cinética más potencial, viene dada por

$$E = \frac{1}{2} (l\theta')^2 - gl \cos(\theta).$$

En particular, tenemos que dada la posición inicial del péndulo θ_0 y asumiendo que la masa se deja caer del reposo, tendremos que para todo tiempo t ,

$$\frac{1}{2} (\theta'(t))^2 - \frac{g}{l} \cos(\theta(t)) = -\frac{g}{l} \cos(\theta_0)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{1}{2} (\theta'(t))^2 = \frac{g}{l} (\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)) \quad (2.1)$$

En particular, puesto que $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 \geq 0$, tendremos que $\cos(\theta(t)) \geq \cos(\theta_0)$, lo que implica que siempre tendremos que $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$.

Una de las características importantes del péndulo es el periodo de oscilación $T(\theta_0)$, es decir, el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$ y

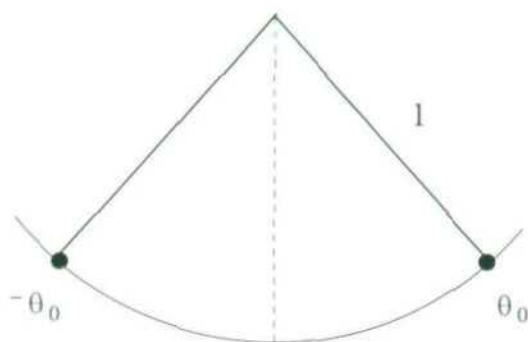


Figura 7. Recorrido del péndulo.

volver de nuevo a θ_0 . Obviamente, por simetría, este tiempo es el doble que el que toma en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$. Mientras el péndulo va desde θ_0 hasta $-\theta_0$, tendremos que $\theta'(t) < 0$. Despejando de la última ecuación obtenemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

Separando las variables e integrando, obtenemos que si τ es el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$, entonces

$$-\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = \int_0^{\tau} dt = \tau.$$

Por tanto, el período viene dado por

$$\begin{aligned} T(\theta_0) = 2\tau &= 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} \\ &= 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \end{aligned}$$

Tras un cambio de variable, el valor de $T(\theta_0)$ se puede expresar por la integral

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}}$$

donde $k = \sin(\theta_0/2)$. La integral de la última expresión se conoce como integral elíptica de primera especie.

Se sabe que $T(\theta_0)$ realmente depende de θ_0 . De hecho, la gráfica de $T(\theta_0)$ es como la de la figura 8. Observese que para oscilaciones

pequeñas, es decir, para θ_0 próximo a 0, el período de oscilación es aproximadamente $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

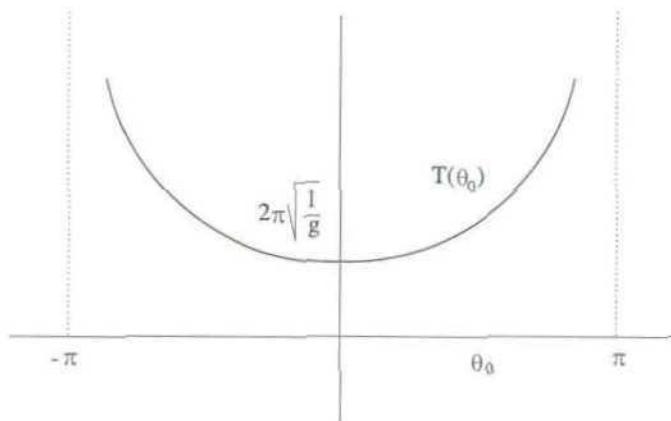


Figura 8. Período del péndulo en función del ángulo inicial.

2.2. El péndulo linealizado

A diferencia de las oscilaciones de la ecuación del péndulo estudiada, las del péndulo linealizado sí que tienen un período constante. Si asumimos que la amplitud de la oscilación es pequeña, es decir, θ_0 es muy cercano a cero y, por tanto, $\theta(t)$ estará también cercano a cero, podemos aproximar $\sin(\theta)$ por θ y la ecuación se transforma en

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \quad (2.2)$$

que es la ecuación del péndulo linealizado.

Con un análisis similar al hecho para el péndulo (multiplicando la ecuación por θ' y expresando $\theta''\theta' = \frac{1}{2}((\theta')^2)'$ y $\theta\theta' = \frac{1}{2}(\theta^2)'$), obtenemos que la cantidad

$$V = \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2$$

se conserva y, por tanto,

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2 = \frac{g}{2l}\theta_0^2$$

El período en este caso se expresa como

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

que es obviamente independiente del ángulo inicial. Este resultado está diciendo que en una primera aproximación y para desplazamientos angulares pequeños, el periodo de las oscilaciones del péndulo se pueden considerar independientes del desplazamiento original y sólo depende de la longitud del péndulo.

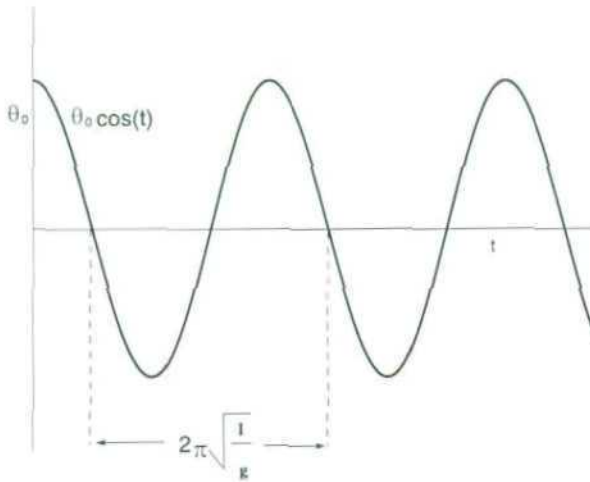


Figura 9. Solución del péndulo linealizado.

De hecho las soluciones de (2.2) se pueden obtener directamente y vienen dadas por

$$\theta(t) = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + B \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Las constantes A y B vienen determinadas por las condiciones iniciales. Por ejemplo, si el péndulo parte del reposo ($\theta'(0) = 0$) y desde un ángulo $\theta(0) = \theta_0$, la solución viene dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

2.3. Construcción de relojes

Los resultados de las secciones anteriores no son suficientes para el diseño de un mecanismo que tenga oscilaciones independientes del desplazamiento angular original, base en la que se asienta la construcción de los relojes de péndulo. Por tanto, cabe preguntarse, y así se lo pregunto Huygens en el siglo XVII, qué perfil debería tener una curva $y = f(x)$

para que las oscilaciones producidas por un objeto al deslizarse a lo largo de ella no dependiesen de la posición inicial del objeto.

Ya que el movimiento de una masa acoplada a un péndulo es equivalente al movimiento de una masa que se desliza a lo largo de una curva circular, es evidente que la función que se está buscando $y = f(x)$ no es circular.

Resulta esperable que la función $y = f(x)$ tenga un perfil como el de la figura 10. En particular, debe ser simétrica con respecto del eje vertical, convexa, y asumiremos que es tal que $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x \neq 0$.

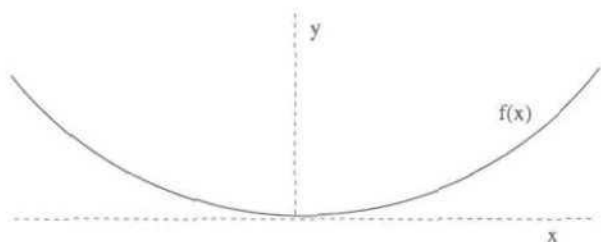


Figura 10. Perfil de la función $f(x)$.

Para el movimiento de un objeto deslizándose a lo largo de esta curva también se tiene un principio de conservación de la energía, que viene dado como es usual por la suma de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial mgh , donde v es la velocidad de la masa y h la altura a la que se encuentra. Si el objeto se mueve de acuerdo a la curva $(x(t), y(t))$ donde obviamente $y(t) = f(x(t))$, tenemos que la velocidad v verifica

$$v(t)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (1 + f'(x(t))^2)(x'(t))^2$$

y obviamente

$$mgh = mgf(x(t)).$$

Por tanto, tenemos que si originalmente el objeto se deja deslizar del reposo desde la posición $(x_0, f(x_0))$, tendremos, en virtud de la ley de la conservación de la energía, que

$$\frac{1}{2}m(1 + f'(x(t))^2)(x'(t))^2 + mgf(x(t)) = mgf(x_0).$$

Por un análisis similar al realizado anteriormente tendremos que

$$(x'(t))^2 = 2g \frac{f(x_0) - f(x(t))}{1 + f'(x(t))^2},$$

que implica

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2g} \frac{\sqrt{f(x_0) - f(x(t))}}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}$$

y separando variables e integrando, el tiempo τ que tarda en ir desde $(x_0, f(x_0))$ hasta $(-x_0, f(-x_0))$ viene dado por

$$\tau = -\sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x_0) - f(x)}} dx = 2\sqrt{\frac{1}{2g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x_0) - f(x)}} dx$$

Por tanto, el período, es decir, el tiempo que tarda en ir desde $(x_0, f(x_0))$ hasta $(-x_0, f(-x_0))$ y volver a $(x_0, f(x_0))$ viene dado por

$$T(x_0) = 2\tau = 2\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x_0) - f(x)}} dx$$

Se trata, por tanto, de obtener una función f tal que la integral no dependa de x_0 . Observamos primero que el término $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ es familiar y está relacionado con la longitud de arco. Por tanto, hagamos el siguiente cambio de variable:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(z)^2} dz \quad (2.3)$$

Este cambio tiene un sentido geométrico claro: estamos reparametrizando la función y el problema en términos de la longitud de arco de la curva $(x, f(x))$, medida desde $x = 0$, con el convenio que para x positivos, la longitud de arco es positiva y para x negativos, la longitud de arco es negativa. Denotemos por $x(s)$ la función inversa de $s(x)$. Derivando la expresión (2.3) con respecto de x , obtenemos que $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Cambiando la variable en la integral obtenemos que

$$T(x_0) = 2\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{s(x_0)} \frac{ds}{\sqrt{f(x_0) - f(x(s))}}$$

En vista de lo establecido para el péndulo linealizado si la función $f(x(s)) = \alpha s^2$ tendremos que

$$T(x_0) = \sqrt{\frac{8}{g\alpha}} \int_0^{s(x_0)} \frac{ds}{\sqrt{s(x_0)^2 - s^2}} = \pi \sqrt{\frac{2}{g\alpha}}$$

y es independiente de la posición inicial x_0 .

Por tanto, se está buscando una función f tal que, en función de su longitud de arco, es una parábola, ver figura 11.

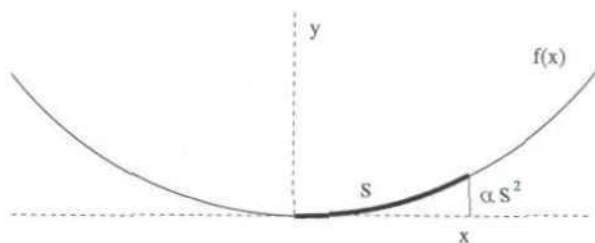


Figura 11. Longitud de arco de f .

Este problema fue resuelto utilizando las herramientas del Cálculo por Jacques Bernoulli en 1690. La demostración se basa en reescribir la ecuación $f(x) = \alpha s^2$ como una ecuación diferencial. La ecuación es equivalente a $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\alpha} s$. Derivando con respecto de x obtenemos

$$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\alpha} \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos se llega a

$$(f'(x))^2 = \frac{4\alpha f(x)}{1 - 4\alpha f(x)}$$

que implica

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{\frac{4\alpha f(x)}{1 - 4\alpha f(x)}}$$

que es una ecuación de variables separables y, por tanto,

$$\int \sqrt{\frac{1 - 4\alpha f}{4\alpha f}} df = x.$$

Sustituyendo $4\alpha f = \sin^2(z)$, $2\alpha df = \sin(z) \cos(z) dz$, obtenemos

$$\int \cos^2(z) dz = 2\alpha x$$

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin(2z) + C = 2\alpha x$$

Por tanto, la solución viene dada en coordenadas paramétricas por

$$x = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2z) \right) + C$$

$$f = \frac{1}{4\alpha} \operatorname{sen}^2(z) = \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2z) \right)$$

Como $f(0) = 0$ tendremos que $C = 0$.

Haciendo el cambio de variable $2z = \theta$, obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8\alpha} (\theta + \operatorname{sen}(\theta)) \\ f = \frac{1}{8\alpha} (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

que es la ecuación paramétrica de una cicloide invertida, ver figura 12.



Figura 12. Cicloide invertida.

El nombre cicloide fue dado por Galileo a esta curva. Para obtener una cicloide, fijamos un punto P de una circunferencia de radio r y seguimos la trayectoria de este punto cuando la circunferencia rueda a lo largo de una línea recta.

Esta curva fue muy estudiada por Galileo, que intentó calcular el área debajo de la curva y la longitud de un arco de cicloide. Esta curva tiene propiedades geométricas y físicas interesantes. Ya hemos visto que las oscilaciones de una masa que se desliza sobre ella tienen el mismo periodo, independientemente del punto inicial desde donde parte la oscilación, hecho que fue probado por Huygens. Esta es la propiedad isócrona.

También se probó que esta curva tiene la propiedad braquistócrona: si tenemos dos puntos a distinta altura y nos preguntamos, cuál es la curva que une esos dos puntos con la propiedad que un objeto que se desliza sobre la curva, toma el menor tiempo posible en ir desde el punto más alto al más bajo con tan solo la acción de la gravedad, esta curva es

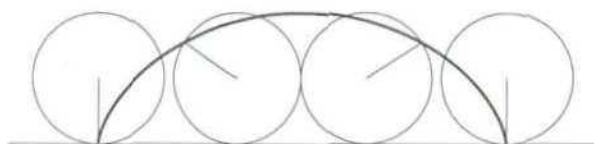


Figura 13. La cicloide.

una cicloide también. Esto lo probaron Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli y l'Hôpital.

A partir de la propiedad isócrona de la cicloide, Huygens propuso la construcción de relojes de acuerdo al diseño de la Figura 14.



Figura 14. Reloj de péndulo de Huygens.

2.4. Movimiento Planetario

El campo de investigación más activo durante los siglos XVI-XVIII es, sin lugar a duda, el de la astronomía. A partir del establecimiento por Copérnico de la teoría heliocéntrica y con la posterior defensa de esta teoría por parte de Galileo, posición que le valió no pocos problemas con la Iglesia, los científicos se centraron en estudiar y deducir las órbitas planetarias. En base a los innumerables datos experimentales del astrónomo Tycho Brahe, principalmente sobre la órbita de Marte, Kepler en sus trabajos *Astronomía Nueva* (1609) y *La Armonía del Mundo* (1619) llegó a enunciar sus tres leyes fundamentales sobre el movimiento de los planetas:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas ocupando el Sol uno de los focos de la elipse.
2. El área barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual.
3. El cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo de los semiejes mayores de la elipse.

Estas tres leyes son totalmente empíricas. Newton en su obra *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, dedujo estas tres leyes a partir de las Leyes de la Mecánica y de la ley de Gravitación Universal que él mismo había enunciado. Fue un primer logro de la Mecánica.

El interés por el estudio del movimiento planetario, en especial por el de la Luna, viene motivado entre otros aspectos por la navegación. El método usual para determinar la posición de un barco en el mar dependía de un conocimiento exacto (con un error de menos de 15" de arco) de la posición de la Luna en cada instante en relación a un meridiano dado, que en aquella época se fijó en el meridiano de Greenwich. En aquella época, la precisión era mucho peor. Esto provocó el interés por estudiar de forma exacta la órbita de la Luna.

Newton, en sus *Principia*, resolvió ya el movimiento de dos cuerpos, es decir, el movimiento de un planeta alrededor del Sol sin considerar las perturbaciones que otros planetas puedan ejercer sobre el movimiento de éste. De esta forma, consideró el movimiento bajo la acción gravitatoria del Sol de una masa puntual, es decir, despreciando la acción que el planeta pueda ejercer sobre el Sol debido a que su masa es muy pequeña en comparación con la del Sol. También Newton abordó el problema fundamental de los tres cuerpos, es decir el del sistema Sol-Tierra-Luna. Este es el comienzo de un itinerario científico que llega incluso a nuestros días: el problema general de tres cuerpos es aún en nuestros días un problema que desafía las mentes más lúcidas.

Paradójicamente, a pesar de ser Newton el padre de la Mecánica y uno de los creadores del Cálculo, la mayoría de las demostraciones realizadas en sus obras son de índole geométrica. No obstante, en el siglo XVIII y en base a esfuerzos considerables de matemáticos de la talla de Euler, Lagrange, Laplace, etc., se instauró la Mecánica Analítica que utiliza las herramientas del cálculo para el análisis de los problemas de Mecánica.

Veamos una demostración sencilla del movimiento planetario. Consideremos que el Sol ocupa el origen de coordenadas y que tenemos una masa m que se mueve bajo la acción gravitatoria de éste. Denotamos por $\vec{r}(t)$ el vector posición del planeta a tiempo t , es decir, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Por las leyes de la mecánica, la fuerza que actúa sobre la masa m es responsable de la aceleración del cuerpo, que viene dada por $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Es decir,

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Pero la fuerza que actúa sobre la masa es tan solo la acción gravitatoria del Sol, que es proporcional al producto de las masas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y va dirigida hacia el Sol, es decir,

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

donde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que representa la distancia de la masa al Sol. Obsérvese también que $\frac{\vec{r}}{r}$ representa un vector unitario en la dirección de \vec{r} .

Por tanto, la ecuación que rige el comportamiento de m viene dada por

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

que, simplificando, se reduce a

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} \quad (2.4)$$

Esta ecuación consta en realidad de tres ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -GM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -GM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -GM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación (2.4) por \vec{r} , es decir,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times \vec{r} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad (2.5)$$

y observando que $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \times \vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right)$, se tiene que $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}$ debe ser constante a lo largo de la trayectoria.

Esto se traduce en que la órbita del planeta está siempre en un mismo plano, que podemos suponer que es el plano (x, y) . Por tanto, reducimos el número de ecuaciones a dos o, similarmente, podemos considerar que $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Es necesario también especificar las condiciones iniciales del planeta. Supongamos, por tanto, que el planeta inicialmente está en la posición $\vec{r}(0) = (a, 0)$ y su velocidad inicial viene dada por $\dot{\vec{r}}(0) = (0, v)$, ver Figura 15.

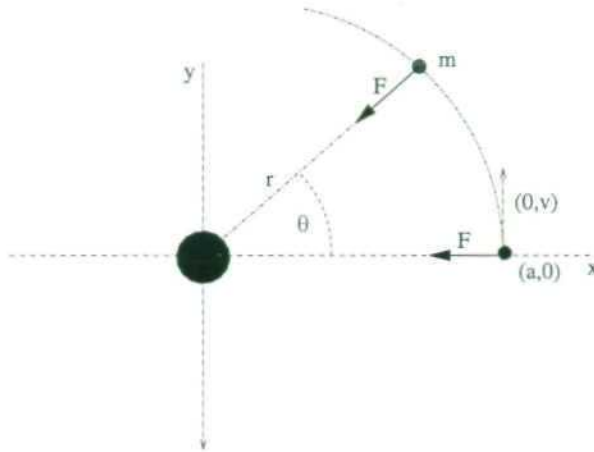


Figura 15. Movimiento Planetario.

Pasando a coordenadas polares, de forma que $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y escribiendo las ecuaciones en estas dos coordenadas, es decir, describiendo el movimiento del planeta como $(r(t), \theta(t))$, tenemos que $\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta}$, $\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta}$. Derivando de nuevo estas expresiones, obtenemos

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2) \cos(\theta) - (2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta}) \sin(\theta),$$

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2) \sin(\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta}) \cos(\theta).$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones, se obtiene,

$$(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2) \cos(\theta) - (2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta}) \sin(\theta) = -GM \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

$$(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2) \sin(\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta}) \cos(\theta) = -GM \frac{\sin(\theta)}{r^2}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\cos(\theta)$, la segunda ecuación por $\sin(\theta)$ y sumando ambas, obtenemos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.6)$$

Multiplicando ahora la primera ecuación por $\sin(\theta)$, la segunda ecuación por $\cos(\theta)$ y restando ambas obtenemos

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (2.7)$$

Las dos ecuaciones (2.6) y (2.7) son equivalentes a las originales y describen todo el movimiento planetario. Obsérvese, además, que las condiciones iniciales se pueden escribir como $(r(0), \theta(0)) = (a, 0)$ y $(\dot{r}(0), \dot{\theta}(0)) = (0, v/a)$.

La segunda ecuación se puede expresar como $\frac{d}{dt}(r^2 \frac{d\theta}{dt}) = 0$, lo que equivale a

$$r^2 \dot{\theta} = C, \quad (2.8)$$

donde C es una constante independiente de t , que se puede calcular a partir de las condiciones iniciales. De hecho, $C = a^2 \frac{v}{a} = av$. Es decir, a lo largo de la trayectoria del planeta, la cantidad $r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt}$ se mantiene constante. En particular, para dos instantes de tiempo $t_1 < t_2$, tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} dt = av(t_2 - t_1)$$

Pero la cantidad $\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt} dt$ tiene un significado claro y es el área barrida por el radio vector del planeta desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 . Se obtiene, por tanto, la ley de las áreas de Kepler: el área barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual.

A modo de anécdota, Kepler utilizó la siguiente fórmula para el área barrida por un planeta:

$$A = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} r ds$$

donde s es la longitud de arco.

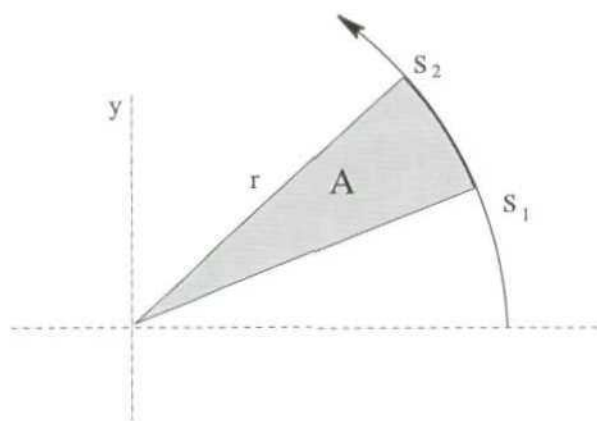


Figura 16. Área barrida.

Esta fórmula es incorrecta pues se puede ver que si $x = r(\theta) \cos(\theta)$, $y = r(\theta) \sin(\theta)$, entonces

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

De forma que la fórmula de Kepler es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

que no coincide con la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta.$$

Afortunadamente, Kepler cometió otro error que se autocanceló con el primero y así llegó a la formulación correcta de la ley de las áreas. Supuso que la velocidad de un planeta en un instante dado era inversamente proporcional a la distancia al Sol, cuando, de hecho (y así se puede ver a través de las ecuaciones del movimiento planetario), es inversamente proporcional a la distancia del Sol a la recta tangente de la órbita del planeta, ver Figura 17.

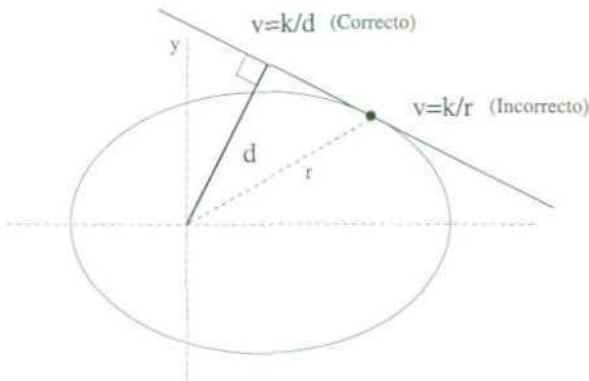


Figura 17. Velocidad del planeta.

Volviendo a nuestras ecuaciones y despejando $\dot{\theta}$ de (2.8) y sustituyendo en (2.6), obtenemos

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{a^2 v^2}{r^3} = 0 \quad (2.9)$$

que es una ecuación de segundo orden en r . La variable θ se ha eliminado.

La presencia de términos de la forma $1/r$ en la ecuación sugiere el cambio de variable, $z = 1/r$. Se tiene,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \frac{av}{r^2} = -av \frac{dz}{d\theta}$$

en donde hemos utilizado la ecuación (2.8). Similarmente se puede obtener

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -av \frac{d}{dt} \frac{dz}{d\theta} = -av \frac{dz^2}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -(av)^2 z^2 \frac{dz^2}{d\theta^2}$$

y sustituyendo en (2.9), obtenemos que

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{GM}{(av)^2} \quad (2.10)$$

Si ahora denotamos por $w = z - \frac{GM}{(av)^2}$ tenemos que

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0$$

que es la ecuación del péndulo linealizado (ver Sección 2.2) y cuya solución general viene dada por

$$w(\theta) = A \operatorname{sen}(\theta) + B \operatorname{cos}(\theta)$$

donde A y B se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Puesto que $w = \frac{1}{r} - \frac{GM}{(av)^2}$, deshaciendo el cambio de variable y utilizando las condiciones iniciales, podemos obtener que

$$r(\theta) = \frac{a^2 v^2 / GM}{1 + e \operatorname{cos}(\theta)}$$

donde $e = |av^2 / GM - 1|$.

Pero es conocido que esta es la ecuación de una cónica con excentricidad e . De forma que

- i) si $e = 0$ es un círculo
- ii) si $0 < e < 1$ es una elipse
- iii) si $e = 1$ es una parábola
- iv) si $e > 1$ es una hipérbola.

De esta forma se prueba que las órbitas de los planetas son elipses. Además, del análisis matemático hecho, se desprende la posibilidad de la existencia de otros cuerpos sujetos a la acción gravitatoria del Sol siguiendo órbitas que describen parábolas o hipérbolas. Este hecho ha sido posteriormente corroborado por la observación.

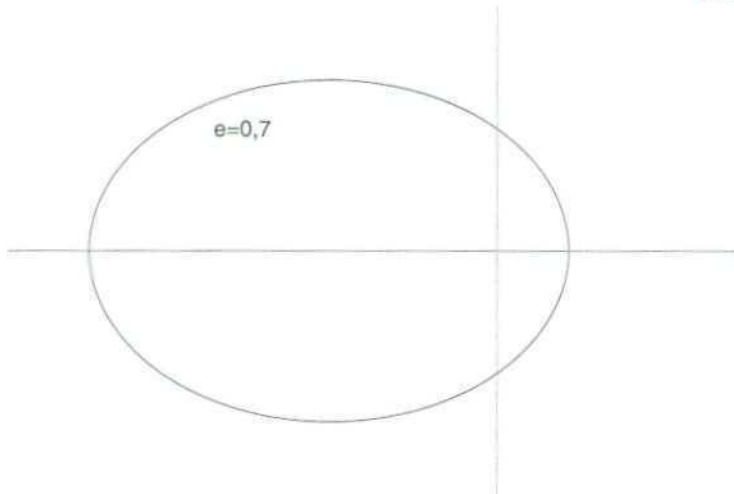


Figura 18. Elipse.

3. DINÁMICA DE POBLACIONES

La ecología cuantitativa se preocupa por entender los mecanismos de interacción de las especies entre ellas mismas y con el medio ambiente. El objeto de estudio principal de esta rama es la evolución de las poblaciones. Por ejemplo, dos especies una depredadora y otra presa en el mismo hábitat y aislados del resto de poblaciones tiene una dinámica y ésta se puede expresar en términos de ecuaciones diferenciales.

Históricamente, la modelización de los problemas ecológicos se inició mucho más tarde que la de los problemas físicos. Si bien ya Leonhard Euler (1707-1783) se ocupó de aspectos demográficos de la población humana y conocía el modelo de crecimiento exponencial y, posteriormente, Thomas Malthus (1766-1834) se preocupa de entender cómo las limitaciones del medio impiden el crecimiento sin límite de la población, llegando a modelos de crecimiento logísticos, se puede situar el desarrollo de esta rama en los trabajos pioneros de Vito Volterra (1860-1940) y Alfred Lotka (1880-1949) sobre modelos depredador-presa. Prácticamente, el primer libro de ecología matemática data de 1925, *Elements of Physical Biology* y está escrito por A. Lotka. No obstante, ésta es, actualmente, una de las ramas de mayor desarrollo dentro de lo que es la modelización matemática y ecuaciones diferenciales y se está convirtiendo en toda una fuente de problemas nuevos y distintos con una dinámica y fenomenología particular.

En esta sección vamos a analizar algunos de los modelos poblacio-

nales más sencillos y veremos cómo el Cálculo nos conduce de forma natural a las ecuaciones que gobiernan este tipo de procesos.

3.1. Crecimiento exponencial

Consideremos primero un caso sencillo en donde una población está en un medio natural con suficientes recursos es decir “comida ilimitada para todos”. Podemos pensar en una población de bacterias en un cultivo. Vamos a denotar por $x(t)$ el número de habitantes de esta especie y queremos saber cuál es esta función. Estrictamente hablando, esta función no puede ser una función continua, pues el número de individuos es siempre un número natural y en principio no se puede hablar de una población de 10,52 individuos. No obstante, si la población es grande y tomamos como unidad de población a 10^3 o 10^6 habitantes, entonces tiene sentido hablar de unidades de población con tres o seis cifras decimales y, por extensión, podemos suponer que la función x toma valores en los números reales. Es más, es esperable que la función x sea continua, en el sentido de que el número de habitantes de una población no presenta saltos bruscos en el tiempo (estamos eliminando la posibilidad de catástrofes naturales inmediatas, etc.).

Si consideramos ahora un instante de tiempo dado t y un tiempo muy pequeño Δt , vamos a estudiar cómo varía la población en el intervalo de tiempo que va desde t hasta $t + \Delta t$. El sentido común nos dice que la cantidad de habitantes de la población en el tiempo $t + \Delta t$ coincide con la cantidad de habitantes en el tiempo t más los nuevos habitantes creados en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ menos los habitantes muertos en el intervalo $(t, t + \Delta t)$. Es decir,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \left\{ \begin{array}{l} \text{habitantes nacidos} \\ \text{en } (t, t + \Delta t) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{habitantes muertos} \\ \text{en } (t, t + \Delta t) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Las leyes de la ecología nos dicen ahora que la cantidad de habitantes nacidos en un intervalo de tiempo pequeño Δt es proporcional al número de habitantes presentes en ese instante de tiempo en la población, $x(t)$, por el intervalo de tiempo transcurrido, Δt . Esto está diciendo que si en una población de 10000 habitantes se dan tres nacimientos de media en una hora, entonces, en dos horas habrá seis nacimientos y si la población es de 30000 habitantes, habrá nueve nacimientos de media en una hora. La constante de proporcionalidad, que llamaremos α , mide la cantidad de individuos nacidos por unidad de tiempo y por unidad de habitantes y nos referiremos a ella como la tasa de natalidad. Por tanto, podemos

expresar

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{habitantes nacidos} \\ \text{en } (t, t + \Delta t) \end{array} \right\} = \alpha x(t) \Delta t \quad (3.2)$$

De forma similar, podemos argumentar con el número de habitantes muertos en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. En este caso la constante de proporcionalidad, que llamaremos β , mide la cantidad de individuos muertos por unidad de tiempo y por unidad de habitantes y nos referiremos a ella como la tasa de mortalidad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{habitantes muertos} \\ \text{en } (t, t + \Delta t) \end{array} \right\} = \beta x(t) \Delta t \quad (3.3)$$

De aquí obtenemos nuestra ecuación

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \alpha x(t) \Delta t - \beta x(t) \Delta t$$

de forma que agrupando términos, obtenemos

$$x(t + \Delta t) - x(t) = (\alpha - \beta)x(t) \Delta t$$

En el lenguaje del Cálculo infinitesimal, $x(t + \Delta t) - x(t)$ es el incremento infinitesimal de la población x , que representaremos por Δx , obteniendo

$$\Delta x = (\alpha - \beta)x \Delta t \quad (3.4)$$

Vemos cómo de forma natural, el estudio de la evolución de una población siguiendo las leyes de la ecología nos lleva a una relación entre los “incrementos infinitesimales” de la población y del tiempo.

En el lenguaje moderno de la matemática lo escribiríamos $x'(t) = (\alpha - \beta)x(t)$, que es el ejemplo más sencillo de lo que hoy llamamos Ecuación Diferencial Ordinaria. La diferencia $\alpha - \beta$ es la tasa de crecimiento de la población que llamaremos a y puede ser tanto positiva como negativa dependiendo del balance entre la tasa de natalidad y la de mortalidad. La solución es clara y viene dada por la función exponencial, de forma que $x(t) = x(0)e^{at}$. Si $a > 0$, la población crecerá a un ritmo exponencial y si $a < 0$, la población se extinguirá exponencialmente rápido.

Obviamente, el modelo que hemos desarrollado es bastante sencillo y resulta natural considerar otros aspectos importantes que se dan en la dinámica de una población, como por ejemplo la posibilidad de que haya fenómenos migratorios (tanto de emigración como de inmigración), que

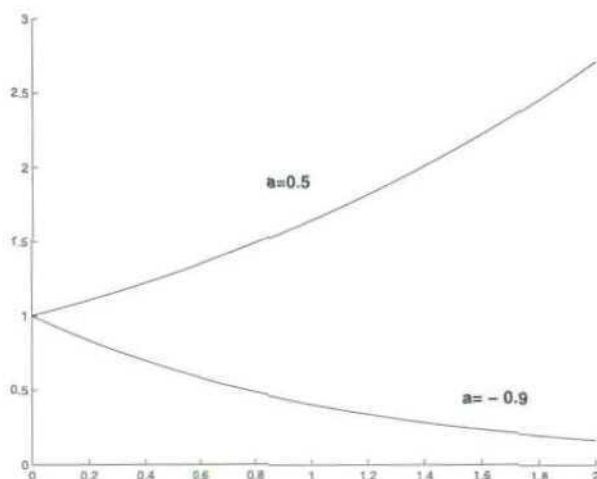


Figura 19. Crecimiento y decaimiento exponencial.

la tasa de crecimiento no sea constante y que pueda depender del tiempo o incluso de la población, que coexistan varias especies en régimen de competencia.

Vamos a ver cómo obtendríamos las ecuaciones considerando algunos de estos nuevos fenómenos.

3.2. Migraciones

Consideremos que nuestra población está bajo un fenómeno migratorio de forma que hay un flujo de individuos que llegan a la población del exterior a un ritmo de b individuos por unidad de tiempo y este flujo migratorio puede ser positivo (inmigración) o negativo (emigración). Asumiremos, además, que en el momento en que individuos llegan desde fuera, éstos se incorporan a la población que hemos denominado por x y siguen las mismas leyes de crecimiento que x , es decir, no tenemos dos especies diferenciadas (la local y la inmigrada) obedeciendo distintas leyes de evolución. Para incluir este fenómeno en el modelo matemático anterior, volvemos al balance dado por (3.1) o a su equivalente (3.4) y observamos que en el incremento de población en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ hay que incluir el debido al flujo dado por la migración:

$$\Delta x = (\alpha - \beta)x\Delta t + \left\{ \begin{array}{l} \text{habitantes inmigrados} \\ \text{en } (t, t + \Delta t) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Obviamente, el número de habitantes inmigrados en el intervalo

$(t, t + \Delta t)$ es $b\Delta t$. Obtenemos, por tanto, que

$$\Delta x = (\alpha - \beta)x\Delta t + b\Delta t \quad (3.6)$$

que de nuevo se escribe en lenguaje moderno como

$$x'(t) = ax(t) + b$$

y es lo que se denomina una ecuación diferencial ordinaria lineal y de coeficientes constantes.

3.3. Tasas de crecimiento y de migración variables

La hipótesis que hemos formulado sobre las tasas de crecimiento y de migración es que son constantes en el tiempo. Obviamente, la situación real dista bastante de esta hipótesis y resulta más natural asumir que la tasa de crecimiento depende del tiempo (por ejemplo, la tasa de crecimiento en España ha decrecido considerablemente en los últimos 25 años, llegando a estar ahora en torno al crecimiento cero, es decir, $a = 0$) y, por tanto, considerar a como una función del tiempo $a = a(t)$. De forma similar, la tasa de inmigración puede ser variable (no es difícil imaginar una inmigración estacional en virtud de la oferta de trabajo) y considerar $b = b(t)$. Repitiendo el argumento elaborado anteriormente y ya que éste se ha hecho en términos de “incrementos infinitesimales” podemos concluir que si la tasa de crecimiento de la población a tiempo t viene dado por la cantidad $a(t)$, el incremento poblacional en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ con Δt muy pequeño es de $a(t)x(t)\Delta t$. De forma similar se argumentaría para el sumando debido a la inmigración. Obtenemos, por tanto, la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

que es la expresión general de una ecuación diferencial ordinaria lineal (con coeficientes no necesariamente constantes). Ya en 1694, Leibniz sabía cómo resolver esta ecuación reduciéndola a una integral mediante un cambio de variable. Si multiplicamos la ecuación por el factor integrante $e^{\int a(t)dt}$, tendremos que

$$\frac{d}{dt} \left(x(t)e^{-\int a(t)dt} \right) = b(t)e^{-\int a(t)dt}$$

y mediante integración se obtiene

$$x(t) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt \right)$$

donde C es una constante arbitraria que se fija con las condiciones iniciales.

3.4. Recursos limitados

Los modelos de crecimiento exponencial $x'(t) = ax(t)$ son, en general, válidos para intervalos de tiempo pequeños. Por ejemplo, la tasa de crecimiento anual de la población humana en la década 1960-1970 se estimó en un 2%. También en 1965 se estimó la población del planeta en 3340 millones de habitantes. De forma que, midiendo el tiempo en años, tendremos que

$$x(t) = 3,34 \times 10^9 e^{0,02(t-1965)}$$

Esta ley significa que $x(1970) = 3,69 \times 10^9$, $x(1975) = 4,08 \times 10^9$, $x(1980) = 4,51 \times 10^9$ y $x(1985) = 4,98 \times 10^9$, mientras que los datos oficiales arrojan unas cifras de $3,70 \times 10^9$, $4,09 \times 10^9$, $4,45 \times 10^9$ y $4,85 \times 10^9$ respectivamente. Como se puede observar, la predicción dada por una ley exponencial es bastante ajustada a la realidad para el lapso de tiempo 1970-1985. No obstante, esta misma ley predice que $x(2100) = 50 \times 10^9$, lo que quiere decir que aproximadamente cada ser humano tendría un metro cuadrado de tierra firme para vivir.

Obviamente, no se puede esperar que el crecimiento de la población mundial se mantenga al mismo ritmo y siga la ley exponencial descrita. El planeta tiene recursos limitados y esto impone restricciones en las tasas de crecimiento.

Todo esto hace pensar que la magnitud de la tasa de crecimiento de una población tiene que ver con la capacidad o posibilidad de que un individuo nacido pueda subsistir en el medio en el que está desarrollándose. Si las condiciones del medio (comida, sanidad, etc.) son propicias es de esperar que la población aumente y si son adversas cabe prever que no crezca tanto o que incluso el tamaño poblacional disminuya. En este sentido, la relación entre el tamaño poblacional y los recursos del medio en donde vive la población influye de forma notoria en la tasa de crecimiento, es decir, en la tendencia a crecer o decrecer de la población. En el caso en que los recursos del medio son limitados se espera un comportamiento como sigue: si el número de habitantes es "pequeño" habrá suficientes recursos para todos y la tasa de crecimiento será positiva y la población tenderá a aumentar. A medida que la población aumenta habrá menos recursos para todos y es esperable que la tasa de crecimiento sea menor, llegando al punto en que si la población pasa un cierto valor (la capacidad del medio), entonces, la tasa de crecimiento se convertirá en negativa. Si especificamos por M el número de habitantes que puede soportar el medio, podemos modelar la tasa de crecimiento de la población (que dependerá en este caso de la cantidad de población

x) por una función que para valores pequeños de x , es muy cercana a $a_0 > 0$, para valores de x entre 0 y M , es positiva y que para $x > M$, es negativa. Tomando la función $a(x)$ más sencilla que verifica estas condiciones, la función lineal, obtenemos que

$$a(x) = a_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

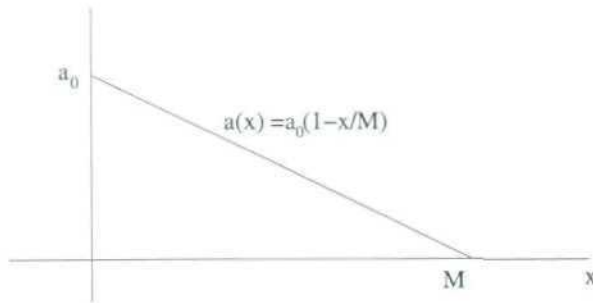


Figura 20. Tasa de crecimiento con recursos limitados.

Si no consideramos ningún fenómeno migratorio en la población, obtenemos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = a_0(1 - x/M)x$$

que es conocida como la *ecuación logística*, que rige el comportamiento de una población bajo el modelo logístico.

Es el primer ejemplo y quizás el más importante de ecuaciones de variables separables. También Leibniz descubrió la técnica para su resolución, hecho que comunicó a Huygens en una carta en 1691. Las variables se separan.

$$\frac{dx}{(1 - x/M)x} = a_0 dt$$

y se integra ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{dx}{(1 - x/M)x} = \int a_0 dt$$

Después de unos cálculos sencillos se obtiene que si $x_0 \geq 0$ es la población inicial,

$$x(t) = \frac{Mx_0}{(M - x_0)e^{-at} + x_0}$$

Se observa que todas las soluciones tienden a M para tiempos grandes. Si inicialmente $x_0 < M$, la población tenderá de forma creciente a la asíntota $x = M$ y si $x_0 > M$, la población decrecerá hacia M . Vemos de esta forma cómo una capacidad limitada del medio curva las soluciones, que ya no crecen de forma exponencial.

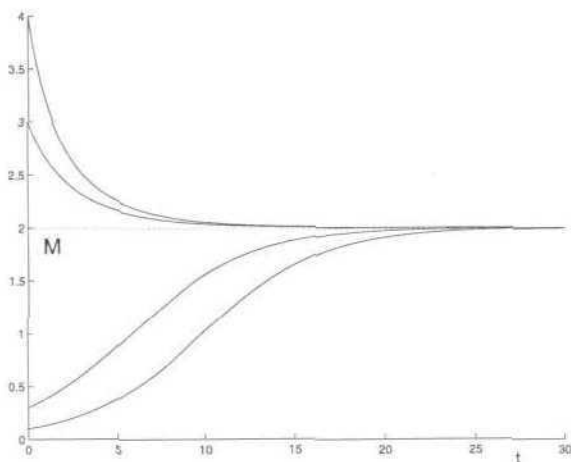


Figura 21. Soluciones de la ecuación logística.

Utilizando el modelo logístico y con datos de los censos de 1790, 1850 y 1910, Pearl y Reed llegaron a la siguiente ley de crecimiento poblacional para Estados Unidos:

$$x(t) = \frac{197273000}{1 + e^{-0,03134(t-1913,25)}}$$

La fiabilidad de este modelo se puede deducir de la siguiente tabla:

año	Real	Predicha
1790	3929	3929
1800	5308	5336
1810	7240	7228
1820	9638	9757
1830	12866	13109
1840	17069	17506
---	---	---
1930	122775	123124
1940	131669	136653
1950	150697	149053

Obviamente se observa un buen ajuste entre los valores reales y los predichos en un lapso de tiempo que va desde 1790 hasta 1950.

3.5. Modelo depredador-presa

Consideramos ahora un hábitat en donde coexisten dos especies que interaccionan entre ellas. Por una parte, tenemos la especie P (la presa: conejos) y que en ausencia de depredadores, es capaz de crecer de forma ilimitada a una tasa de crecimiento $a > 0$ (los conejos se alimentan de hierba y en un ambiente sin depredadores y con recursos ilimitados, crecerá). Por otra parte, tenemos la otra especie D (depredador: zorros) que en ausencia de presa y, por tanto, de comida, decrece con una tasa negativa $-b$. Es decir,

$$P'(t) = aP(t), \quad \text{si } D = 0$$

$$D'(t) = -bD(t), \quad \text{si } P = 0$$

Pero, obviamente, los zorros se comen a los conejos y, por tanto, la población de conejos se verá mermada en presencia de zorros y viceversa, la población de zorros se verá aumentada en presencia de conejos. Esta ley explica la interacción existente entre ambas especies y nos da pistas para encontrar los términos adecuados que modelicen esta situación. En términos de las tasas de crecimientos y mortalidad parece natural asumir que la tasa de mortalidad de la presa P debe ser proporcional al número de depredadores presentes, es decir, $-cD$, de forma que la tasa de crecimiento de P será $a - cD$. De forma similar, la tasa de nacimientos del depredador D será proporcional al número de presas, eP , de forma que la tasa de crecimiento de éste es de la forma $-b + eP$. Las ecuaciones quedan, por tanto,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = (a - cD(t))P(t) \\ \frac{dD}{dt} = (-b + eP(t))D(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

con a, b, c, e constantes positivas y características de las especies en cuestión.

Estas son las ecuaciones de Lotka-Volterra, que fueron propuestas por Volterra en el año 1926 para explicar las oscilaciones encontradas en el volumen de pesca de ciertas especies de peces en el mar adriático. También Lotka había estudiado estas ecuaciones para explicar las oscilaciones observadas en cierta reacción química.

Buscamos, por tanto, funciones $(P(t), D(t))$ que sean solución del sistema de ecuaciones (3.7). Obviamente, esta solución dependerá de la cantidad inicial presente de depredadores y presa, es decir, de $(P(0), D(0))$. No obstante, estudiando la ecuación, podemos obtener ya algunas soluciones particulares de ésta. Por ejemplo, las funciones constantes

$$P(t) \equiv \frac{b}{e}, \quad D(t) = \frac{a}{c}$$

son soluciones de la ecuación. Si las condiciones iniciales $(P(0), D(0)) = (b/e, a/c)$, entonces, el número de presas y de depredadores permanecerá constante. A estas soluciones se les denomina estacionarias o puntos de equilibrio. En ellas se da un balance tal que la tasa de crecimiento de ambas especies es cero y, por tanto, el número de habitantes de depredadores y presas permanece constante.

Para obtener la solución general, dividimos la primera ecuación por la segunda y obtenemos una ecuación en términos de las variables P y D .

$$\frac{dP}{dD} = \frac{a - cD}{D} \frac{P}{-b + eP}$$

que es de variables separables. Separando las variables, obtenemos

$$\frac{-b + eP}{P} dP = \frac{a - cD}{D} dD$$

e integrando

$$-b \log P + eP = a \log D - cD + K$$

donde K es una constante arbitraria. Por tanto,

$$eP + cD - \log(P^b D^a) = K \quad (3.8)$$

Obviamente, la constante K depende de las condiciones iniciales y debe ser $K = eP(0) + cD(0) - \log(P(0)^b D(0)^a)$. Por tanto, dado unos valores iniciales $(P(0), D(0))$ se calcula la constante K y la solución está sobre la curva dada por la ecuación (3.8).

Un análisis detallado de las curvas dadas por la ecuación (3.8) en el plano (P, D) revela que todas ellas son curvas cerradas alrededor del punto de equilibrio $(b/e, a/c)$, ver Figura 22.

Las funciones $P(t)$ y $D(t)$ son periódicas, con el mismo periodo pero con distinta fase, ver Figura 23.

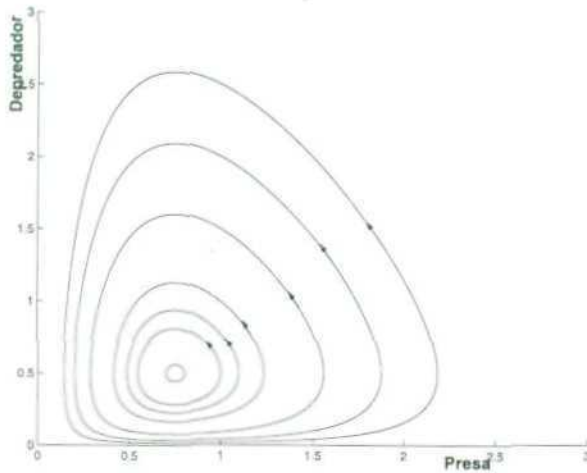


Figura 22. Trayectorias del sistema de Lotka-Volterra.

Esto es lo que intentaba explicar V. Volterra con su modelo aplicado a dos especies de peces distintas, una depredadora y la otra presa. Se observaba que el volumen de recogida de peces de ambas especies en el mar Adriático era periódico aunque la fase era distinta.

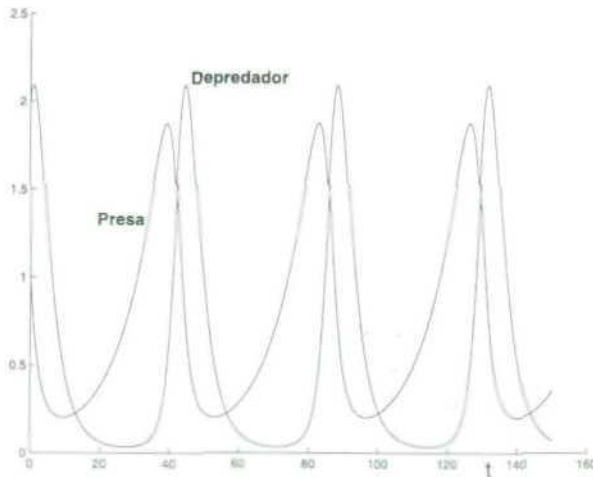


Figura 23. Gráfica de las soluciones del sistema de Lotka-Volterra.

4. SISTEMAS DINÁMICOS

A finales del siglo XIX ya era bastante evidente para los científicos de la época que el número de Ecuaciones Diferenciales para las que se puede encontrar explícitamente sus soluciones era bastante reducido. Al mismo tiempo, el ámbito de aplicación de las ecuaciones diferenciales crecía con rapidez y, por tanto, el número de ecuaciones obtenidas para modelizar fenómenos interesantes del mundo real iba en aumento. Eran necesarias técnicas y herramientas nuevas que permitieran analizar estas ecuaciones. Se empezaron a desarrollar a finales del siglo XIX, principalmente por Henri Poincaré (1854-1912), otros métodos que consistían en buscar información "cualitativa" de las soluciones o de algunas de ellas sin necesidad de resolver la ecuación.

Si denotamos por $r = (x, y)$ (o $r = (x, y, z)$), entonces, la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dt} = f(r) \quad (4.1)$$

se interpreta como un sistema dinámico: las soluciones $r(t)$ describen la evolución de un punto en el plano (o en el espacio, respectivamente). Por ejemplo, la ecuación del péndulo tratada en la sección 2, se puede reescribir mediante las variables $x = \theta$, $y = \theta'$ (x representa el desplazamiento angular de la masa del péndulo e y la velocidad angular) como

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

Nos preguntamos qué tipo de comportamiento interesante cabe esperar de las soluciones de la ecuación (4.1). He aquí una pequeña lista:

- **Soluciones estacionarias.** Como su propio nombre indica, una solución estacionaria (también llamada punto de equilibrio) será una solución que no evoluciona con el tiempo, es decir, que permanece constante a lo largo del tiempo. Obviamente, se debe verificar que $r'(t) \equiv 0$ y, por tanto, las soluciones de la ecuación $f(r) = 0$ nos darán el conjunto de soluciones estacionarias. Para el ejemplo de la ecuación (4.2) tendremos que $y = 0$, $x = k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2$, etcétera son los puntos estacionarios del sistema. Obsérvese que ya que x es el desplazamiento angular e y la velocidad angular, tenemos que los puntos estacionarios corresponden a las configuraciones del péndulo con la masa en el punto más bajo $(0, 0)$ y más alto $(\pi, 0)$.

- **Órbitas periódicas.** Una órbita periódica, de periodo $\tau \geq 0$, es una solución $r(t)$ que verifica que $r(t + \tau) = r(t)$ para todo t . Físicamente

esto quiere decir que la evolución de un estado vuelve al mismo estado inicial después de un tiempo τ . Para la ecuación del péndulo ya hemos visto que, debido a la conservación de la energía, si el péndulo parte de una posición $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ y con velocidad cero (es decir $(x, y) = (\theta_0, 0)$), después de un tiempo dado por (ver Sección 2.1)

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (\sin(\theta_0/2))^2 \sin^2(\phi)}}$$

el péndulo vuelve a su posición inicial. Esto pone de manifiesto que todas estas soluciones son periódicas. De hecho, no es difícil obtener las curvas $(x(t), y(t))$ que corresponden a estas soluciones periódicas. De la ley de conservación de la energía dada por la ecuación (2.1) obtenemos que

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{g}{l}(\cos(x) - \cos(\theta_0))$$

de forma que

$$y = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(x) - \cos(\theta_0))}$$

cuyas gráficas son las de la Figura 24, donde hemos indicado las flechas para saber en la dirección que va la solución a medida que avanza el tiempo.

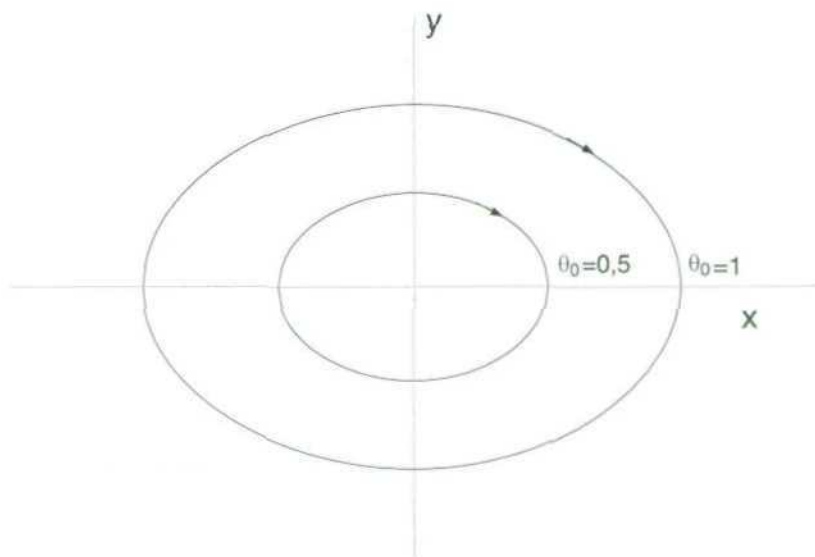


Figura 24. Gráfica de las curvas $(x(t), y(t))$ para $\theta_0 = 1$ y $\theta_0 = 0,5$.

• Órbitas que “salen” de un punto de equilibrio y “llegan” al mismo punto de equilibrio (**homoclínicas**) o a otro punto de equilibrio (**heteroclínicas**). Ponemos entre comillas las palabras “salen” y “llegan” pues el significado es el siguiente: una solución $r(t)$ sale de un punto de equilibrio p si $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = p$ y llega a un punto de equilibrio q si $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = q$. Para la ecuación del péndulo se puede probar que existen dos órbitas heteroclínicas: una que sale de $(\pi, 0)$ y llega a $(-\pi, 0)$ y otra que sale de $(-\pi, 0)$ y llega a $(\pi, 0)$. Estas dos órbitas vienen dadas por la ecuación

$$y = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos(x) + 1)}$$

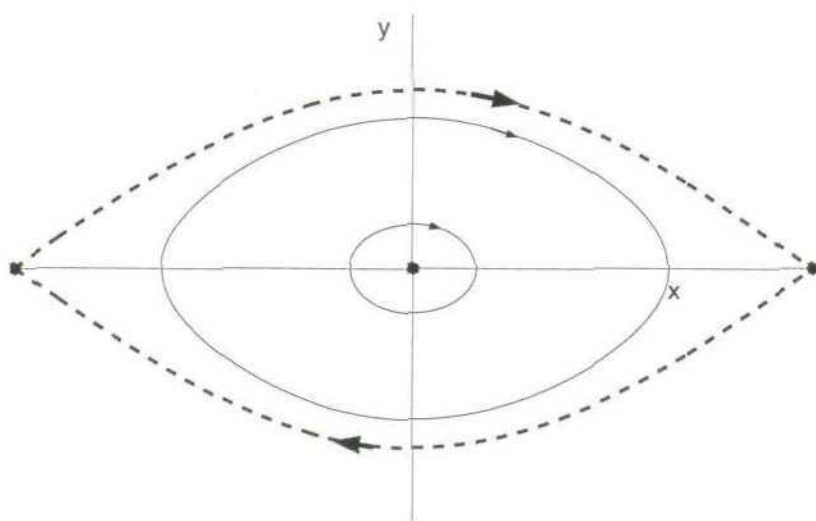


Figura 25. Plano de fases.

En la Figura 25, los tres puntos representan las soluciones estacionarias (puntos de equilibrio) y las curvas a trazos las órbitas heteroclínicas. También hemos incluido las flechas indicadoras de la dirección en que se mueve la curva a medida que avanza el tiempo. Un diagrama como el de la figura 25 se denomina un plano o retrato de fases y da una idea cualitativa del comportamiento de las soluciones.

Ya que se analiza el problema desde una perspectiva cualitativa, resulta natural preguntarse cuestiones sobre el comportamiento cualitativo del sistema. Por ejemplo:

- **Estabilidad** de las soluciones. Esta es una de las preguntas fundamentales a hacerse, especialmente para aquellos sistemas que tienen un

significado físico. El concepto de estabilidad es básicamente el siguiente: si tengo una solución para una condición inicial dada y parto ahora de una condición inicial cercana a la primera, ¿permaneceré cerca de la primera solución para todo tiempo positivo? Como ejemplo fundamental citaremos el estudio de la estabilidad de los estados estacionarios. Si tenemos un punto de equilibrio p , las soluciones que parten de puntos cercanos a p ¿permanecerán cerca de p para todo tiempo positivo? Podemos ver en el ejemplo del péndulo que el punto $(0, 0)$ es estable, pues toda solución que parte cerca de $(0, 0)$ es una solución periódica que no se aleja mucho de $(0, 0)$. Por otra parte, podemos ver que el punto de equilibrio $(\pi, 0)$ no es estable (se dirá que es inestable) pues hay puntos muy cercanos de $(\pi, 0)$, por ejemplo, $(\pi - \varepsilon, 0)$, tal que la órbita empezando en $(\pi - \varepsilon, 0)$ es una órbita periódica y hay un momento en que la solución está en el "extremo opuesto" de las x , es decir, llega a $(-\pi + \varepsilon, 0)$, que está bastante lejos de $(\pi, 0)$. De forma análoga se puede concluir que el punto $(-\pi, 0)$ es inestable. Obviamente, los puntos físicamente visibles son los estables, pues pequeñas variaciones (errores) en los datos iniciales no arroja grandes diferencias en la evolución de las soluciones. Por otra parte, los puntos de equilibrio inestables son mucho más difíciles de ver físicamente, pues pequeñas variaciones en los datos iniciales producen resultados muy dispares a largo tiempo. Por ejemplo, todo el mundo ha visto un péndulo donde la masa está en su posición más baja y no se mueve (punto de equilibrio $(0, 0)$), mientras que es bastante difícil (¡por no decir imposible!) observar un péndulo en la posición $(\pi, 0)$, es decir, en su posición más alta y sin moverse. Cualquier pequeña variación de este estado tendrá como producto que el péndulo empiece a oscilar, alejándose del estado de equilibrio (inestable) $(\pi, 0)$.

• **Comportamiento Asintótico** de las soluciones. Con esto queremos estudiar el comportamiento de las soluciones para tiempos muy grandes. Dicho de otra forma, estamos interesados en saber si existe el $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ y cuál es este límite. Para el ejemplo del péndulo, toda condición inicial que se sitúe en las órbitas heteroclinicas tendrá por límite el punto de equilibrio $(\pi, 0)$ o $(-\pi, 0)$. Mientras que para todo dato inicial que no esté sobre las órbitas heteroclinicas ni sea un punto de equilibrio, la solución se comportará de forma periódica y no existirá el límite en cuestión.

• **Comportamiento dinámico bajo perturbaciones.** Nótese que en el ejemplo que estamos desarrollando aparecen parámetros en la ecuación (la constante de gravedad g y la longitud de la varilla del péndulo l), que se pueden calcular de una forma bastante exacta pero siempre aproximada. Por tanto, resulta natural preguntarse ¿cómo varía el comportamiento

to de las soluciones del sistema si perturbamos ligeramente la ecuación, por ejemplo, variando los parámetros g y l ?. ¿Puede llegar a haber un cambio drástico en el comportamiento de las soluciones por ligeras variaciones de la ecuación? ¿Pueden llegar a desaparecer o crearse nuevos puntos de equilibrio, órbitas periódicas, heteroclínicas u homoclínicas por pequeñas perturbaciones?. Para el caso de perturbaciones en g y l se puede ver que el diagrama de fases de la figura 25 permanece prácticamente inalterado. No obstante, puede haber otras perturbaciones (que además son físicamente razonables) que producen cambios drásticos en el retrato de fases del sistema. Obsérvese que durante todo el análisis, hemos asumido que no existía fricción alguna actuando sobre la masa. Obviamente, esta situación es ideal y resulta más razonable pensar que por la presencia de rozamientos (con el aire, con la sujección de la varilla, etc.) se dé una cierta fricción que se traduce en una disipación de energía. Un pequeño término de rozamiento entra como una fuerza que actúa en contra del movimiento y es proporcional a la velocidad de la masa. Sin mucho esfuerzo, se puede ver que la ecuación del péndulo con rozamiento toma la forma

$$\theta'' + \varepsilon\theta' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad (4.3)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño que mide la fuerza del rozamiento. Traduciendo de nuevo la ecuación a las variables (x, y) , con $x = \theta$, $y = \theta'$, obtenemos:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\varepsilon y - \frac{g}{l}\sin(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Obviamente, si $\varepsilon = 0$ (no hay rozamiento), volvemos a la ecuación anterior (4.2). Para $\varepsilon > 0$ y pequeño, podemos considerar la ecuación (4.4) como una pequeña perturbación de la ecuación (4.2). ¿Cómo cambia la dinámica de la ecuación (4.4) en relación a la de la ecuación (4.2)?. Claramente, los puntos de equilibrio de ambos sistemas son los mismos. Primeramente veamos que intuitivamente, las oscilaciones de un péndulo real (es decir, con alguna fricción aunque sea pequeña) terminan por decaer o amortiguarse: la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo poco a poco y si esperamos mucho tiempo, veremos que las oscilaciones han desaparecido prácticamente. Esto es claro, si la masa del péndulo parte del punto $(\theta_0, 0)$ y, por tanto, tiene energía potencial $mg \cos(\theta_0)$, a medida que empieza la oscilación y va avanzando hasta el otro extremo, se va perdiendo energía, de forma que cuando se dispone a volver y a intentar alcanzar el mismo punto $(\theta_0, 0)$, no tiene tanta energía para llegar a él y se tendrá que parar antes, para volver a oscilar de nuevo y seguir perdiendo energía. Poco a poco irá perdiendo toda su energía y al

final acabará en el punto de mínima energía que es el punto de equilibrio $(0, 0)$. Por tanto, todas las órbitas periódicas anteriores dejan de existir y todas las soluciones que empiezan en la posición $(\theta_0, 0)$ con $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ van a converger asintóticamente al punto de equilibrio $(0, 0)$. También las órbitas heteroclínicas que unían los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ desaparecen. Sin embargo, aparecen dos nuevas órbitas que conectan $(-\pi, 0)$ con $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ con $(0, 0)$, que aparecen en **negrita** en la Figura 26. De hecho, el retrato de fases de este nuevo sistema es como el de la Figura 26. Como se puede apreciar, el retrato de fases, globalmente ha sufrido cambios drásticos por una pequeña perturbación.

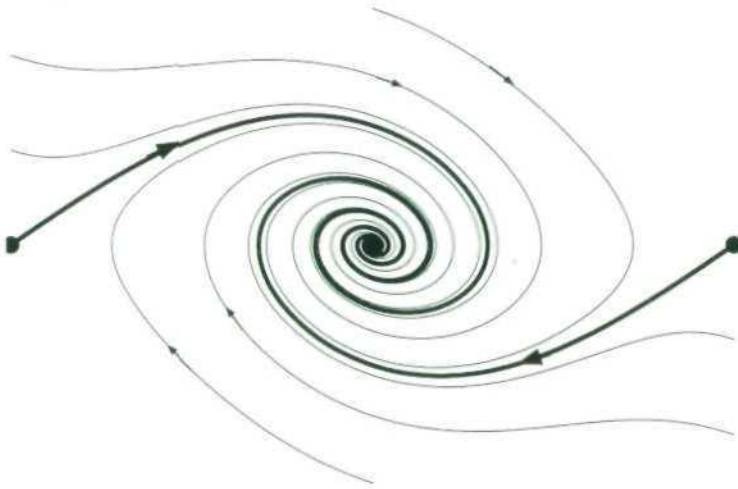


Figura 26. Retrato de fases del péndulo con rozamiento.

El estudio del comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales es hoy en día uno de los campos más activos dentro de la Matemática Aplicada. El número de aplicaciones de esta rama es innumerable y cubre prácticamente todas las áreas del conocimiento científico, desde la biología, la medicina, la economía, hasta las más tradicionales como son la física y astronomía. Conceptos como caos, atractores extraños, dimensión fractal de atractores, órbitas que llenan el espacio, etc., son ampliamente estudiadas y profundizadas. Estos conceptos a su vez son utilizados para estudiar procesos que vienen gobernados no por ecuaciones diferenciales ordinarias sino por ecuaciones en derivadas parciales.

La complejidad que pueden llegar a tener estos sistemas es muy grande y la cantidad de herramientas que se emplean para su análisis es cada

vez mayor. Como ejemplo de esta complejidad veamos la ecuación

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y \\ y' = 28x - y + xz \\ z' = 8/3z + xy \end{cases}$$

que fue propuesta en el año 1963 por E. Lorenz para modelizar de una forma sencilla algunos procesos de dinámica de fluidos que aparecen en fenómenos de la atmósfera. Dada una condición inicial en el espacio, las tres componentes de la solución $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ vienen representadas por las gráficas de la Figura 27.

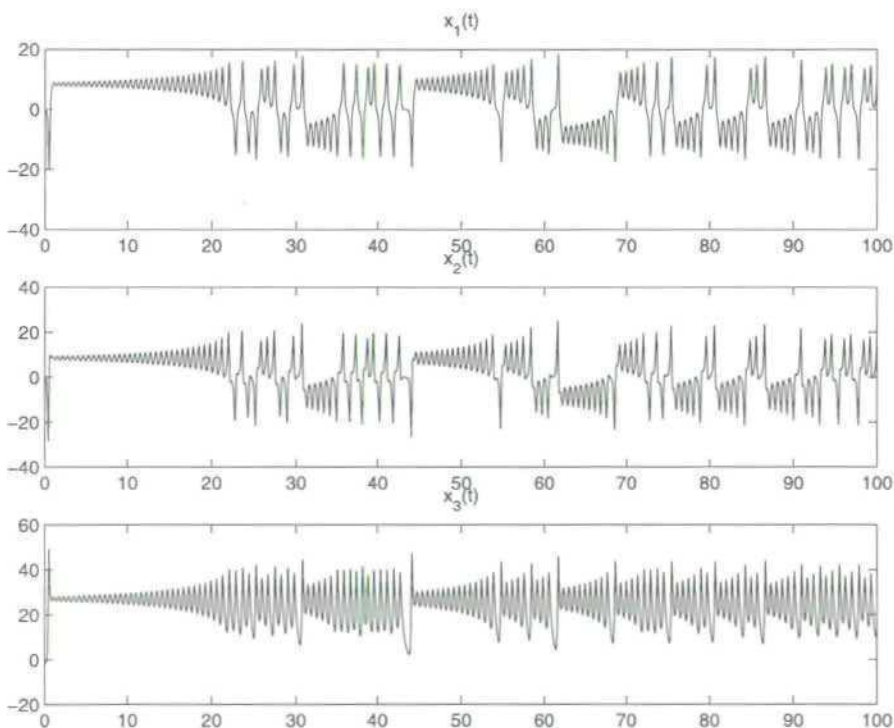


Figura 27. Componentes de una solución del sistema de Lorenz.

La órbita de esta solución en el espacio, es decir, la curva $(x(t), y(t), z(t))$, viene dada por la gráfica de la Figura 28.

Una de las características de este sistema es que independiente de la condición inicial, después de un cierto tiempo, todas las soluciones dibujan prácticamente el mismo cuadro, el de la Figura 28, que tiene forma de alas de mariposa. Dinámicamente la órbita se desenrolla del

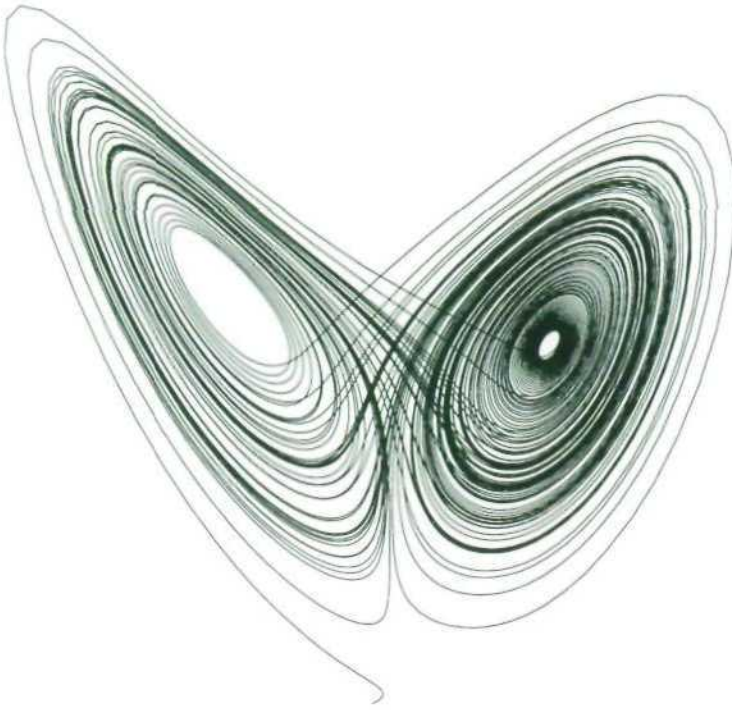


Figura 28. El atractor de Lorenz.

centro del ala hacia los extremos y en un momento salta al otro ala, se sigue desenrollando y vuelve a saltar al otro ala y así constantemente. Los saltos de un ala al otro parecen totalmente aleatorios y no siguen un patrón controlable. Aunque esta ecuación es el ejemplo importante de caos y atractor extraño, no es hasta el año 2002 que Tucker ha conseguido probar que realmente el atractor de Lorenz es un atractor extraño y que la dinámica de la ecuación de Lorenz es una dinámica caótica.

REFERENCIAS

- AMELKIN, V. V. *Las Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a la Práctica*. MIR. Moscú, 1990.
- ARNOLD, V. I. *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*. Birkhauser. Basel, 1990.
- BOYCE, W., DiPRIMA, R. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Limusa-Wiley. México, D.F., 2000.
- BOYER, C. B. *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid, 1996.
- EDWARDS, C. H. *The historical development of Calculus*. Springer Verlag. Nueva York, 1979.
- KLINE, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*. I, II y III. Alianza Universidad. Madrid, 1994.
- MARGALEF, R. *Ecología*. Ediciones Omega. Madrid, 1998.
- MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. Biomathematics Texts. Springer Verlag. Berlín, 1993.
- SIMMONS, G. F. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill. Madrid, 1993.
- ZUAZUA, E., PINILLOS, M. (Eds.) *Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la enseñanza secundaria. Curso de Verano para Profesores de Enseñanza Secundaria*. MECD/Universidad Internacional Menéndez Pelayo. Madrid, 2000.

EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE GRANDES MASAS DE DATOS: ALGUNAS TENDENCIAS RECIENTES

Antonio Cuevas
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. Algunos comentarios sobre el significado de la Estadística y su relación con otras ciencias.
 2. El planteamiento general de este artículo.
-
1. Un vistazo general a la Estadística paramétrica clásica.
 - 1.1. Relación de la Inferencia Estadística con la Teoría de la Probabilidad: la densidad normal y otros modelos paramétricos.
 - 1.2. Los tres problemas clásicos en Estadística Paramétrica.
 2. La estimación funcional no paramétrica: una alternativa a los modelos clásicos.
 - 2.1. Del humilde histograma y sus virtudes.
 - 2.2. Los estimadores kernel: una versión sofisticada de los histogramas.
 - 2.3. Aplicaciones de los estimadores no paramétricos de la densidad al análisis de conglomerados (clustering).
 - 2.4. La operación no paramétrica en los problemas de regresión.
 - 2.5. Ventajas e inconvenientes de los métodos no paramétricos.
 - 2.6. Sobre la popularidad de la estadística no paramétrica: programas informáticos disponibles.

3. Estadística con datos funcionales.

3.1. Regresión con datos funcionales.

3.2. Otras tendencias en el análisis de datos funcionales.

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

1. Algunos comentarios sobre el significado de la Estadística y su relación con otras ciencias

La Estadística es la ciencia de los datos, entendiendo como “datos” un conjunto de observaciones generalmente (pero no necesariamente) numéricas, obtenidas mediante la observación reiterada de un experimento de interés.

La metodología de trabajo habitual en las ciencias experimentales incluye la elaboración de modelos para explicar un determinado fenómeno y la verificación posterior de estos modelos a partir de la observación experimental que suele conducir a la obtención de datos. Así pues, en cierto sentido, la Estadística es una “ciencia transversal” a las demás, que ayuda a interpretar los datos empíricos obtenidos en cualquier campo.

La Estadística es también una “ciencia de servicio” en el sentido de que los temas de investigación que llevan al desarrollo de nuevas técnicas deben estar directamente motivados por las demandas de los usuarios (biólogos, ingenieros, físicos, economistas,...) más que por las necesidades de coherencia formal o desarrollo interno de la teoría.

El desarrollo matemático de la Estadística ha sido más reciente que el de otras ciencias matemáticas. Si aceptamos como un indicio de la madurez y consolidación de una ciencia la presencia de programas académicos establecidos, con un cuerpo común que se considera básico en las universidades de todo el mundo, podemos advertir algunas diferencias objetivas entre la Estadística y, por ejemplo, el Análisis Matemático. Así, puede señalarse que mientras la estructura de los cursos académicos avanzados de Análisis, con un planteamiento y notación similares a las que hoy conocemos (incluyendo un estudio riguroso de la teoría de funciones, límites, diferenciabilidad, continuidad, series,...), estaba ya más o menos

establecida hacia 1880 (a partir de las lecciones de Weierstrass en la Universidad de Berlín), los primeros libros de texto “modernos” y generales de Estadística Matemática no llegaron hasta mucho más tarde. Así, la obra clásica de Harald Cramer *Mathematical Methods of Statistics*, que sirvió de modelo para tantos otros textos posteriores, se publicó en 1945.

Por lo demás, la ciencia estadística se encuentra actualmente en un buen momento. La teoría central se ha desarrollado y enriquecido de tal manera que los cursos clásicos de los años 60 y 70 del siglo XX pueden considerarse hoy como superados en gran medida. Incluso observando el progreso de la investigación con la perspectiva más cercana de los últimos 10 años se puede apreciar un progreso evidente y consolidado. Tomando de nuevo el mundo académico como indicador: la comparación de la obra de Hastie, Tibshirani y Friedman *The Elements of Statistical Learning*¹ (que está probablemente llamada a convertirse en un clásico de los principios del siglo XXI) con el texto de Cramer citado antes, deja poco lugar a dudas sobre el cambio de panorama que se ha producido.

Conviene advertir aquí que la palabra *Estadística* tiene, al menos, dos sentidos, claramente distintos aunque muy relacionados:

- **Estadística descriptiva** (llamada modernamente **Análisis de datos**): conjunto de técnicas orientadas a extraer información de un gran conjunto de datos, mediante medidas (media, mediana, moda, varianza) que resumen sus principales rasgos, y mediante herramientas gráficas. Este aspecto descriptivo representa quizá la imagen más común de la Estadística para el público no especializado, ya que constituye el aspecto más destacado de la presencia de esta ciencia en los medios de información, a través de las estadísticas oficiales, la divulgación científica, los datos económicos, la publicidad, etc.
- **Inferencia Estadística**: Su objeto es obtener información sobre el *modelo probabilístico* que subyace en un determinado *experimento aleatorio consistente en la observación de una cierta cantidad* (o “variable”) aleatoria. Un ejemplo típico de problema de inferencia, que comentaremos más ampliamente en la Sección 1 de estas notas, sería estimar la media de una variable aleatoria de interés (por ejemplo, la media de la variable $X =$ “consumo mensual de electricidad en los domicilios particulares”).

¹HASTIE, T., TIBSHIRANI, R y FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning*. Springer. New York, 2001.

Como veremos a continuación, todos los métodos estadísticos requieren experimentación, es decir, obtención de **muestras** (se llama “muestra” al conjunto de datos resultante de la observación reiterada de una variable aleatoria).

2. El planteamiento general de este artículo

La Estadística clásica está en buena parte dominada por la teoría de la inferencia basada en “muestras pequeñas”, es decir, para situaciones en las que se dispone de pocos datos (típicamente, menos de 30). Por ejemplo, toda la teoría de los tests de hipótesis basados en la t de *Student* puede situarse dentro de esta metodología para muestras pequeñas. Actualmente, estos métodos siguen siendo muy importantes y utilizados, pero han surgido nuevos problemas relacionados con la sobreabundancia de datos, más que con su carestía. La creciente facilidad para almacenar y procesar información por medio de potentes ordenadores, unida a la capacidad de evaluar con precisión en “tiempo continuo” gran cantidad de procesos (temperaturas, cotizaciones bursátiles, audiencias de televisión,...) han conducido a la existencia de enormes masas de datos que plantean problemas, teóricos y prácticos, para su manejo útil.

La frase “*We are drowning in information and starving for knowledge*” citada por Hastie, Tibshirani y Friedman² resulta particularmente acertada y describe muy expresivamente una situación que es cada vez más frecuente.

En este artículo se abordarán sólo, parcialmente, dos de las metodologías que contribuyen a evitar que nos sintamos “ahogados en los datos”: la estimación no paramétrica de funciones (en concreto de la densidad y la regresión) y la metodología estadística para datos funcionales.

La palabra “recientes” que aparece en el título debe entenderse en un sentido amplio. En realidad, la estimación funcional no paramétrica dista mucho de ser una novedad, ya que su origen se remonta a mediados de los años 50. Sin embargo, el gran progreso que se ha experimentado en los últimos diez o quince años, unido a la relativa popularización reciente de estas técnicas (que ahora son realmente accesibles a los usuarios gracias a los modernos ordenadores) permiten considerar a los métodos no paramétricos como incorporaciones recientes al núcleo de los métodos estadísticos que no sólo importan a los investigadores sino también

²HASTIE, T., TIBSHIRANI, R y FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning*. Springer. New York, 2001.

a los usuarios. Por otra parte, las tendencias actuales tienden a acentuar la importancia de estos métodos como instrumentos auxiliares de otras técnicas (clasificación, análisis de conglomerados,...) que están típicamente asociadas al manejo de grandes masas de datos.

La estadística con datos funcionales sí puede considerarse, sin mayores reservas, como una teoría "reciente". El primer manual general sobre este tema se debe a Ramsay y Silverman y ha sido publicado en 1997³. Como siempre, pueden detectarse aquí y allá (desde, al menos, el principio de los años 80), artículos de investigación que abordaban estas ideas, pero aún hoy no hay una teoría sistemática.

La exposición está organizada de la siguiente forma:

En la Sección 1 se presenta un breve resumen del "ambiente general" de la Estadística clásica con objeto de recordar algunos conceptos importantes y de poder apreciar mejor las diferencias con los otros dos planteamientos que se discuten a continuación.

En la Sección 2 se presentan las ideas básicas de la estimación no paramétrica de funciones (en particular, de la función de densidad y la función de regresión) motivándolas con algunos ejemplos reales y mostrando sus posibilidades para proporcionar orientaciones útiles en el manejo de grandes cantidades de datos. Los libros de Silverman⁴ o Simonoff⁵ son referencias generales de nivel bastante accesible. Otras referencias interesantes (de orientación quizá más técnica y menos "divulgativa") son Scott⁶ y Wand y Jones⁷.

En la Sección 3 se motiva el interés práctico de la metodología estadística con datos funcionales y se esboza el planteamiento matemático de algunas de sus técnicas básicas, en particular las relacionadas con la regresión lineal.

³RAMSAY, J. O. y SILVERMAN, B. W. *Functional Data Analysis*. Springer. New York, 1997.

⁴SILVERMAN, B. W. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall. New York, 1986.

⁵SIMONOFF, J. S. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer. New York, 1996.

⁶SCOTT, D. W. *Multivariate Density Estimation*. Wiley. New York, 1992.

⁷WAND, M. y JONES, M. C. *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall. Londres, 1995.

1. UN VISTAZO GENERAL A LA ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA CLÁSICA

La discusión de este apartado se centrará en la Inferencia Estadística (que forma el núcleo fundamental de la Estadística Matemática clásica), aunque la Estadística Descriptiva o Análisis de Datos, aparecerá también de modo muy destacado en los apartados siguientes.

1.1. Relación de la Inferencia Estadística con la Teoría de la Probabilidad: la densidad normal y otros modelos paramétricos

Generalmente, la estadística inferencial se aplica al estudio de una cierta magnitud aleatoria o “variable aleatoria” (v.a.). En muchos casos, esta variable corresponde a la observación de una cierta característica en los individuos de una gran población y por eso se emplean a veces las palabras población y “poblacional” para referirnos a X y a sus características. La teoría de la probabilidad proporciona las herramientas para identificar y definir las características de esa variable que interesa estudiar (distribución, media, varianza,...) y proporciona algunos modelos típicos que aparecen con frecuencia en las aplicaciones.

Si X es la variable aleatoria bajo estudio, se define su **función de distribución** en un punto x_0 como la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que x_0 , es decir,

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

Por tanto, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ (aquí, P denota “probabilidad”).

Se dice que la distribución de X es “(absolutamente) continua” cuando la probabilidad $P(a < X \leq b)$ puede calcularse como la integral de una cierta función f , llamada **función de densidad**:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

En este caso (que será el que más nos interese aquí) se tiene, por las propiedades de la integral, $F'(x) = f(x)$ y la “distribución” de X viene caracterizada indistintamente por f o por F , en el sentido de que cualquiera de las dos funciones permite calcular la probabilidad de que la cantidad aleatoria X tome valores en cualquier intervalo prefijado. Generalmente, la función de densidad es más expresiva y manejable.

La **media** (que proporciona una medida de tendencia central) y la **varianza** de X (que proporciona una medida de dispersión) se definen

respectivamente, para este caso continuo, por

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

La densidad normal (cuya gráfica tiene una típica forma de campana) es un ejemplo importante de función de densidad que se emplea muchas veces para caracterizar la distribución de una v.a. Esta distribución es casi omnipresente en las aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística a la ciencias experimentales porque, según establece el Teorema Central del Límite, (enunciado en términos informales) *la distribución de cualquier variable que pueda expresarse como suma de muchas otras variables independientes, cada una de las cuales tiene un efecto pequeño sobre la variable total, sigue aproximadamente una distribución normal*. Esta es la razón de la importancia fundamental de la distribución normal en Física (Teoría de Errores, Mecánica Estadística,...), en Genética (estudio de la distribución de los caracteres cuantitativos), etc.

La densidad normal tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

donde μ es la media y σ^2 es la varianza. Esta distribución se denota brevemente por $N(\mu, \sigma)$. Según esto, la distribución normal queda **totalmente especificada cuando se dan los valores de estos parámetros**. Se trata de un ejemplo característico de **modelo paramétrico**. La distribución $N(0, 1)$ se denomina *normal estándar*.

A continuación se presentan brevemente algunos ejemplos concretos que corresponden a situaciones reales en las que interesa estudiar una variable aleatoria cuya distribución puede elegirse dentro de algún modelo paramétrico conocido.

▪ Distribución de la renta

En este caso, la variable de interés sería $X =$ "renta familiar anual". Si f es la densidad correspondiente a esta variable se tiene que

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx,$$

lo cual significa que la proporción de familias cuya renta está comprendida entre a y b viene dada por la integral anterior. Un modelo

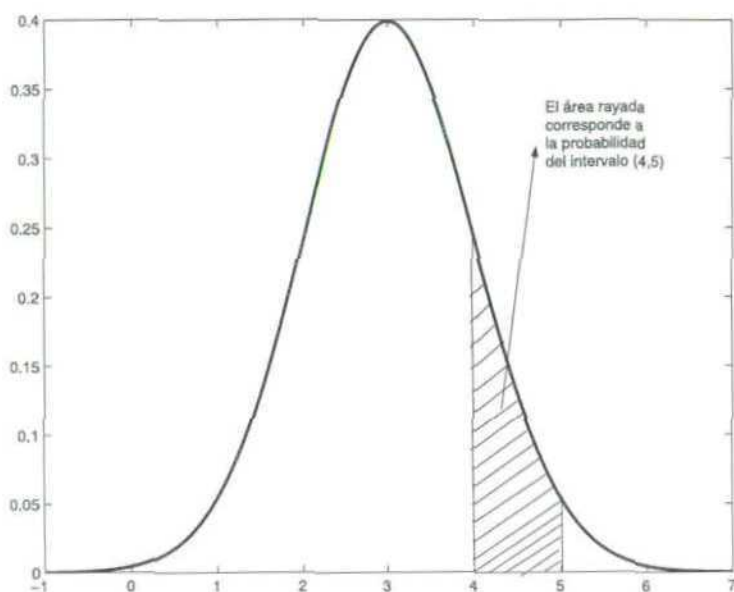


Figura 1. Función de densidad de la distribución $N(3,1)$.

que se utiliza a veces para la densidad de X es

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \text{ para } x > 0.$$

Esta densidad define la llamada **distribución logarítmico normal**.

- **Tiempos de funcionamiento**

$X =$ "tiempo hasta la primera avería en un sistema".

Un posible modelo: $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$ (**distribución exponencial**).

- **Número de averías de un sistema en un tiempo prefijado**

Este es un ejemplo de **variable discreta** cuya distribución viene caracterizada por una función de probabilidad $p(k) = P(X = k)$ que proporciona directamente probabilidades en lugar de densidades de probabilidad. Un modelo usual es:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{distribución de Poisson}).$$

▪ Error cometido al medir una magnitud

El modelo clásico para la distribución de la variable X que mide el error cometido, es la distribución normal estándar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Estos ejemplos muestran que la teoría de probabilidades proporciona una amplia “caja de herramientas” para elegir y manejar modelos que sean adecuados a diferentes situaciones pero, en general, no permite determinar completamente la distribución más adecuada para cada caso. Por ejemplo, en los enfoques paramétricos, estos modelos están determinados salvo **uno o varios parámetros** que no son conocidos. Aquí entra en juego la Estadística.

1.2. Los tres problemas clásicos en Estadística Paramétrica

El punto de partida indispensable para cualquiera de los procedimientos estadísticos que se enumeran a continuación es la extracción de **una muestra** de la variable aleatoria X de interés, entendiendo como muestra un conjunto de n observaciones independientes X_1, \dots, X_n de dicha variable.

Estimación puntual

El planteamiento general es el siguiente:

- Se tiene una v.a. de interés X .
- Se supone que la densidad de X pertenece a una familia paramétrica conocida, (normal, lognormal, Pareto, gamma,...), f_θ , aunque se desconoce el valor del parámetro θ .
- Se desea estimar θ a partir de una muestra, X_1, \dots, X_n , de X .
- Para ello se definen **estimadores**, que son funciones $T_n(X_1, \dots, X_n)$ de la muestra adecuadas para “aproximar” o “estimar” el valor desconocido del parámetro.

Por ejemplo, si se supone que el peso X de los individuos de cierta población animal sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, una muestra consistirá simplemente en un conjunto de n observaciones (n se denomina **tamaño muestral**) correspondientes a los pesos de otros tantos individuos elegidos al azar en dicha población.

En este caso, los estimadores naturales de los parámetros μ (la media de X) y σ^2 (la varianza de X) son sus análogos muestrales:

$$\hat{\mu} := \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n},$$

que se denominan **media y varianza muestral**, respectivamente.

La Estadística Paramétrica clásica proporciona procedimientos generales para construir y analizar estimadores adecuados para algún parámetro de interés del cual depende la distribución de la variable estudiada. Naturalmente, esto incluye otras situaciones en las que el “estimador adecuado” no aparece de una manera tan directa y natural como en el ejemplo anterior.

Estimación por intervalos de confianza

Se trata de dar un intervalo de valores que cubre, con alta probabilidad, el valor desconocido del parámetro.

Quizá el ejemplo más popular (aunque en modo alguno el más importante) de estimación por intervalos de confianza es la obtención de las llamadas “horquillas de predicción” en las encuestas electorales.

Otro ejemplo más relevante surge en la metodología de control estadístico de calidad, donde los clásicos *control charts* de Sewhart aparecen muy relacionados con ideas de intervalos de confianza.

También en otros muchos campos, como la **investigación de mercados**, resultan útiles los intervalos de confianza. Como ejemplo de aplicación en este último ámbito, consideremos el siguiente estudio de mercado:

La compañía *Apple Computer* lanzó en 1998 el nuevo modelo iMac. La demanda inicial fue excelente. Sin embargo, la compañía estaba interesada en conocer si iMac estaba atrayendo de manera significativa “nuevos compradores” (es decir, personas que adquirirían por primera vez en su vida un ordenador). Se realizó un estudio sobre 500 compradores resultando que 83 de ellos eran nuevos compradores. La proporción estimada de nuevos compradores entre los usuarios de iMac fue, por tanto, $83/500 = 0.167$. El intervalo de confianza al 95 % (obtenido con técnicas elementales de inferencia paramétrica) va de 0.13 a 0.20. Esto proporciona una información más completa que la simple estimación puntual.

Contraste de hipótesis

Esta técnica, no siempre bien comprendida ni bien utilizada, ayuda a optar entre dos posibles alternativas respecto al valor de un parámetro. En general, un contraste de hipótesis es un procedimiento que permite responder racionalmente (y siempre con una cierta probabilidad, controlada, de error) a preguntas del tipo:

- ¿Hay suficiente evidencia estadística para poder afirmar que un determinado fármaco baja, en promedio, la presión arterial de los pacientes una hora después de haberlo ingerido?
- ¿Hay suficiente evidencia estadística para poder afirmar que la cantidad media de detergente contenida en los paquetes de una determinada marca es inferior al valor nominal (1 Kg.) indicado en la etiqueta?
- ¿Es superior la “dieta mediterránea” a una dieta “baja en grasas” recomendada por la *American Heart Association*?

En todos los casos, la idea básica es obtener una muestra y decidirnos por la hipótesis que se cuestiona cuando los datos muestrales resultarían muy improbables en el caso de que esta hipótesis no fuera cierta. Por ejemplo, en el último de los casos citados, se realizó un estudio sobre 605 supervivientes de un ataque cardíaco. De ellos, 303 recibieron dieta mediterránea y 302 la dieta AHA. Los resultados (publicados en 1998) fueron muy significativos a favor de la primera en vista del porcentaje de personas en ambos grupos que sufrieron enfermedades durante un cierto período de tiempo.

2. LA ESTIMACIÓN FUNCIONAL NO PARAMÉTRICA: UNA ALTERNATIVA A LOS MODELOS CLÁSICOS

Como hemos visto en el apartado anterior, la estadística clásica depende fuertemente de suposiciones “paramétricas” (llamadas frecuentemente “modelos paramétricos”) sobre la distribución de la variable que genera los datos. La palabra “paramétrica” alude aquí al hecho de que estos modelos fijan completamente la distribución *excepto por el valor de uno o varios parámetros reales que deben ser estimados*. El ejemplo más típico, y el modelo paramétrico más utilizado es, con diferencia, el modelo normal. Sin embargo, hay muchas situaciones prácticas en que un sencillo análisis exploratorio de los datos muestra claramente que la suposición de normalidad es inadecuada. Lo mismo ocurre con otros modelos paramétricos usuales.

2.1. Del humilde histograma y sus virtudes

Consideremos el siguiente ejemplo clásico, correspondiente a la observación a lo largo de los días 1 a 8 de agosto de 1978, de 107 valores correspondientes a tiempos (medidos en minutos) entre erupciones consecutivas de un geyser, llamado "Old Faithful", en el parque norteamericano de Yellowstone y también a la duración de las erupciones de dicho geyser durante el período indicado. La simple representación de estos dos conjuntos de datos, mediante dos clásicos histogramas (ver Figuras 2 y 3) resulta muy significativa.

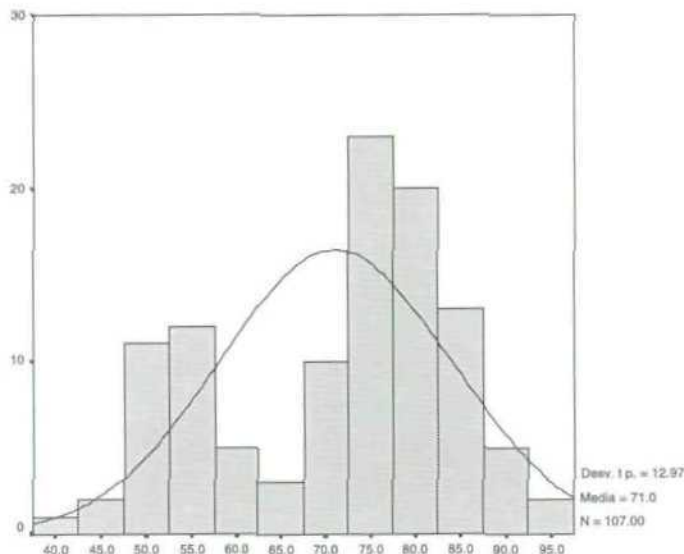


Figura 2. Tiempos entre erupciones consecutivas del geyser *Old Faithful*.

A la vista de estas figuras nadie podría decir razonablemente que la distribución de ninguna de estas variables es normal (la curva normal "más cercana" a los datos aparece sobrepuesta). Estas gráficas sugieren más bien que, en ambos casos, la población observada está dividida en dos "subpoblaciones" correspondientes a las dos "modas" que se observan en el gráfico. Como curiosidad, puede decirse que los resultados obtenidos a partir de un conjunto semejante de datos obtenido un año después (en agosto de 1979) fueron casi idénticos. Parece que el "Old Faithful" tiene costumbres regulares...

A la pregunta: "si la variable observada no tiene distribución normal, entonces ¿cuál es su distribución?"; puede responderse simplemen-

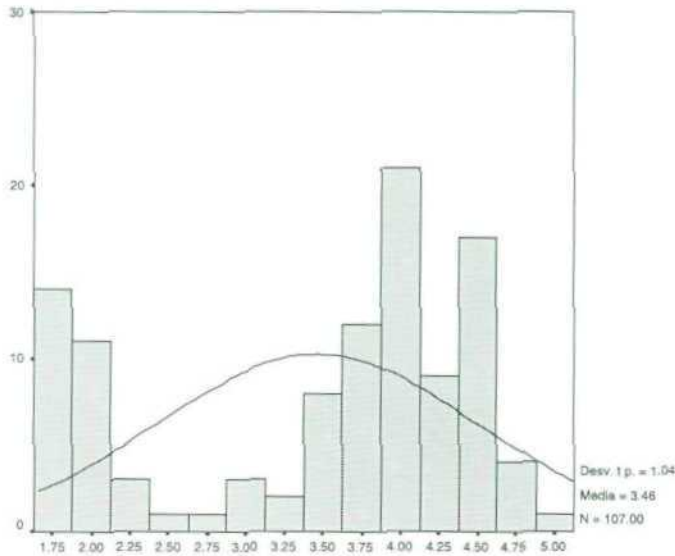


Figura 3. Duración de las erupciones del geyser *Old Faithful*.

te: “olvidemos las distribuciones paramétricas preestablecidas. Utilicemos el propio histograma como si fuese (aproximadamente) la función de densidad de la variable”. Para entender por qué esta interpretación es razonable, conviene explicitar la definición formal de histograma:

Fijada una sucesión $\dots < a_i^{(n)} < a_{i+1}^{(n)} < \dots$, con $h_n = a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}$ y dada la muestra X_1, \dots, X_n , se define (siendo $\#C$ el cardinal del conjunto C)

$$\hat{f}_n(t; X_1, \dots, X_n) \equiv \hat{f}_n(t) = \frac{\#\{X_i \in (a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}]\}}{nh_n}, \quad (1)$$

para $t \in (a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}]$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Aquí, X_1, \dots, X_n son los datos observados, $\dots < a_i^{(n)} < a_{i+1}^{(n)} < \dots$ y $h_n = a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}$ denotan respectivamente, los extremos de los intervalos considerados para obtener el histograma y la amplitud de estos intervalos.

La expresión (1) aclara la relación entre histograma y densidad: si $t \in (a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}]$, $\hat{f}_n(t)$ representa la “densidad de población” de los datos que “viven” en el intervalo $(a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}]$. Si la longitud h_n de este intervalo

tiende a cero cuando el número de datos tiende a infinito, cabe esperar que $\hat{f}_n(t)$ tienda hacia la “densidad instantánea” en el punto t que es precisamente la función de densidad. Hay que añadir solamente que h_n no debe tender a cero demasiado deprisa, para evitar quedarnos sin datos en muchos intervalos. De hecho, la condición que se requiere para que se produzca la convergencia, cuando $n \rightarrow \infty$ de $\hat{f}_n(t)$ hacia la “verdadera” función de densidad $f(t)$ es $nh_n \rightarrow \infty$, además de $h_n \rightarrow 0$.

Obsérvese que la amplitud h_n de los intervalos es elegida por el usuario y, en cierto modo, es arbitraria (aunque hay algunos criterios razonables para elegirla). El aspecto del histograma podría cambiar considerablemente si este valor se cambia.

Recapitulando, el histograma tiene dos aspectos, complementarios e igualmente importantes:

- (a) La vertiente más conocida del histograma es su utilidad como *herramienta de análisis y visualización de datos*. Este aspecto resulta especialmente valioso cuando el número de datos es enorme (actualmente es muy habitual manejar bases con decenas de miles de datos) y se desea tener una primera idea rápida y “visualizable” acerca de su estructura.
- (b) El segundo aspecto, menos popular quizá, está relacionado con la inferencia: el histograma es, en realidad, un **estimador no paramétrico de la función de densidad** que puede utilizarse para reemplazar a los modelos paramétricos usuales (y, en particular, al omnipresente modelo normal) cuando hay razones para dudar de ellos.

El histograma es “no paramétrico” en el sentido de que su uso no requiere ninguna suposición del tipo de que la distribución de la variable bajo estudio esté confinada en ninguna familia paramétrica de distribuciones (como la normal, la logarítmico normal, la gamma, etc.).

La discusión anterior pone de relieve algunos rasgos característicos de la estimación no paramétrica:

- Los estimadores no paramétricos dependen de un parámetro (llamado *parámetro de suavizado*) cuya elección es, hasta cierto punto, arbitraria. La elección adecuada de este parámetro (la anchura de los intervalos, en el caso de los histogramas) es uno de los problemas más delicados de la estadística no paramétrica y ha sido

objeto de una investigación intensiva a lo largo de los años 80 y 90. El problema es muy controvertido y no tiene aún una solución uniformemente aceptada por la comunidad estadística. Sin embargo, se ha producido un enorme progreso en esta dirección que facilitará la incorporación (no realizada aún plenamente) de estas técnicas a los paquetes comerciales de *software*.

- Los estimadores no paramétricos requieren muestras “grandes” (de al menos 100 datos, típicamente). Hay dos razones para esto: primero, los métodos de estimación no paramétricos son “locales”: para estimar la densidad de probabilidad $f(t_0)$ en un punto t_0 se utilizan principalmente los puntos muestrales cercanos a t_0 . Si la muestra es demasiado pequeña, puede ocurrir que apenas se tengan datos en las proximidades de t_0 . La segunda razón es que, en su inmensa mayoría, las motivaciones teóricas actualmente disponibles para los métodos no paramétricos son de carácter asintótico, es decir, se basan en propiedades relativas al comportamiento de los estimadores cuando el tamaño muestral n tiende a infinito.
- Desde un punto de vista matemático-formal, puede considerarse que la Estadística no paramétrica es una extensión de la Estadística clásica (paramétrica) en la que el “parámetro de interés” es una función, es decir, un elemento de un espacio de dimensión infinita, en un lugar de un número real o un vector de números reales.

2.2. Los estimadores kernel: una versión sofisticada de los histogramas

Los histogramas, del tipo de los que se muestran en las Figuras 2 y 3, pueden resultar útiles e ilustrativos para muchos propósitos pero son decididamente inadecuados bajo otros puntos de vista. En concreto:

- Los histogramas son siempre, por naturaleza, funciones discontinuas; sin embargo, en muchos casos es razonable suponer que la función de densidad de la variable que se está estimando es continua. En este sentido, los histogramas son estimadores insatisfactorios.
- Como los histogramas son funciones constantes a trozos, su primera derivada es cero en casi todo punto. Esto los hace completamente inadecuados para estimar la derivada de la función de densidad.
- Parcialmente relacionado con el punto anterior está el hecho de que los histogramas no son tampoco adecuados para estimar las

modas (si se define **moda** como un máximo relativo de la función de densidad). A lo sumo, pueden proporcionar “intervalos modales”, pero esto puede resultar demasiado burdo en casos en que se requiere mayor precisión.

Los estimadores de tipo **núcleo** (o **kernel**) fueron diseñados para superar estas dificultades. La idea original es bastante antigua y se remonta a los trabajos de Rosenblatt y Parzen en los años 50 y primeros 60. Los estimadores kernel son, sin duda, los más utilizados y mejor estudiados en la teoría no paramétrica. Se definen mediante la expresión

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - X_i}{h_n}\right), \quad (2)$$

donde h_n es una sucesión de **parámetros de suavizado**, llamados **ventanas** o **amplitudes de banda** (*windows, bandwidths*) que deben tender a cero “lentamente” ($h_n \rightarrow 0, nh_n \rightarrow \infty$) para poder asegurar que \hat{f}_n tiende a la verdadera densidad f de las variables X_i y K es una densidad prefijada llamada **núcleo** (**kernel**).

Es curioso destacar que muchas de las propiedades más importantes de estos estimadores no se ven afectadas por la función núcleo que se elija. Es muy frecuente tomar K como la función de densidad de la distribución normal estándar, es decir, $K(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$. Por supuesto, cuando el núcleo es “suave” (derivable), el correspondiente estimador también lo es y su derivada puede utilizarse para estimar la de la verdadera densidad f .

Obsérvese que si se elige un núcleo constante, del tipo $K(x) = 1$ si $x \in (0, 1)$ y $K(x) = 0$ en el resto, se obtiene de nuevo un estimador de tipo histograma (aunque con intervalos “móviles”).

La elección correcta del parámetro de suavizado $h = h_n$ es, sin duda, el problema más difícil de cuantos se plantean en la estimación no paramétrica. En la actualidad existen varios procedimientos que permiten asignar h de manera “óptima” según ciertos criterios de optimalidad que no se discutirán aquí. Si el parámetro de suavizado se elige demasiado pequeño, el estimador aparece “infrasuavizado”, e incorpora demasiado “ruido”, reflejado en la presencia de muchas modas (máximos relativos) “espurias” que, de hecho no aparecen en la densidad que se quiere estimar. Por el contrario, si h se elige demasiado grande, se da el fenómeno contrario, de “sobresuavización” y el estimador es casi insensible a los datos.

En la Figura 4 se muestra el efecto de la infrasuavización. El estimador que aparece allí en trazo continuo corresponde a la densidad estimada, a partir de 500 datos, de la variable $X =$ "edad de un paciente que se somete a determinada prueba clínica", eligiendo el parámetro h con un criterio de optimalidad que ha proporcionado el valor $h = 2,4624$. La apariencia del estimador sugiere la presencia de tres modas, correspondientes a otros tantos grupos de edad en que suelen requerirse más probablemente estas pruebas. La curva con trazo discontinuo corresponde a un estimador infrasuavizado con $h = 0,8$. Se observa que este último presenta un gran número de oscilaciones que corresponden a falsas modas. El número de estas falsas modas aumentaría drásticamente si, para la misma muestra fija, h disminuyese aún más.

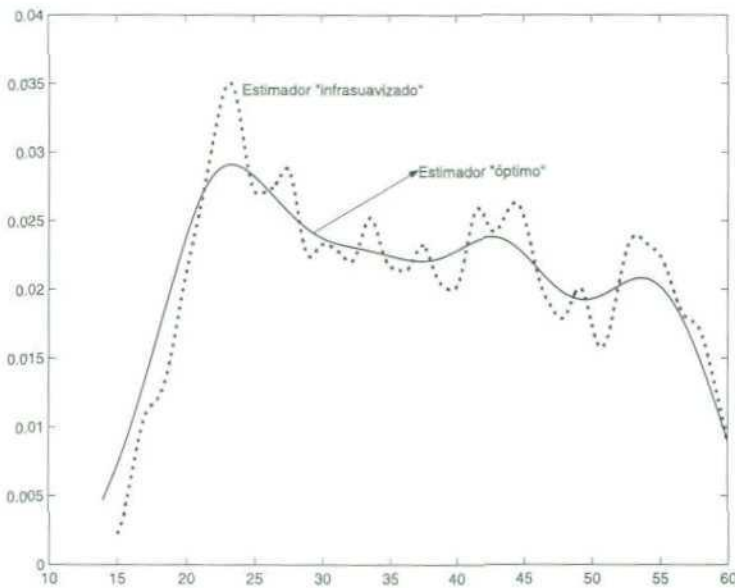


Figura 4. Estimadores de la densidad "óptimo" (con $h = 2,4624$) e "infrasuavizado" (con $h = 0,8$).

Una de las principales aplicaciones prácticas de los estimadores núcleo es su utilidad para estimar las modas y el número de modas. Es curioso notar a este respecto que, en los primeras aproximaciones elementales a la Estadística, se suele hablar de **media**, **mediana** y **moda** como medidas de tendencia central, pero posteriormente, en los cursos universitarios de Estadística y Probabilidad, la moda desaparece casi de escena. La razón de esto tiene que ver quizá con el hecho de que en los modelos paramétricos usuales, el número de modas aparece fijado de an-

temano desde el momento en que se elige el modelo (así, la distribución normal es siempre unimodal) y, en muchos casos, la moda coincide necesariamente con la media (de nuevo, la normal proporciona un ejemplo de esta situación). Por otra parte, la definición formal de moda de una variable aleatoria (y sobre todo su cálculo) resulta más “escurridiza” que la de la media. Si se define, como parece natural, la moda como un máximo local de la densidad, no resulta muy claro, si uno no dispone de estimadores de la densidad, como puede estimarse una moda a partir de una muestra. La utilización de estimadores de tipo núcleo proporciona una forma muy natural de estimar este parámetro: se define una **moda muestral** como un máximo local de un estimador núcleo \hat{f}_n de la densidad poblacional f . En definitiva, los estimadores no paramétricos de la densidad proporcionan un marco natural para “rehabilitar” la noción de moda que resulta tan intuitiva y útil en un análisis estadístico. Los estimadores de la densidad no fijan de antemano el número de modas, como ocurre con los modelos paramétricos. Como ya se ha indicado antes, los enfoques no paramétricos tienen la ventaja de que “dejan hablar a los datos” y no prejuzgan de antemano algunas características importantes de los mismos, como ocurre frecuentemente con los modelos paramétricos.

Un ejemplo, ya clásico, de la importancia práctica de estas ideas ha surgido al estudiar una variable de gran interés en Teoría Económica: los ingresos familiares. En este caso, por tanto, la variable bajo estudio sería formalmente $X =$ “ingresos de una familia elegida al azar en la población bajo estudio”. Estamos interesados en determinar la distribución de X que viene dada por su función de densidad f . Recordemos que

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

representa la proporción de familias cuya renta está comprendida entre a y b .

El problema de determinar f para distintos países ha sido extensivamente estudiado. En Gran Bretaña se realizó un estudio particularmente detallado, en el que se estimó la densidad f , utilizando estimadores no paramétricos y modelos paramétricos para cada año del período comprendido entre 1968 y 1981. En la Figura 5 se muestran las densidades estimadas por métodos no paramétricos (trazo continuo) y paramétricos (utilizando un modelo lognormal; trazo discontinuo) basados en una muestra de 6711 datos (reescalados dividiendo por la media) correspondientes al año 1975.

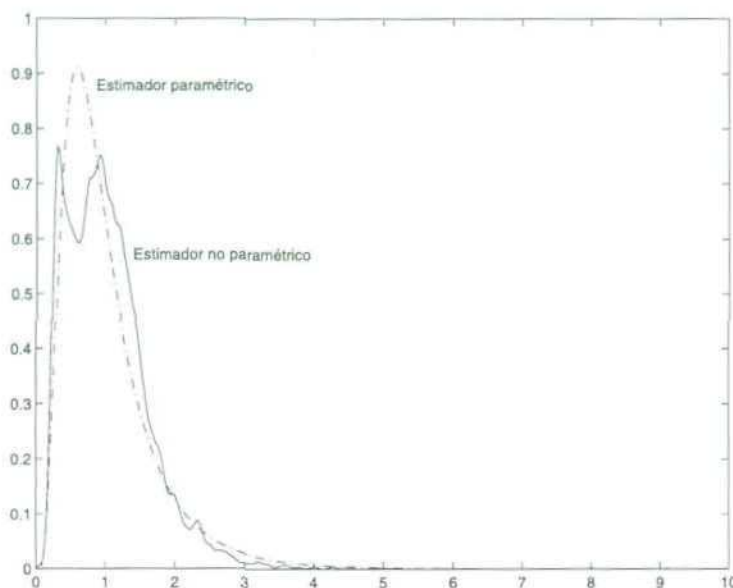


Figura 5. Estimaciones de la función de densidad de los ingresos familiares en Gran Bretaña (datos del año 1975).

La diferencia entre ambos estimadores es muy llamativa: en el estimador no paramétrico **aparecen muy claramente dos modas que de ninguna manera pueden aparecer en el modelo paramétrico lognormal** que, por definición, tiene sólo una moda. Este mismo hecho se observa, de manera sistemática, a lo largo de todo el período observado e incluso, hacia el final del período se acentúa la moda de la izquierda (que correspondería a la clase económicamente más débil). No cabe duda de que en este problema, la existencia de una moda o de dos no es un hecho irrelevante ya que la presencia de dos modas sugiere claramente una cierta estructura de clases sociales que está necesariamente oculta en el modelo lognormal que, además, sobreestima el peso relativo de la clase alta. En definitiva, este ejemplo muestra que **la mayor flexibilidad de los estimadores no paramétricos les permite en ocasiones describir la realidad de manera más objetiva y precisa.**

2.3. Aplicaciones de los estimadores no paramétricos de la densidad al análisis de conglomerados (clustering)

Una de las ideas más naturales, y útiles, para enfrentarse a una gran masa de datos (digamos, por ejemplo, datos multivariantes en el espacio \mathbb{R}^k) es dividirlos en **conglomerados** (*clusters*) de acuerdo con algún criterio de afinidad que parezca razonable. El mero hecho de “agrupar

los datos en conglomerados” ayuda a clarificar su estructura e incluso sugiere hipótesis razonables sobre la naturaleza del fenómeno que se está observando.

Los estimadores no paramétricos de la densidad (en su versión multivariante) son una herramienta auxiliar muy útil en la tarea de agrupar los datos en conglomerados. Además, a diferencia de otros procedimientos de análisis de conglomerados (*clustering*), los que están basados en estimadores de la densidad se inspiran en algo más que una simple heurística de agrupación de datos por proximidad, en el sentido de que proponen un objetivo “poblacional” (es decir, que depende intrínsecamente de la distribución de la variable observada), orientado por ideas geométricas y probabilísticas.

Si \mathbf{X} es una variable aleatoria con valores en \mathbb{R}^k que se distribuye según una función de densidad f y $c > 0$ es un número prefijado, se pueden definir los **conglomerados de nivel c** en la población representada por \mathbf{X} como las **componentes conexas** del conjunto $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > c\}$.

Bajo este enfoque (que no es el único posible), el objetivo del análisis de conglomerados sería clasificar los datos $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ de una muestra de \mathbf{X} según el conglomerado al que pertenecen.

Como f es, en general, desconocida, estos conglomerados no son tampoco exactamente conocidos, pero es claro que puede obtenerse una información muy útil sobre ellos a partir de un estimador no paramétrico \hat{f}_n de f . El valor c es arbitrario e indica, en cierto modo, el “nivel de resolución” elegido para el problema.

Hay varios algoritmos disponibles para clasificar los datos $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ utilizando un estimador no paramétrico de la densidad siguiendo las ideas que se han esbozado aquí.

Es claro que el concepto de conglomerado definido en términos de la función de densidad está muy estrechamente relacionado con la noción de moda y con la estructura del conjunto de “curvas de nivel” $\{\mathbf{x} : \hat{f}_n(\mathbf{x}) = c\}$ que se obtienen para diferentes valores de c .

Consideremos como ejemplo (ver Silverman (1986)) una muestra de 320 observaciones bidimensionales (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, 320$ correspondientes a los niveles de colesterol (valores X_i) y triglicéridos (Y_i) en pacientes masculinos con enfermedades circulatorias.

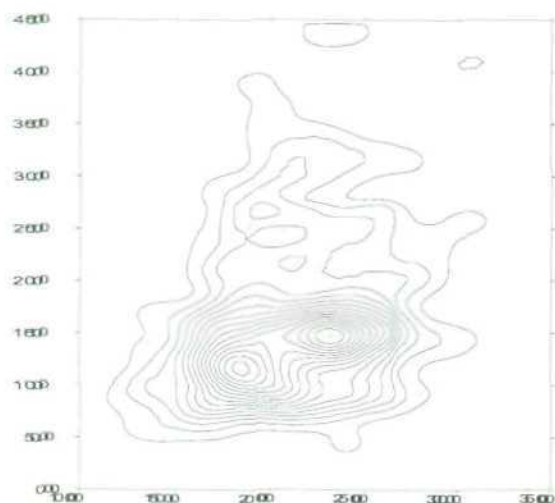


Figura 6. Curvas de nivel correspondientes a la densidad de la variable (X, Y) donde X = nivel de colesterol, Y = nivel de triglicéridos.

En la Figura 6 se muestra la estructura de las curvas de nivel obtenidas a partir de un estimador de la densidad de tipo núcleo. Estas curvas de nivel son sumamente informativas pues sugieren claramente la existencia de dos modas que serían los “centros” de dos conglomerados correspondientes a sendos “grupos de riesgo” (con un riesgo más alto para los pacientes del grupo correspondiente a la moda superior).

2.4. La opción no paramétrica en los problemas de regresión

Hemos visto en los apartados anteriores cómo una idea sencilla y bien conocida, como es la noción de histograma, lleva a los estimadores núcleo que, a su vez, permiten analizar de manera muy natural el concepto de moda, una idea de claro contenido intuitivo que, sin embargo, permanece casi olvidada en la Estadística paramétrica.

En este apartado seguiremos un modo de exposición análogo, partiendo de una idea elemental (el ajuste de una curva por mínimos cuadrados a una nube de puntos) para llegar a los estimadores no paramétricos de la regresión y mostrar algunas de sus ventajas.

En Estadística, la expresión *regresión simple* alude en general al estudio de la relación entre dos variables, de las cuales una (Y) es la *respuesta*

y la otra (x) es una variable *auxiliar, regresora o "input"*, típicamente más fácil de observar que la variable respuesta. En términos generales, el objetivo de los métodos de regresión es obtener una expresión aproximada de la relación entre Y y x con el propósito de predecir la evolución de aquélla a partir de la observación de ésta.

Es importante notar que los métodos de regresión forman parte (muy relevante) de la teoría estadística porque, en general, se aplican a problemas en los que **no es razonable suponer una dependencia funcional estricta** entre Y y x . Por ejemplo, entre el peso y la estatura de las personas hay una cierta dependencia pero también hay factores aleatorios que impiden considerar el peso como una función estricta de la estatura. Algo similar ocurre con los ingresos totales y los gastos en alimentación, o en ocio.

Así, en particular, el clásico modelo de **regresión lineal simple** supone que la relación entre x e Y es del tipo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + e$$

donde β_0 y β_1 son constantes desconocidas (que deben estimarse a partir de la observación de una muestra $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ de pares de datos) y e es una variable aleatoria de error, de la que se supone que tiene media 0.

Dada la muestra $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$, los coeficientes β_0 y β_1 se estiman por el **método de mínimos cuadrados**: los respectivos estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ resultan ser los valores de β_0 y β_1 que minimizan la suma de errores cuadráticos

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

La solución a este sencillo problema de minimización es

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x},$$

donde $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ y $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

Como es sabido, la recta de ecuación $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es la **recta de ajuste por mínimos cuadrados** a la "nube de puntos" $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$.

Una vez que se ha realizado la estimación de los coeficientes, se puede *predecir* la respuesta que se obtendría para un nuevo input x_0 , no incluido en la muestra, mediante $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$.

Naturalmente, el anterior enfoque se puede generalizar para considerar modelos más complicados como, por ejemplo, el **modelo de regresión cuadrática**

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e$$

En cualquiera de estas situaciones, el problema de regresión se reduce a estimar una función cuya forma está totalmente fijada excepto por unos *cuantos parámetros desconocidos*. Se trata, por tanto, de un enfoque paramétrico.

La alternativa no paramétrica tiene un punto de partida ligeramente distinto. Se supone que

$$Y = m(x) + e$$

donde m es una función que no se supone "confinada" dentro de una familia paramétrica. Se trata, como antes, de estimar m a partir de una muestra $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$.

Una amplia clase de estimadores (muy utilizados) de m son los de tipo núcleo, que tienen la forma

$$\hat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_i,$$

donde $W_i(x)$ es, para cada i , una función de ponderación que da "mayor importancia" a los valores x_j de la variable auxiliar que están cercanos a x . Una asignación típica sería

$$W_{ni}(x) = \frac{\frac{1}{nh_n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\hat{f}_n(x)},$$

donde $K(t)$ es una función de densidad simétrica (por ejemplo, la normal estándar) que tiene su máximo en 0 y tal que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} K(t) = 0$ y $\hat{f}_n(x)$ es un estimador kernel de la densidad como el definido en (2).

Nuevamente aquí aparece la idea de que los métodos no paramétricos son "locales": la estimación $\hat{m}_n(x)$ depende principalmente de aquellos pares de observaciones muestrales (x_j, Y_j) para las que x_j está cerca de x . También aquí se tiene que, bajo condiciones muy generales sobre m y K , se verifica que la función \hat{m}_n tiende, cuando $n \rightarrow \infty$, hacia m siempre que

$h_n \rightarrow 0$ y $nh_n \rightarrow \infty$. Asimismo, bajo condiciones de diferenciabilidad y algunas suposiciones adicionales sobre el parámetro h_n , m'_n tiende hacia m' .

A modo de ejemplo, consideremos la siguiente curva (Figura 7) de regresión entre la edad (x) y la estatura (Y) en niños y adolescentes. A simple vista, la curva refleja algunos rasgos previsibles, como la mayor rapidez de crecimiento en el primer año de vida, el "estirón" de la adolescencia y la tendencia hacia la estabilización al comienzo de la edad adulta. Estos rasgos naturales, que aparecen espontáneamente en un modelo no paramétrico, podrían haber quedado ocultos por una elección errónea de un modelo paramétrico.

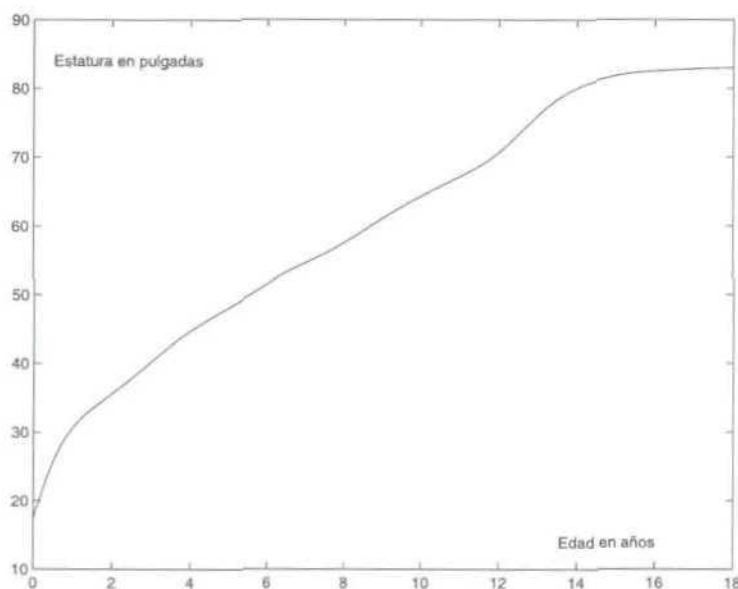


Figura 7. Curva de crecimiento estimada (por métodos no paramétricos) para niños y adolescentes.

Por otra parte, como se ha indicado antes, la metodología no paramétrica permite estimar de modo natural la velocidad de crecimiento (medida por la derivada m'). En este caso, la derivada de m es quizá más interesante que la propia función m . La estimación no paramétrica de m' aparece representada en la Figura 8: es interesante notar que esta curva muestra claramente un pequeño estirón (menos fuerte que el de la adolescencia), alrededor de los 9 años, que es conocido empíricamente pero que no aparece reflejado en los modelos paramétricos usuales. De nuevo,

como en el ejemplo de los datos británicos de renta, se pone de manifiesto cómo la metodología no paramétrica **permite poner de relieve rasgos cualitativos que los modelos paramétricos ocultan**.

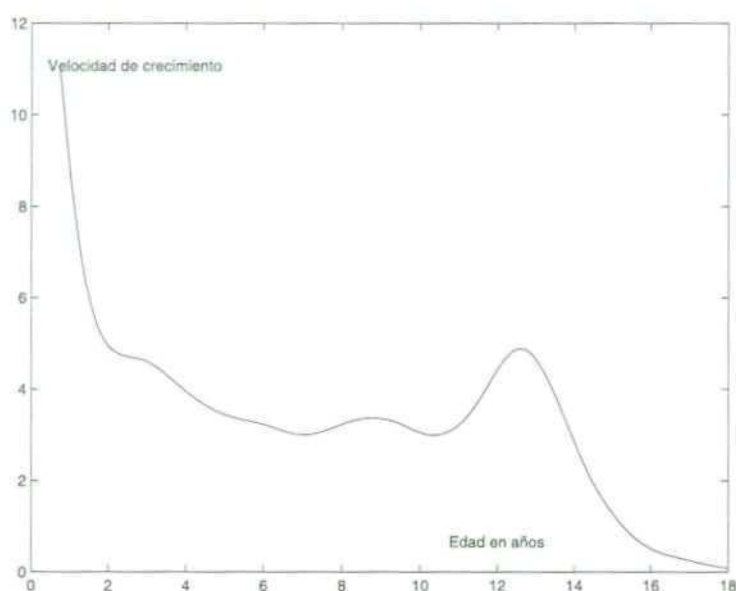


Figura 8. Estimación no paramétrica de la derivada de la curva de crecimiento.

2.5. Ventajas e inconvenientes de los métodos no paramétricos

La exposición anterior va, en gran parte, orientada a motivar el interés de los métodos no paramétricos frente a las alternativas más clásicas que involucran modelos paramétricos.

Nuestro objetivo ha sido mostrar que los modelos no paramétricos:

- Son más flexibles y “dejan hablar a los datos” permitiendo en ocasiones revelar rasgos importantes de la variable bajo estudio que permanecen necesariamente ocultos por un modelo paramétrico.
- Dependen en mucha menor medida que los paramétricos de suposiciones difíciles de verificar y, en muchos casos, de dudosa validez práctica.
- Proporcionan herramientas auxiliares muy valiosas para el análisis de datos y otras técnicas estadísticas (análisis de conglomerados, remuestreo, reconocimiento de formas,...) en las que los modelos paramétricos resultan frecuentemente demasiado rígidos.

Sin embargo, es justo también mencionar algunos **inconvenientes** importantes de estos procedimientos:

- Requieren, en general, tamaños muestrales más grandes. Este rasgo se hace particularmente agudo cuando los métodos no paramétricos se utilizan en “altas dimensiones” (en la práctica, para datos numéricos formados por vectores de dimensión superior a 4). En estas situaciones se requieren tamaños muestrales desmesuradamente grandes para obtener inferencias fiables. Este fenómeno se denomina *the curse of dimensionality* (“la maldición de la dimensionalidad”).
- Todos ellos dependen fuertemente de la elección de un “parámetro de suavizado” que introduce un considerable grado de arbitrariedad en la estimación. En los últimos años se ha avanzado mucho en la obtención de procedimientos para la asignación “objetiva” de estos *smoothing parameters*, pero, en general, el problema aún no está resuelto de una forma que pueda considerarse como universalmente aceptada.
- Su motivación teórica es, casi siempre, asintótica. Esto significa que los resultados matemáticos que avalan estos procedimientos están generalmente relacionados con su comportamiento cuando $n \rightarrow \infty$. Por contraste, en la Estadística clásica hay algunos resultados importantes de optimalidad válidos para un tamaño muestral fijo.
- Relacionado con el punto anterior está el hecho de que la Estadística no paramétrica presenta muchas más dificultades para construir intervalos de confianza o realizar contrastes de hipótesis, si bien las llamadas técnicas de remuestreo (*bootstrap*) son muy útiles para desarrollar este tipo de inferencias, actuando en combinación con los métodos no paramétricos.

2.6. Sobre la popularidad de la estadística no paramétrica: programas informáticos disponibles

La estimación no paramétrica de funciones se hará realmente popular solamente cuando consiga ser de “dominio público” entre los usuarios de la Estadística. Esto está empezando a ocurrir en los últimos años pero, para convertirse en una tendencia consolidada, es necesario que la estimación no paramétrica de la densidad y de la regresión (y sus métodos asociados) se incorporen plenamente al software estadístico comercial. En la actualidad, esta condición no se cumple plenamente para

los programas estadísticos más populares, pero ya hay accesibles diferentes “paquetes de software” (algunos, incluso, de distribución gratuita) que permiten usar de manera cómoda y sencilla los principales métodos *no paramétricos*.

Sin ninguna pretensión de exhaustividad, se podrían citar los siguientes:

1. Colección de programas en Matlab, preparados por Steve Marron (de la Universidad de North Carolina en Chapel Hill, USA). Se pueden descargar (gratuitamente) en http://www.stat.unc.edu/faculty/marron/marron_software.html
2. Colección de programas elaborados por Theo Gasser (de la Universidad de Zurich) y su equipo. Pueden conseguirse en <http://www.unizh.ch/biostat/Software/>
3. Programa S-Plus: es probablemente el software comercial más difundido entre los que incluyen una presencia significativa de la estadística no paramétrica. Es un software “abierto” que ofrece la posibilidad de incorporar fácilmente nuevas subrutinas redactadas en el lenguaje de programación *S*.

3. ESTADÍSTICA CON DATOS FUNCIONALES

Del mismo modo que en la sección anterior nos hemos ocupado de los problemas estadísticos en los que el “parámetro” a estimar es una función, en esta sección comentaremos brevemente las situaciones en que **los propios datos disponibles son funciones**.

El seguimiento de procesos tecnológicos o industriales, el control de las condiciones atmosféricas, la observación del “mercado continuo” en la Bolsa, etcétera, proporcionan observaciones aleatorias que pueden considerarse como funciones.

Naturalmente este punto de vista “funcional” requiere un cierto proceso de abstracción y de modelización porque, en realidad, las observaciones se obtienen casi siempre en versión “discretizada”. Sin embargo, este es un caso en el que claramente, un pequeño nivel de sofisticación matemática conduce a un enfoque mucho más sencillo y más natural. Por ejemplo, si se observa la evolución de la temperatura de veinte sistemas análogos y para cada uno de ellos se dispone de 1440 mediciones

de temperatura tomadas a intervalos de un minuto, resulta mucho más natural “interpolar” las 1440 mediciones obtenidas en cada sistema para definir con ellas una función continua, y considerar así que disponemos de una muestra de 20 funciones, que manejar nuestra información muestral como un conjunto de 20 vectores de dimensión 1440. Esta situación no es tan rara en Matemáticas, donde con frecuencia “lo continuo” es más sencillo de manejar que “lo discreto”. Además, hay razones técnicas que surgen muy claramente, por ejemplo, en la teoría de la regresión, que desaconsejan el uso de vectores de dimensión muy alta con componentes altamente correlacionadas.

Naturalmente, cuando las funciones entran en juego, también surge de inmediato la necesidad de utilizar algunas herramientas de Análisis Matemático (por ejemplo, la teoría de operadores).

En el resto de esta sección ofreceremos una breve panorámica parcial de las aplicaciones y el ambiente matemático en el que se desenvuelve este nuevo campo de la Estadística. El libro de Ramsay y Silverman⁸ proporciona una interesante perspectiva de este tema, con una orientación más aplicada que teórica.

3.1. Regresión con datos funcionales

El modelo básico es, por el analogía con el modelo tradicional de regresión lineal simple,

$$Y = Tx + e,$$

donde Y es la respuesta, y x es la variable regresora que, en este caso, es una función $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e es el error aleatorio y T es un **operador lineal** que actúa sobre el “input” x .

La respuesta Y puede ser escalar o funcional y el “input” x puede ser fijado de antemano por el experimentador (modelo de diseño fijo) o corresponder a una observación aleatoria (modelo de diseño aleatorio).

Si nos situamos en el caso más general en el que $Y = Y(t)$ es también una función, podemos suponer (bajo condiciones bastante generales) que el T tiene la forma típica de una transformación lineal entre espacios de funciones, es decir, que viene definido por una expresión del tipo

$$(Tx)(t) = \int_a^b x(s)\beta(s, t)ds, \quad (3)$$

⁸RAMSAY, J. O. y SILVERMAN, B. W. *Functional Data Analysis*. Springer. New York, 1997.

donde $\beta(s, t)$ es una "función núcleo" que, en cierto modo, hace aquí el mismo papel que el coeficiente de regresión β_1 en el clásico modelo de regresión lineal simple.

El estudio de operadores de la forma (3) es un problema matemático de gran tradición y enorme importancia, tanto teórica como aplicada. Por ejemplo, en transmisión de señales, la función $Y(t)$ podría ser la "señal de salida" obtenida como respuesta a la "señal de entrada" $x(t)$ en un sistema de comunicaciones que distorsiona o codifica la entrada según un operador T (conocido) y un ruido aleatorio (y desconocido) $e(t)$. El problema (llamado *signal recovery*) sería entonces recuperar la señal original.

Sin embargo, el planteamiento del problema bajo el punto de vista estadístico de la regresión funcional es claramente distinto: aquí el objetivo sería estimar el operador T (lo que equivale a estimar el núcleo $\beta(s, t)$) a partir de la observación de una muestra que vendrá dada por n pares de observaciones "input-output" (x_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$.

Una vez que se haya obtenido un estimador \hat{T} , puede utilizarse para dar una predicción $\hat{Y} = \hat{T}x_0$ de la respuesta correspondiente a un "input" x_0 no incluido en la muestra.

A continuación se presentan unos cuantas situaciones prácticas en las que podría resultar útil un modelo de este tipo.

- (a) Ramsay y Silverman⁹ estudian con cierto detalle la aplicabilidad de los modelos de regresión funcional en un problema de **meteorología** en el que $Y(t)$ es el logaritmo de la precipitación registrada y $x(t)$ es la temperatura.
- (b) Los modelos lineales funcionales podrían usarse también para analizar **la relación entre los índices de mercado continuo** en dos mercados bursátiles que operan simultáneamente.
- (c) En **Neurología** hay al menos dos técnicas, llamadas *voltage clamp* y *evoked response* que involucran experimentos con una estructura adecuada para el uso de la regresión funcional. Así, en la técnica de *evoked response* interesa estudiar la relación entre las ondas cerebrales que se miden como respuesta a un estímulo sensorial (por ejemplo, un sonido variable).

⁹RAMSAY, J. O. y SILVERMAN, B. W. *Functional Data Analysis*. Springer, New York, 1997.

- (d) En **Farmacología**, la función $x(t)$ puede reflejar la dosis de un fármaco que se está administrando continuamente e $Y(t)$, la respuesta observada en el receptor. En particular, las técnicas de regresión funcional se están revelando útiles en algunos problemas de este tipo en el campo de la cardiología experimental.

3.2. Otras tendencias en el análisis de datos funcionales

La utilización de datos funcionales sugiere algunos problemas interesantes, de planteamiento muy sencillo y natural, que constituyen líneas de investigación actuales aún no completamente cerradas.

- **“Ordenación” de los datos:** dada una muestra de funciones obtenidas por la observación de un cierto fenómeno en tiempo continuo, ¿qué criterios razonables pueden usarse para decidir cuáles son las “observaciones extremas” (*outliers*) que están más lejanas del “núcleo central” de los datos? ¿Cuál es la función “más interior” de la muestra?.
- **Comparación de medias en diferentes poblaciones** (“análisis de la varianza funcional”): Supongamos, por ejemplo, que se miden “on line” (en tiempo continuo) los consumos eléctricos en n domicilios particulares elegidos al azar. Supongamos que este experimento se repite de manera independiente en 4 barrios de una gran ciudad. Se obtienen, por tanto, 4 muestras de n funciones cada una de ellas. Puede preguntarse: ¿Hay suficiente evidencia estadística para afirmar que las “funciones medias de consumo” son diferentes en los 4 barrios?.

En el contexto de datos numéricos este es el clásico problema de análisis de la varianza unifactorial. Su extensión al caso funcional es un problema interesante aunque presenta dificultades teóricas y prácticas.

- **Métodos numéricos para el tratamiento de datos funcionales:** el tratamiento computacional efectivo de funciones requiere generalmente algún proceso de aproximación numérica que involucre un cierto grado de discretización. En este sentido, puede decirse que el cálculo numérico es un auxiliar indispensable para las técnicas estadísticas con datos funcionales. En particular, las técnicas de ondículas, las aproximaciones de Fourier y la solución numérica de ecuaciones desempeñan un importante papel aquí.

REFERENCIAS

- HASTIE, T., TIBSHIRANI, R y FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning*. Springer. New York, 2001.
- RAMSAY, J. O. y SILVERMAN, B. W. *Functional Data Analysis*. Springer. New York, 1997.
- SCOTT, D. W. *Multivariate Density Estimation*. Wiley. New York, 1992.
- SILVERMAN, B. W. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall. New York, 1986.
- SIMONOFF, J. S. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer. New York, 1996.
- WAND, M. y JONES, M. C. *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall. Londres, 1995.

PUBLICACIÓN DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN LA WEB

Agustín Muñoz Nuñez
Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa
Ministerio de Educación, Cultura y Deportes

1. Posibilidades de los *applets*.
2. Construir un *applet*.
 - Etiquetas.
3. El ciclo de desarrollo
 - Objetos agrupados en categorías.

BIBLIOGRAFÍA

¿Está usted contento con lo que la Web se ha convertido?

“Es una pregunta importante. Estoy satisfecho con la riqueza increíble del material en la Web y con la variedad de formas en las que está siendo usada. Hay algunas partes del sueño original que no se han realizado. Por ejemplo, muy poca gente tiene herramientas sencillas e intuitivas para poner lo que piensan en forma de hipertexto. Y muchos de las motivos y significado de los enlaces en la web se pierden. Sin embargo, esto puede cambiar y creo que lo hará”. (Tim Berners-Lee (1998) inventor de la web y Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científico Técnica de 2001)¹.

¹ <http://www.w3.org/People/Berners-Lee/FAQ.html#browser> Contiene la entrevista completa. El texto original reza:

“Are you happy with what the World Wide Web has turned out so far? That is a big question. I am very happy at the incredible richness of material on the Web, and in the diversity of ways in which it is being used. There are many parts of the original dream which are not yet implemented. For example, very few people have an easy, intuitive tool for putting their thoughts into hypertext. And many of the reasons for, and meaning of, links on the web is lost. But these can and I think will change.”

Este artículo tiene dos objetivos: *mostrar* algunas de las posibilidades de los applets para enseñar matemáticas y *construir* un applet que, aunque sencillo, nos anime a profundizar en este tema.

1. POSIBILIDADES DE LOS APPLETS

Empezaremos con un breve recorrido por dos sitios web, de los muchos que se pueden encontrar dedicados a los applets de matemáticas, para ver qué son, qué es posible hacer con ellos y plantearnos, al mismo tiempo, algunas preguntas: ¿la incorporación de estos applets a un documento electrónico supone alguna ventaja? ¿nos ayudaría a explicar mejor algún concepto? ¿podría motivar a los alumnos? ¿se podría conseguir lo mismo con lápiz y papel?

A estas preguntas se le dedican cada mes, decenas de artículos en revistas de investigación pedagógica y didáctica. Nosotros nos conformaremos con adquirir una idea del valor potencial que tienen los applets para el profesor de matemáticas.

Como poco, los applets nos permiten crear apuntes y libros donde los gráficos son *dinámicos e interactivos*, es decir, cambian de forma en respuesta a acciones del alumno. Por ejemplo, cuando las dimensiones y forma de un triángulo cambian al arrastrar un vértice con el ratón, o cuando cambiando un parámetro en una función observamos el efecto en su gráfica. Esto es radicalmente distinto al texto convencional donde los gráficos son *estáticos*, como ocurre en la versión en papel de este documento que estás leyendo.

Analicemos estas propiedades en dos ejemplos concretos que las ilustran:

- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores de un polígono? <http://www.ies.co.jp/math/java/samples/gaikaku.html> Este sitio mantiene una colección muy interesante de applets con preguntas y actividades muy sugerentes para cada uno de ellos. En el applet al que enlazamos, y del que se pueden ver dos instantáneas en la figura que incluimos, la interacción es muy sencilla: el alumno cambia la escala haciéndola cada vez más pequeña; además inicialmente se puede dibujar un polígono u otro. Podemos identificar las dos características que hemos enunciado: dinamismo e interactividad. Después de jugar con este applet es muy difícil que se nos olvide este sencillo teorema de geometría elemental:

los ángulos exteriores de un polígono suman 360°

Desde nuestra experiencia de interactuar con este pequeño programa podemos preguntarnos si podríamos construir una demostración con lápiz y papel, en ese caso ¿estaríamos aprendiendo lo mismo con una demostración y con la otra?

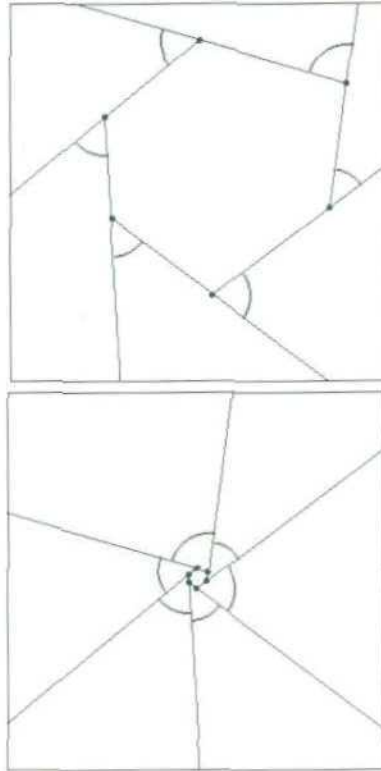


Figura 1

Pasemos al segundo ejemplo:

- Una función es convexa si la función cada vez crece más deprisa o decrece más despacio.

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Interpretación_graficas/funciones_no_lineales.htm Este sitio web en español contiene aproximadamente un 65 % del *currículum* de la ESO y el bachillerato. En la figura se muestra el applet que consta de una botella cuya forma se puede cambiar arrastrando el punto P. Al 'abrir el grifo' comienza a llenarse y obtenemos la gráfica de la altura de la botella en función del tiempo. La botella cada vez se llena más despacio porque hay más que llenar. Esta descripción 'coloquial' de la convexidad (que se usa con fre-

cuencia en la economía y las ciencias sociales) adquiere un significado intuitivo bastante claro porque asociamos el concepto matemático de convexidad con un proceso físico. Es fácil que cuando se trabaje con funciones que describan otros fenómenos como, por ejemplo, el crecimiento de la población, el alumno pueda hacer razonamientos parecidos.

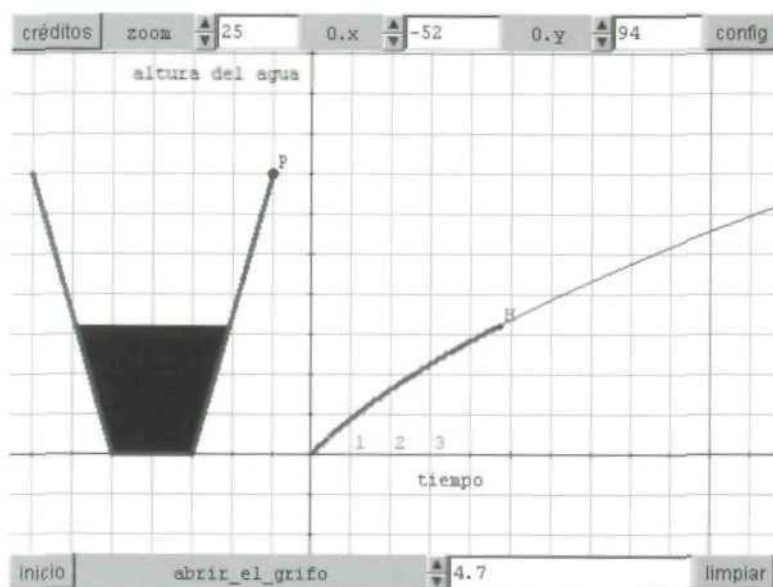


Figura 2

En los dos ejemplos que acabamos de analizar gracias a la tecnología se están ampliando las posibilidades materiales del lápiz y el papel. Es decir, podemos crear actividades que no podíamos diseñar antes. Que permiten experimentar con facilidad porque se pueden cambiar las condiciones iniciales y se facilita la repetición en distintas situaciones. También son motivadoras porque asocian conceptos matemáticos a fenómenos físicos y porque relacionan simultáneamente representaciones gráficas y algebraicas de un mismo concepto matemático (como la gráfica y la ecuación de la función).

Una 'evidencia' de que los applets proporcionan un entorno rico para la experimentación es que los profesores que desarrollan materiales, con frecuencia, suelen comentar resultados que han aprendido o redescubierto gracias a la oportunidad de experimentar que les proporciona este tipo de *software*².

² <http://www.joma.org/vol1-3/articles/leathrum/leathrum1.html> En este enlace correspondiente a un artículo de la revista electrónica JOMA se describe una experiencia de un experto profesor que descubre propiedades para él nuevas de las parábolas gracias a la construcción de un applet para sus alumnos.

2. CONSTRUIR UN APPLETT

Después de ver qué se puede hacer con un applet conviene preguntarse si es posible en un tiempo razonable crear un applet que ilustre la idea que queremos explicar. Vamos a ver que sí.

Los programas que acabamos de ver están escritos en Java, pero ¿por qué Java si ya existe software que puede hacer lo que hemos visto? El motivo es sencillo y nos devuelve al título y propósito de este artículo: porque **los programas en Java se pueden 'ver' por la web**. En 1994 apareció Java fruto de cuatro años de ensayos en la compañía Sun Microsystems. Era un nuevo lenguaje que permitía construir pequeños programas, applets, que se podían transmitir por Internet y ejecutar (una vez recibidos). Aunque se pueden crear programas en Java que corran sin estar insertados en páginas web, esta capacidad de generar applets ha sido su contribución más novedosa. En 1995, Sun creó su navegador HotJava y permitió que también Netscape soportara Java, esto supuso en el mundo de la informática una pequeña revolución y una sorpresa al ver las posibilidades que se abrían en la creación de materiales para Internet.

Los applets fueron inicialmente concebidos como pequeños programas para insertar en páginas web. Los usos que se le pueden dar son muy diversos, desde animar un texto a desplegar un gráfico de bolsa. A nosotros nos interesan los applets con contenido matemático y Java gracias a ser un lenguaje orientado a objetos se presta muy bien a esta tarea.

Sin embargo, la mayor dificultad que se presenta cuando queremos construir un applet es que hay que saber programar en Java. Java es un lenguaje de programación que requiere un esfuerzo de aprendizaje importante. La situación ideal sería que el profesor pudiera traducir las ideas matemáticas (que conoce mejor que nadie), mediante una herramienta en applets sin descender al nivel de la programación del código (algo en lo que no es un experto)³. Esto ya es posible, pues la mayoría del software matemático: Maple (Maplets), Cabri-Geometry (CabriJava)⁴, The Geometer's Sketchpad (JavaSketchpad), etcétera, proporcionan herramientas para que aquello que hemos realizado con el programa se pueda guardar en un formato Java, y, por lo tanto, se pueda publicar en la web. Así, pues, nos situaremos como profesores-desarrolladores de contenidos en esta posición intermedia gracias al programa Descartes y podremos crear applets de gran complejidad sin tener que saber Java.

DESARROLLADOR →	SOFTWARE MATEMATICO (Descartes, Cabri, etc.) →	JAVA
-----------------	---	------

³ <http://www.ies.co.jp/math/javalesson/menu.html> En este enlace las personas con conocimientos de programación pueden acceder a un curso para hacer applets de matemáticas en Java, se parte desde cero.

⁴ <http://www.cabri.net/~kuntz/INET98/index-f.html> En este artículo se explican los motivos que llevaron a hacer la versión Java de Cabri y las dificultades que encontraron.

Para situar a Descartes en un contexto adecuado, analicemos dos programas populares en la enseñanza secundaria que permiten hacer cosas parecidas: Cabri-Geometry y The Geometer's Sketchpad. Ambos son muy similares, el primero de origen francés y el segundo creado en Estados Unidos. Constan de un entorno gráfico que pretende reproducir mediante *clics* de ratón, cualquier construcción que seamos capaces de hacer con regla y compás. Una vez creada una configuración geométrica, aquellos elementos que durante su construcción así se eligiera, pueden desplazarse o animarse de acuerdo con las restricciones elegidas, por ejemplo, podemos restringir el movimiento de un punto alrededor de una circunferencia. Mientras en estos programas la construcción de objetos es gráfica, por ejemplo, un segmento lo conseguimos con dos clics de ratón que definen sus extremos, en Descartes, necesitamos un par de coordenadas por cada punto, que introducimos por teclado. Esto es así porque los objetos se manejan (desde la perspectiva del profesor-desarrollador) mediante su representación cartesiana. Mientras Cabri es un programa excelente para la geometría sintética, Descartes lo es para la geometría analítica y el tratamiento de funciones.

Coloquémonos en la posición de profesores que queremos incorporar una ilustración dinámica e interactiva en nuestra página web (que construimos con un editor de páginas web como Composer o FrontPage). Para conseguirlo, usaremos Descartes. Aparte del manejo del propio programa que es muy intuitivo necesitamos unos conocimientos mínimos de HTML (el lenguaje de publicación en la web), veamos cuáles a partir de un ejemplo.

El siguiente documento es un archivo HTML muy sencillo, se llama ejemplo1.htm, lo vemos abierto con un editor de texto y con un navegador.

```

ejemplo1.htm - Bloc de notes
Archivo Edición Búsqueda Ayuda

<html>
<head><title>ejemplo1</title></head>
<body>
<b><font size=+2>El punto</font></b>
<br><font size=+2>Un punto P queda determinado por sus coordenadas <i>x</i>
e <i>y</i>.</font>
<center>
<p><applet code="Descartes.class"
codebase="."
archive="Descartes.jar"
width=488 height=368
<param name="Versión" value="2.20">
<param name="Idioma" value="español">
<param name="Botones" value="créditos:no config:si inicio:si limpiar:si">
<param name="Espacio" value="fondo=ffdc4f red=no red10=no ejes=gris
texto=gris0bscuro">
<param name="C_00" value="id:escala tipo:numérico valor:'25'
decimales:'4*(escala<10)' incr:'5' min:'10' max:'1000000' nombre:zoom
región:norte">
<param name="G_00" value="tipo:punto expresión:'(2,1)' color:rojo
texto:'(2,1)' tamaño:6 fuente:'Helvetica,BOLD,16'">
</applet>
</center>
</body>
</html>

```

Figura 3. Ejemplo 1.htm abierto con un editor de texto.



Figura 4. Ejemplo1.htm abierto con un navegador.

En la primera de estas dos figuras, tenemos acceso al código fuente, en el que reconocemos el elemento característico del lenguaje HTML, las etiquetas; de ahí el nombre de 'lenguaje de etiquetado' (Hyper Text Markup Language). Es decir, los efectos deseados: negrita, cursiva, tamaño de letra, etcétera, se consiguen, en general⁵, colocando una etiqueta que abre y otra que cierra, por ejemplo, en nuestro archivo las etiquetas `EL punto` consiguen que el texto entre medias se muestre en negrita.

En general, cuando usamos un editor HTML como Composer o Front-Page, todo esto nos pasa inadvertido, pues escribimos como si de un procesador de textos se tratara y el programa crea internamente el código HTML con las etiquetas correspondientes. En nuestro trabajo con Descartes, sólo tendremos que entrar en este código HTML para localizar las etiquetas `<applet>.....</applet>`, pues es donde va el applet que creamos. Como veremos más adelante, no necesitamos escribir todo este código del applet de apariencia intimidante, sino que se generará solo. Sin embargo, conocer estas etiquetas `<applet>... </applet>` nos permitirá encontrar rápidamente dentro del código HTML donde se encuentra nuestro applet.

⁵ `
` es una excepción, su misión es provocar un salto de línea.

Examinemos con más detalle el código:

ETIQUETA DE APERTURA:

```
<applet code="Descartes.class"
        codebase="."
        archive="Descartes.jar"
        width=480 height=360>
```

La encontraremos siempre que introduzcamos un applet en una página web, sea Descartes o no. Contiene información sobre el nombre del applet (descartes.jar), la ruta de acceso, en este caso relativa (./ indica que descartes.jar está en la misma carpeta), el archivo con la clase principal del applet (descartes.class), y las dimensiones (ancho por alto expresada en píxeles) de la ventana del applet que pueden ser cambiadas a voluntad. En principio, esto permanecerá siempre igual salvo que queramos modificar la ruta de acceso o las dimensiones. Ahora trabajaremos sólo con dos archivos con la siguiente estructura:

```
C:\minicurso\descartes.jar (el applet propiamente dicho)
C:\minicurso\ejemplo1.htm (el archivo desde donde llamamos al
applet)
```

ETIQUETA CIERRE:

```
</applet>
```

Nos advierte de que el código correspondiente al applet acaba precisamente ahí.

DENTRO DE LAS ETIQUETAS:

Todo el código que aparece dentro de las etiquetas tiene la misma estructura, fijémonos en una línea concreta:

```
<param name="G_00" value="tipo=punto expresión='(2,1)'
        color=rojo texto='(2,1)' tamaño=6
        fuente='Helvetica,BOLD,16'">
```

Los <param ...> son la forma que el profesor-desarrollador tiene de comunicarse con un applet y son los que hacen que el applet que vemos desde el navegador cambie de apariencia. No es difícil intuir que el <param ...> de la línea de código anterior sirve para definir el punto P del applet.

Muchos applets permiten cambiar algo su apariencia mediante este mecanismo, por ejemplo, los applets que crean *banners* o letreros permi-

ten cambiar el texto desplegado mediante un `<param...>` con el que introducimos el texto que queremos que aparezca al visualizarlo con el navegador. Los applets muy configurables permiten muchos `<param ...>`, este es el caso de Descartes, y aunque las ventanas de applet que generamos parezcan applets distintos, estrictamente hablando, se trata del mismo applet, `descartes.jar`, pero con parámetros de partida distintos. Algunos applets generados con Descartes contienen cientos de parámetros, pero conviene mencionar que el código se genera internamente mediante una *ventana de desarrollo o de interfaz*. En este interfaz es donde nosotros, mediante menús desplegables, creamos los objetos matemáticos que estarán presentes en el applet.

3. EL CICLO DE DESARROLLO

La mejor forma de entender esto es completando un ciclo completo de desarrollo con Descartes. Para ello, tomemos como archivo de partida `ejemplo1.htm` y añadamos un 'control' gráfico. Aunque describimos más adelante en detalle todos los elementos, baste decir que un control gráfico es un punto que el usuario puede mover con el ratón.

1. Abrimos el archivo `ejemplo1.htm` con el navegador.
2. Con un clic en el botón *config* se abre la ventana de desarrollo del applet.
3. *Seleccionamos Controles>+(botón)>gráfico>...* y le damos nombre, color, coordenadas, etc., rellenando los campos que aparecen, pudiendo dejar algunos en blanco.
4. Hacemos clic en el botón aceptar. El resultado tiene que ser visible ya en el navegador.

NOTA: Estas modificaciones no son definitivas, pues el applet no está autorizado a escribir en el disco duro y si actualizamos la página, veremos que los cambios se pierden (y las horas de trabajo dedicadas). Los siguientes pasos están destinados a hacer permanentes los cambios que hayamos introducido mediante la ventana de desarrollo.

5. Si volvemos a *config* y seleccionamos código nos aparece una ventana ¡con todo el código nuevo! Podemos ver un nuevo `<param ...>` el correspondiente al control gráfico añadido, que no estaba en el archivo inicial `ejemplo1.htm`.
6. Con `Control+c` copiamos el texto que aparece en esta ventana ya seleccionado.
7. Abrimos el archivo `ejemplo1.htm` con un editor de texto, (desde *ie* podemos hacer en `Ver>Código Fuente`) localizamos el código del applet por las etiquetas `<applet>...</applet>` lo seleccionamos y con `Control+v` lo sustituimos por el nuevo.
8. *Volvemos a cargar en el navegador el archivo ejemplo1.htm* y los cambios ya son permanentes.

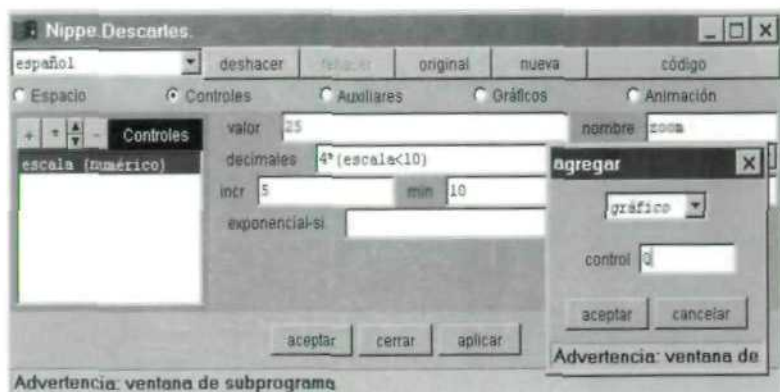


Figura 5

Conviene indicar que la ventana de desarrollo o de interfaz que se abre haciendo clic en config o bien doble clic en cualquier punto interior del applet es lo que hace de Descartes una herramienta muy útil, sin ella, manejar todas las posibilidades de parámetros y atributos asociados a cada uno sería muy complicado (y así ocurría en la primera versión del applet). Mediante ella, tenemos acceso a cualquier elemento ya presente en el applet para su eliminación o modificación y la posibilidad de introducir cualquier otro elemento que deseemos. La misión de este interfaz es generar el código de los `<param ...>` de forma intuitiva sin tener que recordar identificadores o sintaxis. Ocurre algo similar que con la carta de un restaurante, se convierte un interfaz entre nosotros y la cocina, podríamos ir a la cocina, hablar con el cocinero explicarle lo que queremos, seleccionar los ingredientes y tener control completo sobre la elaboración, pero en ese caso, quizás, no tendría demasiado interés acudir a un restaurante.

HOMBRE →	INTERFAZ →	MAQUINA
Profesor →	Ventana de interfaz de Descartes →	Java
Desarrollador →	Interfaz de programas de aplicación (API) →	Código fuente
Creador de páginas web →	Editor HTML →	Lenguaje HTML
Cliente →	Carta →	Cocina

Aunque existe un manual de referencia on-line⁶, vamos a hacer un recorrido rápido por los distintos objetos en forma de ejercicio o tutorial. Iremos incorporando elementos a un nuevo archivo ejemplo2.htm que obtendremos a partir del ejemplo1.htm. Los objetos⁷ aparecen agrupados por afinidad en categorías:

⁶ <http://descartes.cnice.mecd.es/Formacion.htm>

⁷ En realidad, deberíamos de hablar de parámetros (`<param=... >`), pues cada objeto tiene asociado uno.

Espacio: es un único objeto cuyas propiedades determinan la apariencia del applet: fondo, red, ejes, etc. Una buena elección de colores ayuda mucho a la buena visibilidad en pantalla además de hacerlo más motivador.

- Ejercicio: Añadir unos ejes y una red a nuestro applet en archivo ejemplo1.htm.

Controles: son objetos que permiten la interacción del estudiante, pues generan en la pantalla puntos que se pueden arrastrar con el ratón (controles gráficos) o 'spinners' (controles numéricos) donde introducir valores por teclado. Son un elemento clave en el diseño: si en un applet no colocamos ninguno, puede que tengamos en él gráficos dinámicos que se muevan mediante una animación pero no porque el alumno interactúe con el applet.

- Ejercicio: Añadir el control gráfico Q en vuestro archivo ejemplo2.htm como hemos hecho el ciclo de ejecución.
- Ejercicio: Al añadir el control gráfico Q observa que se han añadido dos controles numéricos automáticamente Q.x y Q.y. Para Q.y en el menú región selecciona sur y observa el resultado en el applet.

Auxiliares: son objetos que ayudan a relacionar los elementos geométricos del applet, no tienen representación geométrica. Son muy importantes para el profesor-desarrollador pues permiten manejar elementos de gran complejidad en el applet. Por ejemplo, variable, constante, vector (array), función y algoritmo.

- Ejercicio: Construir una variable m que almacene el valor de la pendiente del segmento PQ.

Gráficos: se visualizan en la ventana que el applet despliega en el navegador, son de naturaleza geométrica (punto, segmento, etc.) o textos. Cuando se producen solapamientos de objetos en la ventana, conviene recordar que los objetos se van pintando en el orden en el que aparecen definidos.

- Ejercicio: Sustituir las coordenadas (2,1) por la letra P en el punto del applet.
- Ejercicio: Crear un segmento de extremos los puntos P y Q. Para ello será necesario escribir de nuevo sus coordenadas: (2,1)(Q.x,Q.y)
- Ejercicio: Colocar un texto en la parte superior izquierda de la ventana del applet que diga: la pendiente vale [m]

(NOTA: la posición del texto se expresa en píxeles siendo (0,0) el extremo superior izquierdo y (480,360) para el inferior derecho)

- Ejercicio: Crear un polígono (triángulo en este caso) introduciendo (2,1)(W.x,W.y)(2,W.y)(2,1) y rellenarlo de color.

Animación: Es un objeto en sí misma y se compone de un código junto con unas propiedades de ejecución. Fue incorporado en la última versión del applet. Aunque permite obtener resultados espectaculares, conviene no convertirla en un sustituto de la interacción del alumno.

En todas las categorías aparecen las posibilidades siguientes:

- + (permite agregar un objeto de los que aparecen en la lista desplegable)
- * (agrega otro objeto como el que tenemos resaltado, normalmente con la intención de modificar alguna de sus propiedades)
- - (elimina el objeto)

En el recorrido anterior, partimos de un archivo existente que modificamos; esta práctica de *reciclaje* es muy frecuente y no es raro que en vez de crear un applet desde cero, tomemos uno ya hecho y modifiquemos algún elemento que sirva mejor para nuestro propósito ahorrándonos así mucho trabajo. Esto, dado el gran número de applets disponibles en el proyecto, le da un valor añadido a Descartes muy grande, tanto porque podemos ver y aprender como otros han hecho su applet como porque podemos usarlo.

Finalmente, acabamos con otra propuesta algo más exigente:

- En la siguiente figura se muestra la generación de la parábola mediante una familia de rectas envolventes (cada punto de la parábola resultante es tangente a una de las rectas). El punto P se desplaza sobre la recta, por M (punto medio) pasa la recta perpendicular a PQ. Se trata de construir este applet. Conviene sólo indicar que la recta perpendicular va dejando un rastro de sí misma (el rastro es una propiedad de cualquier objeto geométrico).

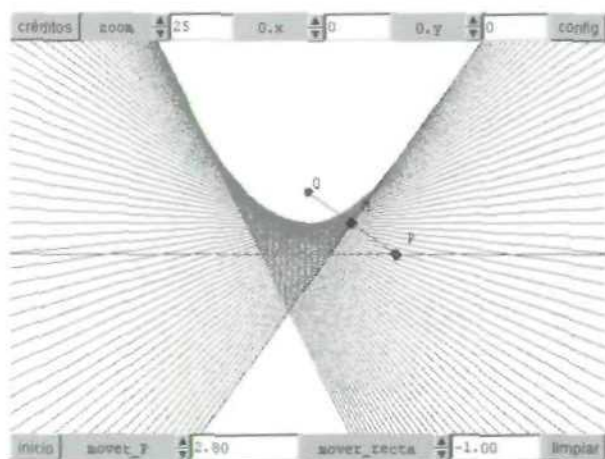


Figura 6. Generación de la parábola mediante una familia de rectas envolventes

En este recorrido por el programa Descartes, hemos intentado mostrar que si hay algo realmente imprescindible para hacer applets con Descartes, son conocimientos de geometría de coordenadas (analítica) en el plano, por algo se le llamó Descartes. Si a lo anterior añadimos unos conocimientos muy elementales de creación de páginas web y gusto por las matemáticas, creo que podemos empezar a adentrarnos en un nuevo medio, el de los contenidos electrónicos, que pueden ayudar a nuestros alumnos a aprender matemáticas de un modo diferente.

BIBLIOGRAFÍA

- <http://descartes.cnice.mecd.es/> Es la web del proyecto Descartes del MECD. Aquí se encuentran el applet, materiales desarrollados, tutoriales, ayudas y documentación técnica. Todo se puede descargar. Su visita es obligada.
- <http://www.cabri.net/> Es la página del proyecto Cabri. Muy completa y también con información de interés sobre la publicación de contenidos.
- <http://www.keypress.com/sketchpad/> En esta página hay multitud de material relacionado con el programa The Geometer's Sketchpad. Se pueden encontrar muchas ideas para desarrollar, con este u otro *software*.
- Las notas a pie de página proporcionan muchos links comentados donde se encuentra información útil para la producción de contenidos matemáticos para la web.

UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA COMPUTACIONAL Y A LA GEOMETRÍA ALGORÍTMICA Y SU INCIDENCIA EN LA SECUNDARIA Y EL BACHILLERATO

Tomás Recio

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

Laureano González-Vega

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

RESUMEN

1. Un proyecto de investigación en la industria del automóvil.
2. Una notas sobre los orígenes del Álgebra Computacional.
3. Un problema de Álgebra Computacional.
4. Algunas dificultades.
5. Algunas precisiones sobre la eliminación.
6. Geometría Algorítmica: un problema sencillo.
7. Algunas consecuencias para la Enseñanza Secundaria.

RESUMEN

El desarrollo de los ordenadores ha propiciado, en los últimos cuarenta años, el estudio de determinados problemas matemáticos ligados al cálculo (exacto) con cantidades masivas de objetos geométricos (puntos, rectas, triángulos, etc.) o algebraicos (matrices, polinomios, etc.) relativamente simples. Muchos de estos problemas han sido objeto de atención matemática desde hace siglos. La nueva forma de abordar los mismos está determinada por tres condiciones: el planteamiento constructivo (algorítmico) de las soluciones; el desarrollo de implementaciones; el análisis de su eficiencia. A su vez, el desarrollo de técnicas específicas para este cálculo algebraico y geométrico (que podemos llamar, unificando ambos aspectos, Cálculo Simbólico) ha dado lugar a la formulación de problemas matemáticos nuevos e interesantes. Las aplicaciones tecnológicas son múltiples.

En este artículo presentaremos, fundamentalmente, una visión de algunos aspectos históricos, de ciertos logros y problemas pendientes en Cálculo Simbólico, siguiendo como hilo conductor un proyecto de investigación en la industria del automóvil.

Y, en segundo lugar, puesto que muchos de los objetos matemáticos con los que trabaja el Álgebra y la Geometría Computacional son elementales y surgen de manera natural en el ámbito de las matemáticas de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato (manipulación de radicales y números algebraicos, simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas, propiedades de figuras simples en geometría analítica y sintética, movimiento de mecanismos en el plano o el espacio, etc.), presentaremos algunos desarrollos del Cálculo Simbólico especialmente relacionados con las matemáticas escolares, extrayendo, además, varias implicaciones para el currículum de Secundaria y Bachillerato.

1. UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EN LA INDUSTRIA DEL AUTOMÓVIL

En los últimos años, un grupo, dirigido por el profesor L. González Vega en la Universidad de Cantabria, ha desarrollado un proyecto de "Integración de nuevas técnicas algebro-numéricas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador: Desarrollo de entornos de resolución de problemas e implementación en un marco industrial de CAD/CAM"¹, en relación directa con la empresa de matricería CANDEMAT.S.A., ubicada en la vecindad de Santander.

¹Financiado a través de fondos de desarrollo regional de la Unión Europea, FEDER IFD1997-0409.

Brevemente, dicha empresa recibe de diversos fabricantes de automóviles (y de la industria aeronáutica, en menor medida) unos ficheros de datos que corresponden a los perfiles de distintas partes de una pieza de la carrocería de un automóvil o del fuselaje de un avión. Su tarea es construir un troquel que será luego utilizado para estampar múltiples copias de tales piezas.

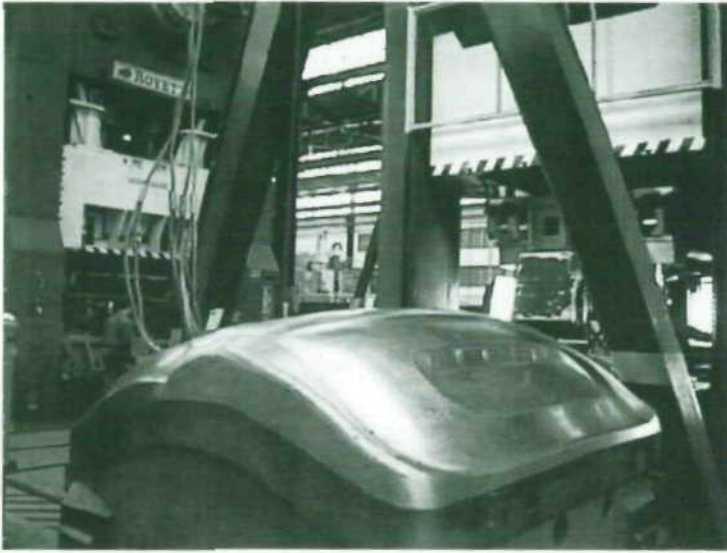


Figura 1. Construcción de un troquel para la industria del automóvil.

El contenido de los ficheros de datos, para cada pieza, son cientos o miles de trozos de superficies paramétricas² (creadas por los diseñadores de la compañía de automóviles a través de sus propios programas de diseño asistido por ordenador), presentados a través de un formato específico (habitualmente VDA: Verband der Automobilindustrie, que representa superficies con parametrización polinomial, expresada en base monomial; o IGES: Initial Graphics Exchange Specification, que admite superficies más generales, en base B-spline.). En la Figura 2 aparece un ejemplo de formato VDA.

En CANDEMAT, la construcción de los troqueles a través del mecanizado con máquinas de control numérico conlleva la resolución de diversos problemas de manipulación de esos ficheros de datos:

²Véase la sección “Un problema ...” para más detalles.

```

SUMDC00=SUFR/1,1,0.,1.,0.,1.,2,7,371.56223201,-4.31971843_21. 0000052C
0091954294,43.7704E-6,-141151404,-.001019241,-.0155413678, 0000053C
.0001358962,.0989117927,-.0001119183,-.0232221533,40.7537E-6, 0000054C
-.0027872074,-6.7920E-6,-797.039181347,-.0020500392,1.53904844107, 0000055C
70.22E-6,6.40161590044,-.95697E-6,-1.77006520304,2.61116E-6, 0000056C
-4.32009803801,-1.95966E-6,1.05601098727,70.36E-8,-.0313275297,-13.E-8, 0000057C
26.1E4111143,-.02545E578,-1.95268116967,33.52E-8,2.05981954475, 0000058C
-83.7E-8,5.0212685612E,1.114E8E-6,-1.7327_40E17,-03.39E-8, 0000059C
-1.55307908122,33.14E-8,544412094,-5.458E-8 0000060C
SURDC002=SUFR/1,1,0.,1.,0.,1.,7,7,3E7.1302742E6,.0367250989, 0000061C
-.00C1839811..0001624677,-47.3E71E-6,.0366267404,-.0365314689, 0000062C
-6.0C140416003,2.05002620051,4.0247005E602,6.21110765236,-6.14E27*47779, 0000063C
8.49C170927E,-7.76721755943,5.32021833239,-8.1657659E032,32.97E1477878, 0000064C
-67.7390724393,41.7451956627,-2.566245C79_9,-1.45291073408, 0000065C
3.20E03265E6,11.588742805,-70.9225061E48,118.095126053,-68.37E754669E, 0000066C
-11.4555789712,17.7915672441,-1.410965E4491,-6.71991E73638, 0000067C
29.0E55793452,-48.3744433874,27.9543634805,4.49361184834,-7.102249833C5, 0000068C
-.356772998,-1.12845355196,7.25259912552,-12.290673749,7.23987561_73. 0000069C

```

Figura 2. Ejemplo de fichero VDA con información geométrica.

- conversión de formatos (desde los ficheros de datos iniciales, hasta los utilizados en el software de control del mecanizado),
- intersección (seccionado) de superficies (para analizar, por ejemplo, la suavidad de la transición entre distintos parches de superficies),
- trazado de curvas sobre una superficie (para determinar, por ejemplo, las trayectorias de mecanizado),
- generación de *offsets* (es decir, superficies “paralelas” a una dada, pero a cierta distancia fija de la misma, para tener en cuenta la distancia entre el punto de control y el punto de aplicación de las herramientas de mecanizado),
- control de errores (para el control de calidad)³,...

Para resolver tales problemas, contar con un software propio y, por tanto, gratuito (o incluso como fuente de ingresos a través de su comercialización entre otras empresas del sector), pero, sobre todo, más rápido y más adaptado (que los programas comerciales existentes) a las necesidades de la empresa, es vital en un sector tan competitivo.

En estos momentos, tras varios años de colaboración con el grupo del profesor González Vega, CADEMAT cuenta ya con un programa propio (denominado CSIS, una de cuyas pantallas aparece en la Figura 3), cuya actualización ante las nuevas demandas de carácter geométrico e informático es objeto de un nuevo proyecto titulado “Desarrollo de nuevas

³Véase, para más detalles, GONZÁLEZ VEGA, L., RECIO, T. “Industrial applications of computer algebra: climbing up a mountain, going down a hill”. *Proceedings 3rd ECM*, vol. 2. Progress in Mathematics. Birkhäuser. Basel, 2001.

prestaciones para CSIS, un entorno CAD/CAM/CAE industrial para matricería” y que ha sido recientemente financiado por SODERCAN (Sociedad para el Desarrollo Regional de Cantabria) sociedad dependiente de la Consejería de Industria, Trabajo y Desarrollo Tecnológico del Gobierno de Cantabria.

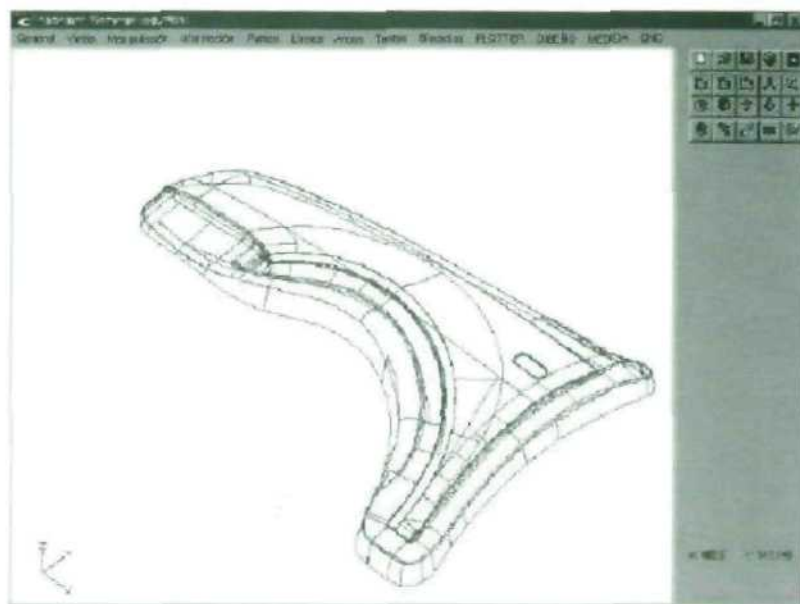


Figura 3. Entorno CSIS para CAD/CAM/CAE.

La resolución de los complejos problemas que aborda CSIS requiere la concurrencia de una multiplicidad de recursos matemáticos. En las secciones siguientes trataremos de poner de manifiesto la modesta contribución, en este contexto, de unas disciplinas relativamente jóvenes, llamadas Álgebra y Geometría Computacional, describiendo, con este pretexto, algunos aspectos básicos de las mismas.

2. UNAS NOTAS SOBRE LOS ORÍGENES DEL ÁLGEBRA COMPUTACIONAL

El Álgebra Computacional, según una definición que ha hecho fortuna, debida a R. Loos⁴, trata del desarrollo, análisis, implementación y aplicación de algoritmos algebraicos. Es una definición un tanto circular, porque no está claro qué se ha de entender por “algoritmos algebrai-

⁴BUCHBERGER, B., COLLINS, G., LOOS, R. “Computer Algebra”. *Computing Supplementum 4*, Springer, Viena, 1982.

cos", salvo por la vía expeditiva de considerar, digamos, el algoritmo de Euclides, relativo al cálculo del máximo común divisor de polinomios, como paradigma. Es decir, se puede considerar que un programa que admita como entrada un par de polinomios univariados con coeficientes numéricos y que arroje, como salida, el máximo común divisor de ambos, y lo haga de manera precisa y eficiente, es un ejemplo prototípico de Álgebra Computacional. En otro orden de cosas, también se puede describir esta disciplina señalando que programas tan conocidos como Maple, Mathematica, Derive, Reduce, Magma, Axiom, etcétera, son, substancialmente, programas de Álgebra Computacional.

El Álgebra Computacional trata, en definitiva, de la manipulación automática y exacta con símbolos, como las potencias de x que aparecen en la descripción de un polinomio, aunque también aparecen muchas veces otros símbolos que no tienen nada de algebraicos, como el símbolo integral \int o diferencial δ . Por ejemplo, los dos trabajos que se consideran las primeras contribuciones modernas al Álgebra Computacional se refieren a la diferenciación automática: son las tesis de H. G. Kahrmanian⁵: "*Analytical differentiation by a digital computer*" y de J.F. Nolan⁶: "*Analytical differentiation on a digital computer*", ambas presentadas en 1953. Por eso parece más adecuado hablar, antes que de Álgebra Computacional, de Cálculo Simbólico en general, por contraposición a la manipulación (aproximada) con números, propia del Cálculo Numérico (aunque en la práctica industrial tal contraposición, teórica, desaparece, para dar lugar a una fructífera concurrencia y colaboración de métodos numéricos y algebraicos)⁷.

Por otra parte es difícil encontrar una referencia completa a los precursores del Álgebra Computacional, aunque estos precursores plantean ya -en nuestra opinión- algunos problemas de interés general y enunciado elemental, que pudieran ser de interés para los profesores de Secundaria.

⁵KAHRIMANIAN, H. G. "*Analytical differentiation by a digital computer*". M. A. Thesis. Temple University. Philadelphia, presentada en 1953.

⁶NOLA, J. F. "*Analytical differentiation on a digital computer*". M. Sc. Thesis. MIT. Cambridge, Mass, presentada en 1953.

⁷El lector interesado en los detalles relativos a la evolución de estos programas y algoritmos en el último medio siglo es remitido a la reseña histórica del Álgebra Computacional que aparece en GEDDES, K., CZAPOR, S. R., LABHAN, G. *Algorithms for computer algebra*. Kluwer Academic Publishers. Boston, 1992. o al reciente volumen GRABMEIER, J., KALTOFEN, E., WEISPFENNING, V. *Computer Algebra Handbook: Foundations, Applications, Systems*. Springer-Verlag. Berlín, 2003., donde aparece un capítulo dedicado a la historia de esta joven disciplina. También resultan interesantes -y vigentes en muchos sentidos- los aspectos históricos y descriptivos mencionados en un viejo artículo en castellano de PAVELLE, R., ROTHSTEIN, M., FITCH, J. "*Álgebra por ordenador*". *Scientific American*. Diciembre de 1981.

La historia del Cálculo Simbólico puede remontarse hasta Leibnitz, pero resulta particularmente interesante la propuesta de Larcombe⁸ que se refiere a la estrecha relación conceptual entre los orígenes de los ordenadores en el trabajo de Charles Babbage (a mediados del siglo XIX) y el Álgebra Computacional. Aunque este no es lugar para detallar esta interesante conexión, no podemos resistirnos a copiar un trozo de la traducción de Ada Augusta Byron, Condesa de Lovelace e hija del poeta inglés Lord Byron, del artículo original de Luigi Menabrea, que versa sobre las conferencias pronunciadas en Turín (1840) por C. Babbage, relativas a su trabajo en torno a la construcción de una “máquina analítica” o “analytical engine” de carácter algebraico (la negrita es nuestra):

“The engine can arrange and combine its numerical quantities exactly as if they were letters or any other general symbols; and in fact it might bring out its results in algebraical notation, were provisions made accordingly. It might develop three sets of results simultaneously, viz. symbolic results ... numerical results (its chief and primary object) and algebraical results in literal notation”

Como es fácil de imaginar, en la época a la que hacemos referencia las “máquinas” eran poco más que una colección de ruedas dentadas y mecanismos de barras, pero el objetivo final seguía siendo, como hoy ocurre en Álgebra Computacional, el que, en el supuesto de que todo se comportase de modo teóricamente preciso, el resultado fuese “exactamente” el determinado por la geometría de la máquina (también hoy confiamos en que el procesador de nuestro ordenador funcione como esperamos). Nuestro compatriota Leonardo Torres Quevedo, que retoma una parte de los trabajos de Babbage, explica de modo elemental (en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en 1901) que

“Una máquina algebraica es un aparato que impone entre los valores simultáneos de diferentes elementos las relaciones expresadas matemáticamente en una fórmula analítica.

...en el movimiento oscilatorio del péndulo simple existe cierta dependencia entre el tiempo que dura una oscilación y la longitud del péndulo: el tiempo es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud.

...pues inversamente, un péndulo dispuesto de modo que pueda modificarse su longitud serviría para obtener, sin cálculo

⁸LARCOMBE. P. J. On Lovelace, Babbage and the Origins of Computer Algebra. En Computer Algebra Systems. Ed. M. Wester, J. Wiley. Chichester, 1999.

ninguno, la raíz de un número cualquiera, bastaría darle la longitud expresada por este número y medir cuanto dura una oscilación.”

A pesar de la simplicidad de la explicación, la construcción (teórica o práctica) de mecanismos que permitiesen la formulación “exacta” y automática de expresiones algebraicas es un asunto que ocupa (y apasiona) a numerosos matemáticos en el siglo XIX: en la Figura 4 se ha recogido un ejemplo famoso, el denominado inversor de Peaullicier (1864), que permite la conversión⁹ del movimiento rectilíneo en circular, permitiendo, de este modo, aplicar la fuerza de las máquinas de vapor sobre las ruedas, por ejemplo, de una locomotora. El artificio está fijado por los puntos O y C al plano, de modo que, cuando el punto Q recorre la recta s , el punto P recorre un trozo de la circunferencia γ .

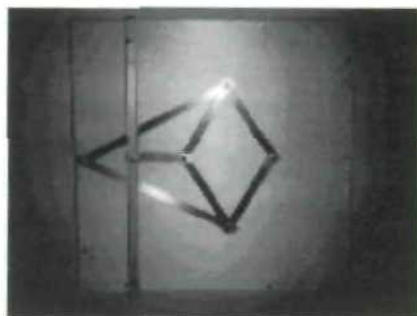
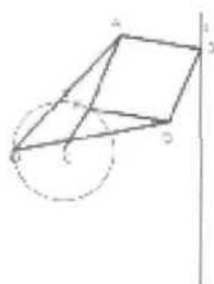


Figura 4. Inversor de Peaullicier.

La discusión por la primacía de su descubrimiento (considerado crucial en su época) entre el geómetra francés Peaullicier y Lipkin, un alumno del general (y matemático) ruso Chebyshev, estuvo a punto de provocar un conflicto diplomático. En fin, para no entrar en más detalles sobre esta prehistoria del Álgebra Computacional que alguien debería escribir en un futuro, baste señalar que los trabajos de L. Torres-Quevedo sobre las máquinas algebraicas fueron acogidos favorablemente por los científicos de la época, como muestra el informe emitido, para la Academie des Sciencies, por Deprez, Poincaré y Appell, a propósito del artículo “*Sur les machines a calculer*”¹⁰

⁹ Insistimos en que la dificultad estriba en el carácter exacto de tal conversión, puesto que el paralelogramo de Watt, muy anterior, consigue, aproximadamente, lo mismo, y es mucho más simple, por lo que -tras el descubrimiento de los lubricantes a finales del siglo XIX- ha predominado frente al de Peaullicier, en las aplicaciones industriales, véase WELLS, D., SHARP, J. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin. Londres, 1991.

¹⁰ DEPREZ, POINCARÉ y APPELL. *Informe emitido para la Academie des Scien-*

“En resume, M. Torres a donne une solution theorique generale et complete du probleme de la construction des relations algebriques et trascendentes par des machines, il a, de plus, construit effectivement des machines d’un maniere-ment commode La Commission demande a l’Academie d’ordonner l’insertion du Memoire de M. Torres au Recueil des Savants etrangers”.

El tema de las máquinas algebraicas (y sus derivaciones) está lejos de considerarse agotado en la actualidad¹¹. Una excelente “mostra” de mecanismos, con demostraciones, ejemplos dinámicos, notas históricas, etc. aparece en *Theatrum Machinorum*¹².

3. UN PROBLEMA DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL

Ya hemos señalado en una sección anterior que la manipulación, en el contexto industrial, de superficies paramétricas (es decir, de la forma $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, donde las expresiones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son funciones racionales –cocientes de dos polinomios con coeficientes racionales– de u, v) conlleva, con frecuencia, el cálculo de la intersección de dos tales superficies. Supongamos que ambas vienen dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x_i = x_i(u, v), y_i = y_i(u, v), z_i = z_i(u, v), \quad i = 1, 2$$

Naturalmente, los puntos de la intersección verifican el sistema de tres ecuaciones racionales con dos incógnitas

$$x_1(u, v) = x_2(u, v), y_1(u, v) = y_2(u, v), z_1(u, v) = z_2(u, v)$$

que hay que resolver para hallar los valores de los parámetros que corresponden con los puntos de la intersección.

Una forma a veces más cómoda de realizar este cálculo consiste en

ces a propósito del artículo “Sur les machines a calculer”, finalmente publicado en las Comptes Rendues de l’Academie des Sciences, CXXX, Págs. 1-3. Febrero de 1900.

¹¹Por ejemplo, podemos citar la fundamentación rigurosa y la mejora de los trabajos –del siglo XIX– de Kempe, sobre la construcción de mecanismos que dibujen cualquier tipo de curva algebraica, realizada por Kapovich y Millson hacia 1998, que concluyen con la demostración de un teorema enunciado por W. Thurston: *Si M es una variedad lisa compacta, entonces, existe un mecanismo de barras L tal que M es difeomorfa a una unión de componentes del espacio moduli M(L)*. Se trata, en definitiva, de un teorema de universalidad: los mecanismos de barras pueden dar lugar a geometrías tan complicadas como uno pueda imaginar.

¹²*Theatrum Machinorum*: <http://museo.unimo.it/theatrum/machine/guida.htm>.

- a) hallar la ecuación implícita de una de ellas, digamos $f(x, y, z) = 0$, donde $f(x, y, z)$ es un polinomio tal que $f(x_1(u, v), y_1(u, v), z_1(u, v))$ es idénticamente cero.
- b) sustituir las variables de $f(x, y, z)$ por $x_2(u, v), y_2(u, v), z_2(u, v)$
- c) hallar valores (u, v) que verifiquen la ecuación implícita de la curva resultante $g(u, v) = f(x_2(u, v), y_2(u, v), z_2(u, v)) = 0$. Sustituir tales valores en cualquiera de las ecuaciones paramétricas $x_i = x_i(u, v), y_i = y_i(u, v), z_i = z_i(u, v)$, para obtener puntos en la intersección de las dos superficies.

Evitando de este modo la resolución de un complicado sistema de ecuaciones, al reducirlo a la búsqueda de puntos en una curva.

En nuestro contexto ocurre, además, que muchas de las superficies paramétricas tienen unas ecuaciones similares (es decir, implicando a los mismos monomios en u, v y que sólo se diferencian en los valores numéricos (no nulos) de sus coeficientes). Por poner un ejemplo concreto ligado a los problemas que aborda CANDEMAT, una familia de superficies viene dada por las siguientes expresiones (donde p_1, p_2, p_3 juegan el papel de x, y, z , mientras que s, t , son aquí los parámetros y las $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, s_i, t_i$, etcétera, son coeficientes numéricos).

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (x_{00}f_0 + x_{10}f_1 + x_{20}f_2 + x_{30}f_3)g_0 + (x_{01}f_0 + x_{11}f_1 + x_{21}f_2 + x_{31}f_3)g_1 \\
 &\quad + (x_{02}f_0 + x_{12}f_1 + x_{22}f_2 + x_{32}f_3)g_2 + (x_{03}f_0 + x_{13}f_1 + x_{23}f_2 + x_{33}f_3)g_3 \\
 p_2 &= (y_{00}f_0 + y_{10}f_1 + y_{20}f_2 + y_{30}f_3)g_0 + (y_{01}f_0 + y_{11}f_1 + y_{21}f_2 + y_{31}f_3)g_1 \\
 &\quad + (y_{02}f_0 + y_{12}f_1 + y_{22}f_2 + y_{32}f_3)g_2 + (y_{03}f_0 + y_{13}f_1 + y_{23}f_2 + y_{33}f_3)g_3 \\
 p_3 &= (z_{00}f_0 + z_{10}f_1 + z_{20}f_2 + z_{30}f_3)g_0 + (z_{01}f_0 + z_{11}f_1 + z_{21}f_2 + z_{31}f_3)g_1 \\
 &\quad + (z_{02}f_0 + z_{12}f_1 + z_{22}f_2 + z_{32}f_3)g_2 + (z_{03}f_0 + z_{13}f_1 + z_{23}f_2 + z_{33}f_3)g_3
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_0 &= \frac{s_2-s}{s_2-s_0} \\
 f_1 &= \frac{s-s_0}{s_2-s_0} \\
 f_2 &= 0,0 \\
 f_3 &= 0,0
 \end{aligned} \right\} \text{if } s_0 \leq s < s_2;$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_0 &= 0,0 \\
 f_1 &= 0,0 \\
 f_2 &= \frac{s_4-s}{s_4-s_3} \\
 f_3 &= \frac{s-s_3}{s_4-s_3}
 \end{aligned} \right\} \text{if } s_3 \leq s < s_4;$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_0 &= 0,0 \\
 f_1 &= \frac{t_3-t}{t_3-t_2} \\
 f_2 &= \frac{t-t_2}{t_3-t_2} \\
 f_3 &= 0,0
 \end{aligned} \right\} \text{if } t_2 \leq t < t_3;$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_0 &= 0,0 \\
 f_1 &= \frac{s_3-s}{s_3-s_2} \\
 f_2 &= \frac{s-s_2}{s_3-s_2} \\
 f_3 &= 0,0
 \end{aligned} \right\} \text{if } s_2 \leq s < s_3$$

$$\left. \begin{aligned}
 g_0 &= \frac{t_2-t}{t_2-t_0} \\
 g_1 &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0} \\
 g_2 &= 0,0 \\
 g_3 &= 0,0
 \end{aligned} \right\} \text{if } t_0 \leq t < t_2$$

$$\left. \begin{aligned}
 g_0 &= 0,0 \\
 g_1 &= 0,0 \\
 g_2 &= \frac{t_4-t}{t_4-t_3} \\
 g_3 &= \frac{t-t_3}{t_4-t_3}
 \end{aligned} \right\} \text{if } t_3 \leq t < t_4$$

con valores numéricos del tipo

$x_{00} = -402,396210422345$	$y_{00} = 125,604939074148$	$z_{00} = 76,0994513388919$
$x_{10} = -261,17588628063$	$y_{10} = 120,007923434398$	$z_{10} = 80,2658802206019$
$x_{20} = -119,951398608196$	$y_{20} = 114,410862351266$	$z_{20} = 84,4324639780064$
$x_{30} = 21,2789144514636$	$y_{30} = 108,813733891507$	$z_{30} = 88,5992634123272$
$x_{01} = -402,301520929449$	$y_{01} = 57,6898233810474$	$z_{01} = 57,9054501358602$
$x_{11} = -261,108042469145$	$y_{11} = 53,9585848013379$	$z_{11} = 62,570735352082$
$x_{21} = -119,914564008841$	$y_{21} = 50,2273462216285$	$z_{21} = 67,2360205683038$
$x_{31} = 21,2789144514635$	$y_{31} = 46,496107641919$	$z_{31} = 71,9013057845257$
$x_{02} = -402,274168598392$	$y_{02} = 38,0716305763488$	$z_{02} = 52,6498686670318$
$x_{12} = -261,089807581774$	$y_{12} = 36,206011286494$	$z_{12} = 57,8146792486379$
$x_{22} = -119,905446565155$	$y_{22} = 34,3403919966393$	$z_{22} = 62,979489830244$
$x_{32} = 21,2789144514634$	$y_{32} = 32,4747727067845$	$z_{32} = 68,1443004118501$
$x_{03} = -402,179479105497$	$y_{03} = -29,8434851167516$	$z_{03} = 34,4558674640001$
$x_{13} = -261,021963770289$	$y_{13} = -29,8433273465661$	$z_{13} = 40,119534380118$
$x_{23} = -119,8686119658$	$y_{23} = -29,8431241329984$	$z_{23} = 45,7830464205415$
$x_{33} = 21,2789144514633$	$y_{33} = -29,8428535428032$	$z_{33} = 51,4463427840486$

$$\begin{array}{ll}
 s_0 = 0,0 & s_2 = 0,333333333333333 \\
 s_3 = 0,666666666666666 & s_4 = 1,0 \\
 t_0 = -1,14816198642716 & t_2 = 0,333333333333333 \\
 t_3 = 0,666666666666666 & t_4 = 2,14816198642715
 \end{array}$$

A la vista de estos ejemplos, sería, pues, especialmente conveniente poder

- a) bien resolver genéricamente (y por tanto, mediante un precálculo offline) un sistema del tipo

$$x_1(\lambda, u, v) = x_2(\mu, u, v), y_1(\lambda u, v) = y_2(\mu, u, v), z_1(\lambda, u, v) = z_2(\mu, u, v)$$

donde λ, μ representan unos valores genéricos de los coeficientes no nulos de ambas ecuaciones paramétricas

- b) bien implicitar genéricamente una superficie paramétrica del tipo

$$x = x_1(\lambda, u, v), y = y_1(\lambda u, v), z = z_1(\lambda, u, v)$$

de modo que luego sólo tuviéramos que especializar los valores de los parámetros λ para cada superficie concreta y así obtener la intersección de dos superficies mediante la sustitución de las ecuaciones paramétricas de una de ellas en la ecuación implícita de la otra.

4. ALGUNAS DIFICULTADES

Para darnos una idea de las dificultades de este planteamiento, consideremos un ejemplo muy sencillo, con superficies del tipo $x = au + bv$, $y = cu + dv$, $z = eu + fv$, donde a, b, c, d, e, f son valores genéricos que serán sustituidos por números $\neq 0$ en cada superficie particular. Es evidente que la ecuación implícita de la misma viene dada por la expresión:

$$(de - cf)x + (af - be)y + (bc - ad)z = 0 \quad (1)$$

puesto que se trata del plano generado por los vectores (a, c, e) , (b, d, f) y es "natural" asumir que ambos son no proporcionales, para que determinen realmente una superficie. En otro caso, es decir, si los dos vectores fuesen proporcionales, el resultado no sería correcto, ya que tendríamos que obtener las ecuaciones de una recta, pero sólo obtendríamos la identidad $0 = 0$ si sustituimos valores de (a, c, e) , (b, d, f) (verificando la condición de proporcionalidad) en la ecuación (1).

Otro ejemplo, un poco más complejo, puede ser el siguiente. Consideremos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} f &= v - u \\ g &= a^2v^2 - 2vu + u^2 \\ h &= -av - u \end{aligned}$$

donde a representa un valor arbitrario, pero constante. Implicitar genéricamente consiste en eliminar u, v del sistema

$$\{x - f = 0, y - g = 0, z - h = 0\}.$$

La realización computacional de esta eliminación (por medio de diversas técnicas que se comentarán brevemente en las secciones siguientes) con el programa Maple puede hacerse calculando un sistema de ecuaciones equivalente, pero en el que aparezcan "separadas" las variables x, y, z de las variables u, v , lo que arroja el siguiente resultado:

$$[-ay - 2azx - y + 2zx + 2ax^2 + az^2 - z^2 = 0, z + av - x + v = 0, ua + u + ax + z = 0]$$

por lo que la implicación genérica es, precisamente

$$-ay - 2azx - y + 2zx + 2ax^2 + az^2 - z^2 = 0,$$

dado que es el único elemento de esa base triangular con las variables x, y, z .

Ahora supongamos que deseamos especializar para el valor $a = -1$. Nos encontramos con las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= v - u \\y &= v^2 - 2vu + u^2 \\z &= v - u\end{aligned}$$

que, observamos, no corresponden con ninguna superficie, sino con la curva

$$\{y - z^2 = 0, x - z = 0\}.$$

Sin embargo, vemos que la especialización de este valor $a = -1$ en la implicitación genérica

$$-ay - 2azx - y + 2zx + 2ax^2 + az^2 - z^2 = 0$$

conduce a la superficie $(2x - 2z)^2 = 0!$.

E, incluso, si se especializa todo el sistema triangular

$$[-ay - 2azx - y + 2zx + 2ax^2 + az^2 - z^2 = 0, z + av - x + v = 0, ua + u + ax + z = 0],$$

sólo se obtiene el sistema equivalente $x - z = 0$, que no es la ecuación implícita de ninguna curva!

Dejando a un lado el valor admonitorio de estos ejemplos, una objeción que podría ponerse a contraejemplos de este tipo es el hecho de que, sin duda, no va a ocurrir nunca en el marco de un problema "real" el que, para un valor concreto de a en el rango dado por los diseñadores, la familia de superficies se convierta en una curva. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que es posible encontrar casos en los que la especialización de la implicitación genérica no es la ecuación implícita de la *superficie* especializada.

Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned}f &= v + au \\g &= (v - u)(v + u) \\h &= -av - u\end{aligned}$$

Su implicitación nos da la familia de cuádricas $a^2y + x^2 - y - z^2 = 0$ (en la Figura 5 se representa la correspondiente a $a = 2$), pero para $a = -1$, la superficie paramétrica se convierte en el plano $x - z = 0$, mientras que la especialización de la ecuación implícita da un producto de planos $x^2 - z^2 = 0$, uno de los cuales no corresponde a la superficie considerada.

Resumiendo, observamos que nuestro planteamiento en la sección anterior da lugar a dos problemas bien diferenciados:

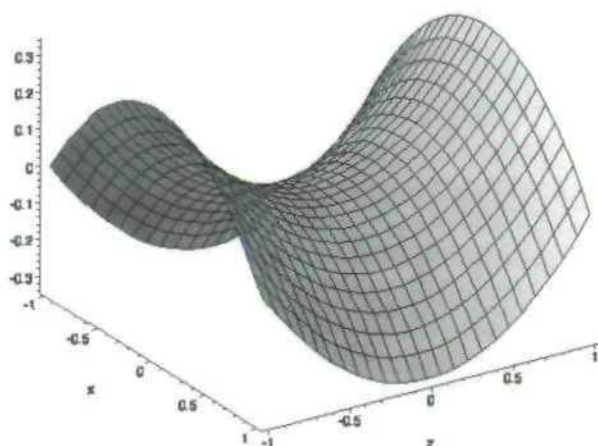


Figura 5. La cuádrica $3y + x^2 - z^2 = 0$.

- cómo implicitar una superficie paramétrica concreta
- cómo averiguar, si implicitamos una superficie con coeficientes indeterminados, para qué valores de los mismos es correcta la solución obtenida sustituyendo tales valores en el resultado general.

Además, parece evidente, a la vista del tamaño de las fórmulas involucradas en los ejemplos que surgen en la industria, que es necesario resolver ambos problemas con ayuda de un ordenador.

Tareas de este tipo son, precisamente, las características de esa materia llamada Cálculo Simbólico o Álgebra Computacional.

5. ALGUNAS PRECISIONES SOBRE LA ELIMINACIÓN

Como hemos señalado arriba, si consideramos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} f &= v - u \\ g &= a^2v^2 - 2vu + u^2 \\ h &= -av - u \end{aligned}$$

donde a representa un valor arbitrario, pero constante, para implicitar es preciso eliminar u, v del sistema (en las variables x, y, z, u, v),

$\{x - f = 0, y - g = 0, z - h = 0\}$. Pero, ¿qué es eliminar? Para contestar a esta pregunta es conveniente situarse en dos puntos de vista próximos, pero diferentes: el algebraico y el geométrico.

Desde el punto de vista algebraico, dados unos polinomios en $k[x_1, \dots, x_n, t]$ (donde k es un cuerpo de coeficientes, tal como los números racionales, o los reales, o los complejos), digamos,

$$p_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, p_s(x_1, \dots, x_n, t)$$

para eliminar t se trata de hallar otros polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$, digamos,

$$q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_m(x_1, \dots, x_n)$$

de modo que $r(x_1, \dots, x_n)$ es una combinación de los polinomios $p_i(x_1, \dots, x_n, t)$ con coeficientes $k[x_1, \dots, x_n, t]$ si y solamente si $r(x_1, \dots, x_n)$ es una combinación en $k[x_1, \dots, x_n]$ de los polinomios $q_i(x_1, \dots, x_n)$.

Es decir, se trata de hallar una *base* en $k[x_1, \dots, x_n]$ (es decir, con una variable menos) de los polinomios de ese mismo anillo que son combinación, con coeficientes en $k[x_1, \dots, x_n, t]$, de los polinomios dados.

Por ejemplo, si consideramos $\{p_1 = x + t, p_2 = x - t\}$ en $\mathbb{Q}[x, t]$ y deseamos eliminar la variable t , observamos que un polinomio $r(x)$ en la sola variable x , si es combinación de $\{p_1, p_2\}$, digamos

$$r(x) = a(x, t)(x + t) + b(x, t)(x - t),$$

y hacemos $y = 0$, obtenemos

$$r(x) = a(x, 0)x + b(x, 0)x = m(x)x,$$

para cierto polinomio $m(x) = a(x, 0) + b(x, 0)$. Es decir, $r(x)$ tiene que ser, necesariamente, un múltiplo de x . Además, recíprocamente, vemos que

$$x = \frac{1}{2}(x + t) + \frac{1}{2}(x - t),$$

y, por tanto, cualquier múltiplo de x va a ser combinación de $\{p_1, p_2\}$. Por tanto, el resultado de eliminar la variable t en $\{x + t, x - t\}$ es simplemente $\{x\}$.

Siguiendo con los ejemplos sencillos, si ahora deseamos eliminar t en el conjunto de polinomios formado por un único polinomio $\{x + t\}$ en $\mathbb{Q}[x, t]$, razonando como antes, vemos que si $r(x)$ es de la forma $r(x) = a(x, t)(x + t)$ entonces, necesariamente, $r(x) = 0$, puesto que en

otro caso $r(x)$ tendría grado positivo en la variable t . Recíprocamente, $0 = 0(x+t)$, luego el resultado de eliminar la variable t en $\{x+t\}$ es $\{0\}$.

Otro caso que es fácil de resolver manualmente es la eliminación de t en $\{xt-1, t\}$. Ahora no resulta sencillo encontrar ninguna característica especial de $r(x)$, si escribimos

$$r(x) = a(x, t)(xt - 1) + b(x, t)t,$$

pero si observamos que $1 = -1(xt-1) + xt$, podemos concluir que, como cualquier polinomio es múltiplo de 1, el resultado de eliminar la variable t en $\{xt-1, t\}$ es $\{1\}$.

Desde el punto de vista geométrico, eliminar se traduce (*grosso modo*, pero los matices diferenciales son importantes) del modo siguiente: dados unos polinomios en $k[x_1, \dots, x_n, t]$, digamos,

$$p_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, p_s(x_1, \dots, x_n, t)$$

se trata de hallar otros polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$, digamos,

$$q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_m(x_1, \dots, x_n)$$

de modo que existe $b \in k$, tal que (a_1, \dots, a_n, b) es una solución en k^{n+1} de

$$\{p_1(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \dots, p_s(x_1, \dots, x_n, t) = 0\},$$

si y solamente si (a_1, \dots, a_n) es una solución en k^n de

$$q_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, q_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Es decir, eliminar geoméricamente es la operación que trata de hallar unas ecuaciones de la proyección (sobre el espacio afín con una coordenada menos, la última en este caso), del conjunto de soluciones del sistema $\{p_1(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \dots, p_s(x_1, \dots, x_n, t) = 0\}$. Así, en los ejemplos anteriores, vemos que:

- el sistema $\{x+t=0, x-t=0\}$ tiene como única solución en \mathbb{Q}^2 el punto $(0,0)$ y, por tanto, su proyección sobre la primera coordenada (suponiendo que \mathbb{Q}^2 es el plano (x,t)) es el punto $(0,0)$, que corresponde con la solución de la ecuación $x=0$, donde x es, precisamente, el resultado de eliminar algebraicamente la variable t en $\{x+t, x-t\}$,

- análogamente, al proyectar la recta $x + t = 0$ obtenemos todo el eje \mathbb{Q} , que tiene como ecuación, precisamente, $0 = 0$,
- por último, al proyectar la (inexistente) solución del sistema $\{xt - 1 = 0, t = 0\}$ en \mathbb{Q}^2 , obtenemos el conjunto vacío y, por tanto, su ecuación será $1 = 0$.

Ahora bien, es fácil observar que no siempre ocurre como en estos tres ejemplos: compárese la eliminación algebraica y la geométrica en los siguientes casos:

1. $\{xt-1\}$. La eliminación algebraica es 0, pero la eliminación geométrica no es toda una recta afín, sino la recta menos el origen.
2. $\{t^2-x\}$. La eliminación algebraica es 0, pero la eliminación geométrica (sobre los reales) no es toda una recta afín, sino una semirrecta.

Sin entrar en otros detalles, podemos señalar que la identificación de la eliminación algebraica con la geométrica sólo se da en el caso de incluir

- a) todas las soluciones complejas del sistema; y
- b) todas las soluciones en el infinito, es decir, en el caso algebraicamente cerrado y proyectivo.

En el caso afín complejo, la proyección es algo menor que la dada por el sistema obtenido por la eliminación algebraica: el teorema de Chevalley precisa estos extremos¹³. Y en el caso afín real, la proyección puede ser considerablemente menor: el teorema de Tarski-Seidenberg se encarga de caracterizar la proyección. De ambos teoremas hay versiones algorítmicas (implementadas en programas de Cálculo Simbólico), pero no son triviales de describir¹⁴.

Ahora bien, para la implicitación, "afortunadamente", sólo es necesario realizar la eliminación algebraica¹⁵. Pero, salvo en algunos casos muy sencillos, esta eliminación es un poco complicada de realizar manualmente. Por ejemplo, tratemos de eliminar t en el conjunto $\{x-t^2, y-t^3, x+y\}$. Siguiendo la pauta de ejemplos anteriores, escribiríamos

$$r(x, y) = a(x, y, t)(x - t^2) + b(x, y, t)(y - t^3) + c(x, y, t)(x + y)$$

¹³MUMFORD, D. "Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties". *Grundlehren der math. Wiss.*, 221. Springer. Berlín, 1976.

¹⁴JACOBSON, N. *Basic Algebra I*. W. H. Freeman and Co. San Francisco, 1974.

¹⁵El lector interesado puede consultar un libro de texto elemental, que enfatiza los aspectos algorítmicos y muy fácil de leer, como COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D. *Ideals, varieties and algorithms*. Springer. New York, 1992.

e intentaríamos obtener conclusiones sobre $r(x, y)$. Para ello tal vez podríamos hacer $t = y/x$, sustituir en la expresión anterior y quitar denominadores, obteniendo

$$r(x, y) = a(x, y, \frac{y}{x})(x - \frac{y^2}{x^2}) + b(x, y, y/x)(y - \frac{y^3}{x^3}) + c(x, y, y/x)(x + y)$$

y, por tanto

$$x^p r(x, y) = \bullet_1(x^3 - y^2) + \bullet_2(yx^3 - y^3) + \bullet_3(x + y) \quad (2)$$

para cierto exponente p y ciertos polinomios que, sin concretar, podemos representar genéricamente como \bullet_i . A continuación se puede observar que el segundo miembro de la igualdad (2) es una combinación de $\{x^3 - y^2, x + y\}$ y que las combinaciones de $\{x^3 - y^2, x + y\}$ pueden sustituirse por combinaciones de $\{x^3 - x^2, x + y\}$. Pero es difícil precisar más sobre la forma de $r(x, y)$.

En estos casos (y en otros mucho más complejos) es conveniente usar un programa de ordenador de Álgebra Computacional, como CoCoA, en el que eliminar t se realiza directamente usando la instrucción "Elim":

```
-----
--          _/          _/          \          --
--         /          - \ /          - \          , \          --
--        \          | \ | \          | \          _- \          --
--       _- _ , _- / _- _ , _- / _- /          \          --
-----
--      Version      : 4.0          --
--      Online Help  : type Man();  --
--      Web site     : http://cocoa.dima.unige.it  --
-----
```

```
-----
-- The current ring is R ::= Q[x,y,z];
-----
```

```
Use R ::= Q[t,y,x]
```

```
Elim(t, Ideal(x-t^2,y-t^3,x+y))
```

```
Ideal(y + x, -x^2 + x)
```

obteniendo como resultado la familia de las combinaciones de los polinomios $\{y + x, -x^2 + x\}$.

Una forma de explicar, de manera relativamente sencilla, el procedimiento que sigue CoCoA y otros programas de Álgebra Computacional para eliminar, es relacionarlo con otra operación, mucho más conocida, como la triangulación¹⁶ de un sistema de ecuaciones lineales.

Consideremos, por ejemplo, el sistema $\{x + y - 1 = 0, x + y - 2 = 0\}$ y representemos la correspondiente matriz del sistema

$$\begin{array}{l} x + y - 1 \\ x + y - 2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mediante operaciones elementales, restando la segunda fila a la primera, obtenemos otro sistema equivalente (cada polinomio del nuevo sistema es combinación de los polinomios del sistema dado):

$$\begin{array}{l} x + y - 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema equivalente, $\{x + y - 1 = 0, 1 = 0\}$ es “triangular” (en un sentido amplio) y, evidentemente, la eliminación de la variable x conduce a un polinomio $1 = 0$ que nos indica que el sistema es incompatible. Análogamente, tomemos el sistema $\{x + y - 1 = 0, 2x + 3y - 2 = 0\}$ y representemos la correspondiente matriz del sistema

$$\begin{array}{l} x + y - 1 \\ 2x + 3y - 2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones elementales, restando la segunda fila del doble de la primera, obtenemos otro sistema equivalente (cada polinomio del nuevo sistema es combinación de los polinomios del sistema dado):

$$\begin{array}{l} x + y - 1 \\ 0 - y + 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

llegando al sistema $\{x + y - 1 = 0, -y = 0\}$, que es triangular y que nos indica que y es el resultado de eliminar x en el sistema dado.

Pues bien, de modo similar, en el caso no lineal podríamos proceder también así. Por ejemplo, dado el sistema $\{x^2 + y^2 - 4 = 0, xy - 1 = 0\}$, consideraríamos un orden (lexicográfico, con $x > y$) en los monomios, tal como $x^2 > xy > y^2 > 1$ y construiríamos una matriz asociada como sigue:

$$\begin{array}{l} x^2 + 0xy + y^2 - 4 \\ 0x^2 + xy + 0y^2 - 1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁶Véase WANG, D. *Elimination Methods*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer. Viena, 2001., para un estudio detallado de esta operación en el caso no lineal, desde una perspectiva computacional.

en la que observamos que el escalon no entre la primera y la segunda fila no es suficiente para que la segunda fila represente sólo a monomios en la letra y . Por tanto, multiplicamos por y la primera fila y por x la segunda y modificamos, además, las columnas correspondientes a los monomios (ordenados como antes de modo lexicográfico, de forma que $x^2y > x > y^3 > y$) obteniendo

$$\begin{array}{l} x^2y + y^3 - 4y \\ x^2y - x \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De nuevo es preciso restar a la primera fila la segunda, lo que nos proporciona el polinomio $x + y^3 - 4y$... Usando este polinomio, multiplicado por y y la ecuación $xy - 1$, llegamos a un polinomio sólo en y que es combinación de los polinomios del sistema inicial: $y^4 - 4y^2 + 1$, resultado de la eliminación de la x en el sistema dado, el cual, además, es equivalente al sistema triangular $\{x + y^3 - 4y, y^4 - 4y^2 + 1\}$.

Este mecanismo de "eliminación gaussiana generalizada" que hemos descrito (groseramente) es la base del algoritmo de triangulación en el caso no lineal, conocido con el nombre de Bases de Gröbner (fijado un cierto orden, como el puramente lexicográfico, en el que, por ejemplo, $x_1 < x_2 < \dots < x_n < t$). Con este método, dado un conjunto P de polinomios, encontramos un conjunto Q equivalente (en el sentido de que los polinomios de P son combinación de los de Q y recíprocamente), pero tal que consiste en:

- un bloque con sólo polinomios en x_1 (si existen tales polinomios entre las combinaciones de polinomios de P),
- un bloque con sólo polinomios en x_1 y x_2 (si existe),
- etcétera, ...,
- un bloque con sólo polinomios en x_1, \dots, x_n (si existe),
- un bloque con sólo polinomios en x_1, \dots, x_n, t .

La colección de todos los bloques excepto el último produce la eliminación de t . Así, usando el programa CoCoA para la familia $\{x^2 + y^2 - 4, xy - 1\}$, para eliminar x , se obtiene el resultado sin más que utilizar el comando GBasis (en el supuesto de haber tomado $x > y$:

```
- Current ring is R = Q[t,x,y,z]
```

```
-----
Use R ::= Q[x,y], Lex;
```

```
I:=Ideal(x^2+y^2-4,xy-1);
```

```
-----
GBasis(I); [-x - y^3 + 4y, -y^4 + 4y^2 - 1]
```

Análogamente, con el programa Maple, la implicitación genérica de la familia de superficies

$$\begin{aligned} f &= v - u \\ g &= a^2v^2 - 2vu + u^2 \\ h &= -av - u \end{aligned}$$

se obtiene como sigue:

```
> f:=v-u:g:=a^2*v^2-2*v*u+u^2:h:=-a*v-u;
> with(Groebner):
> NN:=gbasis([x-f,y-g,z-h],plex(u,v,x,y,z));

> NN:=[-a y - 2 a z x - y + 2 z x + 2 a x^2 + a z^2 - z^2,
z + a v - x + v, u a + u + a x + z]
```

donde NN presenta un sistema triangular de tres polinomios, pero sólo con el primer polinomio

$$-ay - 2azx - y + 2zx + 2ax^2 + az^2 - z^2$$

sin las variables u, v , que son las que tenemos que eliminar para implicitar (y que hemos considerado, al escribir $plex(u, v, x, y, z)$, ordenadas de modo que $u > v > x > y > z$).

Una vez resuelto el problema de implicitar genéricamente, nos queda averiguar, si implicitamos una superficie con coeficientes indeterminados (como los que incluyen valores de a en el ejemplo anterior), para qué valores de los mismos es correcta la solución obtenida sustituyendo tales valores en el resultado general. Desgraciadamente no es verdad, en general, que la especialización de una base de Gröbner siga siendo una tal base, con esas propiedades que facilitan la implicitación. El problema

es complejo y actual y su detalle no tiene cabida en estas notas elementales. Un artículo reciente sobre el tema es el de nuestro compatriota A. Montes¹⁷.

6. GEOMETRÍA ALGORÍTMICA: UN PROBLEMA SENCILLO

Además de calcular con números y con símbolos algebraicos, el proyecto de cooperación con CANDEMAT precisa, muchas veces, operar con datos de naturaleza geométrica. Por ejemplo, para el control de calidad del troquel construido es útil desarrollar un modelo geométrico del mismo con múltiples facetas, del que querríamos obtener las sombras y reflejos que arroja al ser iluminado por un foco, para descubrir las posibles rugosidades o imperfecciones (véanse los ejemplos que aparecen en las Figuras 7 y 6 donde la iluminación de la pieza escogida requiere de una triangulación especialmente regular como la que se muestra en la Figura 6).

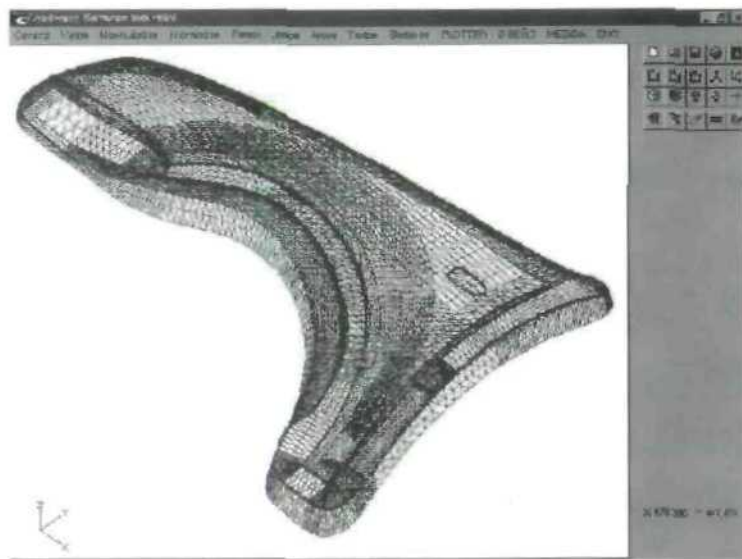


Figura 6. Triangulación de una aleta para un automóvil.

En este y otros supuestos similares partimos de una multiplicidad de datos geométricos que requieren, por su volumen, un tratamiento automático, capaz de ser implementado en un ordenador. Desde hace

¹⁷MONTES, A. "A New Algorithm for Discussing Gröbner Bases with Parameters". *Journal of Symbolic Computation*, vol. 33, n° 2. Febrero de 2002. Págs. 183-208.

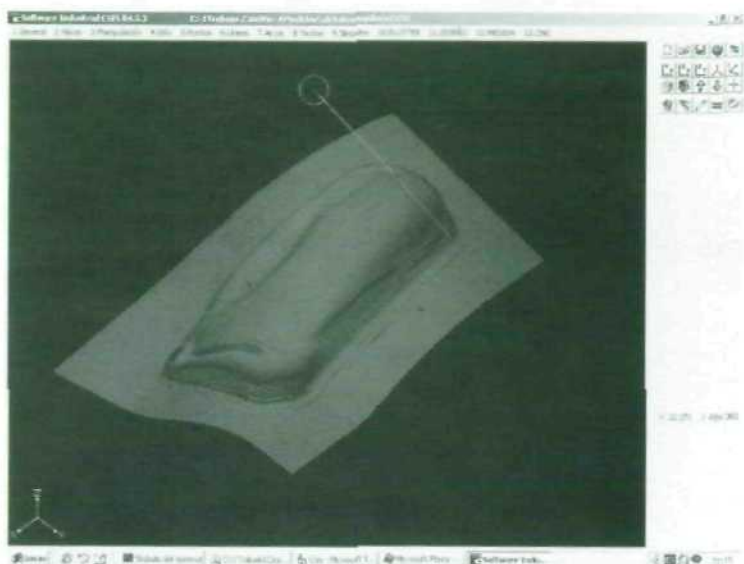


Figura 7. Iluminación y sombreado para la detección de irregularidades.

algunos años (aproximadamente desde finales de la década de los sesenta o en los setenta, según se consideren con un mayor énfasis los aspectos numéricos o los simbólicos) se han desarrollado diversos conceptos, métodos y programas en torno al tratamiento automático de la información geométrica, para resolver problemas como los anteriormente mencionados. Nos referimos al CA(G)D (el diseño (geométrico) asistido por ordenador), al modelado geométrico, a la geometría computacional, numérica, discreta o combinatoria, etc.

De un modo análogo al caso del Álgebra Computacional, podríamos considerar que el desarrollo, análisis e implementación de algoritmos que operan sobre símbolos (que representan objetos) geométricos es la característica de la Geometría Algorítmica, un nombre que podría englobar todos los aspectos mencionados en el párrafo anterior¹⁸.

La generación y manipulación de triangulaciones de superficies es

¹⁸ Como antes hemos hecho, dada la naturaleza de estas notas, remitimos al lector interesado por saber más a distintas referencias. Un texto básico y detallado, de introducción al tema, en francés, podría ser BOISSONAT, J.-D., YVINEC, M. *Geométrie Algorithmique*. Ediscience. Paris. 1995; una breve y asequible introducción, en castellano, aparece en HURTADO, F. "Geometría computacional; una instantánea". *La Gaceta de la RSME*, 2.2. 1999; una introducción histórica, en inglés, aparece en TOUSSAINT, G. "Scanning the Issue". En *Computational Geometry*, volumen especial de los Proceedings of the IEEE, vol. 80, n° 9. Septiembre de 1992.

uno de los problemas básicos de la Geometría Algorítmica. En particular, dada una nube de puntos, de las múltiples triangulaciones posibles, la triangulación que maximiza el mínimo ángulo de los triángulos que la componen es la denominada triangulación de Delaunay. Esta triangulación resulta ser dual de un diagrama (conocido como diagrama de Voronoi) que se obtiene hallando, para una nube de puntos dados en el plano, las regiones del plano que contienen los puntos más próximos a cada uno de los puntos de la nube que a los restantes puntos de la misma nube. Sin entrar en detalles, en este contexto, es útil resolver el siguiente sencillo problema:

P: Dadas unas rectas y un punto (que no incide en ninguna de ellas), construir el polígono determinado por los semiplanos que contienen al punto dado.

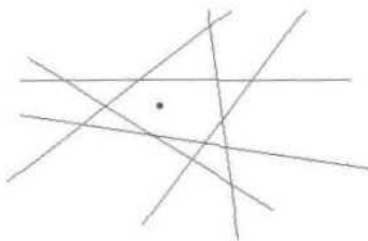


Figura 8. Configuración de rectas y punto en el Problema P.

Este es un problema importante en muchas aplicaciones prácticas, desde la Ingeniería de Montes a la Meteorología. Además, es un problema visualmente trivial. Podemos determinar fácilmente “a ojo” la región R acotada por un pequeño número de rectas, digamos, por cuatro rectas. A partir de ésta, para encontrar la región acotada por cinco rectas, tendríamos, simplemente, que coger una nueva recta (en negrita en la Figura 9) y encontrar los dos puntos $\{q, r\}$ de intersección de la misma con R (la región sombreada en la Figura 9). Finalmente, decidiremos cuál de las dos subregiones de R contiene al punto dado y concluiremos, en consecuencia, determinando la nueva región.

El problema real surge cuando se considera -como sucede en las aplicaciones- que tenemos 30, 100, 10.000, ... rectas. Por ejemplo, podemos estar en un contexto en el que manipulamos una gran colección de datos provenientes de estaciones meteorológicas y en el que queremos extrapolar los datos de cada estación a la región de su área de influencia. Pero, ¿qué debemos considerar como su área de influencia?

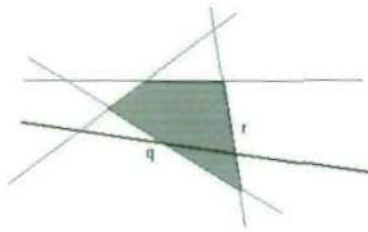


Figura 9. Solución visual al Problema P.

El meteorólogo Thiessen, hace 100 años¹⁹, consideró que una respuesta adecuada, bajo ciertas hipótesis, podría implicar la región determinada por los bisectores de cada estación con respecto a las restantes.

Por ejemplo, si partimos de tres lugares (esto es, de tres sitios donde se recogen datos meteorológicos) representados por puntos en la Figura 10 (izquierda), podríamos considerar como región de influencia alrededor del lugar S el interior del polígono obtenido intersecando los semiplanos (conteniendo S) determinados por las rectas bisectoras 1, 2 y 3 (un bisector es la recta de puntos equidistantes a dos lugares). La región resultante para cada uno de los tres lugares aparece en la Figura 10 (derecha). La región de S está limitada por parte de las rectas 2 y 3.

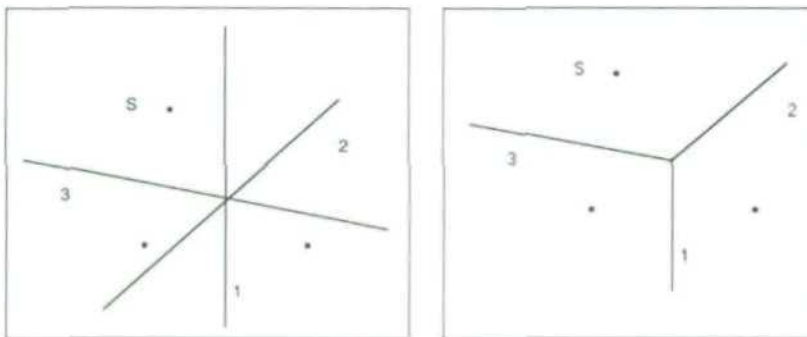


Figura 10. Bisectores y regiones de influencia.

Esta construcción, sencilla para tres lugares, puede dar pie a una estructura muy compleja, como se aprecia en la Figura 11, para una colección de 100 puntos dados al azar.

¹⁹Véase el libro de OKABE, A., BOOTS, B., SUGHIARA, K. *Spatial Tessellations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. J. Wiley. Chichester, 1992, para aplicaciones de este tipo de construcciones geométricas.

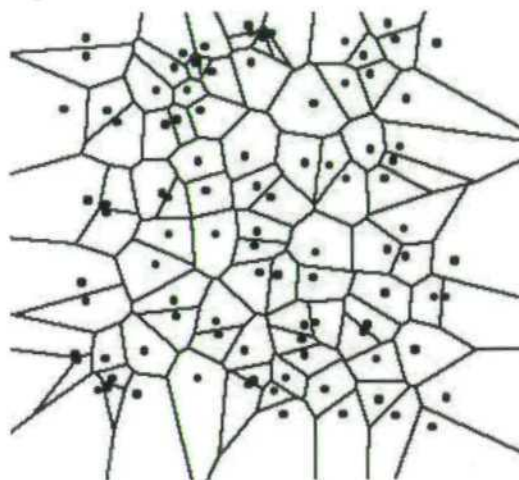


Figura 11. Diagrama de Voronoi para una nube de 100 puntos.

Vemos así que nuestro problema **P** (que plantea, después de todo, una forma de calcular una de tales regiones) aparece conectado con algunas construcciones geométricas con aplicaciones prácticas, como la partición de Voronoi (o de Thiessen) del plano. Si tratamos con una gran cantidad de rectas, una forma ingenua de pensar sobre el problema **P** concluiría que se trata “sólo” de usar masivamente el ordenador para que se haga cargo de los muchos cálculos que exigiría el repetir el procedimiento “intersección de recta y polígono” que hemos esbozado arriba.

Pero los ordenadores no ven,... de la manera que vemos los humanos. Por ello, para desarrollar con el ordenador este método visualmente evidente, deberíamos pensar en esta otra forma: imaginemos que tenemos un polígono dado por una secuencia (ordenada) de vértices y que consideramos una recta (dada, digamos, por dos puntos). ¿Cómo encontraríamos qué lados del polígono intersecan a la recta y dónde? ¿Cuántas operaciones elementales aritméticas (por ejemplo, con enteros) tendríamos que realizar si asumimos que los vértices, puntos, etc., tienen coordenadas racionales? Parece evidente que esta aproximación ingenua al problema acabaría conduciendo a un número de operaciones proporcional al número de lados del polígono. Por tanto, al proceder por inducción desde la región determinada por cuatro rectas a la región determinada por cinco, seis, etc., ... acabaremos con un número de operaciones proporcional al cuadrado del número de rectas dadas. Esto no es trivial para un ordenador modesto a partir, por ejemplo, de treinta rectas. El cálculo de la partición de Thiessen que aparece arriba requirió varios segundos en un ordenador portátil.

Pero es posible un análisis más fino. Volvamos al problema **P** y procedamos esta vez, no añadiendo una recta tras otra, sino dividiendo el número de rectas N en dos mitades (aproximadas), imaginando que podemos resolver el problema P para cada uno de los dos conjuntos de rectas formados por la mitad de dichas rectas, y que obtenemos dos regiones R_1 y R_2 . En este caso, ¿cómo podríamos obtener la solución de **P** combinando R_1 y R_2 ? Este problema también puede formularse de esta otra manera: dados dos polígonos convexos, cada uno con aproximadamente m ($m = N/2$) lados, ¿cómo calcular eficientemente y eficazmente su intersección?

Un análisis puramente geométrico muestra que esta intersección puede ser realizada cortando N -veces dos polígonos, cada uno de los cuales tiene a lo más cuatro lados. En efecto, los dos polígonos dados pueden partirse por rectas verticales a través de los vértices -en total por N rectas verticales- y, por tanto, la intersección global se obtiene pegando las intersecciones de cada estrato vertical. Pero en cada barra vertical los polígonos son o bien vacíos, o un triángulo o un cuadrilátero, y así la intersección local se puede obtener con una complejidad independiente del número N de vértices. Véanse los dibujos en la Figura 12 para una explicación gráfica somera.

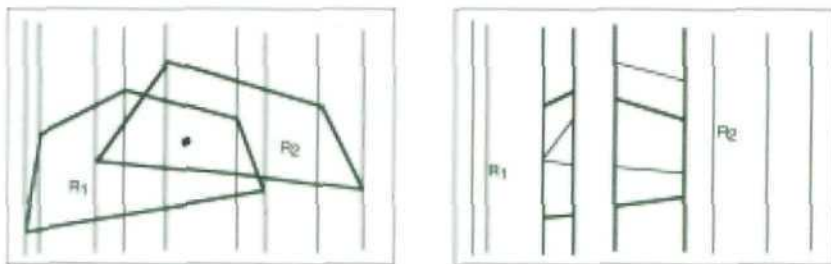


Figura 12. Visualización del algoritmo de intersección de polígonos convexos.

En conclusión, el precio extra que debemos pagar por dividir este problema (de hallar la solución a **P** para N rectas) en dos partes es esencialmente proporcional al número N , esto es, si $T(N)$ es el número de operaciones para el caso N del problema, hemos hallado que $T(N) = 2T(N/2) + CN$, donde C veces N incluye el número de operaciones necesarias para intersecar las dos subregiones R_1 y R_2 . Así, cada subproblema puede resolverse, del mismo modo, dividiéndolos en dos subproblemas de tamaño similar, etc.,... Finalmente nos encontramos

con un número de operaciones $T(N)$ proporcional a $N \log(N)$, que es mucho mejor que N^2 (incluso para $N = 30$).

7. ALGUNAS CONSECUENCIAS PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Los sistemas de enseñanza son, tal vez por concepto, esencialmente conservadores: se enseña para transmitir a los jóvenes lo que ya saben sus mayores. Por ello es frecuente asumir en los mismos que los avances tecnológicos son, o podrían llegar a ser, mecanismos de ayuda para la enseñanza de los contenidos tradicionales. Esto es, para mejorar la “forma” de enseñar o de aprender, pero no para cuestionar el “fondo”. Así, en el mejor de los casos, el ordenador podría ser usado en la clase de geometría para “simular” la regla y el compás, para trazar mediante una instrucción, la recta que pasa por dos puntos dados en la pantalla, o un círculo de centro y radio dados. Por continuar con ejemplos en este contexto, diríamos que la calculadora se emplearía, sobre todo, para dibujar gráficas de funciones elementales, para extraer raíces o para invertir matrices, etc., esto es, para emular, simplificando, las tareas habituales en los currículos tradicionales.

Naturalmente, el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas es posible que haya conllevado un cambio en el énfasis o en la importancia de algunos temas, o que haya permitido poner el acento en actividades de descubrimiento y de autoexploración que resultarían prácticamente irrealizables sin tales herramientas. Pero la introducción de los recursos técnicos no ha producido, en general, una modificación esencial de lo que hay que descubrir o explorar.

La tesis fundamental de esta pequeña sección, tesis que ya fue expuesta oralmente en el curso de formación de profesores que origina estas notas, es que **la situación descrita en los párrafos precedentes no es correcta y que debe hacerse un esfuerzo especial por captar la especial incidencia del ordenador en la enseñanza de las matemáticas.**

En primer lugar, creemos que la disponibilidad de herramientas técnicas concretas (para medir, para dibujar, para calcular) ha afectado, a lo largo de la historia, al contenido de las matemáticas que se hacen y que se transmiten. Por poner un ejemplo, el papel del Análisis Numérico en los planes de estudio de los matemáticos es hoy cualitativamente distinto del que era hace cincuenta años. Pero mencionamos también el caso de las herramientas euclídeas, cuya accesibilidad durante siglos ha creado

toda una escuela de problemas de geometría dependiente de la potencia y de las limitaciones de las mismas. ¿Debemos seguir con esta tradición cuando nuestro paradigma de herramienta geométrica es hoy bien distinto y requiere otra forma de acercarse matemáticamente a la realidad de los objetos geométricos (como hemos intentado poner de manifiesto en la última sección de estas notas)²⁰?

Continuando con los ejemplos de índole geométrica, el énfasis en el estudio elemental de las propiedades de una figura concreta (triángulos, círculos) ha sido, hasta ahora, motivado por su versatilidad como campo de entrenamiento para el razonamiento deductivo. La existencia de demostradores automáticos de teoremas de geometría elemental²¹, ¿no debería conducir a elegir otro "benchmark" más adecuado? Y, por seguir con los mecanismos de tratamiento de datos, no sería adecuado, a la vista de ejemplos como los expuestos en la sección precedente, introducir otros paradigmas distintos a la inducción (como el de "divide y vencerás" que se ha empleado allí) para la resolución de problemas?

Los ejemplos podrían multiplicarse. ¿Por qué acentuar, en la enseñanza elemental, el papel de la aproximación -lo que era razonable en la época de desarrollo de calculadoras que operaban con redondeo- cuando los programas de cálculo simbólico -que manipulan números reales algebraicos (y, por tanto, números racionales, por ejemplo) con exactitud- están disponibles en las calculadoras de bolsillo²²? ¿Por qué insistir en el carácter semántico de las operaciones algebraicas (es decir, dotando de sentido a los símbolos para "facilitar" su manipulación) cuando la potencia del álgebra en el contexto tecnológico actual es su carácter gramatical y sintáctico²³?

Estas y otras preguntas similares no tienen una respuesta fácil, ni una implicación inmediata en el mundo escolar. Pero creemos que cursos como el que originan estas notas ayudan a avanzar en la dirección adecuada.

²⁰El lector es referido a RECIO, T. *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Editorial Síntesis. Madrid, 1998.

²¹Ver RECIO, T. "La mecánica de la demostración y la demostración mecánica". *Actas Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM)*. Zaragoza, 2001. En prensa.

²²Ver GONZÁLEZ LÓPEZ, M. J., RECIO MUÑIZ, Tomás, J. "Does Computer Algebra help at all learning about real numbers?". *Mathematics and Computer in Simulation (N-H, Elsevier)*, vol. 45. 1998, Págs., 185-195.

²³Ver RECIO, T. "Didactical relevance of meaningless mathematics". *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, vol. 5, nº 1. 1998. Págs. 15-27.

REFERENCIAS

- BOISSONAT, J-D., YVINEC, M. *Géométrie Algorithmique*. Ediscience. París, 1995.
- BUCHBERGER, B., COLLINS, G., LOOS, R. "Computer Algebra". *Computing Supplementum 4*. Springer. Viena, 1982.
- COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D. *Ideals, varieties and algorithms*. Springer-Verlag. Nueva York, 1992.
- GEDDES, K., CZAPOR, S. R., LABHAN, G. *Algorithms for computer algebra*. Kluwer Academic Publishers. Boston, 1992.
- GONZÁLEZ LÓPEZ, M. J., RECIO MUÑIZ, Tomás, J. "Does Computer Algebra help at all learning about real numbers?". *Mathematics and Computer in Simulation (N-H, Elsevier)*, vol. 45. 1998. Págs., 185-195.
- GONZÁLEZ VEGA, L., RECIO, T. "Industrial applications of computer algebra: climbing up a mountain, going down a hill". *Proceedings 3rd ECM*, vol. 2. Progress in Mathematics. Birkhäuser. Basel, 2001.
- GRABMEIER, J., KALTOFEN, E., WEISPFENNING, V. *Computer Algebra Handbook: Foundations, Applications, Systems*. Springer-Verlag. Berlín, 2003.
- HURTADO, F. "Geometría computacional: una instantánea". *La Gaceta de la RSME*, 2.2. 1999.
- JACOBSON, N. *Basic Algebra I*. W. H. Freeman and Co. San Francisco, 1974.
- LARCOMBE, P. J. *On Lovelace, Babbage and the Origins of Computer Algebra*. En *Computer Algebra Systems*. Ed. M. Wester, J. Wiley. Chichester, 1999.
- MONTES, A. "A New Algorithm for Discussing Gröbner Bases with Parameters". *Journal of Symbolic Computation*, vol. 33, n^o 2. Febrero de 2002. Págs. 183-208.
- MUMFORD, D. "Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties". *Grundlehren der math. Wiss*, 221. Springer-Verlag. Berlín, 1976.

OKABE, A., BOOTS, B., SUGIHARA, K. *Spatial Tessellations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. J. Wiley. Chichester, 1992.

RECIO, T. "Didactical relevance of meaningless mathematics". *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, vol. 5, nº 1. 1998. Págs. 15-27.

RECIO, T. *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Editorial Síntesis. Madrid, 1998.

RECIO, T. "Cálculo Simbólico, Cálculo Formal, Álgebra Computacional: qué es y para qué sirve". *Revista NÚMEROS*, vol. 43 y 44. Septiembre -diciembre de 2000.

RECIO, T. "La mecánica de la demostración y la demostración mecánica". *Actas Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM)*. Zaragoza, 2001. En prensa.

PAVELLE, R., ROTHSTEIN, M., FITCH, J. "Álgebra por ordenador". *Scientific American*. Diciembre de 1981.

Theatrum Machinorum:

<http://museo.unimo.it/theatrum/machine/guida.htm>.

TOUSSAINT, G. "Scanning the Issue". En *Computational Geometry*, volumen especial de los Proceedings of the IEEE, vol. 80, nº 9. Septiembre de 1992.

WANG, D. *Elimination Methods*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer. Viena, 2001.

WELLS, D., SHARP, J. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin. Londres, 1991.

GRÁFICAS CON MATLAB

Roberto Rodríguez del Río
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

INTRODUCCIÓN

1. Manejo elemental de Matlab.
 - 1.1. Interfaz de usuario. Variables.
 - 1.2. Vectores y Matrices.
2. Gráficas 2D.
 - 2.1. Funciones de la forma $y = f(x)$
 - 2.2. Curvas en paramétricas.
 - 2.3. Curvas en polares.
 - 2.4. Cambios de coordenadas polares-cartesianas.
3. Gráficas 3D.
 - 3.1. Curvas en el espacio.
 - 3.2. Funciones de la forma $z = f(x, y)$
 - 3.3. Manipulación de Gráficos 3D.
 - 3.4. Algunas superficies en el espacio.
 - 3.5. Gráficos de funciones complejas.
4. Gráficos estadísticos.
 - 4.1. Diagramas de sectores.
 - 4.2. Diagramas de Pareto.
 - 4.3. Diagramas de barras.
 - 4.4. Histogramas.
5. Gráficas en movimiento: "movies".

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

El nombre MatLab es una abreviatura de las palabras MATrix LA-Boratory. MatLab es un sistema interactivo para cálculos científicos y de ingeniería basado en las matrices. Con él se pueden resolver complejos problemas numéricos sin necesidad de escribir un programa específico para ello, aunque también es posible programar. Además, el programa MATLAB dispone, dependiendo de la versión, de diferentes módulos (*Toolboxes*) que permiten resolver problemas específicos.

Nosotros nos vamos a centrar en la capacidad de MatLab para generar gráficos, aunque, antes de llegar hasta este punto, haremos un rápido resumen de los comandos básicos del programa.

Debido a que MatLab es un programa de Cálculo Numérico, la forma de producir gráficos es completamente distinta de la de programas de Cálculo Simbólico como Derive, Mathematica o Maple. En MatLab, nosotros tenemos que calcular mediante comandos adecuados los puntos que después se representarán en la gráfica.

1. MANEJO ELEMENTAL DE MATLAB

Supongamos que hemos sido capaces de abrir el programa. En Matlab, las órdenes se introducen escribiéndolas una a una a continuación del *prompt* (`>>`) que aparece en la ventana del usuario. Veamos en primer lugar, algunas de las operaciones matemáticas más elementales.

Para sumar dos números:

```
>>2+2
ans =
    4
```

Después de escribir cada comando hay que pulsar Intro para que lo ejecute. Si después de esta agotadora primera sesión con MatLab queremos salir del programa, se puede hacer de dos formas, escribiendo `exit` a continuación del *prompt*, o bien con `File Exit MATLAB`.

El valor que queremos calcular también se puede asignar a una variable. Por ejemplo:

```
x=3^2
x=
    9
```

Hay que tener en cuenta que MatLab distingue entre mayúsculas y minúsculas, por lo tanto, se distingue entre la variable X y la variable x.

La notación para las operaciones matemáticas elementales es la habitual en todos los programas de Cálculo Simbólico:

suma	+
resta	-
división	/
exponenciación	^
multiplicación	*

También están definidas algunas de las funciones más comunes utilizadas en Matemáticas. Su sintaxis coincide también con la que se utiliza en la mayoría de los programas de Matemáticas, como, por ejemplo, el programa DERIVE, aunque hay algunas diferencias. Algunas de estas funciones son:

sin	seno
sinh	seno hiperbólico
asin	arcoseno
cos	coseno
cosh	coseno hiperbólico
acos	arcoseno
tan	tangente
atan	arcotangente
exp	exponencial
log	logaritmo neperiano
log10	logaritmo decimal
sqrt	raíz cuadrada
abs	valor absoluto

Para obtener listas completas de todas las funciones que puede utilizar Matlab, así como para saber el uso de cada una de ellas o de cualquier comando, siempre se puede acudir al `help`. Esto se puede hacer de varias formas, poniendo `>>helpwin`, siendo el propio programa quien nos ofrece la ayuda (como en cualquier otro programa), o poniendo `>>helpdesk`, con lo que nos ofrece ayuda interactiva, conectándose a Internet si este recurso está disponible en nuestro ordenador.

Si conocemos el nombre del comando, pero queremos saber para qué sirve, se puede poner:

```
>>help comando
```

Y nos ofrecerá ayuda sobre el comando en cuestión, si éste existe.
Por ejemplo,

```
>>help rotate3d
```

```
ROTATE3D Interactively rotate the view of a 3-D plot.
ROTATE3D ON turns on mouse-based 3-D rotation.
ROTATE3D OFF turns if off.
ROTATE3D by itself toggles the state.
```

See also ZOOM.

Nos ofrece información sobre el comando `rotate3d`, comando que sirve para rotar figuras tridimensionales utilizando el ratón.

Otra forma de buscar ayuda es utilizar el comando `lookfor`, por ejemplo, poniendo `>>lookfor cos`, nos aparecerá una lista con todos los comandos que tienen que ver con la función coseno.

1.1. Interfaz de usuario. Variables

Con las flechas del cursor: \uparrow y \downarrow , se pueden recuperar las órdenes anteriores, sin tener que volver a teclearlas. Esto resulta útil en el caso de una equivocación o cuando se quiere repetir un comando con alguna pequeña modificación.

A veces, puede resultar necesario, hasta imprescindible, que el resultado de un cálculo no aparezca en pantalla. Por ejemplo, si generamos una matriz de orden muy alto con el objeto de hacer después una gráfica. El hecho de que aparezca la matriz en pantalla puede resultar un poco engorroso. Para conseguir esto se pone un punto y coma al final de la instrucción.

Por ejemplo,
`x=sin(3);1`

No aparece ningún resultado, pero ha realizado el cálculo, porque si escribimos el valor de `x`, aparecerá el valor 0.1411.

¹El argumento de las funciones trigonométricas siempre se mide en radianes.

Los comandos se pueden ir escribiendo y ejecutando uno a uno, es decir, renglón a renglón, y también se pueden escribir uno a continuación de otro en una misma línea, en cuyo caso deben ir separados por comas. Si el comando o la cantidad de comandos es demasiado larga para que aparezca en un único renglón, se puede romper la cadena y seguir en el siguiente renglón, escribiendo tres puntos suspensivos. Por ejemplo,

```
>>x=sin(10),y=cos(10),...
z=tan(10)
```

```
x =
   -0.5440
```

```
y =
   -0.8391
```

```
z =
    0.6484
```

Los resultados numéricos que ofrece MatLab se pueden visualizar en diferentes formatos. Por defecto, si un resultado es un número entero, lo ofrecerá como tal. Si no lo es, lo hará con 4 cifras decimales (redondeando a la cuarta cifra). Si el resultado es un número grande, lo expresará en notación científica. Este formato que usa por defecto se puede modificar en el menú **File Preferences Numeric Format**, aunque también se puede hacer directamente escribiendo las órdenes a continuación de >>:

Si escribimos:

```
>>x=34/8449;
```

y vamos cambiando el formato como se indica en la siguiente tabla, volviendo a escribir >>x, cada vez se obtiene el mismo resultado en las distintas formas numéricas.

Formato	Variable x	Características
format long	0.00402414486922	16 dígitos
format short e	4.0241e-003	5 dígitos más exponente
format long e	4.024144869215292e-003	16 dígitos más exponente
format hex	3f707b9f29b8eae2	sistema hexadecimal
format bank	0.00	2 decimales
format +	+	signo +, - ó 0
format rat	2/497	aproximación racional
format short	0.0040	formato por defecto

No obstante, independientemente del formato que se esté utilizando, la representación interna del número siempre es la misma, lo único que cambia es la forma en que lo vemos en la pantalla.

En Matlab, lo normal es ir asignando valores escalares o matriciales a variables, si en un momento determinado queremos saber con qué variables estamos trabajando, se puede escribir `>>who`, que nos indica qué variables están en uso; el comando `>>whos`, nos indica lo mismo, pero además nos informa del tamaño y del tipo de variable. O bien, en el ítem File con `Show Workspace`, que produce el mismo resultado que `>>whos`. Para borrar una variable, se puede utilizar el comando `>>clear variable`, y borrará la variable que se indique, si se pone sólo `>>clear`, se borrarán todas las variables que se estén utilizando actualmente.

Las variables pueden contener hasta 19 caracteres, los caracteres más allá del 19 se ignoran. Las variables deben comenzar con una letra, seguida por letras, dígitos o guiones de subrayado.

Además hay algunas variables especiales que se utilizan por defecto:

- **ans**: Es la variable que se utiliza en los resultados. En la operación siguiente se puede recuperar este resultado volviendo a escribir **ans**. Esta variable se modificarán en cuanto haya un nuevo resultado.
- **pi**: El número π . (No hay una variable para el número e , pero se podría definir `>>e=exp(1)`).
- **eps**: Es el número más pequeño que utiliza el ordenador tal que, cuando se le suma 1, crea un número en coma flotante mayor que 1.
- **Inf**: Infinito, aparece si hacemos `1/0`.
- **NaN**: Mensaje de error (Not a Number), por ejemplo, `0/0`.

- `realmin`, `realmax`: Son, respectivamente, el menor y el mayor de los números reales utilizables.

Poniendo el símbolo `%` se consigue que no se ejecute lo que venga a continuación, en el mismo renglón, sino que se interprete como un comentario, se suele utilizar para escribir comentarios aclaratorios en líneas de comandos de manera que no afecten a su ejecución. Por ejemplo, si ponemos,

```
>>sqrt(2) % Raíz cuadrada de 2
calculará la raíz de 2 y se saltará el comentario.
```

Una buena forma de acabar la lectura de esta primera introducción sería la de echar un vistazo a la `demo` que viene incorporada con el programa. Para activarla basta con teclear `>>demo`, aparecerá una ventana en la que se pueden ir viendo algunas de las capacidades del programa.

1.2. Vectores y matrices

Los vectores y las matrices son los elementos básicos con los que trabaja Matlab. Veamos cómo se introducen y cómo se pueden hacer algunas de las operaciones elementales con ellos.

VECTORES. Un vector se puede definir introduciendo sus coordenadas, separadas por espacios o por comas, entre corchetes:

```
>> x=[1 2 3]
```

```
x =
     1     2     3
```

Si queremos definir un vector columna, se separan las filas por puntos y comas, o bien se calcula el transpuesto de un vector fila con `>>x'`.

Otra forma de crear vectores es la siguiente:

```
>> x=1:0.5:3
```

```
x =
 1.0000  1.5000  2.0000  2.5000  3.0000
```

que genera un vector que va desde 1 hasta 10 con un paso de 0.5 unidades.

Exactamente el mismo resultado lo conseguiríamos con el comando `linspace`

```
>>x=linspace(1,3,5)
```

que produce 5 números igualmente espaciados entre 1 y 3.

PRODUCTO ESCALAR. Consideremos los dos vectores siguientes:

```
>>a=[1 2 3];b=[2 -3 5];
```

Si los multiplicamos de la forma

```
c=a.*b
c =
     2     -6     15
```

obtenemos el producto de los elementos del primero y del segundo vector elemento a elemento. Para obtener el valor del producto escalar

```
>>sum(c)
ans =
     11
```

El producto de dos vectores o dos matrices elemento a elemento será muy importante cuando queramos representar gráficas de funciones.

MATRICES. Para introducir una matriz, se separa cada fila con un punto y coma

```
A=[3 2 1; 6 5 4; 9 8 7]
A =
     3     2     1
     6     5     4
     9     8     7
```

Ejercicio 1.1. Después de definida la matriz, probar los siguientes comandos e intentar descubrir para qué sirven:

- $\gg A(2,3)$ o por ejemplo $\gg A(1,2)$
- $A(:,1)$ y también $A(2,:)$
- A^2 y $A.^2$. ¿En qué se diferencian estos dos comandos?

Veamos algunas operaciones elementales con matrices. Definimos dos matrices 3×3

```
>>A=[1 1 2; 3 4 6; 2 1 0];B=[-1 2 0; 2 0 0; -2 3 4];
```

Para sumarlas

```
>>C=A+B
C =
    0     3     2
    5     4     6
    0     4     4
```

Para multiplicarlas

```
>>D=A*B
D =
   -3     8     8
   -7    24    24
    0     4     0
```

Para elevar una matriz a una potencia

```
>>A^3
ans =
    45    44    58
   162   157   204
    43    39    46
```

Para calcular su determinante

```
>>det(A)
ans =
   -4
```

Para calcular su inversa, si existe

```
>>inv(A)
ans =
    1.5000   -0.5000    0.5000
   -3.0000    1.0000     0
    1.2500   -0.2500   -0.2500
```

MATRICES PREDEFINIDAS. En MatLab hay varios comandos que sirven para definir con gran facilidad matrices de tipos particulares. Algunas de estas funciones son las siguientes:

- `eye(n)`, matriz unidad de tamaño $(n \times n)$

- `zeros(m,n)`, matriz de ceros de tamaño $(m \times n)$
- `zeros(n)`, lo mismo, pero de orden $(n \times n)$
- `ones(n)`, matriz de unos $(n \times n)$
- `ones(m,n)`, lo mismo, pero de orden $(m \times n)$
- `linspace(x1,x2,n)`, genera un vector con n valores igualmente espaciados entre $x1$ y $x2$
- `logspace(d1,d2,n)`, genera un vector con n valores espaciados logarítmicamente entre 10^{d1} y 10^{d2}
- `rand(n)`, matriz de números aleatorios entre 0 y 1, distribuidos uniformemente $(n \times n)$
- `rand(m,n)`, lo mismo, de tamaño $m \times n$
- `randn(n)`, matriz de números aleatorios $(n \times n)$, distribuidos según la normal estándar, $N(0,1)$
- `magic(n)`, crea una matriz en forma de cuadrado mágico de tamaño $n \times n$

2. GRÁFICAS 2D

2.1. Funciones de la forma $y = f(x)$

Para hacer gráficas de funciones de una variable con MatLab, primero tenemos que crear una tabla de valores de la variable para después dibujar la función. Por ejemplo, queremos dibujar la gráfica de la función $y = \text{sen}(x)$:

Primero creamos una tabla de valores para x

```
>>x=0:pi/100:2*pi;
```

Con este comando hemos formado una tabla (el vector x) con 200 valores entre 0 y $2 * \pi$. Otra forma de conseguir el mismo resultado sería utilizar el comando

```
>>x=linspace(0,2*pi,200);
```

Ahora calculamos los valores de y

```
>> y = sin(x);
```

y por último la dibujamos (ver figura 1)

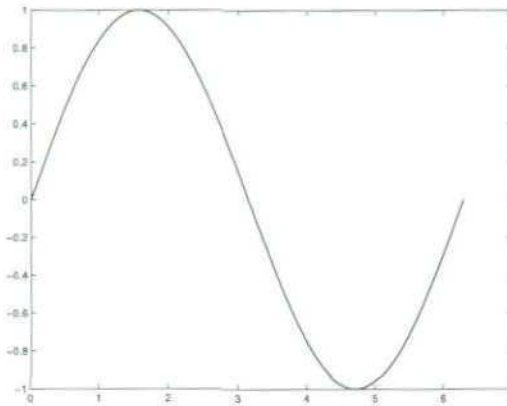


Figura 1. Gráfica de $y = \text{sen}(x)$.

```
>>plot(x,y)
```

Realmente lo que hemos hecho es dibujar 200 puntos de la función en el intervalo $[0, 2\pi]$, y posteriormente el programa los ha unido mediante segmentos. Si el número de puntos es lo suficientemente grande, como en este caso, no se aprecian los vértices.

Veamos un ejemplo algo más complicado. Queremos dibujar ahora la gráfica de la función $y = xe^{-x^2}$.

Definimos los valores para los que queremos hacer la gráfica

```
>>x=-3:.01:3;
```

Es decir, que vamos a dibujar la gráfica en el intervalo $[-3, 3]$ con un paso de longitud 0.01.

Definimos la función

```
>>y=x.*exp(-x.^2);
```

(¿Por qué hay que poner los puntos antes de las operaciones?)

Y por último, se escribe el comando para que ejecute el dibujo (figura 2.)

```
>>plot(x,y)
```

El aspecto de la gráfica se puede modificar utilizando algunos comandos:

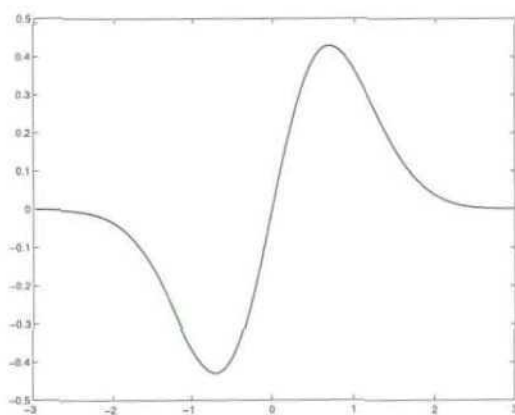


Figura 2. Gráfica de $y = xe^{-x^2}$.

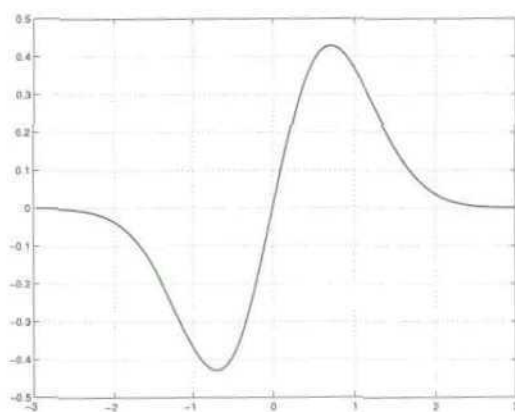


Figura 3. Gráfica de $y = xe^{-x^2}$ con cuadrícula.

- *Cuadrícula.* Si queremos que aparezca una cuadrícula sobre el dibujo, utilizaremos el comando `>>grid on`. El aspecto del dibujo sería ahora como el de la figura 3. Para desactivar la cuadrícula habrá que escribir `>>grid off`.

- *Color y trazo.* El comando `plot` ofrece múltiples posibilidades de color y forma de trazo de la gráfica. Por ejemplo, el comando `>>plot(x,y,'r*')`, nos dibujaría la gráfica en color rojo y con asteriscos. Para consultar todas las posibilidades, hacer `>>help plot`.

- *Ejes.* Los ejes que aparecen por defecto en una gráfica también se pueden modificar. Con el comando `>>axis([-2 2 -1 1])`, conseguiremos que la gráfica aparezca en la región $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$. Con `>>axis square`, conseguiremos que la figura aparezca en un cua-

drado, sin cambiar el rango de los ejes. Con el comando `>>axis equal`, conseguiremos que los rangos de los ejes sean iguales.

- *Zoom*. Utilizando el comando `>>zoom on`. Se puede agrandar la figura o alguna zona seleccionada de la figura. Hay que abrir la figura y utilizar los botones izquierdo y derecho del ratón. Para desactivarlo, habrá que escribir `>>zoom off`.

- *Varias gráficas en la misma figura*. Se pueden dibujar tantas gráficas como se quieran en una misma figura. Si ya tenemos dibujada una, y generamos una nueva gráfica, en principio la figura anterior es sustituida por la nueva. Sin embargo, utilizando el comando `>>hold on`, se mantendrá la anterior, con todas sus propiedades, y se podrá dibujar encima una nueva. Para desactivar el comando anterior: `>>hold off`. Otra forma de hacerlo es dibujar desde el principio dos gráficas juntas, por ejemplo, vamos a dibujar las gráficas de las funciones $y = \sin(x)$ e $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ en la misma figura (4):

Generamos las tablas,

```
>>x=linspace(0,2*pi,300);
>>y=sin(x);
>>z=sin(x+pi/3);
```

Y ahora las dibujamos

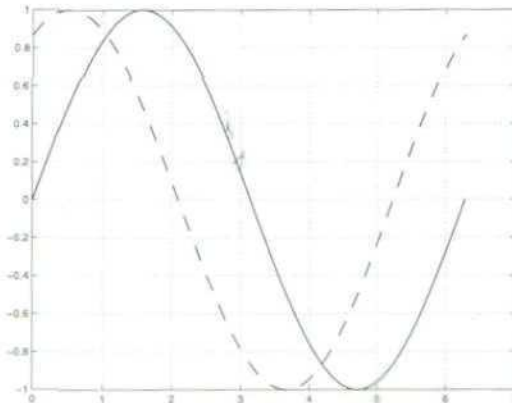


Figura 4. Gráficas de $y = \sin(x)$ y de $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

```
>>plot(x,y,'r-',x,z,'g--'),grid on
```

(La primera en color rojo, con trazo continuo, y la segunda en verde, con trazo discontinuo).

- *Etiquetado de gráficas.* Existen diversas posibilidades para el etiquetado de las gráficas. Veámoslo con un ejemplo (ver figura 5):

```
>>x=linspace(-3,3,500);y=exp(-x.^2);z=2*exp(-x.^2);
>>plot(x,y,'-',x,z,'--') % dibujamos dos funciones
>>title('Campanas de Gauss')
>>xlabel('Eje de Abscisas') % Etiqueta el eje horizontal
>>ylabel('Eje de Ordenadas') % Etiqueta el eje vertical
>>legend('exp(-x^2)', '2*exp(-x^2)') % Pone una leyenda
```

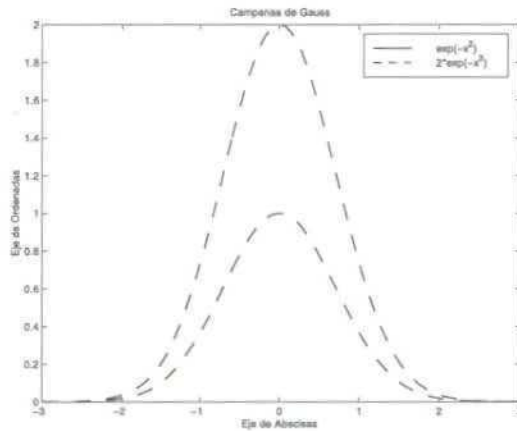


Figura 5. Etiquetado de gráficas.

Además de los comandos descritos antes para etiquetar gráficas, existe la posibilidad de poner un texto en algún otro lugar de la figura. Con el comando `>>gtext('texto')`, se abrirá la figura y podremos indicar con el ratón el lugar donde ha de ir el texto, que seleccionaremos con un clic.

- *Obtención de puntos desde el gráfico.* Una vez que se ha realizado una gráfica, podemos necesitar conocer las coordenadas de algunos puntos de la misma. Por ejemplo, el lugar aproximado en el que están los máximos y mínimos, o si queremos añadir alguna recta o una poligonal al dibujo. Para conseguir esto, se puede utilizar el comando `ginput`. Escribiendo

```
>>[x,y]=ginput(N)
```

Donde N es el número de puntos cuyas coordenadas queremos obtener. Después de ejecutado el comando habrá que pulsar con el botón izquierdo del ratón sobre el dibujo tantas veces como puntos hayamos especificado. Las coordenadas de esos puntos quedarán almacenadas en las variables $[x, y]$.

Para dibujar gráficas de **funciones definidas a trozos**, necesitamos utilizar lo que vamos a denominar *índices o variables lógicas*. Veamos un ejemplo. Creamos un vector con los números del 1 al 7

```
>>x=1:7
x =
     1     2     3     4     5     6     7
```

Y ahora escribimos

```
>>x>4
ans =
     0     0     0     0     1     1     1
```

Observamos que donde no se cumple la condición, aparece 0 y donde se cumple, aparece 1. Para crear estas variables lógicas se pueden utilizar los siguientes *operadores relacionales*:

<	menor que
>	mayor que
<=	menor o igual
>=	mayor o igual
==	igual
~=	distinto

Estos operadores se pueden combinar utilizando los *operadores lógicos*:

&	y
	o
~	no

Así, por ejemplo, sobre el mismo x de antes, si escribimos

```
>>(2<x)&(x<=6)
ans =
     0     0     1     1     1     1     0
```

obtenemos unos en los valores que verifican $2 < x \leq 6$.

Ahora supongamos que queremos representar la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Generamos una tabla de valores en el dominio en el que queremos dibujar la función

```
>>x=linspace(-2,3,3000);
```

Y ahora definimos la función, multiplicando cada trozo por el índice lógico que describa el lugar en el que queremos dibujarlo,

```
>>y=(x.^2).*(x<0)+1.*((0<=x)&(x<1))+(-x+2).*(1<=x);
```

Y ahora la dibujamos. Resulta conveniente hacerlo con puntos, asteriscos o cruces porque, de otra forma, no aparecerán las discontinuidades

```
>>plot(x,y,'. '),grid on,title('Función definida a trozos')
```

Y obtenemos la gráfica de la figura 6.

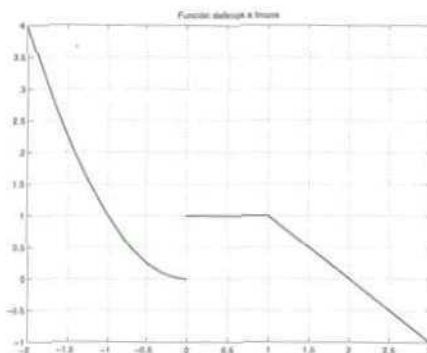


Figura 6. Una función definida a trozos.

Ejercicio 2.1. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones eligiendo, en cada caso, una tabla de valores adecuada para que aparezcan los aspectos más representativos de la función:

$$a) f(x) = x(x^2 + 4)^2$$

$$b) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f) f(x) = \frac{x}{e^{|x-1|}}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x < -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.2. Curvas en paramétricas

Veamos ahora cómo se pueden representar curvas en el plano dadas en forma paramétrica, es decir, de la forma

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

Empecemos con un ejemplo: queremos dibujar la gráfica de la curva

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right); \quad -5 \leq t \leq 5$$

En primer lugar generamos los valores de t en el intervalo indicado,

```
>>t=linspace(-5,5,1000);
```

Y ahora lo podemos dibujar de dos formas distintas:

```
>>plot((t.*(t.^2-1))./(t.^2+1), (2*(t.^2-1))./(t.^2+1))
```

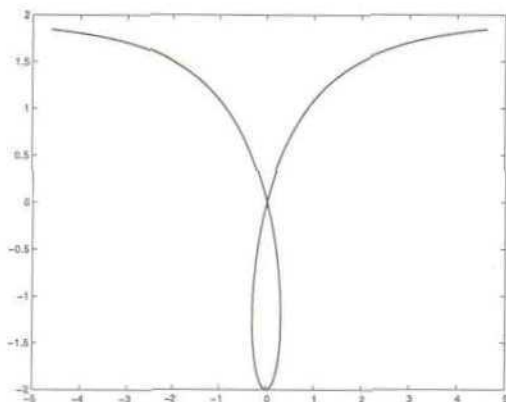


Figura 7. Curva en paramétricas.

obtendremos la gráfica de la figura 7.

Y otra forma de hacerlo es utilizar el comando

```
>>comet((t.*(t.^2-1))./(t.^2+1),(2*(t.^2-1))./(t.^2+1))
```

Los dos comandos producen el mismo resultado, sin embargo, la forma de ejecución es diferente, la segunda es más divertida, aparece un circulito (el cometa) que va dibujando la curva. La velocidad de ejecución depende del número de puntos que hayamos generado con el comando `linspace`.

Dibujada una curva en paramétricas existe la posibilidad de dibujar sobre la misma los **vectores velocidad**, utilizando el comando `quiver`.

Por ejemplo, para dibujar los vectores velocidad sobre la curva

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

```
>>t=linspace(0,2*pi,20);
>>quiver(cos(t),sin(t),-sin(t),cos(t)),axis square
```

Produce la gráfica de la figura 8.

La sintaxis del comando es `>>quiver(r(t),r'(t))`. El número de vectores que aparecen en este caso es 20. Si el número de puntos que se indica con el comando `linspace` es demasiado grande, puede que no se aprecie con claridad la gráfica, ya que éste será el número de vectores que se dibujen.

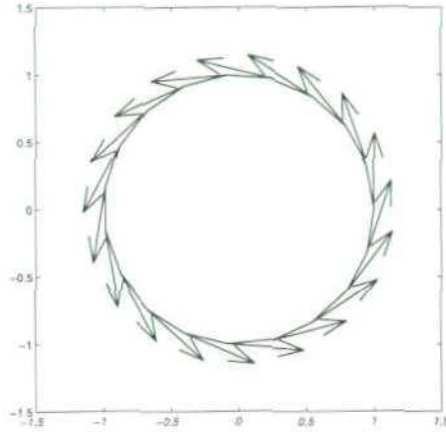


Figura 8. Vectores velocidad sobre una circunferencia.

Ejercicio 2.2. Dibujar las curvas en paramétricas siguientes; en los apartados a) y b), dibujar además los vectores velocidad, utilizando el comando `quiver`:

$$a) \vec{r}(t) = (2 \cos^3 t, 2 \sin^3 t); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$b) \vec{r}(t) = (3 \sin t, 2 \sin(2t)); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$c) \vec{r}(t) = \left(\frac{t}{\pi} \left(12 \left(\frac{t}{\pi} \right)^2 - 9 \right), \left(\left(\frac{t}{\pi} \right)^2 - 1 \right) 16 \left(\frac{t}{\pi} \right)^2 + 2 \right); \quad -3 \leq t \leq 3$$

$$d) \vec{r}(t) = \left(\frac{3}{2} \cos t (\cos t + 1), 2 \sin(2t) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$e) \vec{r}(t) = (\sin(2t) + \sin t, -\cos(2t) - \cos t); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$f) \vec{r}(t) = \left(e^{\frac{t}{4}} \sin(2t), e^{\frac{t}{4}} \cos(2t) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$g) \vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3} t \cos\left(\frac{7t}{2}\right), \frac{2}{3} t \sin\left(\frac{7t}{2}\right) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$h) \vec{r}(t) = \left(t - \frac{11}{10} \sin(3t), -\frac{22}{10} \cos(3t) \right); \quad -3\pi \leq t \leq 3\pi$$

2.3. Curvas en polares

Una curva en coordenadas polares es la imagen de la función

$$r = h(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Un punto de la curva en polares (r_0, θ_0) tiene distancia al origen r_0 y el ángulo que forma el vector de posición del punto con el eje horizontal, medido en sentido positivo, es θ_0 .

Por lo tanto, la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas paramétricas es

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Para dibujar una curva en polares con MatLab se utiliza el comando polar. Por ejemplo, para dibujar la gráfica de

$$r = 2 - 4 \cos(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Generamos los valores del ángulo tetha

```
>>tetha=linspace(-pi,pi,100);
```

Calculamos los valores de r

```
>>r=2-4*cos(tetha);
```

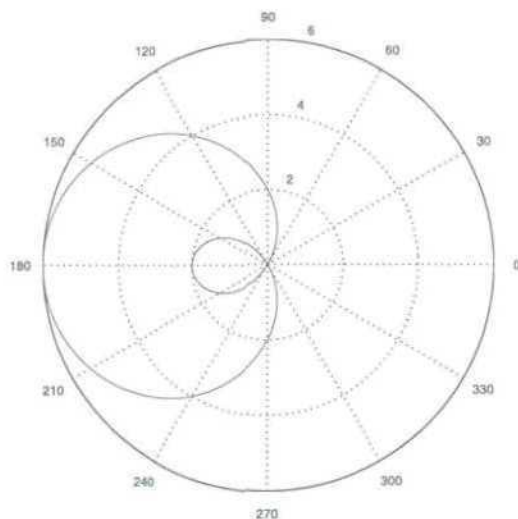


Figura 9. Curva en polares.

Y dibujamos la gráfica

```
>>polar(tetha,r)
```

Ejercicio 2.3. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones, dadas en coordenadas polares:

$$a) r = 7 - 7 \operatorname{sen}(\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$b) r = 3 - 6 \operatorname{sen}(\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$c) r = \operatorname{sen}(6\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$d) r = \operatorname{cos}(8\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$e) r = \sqrt{5 \operatorname{cos}(2\theta)}; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

2.4. Cambios de coordenadas polares-cartesianas

Hay dos comandos que permiten hacer cambios de coordenadas. Si queremos cambiar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas hay que utilizar el comando

```
>>[x,y]=pol2cart(theta,r);
```

Esto es, suponiendo que los puntos en coordenadas polares estén previamente almacenados en las variables `theta` y `r`. Los puntos ahora obtenidos se podrían dibujar utilizando el comando `plot`.

Para hacer el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares, habría que utilizar

```
>>[theta,r]=cart2pol(x,y);
```

Ejercicio 2.4. En los ejemplos del ejercicio anterior, utilizar el comando `pol2cart` para cambiar las coordenadas polares obtenidas a coordenadas cartesianas. Usar después el comando `plot` para obtener las gráficas en las nuevas coordenadas.

3. GRÁFICAS 3D

En esta sección vamos a ver cómo se pueden dibujar con MatLab gráficos de curvas en el espacio en forma paramétrica, gráficas de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, y algunos ejemplos de superficies parametrizadas.

3.1. Curvas en el espacio

Se generan de una manera similar a las curvas en el plano, con la diferencia de que aquí se utilizan los comandos `plot3` o `comet3`, también existe un comando `quiver3` para dibujar vectores velocidad sobre las curvas.

Por ejemplo, queremos dibujar la hélice

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t), t) \quad 0 \leq t \leq 8\pi$$

y sobre ella los vectores velocidad.

Generamos los valores de t :

```
>>t=linspace(0,8*pi,2000);
```

Y ahora podemos utilizar dos comandos:

`plot3` lo que nos da el dibujo completo

```
>>plot3(sin(t),cos(t),t),grid on
```

con lo que obtendremos la gráfica de la figura 10.

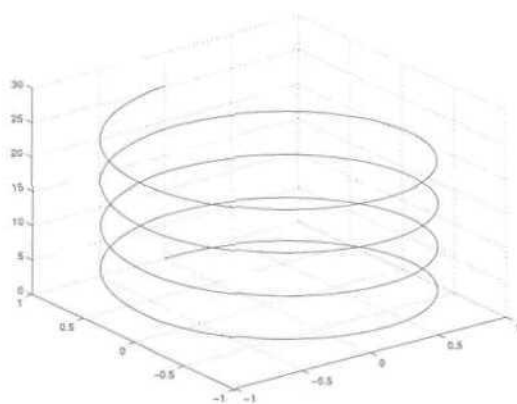


Figura 10. Gráfica de una hélice.

O también `comet3`, que funciona de manera análoga a como lo hacía el comando `comet` en las curvas en el plano.

```
>>comet3(sin(t),cos(t),t)
```

Para dibujar algunos vectores velocidad sobre la curva hay que utilizar el comando `quiver3(vector posición,vector velocidad)`. Al

igual que con el comando `quiver`, también conviene volver a generar los valores de t de manera que no sean demasiados para que se pueda apreciar mejor la gráfica. Por ejemplo,

```
>>t=linspace(0,8*pi,30);
>>quiver3(sin(t),cos(t),t,cos(t),-sin(t),1)
```

Ejercicio 3.1. Representar las curvas siguientes y representar en gráfica aparte algunos vectores velocidad de la curva en los intervalos indicados:

$$a)\vec{r}(t) = (2 \cos^3(t), 2 \operatorname{sen}^3(t), t) \quad -4 \leq t \leq 3.$$

$$b)\vec{r}(t) = (\cos(t), 2 \cos^2(t), \frac{1}{4} \operatorname{sen} t) \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

$$c)\vec{r}(t) = (\frac{t}{6} \cos t, \frac{t}{6} \operatorname{sen} t, \frac{t}{36}) \quad -12 \leq t \leq 19.$$

$$d)\vec{r}(t) = (e^{\frac{t}{4}} \operatorname{sen}(2t), e^{\frac{t}{4}} \cos(2t), \frac{t}{4}) \quad -10 \leq t \leq 4,8.$$

$$e)\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(t), -\cos(2t) - \cos(t), \frac{t}{6}) \quad -9 \leq t \leq 10.$$

$$f)\vec{r}(t) = (\cos(3t), 2 \cos^2(t), \operatorname{sen}(2t)) \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

3.2. Funciones de la forma $z = f(x, y)$

Para dibujar gráficos de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, al igual que para funciones de una variable, en primer lugar hay que generar tablas de valores para las variables x e y , en realidad, ahora lo que tenemos que hacer es generar un mallado sobre un rectángulo del plano XY . Para eso se utiliza el comando `meshgrid`.

Por ejemplo, si queremos dibujar la gráfica de la función

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

en la región del plano $D = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$, habrá que efectuar los pasos siguientes:

Generamos el mallado

```
>>[x,y]=meshgrid(-2:.5:2);
```

Sustituimos en la función para calcular los valores de z

```
>>z=exp(-x.^2-y.^2);
```

Y ahora podemos dibujar el gráfico con alguno de los siguientes comandos que producen los dibujos mostrados en la figura 11:

```
>>plot3(x,y,z)
```

```
>>mesh(x,y,z)
```

```
>>surf(x,y,z)
```

```
>>surf(x,y,z),shading flat %efecto de sombreado distinto
```

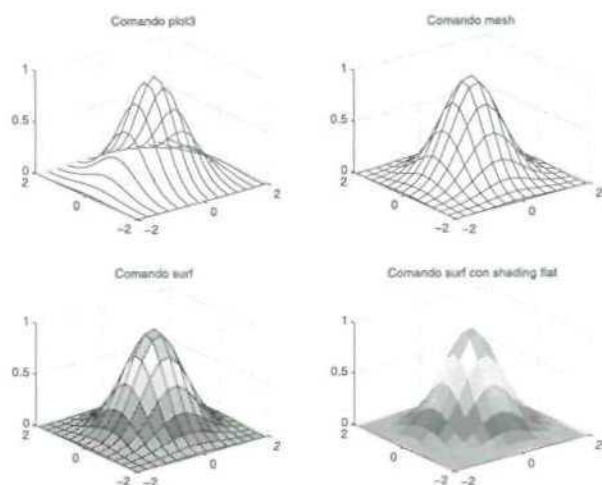


Figura 11. Gráficas 3D.

3.3. Manipulación de gráficos 3D

MALLADO. El comando `meshgrid` se puede utilizar también para generar mallas de regiones rectangulares. Por ejemplo, si queremos hacer un malla para la región $[0, 1] \times [0, 3]$, tendremos que escribir

```
>>[x,y]=meshgrid(0:.1:1,0:.1:3);
```

La secuencia `0:.1:1` describe la variación de la variable x , y `0:.1:3` la de la variable y . Si sólo se utiliza un intervalo, éste se aplica a las dos variables. También se puede utilizar dentro de `meshgrid` el comando `linspace`.

SOMBRA Y COLORES. Para conseguir efectos de sombreados y colores diferentes se pueden consultar todas las posibilidades de los

comandos `colormap` y `shading`. Algo que resulta también interesante, es añadir una escala de colores al dibujo que nos permite conocer las alturas (coordenada z) de los diferentes puntos de la gráfica, esto se consigue con el comando `colorbar` (después de dibujada la gráfica).

Para generar la gráfica de la figura 12 ha sido utilizada la siguiente secuencia de comandos:

```
>>[x,y]=meshgrid(linspace(-1,1,50));
>>z=cos((x.*y)./(x.^2+y.^2+1));
>>surf(x,y,z),colorbar
```

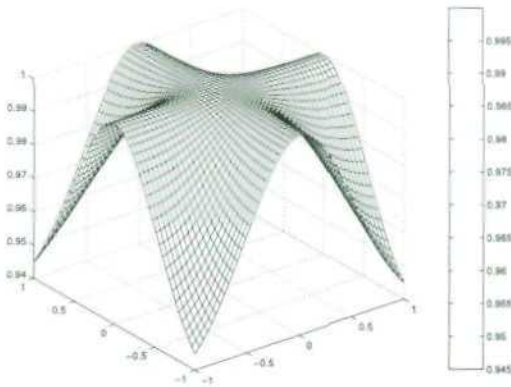


Figura 12. Gráfica 3D con escala de colores.

Como se puede observar, los puntos más altos corresponden a los colores más cálidos y los puntos más bajos de la gráfica están coloreados con colores fríos.

EJES. Las longitudes de los ejes coordenados también se pueden modificar con el comando

```
>>axes([xmin xmax ymin ymax zmin zmax])
```

Los comandos `grid on` y `axis square` también funcionan en este tipo de gráficos.

ROTACIÓN DE GRÁFICAS. Otro comando interesante en las gráficas 3D es `rotate3d`, que nos permite, utilizando el ratón sobre la figura, rotarla de manera interactiva en tres dimensiones.

CURVAS DE NIVEL. Dada una función $z = f(x, y)$, las curvas sobre el plano XY , determinadas por $f(x, y) = k$, donde k es una constante se llaman *curvas de nivel*. Hay varias formas de obtenerlas usando MatLab.

Vamos a representar la gráfica de la función

$$z = x^2 + y^2,$$

dibujando algunas curvas de nivel.

Creamos el mallado,

```
>>[x,y]=meshgrid(-2:.1:2);
```

Sustituimos en la función, para calcular los valores de z ,

```
>>z=x.^2+y.^2;
```

Ahora, podemos dibujar la gráfica utilizando alguno de los comandos descritos anteriormente.

Las curvas de nivel se pueden hacer utilizando alguno de los comandos siguientes (ver figuras 13, 14 y 15):

```
>>contour(x,y,z,10) % dibuja 10 curvas de nivel
```

```
>>contour3(x,y,z,10) % lo mismo, pero en el espacio
```

```
>>pcolor(x,y,z),colorbar
```

Esta última orden dibuja un mapa de colores por niveles, la orden `colorbar` hace aparecer una escala de valores según el color, es decir, nos indica el valor de la variable z , como se describió antes.

Si se usa el comando `contour`, después se pueden etiquetar las curvas con los valores correspondientes de la z . Para hacer esto:

Primero dibujamos las curvas de nivel con

```
>>contour(x,y,z,10)
```

Después guardamos la información en una variable, por ejemplo,

```
>>cs=contour(x,y,z,30);
```

A continuación, tenemos dos opciones:

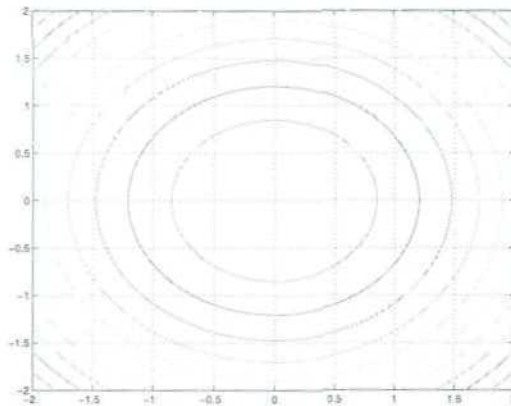


Figura 13. Curvas de nivel sobre el plano XY.

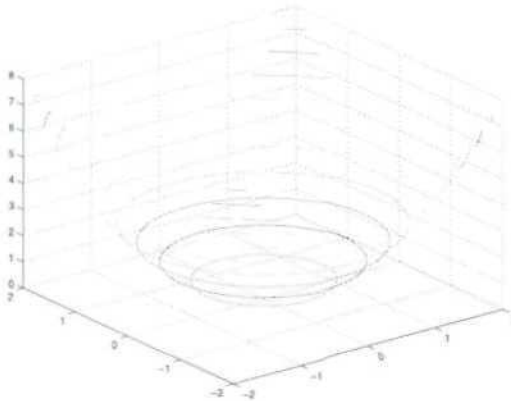


Figura 14. Curvas de nivel en el espacio.

```
>>clabel(cs) % etiqueta algunas aleatoriamente
```

O bien

```
>>clabel(cs,'manual')% nos permite elegir las con el ratón
```

Por otra parte, el comando `>>meshc(x,y,z)`, dibuja la gráfica, y por debajo, las curvas de nivel (algunas veces será necesario modificar los ejes para que la gráfica de la función no tape a las curvas de nivel).

Ejercicio 3.2. Representar las gráficas de las siguientes funciones de 2 variables, utilizando alguno de los comandos descritos anteriormente. Dibujar también algunas curvas de nivel:

$$a)z = \frac{1}{9 + x^2 + y^2}$$

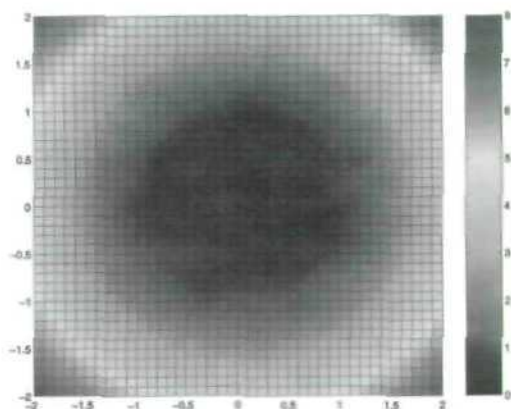


Figura 15. Gráfica 3D con escala de colores.

$$b) z = -\sqrt{|xy|}$$

$$c) z = \frac{\cos\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}{3+x^2+y^2}$$

$$d) z = \frac{y^2}{5} - 3|x|$$

$$e) z = e^{-(x^2+y^2)}$$

3.4. Algunas superficies en el espacio

Hay varios comandos en MatLab que permiten generar las gráficas de superficies en \mathbb{R}^3 (superficies que no son funciones.) Estos comandos son funciones que ya vienen programadas.

ESFERA. Se genera utilizando el comando `>> sphere(n)`, donde n es el número de puntos en los que queda dividido el ecuador de la esfera. Cuanto mayor sea n , mayor será la aproximación a la curvatura real de la esfera (de radio 1, centrada en el origen.) Poniendo sólo `>> sphere`, el valor que tomará n será 20, por defecto

```
>> sphere,axis square,title('ESFERA')
```

Obtenemos la gráfica de la figura 16.

Ejercicio 3.3. Utilizando el comando `sphere`, dibujar varias esferas con diferentes valores de n . Probar, en particular, los valores 2, 3, 4, etc.

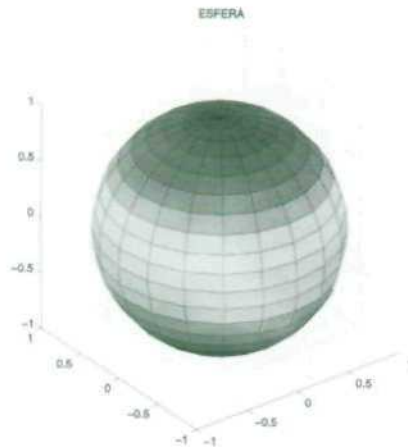


Figura 16. Esfera de radio 1 centrada en el origen.

Ejercicio 3.4. Vectores Normales a una superficie

Dibujar los vectores normales a la superficie de una esfera siguiendo los siguientes pasos:

Dibujar una esfera utilizando lo descrito anteriormente, pero guardando la información en tres variables

```
>>[x,y,z]=sphere(n);
```

Utilizar el comando `>>surfnorm(x,y,z)`

Este comando también se puede utilizar para dibujar los vectores normales en superficies de funciones de la forma $z = f(x, y)$. Para dibujar las normales en el sentido opuesto habrá que poner `surfnorm(x', y', z')`.

CILINDRO. El comando `>>cylinder(R,n)` genera automáticamente un cilindro de revolución de radio R , donde n es el número de puntos de la circunferencia de la base del cilindro. Como en el caso de la esfera, si usamos sólo `>>cylinder(R)`, el número n es, por defecto, 20.

Lo realmente interesante de este comando es que también admite radios variables $R(t)$, con $t \in [a, b]$. De esta forma, puede ser utilizado para obtener las gráficas de diferentes tipos de superficies de revolución, donde la generatriz es una función definida por $R(t)$. Por ejemplo, si queremos dibujar un paraboloides de revolución, podemos utilizar como generatriz la función $r(t) = \sqrt{t}$, con $t \in [0, 2]$

```
>>t=linspace(0,2,20);r=sqrt(t);cylinder(r)
```

Y obtendremos la gráfica de la figura 17. (No conviene poner demasiados puntos en `linspace` para que se pueda apreciar bien el dibujo.)

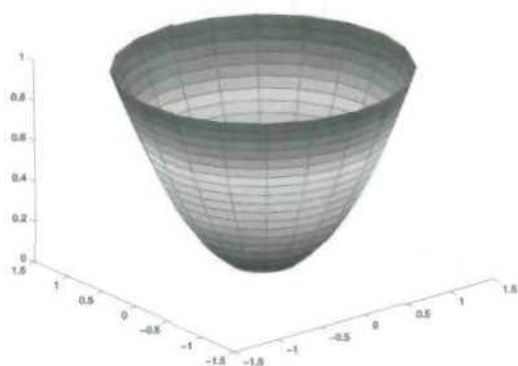


Figura 17. Paraboloides de revolución generado con `cylinder`.

Ejercicio 3.5. Dibujar las superficies generadas por `>>cylinder(R(t),30)`, en cada uno de los siguientes casos:

- $R(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$
- $R(t) = t^2, \quad t \in [-1, 1]$
- $R(t) = 2 + \text{sen}(t), \quad t \in [-2\pi, 2\pi]$
- $R(t) = e^t, \quad t \in [-3, 3]$

MÁS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. El comando `>>makevase` hace aparecer una ventana interactiva que permite dibujar gráficas de superficies de revolución en las que la generatriz es una poligonal cuyos vértices se señalan con el ratón sobre el propio dibujo.

3.5. Gráficos de funciones complejas

El comando `cplxmap` permite representar gráficas de funciones complejas de variable compleja en el siguiente sentido:

Sea la función compleja de variable compleja

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w = f(z) \end{aligned}$$

El comando `>>cplxmap(z,f(z))` dibuja una gráfica tridimensional en la que el eje X es la parte real de la variable, es decir, $\text{Real}(z)$; el eje

Y es la parte imaginaria de la variable, es decir, $\text{Im}(z)$ y el eje Z es la parte real de la imagen de la función, es decir, $\text{Re}(f(z))$.

La variable z va a pertenecer siempre al dominio constituido por el disco unidad centrado en el origen y las coordenadas de los puntos deben estar en forma polar. Esto se consigue utilizando previamente el comando `>>cplxgrid(n)`, donde n es el número entero positivo.

Por ejemplo, con los comandos

```
>>z=cplxgrid(12);
>>cplxmap(z,z.^2)
```

obtenemos la gráfica de la función $f(z) = z^2$ (figura 18)

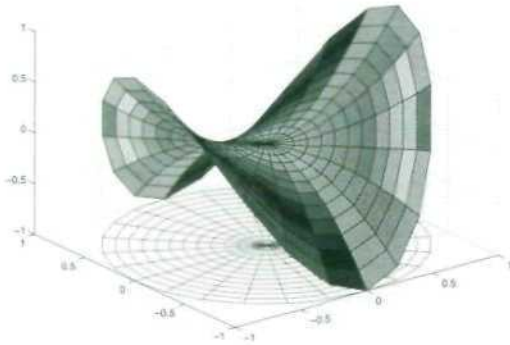


Figura 18. Gráfica de $f(z) = z^2$.

Obsérvese que para cada valor de z , su imagen $f(z)$, es única. Esto no es así para cualquier función compleja. Por ejemplo, la función $f(z) = z^{1/2}$ es una función bivaluada, la función $g(z) = z^{1/3}$ es una función trivaluada, cada z puede producir tres valores distintos para $g(z)$, y así sucesivamente. Para obtener las gráficas de estas funciones especiales, que se denominan *Superficies de Riemann*, MatLab dispone de un comando que las dibuja automáticamente, es el comando `cplxroot(n)`, donde n es el índice de la raíz.

El comando `>>cplxroot(2)` generaría la superficie de la figura 19.

Para obtener más información, se pueden ejecutar los comandos `cplxdemo` y `grafcplx`, que contienen sendas demostraciones de gráficas de funciones complejas.

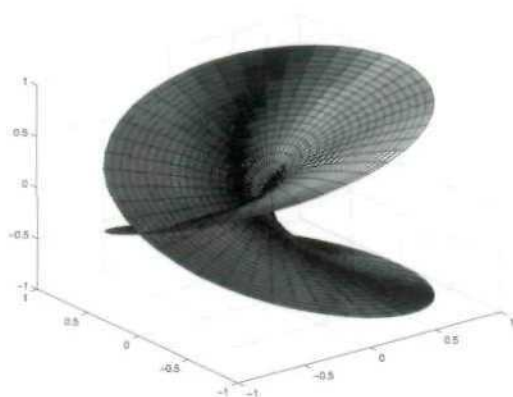


Figura 19. Gráfica de $f(z) = z^{1/2}$.

4. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

A pesar de que no se puede decir que MatLab sea el programa ideal para hacer cálculos relacionados con la Estadística², dispone de algunos comandos que nos permiten calcular algunos de los parámetros estadísticos básicos, así como comandos para generar bastantes gráficos.

Dependiendo del tipo de datos estadísticos de los que dispongamos, resulta conveniente utilizar uno u otro tipo de gráfico. Vamos a ir viendo los que se pueden hacer con MatLab, que son: *diagramas de Sectores*, *diagramas de Pareto*, *diagramas de barras e histogramas*.

4.1. Diagramas de sectores

Resultan útiles para representar datos de tipo cualitativo, en los que tenemos varias opciones, el diagrama de sectores permite compararlas en un círculo con sectores cuyo ángulo es directamente proporcional al porcentaje de cada opción.

Ejemplo 4.1 *Los resultados de las elecciones generales del 12 de marzo de 2000 al Congreso de los Diputados fueron los siguientes:*

²No al menos como programas especializados en cálculos estadísticos, como puede ser el programa STATGRAPHICS.

Formación Política	Número de Escaños
<i>Partido Popular</i>	183
<i>Partido Socialista Obrero Español</i>	124
<i>Convergència i Unió</i>	15
<i>Izquierda Unida</i>	8
<i>Partido Nacionalista Vasco</i>	7
<i>Otros</i>	12
<i>Total</i>	350

Para dibujar un diagrama de sectores de los resultados de las elecciones, procedemos como sigue. Introducimos los datos en un vector

```
>>x=[183 125 15 8 7 12]
x =
    183    125     15     8     7    12
```

Y ahora, dibujamos el diagrama. Se puede poner una leyenda que nos indique qué sector corresponde a cada partido político. Como se puede observar en el gráfico (figura 20), MatLab calcula automáticamente los porcentajes correspondientes y los pone junto a su sector

```
>>pie(x),legend('PP', 'PSOE', 'CiU', 'IU', 'PNV', 'Otros')
```

(Nota: si la leyenda no sale en el lugar deseado, se puede mover utilizando el botón izquierdo del ratón y colocándola en el lugar adecuado.)

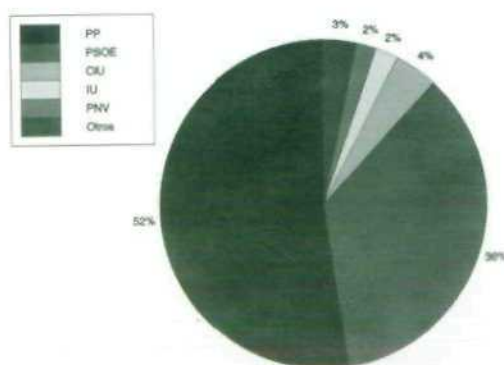


Figura 20. Diagrama de sectores.

Con el comando `pie3` se obtiene también un diagrama de sectores, pero en versión tridimensional (ver figura 21).

Tanto para el comando `pie`, como para el comando `pie3` existe la posibilidad de separar uno o más sectores para destacarlos con respecto de los demás. Por ejemplo, si queremos separar los sectores correspondientes a los dos primeros datos

```
>>pie3(x,[1 1 0 0 0 0])
```

El vector que se pone a continuación de `x` debe tener la misma longitud que el `x`, los unos y los ceros indican, respectivamente, los sectores que queremos separar y los que no.

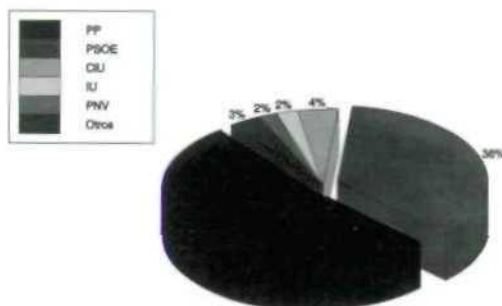


Figura 21. Diagrama de sectores 3D.

4.2. Diagramas de Pareto

Vamos a utilizar el ejemplo 4.1, pero ligeramente modificado:

Formación Política	Número de Escaños
<i>Partido Popular</i>	183
<i>Partido Socialista Obrero Español</i>	124
<i>Otros</i>	42
<i>Total</i>	350

El *diagrama de Pareto* que produce MatLab constará de barras cuyas alturas son el número de escaños, ordenadas en forma decreciente y sobre las barras, un polígono con las frecuencias acumuladas de los escaños. Además, en el eje vertical derecho aparece una escala de porcentajes.

Para generarlo, escribimos

```
>>x=[183 125 42]
```

```
x =
```

```
183 125 42
```

```
>>pareto(x),ylabel('Número de Escaños')
```

Y obtenemos el gráfico de la figura 22.

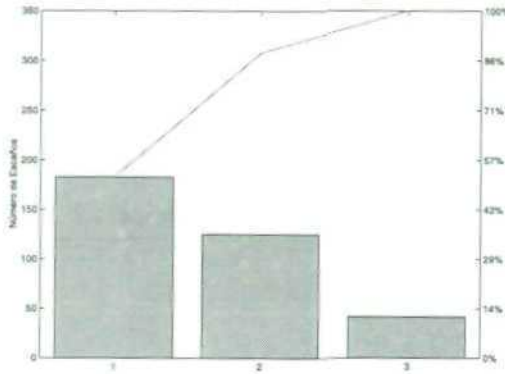


Figura 22. Diagrama de Pareto.

Este comando tiene un pequeño problema y es que si la frecuencia de uno de los datos es pequeña en comparación con las otras, puede no aparecer en el dibujo. Por ejemplo, si hubiésemos utilizado los datos tal y como aparecían en el ejemplo 4.1, algunas de las barras correspondientes a los partidos políticos que habían obtenido un número bajo de escaños no habrían aparecido.

4.3. Diagramas de barras

Existen varias posibilidades para representar diagramas de barras. Supongamos que queremos representar los siguientes datos en un diagrama de barras:

Introducimos los datos en un vector

```
>>x=[10 2 3 5 18 20 15];
```

Y ahora usamos los comandos `bar`, `barh`, `bar3` y `bar3h` para generar los gráficos. (Usando el comando `subplot` podemos conseguir que aparezcan todos en la misma figura.)

```
>>subplot(2,2,1),bar(x),title('Barras Verticales')
>>subplot(2,2,2),barh(x),title('Barras Horizontales')
>>subplot(2,2,3),bar3(x),title('Barras Verticales 3D')
>>subplot(2,2,4),bar3h(x),title('Barras Horizontales 3D')
```

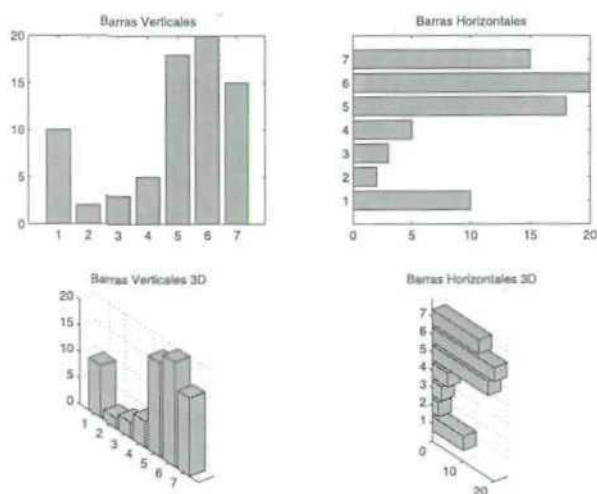


Figura 23. Diagramas de barras.

Obtenemos los gráficos de la figura 23.

Hay que observar que las gráficas 3D se pueden modificar utilizando el comando `rotate3d` descrito en las secciones anteriores.

Los datos pueden estar agrupados, en este caso, las órdenes anteriores los dibujan también agrupados de manera que resulte fácil compararlos. Veamos el siguiente ejemplo:

```
>>x=[1 2 3;4 3 6; 10 9 8; 4 2 7;12 10 7];
```

Ahora, utilizando los mismos comandos que antes, obtenemos los gráficos de la figura 24.

Y por último, también se pueden agrupar en 3D, de forma diferente a la anterior, con la orden `bar3(x,'group')` y se puede hacer que aparezcan las barras apiladas con `bar3(x,'stack')` (ver figura 25).

4.4. Histogramas

Para generar histogramas se utiliza el comando `hist`. Por ejemplo, generamos 1000 números aleatorios siguiendo la normal $\mathcal{N}(0, 1)$

```
>>x=randn(1000,1);
```

Con la orden `hist(x)`, obtenemos (figura 26) un histograma en el que los datos aparecen agrupados en 10 intervalos. Si queremos que

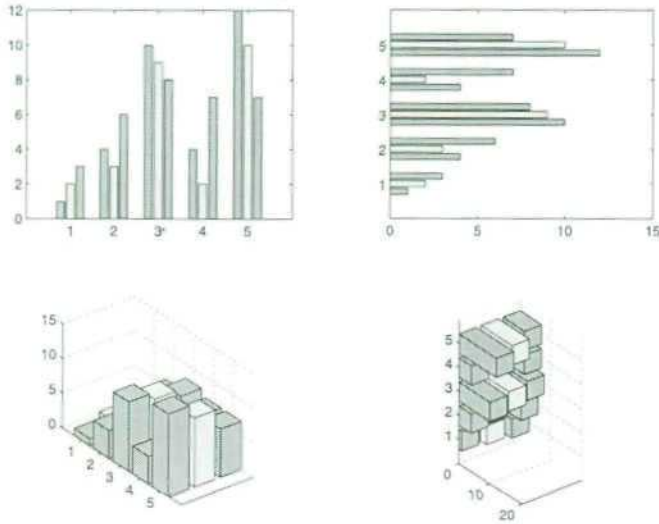


Figura 24. Diagramas de barras con datos agrupados.

aparezcan más o menos intervalos, habrá que indicarlo con `>>hist(x,N)`, donde N es el número de intervalos.

5. GRÁFICAS EN MOVIMIENTO: “MOVIES”

Entre las múltiples posibilidades del programa MatLab está la de producir gráficas en movimiento. Se trata de pequeños programas, llamados “movies”, que elaboran una “película” fotograma a fotograma. Estos fotogramas, una vez visualizados, producen la sensación de movimiento.

Veamos un ejemplo: queremos dibujar la gráfica de la curva $y = \lambda \sin(x)$ para varios valores de λ contenidos en el intervalo $[-1, 1]$.

Veamos en primer lugar el programa:

En primer lugar, abrimos el editor de programas de MatLab, con `File New M-File`. Se abre un editor en el que escribiremos lo siguiente,

Ejemplo 1

```
function cuerda
% movie cuerda

x=linspace(0,2*pi,1000); n=50;
% n numero de fotogramas
```

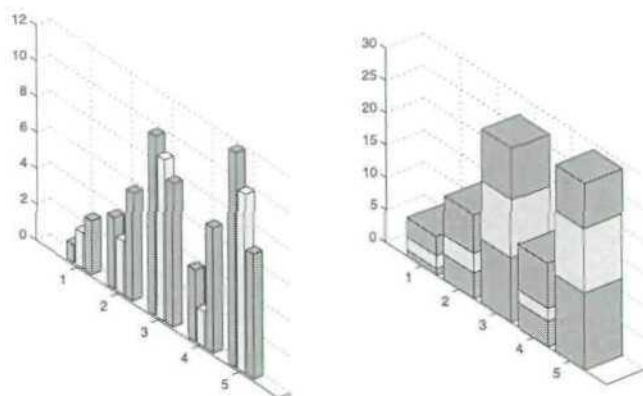


Figura 25. Datos agrupados en 3D y barras apiladas.

```

for j = 1:n
    t=(2*pi/49)*(j-1);
    y=sin(t)*sin(x);
    plot(x,y,'*'),axis([0 2*pi -1.2 1.2])
    F(j) = getframe;
end
movie(F,2) % veces que queremos ver la peli

```

A continuación lo guardamos (en el directorio que aparece por defecto, *Work*) con el nombre *cuerda*. Si se pone otro nombre, habrá que cambiar la primera línea del programa. Para ejecutarlo, basta con escribir el nombre del programa, *cuerda*, en la línea de comandos.

El núcleo del programa lo constituyen el conjunto de comandos:

```

for j = 1:n
    t=(2*pi/49)*(j-1);
    y=sin(t)*sin(x);
    plot(x,y,'*'),axis([0 2*pi -1.2 1.2])
    F(j) = getframe;
end

```

Es lo que en programación se denomina un **bucle**, esto es, un conjunto de instrucciones, en este caso, comandos gráficos que se ejecutan varias veces, dependiendo del valor de *j*. A medida que *j* varía de 1 a

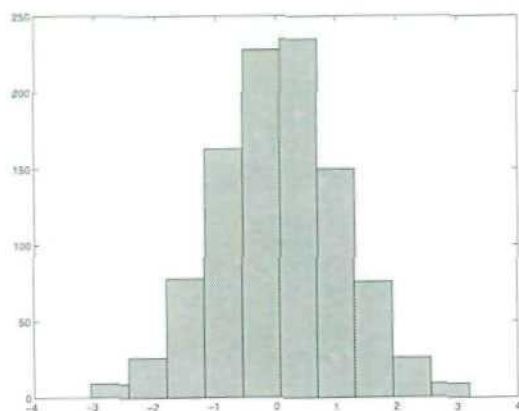


Figura 26. Histograma.

50, t varía, de 0 a 2π y, por tanto, $\lambda = \sin(t)$ varía entre -1 y 1. Para cada valor de j se realiza un gráfico/fotograma que se almacena con la instrucción `F(j) = getframe;`. Por último, el comando `movie(F,2)` permite visualizar la película el número de veces que se le indique.

A continuación se incluyen algunos ejemplos más de “movies”:

Ejemplo 2

```
function elipse

% movie
n=30; x=linspace(0,2*pi,200);

for j = 1:n
    t=(pi/29)*(j-1);
    plot(cos(x),sin(t)*sin(x),'rs'),
    axis([-1 1 -1 1]);
    F(j)=getframe;
end
movie(F,5)
```

Ejemplo 3

```
function colores

% movie
```

```
n=30;

for j = 1:n
    x=rand(10);
    imagesc(x)
    F(j) = getframe;
end
movie(F,5)
```

Ejemplo 4

```
function membrana

% movie membrana
[x,y]=meshgrid(-1:.1:1); n=20;

for j = 1:n
    t=(2*pi/19)*(j-1);
    z=2*sin(t)*exp(-x.^2-y.^2);
    surf(x,y,z),axis([-1 1 -1 1 -2 2])
    F(j) = getframe;
end
movie(F,6)
```

Ejemplo 5

```
function picos

% movie

[x,y,z]=peaks; n=20;

for j = 1:n
    t=(2*pi/19)*(j-1);
    z1=sin(t)*z;
    surf(x,y,z1),axis([-3 3 -3 3 -5 5])
    F(j) = getframe;
end
movie(F,3)
```

Ejemplo 6

```
function reloj

% movie reloj

n=100;

for j = 1:n;
    t=linspace(0,2*pi,1000);
    plot(cos(t),sin(t)),axis square hold on horas=0:12;
    plot(.9*cos(horas*2*pi/12),... .9*sin(horas*2*pi/12),'k*')
    hor=pi/2-(j-1)*2*pi/(n-1); %horaria
    plot([0 .5*cos(hor)], [0 .5*sin(hor)]),
    min=pi/2-(j-1)*12*2*pi/(n-1); % minuteria
    plot([0 .8*cos(min)], [0 .8*sin(min)]) hold off
    F(j) = getframe;
end
movie(F)
```


REFERENCIAS

CHEN, K., GIBLIN, P. e IRVING, A. *Mathematical Explorations with MATLAB*. Cambridge University Press. Cambridge, 1999.

DUOANDIKOETXEA, J. "Análisis de Fourier: historia y aplicaciones recientes". En ZUAZUA, E. (Director) *Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria*. Centro de publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte/UIMP. Madrid, 2000. Págs. 11-43.

HARMAN, Th. L., DABNEY, J. y RICHERT, N. *Advanced Engineering Mathematics using MATLAB*. Vol. 4. PWS. Boston, 1997.

HIGHAM, D.J. y HIGHAM, N.J. *Matlab guide*. SIAM. Philadelphia, 2000.

RODRÍGUEZ DEL RÍO, R. "Matemáticas en el Aula de Informática". En ZUAZUA, E. (Director) *Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria*. Centro de publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte/UIMP. Madrid, 2000. Págs. 145-210.

ZUAZUA, E. (Director) *Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria*. Centro de publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes/UIMP. Madrid, 2000.

MATEMÁTICAS, CIENCIA Y TECNOLOGÍA: UNA RELACIÓN PROFUNDA Y DURADERA

Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

*No te preocupes demasiado por lo que son las Matemáticas
antes de probar tu suerte. Ya lo irás viendo.*

RESUMEN

1. Introducción. Esencia y papel de las Matemáticas.

- Un arte puro.
- Otra visión, otro papel.
- Repercusión de la Matemática.

2. Herederos de Galileo y Newton.

- Los dos pilares.

3. El siglo de la Razón y de las Luces.

4. El siglo XIX, el gran siglo de la ciencia.

- La Evolución Interna.
- El contexto social.

5. Un cambio de siglo revuelto.

6. El siglo XX, un siglo de maravillas.

- Nuevas matemáticas que nos llegaron de la Física.
- Las matemáticas que vinieron de la ingeniería.
- Grandes novedades que vinieron de las matemáticas.
- Las matemáticas y la vida social. La teoría de juegos.

7. Ingeniería y matemáticas en la última revolución del siglo. Los ordenadores y la matemática computacional.

- El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas.
- Un nuevo paradigma de la ciencia.

8. Los retos y tendencias del siglo XXI. Matemáticas en las ciencias, la industria, las finanzas y la administración.

9. De los 23 problemas de Hilbert en 1900 a los problemas de Clay en 2000.

10. Ejemplos de nuevos cursos.

11. Hechos y opiniones.

- Hacer y enseñar matemáticas hoy.
- La modelización.
- Promesas y plazos.
- Puntos para un debate.

12. Breve apunte sobre las Matemáticas en España.

Conclusión.

REFERENCIAS

RESUMEN

Los matemáticos suelen decir que la esencia de las Matemáticas reside en la belleza de los números, figuras y relaciones, y hay una gran verdad en ello. Pero la fuerza motriz de la innovación matemática en los siglos pasados ha sido el deseo de entender cómo funciona la Naturaleza. Este aspecto fundamental es pocas veces mencionado.

La Matemática forma junto con el método experimental el esquema conceptual en que está basada la Ciencia moderna y en el que se apoya la Tecnología, existiendo estrechas interacciones entre ellas. Sobre estas bases nació la Sociedad Industrial hace varios siglos, y la nueva Sociedad de la Información se construye en el presente siguiendo las mismas pautas.

En el artículo damos un esbozo de esta relación con la ciencia y la tecnología, de cómo se puso en marcha y de los héroes que la han hecho realidad, seguido de una ojeada al futuro, en que la relación se extiende prácticamente a toda la sociedad. Se añade un corto comentario sobre la Matemática en España.

1. INTRODUCCIÓN. ESENCIA Y PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS

La Matemática es una disciplina intelectual autónoma, uno de los exponentes más claros del poder creativo de la mente humana. Por otra parte, juega un papel fundamental en la Ciencia moderna, tiene una marcada influencia sobre ella y a su vez se ve influenciada por la ciencia *de una manera esencial*. Estas son, brevemente presentadas, las dos concepciones que simbolizan las maneras diferentes de ver el gran edificio que es la Matemática actual. Estas opciones se reflejan en las populares denominaciones de Matemática Pura y Aplicada. Pero entonces, ¿es que existen dos matemáticas diferentes? y, si esto es verdad, ¿pueden coexistir pacíficamente e interactuar recíprocamente, o es que viven de hecho separadas e incluso hostiles una a la otra? En el presente artículo intentaremos mostrar que, hoy como ayer, ambas visiones de la matemática son las caras de una misma moneda, que nos parecen a veces tan diferentes, a veces tan semejantes.

Un arte puro

Una primera dimensión de las matemáticas es en efecto el aspecto puro, la matemática como un arte por derecho propio, un juego que se juega en nuestras mentes. La Matemática es un arte que expresa la belleza en forma de axiomas, teoremas y relaciones lógicas o numéricas y atrae al investigador precisamente por su perfección lógica, siendo uno de los ejemplos más claros y convincentes de la capacidad humana para el razonamiento y el análisis. Ella impone orden y armonía donde sólo veíamos desorden y caos.

Ésta es la dimensión más próxima al investigador y, como toda forma pura de arte, tiene una fascinación que explica por qué los profesionales consagramos una parte enorme y bastante exclusiva de nuestras vidas a ella. *Resulta natural que los matemáticos profesionales tiendan a ver su ciencia desde este punto de vista del arte en sí mismo, con sus conceptos, conjeturas, resultados y métodos de prueba, con sus áreas vene-*

rables: la aritmética, el álgebra, la geometría y el análisis, y los nuevos retoños: la estadística, el cálculo de probabilidades, la lógica matemática, la computación,... Y estimen sobre todo sus *perfectas deducciones lógicas*. Grandes sabios han profundizado en esta dirección: PITÁGORAS ve en los números la clave de la realidad y PLATÓN ve en el mundo de las ideas un mundo de orden más perfecto que el mundo físico cotidiano. De hecho, pocos matemáticos profesionales han sido totalmente ajenos al sentimiento de que la verdadera Matemática habita más allá, en un mundo ideal, esperando a ser descubierta por el artista. En sus fabulosos 13 libros de *Los Elementos*, EUCLIDES de Alejandría (325-265 a.C.) estableció a la vez la teoría y las reglas de un juego que sigue sus pautas hoy como hace 22 siglos. Pocos artistas a lo largo de la Historia podrán decir lo mismo sobre la repercusión y perennidad de su obra: las demostraciones de Euclides son aún hoy día “las demostraciones” en los temas por él tratados. Tal es su influencia intelectual que en el siglo XX, los matemáticos asociados bajo el nombre de guerra de Nicolás BOURBAKI osaron repetir la histórica gesta con unos actuales *Elements de Mathématique*¹. La matemática es pues un arte autónomo que halla la verdad dentro de sí misma. Recordemos a Carl G. J. JACOBI que sostuvo que la matemática sólo existe “*para honor del espíritu humano*”. Claro que de ahí también se deriva una cierta concepción popular, con su halo romántico pero hoy día un tanto descaminada, que ve al matemático como un sabio irremediabilmente distraído, con poca o ninguna mente práctica.

Otra visión, otro papel

¿Refleja lo anterior el cuadro completo de la Matemática? En absoluto, *la Matemática es eso y mucho más*, hay un modo totalmente distinto de verla y de hacerla que queremos presentar. Junto con el método experimental, las matemáticas son la base sobre la que se asienta la Ciencia moderna y, como consecuencia, en ellas se apoya el desarrollo tecnológico de nuestras sociedades. Penetra hoy todos los aspectos de la sociedad contemporánea desde la ingeniería a la información, el mundo de la empresa, la salud, la administración y las finanzas, sin olvidar el movimiento de las disciplinas sociales hacia el estatus de ciencias, que significa en otros términos y con los matices apropiados, el uso combinado en estas disciplinas de los métodos matemáticos y experimentales. La importancia práctica de las matemáticas en las ciencias es indiscutible, y no está de hecho en discusión pues la mayoría aplastante de los científicos es bien consciente del *valor instrumental* de unas buenas dosis de matemáticas en la ciencia. Así, una parte cuantitativamente im-

¹Con un éxito innegable a pesar de una cierta división de público y crítica.

portante de las matemáticas que son enseñadas en las universidades de todo el mundo se consagra a la educación de ingenieros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas y profesionales de otras varias disciplinas.

Sin embargo, creemos que tal aprecio no hace justicia al papel que las matemáticas juegan en la sociedad. Sostenemos que el *papel de la Matemática que es aplicada* en diversos contextos sociales va más allá de esta descripción, es más *esencial*. De hecho:

(I) las matemáticas han jugado un papel fundamental en la formulación de la *ciencia moderna desde sus comienzos*; una teoría científica es una teoría que dispone de un modelo matemático adecuado;

(II) las matemáticas que se pueden aplicar hoy día abarcan todos los campos de la ciencia matemática y no sólo ciertos temas especiales; se trata de matemáticas de todos los niveles de dificultad y no sólo de resultados y argumentos sencillos;

(III) las ciencias exigen hoy como ayer nuevos resultados de la investigación y plantean nuevas direcciones de estudio a los investigadores. Pero el ritmo de la sociedad contemporánea hace los plazos sustancialmente más cortos y la exigencia más urgente;

(IV) las capacidades del cálculo científico han hecho de la *simulación numérica* una herramienta indispensable en la comprensión, *diseño y control de los procesos industriales*.

(V) cuando se habla de la utilidad de las matemáticas para las ciencias se incluye implícitamente en este nombre la técnica y la ingeniería. Pero hoy día los contornos son mucho más amplios y difusos; éste es un aspecto de gran importancia en el presente y el futuro de las matemáticas.

En este artículo trataremos de este aspecto en que *la Matemática es el idioma* en que están escritas las páginas de la ciencia; gracias a ella ha habido un desarrollo del combinado ciencia-tecnología que ha cambiado la vida del ciudadano de las sociedades tecnológicamente avanzadas en los últimos cuatro siglos *de una manera más radical que la Revolución Neolítica había hecho en los noventa siglos precedentes*, y el cambio ha

sido más dramático en las últimas décadas que en siglos enteros anteriores.

Es un hecho bien conocido por los expertos que la práctica diaria de las ciencias físicas y la ingeniería utiliza cantidades enormes de matemática del más alto nivel. Es más, los mismos conceptos con que se formulan sus teorías son esencialmente *los conceptos matemáticos*. En las últimas décadas hemos presenciado cómo la tendencia hacia la matematización alcanza a otras disciplinas, como la Economía, particularmente el mercado financiero, ramas de la Química, la Biología y la Medicina, e incluso las ciencias sociales.

Es un hecho comprobado que la maquinaria matemática, sea imponente o no lo sea, *se oculta muy a menudo cuidadosamente* al público en los manuales o en los escritos de divulgación, como si no existiese, pues se supone que no será bien vista por el lector (o que éste no la comprenderá). Pero los nuevos tiempos traen cambios saludables: gracias a la simpatía del público por las proezas del cálculo y la informática, las matemáticas subyacentes van saliendo a la luz.

Repercusión de la Matemática

En manos del científico, *la Matemática debe permitir asimilar los datos y entender los fenómenos*. En manos del ingeniero, es la herramienta que hace posible construir un *modelo* numérico o cualitativo cuyo análisis permitirá *tomar decisiones, diseñar artefactos y controlar procesos de manera eficaz y fiable*. Esta actividad es lo que, a falta de un nombre mejor, llamamos **Matemática aplicada**. Cubre las áreas clásicas como la Física Matemática y los Métodos Matemáticos para la Ingeniería, pero tiene hoy día contornos más amplios con el advenimiento del cálculo científico y la simulación numérica. La modelización, la simulación computacional y el análisis de datos son herramientas esenciales en la ciencia y la industria modernas. La Matemática aplicada es simplemente **la Matemática de la realidad**, es decir, del mundo real, sea lo que sea lo que esta frase significa para cada lector individual.

Señalemos que hay aún otras visiones complementarias de las matemáticas: su aspecto cultural, su importancia en la enseñanza como vehículo del pensamiento racional, su importancia para comprender el mundo diario (las “matemáticas para el hombre de la calle”), su aspecto de juego intelectual (el reto de resolver un problema). La Matemática es al mismo tiempo la ciencia de lo exacto y el cálculo de lo probable.

Es la ciencia del razonamiento abstracto y simbólico. Es, también, hoy día, sinónimo de virtuosismo computacional, de capacidad y efectividad de procesar información, tan importante para el mundo que se gesta. Es el mundo del científico que trabaja con un trozo de papel y hoy, también, el mundo de la modelización, el cálculo y el control de procesos industriales. Todo ello forma también parte del múltiple legado de las matemáticas².

A continuación dirigimos nuestra atención hacia el pasado y presente de la Matemática Aplicada. El lector puede encontrar conveniente saltar en una primera lectura la información contenida en las notas a pie de página. Además, varias fórmulas famosas y ecuaciones importantes aparecerán aquí y allá en las páginas. ¡El propósito no es en absoluto que sean estudiadas como parte del texto! Es, más bien, recordar al lector iniciado su belleza y relevancia, y al mismo tiempo, dejar claro que no existe ningún *camino real* (es decir, regio) de acceso a la Matemática: la divulgación tiene sus límites y una comprensión real de los temas aquí perfilados implica un estudio serio. En el capítulo final volveremos a tratar de las opiniones que se debaten y los hechos que sustentan tales opiniones.

2. HEREDEROS DE GALILEO Y NEWTON

Dos grandes figuras históricas fijaron el futuro *papel estelar* de las matemáticas en los momentos en que nacía la Ciencia moderna. GALILEO *lo formuló*, NEWTON *lo demostró*. No les faltaron precursores. Habría que recordar que en la Historia Antigua, PITÁGORAS de Samos (569a.C.-475a.C.) sostuvo que *todo es número* y encontró la maravillosa conexión entre la Música y la Aritmética, mientras ARQUÍMEDES de Siracusa unió Geometría y Mecánica en el siglo III a.C. (m. 212 a.C.). Y un siglo antes de Galileo, el genio universal de LEONARDO DA VINCI *intuyó* el papel central de la Matemática en la Ciencia. Una pléyade de grandes matemáticos, los héroes de nuestro relato, los siguieron³. Se pue-

²sobre estos asuntos ver VÁZQUEZ, J. L. "Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". *Gaceta de la Real Soc. Matemática Española*, vol. 3, 1. 2000. Págs. 9-22. Ver, también, <http://dulcinea.uc3m.es/ceamm>.

³En el recorrido histórico que sigue, los nombres de Galileo y Newton irán acompañados de otros matemáticos ilustres, a algunos de los cuales adjudicaremos un papel relevante. Tal selección, que nos ayudará a fijar los hitos principales y a conocer a los héroes de nuestra particular aventura, es sin duda injusta con otros personajes de la talla de Fermat, Leibniz o Gauss, de lo cual queremos dejar constancia y sólo la brevedad (el *estrecho margen* del que hablaba Fermat) y lo concreto de nuestro

de decir con Newton que los matemáticos que se ocupan de la aplicación de su arte otean el futuro desde los hombros de gigantes⁴.

Procedamos por partes: es verdad que desde la más remota antigüedad, las matemáticas han estado relacionadas, incluso motivadas, por problemas prácticos. La Aritmética se origina con las actividades de contar y sumar, la Geometría proviene de medir líneas, superficies y cuerpos. Pero también es verdad que la Matemática, como ciencia lógico-deductiva, tal como fue elaborada y nos fue legada por los griegos, de Pitágoras a Euclides, tuvo una base netamente intelectual, digamos ideal, que siempre ha conservado desde entonces y que es parte fundamental de la matemática pura, es decir, de las matemáticas en sí mismas. Este proceso intelectual vive en su propio mundo y no debe nada de su mérito o belleza a la posible utilidad o aplicación práctica, no más que un poema, una sinfonía o un cuadro. Un silogismo fácil y demasiado frecuente nos llevaría de aquí a concluir que la auténtica matemática vive esencialmente ajena a la aventura de la ciencia y la tecnología. *Este silogismo es falso* por mucho que haya sido sostenido por no pocos matemáticos, y nos proponemos demostrarlo usando la obra y las opiniones de las grandes figuras. Pues *la historia nos muestra que la simbiosis con la ciencia y la tecnología ha sido fundamental y fructífera y que las matemáticas deben mucho de su ser actual y de sus temas estrella a sus compañeras de aventura. Y viceversa.*

Los dos pilares

Como es bien sabido, la Ciencia moderna surgió en Europa al final del período del Renacimiento. No se basa sólo en las matemáticas. El pilar fundamental del edificio en germen fue formulado por el filósofo y político inglés Francis BACON hacia 1620 y consiste en el *método experimental*⁵. El objeto preferente de la filosofía se orienta hacia la Naturaleza, que debemos leer y comprender, y eventualmente controlar; la observación es el medio para la comprensión y el experimento es el test de nuestras predicciones. Las ciencias se formaron alrededor de este método, primero la física, luego las demás: biología, geología y química.

objetivo nos sirve de excusa, pues el propósito que tenemos en mente no es la historia de la ciencia.

⁴Tomado de una frase de Newton sobre sus predecesores en carta a R. Hooke, 1675: "If I have seen farther than others, it is by standing on the shoulders of giants". He tratado de incluir en el texto y notas algunas de las frases más famosas de matemáticos y científicos sobre la Matemática y su aplicación.

⁵El método inductivo se presenta en su trabajo *Novum Organum* o *Nuevo Instrumento*, 1620.



GALILEO GALILEI

Las matemáticas son desde el principio el otro pilar de las ciencias. Fue Galileo GALILEI (1564-1642) quien más claramente señaló a principios del siglo XVII ese rumbo para las nacientes ciencias. Suya es la famosa cita tomada de su carta "*Il saggiaiore*"⁶ que reproducimos aquí en detalle: "*La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente está abierto ante nuestros ojos, el Universo, pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender el idioma en que está escrito, a entender sus ca-*

racteres. Está escrito en el lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas..."⁷.

Galileo era un claro defensor del método experimental, al que contribuyó con sus famosas observaciones astronómicas y mecánicas⁸. Como hemos dicho, la actitud de Galileo tenía precedentes, siendo los más notables los de Pitágoras y Arquímedes⁹ en la Antigüedad y el de Leonardo

⁶cf. *Opere*, VI. Pág. 232; "*El Ensayador*", 1623.

⁷Las famosas palabras no suelen imprimirse en su italiano (toscano) original: "*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egh è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto*".

⁸Dejó escritas sus ideas sobre la física, las matemáticas y la ingeniería en el libro *Discursos y pruebas matemáticas acerca de las dos nuevas ciencias*, escrito en Florencia antes de 1633, pero sólo publicado en el extranjero en 1638 después de los problemas con la Iglesia. Las dos nuevas ciencias son la mecánica y la ciencia del movimiento. En 1995 la sonda espacial *Galileo* alcanzó Júpiter y con él los 4 planetas descubiertos por el sabio en 1610.

⁹Arquímedes es uno de los "grandes" de la Matemática Pura y Aplicada. Universalmente conocido por sus contribuciones a la Mecánica, que se puede decir que fundó como ciencia teórica, y a la Hidrostática (principio de Arquímedes), fue también un genial matemático que aplicó su intuición mecánica a la Geometría e inventó el "método de exhaustión" para el cálculo de áreas y volúmenes limitados por figuras curvas; este método implica aproximaciones sucesivas y es precursor del concepto de límite que tardará 19 siglos en salir a la luz. Su cálculo del número π fue un récord durante muchos siglos. También inventó una notación para los números muy grandes. La matemática griega tuvo una brillante rama aplicada a la Astronomía con Aristarco de Samos y Eratóstenes de Cirene.

da Vinci (1452-1519)¹⁰ un siglo antes, pero la formulación de Galileo fue decidida y su propuesta fue puesta en práctica, pues sucedió en el contexto histórico adecuado; corroyó las bases del aristotelismo y la escolástica dominantes hasta entonces en el mundo intelectual. Dio fruto en breve tiempo y los científicos nos vemos reflejados en él.

De hecho, las filosofías son poca cosa si se quedan en palabras y polémicas, si no son llevadas a término. La gloria del siglo XVII reside en una serie de grandes filósofos-científicos (llamados en aquel entonces *filósofos naturales*), quienes, sin olvidarse de la metafísica, se lanzaron decididamente en pos del conocimiento de la Naturaleza y de la invención matemática: René DESCARTES estudió los principios del arte de razonar, así como la mecánica y el universo; ligó la geometría al álgebra y escribió *El Discurso del Método*¹¹; Blaise PASCAL escribió sus filosóficas *Pensées* pero también investigó los principios de los fluidos (como la presión), la geometría, el cálculo y las probabilidades¹². Y análogamente hicieron Pierre de FERMAT, Edmond HALLEY, Christiaan HUYGENS y Gottfried W. LEIBNIZ, un matemático, lógico y filósofo del mayor renombre.

Estamos ya listos para conocer a uno de los caracteres y de los momentos más cruciales en la historia de la ciencia. En efecto, el siglo alcanza su culminación con la figura de Isaac NEWTON (1642-1727), quien demuestra el éxito indiscutible de la propuesta de Galileo aplicada a la mecánica. Ataca los problemas básicos debatidos durante el siglo y

(i) concluye que el movimiento de cuerpos sólidos sigue una ley matemática simple que relaciona la segunda derivada del espacio (respecto al tiempo) con una entidad invisible *pero real*, la fuerza. En términos matemáticos, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

(ii) al aplicar esta teoría a los cuerpos celestes, concluye que se mue-

¹⁰Los intereses de Leonardo, un genio verdaderamente universal, abarcan la pintura y la escultura, la ingeniería y la arquitectura, la física y las matemáticas. Científico y visionario, dibujó los planos de un objeto volante (el precursor del helicóptero) y acuñó el término turbulencia en los fluidos. He aquí una cita pertinente de Leonardo: "Ninguna certeza existe donde no es posible aplicar la matemática o en lo que no puede relacionarse con la matemática". Por si quedaba duda de la opinión del gran hombre.

¹¹*Le Discours de la Méthode*. Leiden. 1637, un trabajo importante en la historia de la ciencia. Su trabajo *Les Météores* es considerado el primer esfuerzo por poner el estudio del tiempo atmosférico sobre una base científica. Su más famoso dicho es sin duda el "cogito ergo sum", "pienso luego existo".

¹²Y se ocupó de construir una máquina de calcular de la que volveremos a hablar.

ven en sus órbitas de acuerdo con la ley de atracción universal. En fórmulas, $F = Gmm'/r^2$.



ISAAC NEWTON

Para estudiar matemáticamente los movimientos resultantes de estas leyes, descubre lo que nosotros llamamos Cálculo Infinitesimal y resuelve las ecuaciones diferenciales. Es más, la formulación misma de sus leyes no es posible sin los nuevos conceptos tomados del Cálculo Diferencial e Integral, que lleva los nombres de Newton y Leibniz, y que fue inventado combinando las intuiciones de la mecánica y de la geometría¹³.

En 1687, en que se publica su trabajo monumental, los *Principia*¹⁴, la mecánica queda sólidamente fundamentada sobre las mismas bases que tiene hoy día. La matemática no es sólo una herramienta indispensable, en realidad *es el idioma en que se concibe y expresa la Ciencia*, ésta es la razón del título del libro. Desde ese momento, la descripción de la dinámica y la evolución de los sistemas mecánicos es una parte esencial de las matemáticas. Sigue un periodo de enorme desarrollo, durante el cual, la matemática intenta cumplir este nuevo papel fundamental.

Newton es considerado generalmente el científico más influyente en la historia de la humanidad¹⁵. Permítasenos aportar algunos datos adicionales para entender bien la grandeza de su legado. Podemos anotar a su crédito los fundamentos de la mecánica y la astronomía, del cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales; pero también estudió la naturaleza de la luz, puso los fundamentos a la óptica y contribuyó con notables adelantos técnicos como el telescopio de refracción. Además de todo esto, estudió los fluidos que se llaman hoy día newtonianos, explicó y calculó el funcionamiento de mareas por medio de la atracción lunar, computó la velocidad del sonido (y también se interesó por la teo-

¹³Para situar a Newton en la perspectiva apropiada hemos de combinar su formación matemática con el conocimiento astronómico que heredó de Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo.

¹⁴*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, es decir, "los Principios Matemáticos de la Ciencia".

¹⁵SIMMONS, J. *The scientific 100*. Citadel Press, Kensington Publ. Corp. Nueva York, 1996.

logía, la alquimia y la astrología, rasgo bastante común de esos tiempos que no debe extrañarnos en un gran científico)¹⁶. Su prestigio entre sus contemporáneos era enorme y los filósofos más brillantes del siglo XVIII (HUME, KANT, VOLTAIRE¹⁷) estudiaron su trabajo y creyeron posible extender su fabuloso éxito a todos los campos de la filosofía, tarea que ha resultado ser de una dificultad extrema. De hecho, todavía estamos ocupados en ella.

La inmensidad de la tarea de entender la Naturaleza no escapó a una persona tan penetrante como Newton, con todo su éxito. Una de sus opiniones más famosas dice como sigue: *"I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me"*.

3. EL SIGLO DE LA RAZÓN Y DE LAS LUCES

Durante los tres siglos siguientes, una parte de ese océano se ha visto colmado de verdad, ciencia y matemáticas. La ciencia y la tecnología, bases de la Revolución Industrial, han progresado con las teorías, razonamientos y experimentos. Como consecuencia, la sociedad del siglo XX ha cambiado más radicalmente con respecto al siglo XVII que todo lo que había pasado en varios miles de años antes, desde el inicio de las grandes civilizaciones agrícolas. El confort de la casa, el transporte, y las comunicaciones, la salud del ciudadano actual, descansan sobre bases técnicas completamente desconocidas para las personas del Siglo XVII.

Quienes prefieran contemplar el panorama de las matemáticas actuales, al final del largo camino, son invitados a saltar las próximas 3 secciones y proceder con las matemáticas del siglo XX. Más aún, quienes quieran sólo asomarse al futuro harían bien en avanzar hasta la sección 7. Para quienes se interesan por qué pasó entre tanto, el relato continúa en el comienzo del siglo XVIII. Empezando con el ya citado Leibniz, gran filósofo y rival de Newton en la famosa y un poco triste

¹⁶ *"From the same principles, I now demonstrate the frame of the System of the World"*.

¹⁷ Merece la pena recordar que los Principia fueron traducidos al francés por la amiga del último, la Marquesa de Châtelet, con su colaboración, en 1756. Mujer muy notable, la Enciclopedia Británica la describe como *"Gabrielle-Émilie Le Tonnelier du Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire"*. Sólo en el texto del artículo se entera uno de sus muchos logros.

“disputa del cálculo”, una serie de brillantes matemáticos (diríamos mejor físico-matemáticos), como la familia Bernoulli, Euler, D’Alembert,... aprovecharon el potencial del nuevo cálculo y formularon matemáticamente todo tipo de problemas mecánicos: problemas de disparo, problemas sobre la caída de los cuerpos, sobre el movimiento de los fluidos, de vibraciones mecánicas, de minimización,...

Los métodos infinitesimales son igualmente poderosos en su aplicación a la geometría, una disciplina que vive en simbiosis íntima con la mecánica. Los sabios estudian el Cálculo de Variaciones, un nombre para el cálculo de valores mínimos de los llamados “funcionales” que florecerá en el siglo XX como un capítulo fundamental del Análisis Funcional, por entonces ni siquiera previsto. Jean Le Rond D’ALEMBERT¹⁸ estudió la vibración de las cuerdas y escribió la ecuación de ondas que lo llevó a descomponer una función en suma de ondas elementales, tarea también emprendida por Leonhard EULER (1707-1783), quien



LEONHARD EULER

realizó la descomposición en suma posiblemente infinita de funciones sinusoidales. Euler es quizás el matemático más prolífico de la historia, hizo contribuciones fundamentales a la Geometría, el Análisis y la Teoría de Números, pero también a diferentes ramas de la Mecánica, la Elasticidad, la Hidrodinámica, la Acústica, y hasta la Música. Su latín no es difícil y sus libros de texto pueden leerse hoy con provecho y placer (¡preferentemente traducidos!). Vivió una gran parte de su vida en San Petersburgo, por lo que se le atribuye la fundación de la matemática rusa, junto con Daniel Bernoulli. El problema de las sumas infinitas preocupará a los matemáticos en el futuro próximo pero no en estos momentos de descubrimiento y euforia, y menos aún a L. Euler cuya intuición parece no tener límites.

Algunas de las glorias y penas de la matemática como idioma de la mecánica pueden observarse en el estudio de los fluidos. Una teoría sistemática escapó incluso al genio de Newton. De hecho, el aspecto más difícil de esta teoría consiste precisamente en encontrar las hipótesis matemáticas justas que permitan construir un modelo matemático, es

Algunas de las glorias y penas de la matemática como idioma de la mecánica pueden observarse en el estudio de los fluidos. Una teoría sistemática escapó incluso al genio de Newton. De hecho, el aspecto más difícil de esta teoría consiste precisamente en encontrar las hipótesis matemáticas justas que permitan construir un modelo matemático, es

¹⁸Representante muy conocido de la *Ilustración* francesa, quien combinó una brillante carrera matemática con la publicación de la famosa *Encyclopédie*, juntamente con D. Diderot. ¡No todos los matemáticos viven en una nube!

decir, matematizarla *tal como realmente es*¹⁹. Hacia el año 1738, Johann y Daniel BERNOULLI establecen la ciencia teórica de la Hidrodinámica sobre la base idealizada de los llamados *fluidos perfectos*. El estudio fue continuado por Euler que escribe las famosas ecuaciones (1755)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

(en la notación actual) cuya resolución analítica general ha resistido al paso del tiempo²⁰. Es más, D' Alembert puso en evidencia las limitaciones de la idealización implícita en el concepto de fluido perfecto mostrando que un obstáculo sólido sometido a un "viento" perfecto no sufriría ningún arrastre neto y ninguna *sustentación neta*.



PIERRE S. LAPLACE

Esta dificultad nos devuelve al problema filosófico original, el papel de las matemáticas. De hecho, la dificultad se origina porque la mecánica teórica no trata de la Naturaleza, que escapa en su más pura esencia a nuestra curiosidad, sino que trata más bien del **modelo matemático** que nosotros nos podemos formar de ella. La concordancia experimental nos permite confirmar que una teoría es buena como modelo del mundo físico, pero nunca que es un modelo perfecto²¹. La modelización matemática es un aspecto fundamental de

la matemática actual y clave de su posible utilidad.

A pesar del fracaso relativo con los fluidos, cuando termina el Siglo de las Luces una sensación de optimismo invade las mentes de los mejores matemáticos - mecánicos, como son Joseph Louis LAGRANGE, autor de la *Mécanique analytique*²², y Pierre Simon LAPLACE. El último publica su monumental libro *Mécanique céleste* (1788). Es también autor de la *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), una de las más importantes referencias en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. La ecuación

¹⁹Recordemos aquí el dicho de Newton sobre su mecánica: *Hypotheses non fingo*, yo no me invento las hipótesis o axiomas.

²⁰Guardan su misterio aún hoy día: la existencia de soluciones clásicas dados datos iniciales regulares en 3 dimensiones espaciales es todavía un problema abierto.

²¹Volveremos a este asunto al hablar de Einstein.

²²Que describe las ecuaciones generales del movimiento, llamadas ecuaciones de Lagrange.

de Laplace, $\Delta u = 0$, es una de las más famosas de la Física²³. Basándose en sus estudios mecánicos pensó que el universo funciona como un reloj (determinismo) y declaró que los problemas matemáticos más importantes estaban ya propuestos y resueltos, o a punto de ser resueltos en un corto tiempo. Afortunadamente, la Historia demostraría que el gran hombre erraba en este tema. ¿No recuerda esto algunos recientes y acalorados debates sobre el fin de la Física o de la Historia?

4. EL SIGLO XIX, EL GRAN SIGLO DE LA CIENCIA

La contribución del siglo XIX a la Matemática, tanto pura como aplicada, es sorprendente por su novedad, por lo inesperado de su evolución y por su riqueza y amplitud de temas. Empecemos por las matemáticas que vinieron de la física.

• **La electricidad y el magnetismo:** De Michael FARADAY a J.C. Maxwell, experimentos y leyes parciales cubren un camino que cuenta con los nombres de Gauss, Ampère, Oersted, Biot, Savart, Lenz,... hasta llegar al (impresionante) sistema de ecuaciones diferenciales en



JAMES C. MAXWELL

derivadas parciales que relaciona los campos eléctricos y magnéticos (1863), obra cumbre de James Clerk MAXWELL²⁴. Las ecuaciones de Maxwell (que no detallaremos en este momento por su complejidad, aunque sin duda merecen lugar de honor en este texto) son uno de los logros mayores de la Matemática en el siglo XIX. Gracias a James Maxwell, una nueva rama de la ciencia, cuya existencia era insospechada un siglo antes, alcanzó el nivel de perfección matemática que Newton había otorgado a la mecánica. La teoría electromagnética

tendrá profundas repercusiones no sólo sobre las ecuaciones diferenciales y el análisis funcional, sino además sobre la naciente topología (a través de conceptos como la homología)²⁵. Elaborando las ecuaciones

²³ Los ingenieros y científicos aplicados usan la transformada de Laplace.

²⁴ Publicación en forma final como *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.

²⁵ Maxwell es considerado el físico teórico más importante del siglo XIX; Einstein opinaba que el trabajo de Maxwell representó la revolución más significativa en el estudio de la física desde Newton. La teoría de propagación de ondas es hoy día

de Maxwell se llega a la ecuación de ondas, que es la herramienta que nos permite describir la propagación de los fenómenos electromagnéticos en forma de ondas, caracterizadas por tres parámetros: primero, la amplitud A ; segundo, la velocidad, c , que depende del medio (y es por consiguiente constante en el vacío); tercero, la frecuencia de oscilación, ω , que es una cantidad que varía con el tipo de onda. En breve, y para una dimensión espacial, la ecuación y su solución se escriben

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow u = A \cos(kx - \omega t + \phi),$$

donde u es la intensidad de la oscilación, $k = \omega/c$ se llama número de onda y ϕ es una constante, la fase, de la que no debemos preocuparnos por ahora, y los subíndices indican derivadas parciales. Pero veamos, ¿es tan necesaria esta fórmula para proceder? La respuesta es que sí, pues poco después, y como reflejo de la generalidad del parámetro ω en el modelo matemático, Heinrich R. HERTZ predice y descubre las ondas electromagnéticas fuera del rango visible (las ondas de radio, 1888), y Guglielmo MARCONI descubre la telegrafía sin hilos, es decir, la radio (1895), introduciéndonos así al mundo de las comunicaciones que son el alma del siglo XX. Y otra gran sorpresa: aparece una incompatibilidad con la mecánica de Newton sobre la que hablaremos en un momento. Quede dicho esto sobre las consecuencias de la formulación matemática en la evolución de la ciencia.

• **Los fluidos reales**, de Claude Louis NAVIER a George Gabriel STOKES, 1821 a 1856 y después. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen los fluidos reales y gobiernan el comportamiento de los fenómenos atmosféricos (el clima, la Meteorología, la Hidrología, la futura Aeronáutica). La formulación correcta de las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos reales tardó por consiguiente unos 180 años tras los esfuerzos de Newton, las matemáticas profundas no se hacen en dos días. Una serie de brillantes matemáticos figuran entre los modelizadores, como S. POISSON y J. C. SAINT VENANT, así como el médico J. L. M. POISEUILLE, que investigó el flujo sanguíneo. Lord KELVIN y H. HELMHOLTZ ponen las bases para el estudio matemático de la vorticidad y los torbellinos. La comprensión matemática de los fluidos turbulentos, ya mencionados por Leonardo, es *todavía un problema abierto*.

una de las ramas clásicas de la matemática aplicada, en sus múltiples variantes. Matemático excelente, Maxwell era defensor del método probabilístico en la Ciencia, que él aplicó al estudio de gases (distribución de Maxwell) y se le atribuye la frase: "la verdadera lógica del mundo es el Cálculo de Probabilidades".

Para no alargar excesivamente nuestro texto mencionaremos sólo dos teorías físicas más de gran importancia y repercusión matemática:

- **La Termodinámica**, que estudia los intercambios de calor, adquiere una fundamentación matemática sólida con James JOULE, Saadi CARNOT, J. R. MAYER,... Tiene una profunda repercusión sobre el cálculo en derivadas parciales y el concepto de diferencial exacta. Esta teoría incluye la famosa Segunda Ley de la Termodinámica (la ley del crecimiento de la entropía en el Universo), una ley fundamental en la ciencia. Mientras que su declaración matemática es simple, su interpretación práctica tiene implicaciones profundas que ocupan a generación tras generación de estudiosos²⁶.

- Por último, mencionemos la **Mecánica Estadística**, asociada a los nombres de Maxwell, L. BOLTZMANN y W. J. GIBBS, que tallaron toda una rama de la Física Matemática basada en el Cálculo de Probabilidades, rama de las matemáticas que había permanecido un tanto al margen de esta aventura científica²⁷. Esta idealización matemática del azar había sido elaborada en el fabuloso siglo XVII (ca. 1650) por B. Pascal, P. Fermat y C. Huygens para comprender los juegos de azar, y avanzada luego por BUFFON, BERNOULLI, DE MOIVRE y Laplace entre otros. De repente, el concepto de probabilidad cobra vida para la ciencia física a la hora de modelar el comportamiento de cantidades enormes de partículas²⁸. Veamos por qué: las partículas están sujetas evidentemente a las leyes de la mecánica de Newton. Pero, dado que hoy se sabe que el número de moléculas de un gas por litro alcanza la fantástica cifra de $2,69 \times 10^{22}$ en condiciones normales (0° C de temperatura y 1 atm. de presión)²⁹, es del todo imposible seguir sus trayectorias individuales. La mecánica estadística propone un comportamiento medio con efectividad

²⁶Con consecuencias insospechadas: la entropía es hoy día un concepto central en la Teoría de Información tras el trabajo de C. Shannon, "The mathematical theory of communication", Bell Syst. Techn. Journal 27, 1948, Págs. 379-423, 623-658.

²⁷La tumba de Boltzmann en el cementerio central de Viena tiene como ornato su famosa fórmula de la entropía en mecánica estadística, $S = k \log W$, que puede considerarse una gesta del espíritu puro en la búsqueda de la comprensión de los secretos de la Naturaleza. El libro de Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, publicado al final de su vida en 1902, jugó para la física estadística un papel similar al de Maxwell para el electromagnetismo.

²⁸Este no era un paso trivial. Boltzmann contó para ello con su creencia en la existencia de los átomos, que encontró fuerte resistencia en el momento por parte de científicos famosos como E. Mach. ¡Y estamos a finales del siglo XIX! La agria controversia afectó seriamente a la salud de Boltzmann.

²⁹En los libros de química suele mencionarse la cantidad de átomos por cada mol = 22,4 l de gas, el llamado número de Avogadro, $6,022 \times 10^{23}$.

sorprendente: de ella es inmediato predecir la relación de la temperatura con la energía y la presión para un gas perfecto, ¡y la predicción ideal resulta ajustada a los datos experimentales! La distribución de Maxwell-Boltzmann, $n = Ae^{-E/kT}$, es un objeto matemático que tiene en mecánica estadística un papel tan importante como la distribución gaussiana en la ciencia estadística usual.



BERNHARD RIEMANN

Cambiamos de escena para retratar a otro de nuestros héroes, una "vida ejemplar". Bernhard RIEMANN (1826-1866) es una de esas figuras sorprendentes cuya obra contiene lo mejor de la matemática pura y aplicada. El gran matemático alemán, muerto joven, es bien conocido como un gigante de la matemática más pura. Nos legó la hipótesis sobre los ceros de la "función zeta" (*Hipótesis de Riemann*) cuya demostración es quizá el problema abierto de las matemáticas más famoso al entrar el siglo XXI, tras la reciente resolución de la conjetura de Fermat.

La hipótesis de Riemann afirma que las soluciones (o ceros) interesantes de la ecuación $\zeta(s) = 0$, están situadas sobre una misma línea recta en el plano complejo, precisamente la de ecuación $Re(s) = 1/2$. Esto se ha verificado para las primeras 1.500.000.000 soluciones³⁰. Una prueba de que el aserto es verdad para toda solución aclararía muchos misterios, desde la distribución de números primos a cuestiones de física teórica. Riemann fue un investigador de mente geométrica que ligó la suerte del análisis complejo a las transformaciones conformes y pensó en los espacios generales de varias dimensiones definidos a partir de su geometría local³¹. Hoy día, llamamos a esas *geometrías riemannianas* y son la base a partir de la cual se construye la física teórica.

Pues bien, el mismo Riemann estudió la propagación de gases compresibles y llegó a la conclusión de que el modelo matemático³², entendido en el sentido de las soluciones clásicas, era contradictorio (porque

³⁰Para los curiosos de las fórmulas, $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$.

³¹Su famoso artículo "On the hypotheses which lie at the foundations of Geometry", 1854. En alemán "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", 1854, publicado en 1868.

³²Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal de tipo hiperbólico, para quien desee el detalle.

preveía líneas características que se cortan, y sobre las cuales, las variables físicas - densidad, presión y velocidad - tomarían valores distintos simultáneamente). Sin embargo, aventuró que la teoría era correcta si se *cambiaba radicalmente el punto de vista* y se admitían como soluciones de una ecuación diferencial funciones que no sean derivables, ni siquiera continuas. Ante tal atrevimiento, tan típico de las mejores matemáticas de los siglos XIX y XX, recordamos de nuevo a Newton: Riemann no se inventaba esa teoría. La teoría de las *ondas de choque* es hoy día un tema fundamental de la dinámica de gases y de su aplicación a la aeronáutica, y es por ello una de las áreas más activas de investigación matemática en ecuaciones en derivadas parciales, ... y de la ingeniería.

La Evolución Interna

Pero, incluso tras el elogio de Riemann, esta visión sería totalmente injusta si no tuviera en cuenta la evolución interna de las matemáticas, que habían llegado a un alto nivel de madurez tras 300 años de intenso desarrollo. Solo comentaremos aquí muy brevemente este importante capítulo, pues es más conocido por el público matemático. Varios son los temas estrella, tan inesperados como cargados de futuro: geometrías no euclídeas de J. C. F. GAUSS³³, Janos BOLYAI y N. I. LOBACHEVSKI, fundamentación del cálculo infinitesimal de Augustin L. de CAUCHY, la teoría de funciones de Karl WEIERSTRASS, la lógica matemática de George BOOLE, la teoría de conjuntos de Georg CANTOR, por citar sólo un nombre al lado de cada gran capítulo³⁴.

Existen campos de investigación en que las matemáticas toman claramente el relevo a la física en la tarea de extraer el jugo de un concepto. Esto sucede con el problema de representación de una función como una suma de funciones simples, resuelto por Brook TAYLOR y Colin MCLAURIN para las sumas de potencias y planteado por Daniel Bernoulli (1753) y Leonardo Euler para las sumas trigonométricas que aparecen en las ecuaciones de ondas y el calor. Es gracias a la insistencia de Joseph FOURIER (1822)³⁵ que los matemáticos se adentran en la aventura de

³³El "Príncipe de los Matemáticos", quizá el matemático más sobresaliente y conocido de la historia. Hizo contribuciones fundamentales a la teoría de números, al álgebra, a la geometría diferencial, a la geometría no euclídea; la distribución más popular de probabilidad lleva su nombre, así como uno de los teoremas de integración más famosos de la física matemática.

³⁴Queremos dejar constancia expresa de la incomodidad que nos causa pasar tan de prisa por temas tan importantes de la Matemática, sin los que muchas de las páginas que seguirán no tendrían sentido.

³⁵Escrito de 1807, memoria presentada a la Academia de Ciencias de París y publicada en 1822.

dar un sentido riguroso a las sumas infinitas de funciones trigonométricas generales

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$



CARL F. GAUSS



JOSEPH FOURIER

Éste es el origen de un área mayor de la teoría de funciones, conocida como Análisis de Fourier. La tarea estaba cargada de grandes dificultades y tuvo grandes éxitos. Así, cuando Paul DU BOIS RAYMOND construyó (1873) una función real continua y periódica cuya serie de Fourier no converge puntualmente, parecía que algo iba realmente mal en el análisis matemático de los fenómenos oscilatorios. Tras cuidadoso examen, tres opciones se planteaban al investigador:

- (i) modificar la noción de función,
- (ii) modificar la definición de convergencia,
- (iii) reemplazar la base de senos y cosenos por candidatos mejores.

Es mérito notable de la comunidad matemática que *los tres caminos* hayan sido explorados con éxito asombroso³⁶. El teorema fundamental de sumación de series de Fourier se debe a L. CARLSON, 1966³⁷, y necesita útiles como *la convergencia en casi todo punto*, los espacios L^2 , y la maquinaria del análisis del siglo XX.

³⁶He aquí dos citas de Fourier para animar el debate sobre Matemática Pura contra Aplicada: La primera es "*Las ecuaciones del diferencial de la propagación de calor expresan las condiciones más generales, y reducen las preguntas de la física a problemas de análisis puro, y éste es el objeto apropiado de la teoría*". Ahora la segunda: "*El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de descubrimientos matemáticos*".

³⁷"On convergence and growth of partial sums of Fourier series". *Acta Math.* 116, 1966. Págs. 135-157.

El Contexto Social

Es interesante decir dos palabras sobre la evolución social de la ciencia en el siglo XIX. Éste es el siglo en que las revoluciones industrial, burguesa y democrática se asientan en Europa trayendo consigo la extensión de los estudios científicos e industriales tanto en universidades como en otros centros especializados³⁸, con lo que aumenta exponencialmente el cuerpo de profesores investigadores. Los avances son tan impresionantes que el final de siglo vuelve a encontrar a los matemáticos en franco optimismo, si uno se fía de la historia escrita por el geómetra alemán Felix KLEIN³⁹. Otra característica de este período es la profunda separación que se manifiesta entre matemáticos, físicos e ingenieros, consecuencia del enorme crecimiento de sus campos de estudio. Tal separación, a veces divorcio, tendría consecuencias profundas sobre la evolución de las matemáticas en el siglo XX, e incluso sobre el mismo concepto de matemática.

5. UN CAMBIO DE SIGLO REVUELTO

En todo caso, el cambio de siglo es espectacular tanto en física como en matemáticas. En éstas aparecen en el firmamento figuras extraordinarias como Henri POINCARÉ (1854-1912) y David HILBERT (1862-1943), que marcarán profundamente las matemáticas del siglo XX. Pero una gran parte del brillo en retrospectiva se debe a que el cambio de siglo fue una *época de crisis*, pues las evidencias de fenómenos fuera del gran esquema se acumulaban.

- El experimento de Michelson-Morley (1887) prueba que la velocidad de la luz es efectivamente constante (independientemente del sistema de referencia inercial), como predecía la teoría ondulatoria basada en las ecuaciones de Maxwell. El modelo mecánico del mundo de Euclides-Newton tiene por primera vez una gran grieta.

- La observación de las partículas suspendidas en los gases revela un movimiento altamente irregular, el movimiento browniano (Robert BROWN, 1827). Este es un golpe para la geometría de Euclides basada

³⁸ Muchas de las Escuelas de Ingenieros se fundan en España en esa época, como las de Montes y Caminos en 1834.

³⁹ *Lectures on the development of mathematics in the 19th century*. He aquí una cita de Klein: "los grandes matemáticos como Arquímedes, Newton o Gauss siempre unieron teoría y aplicaciones en igual medida".

en puntos, rectas y curvas regulares (al menos regulares a trozos).



HENRI POINCARÉ



DAVID HILBERT

- Las sorpresas de la teoría de funciones llevan a la teoría de conjuntos (Georg Cantor), que junto con la lógica (George Boole, Gottlob FREGE, Giuseppe PEANO) son la base de un intento de fundamentar las matemáticas rigurosamente de una vez por todas. Las matemáticas proponen a la ciencia los conceptos de teoría *coherente*⁴⁰ y *completa*. Surgen las escuelas y las disputas: logicismo (Alfred N. WHITEHEAD y Bertrand RUSSELL⁴¹), intuicionismo (Luitzen BROUWER) y formalismo (David Hilbert). Las paradojas (de Russell, de BURALI-FORTI, de RICHARD) siembran un caos notable en los espíritus menos fuertes.

- No existen útiles analíticos ni computacionales para abordar las complejidades de las ecuaciones de los medios continuos, como los fluidos. En consecuencia, las matemáticas prácticas de la ingeniería se suman en una serie de aproximaciones y recetas que las divorcian de la teoría.

- Pero, incluso, el tema clásico de la integración general de las ecuaciones del movimiento para tres o más cuerpos celestes se muestra imposible⁴². A grandes males, grandes remedios: H. Poincaré propone los métodos cualitativos y abre las puertas a la geometría algebraica y la topología (llamada entonces *Analysis Situs*, 1895). Pero al tiempo, descubre con sus métodos teóricos una tremenda complejidad escondida en el modelo matemático (que son los sistemas dinámicos). Uno de estos

⁴⁰ *consistent* en inglés.

⁴¹ su famoso libro *Principia Mathematica* data de 1910.

⁴² como expone H. Poincaré en su libro *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. París, 1899.

monstruos son las órbitas homoclínicas que sembrarán de *caos* la mecánica celeste cuando Poincaré sea bien comprendido (lo que llevó bastantes décadas). Para mejor medir la estatura de nuestro héroe valga la siguiente cita: “*en sus cursos en la Facultad de Ciencias de París desde 1881, y de la Sorbona desde 1886 Poincaré cambiaba de tema cada año, tocando la óptica, la electricidad, la astronomía, el equilibrio de los fluidos, la termodinámica, la luz y la probabilidad*”.

- Agreguemos algunas notas más optimistas. Así, la teoría de la integración de funciones se ve coronada por los trabajos de E. BOREL y H. LEBESGUE⁴³. En adelante el cálculo posee un concepto de integral (la integral de Lebesgue) donde el proceso de tomar límite es natural, el análisis funcional puede crecer (espacios de Hilbert) y el famoso problema de DIRICHLET⁴⁴ tiene solución (en un sentido aún visto como raro). El precio a pagar es la construcción de una teoría matemática sofisticada que los estudiantes de ciencias e ingeniería deben estudiar y absorber, o al menos han de aprender a convivir con ella⁴⁵.

- Descubrimientos importantes de naturaleza matemática ocurren en otras ciencias y darán fruto en el próximo siglo. El Científico ruso Dmitri MENDELEYEV encontró el orden en el caos de los elementos químicos y propuso la Tabla Periódica en 1869, que es hoy día la base del tratamiento físico-matemático de la Química. Por otro lado, el monje, botánico y experimentador de las plantas austriaco, Gregor J. MENDEL formuló las leyes racionales de la herencia, poniendo así los fundamentos matemáticos de la ciencia de la Genética⁴⁶.

6. EL SIGLO XX, UN SIGLO DE MARAVILLAS

A estas alturas, esperamos haber comunicado al lector la impresión de la profunda simbiosis de la Matemática con la Física, de sus sorprendentes y en muchos casos inesperadas interacciones. La historia de tal simbiosis incluye ya aplicaciones tecnológicas avanzadas, preludio de lo que será el nuevo siglo. La explosión de la Matemática y la Ciencia en el siglo XX hace aconsejable reducir nuestro texto a algunos de los temas

⁴³La importantísima contribución a la teoría de la integración figura en su tesis doctoral, *Intégrale, longueur, aire*. Universidad de Nancy, 1902.

⁴⁴Nombrado en honor a P. L. Dirichlet, el primero que probó que la serie de Fourier converge bajo ciertas condiciones

⁴⁵parafraseando a J. von Neumann. “*Ad astra per aspera*”, dice el adagio latino.

⁴⁶*Versuche über Pflanzenhybriden*, (“*Experimentos con híbridos de plantas*”), publicado en 1886.

más importantes. Un rasgo sobresaliente es la matematización progresiva de las demás ciencias, que aparecen ya como nuevos horizontes para la Matemática Aplicada.

Nuevas matemáticas que nos llegaron de la Física

El comienzo del siglo XX es testigo de dos grandes revoluciones en la manera de concebir el mundo físico, que cambiaron de forma radical el “universo newtoniano”. Comprobado el hecho de que la luz no se comporta como era esperado, la teoría que lo explica trae consigo consecuencias dramáticas sobre nuestro concepto de espacio-tiempo, que afectan en la práctica a la Astronomía y al comportamiento de las partículas que se mueven deprisa. Por otra parte, en el extremo de lo muy pequeño, se observó que los átomos, moléculas y partículas subatómicas tampoco obedecen a las leyes de comportamiento tan cuidadosamente observadas por los entes macroscópicos, aunque por otras razones. Son *dos grandes revoluciones cuya más íntima esencia se expresa en fórmulas matemáticas*. Examinemos con algún detalle el surgir de ambas teorías.

• **La Teoría de la Relatividad.** Albert EINSTEIN, el Hombre del Siglo según la revista *Time* (año 2000), propuso las dos versiones de la relatividad: en 1905⁴⁷ (la relatividad especial) y en 1916 (la relatividad general). Esperamos no sorprender al lector al afirmar que en ambos casos se trata de una profunda reflexión sobre las matemáticas que sirven de base a la Física.

La relatividad especial tiene como precursores a LORENTZ, Poincaré y MINKOWSKI, que estudiaron el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del espacio-tiempo. La relatividad general usa los conceptos geométricos que Riemann elaboró más de un siglo antes como un puro *Gedankenexperiment*, es decir, experimento mental, sobre las “hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría”, y que fue desarrollado por la escuela de geometría diferencial italiana de RICCI, LEVI-CIVITA y BIANCHI. La relatividad será un gran campo de juego de la geometría diferencial en el siglo XX. De las ecuaciones de Einstein se llegará al Big Bang y a los agujeros negros (OPPENHEIMER y SNYDER, 1939; PENROSE y HAWKING). Todo un ejercicio de matemática pura como modelo de una rama de la física.

⁴⁷1905 fue el *annus mirabilis* para Einstein. En tres artículos separados explicó el efecto fotoeléctrico, el movimiento browniano y la teoría de la relatividad. Es improbable que tal hecho vuelva a repetirse.



ALBERT EINSTEIN

Conviene, sin embargo, no olvidar la otra cara de la Relatividad: desde la primera confirmación experimental de Lord A. EDDINGTON en 1919, incesantes experimentos han servido para confirmar (mejor diríamos, con la modestia de Einstein, no refutar) la teoría de la Relatividad. Pues en la ciencia real no se inventan las hipótesis⁴⁸.

Hagamos una pausa para echar una mirada a algunas de las fórmulas principales. En septiembre de 1905, Einstein publicó un corto artículo en que demostró la fórmula fundamental $E = mc^2$ sobre la equivalencia matemática de masa y energía, que se ha convertido en un clásico de la cultura popular del siglo XX. Por otro lado, las leyes de transformación de la Relatividad Especial, que reemplazan a las leyes de transformación galileanas a velocidades relativas altas, conocidas como las leyes de transformación de Lorentz, son :

$$x = \gamma x' + \gamma vt', \quad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2} \gamma x',$$

donde la constante γ se llama factor de dilatación del tiempo. Depende de la velocidad relativa v y viene dado por la expresión: $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Por consiguiente, la suma de velocidades sigue la sorprendente regla

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

muy en contra de lo que estamos acostumbrados a creer (es decir, $u = u' + v$).

⁴⁸He aquí una opinión significativa de Einstein sobre las matemáticas: "*Mathematics deals exclusively with the relation of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience*", de *The theory of Relativity*, 1950. Las opiniones de Einstein son tanto más interesantes si se tiene en cuenta que, contrariamente a otras grandes figuras en la historia de la Física, como Newton o Maxwell, no fue matemático excepcional, por lo menos técnicamente. Dejó, sin embargo, un legado impresionante a las matemáticas a través de sus teorías.

La fórmula más conocida de Einstein es sin duda $E = mc^2$, que forma con la fórmula cuántica de Planck, $E = h\nu$, toda una nueva visión de la energía al principio del siglo. La energía había sido uno de los conceptos clave de la evolución de la física y las matemáticas que la acompañan en el siglo XIX, y se ve sometida a profunda revisión matemática en los comienzos del siglo XX. Precisamente, los *quanta* (o cuantos) son nuestro próximo tema.

• **La Mecánica Cuántica** describe el comportamiento de la materia y la luz a la escala atómica. En palabras del gran físico R. FEYNMAN, “*Things on the very small scale behave like nothing you have any direct experience about*”. En particular, asistimos a otra enorme brecha en el, hasta entonces, perfecto edificio de la mecánica newtoniana. El segundo recorrido mágico⁴⁹ del comienzo del siglo XX nos lleva de la hipótesis de los quanta de MAX PLANCK, 1900, a la ecuación de SCHRÖDINGER (1926) pasando por N. BOHR, L. DE BROGLIE, W. HEISENBERG y P. A. M. DIRAC. El acceso al mundo atómico queda codificado en la maravillosa ecuación

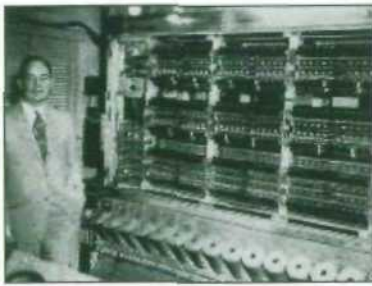
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x, y, z, t)\psi,$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, Δ es el operador laplaciano y $V = V(x, y, z, t)$ es el potencial. Todo ello parece realmente un trozo de la Cábala, y en el momento inicial se dudaba de qué representaba exactamente la variable $\psi(x, y, z, t)$ llamada “función de onda”. Tal es el poder de la Matemática, estos físicos geniales habían encontrado un trozo del Código Matemático del Universo pero aún habían de interpretar qué significaban las variables. En 1928, Max BORN propuso la interpretación probabilista, donde $|\psi(x, t)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el lugar x en el instante t , y aunque es mayoritariamente admitida, hay quienes se resistieron, siguiendo a Einstein en eso⁵⁰. Porque la Mecánica Cuántica es un desafío fundamental a la manera previamente admitida de mirar el mundo, al determinismo tradicional y a la causalidad. Se puede decir que el determinismo está basado en el supuesto de que “el conocimiento exacto del presente permite calcular el futuro”. ¿No es ése el sueño de las ciencias exactas, y no es cierto que la Mecánica Cuántica subvierte esa creencia? Ponderando el problema, W. Heisenberg encontró en 1927 la respuesta siguiente: “*no es la conclusión [de la hipótesis determinista] lo que es falso, sino la hipótesis inicial*”.

⁴⁹Cita homenaje a “*The Magical Mystery Tour*”, Lennon y McCartney, 1967.

⁵⁰Suyo es el famoso comentario: “*God does not play dice*”, “Dios no juega a los dados”.

Dejando al lado el mundo de las interpretaciones, debemos informar que esta teoría, aun estando basada en el más alto nivel de abstracción matemática, es confirmada por todo un siglo de experimentos. La parte mágica, que tanto abunda, tiene un momento estelar cuando Dirac, usando la formulación relativista, propone la existencia de los positrones (1932) porque *“las ecuaciones admiten el cambio de signo con respecto a la solución que describe el electrón”*,... y el positrón fue debidamente descubierto⁵¹ por los físicos experimentales poco después (Anderson y Blacket, 1932-33). Dirac predijo la existencia del antiprotón que fue confirmado por Segrè en 1955, y también el monopolio magnético, pero esta vez su existencia ha quedado sin confirmación hasta el momento presente. Las predicciones de Dirac son un ejemplo notable, de ninguna manera único, en que el modelo matemático va delante de la evidencia experimental⁵². ¿No nos recuerda todo esto a Hertz?



J. V. NEUMANN

La cosecha matemática de la Mecánica Cuántica no es escasa: la teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert con su correspondiente teoría espectral son desarrolladas por John VON NEUMANN (Janos v. N., 1903-1957), uno de los genios más polifacéticos del siglo⁵³, con el objeto de dar sentido a los operadores que aparecen en la ecuación, operado-

⁵¹ ¿O deberíamos decir mejor “encontrado” o “reconocido”?

⁵² Por otro lado, la ciencia basada solamente en argumentos o analogías matemáticos puede ser mala ciencia. Un ejemplo: existe una tendencia matemática a afirmar que en el reino de partículas ciertas simetrías matemáticas son “ley” de la naturaleza. En particular, debería ser entonces correcta la ley de conservación de la paridad, que especifica que las partículas elementales y sus imágenes especulares *deben* comportarse idénticamente; en 1956-57, tres chino-americanos T. D. Lee, C. H. Yang, y C. S. Wu conjeturaron primero y probaron después que hay procesos subatómicos que violan esa ley.

⁵³ J. von Neumann, *Mathematische Grundlage der Quantenmechanik*, “Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica”. Springer, 1932. La trayectoria de Von Neumann recorre las áreas más diversas de la Matemática pura y aplicada: en su juventud modificó el sistema Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos, creó las álgebras de v.N. en teoría de operadores, es el padre de la Teoría de Juegos y lo veremos luego en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton como uno de los padres del primer gran ordenador moderno. Después de la guerra se ocupó de la hidrodinámica, de los métodos numéricos (Monte Carlo, estabilidad para los esquemas en diferencias finitas), la teoría de autómatas, y así sucesivamente.

res laplacianos y demás. Su teoría se basa en el trabajo precursor de S. BANACH y los expertos italianos en cálculo de variaciones, pero la Mecánica Cuántica tiene sus caprichos: necesita unos objetos de la segunda generación, los “operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert”. Estamos, pues, en el borde o más allá de los temas de la licenciatura en Matemáticas, lo cual es información interesante para quienes sostenían *que toda matemática útil ha de ser muy fácil*⁵⁴. Junto con el Cálculo de Variaciones, la Mecánica Cuántica ha sido cantera inagotable de problemas para el Análisis Funcional, rama de las matemáticas que toma vuelo propio.

Por otra parte, el comportamiento anómalo de las partículas cuánticas respecto a las clásicas tiene aspectos matemáticos simples y relevantes, como su distinto comportamiento estadístico, que lleva a las distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac que “corrigen” a Maxwell-Boltzmann.

Las matemáticas que vinieron de la ingeniería

- **La Aeronáutica.** Tras los impresionantes avances de la física matemática del siglo XIX y en particular de la mecánica de fluidos, pudiera parecer que un problema antiguo como el del vuelo, que ya había ocupado a Leonardo da Vinci, debería estar resuelto. Y los experimentos con globos habían tenido éxito un siglo antes⁵⁵. Además, la teoría de la variable compleja y de los flujos potenciales y vorticosos había obtenido un notable progreso. Pero con todo este progreso, el vuelo propulsado (por un motor) no era entendido ni practicado, y un desanimado Lord Kelvin reconocía a finales de siglo XIX que el sueño del vuelo propulsado era quizá imposible⁵⁶. Es entonces cuando *el método experimental es reivindicado* por los hermanos Wilbur y Orville WRIGHT, fabricantes de bicicletas y consumados experimentadores, que logran volar en un artefacto propulsado en las inhóspitas playas de Kitty Hawk, Carolina del Norte, en la desapacible mañana del 17 de diciembre de 1903. Es el nacimiento de la Aeronáutica. La reacción de los teóricos fue fulminante y a la altura del desafío. Durante el periodo 1905-10, los principales ingre-

⁵⁴ Me refiero en particular a las opiniones del famoso matemático inglés G. H. Hardy en su libro *A Mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940, que refleja puntos de vista muy distintos de los sostenidos en este artículo, ver especialmente la sección 26. Es un libro muy conocido y de un gran interés. El tiempo no parece haberle dado la razón en el tema que nos ocupa. Debe tenerse en cuenta que en 1940 la relevancia práctica de las teorías sofisticadas como la Mecánica Cuántica podía muy bien no ser evidente, como lo es hoy para el lector avisado.

⁵⁵ Hermanos Montgolfier, 1783.

⁵⁶ “*heavier-than-air flying machines are impossible*”, dijo en 1895.

dientes matemáticos que faltaban al modelo teórico fueron comprendidos (N. E. ZHUKOVSKI, M. KUTTA, L. PRANDTL, S. A. CHAPLYGIN). Se trata de los conceptos de sustentación, circulación, capa límite, separación, régimen laminar y turbulento. Una ingeniería nace y nos llevará en 30 años más allá de la barrera del sonido. Y nacen ramas de la matemática aplicada, como la teoría de las perturbaciones singulares, la teoría de los flujos supersónicos y transónicos y la teoría matemática de la combustión⁵⁷.

Resistimos aquí la tentación de detallar las otras ramas de la ingeniería que también han tenido una interacción activa con las matemáticas. *Lo cual no significa en absoluto que ignoremos su importancia, trataremos el tema en la sección 8.*

Grandes novedades que vinieron de las matemáticas

Las matemáticas han vivido el siglo XX muy pendientes del desarrollo interno de las ideas recibidas del fabuloso siglo anterior. Para más fortuna, el siempre difícil y en general fallido intento de prever las líneas del futuro contó con una confirmación en la famosa propuesta de D. Hilbert al II Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París. En 23 problemas, Hilbert resumía los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas, desde las más puras a la física matemática⁵⁸. Esos 23 problemas han sido de gran importancia en el transcurso de los años, pero otras líneas inesperadas han venido a complementarlos y competir por las candilejas. Señalemos tres desarrollos importantes entre tantos.

- **El cálculo de probabilidades.** Como respondiendo a la necesidad planteada por la mecánica cuántica, pero en realidad independientemente, Andrei N. KOLMOGÓROV estableció en Moscú la probabilidad axiomática⁵⁹ sobre la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, tarea a la que se asocian los nombres de P. LÉVY en Francia y N. WIENER

⁵⁷Más hacia la matemática teórica tenemos la teoría matemática de la explosión para las ecuaciones diferenciales no lineales, de tanta actualidad. Permítasenos agregar que, aunque la práctica de la ingeniería aeronáutica descansa en bases teóricas firmes, las matemáticas profundas involucradas están lejos de ser bien entendidas y la investigación es muy activa

⁵⁸Debe decirse empero que éste último tema estaba relativamente mal representado, y Hilbert dedicó mucho esfuerzo al asunto en los años siguientes. BROWDER, F. (ed.) *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII*. Amer. Math. Soc. Providence, 1976.

⁵⁹Su libro titulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, "Fundamentos del Cálculo de Probabilidades", es publicado en 1933.

en EE.UU. Hemos de recordar aquí que Boltzmann fue un estudioso del movimiento browniano, que L. BACHELIER escribió su tesis en París en 1900 en un intento (infructuoso de momento) de modelar los mercados financieros, y que Einstein recibió el premio Nobel en 1921 no por la teoría que le hizo famoso sino por sus estudios del efecto fotoeléctrico y... del movimiento browniano. Las cadenas de Markov habían sido estudiadas desde 1900 por A. A. MARKOV.

Hoy día, la teoría de los procesos estocásticos, en particular los procesos de Markov, es una de las áreas predilectas de esta floreciente rama de las matemáticas, y el Cálculo de IT \bar{O} es una herramienta esencial del análisis estocástico continuo que compite con el cálculo infinitesimal clásico de Newton y Leibniz. Todo este desarrollo era completamente desconocido, incluso insospechado, hace poco más de un siglo y se ocupa de *informarnos sobre los fenómenos aleatorios y su evolución probable*, es decir, nos permiten *hacer predicciones sobre lo no exacto*. Como es ya usual en nuestro relato, se trata de un empeño no sólo académico, sino que tiene aplicaciones muy importantes en los procesos científicos, industriales y financieros.

• **El caos determinista.** El estudio del caos generado por las ecuaciones diferenciales, ya anunciado por Poincaré, cuyas matemáticas habían madurado gracias al impulso de diversos matemáticos, especialmente G. BIRKHOF, ha de esperar a la obra de un físico dedicado a los estudios del clima para adquirir el impulso definitivo. En efecto, se atribuye a Edward LORENTZ, del MIT, ese mérito⁶⁰. Preocupado por el estudio de los procesos convectivos en la atmósfera propone un simple modelo no lineal consistente en 3 ecuaciones diferenciales ordinarias que no me resisto a copiar

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz, \\ z' = \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Para esta elección de los parámetros (es decir, los coeficientes de la ecuación, que pueden ir variando en el problema) encuentra sorprendido que las trayectorias numéricas que produce su ordenador no convergen a ninguna situación periódica. El artículo de 12 páginas data de 1963. Surgen conceptos que llegarán al gran público, como *caos determinista* y *atractores extraños*, y toda una rama de las matemáticas tanto teóricas como experimentales, una gran novedad posible gracias al desarrollo de los

⁶⁰Su famosa publicación "*Deterministic non-periodic flow*". *ATMOS, J. Sci* 20. 1963. Págs. 130-141.

ordenadores. Autores como S. SMALE y M. FEIGENBAUM se hacen célebres⁶¹. Entran en escena los *conjuntos fractales* de B. MANDELBROT⁶², ya anunciados en la obra de G. JULIA en los años 20⁶³. Hurgando en la historia se descubre como precursor la figura gigante de H. Poincaré que había previsto este caos en su cabeza.

El estudio de los procesos caóticos, fractales y turbulentos es una de las fronteras del pensamiento matemático actual.

• **Nuevos conceptos de solución en las ecuaciones diferenciales.**

Hacia los años 30 era claro para muchos investigadores que el concepto clásico de solución era insuficiente para construir una teoría de las ecuaciones diferenciales que satisfaga las necesidades de las ciencias a las que se aplican. En efecto, es natural en esta disciplina plantear *problemas*, es decir, conjuntos de ecuaciones y datos adicionales, que sean *bien propuestos*; siguiendo a J. HADAMARD, ello quiere decir que tales problemas han de tener una solución, que ésta ha de ser única si se dan datos suficientes, y que además tal solución ha de depender continuamente de los datos. No se trata ya de que la solución sea clásica, pues ésta puede no existir o puede que no sea el concepto de solución cuya existencia resulta natural demostrar.

Enfrentados con este reto, los matemáticos han desarrollado diversas nociones de *soluciones generalizadas* con significado físico. Quizá el ejemplo más notable haya sido el problema de *minimización de energía* de Dirichlet ya mencionado⁶⁴, motivación de los espacios de Hilbert. Otro ejemplo básico es el problema de Riemann de la dinámica de gases, ya mencionado. Un tercer problema similar lo afronta J. LERAY⁶⁵ en 1933 en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos reales (viscosos) en el espacio tridimensional. Gracias al trabajo de los analistas funcionales (S. L. SÓBOLEV, L. SCHWARTZ,...)

⁶¹cf. STEWART, Ian. *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*. Penguin. Londres, 1989.

⁶²cf. MANDELBROT, B. *The fractal geometry of Nature*. 2nd ed. San Francisco, 1982.

⁶³Su publicación data de 1918.

⁶⁴Se trata de minimizar la integral de energía $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ entre todas las funciones admisibles $u = u(x)$ definidas en un recinto del espacio Ω y que toman valores asignados en el borde de Ω ; ∇u designa el gradiente de u . El problema de principio, crucial para la correcta solución, es qué se entiende por función *admisibile*.

⁶⁵Jean Leray publicó tres artículos sobre el asunto en 1933-34. El último es el "*Essai sur les mouvements planes d'un liquide visqueux emplissant l'espace*". *Acta Math.*, 63. 1934.

se introducen los conceptos de *solución débil* y *solución en el sentido de las distribuciones*. Resumiendo mucho, no se pide a las soluciones que posean todas las derivadas implícitas en la ecuación sino que cumplan con ciertos tests. Con los expertos en leyes de conservación (P. LAX, O. A. OLEINIK, S. N. KRUIZHKOVA) se llega a las *soluciones de entropía*, que no son siquiera continuas (y se recupera así el legado de Riemann, Rankine y Hugoniot y sus ondas de choque).

En nuestros días aparecen nuevos conceptos de solución para satisfacer las crecientes necesidades, como las *soluciones viscosas* de M. G. CRANDALL, L. C. EVANS y P. L. LIONS. L. CAFFARELLI extiende este concepto a los problemas de cambio de fase o frontera libre, donde la discontinuidad es parte fundamental del planteamiento matemático. Y la saga continua con las soluciones *mild*, soluciones de semigrupos, soluciones renormalizadas,...

Uno de los aspectos más llamativos de estos nuevos conceptos es su compatibilidad con las *soluciones numéricas* propias de los métodos discretos del cálculo numérico. Se halla así una sorprendente alianza de los conceptos abstractos y los numéricos contra "la rigidez de los clásicos". Por otra parte, el Análisis Funcional pasa a formar parte del currículo básico del matemático aplicado y el ingeniero.

Las matemáticas y la vida social: la teoría de juegos

La teoría de juegos analiza los "juegos", es decir, situaciones en que se da un conflicto de intereses. Parte de los juegos más simples, pasatiempos que pueden ser analizados completamente; de ellos se pasa a los "juegos reales" como el póker o el ajedrez, y de ahí a los complejos problemas de estrategias en áreas de enorme interés social como la economía o la política. Vemos en ello un gran paralelismo con el proceder del cálculo de probabilidades y la estadística, que pasan de los juegos de azar con cartas o bolas a la estadística industrial y social por un lado, y al comportamiento de los gases o los átomos por otro.

El primer teorema en teoría de juegos es atribuido a E. ZERMELO, fundador de la versión de la teoría de conjuntos ZF hoy tomada por estándar, y se titula "Sobre una utilización de la teoría de conjuntos en la teoría del ajedrez", 1913⁶⁶. Yendo hacia atrás en el tiempo, el pri-

⁶⁶ "Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels". 1913. Págs. 501-504 en los *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Vol. II (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge University Press).

mer libro de las matemáticas de la competición parece ser de Augustin COURNOT en 1838⁶⁷. Otro conocido matemático, E. BOREL, escribió sobre juegos de estrategia en el período 1921-27 y dio una prueba restringida del teorema del minimax, uno de los resultados más importantes de la matemática aplicada del siglo XX al decir de Casti⁶⁸.

Pero son dos grandes figuras quienes asientan las matemáticas de la competición en el siglo XX. Uno es J. VON NEUMANN, que demuestra en 1928 el teorema del minimax y analiza en su famoso libro con MORGENSTERN, 1944, los juegos cooperativos y de suma cero⁶⁹. El otro es J.F. NASH⁷⁰ que en cuatro artículos fundamentales de 1950-53 establece la teoría de los juegos no cooperativos⁷¹. Los conceptos de equilibrio dominante y equilibrio de Nash son hoy día herramientas matemáticas básicas de la práctica económica y política (en sus diversas vertientes de elección social) y deberían ser mejor conocidos por el gran público. J. Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 y es uno de los pocos Premios Nobel Matemáticos, junto con los economistas J. TINBERGEN⁷², L. KANTOROVICH y SELTEN⁷³.

La Economía Matemática desborda evidentemente el tema de los juegos, la competición y las estrategias, que forman el reino de las matemáticas de la llamada Microeconomía. Después hablaremos brevemente de las matemáticas del mercado financiero.

En la Teoría de la Elección Social es importante el Teorema de Im-

⁶⁷El libro se titula *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, título de lo más prometedor. Hemos de mencionar La Teoría de la Evolución de Darwin, que toca en un sentido el tema con su selección natural, que produce situaciones de equilibrio.

⁶⁸Sus cinco favoritos son la teoría de juegos, el teorema del punto fijo, el problema de parada de Turing, el método simplex y ... se ruega al lector que consulte el libro. CASTI, J. L. *Five Golden Rules*. John Wiley. New York, 1996. *Five More Golden Rules*. John Wiley. New York, 2000.

⁶⁹*Theory of games and economic behaviour*. J. von Neumann and O. Morgenstern.

⁷⁰Famoso también por sus trabajos en geometría y en ecuaciones en derivadas parciales y por su azarosa biografía reflejada en un filme reciente.

⁷¹Entre ellos NASH, J. F. "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*. 1951; "Two-Person Cooperative Games", *Econometrica*. 1953

⁷²Tinbergen es importante en nuestro relato, pues fue uno de los primeros propulsores de la modelización matemática más allá de los confines de la física; T. vio que las aplicaciones de las matemáticas podían afectar a muy diversas áreas.

⁷³Otros científicos galardonados que han aparecido en nuestro relato son Lorentz, Raleigh, Plauck, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born y Feynman en Física y Lord Russell en Literatura.

posibilidad de ARROW⁷⁴, que pone un límite a las capacidades de los sistemas axiomáticos de elección, aplicando a la ciencia social las ideas de los célebres resultados de indecibilidad e incompletitud de Kurt GÖDEL (1931) para la aritmética formal, uno de los resultados más notables de la Matemática del siglo XX⁷⁵. El resultado de Gödel trata de la indecidibilidad intrínseca a todos los sistemas formales que incluyan la aritmética, tema de Lógica y Fundamentos de la Matemática de apariencia eminentemente pura y por ello de nula interacción con el mundo práctico si hemos de creer a los fervientes defensores del aislamiento esencial de las matemáticas puras. Pues bien, volveremos a hablar de él en el próximo tema, que trata de ordenadores, de la mano de otro de nuestros héroes, A. Turing.

7. INGENIERÍA Y MATEMÁTICAS EN LA ÚLTIMA REVOLUCIÓN DEL SIGLO. LOS ORDENADORES Y LA MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

La realización práctica del viejo sueño de construir una máquina de calcular toma cuerpo en forma del moderno ordenador que acredita dos orígenes, la Tecnología y las Matemáticas, los cuales confluyen en un fantástico invento en el año 1946⁷⁶. Por una parte tenemos el viejo proyecto de la máquina de calcular, pensada ya en el siglo XVII por B. Pascal⁷⁷ y G. Leibniz⁷⁸, y que debe tanto a Ch. BABBAGE a principios del siglo XIX⁷⁹, proyecto que es realizable en el siglo XX de forma eficiente gracias al avance de la electrónica: primero el tubo de vacío y luego una espectacular saga de progresos técnicos que nos llevan al semiconductor, a la miniaturización y al *chip*⁸⁰.

Pero el ordenador o computadora no nace como máquina de calcular

⁷⁴Kenneth J. Arrow, trabajo doctoral en 1948-49 publicado en *Social Choice and Individual Values* en 1951. En 1972, Arrow recibió el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones al estudio del equilibrio económico y la elección social.

⁷⁵La incompletitud de los sistemas formales fue publicada en "*Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*". "*On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and other related systems*".

⁷⁶Con esta fecha hago referencia al ordenador ENIAC.

⁷⁷Su *machine à calculer*, la *Pascalina*, se hizo famosa.

⁷⁸Leibniz pensó en la dirección del álgebra, la lógica simbólica y el lenguaje universal. Recientes investigaciones históricas indican que una cierta primacía de tales máquinas calculadoras se debe a otro alemán, Schickard (1623) pero su máquina no llegó a funcionar.

⁷⁹Babbage trabajó toda su vida en un proyecto mecánico, la *Analytical Machine*, el precursor del moderno ordenador electrónico, con la notable ayuda de Ada Byron, Lady Lovelace, hija del poeta y matemática.

⁸⁰El circuito integrado fue inventado por R. Noyce y J. Kilby en 1958.

pasiva, sino que nace con un programa. Esta es la herencia de la lógica matemática, desde G. Boole con su álgebra al programa de formalización de las matemáticas de D. Hilbert, que lleva a la prueba de indecidibilidad e incompletitud de Kurt Gödel en 1931 que destruye el sueño de Hilbert de una matemática de demostraciones automáticas. Ello provoca el interés de otro matemático genial, ALAN TURING (1912-1954), que traduce el programa de formalización al lenguaje de las máquinas, 1937⁸¹, e inventa con Alonzo CHURCH la teoría de la computabilidad, años antes de que el ordenador viera la luz.



A. TURING

Sigue un momento histórico: el esfuerzo de guerra, el desciframiento del código alemán Enigma, ... Entra en escena von Neumann con la idea del programa en memoria, y se construye el ENIAC en 1946⁸².

La computadora moderna surge como una máquina calculadora eficaz con cuatro características: es de utilidad general, electrónica, digital y programable; *las dos últimas propiedades se relacionan directamente con las matemáticas*. La primera computadora comercial, UNIVAC, funcionó en

1951. En estos 50 años se pasa de las grandes máquinas (armatostes) que manejan kilobytes o megabytes a los ordenadores personales con capacidad de decenas de Gigas y a la WWW. La dualidad en el mundo del ordenador continúa en forma de la famosa pareja *Hardware* y *Software*⁸³.

⁸¹ "On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1937.

⁸² Las siglas ENIAC significan *Electronic Numerical Integrator and Computer*, construido por J.W. Mauchly y J.P. Eckert en la Univ. de Pennsylvania; hoy es reconocido el trabajo pionero de J.V. Atanasoff. Mención merecen también el Colossus inglés, 1942, y las máquinas alemanas Z1 a Z4. METROPOLIS, N., HOWLETT, J., ROTA, G. C. (Eds.) *A History of Computing in the Twentieth Century*. Academic Press. New York, 1980. Todas estas máquinas tenían un propósito militar.

⁸³ Los ordenadores personales aparecen en 1977 y, en contra de las predicciones de los gurús, han ocupado la escena, gracias sin duda al progreso impresionante del hardware: un chip puede contener al final del siglo XX unos 10⁹ transistores.

El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas

El mundo del ordenador está cambiando poco a poco la vida diaria del ciudadano: las transacciones bancarias, el correo electrónico, la reserva de pasajes, ... Su efecto sobre las matemáticas, menos conocido por el gran público, es aún más dramático. Aparecen por un lado, las nuevas ramas de la Matemática Computacional teórica, como la teoría de la computabilidad y la complejidad y la teoría de autómatas y lenguajes formales. Pero todas las ramas de la matemática pura y aplicada se contagian de la repentina capacidad para calcular efectivamente lo que antes era sólo imaginable, y este nuevo gusto se propaga como una infección (potente pero benigna) en la práctica cotidiana de las matemáticas: matemáticos, científicos e ingenieros calculan órbitas de satélites o trayectorias de sistemas dinámicos, distribuciones numéricas o series temporales de procesos reales, mapas climatológicos o estudios de singularidades, distribución de temperaturas en un alto horno o propiedades estadísticas de los ceros de la función Zeta de Riemann,... Y la finanza y la administración también calculan.

Entre los notables cambios acaecidos, las matemáticas tienen un papel importante en los procesos industriales u otros en que se combina la experimentación en laboratorio con las nuevas herramientas matemáticas: aparece la combinación de **modelización matemática - análisis matemático - simulación numérica y visualización - control**, que forma una herramienta de uso habitual en los más diversos campos: las comunicaciones, la predicción del tiempo, la astrofísica, la ingeniería minera, industrial, la industria del automóvil y del petróleo, los problemas medioambientales y la ecología, la economía y las finanzas, las comunicaciones, y en este momento, la biología y la medicina, como veremos con algún detalle en la sección 8. Esta área de las matemáticas tiene como tarea *aproximar de una manera eficaz* las soluciones de modelos matemáticamente muy sofisticados y complejos. El interés por su desarrollo y aplicación da lugar a los grandes Institutos y Centros de Cálculo.

Los nuevos conceptos: modelo numérico, simulación numérica, experimento o exploración numérica, visualización dinámica,... se hacen de uso diario en el medio científico e industrial. El desarrollo de métodos de formulación numérica de los modelos continuos, como las ecuaciones diferenciales, es una rama fundamental de la matemática computacio-

nal (a saber, los métodos de diferencias finitas, y elementos finitos⁸⁴, los volúmenes finitos,...). El estudio de las propiedades y la convergencia de estos métodos constituye el Análisis Numérico, que tiene una conexión profunda con el Álgebra. Por otra parte, la capacidad de cálculo da nueva vida a la matemática discreta, como la teoría de grafos, con sus importantes aplicaciones (por ejemplo, a las redes telefónicas y en general al mundo de las comunicaciones).

Un nuevo paradigma de la ciencia

El broche final de esta evolución vertiginosa es el surgimiento de un nuevo paradigma científico en que la **Ciencia computacional** es el tercer componente básico del método científico, junto con la Teoría y el Experimento. Nos hallamos pues ante una alteración profunda de la herencia científica de Galileo y Newton, que la enriquece en la dirección de las matemáticas.

Esta nueva visión, que comenzó en la ingeniería y las ciencias físicas, se practica hoy día intensamente en todas las ciencias, dando lugar a **nuevas disciplinas o subdisciplinas**, como la Física Computacional y la Dinámica de Fluidos Computacional, la Biología Computacional o la Química Computacional. Programas de las licenciaturas (incluso nuevas titulaciones), programas de investigación internacionales, centros de investigación, congresos y revistas prestigiosas confirman la relevancia del tercer rostro de la ciencia en los albores del siglo XXI. La ventaja del camino computacional queda perfectamente reflejada en la siguiente declaración de los *Reviews in Computational Chemistry*: "*As a technique, Computational Chemistry has the advantage of producing answers cheaply and quickly (compared to e.g. thermodynamic measurements)*". Es decir, que cuesta menos calcular que medir (y es fiable). Y añade otro aspecto importante, la capacidad para examinar lo hipotético: "*and [it works] for hypothetical structures, like transition states*".

Lo anterior no se circunscribe a las ciencias clásicas, afecta incluso en mayor grado a la ingeniería y la ciencia económica. La novedad del cambio, que sucede ante nuestros ojos, es un reto de enorme importan-

⁸⁴Los elementos finitos son un ejemplo maravilloso del desarrollo de una herramienta matemático-numérica por el esfuerzo paralelo, pero separado, de matemáticos e ingenieros, ver el interesante relato histórico de BABUSKA, I. "*Courant Element: Before and After*". En *Finite Element Methods*. Edited by Krizek, Neittaanmki and Sternberg, M. Dekker Inc. New York, 1994. El fenómeno no es aislado, piénsese en la reciente historia de las ondículas o "wavelets". Estos ejemplos deberían llevarnos a pensar más en los beneficios de la comunicación.

cia para el futuro de las matemáticas y resulta difícil de asimilar para muchos colegas. No hay nada malo en seguir anclado en un pasado glorioso,... pero se paga un precio. De la amplitud del panorama hablamos en la próxima sección.

8. LOS RETOS Y TENDENCIAS DEL SIGLO XXI. MATEMÁTICAS EN LAS CIENCIAS, LA INDUSTRIA, LAS FINANZAS Y LA ADMINISTRACIÓN

En consonancia con los apuntes vistos de la reciente evolución de la matemática pura y aplicada, que combina la exigencia de una sólida teoría con una ambición universal, el panorama que ofrece el mundo de las matemáticas de cara al futuro es de una asombrosa variedad. Usando un idioma algo retórico, los expertos dicen que las matemáticas son *ubicuas*, están por todas partes, y *relevantes*, importan. La modelización matemática juega un papel mayor que nunca en la ciencia, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales.

Mencionaremos solamente algunos de los principales temas de aplicación que aparecen en la literatura, en los congresos, en los programas de los institutos de investigación. También hemos utilizado una serie de fuentes⁸⁵. En itálicas señalamos aspectos matemáticos relacionados para comodidad del lector.

- Mecánica celeste. Problemas de la ciencia aeroespacial. *Estabilidad y caos en sistemas dinámicos. Atractores extraños. Mecánica de sólidos y fluidos en gravedad cero.*
- Teoría de fluidos. Aplicación a la Meteorología y la Climatología. Ingeniería del océano. Problemas medioambientales complejos, recalentamiento global y otros temas geosociales. *Modelos de circulación glo-*

⁸⁵FONSECA, I. et al. "The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa". Round Table at 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona, July 2000. FRIEDMAN, A. et al. "Mathematics in Industrial Problems". (A 10 volume collection) *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag. Berlín, 1988-1998.

FRIEDMAN, A., LAVERY, J. *How to Start an Industrial Mathematics Program in the University*. SIAM Report. Philadelphia, 1993.

MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2. 1998.

ODEN, J. T. et al. "Research directions in computational mechanics". *Report of the U.S. National Committee on Theoretical and Applied Mechanics*. Washington, 2000.

bal, modelos de equilibrio; modelización estocástica del clima; jerarquías de modelos de complejidad intermedia, como los modelos geostroficados. Glaciología. Acústica y aplicación a la industria del sonido. Fluidos industriales, lubricación. Turbulencia. *Predecibilidad y caos. Estabilidad, bifurcación. Problemas de frontera libre.* Áreas de intersección, como la interacción fluido-estructura.

- Aeronáutica. Problemas de la hidrodinámica. Vuelo supersónico y transónico. Problemas de la combustión (propagación de llamas, detonación). *Ondas de choque y ecuaciones hiperbólicas. Capas límite y desarrollos asintóticos. Ondas viajeras.*

- Física fundamental. Las matemáticas del mundo atómico y de las partículas elementales. El modelo estándar, la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica. *Teoría de grupos, renormalización, teorías gauge, supersimetría, ecuaciones de Yang-Mills, instantones, dilatones, "branes", ... Geometrías y topologías exóticas en dimensiones superiores.*

- Astrofísica. Relatividad general, modelos estelares. Matemáticas de la física de plasmas, magnetohidrodinámica. *Ecuaciones cinéticas (Boltzmann, Fokker-Planck, Vlasov, ...).*

- Ciencias de la tierra. Problemas de recursos y minería. Problemas de conservación del medio ambiente. Transporte de contaminantes en el aire y el suelo. Hidrología computacional. *Las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filtración en los suelos, de la difusión de contaminantes: sistemas no lineales de EDPs y problemas de frontera libre.* Matemáticas de los fenómenos sísmicos, *propagación de ondas, problemas inversos.*

- Ciencia de materiales. Modelado y simulación de materiales "composites", materiales magnéticos, polímeros, cristal y papel. Propagación de fracturas y otros mecanismos de fallos. *Elasticidad lineal y no lineal. Teoría de la homogeneización.* Transiciones de fase, crecimiento de cristales, superconductividad e histéresis.

- Nanotecnología. Ópticas integradas, redes ópticas. Electrónica y óptica cuántica. Técnicas de Nanoescalas en medicina, materiales porosos. *Acoplamiento de modelos con estados cuánticos, mesoscópicos y continuos. Teoría de Boltzmann semiclásica, ecuación de Wigner.*

- Ingeniería industrial. Procesos de la siderurgia, altos hornos. Prototipos de la industria automovilística (fluidos, aerodinámica, materiales y teoría de la fractura).

- Comunicaciones. Telecomunicación y redes ópticas: análisis, simulación, optimización, optimización de la tasa de transmisión, diseño de redes. Antenas, radar y sonda. *Teoría de campos electromagnéticos.* Los hornos de microondas acoplan las ecuaciones de Maxwell con la teoría del calor de Fourier.

- Matemática Discreta. *Teoría de grafos, combinatoria*. Aplicaciones a la administración de empresas, programación de tareas, rutas,...

- Informática. *Lógica matemática, algoritmia, complejidad computacional. Paralelización*. Autómatas finitos, lenguajes formales, álgebra. Aprendizaje de máquina, minería de datos, inteligencia artificial, proceso del idioma natural.

El diseño de la computadora cuántica abriría un nuevo mundo a la computación.

- Control. Control óptimo, control robusto, control no lineal. Control predictivo. Sistemas de control "fuzzy". Redes neuronales. Detección y diagnóstico de fallos en los procesos industriales. Modelado y control de sistemas económicos. Programación con condiciones. Comunicación y control de sistemas híbridos distribuidos.

- Automatización y Robótica. *Geometría Algebraica y computación*. Visión por computadora y realidad virtual. Aprendizaje biológico y computacional.

- Teoría de la información. Codificación de mensajes, códigos correctores de errores. Las sorprendentes aplicaciones de la *teoría de números y el álgebra*. Proceso y compresión de imágenes. *Ondículas, fractales, teorías de EDPs no lineales*. Reconocimiento del habla y las imágenes.

- La estadística en la ciencia, la industria, la empresa y el gobierno. Estimación y tests de hipótesis, diseño de experimentos. Procesos estocásticos. Series temporales. Epidemiología. Control de calidad. Análisis de varianza. Análisis multivariante. Muestreo, votaciones.

- Teoría de Optimización y Programación Matemática. Programación entera, programación no lineal, programación convexa. Métodos iterativos. Optimización del diseño industrial. *Métodos numéricos, ecuaciones en derivadas parciales, cálculo de variaciones, combinatoria, álgebra lineal*.

- Problemas de transporte óptimo. Los problemas del tráfico (modelos continuos y discretos). Planificación de redes. El tráfico en la *Web*.

- Economía. La matemática financiera (valoración de opciones, comercio de derivados, riesgo,...) *une las ecuaciones diferenciales estocásticas con las ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre*. Modelos para la economía global.

- Química. Química cuántica: *simulación de estructuras atómicas y moleculares a través de las ecuaciones fundamentales. Modelos de Schrödinger, Hartee-Fock, Thomas-Fermi, Born-Oppenheimer,...* Dinámica de reacciones, combustión. *Matemáticas de la nucleación, crecimiento de cristales y quemotaxis. La propagación de frentes, ondas viajeras, os-*

ciladores químicos. Caos. Diseño de drogas.

Las Ciencias Naturales y la Medicina:

- Biología: Ecología matemática, epidemiología, biométrica, la bioinformática. Matemática de la Genética, Filogenética computacional. La estructura y función del ácido nucleico. Evolución molecular. Proteómica. *Cálculo con ADN*. Alineación de secuencias, razonamiento borroso. Modelización matemática en biopolimerización.

- Medicina: interacción fluido-estructura como modelo para el flujo sanguíneo. Modelado y simulación de la función de otros órganos: cerebro, pulmones e hígado. *Auto-organización y geometrías fractales*. Asistencia computacional en cirugía. Farmacocinética, modelado del crecimiento de tumores. Neurociencia computacional. Matemática de las enfermedades infecciosas y difusión de epidemias. Órganos artificiales, modelado del sistema inmunológico.

- Tratamiento de imágenes en Medicina. Tomografía: tomografía computerizada, reconstrucción 3D de imágenes. *Transformadas de Fourier y Radon, problemas inversos*.

- Aunque la Matemática computacional (tomada aparte de la Informática) penetra todos los campos de aplicación, merece una mención por sí misma en este listado: métodos numéricos y códigos; algoritmos eficientes; aproximación, estimaciones (a priori y a posteriori) del error, métodos y modelos adaptativos, mallado, descomposición del dominio, análisis multiescala, cálculo numérico de procesos aleatorios,...

- Por otro lado, la Modelización Matemática en sus diferentes variantes (determinista, continua, discreta,...) plantea los problemas de validación de modelos y las técnicas para obtener y elaborar los datos en que se basa la validación (ver apartado de Estadística), así como el importante (y debatido) concepto de jerarquía de modelos, una manera progresiva de acercarse a la "realidad" que es hoy día parte integrante de la "caja de herramientas" del científico aplicado (los viejos idealistas con su la "verdad eterna" se revolverán en sus tumbas; ¿o quizá no?).

Detendremos aquí el listado y haremos una muy necesaria pausa con algunos comentarios. Se observará que la lista está sólo ligeramente articulada por afinidad de temas; sin embargo, la interconexión íntima de las ramas de la matemática aplicada nos obliga a cometer repeticiones, o a poner un tema bajo uno de varios posibles títulos. Por otra parte, hemos dejado fuera diversos campos de aplicación: las teorías de los sistemas complejos, la autosemejanza en el mundo natural, la formación y reconocimiento de modelos (*patterns*) y el sistema de posicionamiento global (GPS), la matemática de los sistemas electorales; la arquitectura,

la industria textil y la alimentaria también han llamado a la puerta de la matemática. Y hay una muy fuerte tendencia para que la Matemática juegue un papel importante en las artes visuales, como ya hace en la Industria del Ocio combinada con el progreso formidable de la tecnología de las computadoras. Y ¿cómo pude haberme olvidado de hablarles de la Teoría de Nudos, del Método Simplex de G. Dantzig, líder incontestado del uso de las matemáticas en las empresas, o del Filtro de Kalman? En conclusión, esta larga lista es incompleta, principalmente debido al conocimiento limitado del autor; pero espero que convencerá al lector de la variedad enorme de intereses de la matemática aplicada actual.

Me gustaría agregar una reflexión personal final sobre las tendencias profundas que veo bajo la diversidad anterior. Las matemáticas del porvenir serán mucho más **estocásticas** y **algorítmicas** de lo que fueron hasta el siglo XX, y la **modelización matemática** será considerada una parte esencial de la educación y la actividad matemática, junto con el cálculo y la simulación. Pero pase lo que pase, me parece que una **prueba** clara y completa, y tan elegante como sea posible, será siempre el meollo de nuestra ciencia, como ha sido desde tiempos del buen Euclides, y los matemáticos futuros todavía se entusiasmarán con **problemas y conjeturas**, y algunos de ellos al modo de Galileo **mirando al mundo** (o las estrellas). Y construirán, posados sobre hombros de gigantes del pasados, esos delicados, intrincados y huidizos objetos llamados **teorías**, algunas de ellas destinadas al olvido, unas pocas a la eternidad,..., o al uso diario. ¿Quién se maravilla ya de la sorprendente existencia de las ondas electromagnéticas llenando el aire, ahora que incluso se han vuelto una forma de contaminación? Pero basta de filosofía por el momento.

9. DE LOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT EN 1900 A LOS PROBLEMAS DE CLAY EN 2000

Ya hemos señalado el profundo impacto que la lista de problemas propuesta por D. Hilbert en 1900 tuvo sobre sus contemporáneos y sucesores. Han pasado 100 años desde entonces y diversas iniciativas pretenden dar la réplica al gran hombre, cf. por ejemplo los libros de Arnold - Atiyah - Lax - Mazur, y de Engquist - Schmid⁸⁶ El miércoles 24 de mayo de 2000 se anunció en el Collège de France de París, el Conjunto de los 7 problemas matemáticos que constituyen los *Millennium Prize*

⁸⁶Para más información ver el artículo de Jackson citado en las referencias finales. Ver también el vol. 3, n.º 1. 2000, de la Gaceta de la RSME, artículo de J. L. Fernández y M. de León.

Problems, patrocinados por el *Mathematics Clay Institute*. Recordando a Hilbert pretendía reflejar 7 de los más importantes problemas abiertos de la ciencia matemática al comienzo del nuevo siglo⁸⁷. Estos problemas recorren las diversas áreas las matemáticas puras y aplicadas y son

1. P versus NP (Teoría de la computación)
2. Conjetura de Hodge (Geometría algebraica)
3. Conjetura de Poincaré (Geometría y topología)
4. Hipótesis de Riemann (Teoría de números)
5. Existencia de Yang-Mills y Hueco de Masa (Física teórica)
6. Existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes (Mecánica de Fluidos y PDEs)
7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (Geometría aritmética algebraica)

A riesgo de ser impertinente (pido disculpas al lector) desearía dar una impresión personal sobre esta lista que parece destinada a ser famosa e influyente. Afortunadamente, incluye problemas abiertos importantes en temas variados de la matemática pura y aplicada. Sin embargo, no hace suficiente justicia a la visión aquí expuesta de la matemática como lenguaje y herramienta básica de la ciencia y la ingeniería.

10. EJEMPLOS DE NUEVOS CURSOS

Tras dos secciones consagradas a la enumeración, es tiempo de volver al trabajo. A continuación, echaremos una ojeada más detallada a algunas de las novedades de la matemática actual. Entre las muchas opciones, tomaremos tres ejemplos: de las finanzas, las comunicaciones y la física fundamental.

• Matemáticas de la incertidumbre financiera y el riesgo

Un ejemplo notable de las aplicaciones prácticas de las matemáticas, desarrollado en los últimos decenios, es la llamada matemática financiera. Los nuevos instrumentos financieros de *futuros* y *derivados* se basan y a su vez motivan esta nueva rama de la matemática aplicada, la cual combina procesos estocásticos, ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre. El resultado más famoso es el *modelo de Black-Scholes*⁸⁸ para el mercado de opciones, el cual reduce la valoración a la

⁸⁷la resolución de cada problema valdría al autor un premio de 1 millón de dólares. Toda la información sobre el premio y los problemas se puede obtener en la dirección http://www.claymath.org/prize_problems.

⁸⁸BLACK, F., SCHOLES, M. *The pricing of options and corporate liabilities*. 1973.

solución de una ecuación del calor (inversa en el tiempo). Me gustaría registrar esta reducción en la siguiente sucesión de fórmulas

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + b S \frac{\partial P}{\partial S} - r P = 0,$$

que pasa de una ecuación diferencial estocástica, representando la incertidumbre del azar, a una EDP determinista que permite la valoración del precio. Éste es un ejemplo sorprendente de *transferencia de conceptos y técnicas* hecho posible por la clave común matemática (y por el hecho de que F. BLACK era licenciado en Física Cuántica).

La inestabilidad inherente a esos mercados y las enormes repercusiones sobre la economía pública y privada hacen tanto más importante la aplicación del método matemático para intentar hallar la clave matemática que rige tales procesos y a reemplazar las reglas empíricas y la adivinación en la práctica financiera por matemáticas. Un reto para el nuevo siglo.

• Del análisis de Fourier a las ondículas

Hemos discutido hace un rato la situación creada en el análisis de Fourier cuando Du Bois Raymond halló un ejemplo de serie de Fourier no convergente, y queremos recordar aquí que la tercera opción para salir del atolladero consistía en cambiar la base de las funciones usadas en la representación. Esto es lo que hizo A. HAAR en 1909⁸⁹, resolviendo así la dificultad en principio. Podemos decir que éste es el origen remoto de las ondículas (wavelets), una idea que tardó un siglo entero en madurar. La investigación en este problema antes de la Segunda Guerra Mundial parece haber seguido un interés exclusivamente matemático sin ninguna aplicación en mente. Pero después de la guerra, ingenieros y científicos aplicados aterrizaron en la idea llevados por las aplicaciones, notablemente, a la teoría de la información de Claude SHANNON. En el futuro, las dos líneas de pensamiento se unieron y el análisis de ondículas se ha convertido en una importante y fértil intersección de las fronteras de las matemáticas, el cálculo científico y el tratamiento de señales⁹⁰.

Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997. ¡Una primera versión del modelo había sido propuesta por L. Bachelier en 1900! se tardaron siete décadas para llegar a un modelo realista y a que la aplicación ocurriese.

⁸⁹ "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme". *Math. Annalen* **69**, 1910. Págs. 331-371.

⁹⁰ La mayor parte de esta información está tomada del libro JAFFARD, S., MEYER, Y., RYAN, R. D. *Wavelets, tools for Science and Technology*. SIAM. Philadelphia, 2001., y también HERNÁNDEZ, E., WEISS, G. *A first course on wavelets. With a*

• Modelos matemáticos de la Física Teórica y la naturaleza de la materia

Las dos grandes revoluciones científicas en la Física del siglo XX, es decir, la Relatividad y la Mecánica Cuántica, han impreso en esta ciencia una aún mayor conexión con la matemática pura. La Física se enfrenta con el desafío enorme de construir una teoría que una a ambos modelos en un *todo coherente*. Experimentales y teóricos han emprendido la búsqueda de la “teoría última” que explicaría todo, desde la constitución del átomo a los extremos más lejanos del Universo. Tal teoría está aún por llegar (y podría estarlo mucho tiempo) pero se han obtenido grandes logros (pues se hace camino al andar, como dijo el gran poeta). He aquí algunos hitos, todos ellos matemáticas profundas.

La Electrodinámica Cuántica (QED) fue desarrollada para describir la interacción electromagnética en el marco de la Mecánica Cuántica, y trata de las cargas y los fotones y usa los hermosos diagramas de Feynman. Una teoría matemáticamente coherente valió a sus autores, Julian SCHWINGER, Richard FEYNMAN y Sin-Itiro TOMONAGA, el premio Nobel de Física en 1965. Por su lado, la Cromodinámica⁹¹ hace un trabajo similar para describir la fuerza llamada “fuerte” que actúa entre los *quarks*, partículas postuladas por M. GELLMANN y G. ZWEIG en 1964 como los entes constituyentes de neutrones y protones. De las cuatro fuerzas básicas de la Naturaleza (gravitacional, electromagnética, débil y fuerte), las dos intermedias reciben una teoría unificada en 1967 con el trabajo de S. WEINGER, SH. GLASHOW y Abdus SALAM. *Simetría, gauge y renormalización* son las palabras clave en este mundo de alta matematización. Las ecuaciones de Maxwell, Schrödinger y Dirac ceden el lugar a las ecuaciones de Yang-Mills. El trabajo cristaliza en los primeros años 70 en el Modelo Estándar de partículas elementales, que explica la realidad atómica en términos de tres generaciones de quarks y leptones. Estas partículas actúan mutuamente a través de la teoría del grupo $SU(2) \times U(1)$ para la fuerza electrodébil y la de $SU(3)_{color}$ para la fuerza fuerte. La Matemática está por consiguiente en el puro centro del modelo, en forma de grupos de Lie, geometría diferencial (más específicamente, conexiones en fibrados) y ecuaciones en derivadas parciales.

Siguiendo adelante, las Teorías de Gran Unificación intentan combi-

foreword by Yves Meyer. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press. Boca Raton, FL, 1996.

⁹¹El nombre hace referencia a la pintoresca denominación para la carga conservada, llamada “el color”.

nar ambas teorías de grupos en una. En la Teoría de Cuerdas, la vieja idea básica de las partículas puntuales es reemplazada por la idea de cuerdas vibrantes elementales. Al final del siglo XX, la Teoría de Supercuerdas propone un modelo matemático para la unificación de todas las fuerzas, de todas las físicas. Le falta, sin embargo, comprobación experimental suficiente; sin ésta, una teoría es simplemente una teoría. Y la búsqueda continúa. Este chorro de ideas ha motivado desarrollos matemáticos importantísimos, asociados a los nombres de matemáticos famosos como M. F. ATIYAH, S. K. DONALDSON y E. WITTEN.

Estos físicos creen, pues, que la combinación modelos-y-experimentos nos permitirá entender un mundo extraño en que la materia, el espacio, y tiempo no son lo que nosotros solemos pensar, donde el espacio vacío está lleno de actividad e incluso podrían existir bastantes dimensiones espaciales adicionales (es decir, por encima de las 3 que vemos más el tiempo) arrugadas en distancias ridículamente pequeñas (la distancia típica sería de 10^{-35} m, por eso no las vemos, *voilà l'astuce*; pero nos dicen que vemos la matemática, y a su debido tiempo veremos las consecuencias).

11. HECHOS Y OPINIONES

En palabras de John MILNOR, *"pure mathematicians tend to judge any work in the mathematical sciences on the basis of its mathematical depth, the extent to which it introduced new mathematical ideas and methods, or it solves long standing problems"*. A lo que yo agregaría que las nuevas ideas y métodos deben ser juzgados por su productividad, y mencionaría como importantes cualidades, la elegancia de la prueba y la visión o intuición. Continúa así: *"However, when mathematics is applied to other branches of human knowledge, a quite different question must be asked first: to what extent does it increase our understanding of the real world"*⁹².

Hubo en épocas no muy remotas un movimiento de separación en las matemáticas que parecía alejar cada vez más a los cultivadores de ambos géneros, puro y aplicado (en la medida en que se puede hablar de una separación que en los mejores casos nunca ha sido neta). Y no debemos olvidar el rechazo de muchos científicos puros contra un tipo de matemática aplicada más atenta a la ganancia que a la exigencia científica, y, al contrario, el rechazo de muchos científicos aplicados hacia

⁹²Ver las *Notices de la Amer. Math. Soc.* 1998.

los mundos excesivamente artificiales (y aburridos) de cierta matemática pura. Afortunadamente, presenciamos hoy día una serie de sucesos simultáneos - a saber, la explosión de vitalidad de la matemática pura, los éxitos de las matemáticas en la formulación y resolución de los problemas clave de la física contemporánea, la economía y la industria, y la variedad insospechada de aplicaciones de todas las ramas de las matemáticas. Todo ello está alterando profundamente la visión de ambos campos, que tienden a confluir en uno, en la mejor tradición del pasado. Este esfuerzo generoso no es nuevo, como expresan las palabras del notable matemático ruso del siglo XIX P. L. CHEBYSHEV: "*Unir la teoría y la práctica conduce a los más favorables resultados; no sólo la práctica se beneficia, también las ciencias se desarrollan bajo la influencia de la práctica que revela nuevos temas a la investigación, así como nuevos aspectos de viejos temas*"⁹³. La importancia de la teoría para la práctica viene descrita en estas bellas palabras de Euler: "*La généralité que j'embrasse, au lieu de'éblouir nos lumières, nous découvreira plutôt les véritables lois de la Nature dans tout leur éclat*"⁹⁴.

Es para los profesionales un gran misterio el que las partes pura y aplicada de las matemáticas sean caras de la misma moneda. Que ambas no son exactamente lo mismo queda muy bien reflejado en las palabras de Albert Einstein: "*Hasta donde las leyes de matemática se refieren a la realidad, no son exactas; y en cuanto son exactas no se refieren a la realidad*"⁹⁵. Pero el ideal y la práctica se unen con resultados sorprendentes. Es famosa la frase de E. WIGNER que se asombraba de la "*efectividad de las matemáticas en las ciencias más allá de lo razonablemente esperable*", literalmente, "*the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*"⁹⁶.

Hacer y enseñar matemáticas hoy

Pasamos a comentar los cambios en la manera de "hacer matemáticas", especialmente cuando son aplicadas. La emergencia de la era del ordenador ha dado nuevas alas a las matemáticas, ¡podemos calcular! La

⁹³Tomado de KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover. New York, 1957. (Papers appeared in 1953, 1956 in *Unspekhi Mat. Nauk in Russian*.) Énfasis nuestro.

⁹⁴En traducción algo libre, "La generalidad con la que opero, en lugar de despistarnos, nos descubrirá las verdaderas leyes de la Naturaleza en todo su esplendor". La frase figura en la tapa de la revista *Archive Rat. Mech. Anal*.

⁹⁵Tomado de *Geometry and Science*, 1921. Incluido en *Sidelights of Relativity*. Dover. New York, 1983. Traducción propia

⁹⁶Conferencia dada en New York, 1959. Publicada en la revista *Comm. Pure Applied Math.*, 13, 1960. Págs. 1-14.

capacidad de *cálculo eficaz, rápido y barato* se ha hecho disponible al principio del siglo de XXI para el científico y en medida creciente para el hombre común, y la sociedad pide cada día más. Ello plantea retos y reflexiones.

Los teoremas siempre serán teoremas y una deducción lógica sigue siendo la llave de la correcta comprensión, pero la vía al descubrimiento nunca será ya la misma, como tampoco lo es el *día después*: la implementación numérica es ahora punto importante en muchas de las matemáticas (en todas las matemáticas aplicadas). No se trata de abjurar de Euclides, se trata de desarrollar la parte de Euclides inventor de algoritmos. Los efectos sobre la enseñanza son de lo más drástico, como es de suponer, pero todavía están siendo desarrollados⁹⁷.

Con ello llegamos a un importante tema de debate, ¿es la nueva forma de hacer y aplicar las matemáticas meramente instrumental o genera nuevas matemáticas? Este es un debate tan viejo al menos como Arquímedes, que utilizaba la mucha mecánica que sabía para inventar pruebas geométricas o conceptos completamente nuevos. Sostenemos pues que los nuevos campos son fuente inagotable de nuevos problemas, nuevas intuiciones, o visiones sorprendentes de viejos temas que dábamos por perdidos o por agotados. Repasemos tan sólo algunas de las páginas anteriores para ver la sorprendente cosecha geométrica de las teorías de partículas de Donaldson, Witten y compañía. O las consecuencias del poder de cálculo sobre las disciplinas más puras como la teoría de números o el álgebra.

La modelización

Un rasgo importante de las matemáticas aplicadas modernas es la modelización matemática, el arte de idear *representaciones sensatas* de los más diversos fenómenos del mundo real en términos matemáticos, basadas en *hipótesis racionales* que simplifican la realidad para hacerla calculable. J. L. LIONS, el matemático francés recientemente fallecido que tanto contribuyó a la presente relevancia de las matemáticas en el mundo industrial europeo, dijo en 1991: "*Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir*"⁹⁸. Y añadió: "*De*

⁹⁷Internet está poblada de propuestas didácticas maravillosas; junto a otras abominables, claro está

⁹⁸"*Lo que me gusta de las matemáticas aplicadas es que ambicionan dar una representación del mundo de los sistemas que permita comprender y actuar*".

*toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure.*⁹⁹

Hemos de recordar que un modelo es sólo un modelo y refleja la realidad de la forma contradictoria que Einstein describía. Pero es todo lo que nosotros tenemos, a menos que consideremos un modelo mejor (o incluso una jerarquía de ellos). Esta es la gloria y la debilidad de la modelización, aspecto crucial de la matemática aplicada actual. El público que presencia el acalorado debate sobre las predicciones de los modelos matemáticos del clima acerca del calentamiento global en la Tierra sabe cuán importante es el problema y debe comprender *cuán difícil es llegar a conclusiones nítidas y fiables manejando evidencias parciales, basadas en modelos parciales y apoyadas por enormes bases de datos de compleja interpretación*, y huyendo de juicios a priori por muy verosímiles que parezcan. Pero es también claro que toda conclusión no basada en números y modelos fiables es pura ideología. Lo que nos permite apreciar el mérito de los modelizadores gigantes del pasado, como Newton, Maxwell, Einstein y el grupo cuántico.

Promesas y plazos

Como hemos apuntado, una enorme parte de las mejores matemáticas se ha originado para explicar aspectos del mundo físico, pero rara vez las consecuencias dramáticas de las matemáticas han sido inmediatas. La formulación de los procesos físicos en clave matemática al gusto de Galileo exige un proceso de maduración que tiene sus reglas y ritmos, que van desde varios años a varios siglos¹⁰⁰.

En un nivel más especulativo, el conocido matemático y escritor científico Ian Stewart afirma que es posible que las matemáticas sean eficaces *"porque representan el lenguaje subyacente del cerebro humano"*. Con lo cual invertimos la apuesta de Galileo, quizá entendemos el mundo en clave matemática porque esa es la clave de nuestra mente. Pero ese es un debate distinto.

Puntos para un debate

Resumiré a continuación las opiniones básicas que me he formado en años de estudio y curiosidad por el mundo de la matemática. Espero

⁹⁹ *"De todas las representaciones la matemática, cuando es posible, es la mejor y la más flexible"*.

¹⁰⁰ Sería una bendición si la administración y las autoridades educativas fueran conscientes de este hecho en su toma de decisiones.

que sea mínimamente útil en el eterno y necesario debate:

- Sólo las buenas matemáticas pueden ser buenas matemáticas aplicadas. Las Matemáticas Aplicadas como arte diferente y separado de la Matemática propiamente dicha, simplemente no existen¹⁰¹. Pero al poner las matemáticas a trabajar, la aplicación las cambia, las enriquece y les abre nuevas vías.

- La Matemática sólo es aplicada de verdad si ataca un importante problema de la ciencia, la tecnología, la economía, o más generalmente, de la sociedad. Ya hemos visto cuán variados estos problemas pueden ser.

- Si bien podemos llegar a juzgar con cierto grado de fiabilidad qué es importante hoy, la tarea de predecir qué rama de la matemática será importante mañana (la llamada planificación estratégica) excede la capacidad de las personas sensatas, salvo que simplemente contestemos: "las buenas matemáticas importarán" o "las matemáticas del mundo real importarán siempre". Las hipótesis autorizadas y opiniones sobre temas específicos son humanas y pueden ser útiles como orientación personal, pero cuando se trata de decisiones y prioridades la prudencia es de rigor.

- Desde una perspectiva histórica no se puede afirmar que los grandes matemáticos vivan en una torre de marfil de teorías desconectadas de toda realidad. No decimos que no puedan hacerlo, o que no les resulte interesante, necesario, incluso natural en muchos momentos, vivir en la abstracción absoluta; afirmamos que, vista en perspectiva, su actividad ha sido un factor esencial en la comprensión que hoy tenemos del mundo.

- Está además la interesante cuestión de filosofía: es un hecho bien atestado que al enfrentarse a un enigma matemático, al matemático "aplicado" le gusta construir y comparar modelos adecuados, y ansía resolver el enigma preciso planteado sea cual sea el daño temporal que se inflija a la perfecta deducción lógica, mientras su colega "puro" se deleita en la prueba lógica; sólo la demostración gobierna sus días.

Así pues, ¿son lo mismo las matemáticas puras y las aplicadas? o más cuidadosamente formulado, ¿son lo mismo en el fondo? Dejemos al amable lector que juzgue por sí mismo. Ya saben mi opinión (más o menos), pero me permito agregar en un tono más relajado una cita de Yogi Berra¹⁰²: "En teoría no hay ninguna diferencia entre teoría y

¹⁰¹ Tomo en parte esta idea radical de A. Rényi, (RÉNYI, A. *Dialogues on Mathematics*. Holden-Day. San Francisco, 1967.), quien la atribuye en su relato a Arquímedes.

¹⁰² Famoso jugador de béisbol americano, muy conocido por sus cómicas pero atinadas salidas. Esta es la frase original: "In theory, there is no difference between theory

práctica; en la práctica, sí que hay".¹⁰³

12. BREVE APUNTE SOBRE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA

España tuvo en un momento dado de la Edad Media tardía un papel importante en la transmisión de la cultura árabe a Occidente e incluso hubo un rey en Sevilla¹⁰⁴ que escribió poesía y promovió las matemáticas (el saber astronómico). Al Andalus, la España musulmana, tenía sólidos intereses científicos, en particular en medicina y astronomía, con sabios de renombre como AZARQUIEL (o Al-Zarkali, activo en Toledo), quien compuso tablas astronómicas. El sistema de numeración indio basado en la posición ya estaba en uso en Al Andalus en el siglo IX.¹⁰⁵ Después de la toma por los Cristianos (1085 d.C.), Toledo, la ciudad de las tres culturas - cristiana, árabe y judía -, fue durante siglos un gran centro de saber con su Escuela de Traductores que vertieron al latín los trabajos de autores griegos y árabes¹⁰⁶. En otra dirección, el mallorquín Raimundo LULIO (Ramón Llull) desarrolló en su *Ars Magna* un entero arte de razonamiento algorítmico en que podemos ver un temprano precedente del Álgebra de Boole y la lógica de las computadoras (Llull, que vivió en el siglo XIII, es al mismo tiempo uno de los clásicos más antiguos de la lengua catalana). Un siglo más tarde, los mapas náuticos llamados *portulanos* de Mallorca eran la cima del arte, y los nombres de SOLER y CRESQUES son muy conocidos. El último, un judío, participó en la organización de la escuela náutica portuguesa que fue el origen del descubrimiento del camino a las Indias alrededor de África, e, indirectamente, también de América.

Luego las cosas fueron a peor por largo tiempo. Las fundadas esperanzas del tardo Medievo y primer Renacimiento fallaron en España, y la matemática (y las otras ciencias) han tenido un humilde devenir durante

and practice; in practice, there is".

¹⁰³He aquí una (medio) broma sobre las diferentes formas de ver las matemática: los ingenieros dicen que las ecuaciones aproximan la realidad, mientras los físicos piensan que la realidad aproxima las ecuaciones; por su lado, los matemáticos se asombran ante la idea de que exista una conexión entre "sus" ecuaciones y la realidad (y se enojan no poco si se les insiste).

¹⁰⁴Alfonso X el Sabio.

¹⁰⁵La primera escuela andalusí de matemáticas parece haber sido la de Maslama al Magriti, es decir, de Madrid, que floreció en el siglo X en Córdoba. Puede considerarse la primera escuela en la Península en todos los tiempos, y tuvo numerosos discípulos. En el siglo XII el rey Almutamán de Zaragoza fue un notable matemático.

¹⁰⁶El monasterio de Sta. María de Ripoll en Cataluña también tenía una biblioteca mundialmente conocida.

siglos. Mientras la literatura española y arte están con la crema de la creación mundial desde el siglo XVII hasta nuestros días, está claro que ningún nombre español aparece en los libros de texto afamados en que se aprenden las matemáticas, elementales o superiores. Hay en tales textos numerosos conceptos y resultados nombrados en honor a autores de las diversas naciones con gran tradición científica: franceses, ingleses, alemanes, italianos (e Italia era un país católico), en tiempos más recientes rusos y americanos,..., como también son frecuentes los ejemplos países que, debido a su tamaño y las circunstancias, no jugaron un papel tan prominente en la Historia, pero que sí están en el *Libro de la Ciencia*. Durante estos siglos de desarrollo glorioso, de Galileo a Einstein, no se mencionan nombres españoles. ¿Pudo la historia haber sido diferente? El rey Felipe II comprendió la necesidad de la ciencia y creó una *Academia Matemática* en Madrid (1582) bajo la dirección de Juan de HERRERA, el arquitecto de El Escorial, pero la institución no tomó cuerpo y dejó de existir unos años después, mientras que iniciativas similares dieron nacimiento en el extranjero a la *Royal Society* en Inglaterra, la *Académie des Sciences de Paris* en Francia, y así sucesivamente. Ha habido, sin duda, ejemplos de ilustres hombres dignos de mención, como PEDRO CIRUELO, OMERIQUE, JORGE JUAN y ECHEGARAY, pero son autores aislados, una escuela nunca tomó raíz hasta muy recientemente y ningún gran teorema salió de sus esfuerzos. Hubo en el siglo XVIII un gran esfuerzo de los gobiernos ilustrados por afianzar en el país el amor al estudio y la industria y España participó en la medición del meridiano terrestre, pero las consecuencias matemáticas fueron reducidas.¹⁰⁷ ¿Cuáles son las razones? Difícil cuestión, pero señalemos que durante siglos se prohibió a los estudiantes y profesores españoles viajar y aprender en los países extranjeros, una regla de seguridad bastante estricta que previno con éxito contra la heterodoxia, y al tiempo contra la ciencia y el progreso.

Éste no es lugar para un estudio detallado de la Historia, para lo cual dirigimos al lector a los especialistas¹⁰⁸, así que procederemos señalando cómo se ha llegado en fecha muy reciente a un presente bastante halagüeño. España pareció surgir de su profundo letargo matemático en la primera mitad de este siglo y la figura del insigne J. REY PASTOR sirve como referencia a un esfuerzo notable de poner al día a nuestro país basado en las únicas ideas que podían funcionar: el estudio en los

¹⁰⁷ El lema de la Academia de Ciencias portuguesa resume el espíritu de esta época: *Nisi utile est quod facimus stulta est gloria*. "Si lo que hacemos no es útil, tonta es la gloria".

¹⁰⁸ Como Juan Vernet, cuyo trabajo (VERNET GINÉS, J. *Historia de la Ciencia Española*. Editorial Alta Fulla. Barcelona, 1998), se usa en los párrafos anteriores.

grandes centros del extranjero y la importación de las matemáticas que realmente existen en la comunidad mundial, que es la única que tiene real sentido en la ciencia, al menos en la nuestra. Este método había tenido un éxito fulgurante en la creación de la matemática norteamericana y todo indicaba que había de funcionar en nuestro país. Sin embargo, nuestra funesta historia se encargó de disgregar el notable esfuerzo, que daría frutos abundantes en tierras americanas, personificados en figuras como L. SANTALÓ. Con alguna muy honrosa excepción, que la hubo, la actividad matemática hasta los años 60 volvió al ritmo del pasado.

Poco a poco, sobre todo a partir de los años 70, comienza por fin el despertar de España a lo que podríamos llamar la realidad matemática. Tras una década de esfuerzo ingente de una generación que aprendió en las fuentes originales, que enseñó en sus clases los textos más actuales, que organizó seminarios de investigación y que viajó o mandó a sus jóvenes alumnos al extranjero, que empezó a publicar en las revistas internacionales reconocidas y a participar en los grandes eventos, llegan, a partir de los años 80, los años dorados de la *creación original*, lo que se traduce en las mil facetas de la vida matemática auténtica y que se reflejan (aunque no se resuman) en la palabra *publicación*: las mejores revistas empiezan a recibir artículos de autores españoles, primero tímidamente, luego en cascada¹⁰⁹. Las señales de los buenos tiempos se hacen múltiples e inequívocas, y podemos concluir que “España ya no es diferente”. Los indicadores oficiales nos permiten poner cifras a esta evidencia de cambio. De ellos se deducen dos hechos que inicialmente han sorprendido a muchos:

(a) Que las matemáticas españolas han pasado de un lugar muy modesto en 1980 (menos del 0.4% de la producción mundial según la base de datos ISI¹¹⁰) a una posición honorable en el momento, inmediatamente después de EE.UU., Alemania, Inglaterra, Francia, Rusia, Italia, Japón y Canadá, con una producción en revistas importantes que se ha multiplicado por un factor de más de 10 y representa en 2001 una proporción mundial de más de 4,18% (ISI).

(b) Que en el análisis comparativo de la ciencia española, la Matemática figura entre las especialidades bien situadas.

¹⁰⁹En esta coyuntura conviene evocar las palabras de Galileo sobre la Ciencia que le atribuye B. Brecht en su *Vida de Galileo*: “La Ciencia tiene un solo mandamiento: contribuir a la Ciencia”.

¹¹⁰Institute for Scientific Information.

Para más información sobre la investigación matemática en España en el último decenio referimos al lector al informe *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*¹¹¹, que refleja en gran detalle los avances realizados.

Otra consecuencia del estado creativo de la matemática española es la presencia de numerosos y valiosos libros de texto y monografías de investigación en prestigiosas colecciones. Digamos además que España, que ha alcanzado una sólida posición en la investigación, también cuenta con una tradición en educación matemática, con un papel muy influyente en el ICMI¹¹².

Finalmente, la tendencia hacia los aspectos computacionales y aplicados de las matemáticas, junto con el énfasis en las matemáticas como herramienta por excelencia en la modelización, es ahora fuertemente sentida en una comunidad anteriormente ligada casi en exclusiva al pensamiento matemático abstracto. Abrir las ventanas al ancho mundo de ahí fuera es un reto enorme en pro de la salud de nuestra matemática y del bienestar de generaciones futuras, y todos los esfuerzos son bienvenidos. ¡Dejemos entrar el aire fresco!

13. CONCLUSIÓN

Llegamos al fin de nuestro viaje. Hemos dicho al principio del relato que la "Matemática Aplicada" es la Matemática del "Mundo Real". Puede quedarle al lector cierta duda sobre la esencia de tales conceptos, y se preguntará si han sido suficientemente aclarados en el texto. No ha sido nuestro propósito examinar a fondo este problema más bien filosófico. Siguiendo la práctica usual de los matemáticos aplicados, poco partidarios del exceso de teorización, o quizá movidos por la inmensidad de la tarea y la premura de tantos nuevos hallazgos, hemos seguido una *aproximación constructiva* a ambos conceptos y hemos intentado mostrar su contundente relevancia en la gestación de la sociedad actual y su papel en el futuro que se vislumbra. Lo que no excluye que otros se ocupen de tales temas con un espíritu más discursivo.

¹¹¹ ANDRADAS, C., ZUAZUA, E. (Coordinadores) *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*. Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM). Madrid, 2000.

¹¹² *The International Commission on Mathematical Instruction*, presidida durante años por el matemático español Miguel de Guzmán.

Recordando a Galileo, me gustaría concluir así: el *Libro de la Naturaleza* se abre ante nosotros para que lo admiremos con su infinita, cambiante y sorprendente belleza; las matemáticas como lenguaje de la ciencia están ahí para que comprendamos la Naturaleza, y nos permiten además utilizarla y explotarla, estando este aspecto final cargado de promesas y peligros, como todo lo humano. Espero que los matemáticos de hoy día realicemos nuestra parte en el esfuerzo de comprender y mejorar la Sociedad de la Información que nos ha tocado ver nacer. En la era de los ordenadores y la información, la *Realidad está en el Número*, como habría gustado a Pitágoras. O por lo menos un enorme pedazo de ella la explican y la reproducen los números, con la ayuda de nuestros amigos científicos y tecnólogos, y de los ordenadores.

- - • - -

COMENTARIO FINAL. La idea de este artículo divulgativo se originó con los esfuerzos de las Sociedades Matemáticas españolas para celebrar el Año Matemático Mundial 2000. El autor está en deuda con los organizadores de aquel evento, con la Sociedad Nuevo Milenio, con los colegas que han suministrado múltiples sugerencias, con la Univ. de Texas en Austin y con la Sociedad Española de Matemática Aplicada que tuvo a bien premiar un extenso escrito en inglés que desarrolla estas ideas y que pueden encontrar en <http://www.uam.es/juanluis.vazquez>.

El apéndice histórico refleja ideas del autor sobre el presente de la Matemática española tomado con mínimos cambios de la referencia VÁZQUEZ, J. L. *Mathematical Events in Spain in the Year 2000*. Intelligencer. Springer-Verlag, julio 2000. Págs. 12-14, sección primera¹¹³. Interesantes fuentes en español son los *Boletines de SEMA*; la *Gaceta de la RSME* (cf. el vol. 3, 1, 2000.) y la *Revista Española de Física*, vol 14, no. 5, consagradas al estado de la Matemática con ocasión de la celebración del Año Mundial Matemático¹¹⁴. Las ilustraciones están tomadas del sitio web *The MacTutor History of Mathe-*

¹¹³Más sobre el mismo asunto en VÁZQUEZ, J. L. "Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". *Gaceta de la Real Soc. Matemática Española*, vol. 3, 1, 2000. Págs. 9-22. Ver, también, <http://dulcinea.uc3m.es/ceamm>.

¹¹⁴ARNOLD, V., ATIYAH, M., LAX, P., MAZUR, B. *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. AMS Publications. Providence, 2000.
ENGQUIST, B., SCHMID, W. (Editores). *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*. Springer-Verlag. Berlin, 2001.

JACKSON, A. "Mathematical challenges of the XXI century". *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 47, n.º 10, 2000. Págs. 1271-1273.

MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2, 1998.

OBRA COLECTIVA. *Fotografiando las Mathematics*. Carroggio S.A. de Eds. Barcelona, 2000.

STEWART, I. *The Problems of Mathematics*. Oxford Univ. Press. Oxford, 1992.

matics Archive, de la Univ. de St Andrews, un notable archivo biográfico cuya lectura me ha sido de gran utilidad. Finalmente, la lista de referencias que sigue refleja lecturas del autor durante la preparación de este texto y no significa en modo alguno una selección de las mejores lecturas disponibles.

REFERENCIAS

- ANDRADAS, C., ZUAZUA, E. (Coordinadores) *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*. Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM). Madrid, 2000.
- ARNOLD, V., ATIYAH, M., LAX, P., MAZUR, B. *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. AMS Publications. Providence, 2000.
- BABUSKA, I. "Courant Element: Before and After". En *Finite Element Methods*. Editado por Krizek, Neittaanmäki and Sternberg. M. Dekker Inc. New York, 1994.
- BARENBLATT, G. I. "George Keith Batchelor and Daniel George Crighton, Applied Mathematicians". *Notices American Math. Soc.*, vol 48, n.º 8. 2001. Págs. 800-806.
- BROWDER, F. (ed.) "Mathematical Developments arising from Hilbert Problems". *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII*. Amer. Math. Soc. Providence, 1976.
- CASTI, J. L. *Five Golden Rules*. John Wiley. New York, 1996. *Five More Golden Rules*. John Wiley. New York, 2000.
- CHAITIN, G. *The limits of mathematics*. Springer. Singapore, 1998.
- CIPRA, B. *What is happening in the Mathematical Sciences*, vols. 1-4. Amer. Math. Soc. Providence, 1999.
- COMAP. *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison Wesley - Universidad Autónoma de Madrid. 1998. Versión inglesa: GARFUNKEL, S. et al. *Introduction to Contemporary Mathematics*. W.H. Freeman & Co. New York, 1988.
- ENGQUIST, B., SCHMID, W. (Editores). *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*. Springer-Verlag. Berlin, 2001.
- FEYNMAN, R. P. *Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set)*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. Boston, 1963-65.

FEYNMAN, R. P. *Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher*. Helix Books. New York, 1995. (Addison-Wesley Longman. Boston, 1996) And *Six Not-So-Easy Pieces: Einstein's Relativity, Symmetry, and Space-Time*. Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. Boston, 1997.

FONSECA, I. et al. "The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa". Round Table at 3rd European Congress of Mathematics. Barcelona, July 2000.

FRIEDMAN, A. et al. "Mathematics in Industrial Problems". (A 10 volume collection) *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag. Berlín, 1988-1998.

FRIEDMAN, A., LAVERY, J. *How to Start an Industrial Mathematics Program in the University*. SIAM Report. Philadelphia, 1993.

GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*. Penguin Books. Nueva York, 1987.

HARDY, G. H. *A Mathematician's apology*. Cambridge University Press. Cambridge, 1940.

HERNÁNDEZ, E., WEISS, G. *A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press. Boca Raton, FL, 1996.

JACKSON, A. "Mathematical challenges of the XXI century". *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 47, n.º 10. 2000. Págs. 1271-1273.

JAFFARD, S., MEYER, Y., RYAN, R. D. *Wavelets, tools for Science and Technology*. SIAM. Philadelphia, 2001.

KHINCHIN, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover. New York, 1957. (Papers appeared in 1953, 1956 in *Unspekhi Mat. Nauk* in Russian.)

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford Univ. Press. Oxford, 1972.

KLINE, M. *Mathematics. The loss of certainty*. Oxford Univ. Press. Oxford, 1980.

MAURY, J. P. *Galileo, el mensajero de los astros*. Claves, Ed. B.S.A. Barcelona, 2000.

METROPOLIS, N., HOWLETT, J., ROTA, G. C. (Eds.) *A History of Computing in the Twentieth Century*. Academic Press. New York, 1980.

MEYERS, P. A. *Encyclopedia of Modern Physics*. Academic Press. San Diego, 1990.

MORIYASU, K. *An elementary primer in Gauge Theory*. World Scientific. Singapore, 1983.

MUMFORD, D., FRIEDMAN, L., LOVÁSZ, L., MANIN, YU., ROTA, G. C., JENSEN, R. B. y PENROSE, R. Informe sobre el futuro de las Matemáticas contenido en *Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung* (es decir, *Notices of the German Math. Union*), 2. 1998.

MUÑOZ SANTONJA, J. *Newton, el umbral de la ciencia moderna*. Col. *La Matemática en sus personajes*, vol. 3. Nivola ed. Madrid, 1999.

NASAR, S. *A beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr.* Simon & Schuster. New York, 1998. (En castellano, *Una mente prodigiosa. Historia de John Forbes Nash*. Grijalbo Mondadori. Barcelona, 2001.)

NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Pepys. London, 1687. (En castellano, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*. Alianza Ed. Madrid, 1987.)

OBRA COLECTIVA. *Fotografiando las Mathematics*. Carroggio S.A. de Eds. Barcelona, 2000.

ODEN, J. T. et al. "Research directions in computational mechanics". *Report of the US National Committee on Theoretical and Applied Mechanics*. Washington, 2000.

RÉNYI, A. *Dialogues on Mathematics*. Holden-Day. San Francisco, 1967.

REVISTA ESPAÑOLA DE FÍSICA, volumen 14, número 5. 2000.
Número especial: *La Física y las Matemáticas*.

SÁNCHEZ RON, J. M. *El siglo de la ciencia*. Taurus. Madrid, 2000.

SCHIFFER, M. M., BOWDEN, L. "The role of Mathematics in Science". *The Math. Assoc. of America, New Math. Library* vol. 30. 1984.

SIMMONS, J. *The scientific 100*. Citadel Press, Kensington Publ. Corp. Nueva York, 1996.

SINGH, S. *The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography*. Doubleday & Company. Nueva York, 1999.

SMITH, W. *Mapping and Sequencing the Human Genome: A Beginner's Guide to the Computational Science Perspective*. *ACM Crossroads Student Magazine*, <http://www.acm.org/crossroads/xrds4-1/genome.html>.

STAUFFER, D., STANLEY, H.E. *From Newton to Mandelbrot, A Primer in Theoretical Physics*. Springer. Berlin, 1991.

STEWART, I. *The Problems of Mathematics*. Oxford Univ. Press. Oxford, 1992.

TANUR, M., MOSTELLER, F. et al. *Statistics: A Guide to the Unknown*. Brooks/Cole. Pacific Grove, 1989.

VÁZQUEZ, J. L. "Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles". *Gaceta de la Real Soc. Matemática Española*, vol. 3, 1. 2000. Págs. 9-22. Ver, también, <http://dulcinea.uc3m.es/ceamm>.

VÁZQUEZ, J. L. "Mathematical Events in Spain in the Year 2000".
Intelligencer. Springer-Verlag. Julio 2000. Págs. 12-14.

VERNET GINÉS, J. *Historia de la Ciencia Española*. Editorial Alta
Fulla. Barcelona, 1998.

WATERMAN, M. S. *Introduction to Computational Biology*. Chapman
& Hall. Londres, 1995.

LAS MATEMÁTICAS DEL CONTROL

Enrique Zuazua
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

RESUMEN

1. Introducción.
2. Algunas aplicaciones comunes.
3. Controlabilidad *versus* optimización.
4. Control y complejidad.
5. Control del péndulo.
6. Controlabilidad de un sistema lineal en dimensión finita.
7. Controlabilidad de sistemas no-lineales.
8. Optimización, programación lineal, convexidad y dualidad.
9. Control molecular mediante tecnología láser: la relevancia de la separación espectral.
10. La barrera del Támesis: un ejemplo de control ambiental.
11. Perspectivas futuras.

BIBLIOGRAFÍA

RESUMEN

En estas notas abordamos algunos aspectos de la Teoría Matemática del Control, comenzando con algunas consideraciones históricas generales sobre sus orígenes y evolución. Más adelante, describimos algunos elementos matemáticos fundamentales y diversos avances recientes que se caracterizan tanto por su interés matemático como por su trascendencia desde un punto de vista social, tecnológico e industrial. Por último, mencionamos algunos problemas abiertos y los retos que se plantean en esta disciplina para un futuro inmediato.

1. INTRODUCCIÓN

S. Bennet inicia su libro dedicado a la historia de la Ingeniería del Control¹ con la siguiente cita de Aristóteles del capítulo 3 del primer volumen de *Política*:

“... si cada instrumento pudiera llevar a cabo su propia función, respondiendo o anticipándose al trabajo de otros ... si la lanzadera tejiese y la púa tocase el arpa sin una mano que los guiara, los patronos no necesitarían ni sirvientes ni capataces.”

Esta idea, expresada con enorme acierto por Aristóteles, refleja de manera transparente lo que ha sido el motor de la Ingeniería del Control y de su Teoría Matemática: la automatización de los procesos para la liberación y mejora de la calidad de vida del ser humano.

Para todos nosotros, la palabra “control” implica “actuación”. Es verdad también que, a veces, en nuestra sociedad, la palabra “control” puede ser percibida con un matiz un tanto negativo, en la medida en que puede asociarse a “falta de libertad”. Pero no es éste el sentido en el que ha de entenderse en el contexto de la Teoría del Control. En este caso, la palabra “control” refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea con vistas a garantizar su supervivencia y una permanente mejora en la calidad de vida.

Como ocurre en muchas disciplinas, ésta, la Teoría del Control, existía desde mucho antes de que se le pusiera nombre. En efecto, en el mundo de lo viviente, los organismos están dotados de mecanismos de regulación que garantizan el mantenimiento de las variables esenciales. Los mecanismos de control son efectivamente ubicuos en la Naturaleza.

¹BENNET, S. *A history of control engineering 1800-1930*. IEE Control Engineering Series 8. Peter Peregrinus Ltd. Londres, 1979.

La esencia de la Teoría del Control está inspirada en algunas nociones que a todos nos resultan familiares. Una de ellas es la de “feedback”. Este término se incorporó a lo que hoy conocemos como Teoría del Control en los años 20 por los ingenieros del “Bell Telephone Laboratory”. La traducción del término “feedback” al castellano produce palabras mucho más largas tales como “realimentación” o “retroalimentación”. Como decíamos, este término se adopta en los años 20 para la Teoría del Control, pero no se acuña en esta disciplina sino en áreas tales como la Economía Política. Tal y como menciona en 1907 H.R. Hall,² por ejemplo:

“Es un hecho curioso que, mientras que los economistas políticos reconocen que para un correcto funcionamiento de la ley de la oferta y la demanda ha de haber fluctuaciones, esto no ha sido reconocido por los mecánicos en relación a la máquina de vapor. El objetivo de los economistas no es suprimir estas fluctuaciones completamente (puesto que entonces se suprimiría también el principio de la autorregulación), sino disminuirlas lo más posible, permitiéndoles que sean lo bastante grandes como para mantener suficiente poder regulador.”

Esta frase desvela un principio que es válido en muchos aspectos de la vida diaria. Por ejemplo: cuando, yendo a velocidad alta, deseamos frenar un vehículo, no lo haremos de una sola vez, sino que el frenado habrá de ejercerse de manera intermitente para no perder el control del vehículo. En el ámbito de las relaciones humanas no cabe tampoco ninguna duda de que insistir continuada y permanentemente sobre lo mismo no es necesariamente la mejor manera de convencer a nadie de nada. En el control de sistemas ocurre exactamente lo mismo. De alguna manera, hemos de renunciar a la regla básica que todos hemos aceptado y hasta considerado obvia en nuestra concepción euclidea del universo y asumir que, en la práctica, “la distancia más corta entre dos puntos no es necesariamente la línea recta”. Para adentrarnos en la teoría del control hemos pues de aceptar que, para controlar los sistemas que surgen en la Naturaleza o en el desarrollo tecnológico, frecuentemente muy complejos y con un gran número de parámetros, no se trata simplemente de forzar el sistema para conducirlo de manera monótona e ininterrumpida al objetivo buscado sino que, a menudo, hemos primero de alejarnos del

²HALL, H.R. *Governors and governing mechanisms*. The Technical Publishing Co. 2nd ed. Manchester, 1907.

objetivo buscado en armonía con el sistema para después alcanzar el objetivo con un esfuerzo adecuado pero no excesivo.

La Naturaleza nos ofrece ejemplos difíciles de mejorar en este terreno. Basta simplemente observar el ritual del depredador que acecha a su presa o el cauce del río que desde su nacimiento busca desembocar en el mar.

Hoy en día, la noción de feedback es también común en Biología, Psicología, etc. El principio de causa-efecto ha dejado de entenderse como un fenómeno estático y se aborda ahora desde una perspectiva dinámica a causa de los mecanismos de "feedback". Estamos frente al principio *causa-efecto-causa*.

Otra de las nociones que subyace en todo lo que hoy puede considerarse parte del ámbito de la Teoría del Control es la de "optimización". La optimización es una técnica que tiene como objetivo aumentar o mejorar el valor de una variable que, en la práctica, puede tomar las formas más variadas: temperatura, flujo de aire, velocidad, rentabilidad, beneficio, información, capacidad de defensa y/o destrucción, etc. Las técnicas de optimización son tan variadas que resulta imposible hacer una presentación global y unificada de todas ellas. Por otra parte, la tecnología informática y las Ciencias de la Computación han jugado un papel crítico y decisivo en las aplicaciones de las técnicas de optimización tal y como ocurre, por ejemplo, en el control óptimo de cohetes y proyectiles puesto que, en vista de la complejidad de los sistemas a los que la Teoría del Control ha de hacer frente en la actualidad, es imposible realizar una implementación eficiente de los métodos de control, sin previamente realizar un riguroso trabajo de simulación numérica.

Dentro del amplio abanico de teorías, técnicas y problemas que podemos enmarcar en el contexto de la optimización cabe mencionar la teoría de juegos, la programación lineal y no-lineal, el diseño óptimo de formas, etc.

Hemos ya mencionado dos de las grandes ideas que han servido de inspiración y de motor a la Teoría del Control: el mecanismo de *feedback* y la *optimización*.

Otro de los términos ligados a la Teoría del Control y de la Optimización es el de *cibernética*, propuesto por el físico francés A.-M Ampère en el siglo XIX en su clasificación de las Ciencias para referirse a la aún no existente ciencia del control de los procesos. Este término fue rápi-

damente olvidado hasta que en 1948, el matemático americano Norbert Wiener lo adoptó como título de su famoso libro³. Wiener definió la cibernética como “*la ciencia del control y de la comunicación en animales y máquinas*”. Esta definición relaciona la cibernética con la Teoría del Control y la Fisiología del sistema nervioso.

El “sueño” de Wiener estaba basado en la idea de que surgiría una creciente sinergia entre el ser humano y la máquina que abarcaría tanto la Matemática como la Psicología: *La máquina al servicio del ser humano, imitando al ser humano*. Hace unas décadas todo esto no dejaba de parecer un sueño ingenuo. Sin embargo, hoy la situación es completamente distinta pues los desarrollos en la tecnología de la computación han hecho posible un sinnúmero de nuevas aplicaciones, en robótica, visión por ordenador, etc. El artículo de M. Salomone, titulado de manera muy elocuente “*Los humanoides ya están aquí*”,⁴ da buena cuenta de estos avances.

Todo esto plantea cuestiones nuevas y complejas, con enorme transcendencia ética, y que, sin duda, condicionarán el devenir de la Ciencia en los próximos años: ¿podemos inspirarnos en los sistemas de la biología para crear máquinas mejores? ¿El comportamiento animal es un criterio para juzgar la eficacia de las máquinas?

A medida que nos vayamos adentrando en la Teoría del Control y consultemos las referencias más relevantes veremos que, con frecuencia, también se utiliza el término de *Ingeniería del Control*. Alguno puede preguntarse si esta última y la que se denomina Teoría Matemática del Control son disciplinas distintas o incluso concurrentes. Esto no es así desde nuestro punto de vista. Se trata, por el contrario, de una prueba del vigor de un campo genuinamente multidisciplinar y transversal en el que intervienen numerosas disciplinas de la Ciencia y Tecnología. Con el objeto de entender la coexistencia y utilización de esos dos términos conviene remontarse por un momento a los orígenes de esta historia.

Ya en los trabajos de Ch. Huygens y R. Hooke sobre la oscilación del péndulo a finales del siglo XVII, cuyo objetivo último era una medición precisa del tiempo, surgen elementos de lo que hoy conocemos como la Teoría del Control. El objetivo, entonces, era proporcionar instrumentos que sirviesen a la navegación y, en particular, al control del

³WIENER, N. *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1948.

⁴SALOMONE, M. “*Los humanoides ya están aquí*”. *El País Semanal*, 12338. Madrid, 18 de junio de 2000.

posicionamiento de los navíos. Estos trabajos fueron después adaptados a la regulación de la velocidad en los molinos de viento. La idea central fue la de utilizar un sistema mecánico de bolas girando en torno a un eje cuya velocidad de rotación fuese proporcional a la del molino. A medida que la velocidad de giro aumentaba, éstas se alejaban del eje, accionando así las alas del molino a través de mecanismos ingeniosos.

James Watt adaptó este tipo de mecanismos de bolas a la máquina de vapor, dando así un enorme impulso a la revolución industrial. En este caso, a medida que la velocidad de las bolas aumentaba, las válvulas se abrían, dejando escapar el vapor. Al disminuir la presión de la caldera, la velocidad disminuía. El problema que se planteó fue entonces el de mantener constante la velocidad de la máquina. El astrónomo inglés Georges Airy fue el primero en intentar realizar un análisis del regulador de bolas de Watt. Pero fue sólo en 1868 que el físico escocés James Clerk Maxwell realizó el primer análisis matemático convincente de la máquina de vapor, explicó algunos de los comportamientos un tanto erráticos que se observaban en las máquinas de entonces y propuso diversos mecanismos de control.

Buscando más atrás en la Historia podríamos también llegar a la conclusión de que también en el diseño de los acueductos romanos, en los que se usaba un sistema de válvulas para mantener un nivel de agua constante, había elementos propios de la Teoría del Control. Asimismo, el control de los sistemas de irrigación era un arte bien dominado en Mesopotamia 2000 años A. C. Por otra parte, en el antiguo Egipto, el oficio de los "harpenodaptai" o "estiradores de cuerdas", que tenía como objeto estirar cuerdas para producir largos segmentos rectos que ayudasen en la construcción de pirámides, era sumamente relevante. Este hecho se considera como una evidencia de que ya por entonces se había comprendido no sólo que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta (lo cual podría considerarse como el problema más clásico de la Optimización y del Cálculo de Variaciones) sino que éste es equivalente a su versión dual: entre todos los caminos de longitud dada, encontrar el que maximiza la distancia entre los dos extremos. Obviamente, la respuesta es nuevamente la línea recta. El trabajo de los "harpenodaptai" consistía precisamente en producir estas rectas que desempeñan el papel de curvas maximales u óptimas.

A través de la revolución industrial, las ideas propias de lo que hoy se denomina Teoría del Control fueron haciéndose más y más presentes. Ya en los años 20, los empresarios e ingenieros preferían el procesamiento continuo frente al más tradicional, por lotes y, cuando era posible,

utilizaban el control semi-automático o automático. De este modo, la Ingeniería del Control germinó y fue comenzando a ser reconocida como una disciplina científico-tecnológica. En los años 30 se comenzaba ya a asumir que la Ingeniería del Control formaba parte importante del entramado que supone la Ingeniería de Sistemas Complejos. Durante los años 30 se produjo un importante avance en todo lo relacionado con el control automático y las técnicas de diseño y análisis. Las aplicaciones eran numerosas: amplificadores en sistemas telefónicos, el sistema de distribución de plantas eléctricas, estabilización de aviones, mecanismos eléctricos para la industria papelera, química, del petróleo y del acero, etc. De este modo fueron surgiendo gradualmente nuevos y sólidos conceptos y para finales de esa década se contaba ya con dos métodos emergentes pero diferenciados: un primer método basado en la utilización de ecuaciones diferenciales y un método frecuencial basado en el análisis de la relación entre la amplitud y fase de la entrada ("input") y salida ("output"). Ya para entonces las instituciones comenzaban a tomar conciencia de la relevancia de la disciplina del control automático. Era el caso, por ejemplo, de la ASME (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos) de EEUU y de la IEE (Institución de Ingenieros Eléctricos) Británica. Durante la Segunda Guerra Mundial y los años que la siguieron, los ingenieros y científicos tuvieron que afinar su experiencia en los mecanismos de control de seguimiento de aviones y de los proyectiles antiaéreos y en el diseño de baterías antiaéreas. Esto supuso un desarrollo aún más importante de los métodos frecuenciales.

A partir de 1960, todo lo que acabamos de describir comenzó a conocerse como la Teoría del Control "clásica". En la década de los 60 comienza una nueva era en la que se pretende hacer frente a algo que se había puesto de manifiesto durante la guerra: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real puesto que los sistemas reales son no-lineales y están sujetos frecuentemente a perturbaciones ruidosas, no deterministas. Las contribuciones de R. Bellman (programación dinámica), de R. Kalman (filtrado y análisis algebraico de problemas de control) en los Estados Unidos y de L. Pontryagin (Principio del máximo en el control óptimo no-lineal) en la Unión Soviética establecieron los pilares fundamentales de la investigación en Teoría del Control de las últimas décadas.

Hemos comentado aquí los orígenes y algunos hitos históricos de la Teoría del Control que justifican plenamente su reconocimiento como disciplina con nombre propio y su denominación de Ingeniería del Control. Pero cualquier persona familiarizada con las Matemáticas habrá adivinado entre líneas que éstas también han sido protagonistas de excepción

de esta historia. En efecto, tal y como mencionábamos anteriormente, a finales de los años 30 ya se adivinaban dos modos de abordar los problemas de control. Uno, pasaba por la utilización de las ecuaciones diferenciales y, por lo tanto, los desarrollos matemáticos notables que se habían producido en este terreno en los siglos XVIII y XIX de la mano de los científicos más célebres de la historia jugaban un papel central. El otro, basado en el análisis frecuencial, sería impensable sin la utilización de las técnicas desarrolladas por el genial matemático francés Joseph Fourier.

De ahí que la Teoría del Control permita dos interpretaciones: una desde el punto de vista de la Ingeniería y otra más Matemática. En la práctica, obviamente, no existen fronteras claras ni mucho menos y la Teoría del Control es precisamente una de las áreas de la Ciencia donde las Matemáticas y el mundo de la tecnología se encuentran de manera más fructuosa.

El papel de las Matemáticas no ha hecho más que crecer en las últimas décadas en el mundo del Control. Como decíamos antes, a partir de los 60 se reconoce la necesidad de adentrarse en el mundo de lo no-lineal y de lo no determinista. Esto explica esa imperiosa necesidad de utilizar cada vez más las Matemáticas para desentrañar los misterios del control de sistemas.

Tal y como quedará puesto de manifiesto a lo largo de estas notas, la Teoría del Control y el Cálculo de Variaciones tienen raíces comunes e, incluso, algunas veces son disciplinas difíciles de distinguir. La historia del Cálculo de Variaciones está también repleta de grandes "hazañas" matemáticas. Como ya mencionamos anteriormente, la comprensión de que el camino más corto entre dos puntos es el rectilíneo puede considerarse el punto de partida del Cálculo de Variaciones. En el siglo I de nuestra era, Héron de Alejandría en su obra *La Catoptrique* mostró que la ley de reflexión de la luz (ángulo de incidencia igual al de reflexión) puede deducirse de un principio variacional simple que garantiza que la luz sigue el camino más corto. En el siglo XVII, Fermat generalizó la observación de Héron y formuló el "principio del tiempo mínimo", según el cual, la luz en un medio de velocidad variable sigue el camino que garantiza el tiempo mínimo de recorrido. Leibniz y Huygens mostraron que la ley de Snell de la refracción se puede obtener a partir del principio de Fermat. En 1691, Jean Bernoulli probó que la catenaria es la curva que proporciona la configuración de una curva de longitud dada y de densidad de masa constante cuyos extremos están fijos. El problema del baticrono, formulado por el mismo sabio en 1696, es equivalente

al de hallar los rayos de luz en el semiplano superior $y \geq 0$ cuando la velocidad de la luz c esta dada por la fórmula $c(x, y) = \sqrt{y}$. J. Bernoulli probó en 1697 que la solución viene dada por la cicloide.⁵

R. Kalman, uno de los grandes protagonistas de la Teoría del Control moderna, en su artículo de 1974⁶ señalaba que, en el futuro, los avances en la Teoría del Control y la Optimización de sistemas complejos vendrían de la mano de progresos matemáticos más que de los tecnológicos. *Hoy en día es tan fuerte el impulso de las nuevas tecnologías que es un tanto arriesgado sostener dicha afirmación.* Lo que sí se puede garantizar es que un avance sustancial en Teoría del Control exige de esfuerzos tanto en el ámbito de la teoría matemática correspondiente como de las tecnologías necesarias para implementar nuevas y más eficientes y robustas estrategias de control.

Cabe preguntarse si una disciplina como la Teoría del Control, con un pasado tan rico, y que cuenta con tal diversidad de resultados relevantes, está ya cerrada y conclusa. Nada más lejos de la realidad. El incesante avance de las nuevas tecnologías y el progreso de nuestra sociedad no hacen más que aumentar el número de ámbitos en los que la Teoría del Control es necesaria y de plantear problemas matemáticos nuevos y estimulantes.

En estas notas no pretendemos, ni mucho menos, hacer un repaso exhaustivo de la Teoría del Control ni presentar el estado del arte en el campo. Se trata de una disciplina tan rica que esta tarea excede con creces las dimensiones de este trabajo. Los lectores interesados podrán estudiar más sobre estos temas a través de la bibliografía seleccionada que presentamos al final del artículo.

En este artículo nos limitaremos, por tanto, a presentar algunos aspectos históricos, a describir algunos resultados que han jugado un papel central en el desarrollo de la Teoría y a comentar algunos avances recientes. La elección de los temas es, sin duda alguna, arbitraria y con certeza condicionada por los gustos del autor. Confiamos, sin embargo, en que los problemas elegidos permitan transmitir la riqueza y el vigor

⁵El lector interesado por estas cuestiones históricas podrá consultar HAIRER, E. y WANNER, G. *Analysis by its History. Undergraduate Texts in Mathematics.* Reading in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1996; o el artículo SUSSMANN, H.J. "Résultats récents sur les courbes optimales". *Journée Annuelle de la Société Mathématique de France.* Junio de 2000. (<http://math.rutgers.edu/~sussmann>)

⁶KALMAN, R.E. "Optimization, mathematical theory of, control theory". En *Encyclopaedia Britannica.* Fifteenth ed, Londres, 1974. Págs. 636-638.

de la disciplina. Concluiremos mencionando algunos retos y problemas que se nos presenten en el inmediato futuro.

El resto de estas notas está organizado del siguiente modo. En la sección 2, presentamos brevemente algunas aplicaciones comunes de la Teoría del Control. En la sección 3, en el marco de un modelo matemático simple, presentamos los problemas del control óptimo y la controlabilidad, comentando sus relaciones y diferencias. En la sección 4, ilustraremos algunas de las dificultades que la gran complejidad de los sistemas de la naturaleza y de la tecnología entrañan a la hora de abordar su control. En la sección 5, introduciremos algunas de las herramientas básicas del control de sistemas analizando el control de un péndulo. En la sección 6, presentaremos uno de los resultados más básicos e importantes: La caracterización de los sistemas de coeficientes constantes controlables en dimensión finita. En la sección 7, abordaremos la extensión de este resultado al marco no-lineal mediante Álgebras de Lie y su aplicación al problema del aparcamiento de un vehículo. En la sección 8, analizaremos algunos aspectos básicos de la optimización como son la programación lineal, la convexidad y la dualidad. En la sección 9, describiremos brevemente el problema del control molecular mediante tecnología láser, lo cual nos permitirá presentar las Técnicas de Análisis Espectral y de Fourier en el control de sistemas en dimensión infinita gobernados por Ecuaciones en Derivadas Parciales. La sección 10 está dedicada a la Barrera del Támesis, una de las obras más modernas de Ingeniería diseñada para evitar inundaciones en Londres y que consituye uno de los grandes éxitos de la Ingeniería del Control en materia de protección ambiental.

Por último, en la sección 11, citaremos algunos ámbitos de la Sociedad, Ciencia y Tecnología en los que la Teoría del Control habrá de jugar un papel importante en los próximos años. Concluimos las notas con una Bibliografía seleccionada pero extensa que puede ser de utilidad a aquellos lectores que deseen profundizar en algunos de estos temas y otros aspectos de la Teoría del Control.

A lo largo del período de preparación de estas notas he contado con la colaboración y ayuda mediante sugerencias, referencias, aclaraciones históricas o de algunos conceptos de diversos colegas a los que agradezco sinceramente su ayuda y buena disposición. En particular me gustaría agradecer la ayuda recibida de E. Casas, J. Duoandikoetxea, J. Lagnese, C. LeBris, J.L. Lions, S. Marcus, J.P. Puel, R. Rodríguez del Río, P. Rouchon, H.J. Sussmann y P. Zufiria.

2. ALGUNAS APLICACIONES COMUNES

Son numerosas las aplicaciones de la Teoría del Control tanto en la vida diaria como en los procesos tecnológicos e industriales más sofisticados. En el libro editado por W. S. Levine⁷, se recogen un buen número de ellas.

Algunas son tan simples como el mecanismo de funcionamiento de la cisterna de nuestro cuarto de baño. Son muchas las variantes (existen patentes que datan ya del año 1886, tal y como puede verse en el artículo de G. Le Tallec⁸), pero todas ellas funcionan sobre los mismos principios básicos. Lo que es más sorprendente es que en un mecanismo tan simple y cotidiano encontremos ya algunos de los elementos básicos de todos los procesos de control. Efectivamente, la cisterna está dotada de válvulas reguladoras, de mecanismos que desencadenan el proceso de control, de mecanismos de feedback que en función del nivel de agua captado por los sensores suministra más o menos agua al depósito y mecanismos que, en caso de algún fallo en el proceso, eviten las siempre tan desagradables inundaciones.

Los sistemas de calefacción, ventilación y de aire acondicionado en los grandes edificios son procesos a gran escala consistentes en la interconexión de subsistemas termo-fluidos y electromecánicos. El objetivo de estos sistemas en los grandes centros comerciales es mantener un ambiente confortable en su interior y una buena calidad del aire para sus ocupantes en cualquier circunstancia, con un costo operacional bajo y con una alta fiabilidad.

La importancia de estos sistemas de control es evidente tanto desde el punto de vista del impacto en la economía y el medio ambiente, como en la salud de sus ocupantes.

Antes de diseñar un sistema de control para un proceso es imprescindible entender cómo funciona. Estos edificios están dotados de una planta central que proporciona aire o agua caliente a diversas unidades periféricas. Éstas, a su vez, proporcionan aire acondicionado en distintas zonas de características y tamaños diversos. Frecuentemente, paredes y muros separan a las distintas zonas y en algunas de ellas, incluso en invierno, a causa de sus condiciones de aislamiento y por la gran presencia de público, es imprescindible proceder a su enfriamiento. Todo esto hace

⁷LEVINE, W. S. *Control System Applications*. CRC Press. Boca Raton (E.E.U.U.), 2000.

⁸LE TALLEC, G. "Domain decomposition methods in computational mechanics". *Computational Mechanics Advances*, 1. 1994. Pág. 4.

que el sistema en su globalidad sea sumamente complejo y dotado de diversos mecanismos que incluyen sensores, actuadores, intercambiadores, etc. Podemos pensar que se trata de una cisterna muy compleja y evolucionada.

Hemos hablado aquí de los sistemas de calefacción y refrigeración de grandes edificios. No hemos de olvidar a su antecesor: el termostato, que regula la temperatura en casa. Ni que decir tiene que todos estos sistemas son sumamente importantes tanto en lo que respecta al ahorro energético, como al respeto al medio ambiente y a la salud de sus habitantes.

Sería innumerable la lista de ámbitos industriales en los que la Teoría del Control interviene de manera decisiva. Cabe mencionar, por ejemplo, el control del pH en las reacciones químicas, la industria papelera, la industria automovilística, seguridad nuclear, defensa, etc. Por ejemplo, en el caso de la producción de papel, se trata de un proceso a gran escala, fuertemente no lineal y estocástico y dominado por los efectos de retardo. No se trata de un sistema lineal, invariante en el tiempo, sino más bien de un sistema caótico.

El control del caos es un tema de gran actualidad. Los puntos de vista son a veces duales o incluso contrapuestos. La naturaleza caótica de un sistema puede ser un serio obstáculo para su control pero también puede convertirse en un aliado. Por ejemplo, las impresionantes piruetas a las que estamos acostumbrados en las trayectorias de aviones de combate, están basadas en el control a lo largo de trayectorias inestables. Es, sin duda, sumamente difícil controlar un vehículo de este tipo. Pero las posibilidades que se le presentan a un piloto experto son muy diversas e insospechadas. Precisamente en el campo de la aeronáutica, el control de la turbulencia juega un papel fundamental⁹.

Hablando de los vehículos de uso común, el control de mecanismos de automoción se encuentra frecuentemente ante requerimientos diversos que, a veces, pueden entrar en conflicto. Se trata de optimizar el consumo de combustible, proporcionando a su vez, rendimientos cada vez más altos y de modo que los vehículos sean fáciles de manejar y seguros. Una de las mayores diferencias entre el automóvil de nuestros días en relación a los existentes hace dos o tres décadas, reside, precisamente, en los

⁹El lector interesado podrá consultar MOIN, P. y BEWLEY, Th. "Feedback control of turbulence". *Mechanics USA 1994*, A.S. Kobayashi ed. *Appl. Mech. Rev.*, 47 (6), 1994. Págs. S3-S13, para una descripción del estado del arte en las técnicas de control activo en este ámbito.

mecanismos digitales de control basados en el uso de microprocesadores que hoy incorporan. En este ámbito cabe, por ejemplo, mencionar los mecanismos antibloqueo de los que los frenos de los vehículos están hoy en día dotados. Lo mismo puede decirse de los aviones. Sin embargo, en este último caso, también son necesarios los mecanismos de control para controlar su posición y trayectoria.

Las estaciones espaciales que incorporan plataformas, reflectores ópticos de grandes dimensiones, sistemas de comunicación mediante satélites, etc., son ejemplos aún más sofisticados pero que van a ser cada vez más frecuentes y relevantes.

El control de robots, desde los más simples, hasta los bípedos que reproducen la capacidad locomotriz del ser humano, es otro de los temas que atrae buena parte de la atención de la Teoría del Control que se desarrolla en nuestros días. El lector interesado puede, por ejemplo, consultar la página web del INRIA (Francia) donde encontrará una presentación e imágenes del robot bípedo antropomórfico BIP2000. Otro ejemplo del que hemos tenido noticias recientemente, es el del vehículo diseñado por el CSIC que viaja sin necesidad de conductor a través de sofisticados mecanismos de control automático.

Otro de los mecanismos que se ha convertido en un habitual de nuestros hogares es el de los lectores de discos compactos. Este elemento indispensable de nuestra cadena de música es un mecanismo óptico de descodificación que reproduce una señal acústica de alta fidelidad a partir de una señal codificada grabada en un conducto espiral implantado en el disco. En estos dispositivos uno de los retos más importantes es obtener mayores velocidades de rotación que permitan una lectura más rápida pero sin que eso afecte a la estabilidad del disco. Los mecanismos de control propios de estos dispositivos han de ser aún mucho más robustos cuando se trata de equipos portátiles. Los avances han sido sin duda notables desde aquellos primeros gramófonos de Edison dotados de mecanismos de bolas para mantener estable la velocidad de giro del disco.

Seguimos hablando de sistemas sofisticados. Pero si observamos el funcionamiento del mecanismo de apertura y cierre de la puerta de un garaje, veremos que, también ahí, la Teoría del Control está presente.

Las redes de generación y suministro eléctrico son, sin duda alguna, otra de las aplicaciones más comunes de la Teoría del Control y que más afectan nuestra vida cotidiana. Basta pensar en lo incómodos que

pueden resultar los apagones eléctricos para darse cuenta de ello...

Antes hemos mencionado alguno de los ámbitos de aplicación de la Teoría del Control que puede ser importante para la salud del ser humano. A este respecto no cabe olvidar las crecientes aplicaciones en la medicina actual que van desde los corazones artificiales a los mecanismos de suministro de insulina.

El número de aplicaciones que podrían citarse es impresionante. Creemos, sin embargo, que éstas, junto con otras que citaremos a lo largo del trabajo, convencerán al lector de la ubicuidad de los mecanismos de control en el mundo que nos rodea. La Teoría Matemática subyacente es, me atrevería a decir, más impresionante aún. Obviamente, en este artículo no haremos más que presentar algunos de los elementos más simples de la misma. En particular, describiremos el problema del control de un péndulo (sección 5), de un automóvil (sección 7), de algunos procesos que intervienen en el diseño molecular (sección 9) y de algunos problemas relacionados con el medio ambiente (sección 10)¹⁰.

3. CONTROLABILIDAD *VERSUS* OPTIMIZACIÓN

De manera general, podría decirse que el objetivo central de la Teoría del Control es proporcionar estrategias para conducir un proceso a un objetivo deseado y/o prescrito. Tareas tales como la colocación de un satélite en la órbita, la reducción del ruido en los vehículos de transporte o la estabilización de estructuras, son problemas propios de la Teoría del Control.

Tanto si adoptamos un punto de vista frecuencial como si optamos por modelizar el fenómeno en cuestión a través de ecuaciones diferenciales, la cuestión acaba siendo, por tanto, conducir el *estado*, la variable que nos interesa, al objetivo prefijado mediante la elección de un mecanismo de *control* adecuado.

Existen, sin embargo, dos matices que pueden diferenciar en la práctica de un modo significativo los problemas que habremos de afrontar. En los problemas de *controlabilidad* nos interesa descifrar si el objetivo prescrito puede efectivamente alcanzarse de manera exacta y, si esta cuestión

¹⁰El lector interesado en una introducción a las técnicas matemáticas básicas en la Ingeniería del Control y sus aplicaciones más comunes, podrá consultar los libros DORF, R. C. *Sistemas modernos de control*. Addison Wesley Iberoamericana. México D.F., 1989; y OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Hispanoamericana. México D.F., 1998.

admite una respuesta afirmativa, cuál es el tiempo mínimo en el que esto es posible, cuál es el control menos costoso, etc.

Cuando abordamos el problema desde el punto de vista de la Optimización o Control Óptimo, la cuestión se plantea desde otra perspectiva: con independencia de que el problema de la controlabilidad admita una respuesta afirmativa o negativa, buscamos un buen control, que nos aproxime lo más posible al objetivo prescrito y, eso sí, manteniendo el control dentro de los márgenes de costo admisibles.

Este segundo constituye aparentemente un planteamiento más modesto puesto que se renuncia a la "búsqueda de la perfección". Pero se trata de un punto de vista sumamente realista. En la práctica, este segundo planteamiento puede proporcionar resultados muy satisfactorios y esto mediante técnicas matemáticas menos sofisticadas.

Pongamos un ejemplo sobre el que cualquier persona familiarizada con la resolución de sistemas lineales debería poder reflexionar.

En este ejemplo, el estado es simplemente un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n y éste está gobernado por la ecuación de estado

$$Ax = b \quad (3.1)$$

donde A es una matriz cuadrada $n \times n$. Para simplificar el problema supongamos que A es no singular o incluso simétrica, definida positiva, etc. El vector b que aparece en el segundo miembro de la ecuación es el control del que disponemos. La ecuación (3.1) es, pues, la *ecuación de estado* que describe el modo en que el control b actúa sobre el estado x . Obviamente, como el sistema en cuestión es inversible, tenemos que su única solución es $x = A^{-1}b$, pero no deseamos hacer uso de este tipo de información pues, en la práctica, la ecuación de estado no es fácil de resolver y/o invertir.

Supongamos ahora que nuestro objetivo es conseguir que el estado x satisfaga la siguiente condición: La primera componente del estado, x_1 , ha de coincidir con un valor prescrito x_1^* . Es decir, imponemos la condición adicional

$$x_1 = x_1^*. \quad (3.2)$$

Este tipo de requerimiento, en las aplicaciones prácticas, puede traducir una exigencia a nivel del diseño de un mecanismo, o de posicionamiento de un objeto, por ejemplo.

El problema de control se reduce entonces a *buscar* $b \in \mathbb{R}^n$ de modo que la solución de (3.1) satisfaga (3.2). Esto es evidentemente posible. Basta, por ejemplo, imponer que $x = (x_1^*, 0, \dots, 0)$ y tomar como b el vector resultante de la operación Ax . Pero este procedimiento, basado en el diseño directo del estado que realice el objetivo deseado sin necesidad de buscar previamente el control, en la práctica, es frecuentemente irrealizable. En efecto, en los problemas reales, hemos de elegir primero el control y entonces, el estado viene dado como solución de la ecuación de estado o, si se quiere, como la respuesta del sistema al control introducido.

El problema de control propuesto es, por tanto, trivial. Disponemos de tantos controles (las n componentes de b) como de componentes del estado a controlar o incluso de más, pues, en este caso, sólo pretendíamos controlar la primera componente x_1 .

¿Pero qué ocurre cuando vamos disminuyendo el margen de maniobra del control? ¿Qué ocurre, por ejemplo, si b_1, \dots, b_{n-1} están fijos y sólo disponemos del parámetro b_n para controlar el sistema?

Desde un punto de vista matemático, la cuestión se formula del modo siguiente. En esta ocasión

$$Ax = c + \tilde{b} \quad (3.3)$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo dado y \tilde{b} un vector columna de componentes $(0, \dots, 0, b_n)$, es decir, $\tilde{b} = b_n e$, donde e es el vector unitario $(0, \dots, 1)$. El problema de la controlabilidad consiste entonces en estudiar si existe una elección adecuada de b_n que garantice que la solución x de (3.3) satisface (3.2).

La cuestión es ahora mucho menos obvia, pero en este caso tan simple no es difícil resolverla. La solución x de (3.3) se puede descomponer de la siguiente forma

$$x = y + z \quad (3.4)$$

donde

$$y = A^{-1}c \quad (3.5)$$

y z satisface

$$Az = b_n e; \quad \text{es decir, } z = b_n z^*, \quad \text{con } z^* = A^{-1}e. \quad (3.6)$$

Si queremos poder garantizar que la primera componente x_1 de las soluciones x de (3.3) barre todo \mathbb{R} cuando b_n varía en \mathbb{R} , tal y como habíamos exigido en (3.2), es entonces necesario y suficiente que la primera componente z_1^* del vector $A^{-1}e$ que interviene en (3.6) sea no nula.

Tenemos de este modo una respuesta precisa al problema de controlabilidad planteado: la controlabilidad (la posibilidad de elegir $b = (b_1, \dots, b_n)$ de modo que la solución x de (3.1) satisfaga $x_1 = x_1^*$ para un valor de x_1^* arbitrario prescrito) se cumple si y sólo si la primera componente de $A^{-1}e$ es no nula.

Conviene subrayar que, cuando la primera componente de $A^{-1}e$ se anula, la primera componente z_1 de z es nula sea cual sea b_n y, por lo tanto, con independencia del valor elegido para el control b_n , la primera componente x_1 de la solución x de (3.3) coincide con la primera componente de y . Por tanto, en este caso degenerado, la primera componente x_1 de x es *insensible al control*. El conjunto de valores que x_1 recorre cuando b_n varía en toda la recta se reduce a un único punto: y_1 .

De este modo empezamos a percibir algunos de los aspectos que se plantean de forma sistemática en los problemas de control: Sólo es posible dar una respuesta afirmativa cuando el control o los controles de los que se dispone alcanzan todas las componentes del estado. Dicho de otro modo, cuando alguna de las componentes del estado es insensible a la acción del control, nos encontramos ante una falta de controlabilidad. El estado permanece siempre encerrado en un espacio de dimensión menor que lo exigido por el problema de controlabilidad.

Antes hemos utilizado la palabra “degenerado” para adjetivar el caso en que la primera componente de $A^{-1}e$ es cero y hay por tanto ausencia de controlabilidad. Se trata, efectivamente, de un caso excepcional: la probabilidad de que un número elegido al azar sea cero en la recta real es nula.

¿Pero es realmente tan improbable que en la práctica nos encontremos ante estas situaciones degeneradas en las que se pierde la controlabilidad?

En cualquier caso, es fácil imaginar que en el caso de sistemas complejos puede resultar muy difícil determinar *a priori* cuándo hay o no componentes insensibles a la acción del control. De hecho, en la práctica, diseñar una estrategia de control que garantice que no estamos en una situación degenerada en la que se produzca una falta de controlabilidad

no es tarea fácil. Volveremos sobre este tema en la siguiente sección.

Si adoptamos el punto de vista de la *optimización* o del *control óptimo*, estas dificultades desaparecen.

Supongamos, por ejemplo, que el valor $k > 0$ es una cota razonable del control b_n que en la práctica podemos implementar. En este caso, la mejor respuesta posible al problema de control se obtendría minimizando el funcional cuadrático

$$J(b_n) = |x_1 - x_1^*|^2 \quad (3.7)$$

en el intervalo cerrado y acotado

$$I_k = [-k, k]. \quad (3.8)$$

Como J depende continuamente de b_n , se deduce inmediatamente la existencia de un control óptimo $b_n^k \in I_k$ que minimiza la distancia entre la primera componente de la solución x_1 y el objetivo x_1^* .

Vemos, por tanto, que el problema de control óptimo se resuelve de manera mucho más simple.

Este punto de vista es sumamente natural y acorde al sentido común. Ya L. Euler decía:

“El universo es de lo más perfecto y está diseñado por el creador más sabio. Nada ocurrirá sin que destaque, de alguna manera, la presencia de una regla máxima o mínima.”

Pero analicemos con un poco más de detalle las relaciones que se presentan en estos dos planteamientos. Se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Si la propiedad de controlabilidad se cumple, para k suficientemente grande, la solución al problema de control óptimo producirá la solución exacta buscada para el problema de controlabilidad.
- Cuando el objetivo x_1^* no es alcanzable, el problema de optimización nos proporciona, de todas maneras, la mejor solución posible en el rango $[-k, k]$ de controles admisibles.

- La resolución del problema de optimización y el análisis de la evolución del mínimo del funcional J en el intervalo I_k a medida que k crece puede ser de hecho un test para la propiedad de la controlabilidad. Cuando este mínimo se estabiliza en torno a una constante positiva, a medida que k aumenta, podemos sospechar, de manera fundada, que estamos frente a un caso en que el objetivo x_1^* no es alcanzable y que nos hemos situado ya a la mínima distancia posible del objetivo marcado.

En vista de todas estas consideraciones cabe entonces preguntarse ¿Es realmente indispensable estudiar el problema de la controlabilidad o podemos contentarnos con el punto de vista de la optimización?

La respuesta depende del grado de precisión con que necesitemos calcular el control. Pero hay muchos casos en los que es indispensable que el control no nos conduzca a un estado alejado del objetivo prescrito. Cabe, por ejemplo, pensar en las tecnologías utilizadas para la estabilización de edificios en caso de terremotos. No sería deseable que el margen de error permitiese el derrumbe de la construcción. Todos somos también conscientes de la importancia de la precisión en el control de las expediciones espaciales, en la aplicación de las técnicas de control tan extendidas en medicina y de muchos otros ejemplos en los que el análisis que hemos presentado del problema de optimización parece, a todas luces, insuficiente.

4. CONTROL Y COMPLEJIDAD

Como ya hemos dicho anteriormente, los sistemas que en la práctica hemos de controlar son complejos. Pensemos, por ejemplo, en la red internet o en la infinidad de componentes que se acoplan en cualquier obra tecnológica; un automóvil quizás.

El ejemplo matricial mostrado en el apartado anterior no deja de ser un simple juguete ante la tremenda complejidad de estos sistemas. Pero ya en él vemos que las diferentes componentes del sistema no siempre son sensibles a la presencia del control.

Esta complejidad no es exclusiva del momento histórico que vivimos. Todo lo que nos rodea y ha existido, incluso antes de que el ser humano habitase sobre el planeta Tierra, es intrínsecamente complejo. A nadie se le escapa la complejidad del universo y de su proceso de formación, del de la aparición de la vida o de cualquier otro fenómeno que

podamos observar en la naturaleza. Recientemente todos los medios de comunicación se han hecho eco de un avance histórico en la evolución de la humanidad: la descodificación completa del genoma humano. Pero, a pesar de la importancia de este avance, éste no es más que un primer paso que nos muestra la complejidad del lenguaje en el que está escrita la vida.

En este punto cabe recordar la anécdota siguiente. En 1256, Alfonso X El Sabio, al refugiarse en el Alcázar de Segovia de una violenta tormenta, exclamó:

“Si el Señor Todo Poderoso me hubiese consultado en el momento de la creación del mundo, yo habría recomendado un sistema más simple.”

La complejidad no es una característica exclusiva de los problemas de control, sino que hoy en día es inherente a cualquier ámbito de la Ciencia y de la Tecnología.

En efecto, los enormes avances que se han producido en Informática permiten que hoy en día se utilice la simulación numérica en cualquier fase del desarrollo de un proyecto industrial: tanto en la de concepción, como en las de desarrollo o calificación. Por otra parte, el creciente éxito de la simulación numérica frente a los métodos tradicionales de la Ingeniería radica en que proporciona ahorros sustanciales en los ensayos y permite que éstos se realicen a escala real y sin las restricciones asociadas a la instrumentación.

Este nuevo método científico, basado en una combinación de las Matemáticas que permiten representar y entender las realidades físicas y la Informática que proporciona instrumentos de cálculo, está cada vez más consolidado. Conviene aquí recordar que la invención del transistor en 1947 en los Laboratorios Bell es lo que hizo posible el desarrollo de los ordenadores y, por tanto, en definitiva, el surgimiento de este nuevo método. El resto de las Ciencias no son ajenas a este método evidentemente, puesto que los modelos Matemáticos surgen precisamente de la Física, Química, Mecánica, Biología, Economía, etc.

Hay, sin embargo, una dificultad que hoy por hoy supone un verdadero reto: el tratamiento de fenómenos múltiples que a su vez, por acoplamiento, pueden dar lugar a nuevos fenómenos, inesperados y desconocidos. Los fluidos reactivos, que intervienen por ejemplo en la propulsión de naves espaciales, son un buen ejemplo.

En estos casos no queda más remedio que realizar un estudio modular, analizando y simulando numéricamente cada elemento por separado, para después ensamblar los resultados mediante códigos multifísicos. Pero esta última es una tarea sumamente compleja en la que aún queda mucho por hacer. Por poner un ejemplo matemático, el lector podrá pensar en las dificultades que entraña ensamblar un método de diferencias finitas con otro de elementos finitos en un modelo híbrido parabólico-hiperbólico tan común en la interacción fluido-estructura.

Los ejemplos relevantes de estos sistemas complejos donde el acoplamiento de varios fenómenos distintos puede jugar un papel determinante son muy diversos. Hemos mencionado los fluidos reactivos en combustión tan importantes en la propulsión de naves espaciales. En este ámbito de la tecnología aeroespacial cabe también mencionar la interacción fluido-estructura tan importante en el pilotaje de naves espaciales a causa de las vibraciones que en las mismas produce la combustión. Otros ejemplos importantes son los de la previsión meteorológica y de los cambios climáticos, donde la interacción entre la atmósfera, el océano, la vegetación, etcétera, juega un papel clave.

El lector interesado podrá consultar el artículo de J. Achache y A. Bensoussan¹¹ para una descripción más detallada de las perspectivas de la simulación numérica en los ámbitos de la tecnología espacial, la climatología y la meteorología.

Por lo tanto, la resolución de cualquier problema relevante exige identificar subsistemas que interactúen de una manera susceptible de ser descrita con cierta facilidad.

Volviendo a los problemas de control, en el diseño de sistemas de control automático, la utilización de las funciones de transferencia ha permitido describir las interacciones entre los actuadores, sensores y controladores de un sistema. Sin embargo, hoy en día, nos encontramos ante el reto de descomponer los complejos sistemas a los que hacemos frente en subsistemas mayores. No existe ninguna teoría definitiva a este respecto, ni mucho menos, pero se trata, sin duda alguna, de un campo a explorar en el que todos los esfuerzos y aportaciones son bienvenidos. En este sentido, nada se puede excluir, y esto devuelve la razón a Wiener. Las máquinas se orientan cada vez más al cálculo simbólico,

¹¹ACHACE, J. y BENSOUSSAN, A. "Assimilation, simulation et prevision". *MA-TAPLI*, 60. 1999. Págs. 25-34.

paralelo, etc. y emulan de manera creciente al ser humano. Términos como inteligencia artificial o redes neuronales son hoy en día comunes y están plenamente justificados. ¿Acaso la capacidad del cerebro humano de coordinar el funcionamiento del organismo y de sus diversas componentes no es digna de admiración y de ser emulada?

La complejidad del mundo que nos rodea nos obliga, como decíamos, a adoptar métodos de descomposición para poder analizarlo con más facilidad, pero también nos obliga a cambiar nuestro punto de vista sobre la modelización de los fenómenos. Los modelos han de considerarse como entidades que evolucionan para adaptarse a un mundo en el que la complejidad es creciente. Cada vez están más caducos debates del tipo “modelos discretos/modelos continuos” o “modelos deterministas/modelos discretos”. La necesidad de trabajar con modelos híbridos es cada vez mayor y la Teoría del Control no escapa a esta exigencia.

La Informática ha jugado un papel decisivo a la hora de hacer abordables estos sistemas complejos, de carácter híbrido. En efecto, hoy en día, los algoritmos iterativos y paralelos permiten estudiar problemas de gran complejidad en un tiempo realista.

Cada vez se exige más a los mecanismos de control. Uno de los valores más apreciados es su robustez de cara a su correcto funcionamiento en circunstancias adversas y a la imprevisibilidad y la incertidumbre del entorno. Un ejemplo relevante en este terreno es el de los métodos de control en los programas de pilotaje automático de naves espaciales. Estos han de estar diseñados para hacer frente a numerosas posibles incidencias: vibraciones de la nave causadas por problemas en la combustión y propulsión, extinción y encendido de los motores, vientos, etc.

El objetivo de esta sección no es, ni mucho menos, hacer frente a estas cuestiones de gran calado y que en buena medida, orientarán la evolución del pensamiento humano en el siglo que ahora iniciamos, sino, simplemente, describir algunas de las técnicas matemáticas existentes para hacer frente a la descomposición de grandes sistemas y hacerlos así más abordables.

En efecto, la teoría matemática está repleta de ideas que apuntan en la dirección de intentar abordar el análisis y el control de sistemas complejos a través de técnicas de descomposición o desacoplamiento. Citemos algunos ejemplos:

- **Resolución de sistemas lineales.**

Cuando el sistema lineal a resolver presenta una estructura hueca, por bloques, como ocurre frecuentemente al discretizar mediante diferencias o elementos finitos ecuaciones diferenciales, se utilizan métodos de resolución en los que se combinan técnicas propias de resolución del sistema global y de los subsistemas correspondientes a los bloques. El modo más habitual de hacerlo es construir preconditionadores a partir de la resolución de sistemas más pequeños, realizable en un solo procesador, para después abordar la resolución del sistema global a través de métodos iterativos y paralelizados.

- **Métodos multi-malla.**

Es muy frecuente, tanto en la resolución de sistemas lineales como en la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales, la utilización de las técnicas denominadas “multi-malla” en las que se distinguen las bajas y las altas frecuencias de las soluciones y cada una se analiza en el mallado correspondiente estableciendo a la vez mecanismos adecuados de acoplamiento y de paso de una malla a otra. No es difícil imaginar que un mallado, sea cual sea, es incapaz de capturar las oscilaciones que se producen a muy altas frecuencias del mismo modo que un reloj de pulsera común no permite medir milésimas de segundo.

- **Método de direcciones alternadas.**

Frecuentemente, las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) que surgen como modelos naturales en la Mecánica de Medios Continuos, Relativista, etc., son multidimensionales y habitualmente involucran varias variables espaciales además de la temporal. Los métodos numéricos de resolución reducen el problema al cálculo de la solución de un sistema, a menudo lineal, de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, el carácter multidimensional de los problemas en consideración hace que, frecuentemente, el tamaño de estos sistemas sea excesivo. Surge entonces una idea natural. Del mismo modo que un operador diferencial consiste en calcular derivadas parciales iteradas (para después combinarlas) o el Teorema de Fubini asegura que una integral multidimensional puede calcularse mediante sucesivas integrales en una variable, ¿Una EDP multidimensional no puede descomponerse o aproximarse mediante EDP en una sola dimensión espacial cuya aproximación numérica es mucho más simple?

Basta reflexionar un momento sobre las vibraciones de un cuerpo elástico o la evolución de los fluidos para darse cuenta de que esto

es, de entrada, imposible. En efecto, se trata de fenómenos genuinamente multidimensionales que no pueden describirse mediante ecuaciones en las que sólo interviene una variable espacial.

Pero el método de direcciones alternadas pone de algún modo remedio a este hecho y descompone la resolución del problema multidimensional en una secuencia de problemas unidimensionales iterados, reduciendo considerablemente el tiempo de cálculo.

Se trata de una variante más de esta idea general según la cual se pretende abordar la resolución de sistemas complejos mediante su descomposición en subsistemas más simples.

Se trata, sin embargo, de un método que está poco explorado desde el punto de vista del control. En efecto, si bien se dispone de resultados fiables que permiten garantizar cuándo este método proporciona una buena aproximación de la solución de un sistema dado, no se dispone de resultados definitivos sobre su utilización para el diseño de estrategias de control.

Estas técnicas de descomposición permiten subdividir el sistema en componentes de dimensión más pequeñas y de características más homogéneas. Esto, a su vez, permite elegir en el control de cada uno de los subsistemas obtenidos la técnica más adecuada. Pero no siempre es fácil entender las interacciones entre los diferentes subsistemas y cómo los controles utilizados en uno de ellos afectará el comportamiento de los demás.

Por otra parte, como ya hemos mencionado anteriormente, al abordar un problema de control desde un punto de vista matemático, tenemos que optar entre un modelo u otro o, incluso, elegir entre formularlo como un problema de controlabilidad o de control óptimo. Esto hace que el número y variedad de situaciones a las que tenemos que hacer frente sea muy grande.

Pero sea cual sea el punto de vista elegido y los resultados matemáticos obtenidos, con el objeto de hacer que éstos sean útiles e implementables, el ordenador habrá de intervenir en el proceso de control. Esencialmente, el ordenador nos habrá de permitir calcular una buena aproximación del control buscado a través de la resolución numérica de una discretización adecuada del problema de control. El control calculado numéricamente será el que en la práctica podrá ser implementado y utilizado en el proceso real en consideración.

Pero, a pesar del enorme avance que los métodos numéricos han experimentado en la segunda mitad del siglo XX, algunos problemas aún no han sido bien resueltos. Cabe mencionar, por ejemplo, el problema de la aproximación de ondas a altas frecuencias mediante métodos numéricos inspirados en los elementos finitos, como uno de los problemas abiertos más relevantes que se plantean en el terreno del Análisis Numérico, tal y como pone de manifiesto Zienkiewicz¹² en un reciente artículo recapitulativo.

Por otra parte, tal y como se indica en ese artículo, algunos de los modelos que se obtienen a través de discretaciones, por ejemplo mediante el método de elementos finitos, no sólo son relevantes en la medida en que proporcionan una aproximación del modelo continuo, sino que son en sí una manera de modelizar la realidad. En el mismo, el lector podrá encontrar una descripción de cómo el método de elementos finitos surgió a través de una interacción entre los dos puntos de vista (los que los utilizaban como modelos y los que lo hacían para aproximar EDP) hasta que se consolidó y reconoció ya como un método con nombre propio en 1960. En efecto, en el ámbito de la Ingeniería es habitual modelizar fenómenos continuos (vibraciones de estructuras, fluidos, etc.) a través de sistemas discretos basados en variantes más o menos sofisticadas del método de elementos finitos.

Por otra parte, la Teoría del Control de la que disponemos puede ser aplicada en ambos contextos, en el de los modelos continuos (escritos habitualmente en términos de ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales)) o en el de los discretos, ya sea porque hemos adoptado éstos como forma de modelizar la realidad o porque han sido obtenidos tras un proceso de aproximación numérica.

Estas cuestiones nos adentran en una problemática relevante desde el punto de vista de las aplicaciones y sumamente compleja desde una perspectiva matemática y que constituye aún un desafío para la Teoría del Control actual.

¿El diagrama

"Modelo/Discretización/Control"

es conmutativo?

En otras palabras, ¿se obtiene el mismo resultado si adoptamos cualquiera de las dos vías siguientes?

¹²ZIENKIEWIC, O.C. "Achievements and some unsolved problems of the finite element method". *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47. 2000. Págs. 9-28.

- Vía 1: Discretizamos el modelo y controlamos el modelo discreto como aproximación del modelo continuo. Es la vía:

modelo/discretización/control.

- Vía 2: Analizamos el problema de control del modelo continuo y caracterizamos el control del mismo mediante un Sistema de Optimalidad (conjunto de ecuaciones que caracterizan el control, es decir, el equivalente a las Ecuaciones de Euler-Lagrange en un problema del Cálculo de Variaciones). Posteriormente empleamos un método de discretización para aproximar la solución de este sistema.

Se trata de la vía:

modelo/control/discretización.

Estas dos vías no siempre dan los mismos resultados. Por ejemplo, tal y como se demuestra en el artículo de J. A. Infante y E. Zuazua¹³, la primera puede no dar los resultados buscados en problemas de vibraciones. Esto se debe al problema que mencionábamos antes relacionado con la dificultad de aproximar ondas a altas frecuencias.

Pero esta dificultad no es puramente numérica. En efecto, tal y como se indica en el artículo de Zienkiewicz¹⁴, muchos ingenieros adoptan modelos discretos en lugar de continuos para describir la dinámica del estado. Esto permite frecuentemente evitar todos los problemas derivados del análisis matemático de las EDP y, además, es acorde al sentido común según el cual una estructura continua puede entenderse como el resultado de acoplar un gran número de mini-estructuras rígidas articuladas. De este modo, el esquema numérico de aproximación de un modelo continuo puede también interpretarse como un modelo discreto aproximado válido para el análisis del problema en cuestión.

Este punto de vista basado en el análisis del control del modelo discreto, es decir, la vía "modelo/discretización/control", es correcto en procesos en los que la disipación inherente en los mismos amortigua de manera natural las componentes a altas frecuencias. Pero deja de serlo

¹³INFANTE, J. A. y ZUAZUA, E. "Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1 - d wave equation". *M²AN*, 33 (2). 1999. Págs. 407-438.

¹⁴ZIENKIEWIC, O.C. "Achievements and some unsolved problems of the finite element method". *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47. 2000. Págs. 9-28.

cuando hay perturbaciones no amortiguadas con la misma frecuencia de oscilación que el tamaño del mallado elegido en el modelo discreto.

En el artículo de E. Casas y M. Mateos¹⁵ se aborda con éxito esta cuestión en el marco de la aproximación mediante elementos finitos de problemas de control óptimo asociados a EDP elípticas y se prueba que los controles del sistema discretizado convergen a los del continuo cuando el paso del mallado tiende a cero.

La conmutatividad del esquema discretización-control es hoy en día un tema en el que hay todavía mucho que entender y no se dispone de resultados sistemáticos que permitan determinar la validez de una y otra vía en cada situación particular. Cuando optamos por discretizar el sistema antes de controlarlo, estamos eligiendo hacer uso del control en dimensión finita, mientras que, del otro modo, precisamos utilizar la teoría existente para EDP, también frecuentemente conocidos como Sistemas Distribuidos o Sistemas con Parámetros Distribuidos. La unificación de las teorías del control en dimensión finita e infinita es también un tema en el que aún queda mucho por hacer, si bien en buena medida es una tarea "imposible" tal y como lo es la unificación de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Hemos descrito algunas de las técnicas que se utilizan para descomponer sistemas complejos de modo que su análisis desde el punto de vista del control sea más tratable. Existen muchas otras que giran siempre en torno a la misma idea: identificar las componentes relevantes del sistema, aquellas con características diferenciadas, de modo que tratándolas previamente de manera separada podamos posteriormente acoplarlas y abordar el sistema en su conjunto. Entre ellas, cabe citar:

- **La descomposición de dominios:** Cuando el dominio (típicamente un abierto del espacio euclídeo n -dimensional, si bien también puede ser un conjunto donde se acoplan dominios de diferentes dimensiones) donde hemos de resolver el problema de control asociado a una EDP tiene una geometría compleja, es natural descomponerlo en subdominios de geometría más simple. La descomposición de dominios introduce un esquema iterativo en el que, resolviendo sucesivamente el problema en cada subdominio, nos vamos acercando a la solución global correcta. No se trata de una

¹⁵CASAS, E. y MATEOS, M. "Uniform Convergence of the FEM". *Applications to State Constrained Control Problems, Computational and applied Mathematics. Special issue in memory of Jacques-Louis Lions*. En vías de publicación.

idea reciente. Ya en el segundo volumen del libro de Courant y Hilbert¹⁶ podemos encontrar una descripción del método de direcciones alternadas de Schwarz. Existe una amplia literatura al respecto en lo que se refiere a la resolución de EDP.¹⁷ Sin embargo, los desarrollos en este terreno en lo relacionado con problemas de control son mucho más recientes y los resultados son mucho menos completos. No es difícil de imaginar, por ejemplo, la dificultad que entraña la resolución de problemas de control asociados a fenómenos de propagación a través del método de descomposición de dominios. En ellos, la respuesta al problema de control es típicamente dinámica, muy poco estática y, por tanto, los métodos de descomposición de dominios en los que se impone una elección "a priori" de la descomposición tienen dificultades adicionales para ser aplicados.

- **Desacoplamiento según el tipo de EDP:** En las clasificaciones más habituales de EDP se distinguen esencialmente las ecuaciones elípticas, las parabólicas y las hiperbólicas. Pero frecuentemente los sistemas que hemos de abordar en la práctica son más complejos y no obedecen a esta simple clasificación. Es el caso, por ejemplo, del sistema de la termoelasticidad que describe las vibraciones de un cuerpo elástico y sus cambios de temperatura. En este sistema están simultáneamente presentes componentes parabólicas e hiperbólicas y esto es relevante desde el punto de vista del control. El control de dicho sistema pasa por identificar adecuadamente las componentes parabólicas e hiperbólicas del mismo y establecer estrategias de control adecuadas para cada una de estas componentes. Esto puede hacerse mediante técnicas de desacoplamiento en las que, como su propio nombre indica, se desacoplan ambas componentes de modo que puedan ser tratadas separadamente atendiendo a las características propias de cada una de ellas y mediante las técnicas correspondientes. Pero, evidentemente, en vista de que ambas componentes están acopladas en el sistema original, el desacoplamiento no puede ser total y se consigue a base de introducir un error. El término de error resulta ser frecuentemente "compacto", lo cual indica que, esencialmente, se concentra en las bajas frecuencias pero que es despreciable para las altas. Con estas ideas puede establecerse la controlabilidad de sistemas en los que

¹⁶COURANT, R. y HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*. Vo. II. Interscience Publishers. New York, 1962.

¹⁷Cabe, por ejemplo, mencionar LE TALLEC, G. "Domain decomposition methods in computational mechanics". *Computational Mechanics Advances*, 1. 1994. Págs. 121-220.

coexisten diferentes tipos de EDP.¹⁸

5. CONTROL DEL PÉNDULO

Uno de los problemas más básicos que se plantea en robótica es el del control de un brazo rígido giratorio a través de un motor localizado en el extremo que lo conecta al resto de la estructura.

Suponiendo que toda la masa m esté localizada en el extremo libre, que la barra tenga longitud l e ignorando la fricción, gracias a la ley de Newton para los objetos que giran, obtenemos la ecuación

$$m\ddot{\theta}(t) + mg \sin \theta(t) = u(t), \quad (5.9)$$

donde $\theta = \theta(t)$ es el ángulo del brazo con respecto a la vertical medido en el sentido contrario a las agujas del reloj, g es la aceleración debida a la gravedad y u es el momento de torsión externo aplicado. El estado del sistema es en este caso $(\theta, \dot{\theta})$ mientras que u es el control.

Para simplificar el análisis suponemos que $m = g = 1$.

La posición estacionaria vertical ($\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$) es un punto de equilibrio en ausencia de control, es decir, con $u \equiv 0$. Pero, obviamente, es inestable. Analicemos el sistema en torno a dicha configuración con el objeto de compensar esta inestabilidad mediante el control u .

Teniendo en cuenta que $\sin \theta \sim \pi - \theta$ en torno a $\theta = \pi$, en una primera aproximación, el sistema linealizado correspondiente en la variable $\varphi = \theta - \pi$ puede escribirse en la forma

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u. \quad (5.10)$$

El objetivo es entonces conducir φ y $\dot{\varphi}$ a cero para datos iniciales pequeños y hacerlo lo más rápidamente posible y sin que el ángulo y la velocidad se hagan excesivamente grandes a lo largo de la trayectoria controlada.

Si bien se trata de un modelo sumamente simple, es un buen ejemplo de lo que frecuentemente ha de hacerse en muchos problemas de la industria y la tecnología.

¹⁸El lector interesado puede consultar ZUAZUA, E. "Controllability of the linear system of thermoelasticity". *J. Math. Pures Appl.*, 74. 1995. Págs. 303-346, para un análisis detallado del sistema de la termoelasticidad.

Ante este problema, la primera reacción que cabe es la siguiente: Cuando estamos a la izquierda de la vertical, es decir, cuando $\varphi = \theta - \pi > 0$, deseamos movernos hacia la derecha y entonces aplicamos un momento u negativo. Sin embargo, cuando $\varphi < 0$, tomamos $u > 0$.

Una posibilidad es entonces elegir el "feedback" proporcional

$$u = -\alpha\varphi \quad (5.11)$$

con $\alpha > 0$. Obtenemos así el sistema de ciclo cerrado

$$\ddot{\varphi} - \varphi + \alpha\varphi = 0 \quad (5.12)$$

cuyo polinomio característico es $z^2 + \alpha - 1 = 0$.

Analizando las raíces ($z = \pm i\sqrt{\alpha - 1}$) de dicho polinomio, vemos que las soluciones de esta ecuación diferencial son oscilantes cuando $\alpha > 1$ y que, cuando $\alpha < 1$, todas las soluciones, excepto aquellas en las que $\dot{\varphi}(0) = -\sqrt{1 - \alpha}\varphi(0)$, divergen a $\pm\infty$. Cuando $\alpha = 1$, cada punto en el que $\dot{\varphi} = 0$ es un estado de equilibrio del sistema.

Por tanto, en ninguno de los casos podemos garantizar que el sistema alcance la configuración buscada. Si bien hemos comprobado este hecho en el sistema linealizado, lo mismo ocurre en el modelo no-lineal. La explicación es la siguiente. Consideremos en primer lugar el caso $\alpha < 1$. Cuando $\varphi(0)$ es positiva y pequeña, para $\dot{\varphi}(0) = 0$, de la ecuación (5.12) se deduce que $\ddot{\varphi}(0) > 0$. Por tanto, $\dot{\varphi}$ y, consecuentemente, φ crecen y, por consiguiente, el péndulo se aleja de la posición vertical. Cuando $\alpha > 1$, el control actúa en la dirección correcta pero introduce excesiva inercia. La solución más natural es mantener $\alpha > 1$, pero introducir un nuevo término que frene la oscilación penalizando la velocidad. Obtenemos así el nuevo "feedback" proporcional-derivada:

$$u = -\alpha\varphi - \beta\dot{\varphi} \quad (5.13)$$

con $\alpha > 1$ y $\beta > 0$. De este modo, deducimos el nuevo sistema

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + (\alpha - 1)\varphi = 0, \quad (5.14)$$

cuyo polinomio característico es $z^2 + \beta z + \alpha - 1 = 0$, con raíces

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}. \quad (5.15)$$

Como la parte real de ambas raíces es negativa, todas las soluciones tienden a cero. Si además imponemos la condición

$$\beta^2 > 4(\alpha - 1), \quad (5.16)$$

lo hacen de forma monótona, sin oscilar.

A pesar de la simplicidad de este modelo, vemos ya en él, algunos aspectos recurrentes de la Teoría de Control:

- La linealización del sistema puede ser una buena manera de abordar su control, si bien los resultados obtenidos de este modo no tendrán más que una validez local en el sistema no-lineal original.
- Es posible obtener controles en forma de “feedback”, pero el efecto que éstos introducen en el sistema no siempre obedece a la más ingenua intuición sino que es preciso realizar un estudio cuidadoso de la estabilidad del sistema obtenido.
- Aumentando la disipación, podemos conseguir que desaparezcan las oscilaciones, tal y como se indicó en (5.16). Sin embargo, en este caso, se introducen trayectorias en las que la velocidad de convergencia es más lenta. En efecto, analizando (5.15) se observa que la elección de β que hace que la abscisa espectral σ , es decir, el máximo de las partes reales de las raíces del polinomio característico (5.14), sea mínima es cuando

$$\beta^2 = 4(\alpha - 1),$$

en cuyo caso su valor es

$$\sigma^* = -\sqrt{\alpha - 1}.$$

Al aumentar β es fácil comprobar que la raíz de (5.15) correspondiente al signo positivo es mayor:

$$\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} > -\sqrt{\alpha - 1}.$$

Este es el que se denomina fenómeno de *sobredisipación*.

La implementación de los controles (5.13) que acabamos de diseñar no es tan simple puesto que el cálculo de u exige el conocimiento de la

posición φ y de la velocidad $\dot{\varphi}$ en cada instante. Una alternativa interesante es evaluar φ y $\dot{\varphi}$ solamente en un conjunto discreto de instantes de tiempo

$$0, \delta, 2\delta, \dots, k\delta, \dots$$

y reajustar el control en cada uno de estos instantes. El control obtenido de este modo se mantiene constante durante el intervalo $[k\delta, k\delta + \delta]$.

Resolviendo el sistema (5.10), vemos que el resultado de aplicar un control constante v_k en el sistema durante el intervalo $[k\delta, k\delta + \delta]$ es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \varphi(k\delta + \delta) \\ \dot{\varphi}(k\delta + \delta) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi(k\delta) \\ \dot{\varphi}(k\delta) \end{pmatrix} + Bv_k,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\delta & \sinh\delta \\ \sinh\delta & \cosh\delta \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \cosh\delta - 1 \\ \sinh\delta \end{pmatrix}.$$

Obtenemos de este modo el sistema discreto

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k$$

siendo F el vector que hace que

$$v_k = Fx_k.$$

Es fundamental observar que si el vector F es tal que la matriz $A + BF$ es nilpotente, es decir,

$$[A + BF]^2 = 0,$$

entonces, en dos pasos habremos alcanzado el equilibrio en el que el sistema permanecerá indefinidamente. Un simple cálculo muestra que esta propiedad se cumple cuando $F = (f_1, f_2)$ con

$$f_1 = \frac{1 - 2\cosh\delta}{2(\cosh\delta - 1)}; f_2 = -\frac{1 + 2\cosh\delta}{2\sinh\delta}. \quad (5.17)$$

Obsérvese que la ventaja de la utilización de este tipo de controles es que se obtiene la estabilización completa del sistema en tiempo finito y no asintóticamente. Se trata de un *control digital* cuya robustez y la facilidad con que puede ser implementado y mantenido lo hacen sumamente útil.

Los controles digitales que acabamos de introducir son de algún modo semejantes a los controles *bang-bang* que presentamos a continuación.

Una vez fijado $\alpha > 1$, por ejemplo $\alpha = 2$, podemos suponer que

$$u = -2\varphi + v \quad (5.18)$$

de modo que el sistema (5.10) pueda escribirse en la forma

$$\ddot{\varphi} + \varphi = v. \quad (5.19)$$

Se trata de la ley de Newton para la vibración de un muelle.

En esta ocasión, buscamos controles por debajo de un nivel de coste admisible prefijado. Por ejemplo,

$$|v| \leq 1.$$

Se puede probar que el control de estas características que estabiliza el sistema en tiempo mínimo, el control óptimo, es necesariamente de la forma

$$v(t) = \text{sgn}(\eta(t)),$$

donde η es una solución de

$$\ddot{\eta} + \eta = 0.$$

Por tanto, el control sólo toma los valores ± 1 y basta con determinar los instantes en los que alterna entre uno y otro signo.

Para determinarlo, construimos las trayectorias que se obtienen con los controles extremales ± 1 , es decir, resolvemos los sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1. \end{cases}$$

Las soluciones son circunferencias concéntricas con centros en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente.

Se puede comprobar que el lugar geométrico de los puntos en los que el signo de control alterna es la unión de la semicircunferencia

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1, y < 0$$

junto con todas sus trasladadas de paso 1 a lo largo del semieje positivo de las x , junto con la semicircunferencia

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1, y > 0$$

y todas sus trasladadas de paso 1 a lo largo del semieje negativo de las x .

La trayectoria óptima consiste entonces en recorrer semicircunferencias alternando entre los valores ± 1 del control al atravesar ese conjunto. De este modo, alcanzamos el punto de equilibrio $(0, 0)$ en tiempo finito. Obtenemos así un mecanismo de control en forma "feedback" que puede escribirse del siguiente modo

$$\ddot{\varphi} + \varphi = F(\varphi, \dot{\varphi})$$

donde F es la función que vale -1 por encima de la curva de alternancia del signo de control y 1 por debajo. Con respecto al sistema original (5.10) tendríamos entonces

$$\ddot{\varphi} - \varphi = -2\varphi + F(\varphi, \dot{\varphi}).$$

El interés de estos controles es su carácter bang-bang. A pesar de su brusquedad son fácilmente implementables y son los que realizan el control del sistema en tiempo mínimo.

A pesar de que el problema mecánico considerado en esta sección y el modelo matemático correspondiente sean sumamente simples, las ideas que hemos introducido son recurrentes en Teoría de Control.

6. CONTROLABILIDAD DE UN SISTEMA LINEAL EN DIMENSIÓN FINITA

Tal y como hemos indicado anteriormente, la Teoría Matemática del Control está repleta de resultados interesantes y que han sido importantes en el ámbito de las aplicaciones. Muchos de ellos son excesivamente complejos para ser reproducidos en estas notas.

Uno de los más importantes y accesibles, en el que se caracterizan los sistemas lineales en dimensión finita que son controlables, es debido a Kalman.

Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, & t > 0 \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (6.20)$$

en el que el estado $x = (x_1, \dots, x_N)$ es un vector de \mathbb{R}^N dependiente del tiempo t y el control $u = (u_1, \dots, u_M)$ es un vector de M componentes que también depende del tiempo. La matriz A es cuadrada de dimensión $N \times N$ y de coeficientes constantes de modo que el sistema subyacente es autónomo, es decir, invariante por traslaciones en tiempo. La matriz B es también de coeficientes constantes y de dimensión $N \times M$.

Supondremos que $1 \leq M \leq N$. En la práctica, son especialmente significativos los casos en los que M es mucho menor que N pudiéndose llegar al extremo en el que $M = 1$ y, sin embargo, N es muy grande. En este caso, tendríamos de un solo control para controlar un número N muy grande de componentes del estado.

Diremos que el sistema es controlable en tiempo $T > 0$ si para cada dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^N$ y estado final u objetivo preestablecido $x^1 \in \mathbb{R}^N$ existe, al menos, un control $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^M)$ tal que la solución de (6.20) satisfaga

$$x(T) = x^1. \quad (6.21)$$

El siguiente resultado de Kalman establece una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable:

“La condición necesaria y suficiente para que el sistema (6.20) sea controlable en algún tiempo $T > 0$ es que el rango de la matriz

$$[B, AB, \dots, A^{N-1}B] \quad (6.22)$$

sea N .

Además, si el rango es N , el sistema es controlable en todo tiempo $T > 0$.

Cuando el rango de esta matriz es k con $1 \leq k < N$, el sistema no es controlable y para cada $x^0 \in \mathbb{R}^N$, el conjunto de soluciones de (6.20) en cada instante $T > 0$ recorre un subespacio afín de \mathbb{R}^N de dimensión k ”.

Cabe hacer las siguientes observaciones:

- El grado de controlabilidad del sistema (6.20) está completamente determinado por el rango de la matriz (6.22). Éste mide el número de componentes del sistema que son afectados por el control.
- La matriz (6.22) es de dimensión $(N \times M) \times N$ de modo que cuando se dispone de un solo control ($M = 1$), la matriz es $N \times N$. Es evidentemente en este caso cuando es más difícil que el rango sea

N . Esto está de acuerdo con el sentido común, que nos indica que el sistema es más fácilmente controlable cuando hay más controles.

- El sistema es controlable en un tiempo $T > 0$ si y sólo si lo es en todo intervalo temporal. Esto indica que en el sistema (6.20), la información se propaga a velocidad infinita, cosa que deja de ser cierta frecuentemente en el marco de las EDP.

El sistema adjunto de (6.20) juega un papel central en Teoría del Control. Éste adopta la forma

$$\begin{cases} \varphi' = -A^t \varphi, & t > 0 \\ \varphi(T) = \varphi^0. \end{cases} \quad (6.23)$$

En él se ha invertido el sentido del tiempo, la matriz A ha sido sustituida por su transpuesta A^t , y la condición inicial del sistema (6.20) en el instante inicial $t = 0$ ha sido reemplazada por una condición en el instante final $t = T$. El estado adjunto $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ es también un vector de N componentes dependientes del tiempo t .

Obviamente, el rango de la matriz (6.22) es N si y sólo si lo es de la matriz transpuesta

$$[B^t, B^t A^t, \dots, B^t (A^t)^{N-1}]. \quad (6.24)$$

Se puede comprobar que el rango de la matriz (6.24) es N si y sólo si, para cada tiempo $T > 0$, existe una constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|\varphi^0\|^2 \leq C(T) \int_0^T |B^t \varphi|^2 dt \quad (6.25)$$

para toda solución de (6.23).

La desigualdad (6.25) se conoce habitualmente como *desigualdad de observabilidad*. Es la propiedad "dual" de la controlabilidad del sistema (6.20).

En ella se establece que la totalidad del sistema puede ser "observado" a través de $B^t \varphi$ que proporciona M combinaciones lineales del estado adjunto. Cuando (6.25) se cumple, podemos garantizar que la matriz B^t captura adecuadamente todas las componentes del estado adjunto φ y esto resulta ser equivalente a la controlabilidad del sistema original (6.20) puesto que en este caso, el control u , a través de la matriz B , actúa de manera efectiva sobre todas las componentes del estado x .

La propiedad de observabilidad (6.25) es relevante en el contexto del control de sistemas pues es equivalente a la controlabilidad de sistema (6.20). Pero su relevancia va más allá de la Teoría del Control. Estas desigualdades juegan también un papel central en la Teoría de los Problemas Inversos, en la que se trata de reconstruir las propiedades de un medio a través de mediciones parciales realizadas sobre el mismo. La desigualdad de observabilidad viene a decir cuándo las mediciones realizadas son suficientes o no para detectar todas las propiedades del medio.

La demostración de los resultados que acabamos de mencionar es relativamente simple. Ella reposa sobre la descripción de la solución de un sistema mediante la fórmula de variación de las constantes y el Teorema de Cayley-Hamilton que asegura que toda matriz anula su polinomio característico.

En realidad, para probar que (6.25) se cumple, basta ver que

$$\left(\int_0^T |B^t \varphi|^2 dt \right)^{1/2}$$

define una norma en \mathbb{R}^N . Para esto es suficiente comprobar que se verifica el siguiente resultado de unicidad o continuación única: Si $B^t \varphi = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$, necesariamente $\varphi \equiv 0$. Es en la prueba de este resultado donde se precisa la condición de rango (6.24). Pero una vez que sabemos que ésta se cumple, podemos probar numerosas variantes de la desigualdad de observabilidad (6.25). En particular, tenemos:

$$\|\varphi^0\| \leq C(T) \int_0^T |B^t \varphi| dt \quad (6.26)$$

Esto nos permite construir controles distintos a los que se deducen de (6.25).

En efecto, veamos cómo a partir de (6.25) se pueden construir los controles de (6.20), lo cual nos dará otra idea de las conexiones que existen entre los problemas de controlabilidad y de control óptimo.

Suponiendo que se cumple la condición de rango (6.22) o (6.24), sabemos que se cumple la desigualdad (6.25). Entonces, dados estados iniciales y finales x^0, x^1 y un tiempo de control T , consideramos el funcional cuadrático:

$$J(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^t \varphi|^2 dt - \langle x^1, \varphi^0 \rangle + \langle x^0, \varphi(0) \rangle, \quad (6.27)$$

siendo φ la solución del sistema adjunto (6.23) asociada al dato φ^0 .

Se trata de un funcional estrictamente convexo y continuo en \mathbb{R}^N . En virtud de (6.25) es también coercivo (es decir, $J(\varphi^0) \rightarrow \infty$ cuando $\|\varphi^0\| \rightarrow \infty$) por lo que admite un único mínimo en \mathbb{R}^N que denotamos mediante $\hat{\varphi}^0$. Escribiendo la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de la minimización del funcional (6.27) es fácil comprobar que el control $u = B^t \hat{\varphi}$ donde $\hat{\varphi}$ es la solución del sistema adjunto (6.23), es un control para (6.20) que hace que (6.21) se cumpla.

Consideremos ahora el siguiente funcional

$$J_{bb}(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |B^t \varphi| dt \right)^2 - \langle x^1, \varphi^0 \rangle + \langle x^0, \varphi(0) \rangle. \quad (6.28)$$

Nuevamente, se trata de un funcional estrictamente convexo, continuo y coercivo. Admite, por tanto, un único punto de mínimo $\hat{\varphi}_{bb}^0$ que conduce a una nueva solución del sistema adjunto que denotaremos mediante $\hat{\varphi}_{bb}$. El control correspondiente es ahora de la forma

$$u = \int_0^T |B^t \hat{\varphi}_{bb}| dt \operatorname{sgn}(B^t \hat{\varphi}_{bb}), \quad (6.29)$$

siendo sgn la función signo. Se trata de un control de tipo *bang-bang* que sólo toma dos valores $\pm \int_0^T |B^t \hat{\varphi}_{bb}| dt$ y que oscila según el signo de $B^t \hat{\varphi}_{bb}$, de modo que sólo cambia de signo un número finito de veces.

Mientras que el control obtenido minimizando J es el de norma mínima en $L^2(0, T)$, este último es de norma mínima en $L^\infty(0, T)$. Mientras que el primero es regular, el segundo presenta discontinuidades pero, a la vez, presenta también la ventaja de ser más simple en la medida que alterna entre dos valores constantes.

Ambos son, en cualquier caso, óptimos respecto a un criterio de optimalidad. Es lógico elegir el control teniendo en cuenta un criterio de este tipo con el objeto de diseñar metodologías de control más económicas.

Acabamos de ver que, cuando la controlabilidad se cumple, el cálculo efectivo del control se realiza resolviendo un problema de minimización. Esto es también relevante desde un punto de vista computacional pues nos indica el modo de construir esquemas numéricos eficientes para el cálculo de los controles.

7. CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS NO-LINEALES

Muchos de los sistemas que se nos presentan en el día a día o en el ámbito de las Ciencias y de la Tecnología son no-lineales. Como veremos más adelante, situaciones tan habituales como la conducción de un vehículo proporcionan ejemplos cuyo análisis matemático resulta sumamente interesante.

El problema del control de sistemas no-lineales es complejo y resulta imposible describir en unas pocas páginas los resultados más relevantes que se han obtenido en este contexto. Pero sí que podemos presentar algunas ideas matemáticas básicas que juegan un papel central en este contexto.

Cuando lo que se pretende es obtener pequeñas variaciones en el estado, es decir, conducirlo desde su posición inicial a otra posición final próxima, puede resultar suficiente proceder mediante un método de linealización. En efecto, si el sistema en cuestión es

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (7.30)$$

con $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$, entonces la linealización de (7.30) en torno a $u = 0$, $x = 0$ (suponiendo que $f(0, 0) = 0$) es:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)u, & t > 0 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

Obviamente, el sistema (7.31) puede ser escrito en la forma (6.20) con

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0); B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \quad (7.32)$$

y, por lo tanto, la condición de rango

$$\text{rango } [B, AB, \dots, A^{N-1}B] = N \quad (7.33)$$

es la que garantiza la controlabilidad de (7.31).

Es fácil comprobar que, como consecuencia del Teorema de la Función Inversa (TFI), si esta condición de rango se cumple, el sistema (7.30) es localmente controlable en el sentido de que, para cualquier $T > 0$, existe un entorno B_δ de $x = 0$ en \mathbb{R}^N de modo que para cada estado inicial y final $x_0, x_1 \in B_\delta$, existe un control u de modo que la solución de (7.30) satisface

$$x(T) = x_1. \quad (7.34)$$

Ahora bien, si lo que buscamos son resultados globales que garanticen que el control puede introducir grandes deformaciones en el estado, este análisis es claramente insuficiente.

Una condición natural que cabe imponer al sistema con el objeto de garantizar su controlabilidad global es que, en cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, mediante la elección de todos los posibles controles u , podamos obtener deformaciones del estado en cada dirección del espacio \mathbb{R}^N . Pero, ¿cuáles son las direcciones en las que podemos deformar el estado x en torno al punto x_0 ? Obviamente, todas las direcciones de la forma $f(x_0, u)$, con $u \in \mathbb{R}^M$ lo son. Pero esto no es en absoluto suficiente cuando $M < N$. Sin embargo, como vimos en el caso lineal, existen situaciones en las que $M < N$ pero que son controlables, gracias a que se cumple la condición de rango (7.33).

En el marco no-lineal se puede comprobar que el conjunto de direcciones en las que se puede deformar el estado a partir de x^0 es en realidad el Álgebra de Lie generada por los campos de vectores $f(x^0, u)$, cuando u varía en el conjunto de controles admisibles. A este respecto conviene recordar que el Álgebra de Lie generada por una familia de campos de vectores contiene todos los corchetes de Lie $[f, g]$ de todos los campos f, g de dicha familia, donde

$$[f, g] = \nabla g f - \nabla f g,$$

y todos los nuevos campos que pueden obtenerse iterando este proceso de cómputo de corchetes de Lie.

Se puede probar entonces que un sistema reversible en el que el Álgebra de Lie anteriormente citada coincide con \mathbb{R}^N en todo punto x^0 es controlable en el sentido de que el sistema puede ser conducido de cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo suficientemente grande.

Como decíamos anteriormente, el siguiente modelo simple para la conducción de un vehículo proporciona un buen ejemplo en el que estas ideas pueden aplicarse.

Consideramos un estado x con cuatro componentes (x_1, x_2, x_3, x_4) en las que las dos primeras (x_1, x_2) representan las coordenadas del centro del eje frontal del vehículo, la tercera, $x_3 = \varphi$, el ángulo del vehículo con respecto al semieje positivo de las x medido en el sentido

contrario a las agujas del reloj, y la cuarta, $x_4 = \theta$, el ángulo de las ruedas delanteras con respecto a la orientación del vehículo.

Las ruedas delanteras son entonces paralelas al vector $(\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi))$ de modo que, como la velocidad instantánea del centro del eje frontal es paralela a este vector, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = u_2(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

para alguna función escalar $u_2(t)$.

El centro del eje trasero tiene coordenadas $(x_1 - \ell \cos \varphi, x_2 - \ell \sin \varphi)$, siendo ℓ la distancia entre los dos ejes y la velocidad de este punto ha de ser paralela a la orientación de las ruedas traseras $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, de modo que:

$$\sin \varphi \frac{d}{dt} (x_1 - \ell \cos \varphi) - \cos \varphi \frac{d}{dt} (x_2 - \ell \sin \varphi) = 0.$$

Deducimos así que

$$\ell \dot{\varphi} = u_2 \sin \theta.$$

Por otra parte,

$$\dot{\theta} = u_1$$

refleja el hecho de que la velocidad a la que varía el ángulo de las ruedas delanteras es la segunda variable que controlamos.

Obtenemos así el sistema de ecuaciones:

$$\dot{x} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

El sistema es reversible, por lo que basta comprobar que el Álgebra de Lie de las direcciones en las que el estado puede ser deformado coincide con \mathbb{R}^4 en cada punto para garantizar la controlabilidad.

Cuando $u_1 \equiv 0$ y $u_2 \equiv 0$ tenemos las direcciones

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

respectivamente. Su corchete de Lie proporciona la nueva dirección

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi + \theta) \\ \cos(\varphi + \theta) \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

cuyo corchete de Lie con la primera de (7.36) proporciona a su vez la dirección

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

Teniendo en cuenta que el determinante de la matriz que los cuatro vectores (7.36)-(7.38) componen es idénticamente igual a 1, verificamos que, efectivamente, en cada punto, el conjunto de direcciones en que puede deformarse el estado es todo \mathbb{R}^4 .

El sistema (7.35) es por tanto controlable.

Es muy interesante reflexionar sobre este ejemplo, acerca de las direcciones en las que cada uno de los vectores de (7.36)-(7.38) permite mover el vehículo y comprobar cómo éstas corresponden a los movimientos que se realizan al aparcar o desaparcar un automóvil.

El lector interesado en profundizar en este tema podrá consultar el texto de E. Sontag¹⁹.

Más recientemente, J. M. Coron ha introducido el denominado "método del retorno" que consiste en linealizar un sistema no-lineal en torno a trayectorias oscilantes que permiten desentrañar mejor las propiedades de controlabilidad del sistema no-lineal. Esta idea ha sido aplicada con éxito en el artículo de J. M. Coron²⁰ en el marco de las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto. Mediante este método se puede efectivamente probar la controlabilidad de estas ecuaciones puesto que, si bien el sistema que se obtiene al linealizar en torno a la solución trivial no es controlable, sí que lo es cuando se linealiza en torno a soluciones no triviales adecuadas.

¹⁹SONTAG, E. D. "Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems". Second edition. *Texts in Applied Mathematics*, 6. Springer-Verlag. New York, 1998.

²⁰CORON, J.-M. "On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids". *J. Maths Pures Appl.*, 75 (2). 1996. Págs. 155-188.

8. OPTIMIZACIÓN, PROGRAMACIÓN LINEAL, CONVEXIDAD Y DUALIDAD

En la Introducción hemos mencionado que las dos nociones centrales en teoría del Control son las de "feedback" y de optimización. Esta sección está dedicada a la segunda.

Son muchas las teorías y técnicas matemáticas que pueden enmarcarse en el contexto de la optimización. Pero la "programación" es, sin duda, una de ellas. Este término, en el marco del control y de la optimización, nada tiene que ver con la programación de ordenadores, sino que tiene su origen en el intento de optimizar la planificación de las diversas actividades de una organización (empresa, fábrica, ministerio, etc.). El objetivo es, pues, buscar una planificación óptima.

El simple problema de la asignación permite ilustrar con claridad la dificultad que este tipo de cuestiones puede entrañar y la necesidad, por tanto, de una teoría matemática para abordarla. Una fábrica cuenta con 70 personas, de diferente cualificación, a las que han de asignarse 70 tareas distintas. El número total de posibles distribuciones es de $70!$, que es del orden de 10^{100} . Es pues evidente que una resolución rápida y eficiente de este tipo de problemas necesita de una estrategia y teoría matemática adecuada. Ni que decir tiene que este tipo de problemas, lejos de ser académicos, se presentan de manera sistemática en cualquier ámbito de la actividad humana.

La programación lineal era relativamente desconocida hasta 1947, si bien J. B. Fourier ya en 1823 percibió el interés e importancia de estas cuestiones. L. V. Kantorovich, en su amplia monografía publicada en 1939, fue el primero que observó que una amplia clase de problemas de planificación admitían una formulación matemática común. El método que hoy conocemos de simplex y que describiremos más adelante fue introducido en 1947, y su eficiencia fue tan impactante que rápidamente fue penetrando en el mundo empresarial e industrial.

Han sido muchas las direcciones en las que se ha investigado con el objeto de ir más allá de la programación lineal y el método de simplex. Cabe, por ejemplo, mencionar la programación no lineal, inspirada en el método del descenso propuesto por el matemático francés A. L. Cauchy en el siglo XIX para resolver ecuaciones no lineales mediante el cálculo de puntos críticos del potencial correspondiente.

Pero volvamos a la optimización y a la programación lineal.

La parte de la Teoría del Control más próxima a la optimización está íntimamente ligada al Cálculo de Variaciones. Como ilustrábamos en la sección 3, frecuentemente, el problema a abordar puede ser planteado desde dos perspectivas distintas, la de la controlabilidad o la de la optimización. En este segundo caso, el problema se reduce a uno de minimización de una *función de coste* o *función objetivo* bajo una serie de restricciones, las que de manera natural han de imponerse al control.

Como decíamos, la programación lineal aborda toda una familia de estos problemas que, a pesar de su aparente simplicidad, están presentes en infinidad de aplicaciones tales como el control del tráfico, la teoría de juegos, la economía, etc.

El problema más simple de esta clase puede formularse en términos matemáticos del siguiente modo:

Dada una matriz $A \in M_{m \times n}$, un vector columna b de m componentes y un vector fila c de n componentes, minimizar la función lineal $cx = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ bajo las restricciones $Ax = b$ y $x \geq 0$.

La última restricción es vectorial y ha de entenderse de modo que $x_j \geq 0$ para cada $j = 1, \dots, n$.

En general, la respuesta a este problema viene dada por un solo vector x que tiene la grata propiedad de que $n - m$ de sus componentes se anulan. El problema consiste, pues, en determinar cuáles son las $n - m$ componentes que se anulan y después, identificar el valor óptimo de las otras m componentes.

El *método de simplex* proporciona una forma sencilla de dar con la buena respuesta en un número finito de pasos. Se procede del siguiente modo:

- Paso 1: Buscamos un vector x con $n - m$ componentes nulas y que satisface $Ax = b$ además de las restricciones unilaterales $x \geq 0$. Obviamente no hay ninguna razón para que esta primera elección de x proporcione la respuesta óptima.
- Paso 2: Modificamos esta primera elección de x permitiendo que una de las componentes nulas se haga positiva mientras que una de las positivas se anule y esto de modo que se mantengan las restricciones $Ax = b$ y $x \geq 0$.

Repitiendo este proceso un número finito de veces habremos comprobado el valor de cx en cada uno de los posibles puntos de mínimo. Obviamente, la solución al problema se obtiene eligiendo el punto en el que cx alcanza el mínimo.

Para convencerse de estos aspectos fundamentales de la programación lineal y del método de simplex conviene analizar sus aspectos geométricos en un ejemplo.

Consideramos, por ejemplo, el problema de minimizar la función $5x_1 + 4x_2 + 8x_3$ bajo las restricciones $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

En este caso, el conjunto de estados admisibles (x_1, x_2, x_3) que verifican las restricciones impuestas, es un triángulo en \mathbb{R}^3 de vértices $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$. Es fácil comprobar que el mínimo se alcanza en el vértice $(0, 1, 0)$ siendo 4 el valor del mínimo.

Pero analicemos la razón geométrica de este hecho. Como $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, para cada estado admisible, necesariamente, el mínimo de la función $5x_1 + 4x_2 + 8x_3$ ha de ser no negativo. Además, el mínimo no puede ser cero puesto que el plano $5x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0$ tiene una intersección vacía con el triángulo de estados admisibles. Al aumentar el costo $5x_1 + 4x_2 + 8x_3$, es decir, al considerar conjuntos de nivel $5x_1 + 4x_2 + 8x_3 = c$ con $c > 0$ creciente estamos considerando planos paralelos a $5x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0$ que se van alejando del origen y aproximando al triángulo de los estados admisibles. El primer valor de c para el que el plano de nivel contacta con el triángulo de estados admisibles proporciona el valor mínimo de la función coste y el punto en el que se produce el contacto el punto de mínimo. Es fácil convencerse de que dicho punto es el vértice $(0, 1, 0)$ del triángulo de estados admisibles.

El método de *simplex*, a pesar de su aparente simplicidad, es sumamente eficiente. Existen diversas variantes, algunas de ellas más eficientes en clases particulares de problemas, pero el método más robusto y extendido sigue siendo el de simplex. En algunas de estas variantes, al buscar el mínimo se transita por el interior del conjunto de estados admisibles y no sólo a lo largo de su frontera como en el método de simplex. Es el caso, por ejemplo, del método de Karmakar.

La geometría del problema que hemos analizado indica que la convexidad del conjunto de estados admisibles juega un papel fundamental.

El punto de vista variacional para la resolución de los problemas de la mecánica de medios continuos, descritos en términos de EDP, y de los problemas de control asociados están inspirados en nociones e ideas semejantes. Algunos de los métodos más eficientes de aproximación numérica como, por ejemplo, el método de elementos finitos, tampoco son ajenos a esta influencia.

Hoy en día es bien sabido que los espacios de Hilbert son frecuentemente el marco adecuado para la resolución de muchos problemas de la mecánica. Habida cuenta que las configuraciones de equilibrio son aquellas en las que la energía del sistema alcanza su mínimo, muchos de estos problemas pueden escribirse como la minimización de un funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$, siendo H un espacio de Hilbert.

Se trata de una aplicación de una idea ya clásica según la cual muchas ecuaciones diferenciales pueden considerarse ecuaciones de Euler o de Euler-Lagrange de problemas de minimización y, recíprocamente, a cada problema de minimización podemos asociar su ecuación de Euler. Este hecho puede utilizarse en ambos sentidos, ya sea para resolver una ecuación a través de la minimización del funcional correspondiente o utilizando la ecuación de Euler y su resolución para el cálculo del mínimo.

En la práctica, frecuentemente, H es un espacio de funciones como $L^2(\Omega)$ (las funciones de cuadrado integrable definidas en un abierto Ω de \mathbb{R}^n) o un espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, ... Se trata genuinamente de espacios de dimensión infinita. Un espacio de Hilbert de dimensión infinita es lo más parecido al espacio euclídeo \mathbb{R}^n , pero la dimensión n en este caso es infinita. Esto conlleva un número importante de dificultades matemáticas nuevas. Muchas de las cosas que son válidas en dimensión finita dejan de serlo cuando la dimensión es infinita. La más importante, tal vez, es que los conjuntos acotados dejan de ser automáticamente relativamente compactos. Esto impide extraer subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas por el mero hecho de serlo. A causa de este hecho, el Método Directo del Cálculo de Variaciones (MDCV) que tan fácilmente se aplica en \mathbb{R}^n encuentra dificultades adicionales al pasar a espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Recordemos brevemente este MDCV indicando las ideas fundamentales que intervienen en la prueba de uno de los resultados más básicos.

“Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y coerciva, es decir,

tal que

$$F(x) \rightarrow \infty, \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (8.39)$$

Entonces, F alcanza su valor mínimo en al menos un punto x_0 de \mathbb{R}^n ”.

La demostración de este hecho basada en el MDCV es muy simple. Recordemos los pasos fundamentales:

- **Paso 1.** Definimos

$$I = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$$

y observamos que $I > -\infty$ por la continuidad y coercividad de F .

- **Paso 2.** Construimos una sucesión minimizante $\{x_j\}_{j \geq 1}$ tal que

$$F(x_j) \rightarrow I \text{ cuando } j \rightarrow \infty.$$

Por la definición de ínfimo, esta sucesión existe necesariamente y, por la coercividad de F , observamos que $\{x_j\}_{j \geq 1}$ está necesariamente acotada.

- **Paso 3.** Extraemos una subsucesión (que seguimos denotando $\{x_j\}_{j \geq 1}$) tal que

$$x_j \rightarrow x \text{ cuando } j \rightarrow \infty.$$

- **Paso 4.** Por la continuidad de F observamos que

$$F(x_j) \rightarrow F(x) \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

y por ser $\{x_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión minimizante y por la unicidad del límite deducimos que

$$F(x) = I.$$

El límite x de la subsucesión extraída de la sucesión minimizante resulta, pues, ser un punto de mínimo de la función F .

Al abordar este problema en un espacio de Hilbert de dimensión infinita H , vemos inmediatamente que este método falla en el paso 3 puesto que, tal y como hemos indicado anteriormente, no necesariamente se puede extraer una subsucesión convergente de una sucesión acotada. El espacio $L^2(0, 1)$ de las funciones de cuadrado integrable en el intervalo $(0, 1)$ proporciona algunos ejemplos interesantes.

Consideremos la sucesión de funciones

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (1/(n+1), 1/n) \\ \sqrt{n(n+1)} & \text{si } x \in (1/(n+1), 1/n). \end{cases} \quad (8.40)$$

Es fácil comprobar que todas estas funciones, constantes a trozos, pertenecen a la esfera unidad de $L^2(0, 1)$. En efecto,

$$\|u_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 u_n^2 dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} n(n+1) dx = 1. \quad (8.41)$$

Por otra parte, u_n converge puntualmente a cero, es decir,

$$u_n(x) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (8.42)$$

para cada $x \in (0, 1)$.

Y, sin embargo, en vista de (8.41), es imposible que la sucesión $\{u_n\}$ tienda a cero en $L^2(0, 1)$.

Nos encontramos, pues, ante este hecho intrínseco a todo espacio de dimensión infinita. Los conjuntos acotados no son necesariamente relativamente compactos.

Este hecho fue por mucho tiempo una barrera infranqueable a la hora de adaptar el MDCV a los problemas de la Mecánica de Medios Continuos. Fueron necesarios importantes desarrollos en el Análisis Matemático antes de dar con una respuesta completa.

El análisis del ejemplo anterior proporciona buenas pistas.

En primer lugar es fácil convencerse de que

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

para cada función $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$, el espacio de las funciones de clase C^∞ y de soporte compacto en el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, un análisis cuidadoso de otros ejemplos, en particular en el espacio ℓ^2 de las sucesiones de cuadrado sumable, que es el que más se parece al espacio Euclídeo en que estamos más habituados a trabajar, muestra que, mediante un argumento inspirado en la *extracción diagonal de Cantor*, lo que ocurre en el ejemplo que acabamos de citar es un hecho sistemático. Se prueba así que una sucesión acotada $\{h_n\}$ en un espacio de Hilbert H admite

siempre una subsucesión $\{h_{n^0}\}$ que converge débilmente a un elemento $h \in H$. La *convergencia débil* de una sucesión $\{h_n\}$ habitualmente es denotada del modo siguiente

$$h_n \rightharpoonup h$$

y significa que

$$(h_n, g)_H \rightarrow (h, g)_H, \forall g \in H,$$

donde $(\cdot, \cdot)_H$ denota el producto escalar de H .

Obviamente, la convergencia clásica en norma implica la convergencia débil, pero el recíproco no es cierto, lo cual justifica la denominación de convergencia débil. Para convencerse de esto basta observar que la sucesión $\{h_n\}$ de ℓ^2 constituida por la base canónica, es decir, h_n es la sucesión en la que todos sus elementos son nulos salvo el n -ésimo que vale uno, converge débilmente a cero pero no lo hace fuertemente por estar todos sus elementos en la esfera unidad.

En realidad es fácil comprobar que una sucesión que converge débilmente converge fuertemente si y solamente si las normas de los elementos de la sucesión convergen a la norma del límite.

Pero la norma no es totalmente insensible a la convergencia débil. En realidad se comporta como una función semicontinua inferiormente puesto que si $h_n \rightharpoonup h$ débilmente en H , entonces, necesariamente,

$$\|h\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_H.$$

Para probar esto último basta observar que, en un espacio de Hilbert, la norma puede escribirse del siguiente modo

$$\|h\|_H = \sup_{g \in H} \frac{(h, g)_H}{\|g\|_H}.$$

Esto y poco más es suficiente para probar que toda función convexa y continua en un espacio de Hilbert es semicontinua inferiormente para la convergencia débil. Esto nos permite aplicar el MDCV obteniendo que:

“Si $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, coerciva y convexa, siendo H un espacio de Hilbert, existe al menos un punto $h \in H$ donde J alcanza su mínimo”.

De este modo se puede probar la existencia de configuraciones de equilibrio para numerosos problemas de la Mecánica de Medios Continuos. Más aún, combinando estas ideas con la aproximación de H a través de espacios de dimensión finita creciente se puede establecer la convergencia del método de aproximación de Galerkin. La elección adecuada de los espacios de dimensión finita aproximantes da lugar, en particular, al método de elementos finitos.

La teoría de la Γ -convergencia (véase por ejemplo Dal Maso²¹) desarrollada en torno a la escuela de E. De Giorgi proporciona una metodología sistemática para abordar la dependencia de los minimizadores de funcionales cuando estos últimos dependen de un cierto parámetro de discretización, como por ejemplo, el tamaño del mallado en un método numérico.

Acabamos de ver que mediante el MDCV puede probarse la existencia de minimizadores para una amplia clase de problemas. Pero existen otros muchos en los que el mínimo no existe. Un ejemplo característico es el funcional

$$J(v) = \int_0^1 \left\{ [|v'(x)| - 1]^2 + v^2(x) \right\} dx$$

en el espacio funcional $H^1(0,1)$ de las funciones de cuadrado integrable con derivada de cuadrado integrable.

Es fácil ver que el ínfimo de J en $H^1(0,1)$ es cero. Esto implica, evidentemente, que el mínimo no se alcanza, pues, de hacerlo, tendría que tenerse simultáneamente

- $v^2(x) = 0$
- $|v'(x)| - 1 = 0$

lo cual es a todas luces imposible.

Este ejemplo y muchos otros de este tipo suponen el punto de partida de la teoría de la relajación en el Cálculo de Variaciones que tiene como objeto describir de manera precisa el modo en que el funcional J deja de alcanzar su mínimo y extraer de ese análisis las consecuencias que puede tener con respecto al problema físico que motivó el problema de minimización.

²¹DAL MASO, G. *An introduction to Γ -convergence*. Birkhäuser. Boston, 1993.

Pero veamos que, efectivamente, el ínfimo de este funcional es nulo. Para ello basta construir una sucesión de funciones $v_n = v_n(x)$ en $H^1(0,1)$ tal que

$$J(v_n) \downarrow 0.$$

Basta para ello considerar las funciones

$$v_n(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{n}, & \text{si } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2n} \\ \frac{k+1}{n} - x, & \text{si } \frac{2k+1}{2n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, \end{cases} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Se tiene de este modo

$$v_n'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{k}{n} < x < \frac{2k+1}{2n}, \\ -1, & \text{si } \frac{2k+1}{2n} < x < \frac{k+1}{n}, \end{cases} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Es entonces fácil comprobar que

$$J(v_n) = \frac{1}{12n}.$$

Pero, por lo dicho hasta ahora, podría parecer que los ejemplos más comunes e interesantes entran en el marco que acabamos de describir y que sólo algunos ejemplos patológicos escapan del mismo. Nada más lejos de la realidad. Consideremos el problema más simple y más clásico: *comprobar que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta*. Por supuesto, todos somos capaces de encontrar diversos argumentos geométricos que nos permiten probar este hecho. ¿Pero, qué ocurre cuando abordamos el problema desde el punto de vista del Cálculo de Variaciones? Se trataría entonces de minimizar el funcional

$$\int_0^1 |x'(t)| dt$$

en la clase de curvas $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $x(0) = A$ y $x(1) = B$, siendo A y B dos puntos dados del plano. El espacio natural en el que hemos de trabajar ya no es un espacio de Hilbert. Es más bien, a primera vista, el espacio de Sobolev $W^{1,1}(0,1)$. Pero éste no es reflexivo, por lo que el problema, de ser abordado desde el punto de vista clásico del Cálculo de Variaciones, exige que trabajemos en la clase $BV(0,1)$ de funciones de variación acotada. La resolución del problema en este marco se complica considerablemente.

Otra de las características del resultado general que hemos citado como aplicación del MDCV es que se aplica a problemas de mínimos sin restricciones. Pero, obviamente, en la mayoría de los problemas realistas de control, la propia naturaleza del problema impone restricciones

sobre el control y/o estado. Es el caso, por ejemplo, de los problemas de programación mencionados al principio de esta sección.

En los problemas de mínimos restringidos surgen de manera natural los ya clásicos multiplicadores de Lagrange.

El lector interesado en profundizar en el Análisis convexo y la dualidad puede consultar las monografías de I. Ekeland y R. Temam²² y de R.T. Rockafellar²³. En el libro de B. Larroutourou y P. L. Lions²⁴, el lector podrá encontrar una introducción interesante y autocomenida de diversos aspectos de la modelización, las EDP, su aproximación numérica y la optimización en la que se cubren muchos de los aspectos que hemos citado en este apartado.

Los puntos de ensilladura que surgen de manera natural en problemas de optimización, tal y como acabamos de ver, pueden también entenderse como soluciones de problemas de *minimax*. Los problemas de *minimax* surgen en numerosos y variados contextos. Citemos dos ejemplos:

- Teoría de Juegos en los que dos o más jugadores compiten intentando maximizar su ganancia y minimizar la del oponente;
- Caracterización de frecuencias propias de vibración de estructuras. En efecto, es bien sabido que, en muchas ocasiones, estas frecuencias pueden caracterizarse como autovalores de un operador autoadjunto y compacto en un espacio de Hilbert a través de un problema de *minimax* que involucra al cociente de Rayleigh.

Una de las contribuciones más relevantes en este campo fue la de J. von Neumann a mediados del siglo XX, quien probó que el *minimax* existe bajo hipótesis muy débiles, resultado que tuvo gran impacto en el desarrollo y utilización de la Teoría de Juegos.

En las dos últimas décadas, estas ideas se han utilizado de manera exhaustiva también en la resolución de EDP no-lineales, a través, en particular, de lo que se conoce como el Lema del Paso de Montaña (véase

²²EKELAND, I. y TAMAM, R. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod. París, 1974.

²³ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press. Princeton, 1970.

²⁴LARROUTOUROU, B. y LIONS, P. L. *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur: Optimisation et analyse numérique*. Publicaciones de la Escuela Politécnica de París. París, 1996.

por ejemplo la monografía de O. Kavian²⁵). A este respecto cabe señalar que un paso o puerto de montaña es efectivamente un excelente ejemplo que la naturaleza nos proporciona de lo que es el minimax. En un paso de montaña buscamos el punto de la cordillera por el que podemos pasar de un lado a otro de la misma subiendo una altura mínima. El camino que pasando por el paso de la montaña nos conduce de un lado a otro de la cordillera tiene en ese punto un minimax o punto de ensilladura. El punto es de altura mínima si seguimos la línea de la cordillera pero es un máximo en el camino que nos conduce de un lado al otro de la misma.

9. CONTROL MOLECULAR MEDIANTE TECNOLOGÍA LÁSER: LA RELEVANCIA DE LA SEPARACIÓN ESPECTRAL

Tal y como hemos mencionado anteriormente, son muchos los ámbitos del desarrollo tecnológico en los que la Teoría del Control juega un papel central.

Una de las más recientes y en la que las perspectivas de avance en los próximos años son más favorables es la del "Control Láser de Reacciones Químicas".

Los principios básicos del abordaje industrial de la Química han permanecido inalterados durante muchos años. Estos han estado basados fundamentalmente en la alteración de la temperatura o presión en las reacciones o en la utilización de catalizadores.

Pero desde la invención del láser cuarenta años atrás, la tecnología para el control de reacciones ha ido cambiando paulatinamente. En efecto, partiendo de uno de los principios básicos de la Mecánica Cuántica, según el cual, tanto la luz como la materia tienen un carácter ondulatorio, se puede prever que la utilización del láser sea un mecanismo eficiente para el control de las reacciones químicas.

Los resultados experimentales de los que se dispone en la actualidad hacen pensar que esta tecnología puede llegar a alcanzar altos niveles de precisión si bien, por el momento, existen obstáculos que poco a poco empiezan a ceder. Una de las mayores limitaciones surge cuando las moléculas están poco aisladas. En este caso, las colisiones entre ellas

²⁵KAVIAN, O. "Introduction a la théorie des points critiques". *Mathématique & Applications*, 13, 1993.

hacen que sea difícil definir su fase, lo cual, a su vez, dificulta la elección del control láser adecuado. La segunda limitación, de carácter más tecnológico y en la que se están produciendo avances importantes, es el diseño de láseres con fases bien definidas y que se vean poco afectadas por las inestabilidades de los equipos e instrumentos.

El lector interesado puede consultar el artículo divulgativo de Brumer y Shapiro²⁶ para conocer más a este respecto.

Se trata de un campo donde las Matemáticas están aún muy poco desarrolladas. Los modelos matemáticos necesarios para describir estos fenómenos exigen la utilización de complejas ecuaciones de Schrödinger en las que el grado de comprensión de que disponemos en la actualidad hace muy difícil corroborar lo que los experimentos muestran.

Pero basta analizar algunos modelos matemáticos simples en los que intervienen fenómenos ondulatorios para entender algunas de las dificultades que estos modelos más complejos entrañan.

Dentro de las ecuaciones que describen fenómenos ondulatorios, una de las más simples es sin duda la ecuación de ondas.

En una dimensión espacial se trata de un modelo clásico para la descripción de las vibraciones de una cuerda. Si suponemos que en reposo ésta ocupa el segmento $(0, 1)$ de la recta real y suponiendo que ésta vibra únicamente en la dirección transversal, el modelo matemático más simple es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Este modelo ya fue estudiado a mediados del siglo XVIII por D'Alembert y D. Bernoulli²⁷.

²⁶BRUMER, P. y SHAPIRO, M. "Laser control of chemical reactions". *Scientific American*. Marzo, 1995. Págs. 34-39.

²⁷Véase ZUAZUA, E. "Ondas continuas y discretas". En *Actas del Curso de Formación del Profesorado "Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria"*. Secretaría General Técnica, Central de Publicaciones del MEC/ UIMP. Madrid, 2000, y Boletín SEMA, 16. 2000. Págs. 13-42, para una descripción de algunos aspectos históricos sobre la ecuación de ondas

La solución puede describirse mediante un desarrollo en serie de Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)] \sin(k\pi x).$$

En este caso, las frecuencias de vibración de los diferentes modos están perfectamente bien diferenciadas. Esto tiene consecuencias importantes. En efecto. Tomemos por ejemplo un punto irracional x_0 en el intervalo $(0, 1)$ y supongamos conocida la vibración de la cuerda en x_0 , es decir, supongamos que conocemos entonces la serie trigonométrica:

$$u(x_0, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)] \sin(k\pi x_0).$$

Utilizando las propiedades de ortogonalidad habituales de las funciones trigonométricas tenemos que

$$\int_0^2 |u(x_0, t)|^2 dt = \sum_{k \geq 1} \sin^2(k\pi x_0) [a_k^2 + b_k^2].$$

Teniendo en cuenta que cuando x_0 es irracional

$$\sin(k\pi x_0) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$$

deducimos inmediatamente que si $u(x_0, t) = 0$ en $(0, 2)$, entonces $a_k = b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ y, por lo tanto, $u \equiv 0$.

Esto nos permite asegurar que, observando la vibración de la cuerda en un solo punto x_0 durante un intervalo temporal $(0, 2)$, podemos determinar de manera global la vibración.

Se trata de una propiedad de *observabilidad* que juega un papel central en la Teoría del Control. En efecto, el diseño del control ha de realizarse a través de sensores localizados estratégicamente sobre la estructura a controlar. Si los sensores elegidos no son capaces de proporcionar una información suficientemente representativa del proceso que deseamos controlar, difícilmente podremos adoptar un método eficiente de control.

La conducción de un vehículo proporciona un ejemplo cotidiano de lo que acabamos de mencionar. Es, en efecto, un excelente ejemplo de *control en tiempo real* en el que, en función de los datos que percibimos del exterior, estamos decidiendo en todo momento la orientación del volante, la aceleración del vehículo, etc. En caso de que las condiciones

de visibilidad sean malas (falta de observabilidad), la conducción se hace difícil (puesto que no tenemos suficiente información para decidir cuál es el control adecuado) o incluso peligrosa.

Volvamos por un momento a la ecuación de ondas. ¿Qué ocurre cuando el punto x_0 de observación elegido es racional $x_0 = p/q$? En este caso

$$u(x_0, t) = \sum_{k \geq 1} \sin(k\pi p/q) [a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)].$$

Obviamente, cuando k es un múltiplo entero de q , tenemos que $\sin(k\pi p/q) = 0$. Por lo tanto, la observación de $u(x_0, t)$ no proporciona ninguna información sobre los coeficientes a_k, b_k correspondientes del desarrollo de Fourier.

Algo semejante ocurre cuando el espectro del problema analizado no está bien separado. ¿Qué ocurre cuando la serie de Fourier involucrada en el problema es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \sin(\mu_k t) + b_k \cos(\mu_k t)] \sin(k\pi x),$$

donde la sucesión $\{\mu_k\}$ no tiene ahora las propiedades de la sucesión $\{k\pi\}$ que han hecho posible el análisis previo?

Para entender las dificultades con las que podemos encontrarnos basta considerar un tipo muy particular de soluciones que sólo involucra dos modos de vibración:

$$u(x, t) = \sin(\mu_k t) \sin(k\pi x) - \frac{\sin(k\pi x_0)}{\sin((k+1)\pi x_0)} \sin(\mu_{k+1} t) \sin((k+1)\pi x).$$

En este caso

$$u(x_0, t) = \sin(k\pi x_0) [\sin(\mu_k t) - \sin(\mu_{k+1} t)].$$

Por el Teorema del valor medio deducimos que

$$|u(x_0, t)| \leq |\sin(k\pi x_0)| |\mu_{k+1} - \mu_k| t$$

de modo que la información que la observación produce en cada modo de Fourier viene afectada por un factor multiplicativo del orden de $|\mu_{k+1} - \mu_k| t$. En el caso en que

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

vemos que la información proporcionada por la observación se deteriora a medida que aumenta la frecuencia.

Esta deficiencia en la observabilidad hace que sea mucho más difícil diseñar estrategias de control robustas.

La falta de separación espectral que acabamos de mencionar no es una objeción puramente matemática. Muy al contrario, acontece en la mayoría de los problemas y, tal como hemos mencionado anteriormente, de manera muy particular, en el control molecular mediante tecnología láser.

En lo que respecta a los problemas de vibraciones, tal y como hemos visto, cuando se trata de cuerdas vibrantes homogéneas, estos problemas de ausencia de separación espectral no se plantean. Pero se presentan en cuanto se abordan situaciones más complejas y realistas entre las que cabe mencionar:

- Cuerdas vibrantes con densidades altamente heterogéneas²⁸;
- Multi-estructuras que acoplen cuerdas vibrantes y cuerpos sólidos²⁹;
- Redes de cuerdas flexibles³⁰.

Pero los problemas que evocábamos de control molecular mediante tecnología láser son aún más complejos. En ellos, los modelos matemáticos correspondientes involucran ecuaciones de Schrödinger no-lineales en las que, frecuentemente, no se dispone aún de una teoría de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy completo o donde los métodos numéricos convencionales se aplican con dificultad. Pero lo que realmente hace que estos problemas supongan un auténtico reto para la Teoría del Control es que el control interviene en estos modelos de manera bilineal. Se trata pues de problemas no-lineales que escapan al marco clásico de la Teoría del Control de sistemas lineales.

Como ocurre frecuentemente en el ámbito de lo no-lineal, la dificultad no consiste solamente en que las técnicas matemáticas disponibles

²⁸CASTRO, C. y ZUAZUA, E. "Concentration and lack of observability of waves on highly heterogeneous media". *Archive Rat. Mech. Anal.* En vías de publicación.

²⁹HANSEN, S. y ZUAZUA, E. "Controllability and stabilization of strings with point masses". *SIAM J. Cont. Optim.*, 33 (5). 1995. Págs. 1357-1391.

³⁰DÁGER, R. y ZUAZUA, E. "Spectral boundary controllability of networks of strings". *C.R. Acad. Sci. Paris*, 334. 2002. Págs. 545-550.

frecuentemente se muestran insuficientes, sino que hemos de esperar resultados completamente distintos desde un punto de vista cualitativo.

10. LA BARRERA DEL TÁMESIS: UN EJEMPLO DE CONTROL AMBIENTAL

Para los que viven y trabajan cerca de las costas, la importancia de ser capaces de predecir el estado del mar es evidente. La relevancia de esta capacidad de previsión es obvia no sólo para los que han de navegar sino también para los habitantes de las costas con el objeto de protegerse de posibles inundaciones. Éstas se producen a través de complejas interacciones entre mareas, olas y tormentas. Los vientos y las variaciones en la presión atmosférica debidas a una tormenta pueden producir elevaciones o depresiones de varios metros en el nivel del mar en un período de tiempo que puede ir de varias horas a dos o tres días. Los vientos también generan olas con períodos de hasta veinte segundos y longitudes del orden de decenas de metros. El efecto combinado de estos dos factores puede entrañar un importantísimo riesgo de destrucción e inundación.

La amplitud del desastre depende frecuentemente de un posible efecto de acumulación con las mareas. Cuando estas elevaciones y olas se producen cuando la marea es alta, el riesgo de inundaciones es evidentemente mucho mayor.

Este problema ha llegado a ser considerado como una verdadera prioridad en muchos lugares de nuestro planeta. Sin ir más lejos, en Londres se tiene constancia desde la Edad Media de inundaciones regulares, algunas de ellas muy importantes, debidas a elevaciones inesperadas en el nivel del Támesis. La elevación del agua puede incluso superar por más de dos metros el nivel medio esperado.

Por otra parte, el nivel medio del agua en el puente de Londres se eleva unos 75 centímetros cada siglo, a causa del derretimiento de los hielos polares, y esto hace que el problema sea cada vez más grave.

El proceso por el que se producen estas inundaciones es en grandes líneas el siguiente. Con las bajas presiones atmosféricas en la costa de Canadá, el mar se eleva unos 30 centímetros en una zona de unos 1600 kilómetros de diámetro. Esta elevación de agua se mueve a través del Atlántico a una velocidad de 80-90 Kilómetros por hora hasta llegar al norte de Inglaterra. Ocasionalmente, los vientos del norte pueden empujar esta elevación a lo largo del Mar del Norte enviando millones

de toneladas de agua adicional río arriba en el Támesis.

En 1953 hubo una inundación desastrosa en la que perecieron más de 300 personas y se cubrieron de agua unas 64.000 hectáreas. En ese momento, el Gobierno Británico decidió poner a trabajar a un Comité dirigido por Lord Waverley. *Quedó entonces de manifiesto la necesidad de algún tipo de mecanismo de defensa. Pero no hubo consenso sobre cuál era la mejor solución.* Finalmente, en 1970 se tomó la decisión de construir una barrera que se cierra cuando las previsiones indican un peligroso aumento en el nivel medio de agua. Tras 8 años de trabajo en el que intervinieron 4000 personas, la barrera fue inaugurada en 1984. La barrera está constituida por 10 enormes barreras de acero construidas sobre estructuras de hormigón clavadas en el fondo del río y dotadas de maquinaria que permiten el tráfico con normalidad cuando las barreras están abiertas y su cierre en caso de necesidad. Desde que se construyó, la barrera ha sido cerrada en tres ocasiones.

Obviamente, conviene cerrar la barrera el mínimo número de veces posible puesto que su cierre interfiere en la navegación, causando pérdidas económicas y trastornos importantes y, una vez cerrada, no puede volver a ser abierta hasta que el nivel de agua se iguala a ambos lados de la barrera, siendo el tiempo medio de cierre de unas 8 horas. Por otra parte, se necesitan dos horas para cerrar la barrera, de modo que no se puede esperar a tener constancia visual del aumento del nivel del agua, *sino que ha de hacerse sobre la base de predicciones.*

Con el objeto de tomar la decisión de cerrar sólo cuando es imprescindible se necesitan métodos de previsión sumamente fiables.

En la actualidad, las previsiones se realizan mediante modelos matemáticos que combinan un modelo para las mareas en torno a las Islas Británicas y un modelo de previsión meteorológica. De este modo, se obtienen previsiones con 30 horas de antelación cada hora en puntos seleccionados en torno a la costa.

Este modelo es simulado en el supercomputador de la Oficina Meteorológica Británica y los resultados se transfieren al ordenador de la Barrera del Támesis. Estos datos se trasladan a otro modelo, este último a mayor escala, en el que intervienen el Mar del Norte, el estuario del Támesis y la parte baja del río Támesis en la que afectan las mareas.

Los resultados obtenidos se exhiben y comparan con las previsiones medias y, en vista de estos resultados, la autoridad de la barrera

está habilitada para tomar la decisión de cerrar.

Los modelos que en la actualidad se utilizan son sistemas de EDP que se resuelven mediante métodos numéricos en diferencias finitas. Desde los años sesenta, tanto los modelos como los métodos numéricos han ido evolucionando. Esto, junto con la enorme capacidad de cálculo de los ordenadores de los que hoy se dispone, permite cálculos sumamente fiables. El lector interesado en profundizar en los aspectos relacionados con la modelización y la computación podrá consultar el texto de D. G. Farmer y M. J. Rycroft.³¹

A pesar de que la barrera responde a las necesidades de hoy, el problema no está resuelto a largo plazo. En efecto, tal y como decíamos, el nivel medio del río sube 75 centímetros cada siglo, de modo que, con el tiempo, este método dejará de ser eficiente.

Por último, y aunque este fenómeno se presente con menos frecuencia, conviene tener en cuenta que los bajones en el nivel de agua pueden también ser peligrosos para la navegación pues pueden ser los causantes de que los navíos encallen.

11. PERSPECTIVAS FUTURAS

Son muchos los campos de la Ciencia y Tecnología donde se presentan retos para la Teoría del Control. En algunos casos se confía en ser capaces de resolverlos mediante avances tecnológicos que permitan la implementación de controles más eficientes. Es el caso, por ejemplo, del control molecular mediante tecnología láser que describimos anteriormente. Pero tanto en ésta como en otras muchas aplicaciones se necesita también de importantes avances teóricos. En esta sección mencionamos brevemente algunos de estos temas y los problemas que se plantean:

- **Grandes estructuras espaciales.** Es frecuente escuchar que el despliegue de una antena o telescopio en el espacio ha ocasionado algunos problemas técnicos, algunos de ellos sumamente costosos o incluso que han inutilizado completamente la estructura. Estas estructuras se caracterizan por contener componentes flexibles de gran tamaño, la interconexión de numerosas componentes y el acoplamiento de componentes rígidas y flexibles. El problema de estabilizar estas estructuras de modo que se mantengan orientadas en la dirección adecuada, sin deformarse en exceso, es, por

³¹FARMER, D. G. y RYCROFT, M. J. *Computer Modelling in the Environmental Sciences*. Clarendon Press. Oxford, 1991.

tanto, complejo. El diseño de técnicas de control robustas para estas estructuras es un problema importante en el que se necesita en particular de importantes avances matemáticos. A pesar de los importantes avances que se han producido en la segunda mitad del siglo XX en el control tanto de sistemas en dimensión finita como en infinita, queda aún mucho por hacer para abordar estos sistemas complejos.

- **Robótica.** La robótica es una de las áreas de la Tecnología que presenta los retos más estimulantes para los próximos años. A nadie se le escapa la importancia de desarrollar métodos eficientes de visión artificial, por ejemplo. Pero la Teoría del Control está también en el centro de gravedad en este campo. El desarrollo de la robótica depende de manera fundamental de la eficiencia y robustez de los algoritmos computacionales para el control de los robots. No resulta difícil imaginar la complejidad del proceso de control que hace que un robot camine y que lo haga de manera estable o sea capaz de coger con sus “manos” un objeto.
- **Sistemas energéticos y redes informáticas.** Es ya evidente que el planeta presenta una tendencia irreversible a la globalización. Esto es válido en muchos ámbitos: el tráfico aéreo, los sistemas de generación y distribución de energía, o las redes informáticas. Esto hace que muchas veces haya que tomar decisiones en ámbitos muy concretos (geográficamente hablando, por ejemplo), con poca información de lo que ocurre en otros, pero siendo conscientes de que éstos pueden influir. De ahí la necesidad de crear métodos y técnicas de control para grandes sistemas interconectados.
- **Control de la combustión.** Se trata de un tema relevante en la industria aeronáutica y aeroespacial en las que se hace imprescindible controlar las inestabilidades en la combustión que, normalmente, viene acompañada de perturbaciones acústicas considerables. En el pasado se ha realizado el énfasis en los aspectos del diseño, modificando la geometría del sistema para interferir la interacción combustión-acústica o incorporando elementos disipativos. El control activo de la combustión mediante mecanismos térmicos o acústicos, es un tema en el que casi todo está por explorar.
- **Control de Fluidos.** La interacción entre el Control y la dinámica de fluidos es en estos momentos muy intensa. Se trata de un problema relevante en aeronáutica puesto que la dinámica estructural del avión (en sus alas, por ejemplo) está acoplada con el flujo

del aire en su entorno. Si bien es cierto que en los aviones convencionales se puede en gran medida ignorar este acoplamiento, es muy probable que los aviones del futuro tengan que incorporar mecanismos de control para evitar la aparición de turbulencias en torno a las alas. Desde un punto de vista matemático casi todo está por hacer, tanto en lo que respecta a la modelización, como al control y a los aspectos computacionales.

- **Control de Plasma.** La obtención de reacciones de fusión controladas es uno de los mayores retos para resolver los problemas energéticos del planeta.

En la actualidad, una de las vías más prometedoras es la de los *tokomaks*: máquinas en las que se confina el plasma mediante mecanismos electromagnéticos. El problema fundamental es mantener el plasma, de muy alta densidad, a una temperatura muy alta en la configuración deseada durante intervalos de tiempo prolongados a pesar de sus inestabilidades. Esto se realiza a través de sensores mediante los cuales se obtiene la información necesaria para efectuar cambios rápidos y precisos de las corrientes que han de compensar las perturbaciones del plasma. Todavía hay mucho que hacer en este terreno desde el punto de vista matemático. Existen también problemas de identificación importantes en los tokomaks a causa de la dificultad para realizar las mediciones. Se trata pues de un campo que presenta grandes retos para la Teoría Matemática del Control y de los problemas inversos.

- **Procesos de solidificación e industria del acero.** El importante e imparable avance de las Ciencias de los Materiales ha producido estudios intensivos de los procesos de solidificación. La forma y la estabilidad de la interfase sólido-líquido es en este ámbito un tema crucial, puesto que una interfase irregular puede ser la causante de la obtención de un producto no deseado. Las fuentes de inestabilidad son diversas: convección, tensión superficial, ... Se han producido avances importantes en la comprensión matemática de las interfases en el campo denominado de los Problemas de Frontera Libre. Desde el punto de vista del Control se plantean dos problemas importantes. Uno, de carácter inverso, consistente en reconstruir la interfase a través de mediciones indirectas y, otro, el de su control a través de mecanismos de calentamiento, de aplicación de campos magnéticos o eléctricos o de rotaciones de la aleación en el horno. La teoría matemática correspondiente puede decirse que no existe.

Con el objeto de obtener acero de gran calidad es preciso controlar

de manera precisa la temperatura en la fase de enfriamiento. Pero la banda más caliente, sumamente fina, se mueve a una gran velocidad. El diseño de mecanismos de control que tengan en cuenta tanto la velocidad de la banda como del proceso de enfriamiento es otro gran reto.

- **Investigación biomédica.** El diseño de terapias médicas adecuadas depende en gran medida de una comprensión adecuada de la dinámica fisiológica. Se trata de un campo sumamente activo en estos momentos donde casi todo está por hacer desde un punto de vista matemático. La Teoría del Control habrá de jugar también en este terreno un papel importante. Como ejemplo, cabe mencionar el diseño de mecanismos de suministro de insulina equipados de "chips" de control.
- **Hidrología.** El problema de la gestión de los recursos hídricos es, sin duda, sumamente relevante en nuestros días, unas veces porque éstos son escasos, otras porque se encuentran contaminados o simplemente por la complejidad de la red de suministros y usuarios tanto domésticos como agrícolas e industriales. Los problemas de control que se plantean son muy diversos. Podemos mencionar al menos dos. Problemas de identificación de parámetros en los que se trata de determinar la ubicación de los sensores que proporcionan información suficiente para una eficiente extracción y suministro, por un lado, y, por otro, el diseño de estrategias de gestión eficientes.
- **Extracción de recursos naturales.** Se están haciendo importantes esfuerzos de modelización y de índole matemática en el área de la simulación de las reservas subterráneas tanto hídricas como minerales o petrolíferas. El objeto es optimizar las estrategias de extracción. Nuevamente se plantean problemas inversos, de análisis y, por ejemplo, de control de la interfase entre el fluido inyectado y el extraído.
- **Economía.** Las Matemáticas están jugando hoy en día un papel activo en el mundo de las finanzas. En efecto, la utilización de modelos matemáticos para predecir las fluctuaciones de los mercados financieros es algo común. Se trata frecuentemente de modelos estocásticos en los que la Teoría del Control ya existente puede ser de gran utilidad a la hora de diseñar estrategias óptimas de inversión y consumo.
- **Sistemas de manufacturación.** Los grandes sistemas de manufacturación automatizada están diseñados como sistemas flexibles

para permitir cambios en la planificación de la producción en atención a la demanda. Pero esta flexibilidad creciente se obtiene a base de sistemas cada vez más complejos. La Teoría Matemática del Control se encuentra en este terreno con retos importantes para el diseño de mecanismos de control computerizados eficientes.

- **Evaluación de la eficiencia en sistemas computerizados.** Los paquetes de "software" que existen en la actualidad para evaluar la eficiencia de los sistemas de computación están basados en su representación a través de la Teoría de Redes. El desarrollo de los sistemas de computación en paralelo y sincronizados hace que estos modelos sean hoy insuficientes. Es necesario desarrollar nuevos modelos, cosa en la que la Teoría Estocástica del Control de sistemas discretos puede ser de gran utilidad.
- **Control de sistemas asistidos por ordenador.** Tal y como mencionamos, los problemas de control a los que nos enfrentamos en la actualidad son de una gran complejidad. Es impensable la obtención de estrategias eficientes de control sin que en estos procesos se cuente con la asistencia de los ordenadores. Es por eso que es importante el diseño de sistemas de control que ya incorporen este aspecto. Se trata de un campo de investigación pluridisciplinar en el que intervienen en particular la Teoría del Control, las Ciencias de la Computación, el Análisis Numérico y la Optimización.

BIBLIOGRAFÍA

- ACHACHE, J. y BENSOUSSAN, A. "Assimilation, simulation et prévision". *MATAPLI*, 60. 1999. Págs. 25-34.
- ATHANS, M. "Perspectives in Modern Control Theory". En SOLKOVITZ, E. I. (ed.) *Science, Technology, and the Modern Navy, Thirtieth Anniversary 1946-1976*. ONR-37. Arlington, 1976. Pág. 143.
- AVDONIN, S. A. e IVANOV, S. A. *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1995.
- BABICH, V. M. "The Higher-Dimensional WKB Method or Ray Method". En *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, 34. Springer-Verlag. Berlín, 1997.
- BARATTA, A. y RODELLAR, J. (Eds.) "Proceedings of the First European Convergence on Structural Control". *Series on Stability, Vibration and Control of Systems*, 13. World Scientific, 1996.
- BARDOS, C., LEBEAU, G. y RAUCH, J. "Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary". *SIAM J. Cont. Optim.*, 30. 1992. Págs. 1024-1065.
- BENNET, S. "A history of control engineering 1930-1955". *IEE Control Engineering Series*, 47. Peter Peregrinus Ltd. Londres, 1993.
- BENNET, S. "A history of control engineering 1800-1930". *IEE Control Engineering Series*, 8. Peter Peregrinus Ltd. Londres, 1979.
- BERNOULLI, D. *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*. *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, 9. 1753. Págs. 147-172 y 173-195.
- BREZIS, H. *Análisis Funcional*. Alianza Universidad. Madrid, 1983.
- BRUMER, P. y SHAPIRO, M. "Laser control of chemical reactions". *Scientific American*. Marzo, 1995. Págs. 34-39.
- CAMPBELL S. L. y HABERMAN, R. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor frontera*. McGraw-Hill. México, 1998.

CASAS, E. y MATEOS, M. "Uniform Convergence of the FEM. Applications to State Constrained Control Problems, Computational and applied Mathematics". Special issue in memory of Jacques-Louis Lions. En vías de publicación.

CASTRO, C. y Zuazua, E. "Concentration and lack of observability of waves on highly heterogeneous media". *Archive Rat. mech. Anal.* En vías de publicación.

CHAPMAN, S. J., LAWRY, J. M. H., OCKENDON, J.R. y TEW, R. H. "On the theory of complex rays". *SIAM Review.* 41 (3). 1999. Págs. 417-509.

COTTON, F., BARD, P.-Y., BERGE, C. y HATZFELD, D. "¿Qué es lo que hace vibrar Grenoble?". *Mundo Científico*, 203. 1999. Págs. 21-23.

COBO PARRA, P. "Control activo del ruido". *Textos Universitarios*, 26. CSIC. Madrid, 1997.

CORON, J.-M. "On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids". *J. Maths Pures Appl.* 75 (2). 1996. Págs. 155-188.

COURANT, R. y HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*, vol. II. Interscience Publishers. New York, 1962.

DÁGER, R. y ZUAZUA, E. "Spectral boundary controllability of networks of strings". *C. R. Acad. Sci. Paris*, 334. 2002. Págs. 545-550.

D'ALEMBERT, J. R. "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration". *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, 3. 1747. Págs. 214-219 y *Suite des recherches*, 3. 1747. Págs. 220-249.

D'ALEMBERT, J.R. "Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration". *Hist. de l'Acad. Roy de Berlin*, 6. 1750. Págs. 355-360.

DAL MASO, G. *An introduction to Γ -convergence*. Birkhäuser. Boston, 1993.

DORF, R. C. *Sistemas modernos de control*. Addison Wesley Iberoamericana. México D.F., 1989.

EASTHAM, M. S. P. *The spectral theory of periodic differential equations*. Scottish Academic Press. Edinburgh, 1973.

EKELAND, I. y TEMAM, R. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod. París, 1974.

EVANS, L. C. "*Partial Differential Equations*". *American Mathematical Society, Graduate Texts in Mathematics*, 19. Providence, 1998.

FARMER, D. G. y RYCROFT, M. J. *Computer Modelling in the Environmental Sciences*. Clarendon press. Oxford, 1991.

FATTORINI, H. O. "*Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*". *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 62. Cambridge University Press. Cambridge, 1999.

FERNÁNDEZ-CARA, E. y ZUAZUA, E. "*Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equations*". *Annales Inst. Henri Poincaré. Analyse non-linéaire*, 2000. En vías de publicación.

FLEMING, W. y SONER, M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag. Berlín, 1993.

FOURIER, J. *Théorie analytique de la chaleur*. Jacques Gabay. París, 1988. (Reedición del trabajo inicialmente editado por Firmin Didot, Père et Fils. París, 1822).

FULLER, A. T. "*The early development of control theory. Parts I and II*". *J. Dynamic Systems, measurements & Control*, 98. 1976. Págs. 109-118 y 224-235.

GLOWINSKI, R. "*Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control for the wave equation*". *J. Compt. Physics*, 103 (2). 1992. Págs. 189-221.

HAIRER, E. y WANNER, G. *Analysis by its History. Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics*. Springer Verlag. New York, 1996.

HALL, H.R. *Governors and governing mechanisms. (2nd ed.)* The Technical Publishing Co. Manchester, 1907.

HANSEN, S. y ZUAZUA, E. "Controllability and stabilization of strings with point masses". *SIAM J. Cont. Optim.*, 33 (5). 1995. Págs. 1357-1391.

INFANTE, J. A. y ZUAZUA, E. "Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1 - d wave equation". *M²AN*, 33 (2). 1999. Págs. 407-438.

ISAKOV, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag. Berlín, 1998.

JOHN, F. *Partial Differential Equations*. (4th ed.). Springer-Verlag. Nueva York, 1982.

JONES Jr., B. F. "A fundamental solution of the heat equation which is supported in a strip". *J. Math. Anal. Appl.*, 60. 1977. Págs. 314-324.

KALMAN, R. E. "A new approach to linear filtering and prediction problems." *ASME Trans.*, 82D. 1960. Págs. 33-45.

KALMAN, R. E. y BUCY, R. S. "New results in linear filtering and prediction theory". *Trans. ASME (J. Basic engineering)*, 83D. 1961. Págs. 95-108.

KALMAN, R. E. "Optimization, mathematical theory of, control theory". En *Encyclopaedia Britannica*, (15th ed.). Londres, 1974 Págs. 636-638.

KAVIAN, O. *Introduction a la théorie des points critiques. Mathématiques & Applications*, 13. Springer-Verlag. Berlín, 1993.

KELLER, J. B. "Semiclassical mechanics." *SIAM Rev.*, 27. 1985. Págs. 485-504.

KORTEWEG, D.J. y De VRIES, G. "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves". *Philos. Mag.*, 39. 1895. Págs. 422-423.

KRUZHKOVA, N. S. "First-order quasilinear equations in several independent variables". *Mat. USSR-Sb.*, 10. 1970. Págs. 217-243.

LAGNESE, J. E., LEUGERING, G. y SCHMIDT, E. J. P. G. "Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures". Birkhäuser. Boston-Basel-Berlín, 1994.

LARROUTUROU, B. y LIONS, P. L. *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur: Optimisation et analyse numérique*, Publicaciones de la Escuela Politécnica de París. París, 1996.

LEE, E. B. y MARKUS, L. *Foundations of Optimal Control Theory*. The SIAM Series in Applied Mathematics, John Wiley & Sons. New York, 1967.

Le TALLEC, G. "Domain decomposition methods in computational mechanics". *Computational Mechanics Advances*, 1. 1994. Págs. 121-220.

LEUGERING, G. y ZUAZUA, E. "On exact controllability of generic trees". En *Contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. ESAIM Proceedings*, vol. 8. F. Conrad y M. Tucsnak eds. Nancy (Francia), marzo 1999. Págs. 95-105. (<http://www.esaim.emath.fr/>).

LEWIS, F. L. "Challenges to control: a collective view". Report from the workshop held at the Univ. Santa Clara on Sept. 18-19, 1986. *IEEE Trans. Automatic Control*, 32. 1987. Págs. 275-285.

LEVINE, W. S. *Control System Applications*. CRC Press. Boca Raton (E.E.U.U.), 2000.

LI, X. y YONG, J. *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser. Boston, 1995.

LIONS, J.-L. *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. Tomos 1 y 2. RMA 8 & 9*. Masson. París, 1988.

LIONS, P.-L. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Research Notes in Mathematics*, 69. Pitman. Essex, 1982.

LIONS, J.-L. "Are there connections between turbulence and controllability?" En *Analyse et optimisation de systèmes. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 144. Springer-Verlag. Berlín, 1990.

LIONS, J.-L. y ZUAZUA, E. "Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations". *Annali. Scuola Norm. Sup. Pisa*, XXVI. 1998. Págs. 605-621.

LÓPEZ, A. y ZUAZUA, E. "Some new results related to the null-controllability of the $1-d$ heat equation". *Seminaire Equations aux Dérivées Partielles*. Ecole Polytechnique. París, 1997-1998.

LUZIN, N. "Function: Part I". *Amer. Math. Monthly*, 105. 1998. Págs. 59-67. "Part II". Págs. 263-270.

MACIA, F. y ZUAZUA, E. "On the lack of controllability of wave equations: a gaussian beam approach". *Asymptotic Analysis*. En vías de publicación.

MAYR, O. *The origins of feedback control*. MIT Press. Cambridge, MA, 1970.

MARTIN, Ph. y ROUCHON, P. "Systèmes plats et suivi des trajectoires". *Journées X-UPS*. Mayo, 1999.

MICU, S. y ZUAZUA, E. "Boundary controllability of a linear hybrid system arising in the control of noise". *SIAM J. Cont. Optim.*, 35 (5). 1997. Págs. 1614-1638.

MICU, S. y ZUAZUA, E. "Asymptotics for the spectrum of a fluid/structure hybrid system arising in the control of noise". *SIAM J. Math. Anal.*, 29 (4). 1998. Págs. 967-1001.

MOIN, P. y BEWLEY, Th. "Feedback control of turbulence". En *Mechanics USA 1994*. A. S. Kobayashi ed. *Appl. Mech. Rev.*, 47 (6). 1994. Págs. S3-S13.

NACHBIN, A. "Some Mathematical Models for Wave Propagation". *Cubo Matemática Educacional*. Universidad de la Frontera, Teumuco (Chile). En vías de publicación.

OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Hispanoamericana. México D.F., 1998.

RALSTON, J. "Solution of the wave equation with localized energy". *Comm. Pure Appl. Math.*, 22. 1969. Págs. 807-823.

RALSTON, J. "Gaussian beams and the propagation of singularities". En *Studies in Partial Differential Equations*. MAA Studies in Mathematics, 23. W. Littman ed. 1982. Págs. 206-248.

REEDS, J. A. y SHEPP, L. A. "Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards". *Pacific J. Math.*, 145. 1990. Págs. 367-393.

ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press. Princeton, 1970.

RUSSELL, D. L. "Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions". *SIAM Rev.*, 20. 1978. Págs. 639-739.

SALOMONE, M. "Los humanoides ya están aquí". *El País Semanal*, 12338. Madrid, 18 de junio del 2000.

SÁNCHEZ-CALLE, A. "El problema espectral inverso. ¿puede oírse la forma de un tambor?". *Fronteras de la Ciencia, CSIC*, 14. Madrid, 1997. Págs. 43-46.

SIAM. *Future Directions in Control Theory. Report of the Panel of Future Directions in Control Theory*. SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences. SIAM. Philadelphia, 1988.

SONTAG, E. D. *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems. Second edition. Texts in Applied Mathematics*, 6. Springer-Verlag. Nueva York, 1998.

STRANG, G. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press. Massachusetts, 1986.

SUSSMANN, H. J. "Résultats récents sur les courbes optimales". *Journée Annuelle de la Société Mathématique de France*. Junio, 2000. (<http://www.math.rutgers.edu/~sussmann>)

SUSSMANN, H.J. y TANG, G. "Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control". *Rutgers Center for Systems and Control (SYCON) Report 91-10*. Septiembre, 1991. (<http://www.math.rutgers.edu/~sussmann>)

TAYLOR, M. E. *Partial Differential Equations. Basic Theory*. Springer-Verlag. Nueva York, 1996.

VÁZQUEZ, L., STREIT, L. y PÉREZ-GARCÍA, V. M. (Eds.) *"Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems: Theory and Applications"*. World Scientific. 1996.

WEINBERGER, H. F. *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Reverté, Barcelona, 1986.

WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley. Nueva York, 1974.

WIENER, N. *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1948.

YOUNG, R. M. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press. Nueva York, 1980.

ZIENKIEWICZ, O. C. "Achievements and some unsolved problems of the finite element method". *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47. 2000. Págs. 9-28.

ZUAZUA, E. "Controllability of the linear system of thermoelasticity". *J. Math. Pures Appl.*, 74. 1995. Págs. 303-346.

ZUAZUA, E. "Ondas continuas y discretas". En *Actas del Curso de Formación de Profesorado "Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria"*, Secretaría General Técnica, Central de Publicaciones del MECD/UIMP, Madrid, 2000 y Boletín SEMA, 16. 2000. Págs. 13-42.

ZUAZUA, E. "Controllability of Partial Differential Equations and its Semi-Discrete Approximations". *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8 (2). 2002. Págs. 469-513.

**EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE
FORMACIÓN DEL PROFESORADO**

**Subdirección General de Información y Publicaciones
del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte**

EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Subdirección General de Información y Publicaciones
del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte

El Instituto Superior de Formación del Profesorado tiene como objetivo impulsar, incentivar, financiar, apoyar y promover acciones formativas realizadas por las instituciones, Universidades y entidades sin ánimo de lucro, de interés para los docentes de todo el Estado Español que ejercen sus funciones en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas. Pero, tan importante como ello, es difundir, extender y dar a conocer, en el mayor número de foros posible, y al mayor número de profesores, el desarrollo de estas acciones. Para cumplir este objetivo, el I.S.F.P. pondrá a disposición del profesorado español, con destino a las bibliotecas de Centros y Departamentos, **dos colecciones**, divididas cada una en cuatro series.

Con estas colecciones, como acabamos de señalar, se pretende difundir los contenidos de los cursos, congresos, investigaciones y actividades que se impulsan desde el Instituto Superior de Formación del Profesorado, con el fin de que su penetración difusora en el mundo educativo llegue al máximo posible, estableciéndose así una fructífera intercomunicación dentro de todo el territorio del Estado.

La primera de nuestras colecciones se denomina **Aulas de Verano**, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al conocimiento de las conferencias, ponencias, mesas redondas, talleres y actividades profesionales docentes que se desarrollan durante los veranos en la *Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander*, en los cursos de la *Universidad Complutense en El Escorial*, en los de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila* y en los de la *Fundación Universidad de Verano de Castilla y León en Segovia*. En general, esta colección pretende dar a conocer todas aquellas actividades que desarrollamos durante el período estival.

Se divide en cuatro series, dedicadas las tres primeras a la Educación Secundaria (la tercera a F.P.), y la cuarta a Infantil y Primaria.

Colección **Aulas de Verano**, que se identifica con el
color "bermellón Salamanca"

- | | |
|-----------------------|----------------|
| • Serie "Ciencias" | Color verde |
| • Serie "Humanidades" | Color azul |
| • Serie "Técnicas" | Color naranja |
| • Serie "Principios" | Color amarillo |

La segunda colección se denomina **Conocimiento Educativo**. Con ella pretendemos tanto difundir investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, como dar a conocer aquellas acciones educativas que desarrolla el Instituto Superior de Formación del Profesorado durante del año académico.

La primera serie está dedicada fundamentalmente a investigación didáctica y, en particular, a las didácticas específicas de cada disciplina; la segunda serie se dirige al análisis de la situación educativa y estudios generales, siendo esta serie el lugar donde se darán a conocer nuestros Congresos EN_CLAVE DE CALID@D; la tercera serie, "Aula Permanente", da a conocer los distintos cursos que realizamos durante el período docente, y la cuarta serie, como su nombre indica, se dedica a estudios, siempre desde la perspectiva de la educación, sobre nuestro Patrimonio. Dentro de esta serie se publican los cinco anuarios europeos «Eulde», revistas de alta investigación en Didáctica de las Matemáticas, de las Lenguas, de las Ciencias Experimentales, de la Historia, la Geografía y las Ciencias Sociales y de las Expresiones (Plástica, Musical y Corporal). Se publican simultáneamente en castellano, francés, italiano, portugués e inglés.

Colección **Conocimiento Educativo**, que se identifica con el
color amarillo oficial

- | | |
|-----------------------------|---------------|
| • Serie "Didáctica" | Color azul |
| • Serie "Situación" | Color verde |
| • Serie "Aula Permanente" | Color rojo |
| • Serie "Patrimonio" | Color violeta |
| • Anuarios Europeos «Eulde» | Color blanco |

Estas colecciones, como hemos señalado, tienen un carácter de difusión y extensión educativa, que prestará un servicio a la intercomunicación, como hemos dicho también, entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas de nuestro Estado. Pero, también, se pretende con ellas establecer un vehículo del máximo rigor científico y académico en el que encuentren su lugar el tra-

bajo, el estudio, la reflexión y la investigación de todo el profesorado español, de todos los niveles, sobre la problemática educativa.

Esta segunda función es singularmente importante, porque incentiva en los docentes el imprescindible objetivo investigador sobre la propia función, lo que constituye la única vía científica y, por tanto, con garantías de eficacia, para el más positivo desarrollo de la formación personal y los aprendizajes de calidad en los niños y los jóvenes españoles.

Índices de calidad de las publicaciones

Todos los proyectos de publicación, en cualquiera de las dos colecciones, estarán avalados por cinco informes razonados, emitidos cada uno por un Profesor Doctor de reconocido prestigio de diferente centro, docente o de investigación, español o del extranjero. Al menos tres de los cinco informantes han de ser Catedráticos de Universidad, y al menos tres de los cinco centros, han de ser españoles.

Los programas de publicación son aprobados por una comisión compuesta por el Director del Instituto Superior de Formación del Profesorado, la Directora de Programas y la Directora de Publicaciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado y los Directores (o persona en quien deleguen) del Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte y del INCE.

NORMAS DE EDICIÓN DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO:

- Los artículos han de ser inéditos.
- Se entregarán en papel y se añadirá una copia en disquete (en un procesador de textos tipo Word).
- El autor/es debe dar los datos personales siguientes: referencia profesional, dirección y teléfono personal y del trabajo. En caso de trabajos colectivos, se referenciarán estos datos de todos los autores.
- Debe haber, al principio de cada artículo, un recuadro con un índice de los temas que trata el mismo.
- El autor debe huir de textos corridos y utilizar con la frecuencia adecuada, epígrafes y subepígrafes que aparezcan distribuidos en el texto, al menos, en cada doble página.
- Cuando se reproduzcan textos de autores, se entrecomillarán y se pondrán en cursiva.
- Al citar un libro, siempre debe aparecer la página de la que se toma la cita, excepto si se trata de un comentario general.
- Se deben adjuntar fotografías, esquemas, trabajos de alumnos... que ilustren o expliquen el contenido del texto.
- Se debe adjuntar en un listado numerado correlativamente, las notas que se van a poner a pie de página, según las referencias incluidas en el texto.
- Al final de cada artículo, se adjuntará la lista de la bibliografía utilizada.
- La bibliografía debe ser citada de la siguiente manera: apellidos/s (con mayúsculas), coma; nombre según aparezca en el libro(en letra corriente), punto; título del libro en cursiva, punto; editorial, punto; ciudad de edición, coma y fecha de publicación, punto. Así se realizarán también las citas a pie de página.

CENTRAL DE EDICIONES DEL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

- **Dirección y coordinación (I.S.F.P.):**
Paseo del Prado 28, 6.ª planta. 28014. Madrid. Teléfono: 91.506.57.17.
- **Suscripciones y distribución:**
Instituto de Técnicas Educativas. C/ Alalpardo s/n. 28806.
Alcalá de Henares. Teléfono: 91.889.18.50.
- **Puntos de venta:**
 - Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. C/ Alcalá, 36. Madrid.
 - Subdirección General de Información y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. C/ Juan del Rosal s/n. Madrid.

TÍTULOS EDITADOS POR EL INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

	COLECCIÓN	SERIE
- <i>La Educación Artística, clave para el desarrollo de la creatividad</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>La experimentación en la enseñanza de las Ciencias</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>Metodología en la enseñanza del Inglés</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>Destrezas comunicativas en la Lengua Española</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>La Geografía y la Historia, elementos del Medio</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>La enseñanza de las Matemáticas a debate: referentes europeos</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias
- <i>El lenguaje de las Matemáticas en sus aplicaciones</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias
- <i>La iconografía en la enseñanza de la Historia del Arte</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
- <i>Grandes avances de la Ciencia y la Tecnología</i>	AULAS DE VERANO	Técnicas
- <i>EN_CLAVE DE CALID@D: la Dirección Escolar</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Situación
- <i>Felipe V y el Palacio Real de La Granja</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Patrimonio
- <i>Didáctica de la poesía en la Educación Secundaria</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Didáctica
- <i>La seducción de la lectura en Edades tempranas</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>Aplicaciones de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de la Lengua Castellana</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>Lenguas para abrir camino</i>	AULAS DE VERANO	Principios

- <i>La dimensión artística y social de la ciudad</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
- <i>La Lengua, vehículo cultural multidisciplinar</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
- <i>Lenguas extranjeras: hacia un nuevo marco de referencia en su aprendizaje</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades
- <i>Globalización, crisis ambiental y educación</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias
- <i>Los fundamentos teórico-didácticos de la Educación Física</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Didáctica
- <i>Los lenguajes de la expresión</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>La comunicación literaria en las primeras edades</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>La Física y la Química: del descubrimiento a la intervención</i> .	AULAS DE VERANO	Ciencias
- <i>La Estadística y la Probabilidad en el Bachillerato</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Didáctica
- <i>La Estadística y la Probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Didáctica
- <i>Nuevas profesiones para el servicio a la sociedad</i>	AULAS DE VERANO	Técnicas
- <i>EN_CLAVE DE CALID@D: Hacia el éxito escolar</i>	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Situación
- <i>El número, agente integrador del conocimiento</i>	AULAS DE VERANO	Ciencias
- <i>Los lenguajes de las Ciencias</i>	AULAS DE VERANO	Principios
- <i>El entorno de Segovia en la historia de la dinastía de Borbón</i>	AULAS DE VERANO	Humanidades

Este volumen tiene su origen en el CURSO DE FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA:

“De la Aritmética al análisis: los nuevos currícula de Matemáticas de la
Enseñanza Secundaria”, que se celebró en la Fundación General de la
Universidad Complutense, en El Escorial, en el verano de 2002.





La primera de nuestras colecciones se denomina **Aulas de Verano**, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al conocimiento de las conferencias, ponencias, mesas redondas, talleres y actividades profesionales docentes que se desarrollan durante los veranos en la *Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander*, en los cursos de la *Universidad Complutense en El Escorial*, en los de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila* y en los de la *Fundación Universidad de Verano de Castilla y León en Segovia*.

Colección **Aulas de Verano**, que se identifica con el color «bermellón Salamanca».

- | | |
|-----------------------|----------------|
| • Serie «Ciencias» | Color verde |
| • Serie «Humanidades» | Color azul |
| • Serie «Técnicas» | Color naranja |
| • Serie «Principios» | Color amarillo |

La segunda colección se denomina **Conocimiento Educativo**. Con ella pretendemos tanto difundir investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, como dar a conocer aquellas acciones educativas que desarrolla el Instituto Superior de Formación del Profesorado durante el año académico.

Colección **Conocimiento Educativo**, que se identifica con el color «amarillo oficial».

- | | |
|---------------------------|---------------|
| • Serie «Didáctica» | Color azul |
| • Serie «Situación» | Color verde |
| • Serie «Aula Permanente» | Color rojo |
| • Serie «Patrimonio» | Color violeta |

Estas colecciones tienen un carácter de difusión y extensión educativa, al servicio de la intercomunicación entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas de nuestro Estado.



MINISTERIO
DE EDUCACIÓN
Y CIENCIA