GEOMETRIA

MATEMATICAS: 8

Centros de Profesores

Ministerio de Educación y Ciencia
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

GEOMETRIA

Selección de: MARION WALTER

Nivel: Enseñanzas Medias y E.G.B.

Colección: ***"Documentos y propuestas de trabajo"***

Título original GEOMETRY
Edición inglesa de la Association of Teachers of Mathematics, 1983
Traducción: Mario MELENDEZ

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
N.I.P.O.: 176-87-153-2
I.S.B.N.: 84-369-1383-3
Depósito Legal: M-5177-1988
Imprime: MARIN ALVAREZ, HNOS.

INDICE

NOTA: Los números de las páginas se refieren a los comentarios del editor sobre los artículos que vienen a continuación.

Prólogo

Esta obra está formada por una colección de artículos relacionados con la Geometría. En ella se tratan temas muy variados: actividades y experiencias de clase junto con razonamientos y maneras de realizarlos, ordenadores y aplicaciones de la geometría.

En muchos de estos artículos hay narraciones que tienen el encanto de las escenas vividas; en otros hay sugerencias para dejar volar la imaginación, tanto la propia como la de los alumnos y para sacar consecuencias de lo imaginado, en otros se dan ideas para razonar en clase y para convencer al público que allí se tenga, o para construir nuevas formas geométricas que permitan obtener resultados de todo tipo.

Hay que destacar en primer lugar el lenguaje informal en que están redactados muchos de ellos. Alguno trata de contar lo que pasa durante una clase de matemáticas o durante una sesión dedicada al perfeccionamiento del profesorado con todo el realismo posible. No es pues un texto formalizado con instrucciones precisas, con teoremas y demostraciones a la manera tradicional, sino una sugestiva colección de artículos de lectura muy amena y que puedan hacer que las clases sean mucho más entretenidas sin que pierdan por ello su objetivo de enseñar.

Muchas veces me he preguntado por qué nuestros profesores no son capaces de contar - sin falso pudor - lo que les pasa en una clase como lo hacen los profesores anglosajones. Estoy seguro de que experiencias similares a las expuestas han tenido lugar en nuestras aulas, de que el mismo cariño hacia los alumnos y la misma preocupación por que tengan un aprendizaje ameno y efectivo que se desprende de las situaciones y comentarios de los profesores que desfilan por las páginas de este libro, la han sentido y las ha vivido nuestros profesores como una cosa íntima, no susceptible de ser contadas por que no tiene la seriedad de un texto formalizado. Posiblemente la lectura de algunos artículos les confirme que se pueden contar y que la gente puede aprender.

Aparecen en el texto viejos temas de Geometría, a veces enterrados, pero nunca olvidados. Muchos de los lectores recordarán cosas de sus años de juventud.

Fueron eficaces entonces para enseñar una forma de razonamiento y lo siguen siendo ahora, aunque la formalización del álgebra los haya dejado en un segundo o tercer plano - o los haya hecho casi desaparecer. Algunos se pueden usar para enseñar cuestiones algebráicas - un redescubrimiento de nuestro tiempo. Los profesores que narran su enseñanza en una clase efectiva y real nos cuentan que tienen que hacerlo en algún caso fuera del programa habitual de matemáticas; una música que sonará conocida a muchos de los que lo lean. Posiblemente, también, un reconocimiento de que no son tan distintos los profesores y los planes de estudio en los diversos países.

Al lado de estos viejos temas hay cuestiones nuevas, un deseo de utilizar todo lo que se pueda para razonar geométricamente sobre ello –para matematizar nuestro mundo circundante. Se puede, efectivamente, razonar con muchas cosas; con mosaicos, con vallas que tengan dibujos geométricos, con los dibujos de los edredones, con la manera de calcular áreas por medio del principio de Cavalieri. Todas ellas son muy sugestivas, y sin duda, si se llevan a la práctica en una clase permitirán que los alumnos adquieran el gusto por razonar– lo que estaba en la antigua geometría que se enseñaba antaño –y el placer de un razonamiento bien hecho. Un razonamiento basado en procedimientos sencillos –rigurosos, pero no demasiado formalizados de manera que no pierdan el encanto de la espontaneidad.

En cualquier caso, muchos de los artículos son amenos, yo diría que divertidos. No es ya la cuestión de que el alumno vaya a aprender en una clase y el profesor vaya a aprender leyendo este libro; cosas ambas que posiblemente sean así. La cuestión es que en las clases que se describen el alumno aparentemente aprende y se divierte, y que, por lo menos en lo que a mí respecta, leyendo este libro he aprendido efectivamente muchas cosas, y también me he divertido. Pienso que otros habrá a quienes pase lo mismo.

Mario Meléndez

Introducción

Durante muchos años he utilizado muchas de las ideas expuestas en Matematics Teaching, y mis alumnos (profesores asistentes a cursos de formación inicial y a cursos de formación permanente) han leido muchos de sus artículos. Estos artículos tratan de una gran variedad de temas pero, debido a que la geometría es mi principal esfera de interés –especialmente la geometría tratada de una manera informal, –he utilizado muchos más artículos relacionados con la geometría que con cualquier otro tema.

Cuando la ATM me pidió una selección de artículos que tratasen de geometría sentí un gran placer en hacerlo, ya que la geometría está todavía bastante relegada en los libros de texto. Es conveniente mencionar otra publicación de la ATM, **"Imágenes Geométricas"** y tambiém las numerosas publicaciones Leapfrogs (1) que han aumentado extraordinariamente nuestro acervo de ideas geométricas.

Fue una gran tentación imposible de realizar el incluir **todos** los artículos que tratan de geometría. Resultó incluso evidente que no era posible incluir todos los artículos que tratan de un solo tema. Con la esperanza de que se pueda hacer en lo sucesivo una coleccion separada de "Mosaicos" he incluido muy pocos artículos sobre ese tema.

Hay diversas serie de artículos escritos por un solo autor, como por ejemplo "Romper las cadenas de Euclides" de David Fielker (2). No he seleccionado niguna confiando en que esas series serán publicadas en algún otro lugar y porque no me parece honesto hacia el autor el seleccionar únicamente uno o dos artículos de la serie.

He resuelto la cuestión embarazosa de añadir o no algunos de mis propios artículos incluyendo únicamente unos cuantos que **otras personas** me han asegurado que habían encontrado particularmente útiles.

Hay varias formas de utilizar los comentarios que acompañan a los diversos grupos de artículos:

- Leerlos cuando aparecen, **antes** de los artículos; espero que sean guías útiles.
- Leerlos después de haber leído todas sus partes, porque entonces pueden parecer más pertinentes.
- Leerlos antes y después si le gustan los artículos.
- ¡No leerlos en absoluto!

En cualquier caso espero que el disponer de esta colección de artículos reunidos en una sola publicación será útil, y que el lector encontrará un gran placer al leerla.

---

(1) Las publicaciones Leapfrogs se distribuyen habitualmente por Tarquin Mathematics, Stradbroke, Diss, Norfolk.

(2) Esos artículos forman parte de otro libro de esta serie.

En cualquier caso, muchos de los artículos son amenos, yo diría que divertidos. No es ya la cuestión de que el alumno vaya a aprender en una clase y el profesor vaya a aprender leyendo este libro; cosas ambas que posiblemente sean así. La cuestión es que en las clases que se describen el alumno aparentemente aprende y se divierte, y que, por lo menos en lo que a mí respecta, leyendo este libro he aprendido efectivamente muchas cosas, y también me he divertido. Pienso que otros habrá a quienes pase lo mismo.

Mario Meléndez

Introducción

Durante muchos años he utilizado muchas de las ideas expuestas en Matematics Teaching, y mis alumnos (profesores asistentes a cursos de formación inicial y a cursos de formación permanente), han leído muchos de sus artículos. Estos artículos tratan de una gran variedad de temas pero, debido a que la geometría es mi principal esfera de interés –especialmente la geometría tratada de una manera informal, –he utilizado muchos más artículos relacionados con la geometría que con cualquier otro tema.

Cuando la ATM me pidió una selección de artículos que tratasen de geometría sentí un gran placer en hacerlo, ya que la geometría está todavía bastante relegada en los libros de texto. Es conveniente mencionar otra publicación de la ATM, "Imágenes Geométricas" y también las numerosas publicaciones Leapfrogs (1) que han aumentado extraordinariamente nuestro acervo de ideas geométricas.

Fue una gran tentación imposible de realizar el incluir todos los artículos que tratan de geometría. Resultó incluso evidente que no era posible incluir todos los artículos que tratan de un solo tema. Con la esperanza de que se pueda hacer en lo sucesivo una colección separada de "Mosaicos" he incluido muy pocos artículos sobre ese tema.

Hay diversas serie de artículos escritos por un solo autor, como por ejemplo "Romper las cadenas de Euclides" de David Fielker (2). No he seleccionado niguna confiando en que esas series serán publicadas en algún otro lugar y porque no me parece honesto hacia el autor el seleccionar únicamente uno o dos artículos de la serie.

He resuelto la cuestión embarazosa de añadir o no algunos de mis propios artículos incluyendo únicamente unos cuantos que otras personas me han asegurado que habían encontrado particularmente útiles.

Hay varias formas de utilizar los comentarios que acompañan a los diversos grupos de artículos:

- Leerlos cuando aparecen, antes de los artículos; espero que sean guías útiles.
- Leerlos después de haber leído todas sus partes, porque entonces pueden parecer más pertinentes.
- Leerlos antes y después si le gustan los artículos.
- ¡No leerlos en absoluto!

En cualquier caso espero que el disponer de esta colección de artículos reunidos en una sola publicación será útil, y que el lector encontrará un gran placer al leerla.

---

(1) Las publicaciones Leapfrogs se distribuyen habitualmente por Tarquin Mathematics, Stradbroke, Diss, Norfolk.

(2) Estos artículos forman parte de otro libro de esta serie.

M.T. 39 CRAWFORTH, D. ¿Qué es un cuadrilátero?

El primer artículo de esta colección, uno de los primeros que aparecieron realmente, es uno de mis favoritos. Escribí sobre él en el nº 100 de M. T. y al reproducirlo aquí se da la posibilidad de leerlo entero.

Las definiciones se suelen presentar en los textos casi siempre sin ninguna discusión. El "aprender" definiciones (y esto significa muy a menudo solamente memorizarlas) no asegura su comprensión. El tipo de diálogo que describe Crawforth realmente ayuda a los estudiantes (y a nosotros) a pensar sobre las definiciones y a clarificar y profundizar nuestro conocimiento de ellas. Un dato más es que a los estudiantes les gustan realmente estas discusiones.

Una vez leído, se pueden adaptar las ideas y estrategias de este artículo y ponerlas en práctica en una gran variedad de niveles. Se pueden extender a muchas situaciones distintas. Yo he utilizado esas estrategias con niños, con estudiantes que aspiran a ser profesores y con estudiantes que han obtenido una licenciatura en Matemáticas. Todos ellos han practicado de su espíritu y lo que es más, no han olvidado el trabajo que han hecho.

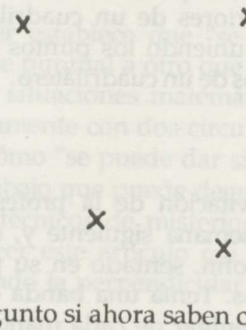
Una cuestión adicional agradable es que se puede controlar la situación, hasta cierto punto, por medio de los tipos de figuras que se decida dibujar en respuestas a las sugerencias recibidas. Siga leyendo y verá lo que quiero decir.

¿Qué es un cuadrilátero?

DANIS CRAWFORTH

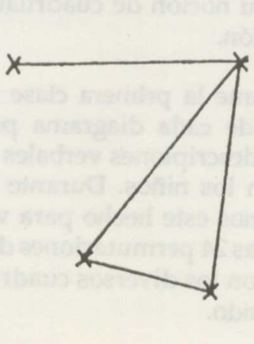
La clase está formada por tres docenas de alumnos del primer curso de una escuela secundaria que no hace ninguna selección para la admisión. No los he visto nunca antes. Su profesora habitual me ha pedido que les dé una clase y ella está presente en esa clase. Al hablar con ellos, me dicen que han estado "haciendo"cuadriláteros. Les pregunto qué es un cuadrilátero, y algunos niños me contestan que es una cosa con cuatro puntos, mientras que otros me dicen que tiene cuatro lados.

"¿Necesitamos saber sólo esto?" les pregunto. Señalo cuatro puntos en la pizarra



(Fig.1)

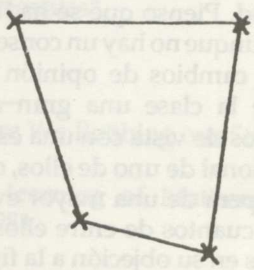
Les pregunto si ahora saben cuál es el cuadrilátero. Hay un clima general de satisfacción y confianza en la clase; si, claramente sienten que conocen el cuadrilátero y que está perfectamente definido. Les invito ahora a colocar los cuatro lados. Hay alguna duda, probablemente porque no me conocen. Antes de que se rompa el hielo aprovecho la oportunidad para trazar mis propias cuatro líneas. Trazo las de la figura 2.



(Fig. 2)

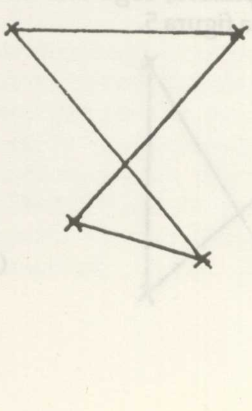
Rugido: "Eso no es un cuadrilátero". Hay una serie de conversaciones cruzadas, y algunos muchachos dicen abiertamente "pero si tiene cuatro lados y cuatro puntos", y uno de ellos, John , enuncia claramente una proposición, "Debe Ud. dibujarlo sin separar la tiza de la pizarra". Vuelvo a trazar mi dibujo obedeciendo esta instrucción. Hay un silencio, muchos de los niños están evidentemente pensativos y preguntándose sobre lo que ha pasado. Habla David entonces: "Debe Ud. hacer lo que ha dicho John, pero debe terminar en el mismo sitio en que empezó". De nuevo un gran silencio. Reto a cualquiera de la clase a que coja una tiza y siga las instrucciones de David.

Sylvia se levanta y hace su dibujo:



(Fig. 3)

La tensión se relaja; evidentemente el dibujo de Sylvia es aceptable en general. Reto ahora a cualquiera de la clase a que dibuje un cuadrilátero distinto con los mismos cuatro puntos, y utilizando las instrucciones que condujeron a dibujar el diagrama que había resultado aceptable. Por último un muchacho se levanta, coge una tiza de distinto color y dibuja la figura 4.



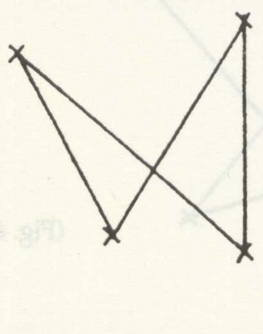
(Fig. 4)

Hay una discusión violenta. Las opiniones están clara y firmemente divididas. Están las de quienes sostienen con bastante pasión que el nuevo diagrama no representa un cuadrilátero y las de los que piensan que, como se han seguido las instrucciones de David, sí que es un cuadrilátero. No hago ningún intento de arbitrar, simplemente trato de que se expresen públicamente los distintos puntos de vista y las diferentes opiniones.

Uno o dos de los oponentes se apresuran hacia la pizarra y golpean con sus dedos el diagrama ofensivo. "Mirad", dice uno de ellos, "no puede ser un cuadrilátero, hay un quinto punto"- mientras golpea en el punto medio. Otro señala con su dedo las rectas. "Veis", dice, "hay seis lados en el lugar de cuatro". Otro añade, "Son dos triángulos, no un cuadrilátero". Un objetor un poco más sofisticado se vuelve a la figura 3 y traza con sus dedos dos diagonales. "Pero además este nuevo no puede tener diagonales".

En cuanto las cuestiones se discuten, cada vez menos niños siguen poniendo objeciones a llamar a la figura 4 un cuadrilátero. Sin embargo, quedan unos cuantos que defienden vigorosamente su oposición y se permiten desafiar la aceptación general que muestran sus colegas. Sigo sin hacer ningún intento de arbitraje, y curiosamente, los muchachos no insisten demasiado en sus demandas de que haga una declaración de autoridad. Pienso que se ha llegado a un punto en que, aunque no hay un consenso universal, ha habido cambios de opinión y se da en la mayoría de la clase una gran apertura hacia los dos puntos de vista con una especie de aceptación condicional de uno de ellos, o incluso de los dos, a la espera de una mayor evidencia. Si embargo, unos cuantos de entre ellos permanecen irreductibles en su objeción a la figura 4, y parece como si fuera esta postura tan violenta la que provocase reacciones entre los que no parecen tener ya la necesidad de expresarse violentamente.

Invito a la clase a que dibuje otro cuadrilátero con los mismos cuatro puntos. Se expresan proposiciones condicionales. "Si yo acepto la figura 4, entonces puedo hacer otra" - esto por parte de un muchacho que la había objetado violentamente. Sale a la pizarra, coge una tiza de color distinto, y dibuja la figura 5.



(Fig. 5)

Esto parece agotar las posibilidades para la clase porque no hay más ofertas por su parte. Para superar este punto muerto les invito a salir a la pizarra y dibujar las diagonales, pero como hasta ahora hemos utilizado solamente un dibujo y las figuras se han superpuesto unas a otras en colores distintos, la clase decide que se deben dibujar por separado. Varios niños hacen esto y se trazan las diagonales. El tiempo de la clase se termina y los niños se van.

Su profesora se me acerca e inmediatamente me indica que he dejado que los niños se vayan sin decirles qué era lo correcto. Se siente claramente incómoda con las figuras 4 y 5, y me dice que a ella le han enseñado que la figura 2 es el único cuadrilátero, pero que no siente la suficiente confianza como para rechazar las figuras 4 y 5 sin más, asegurándome simplemente que no las ha considerado como posibilidades antes de ahora. Me pide que le diga lisa y llanamente cuál de las figuras 3 y 4 es un cuadrilátero y cual no. Rehuso hacerlo y le sugiero que puede depender de lo que ella pretenda; esto es, que sería mejor suspender el juicio y estar así libre para adoptar cualquiera de las dos según las necesidades especiales de la situación particular en que surjan. Por ejemplo, podríamos considerar dos posibilidades, la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, y la figura obtenida uniendo los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero.

NOTA 1. A invitación de la profesora acepté dar la clase la semana siguiente y, cuando entré en el aula, John, sentado en su pupitre, levantó sus manos. Tenía una banda elástica sujeta al índice y pulgar de cada mano y, cuando estuvo seguro de que le prestaba atención, giró lentamente su mano derecha de forma que el cuadrilátero formado por la banda elástica, partiendo del tipo de la figura 3, pasó a través de un cierto número de cuadriláteros distorsionados y acabó en uno del tipo de la figura 4. El resto de la clase apreció mucho la demostración de John, pero el muchacho rehusó incluir la figura 4 en su noción de cuadrilátero manteniendo su objeción.

NOTA 2. Durante la primera clase numeré los cuatro puntos de cada diagrama para facilitar algunas de las descripiones verbales y comentarios que hacían los niños. Durante la segunda lección utilizamos este hecho para ver cómo se corresponden las 24 permutaciones de los números 1, 2, 3 y 4 con los diversos cuadriláteros que habíamos obtenido.

M.T. 18 WHELER, David. **Construcciones geométricas elementales**

M.T. 70 TRIVETT, John V. **Haz volar tu propia cometa**

Muchos estudiantes encuentran dificultades para aprender, recordar o revisar las construcciones con regla y compás habituales, especialmente porque se suelen presentar sin motivaciones o justificaciones. Los estudiantes ven las construcciones faltas de conexión unas con otras. Los dos artículos siguientes dan algo más que motivaciones, coherencia y justificación a las construcciones básicas con regla y compás.

Wheeler establece que "se puede pasar de un enfoque puntual a otro que revele la riqueza de ciertas situaciones matemáticas". Empezando sencillamente con dos círculos que se cortan muestra cómo "se puede dar significado y realce a un trabajo que puede degenerar fácilmente en trucos técnicos de misterioso origen". ¡Después de leer este artículo me vi a mi misma construyendo la perpendicular a una recta desde un punto exterior a ella de una manera distinta a la que había usado "siempre"! Esto me recuerda una cuestión que propongo muchas veces a los estudiantes: construir un hexágono regular (o un cuadrado) de varías maneras distintas (3).

Trivett muestra cómo un estudio creativo de rombos y cometas utilizando modelos físicos, puede llevar a "una participación más interesante, más elegante y global que los tratamientos tradicionales"

---

(3) Are We Robbing our Students of a chance to learn?
For the learning of Mathematics. Vol 1 nº 3 Marzo 1981.

Hay una discusión violenta. Las opiniones están clara y firmemente divididas. Están las de quiénes sostienen con bastante pasión que el nuevo diagrama no representa un cuadrilátero y las de los que piensan que, como se han seguido las instrucciones de David, sí que es un cuadrilátero. No hago ningún intento de arbitrar, simplemente trato de que se expresen públicamente los distintos puntos de vista y las diferentes opiniones.

Uno o dos de los oponentes se apresuran hacia la pizarra y golpean con sus dedos el diagrama ofensivo. "Mirad", dice uno de ellos, "no puede ser un cuadrilátero, hay un quinto punto"- mientras golpea en el punto medio. Otro señala con su dedo las rectas. "Veis", dice, "hay seis lados en el lugar de cuatro". Otro añade, "Son dos triángulos, no un cuadrilátero". Un objetor un poco más sofisticado se vuelve a la figura 3 y traza con sus dedos las diagonales. [illegible] [illegible] la figura [illegible] quedan unos cuantos que defienden vigorosamente su oposición y se permiten desafiar la [illegible] ración de autoridad. Pienso que [illegible] un punto en que, aunque no hay un consenso universal, ha habido cambios de opinión y se da en la mayoría de la clase una gran [illegible] aceptación condicional de uno de ellos, [illegible] Si embargo, unos cuantos de entre ellos permanecen irreductibles en su objeción a la figura 4, y parece como si fuera esta postura tan violenta la que provocase reacciones entre los que no parecen tener ya la necesidad de expresarse violentamente.

Invito a la clase a que dibuje otro cuadrilátero con los mismos cuatro puntos. Se expresan proposiciones condicionales. "Si yo acepto la figura 4, entonces puedo hacer ésta" - esto por parte de un muchacho que la había objetado violentamente. Sale a la pizarra, coge una tiza de color distinto, y dibuja la figura 5.

(Fig. 5)

Esto parece agotar las posibilidades para la clase porque no hay más ofertas por su parte. Para superar este punto muerto los invito a salir a la pizarra y dibujar las diagonales, pero como hasta ahora hemos utilizado solamente un dibujo y las figuras se han superpuesto unas a otras en colores distintos, la clase decide que se deben dibujar por separado. Varios niños hacen esto y se trazan las diagonales. El tiempo de la clase se termina y los niños se van.

Su profesora se [illegible] me indica que he dejado a los niños [illegible] sin decirles qué era lo correcto. Se siente claramente incómoda con las figuras 4 y 5, y me dice que a ella le han enseñado que la figura 2 es el único cuadrilátero, pero que no siente la suficiente confianza como para rechazar las figuras 4 y 5 sin más, asegurándome simplemente que no las ha considerado como posibilidades antes de ahora. [illegible] los ángulos interiores de un cuadrilátero, y la [illegible] de un cuadrilátero.

[illegible] sus manos. Tenía una banda elástica sujeta al índice y pulgar de cada mano y, cuando estuvo seguro de que le prestaba atención, giró lentamente su mano derecha de forma que el cuadrilátero formado por la banda elástica, partiendo del tipo de la figura 3, pasó a través de un cierto número de cuadriláteros distorsionados y acabó en uno del tipo de la figura 4. El resto de la clase apreció mucho la demostración de John, pero el muchacho rehusó incluir la figura 4 en su noción de cuadrilátero manteniendo su objeción.

NOTA 2. Durante la primera clase numeré los cuatro puntos de cada diagrama para facilitar algunas de las descripciones verbales y comentarios que hacían los niños. Durante la segunda lección suprimí esto, pero fue para ver cómo se [illegible] de los números 1, 2, 3 y 4 los [illegible] cuadriláteros que [illegible]

Construcciones Geométricas elementales

DAVID WHEELER

Es un excelente precepto el que debemos dejar que los niños descubran las matemáticas por sí mismos –pero no siempre es fácil ponerlo en práctica. Algunos de los temas que debe desarrollar el profesor de matemáticas serán útiles en una etapa posterior, pero parecen artificiales en el momento de introducirlos. Por supuesto que es posible decir "Quizá no veis ahora por qué estais haciendo esto, pero será muy útil más adelante" e ignorar el hecho de que para una gran mayoría de niños (porque son niños), este argumento de anticipación no funciona en absoluto.

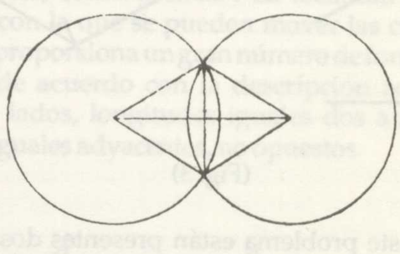
Otro obstáculo que un buen profesor debe tratar de obviar es la excesiva fragmentación de los temas en matemáticas. Somos muchas veces culpables, por no pensar en ello en absoluto (o porque nosotros mismos no percibimos un tratamiento matemático unitario), de aumentar el aspecto de artificiosidad tratando cualquier hecho o procedimiento matemático aisladamente ¿No podríamos pasar de un enfoque puntual, lineal, a un enfoque que revele la riqueza de ciertas situaciones matemáticas?

Tomemos un ejemplo muy sencillo. Nuestros alumnos están aprendiendo en este momento a utilizar los instrumentos geométricos. Están ocupados en hacer modelos con sus compases - incluido el inevitable dibujo del pétalo de rosa–. A lo largo de esta etapa están realizando acciones que tienen significado matemático, aunque pueden no darse cuenta de este hecho. El papel del profesor consiste sin duda en formular y desarrollar, conjuntamente con los niños, la geometría que subyace en estos movimientos.

Supongamos que de un modo espontáneo a sugerencia del profesor han dibujado algunas circunferencias que se cortan. El profesor puede pedir entonces que todos ellos dibujen una circunferencia y a continuación otra que la corte (probablemente muchos niños dibujarán las circunferencia con radios iguales). Les pregunta cómo saben que las dos circunferencias se cortarán .Si no lo saben, puede preguntarles si las circunferencias se seguirán cortando cuando dibujen la segunda más cerca de la primera.

¿Qué pasa si se dibujan más lejos; se cortarían entonces? ¿Cuánto es lo más lejos que se pueden dibujar? Puede que los alumnos den una descripción clara del criterio necesario para que se corten , y utilicen adecuadamente las palabras "radio" y "distancia entre los centros" para hacerla más concisa. (El profesor hará observar que éste es el mismo criterio que se utiliza para hallar el punto medio de un segmento).

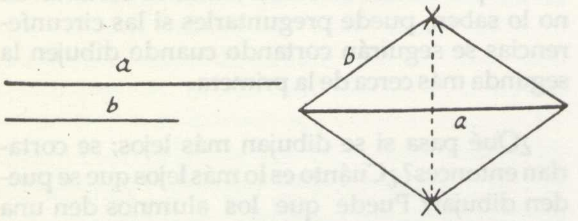
Ahora están preparados para observar sus figuras más cuidadosamente. Hay cuatro puntos interesantes en ellas - los dos centros y las dos intersecciones de las circunferencias. ¿Qué sucede si se unen? Tenemos entonces un rombo con sus diagonales (o, si se quiere, cuatro radios, una cuerda común y el segmento que une los centros). (Fig 1).



(Fig. 1)

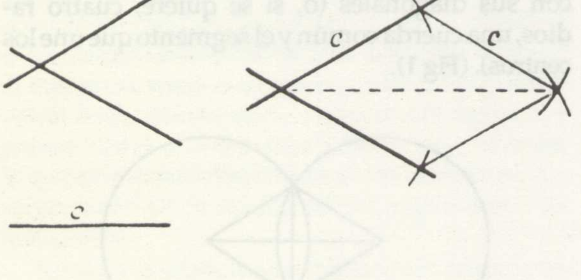
La simetría de esta configuración proporciona una visión completa de las propiedades del rombo. Se puede obtener una comprensión más intuitiva de la simetría plegando el papel y por medio de rotaciones, y al terminar la investigación se habrán descubierto todas las propiedades importantes (sin utilizar ningún instrumento de medida).

A continuación los niños pueden tratar de dibujar un rombo que cumpla ciertas condiciones. Supongamos que se dan dos segmentos, uno de los cuales debe ser de la misma longitud que una diagonal, y el otro de la misma longitud que un lado (ellos ya saben que el segundo debe tener una longuitud mayor que la mitad de la del primero); pueden entonces dibujar la figura utilizando circunferencias. Pero las circunferencias no son más que auxilares de la construcción, y se pueden reducir a pequeños arcos. (Fig.2). Si se traza la otra diagonal, cortará a la primera en el punto medio, formando ángulos rectos.



(Fig. 2)

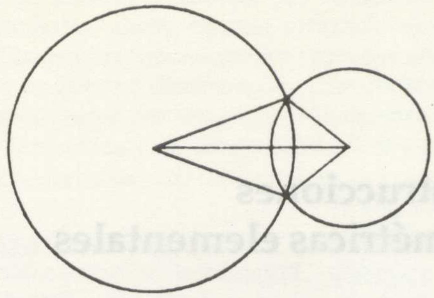
Otra posibilidad es dar a los alumnos dos rectas que se corten y la longitud de uno de los lados, y pedirles que dibujen un rombo con dos lados adyacentes sobre las rectas dadas. Aquí deben adaptar un poco la figura, pero pueden encontrar el método de hacerlo con bastante facilidad. (Fig. 3). Una de las diagonales es la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas.



(Fig. 3)

En este problema están presentes dos de las construcciones elementales (bisecar un segmento, bisecar un ángulo). Se puede pedir entonces a los alumnos que las realicen, basándose en su experiencia anterior con el rombo. No hace falta que el profesor dé ninguna explicación; ellos mismos simplificarán sus figuras omitiendo las partes del rombo que no sean ya necesarias.

¿Qué le sucede a la configuración original si las dos circunferencias no son iguales? La figura que tiene interés es ahora una cometa y se pueden comparar sus propiedades, algunas iguales y otras distintas, con las del rombo.

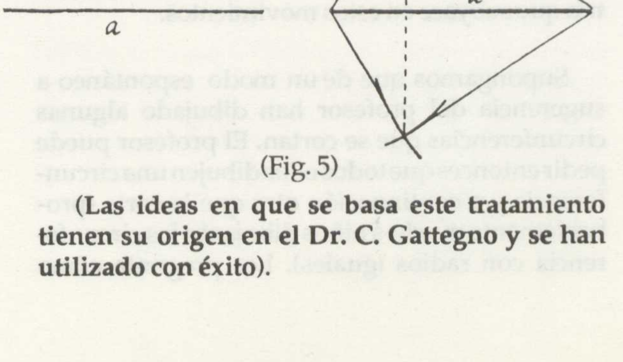


(Fig. 4)

Se pueden investigar a continuación las construcciones de cometas que satisfagan ciertas condiciones dadas. Si se da una diagonal y la posición de un vértice que no esté en la diagonal, trazando arcos de las circunferencias básicas se puede completar la cometa. (Fig. 5). La segunda diagonal será perpendicular a la primera. De esta forma la clase puede decubrir el método para trazar una perpendicular a una recta desde un punto exterior a ella.

Pero, ¿cómo se puede construir una perpendicular a una recta desde un punto que pertenezca a ella?A pesar de lo que suelen decir los libros de texto, esta no se una construcción nueva y distinta, es simplemente un caso especial de la bisección de un ángulo cuando éste es un ángulo llano.

Se pueden extraer fácilmente varias lecciones de estos trabajos; es posible deducir toda una serie de resultados (además de los indicados aquí), de la situación básica de las dos circunferencias que se cortan. Esto constituye una pequeña ilustración de la forma en que se puede dar sentido a cuestiones significativas que pueden degenerar fácilmente en trucos técnicos de origen misterioso.



(Fig. 5)

(Las ideas en que se basa este tratamiento tienen su origen en el Dr. C. Gattegno y se han utilizado con éxito).

Haz volar tu propia cometa

JONH V. TRIVETT
Faculty of Education.
Simon Fraser University. B.C.

Una cometa es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes iguales. Esto es lo que queremos estudiar.

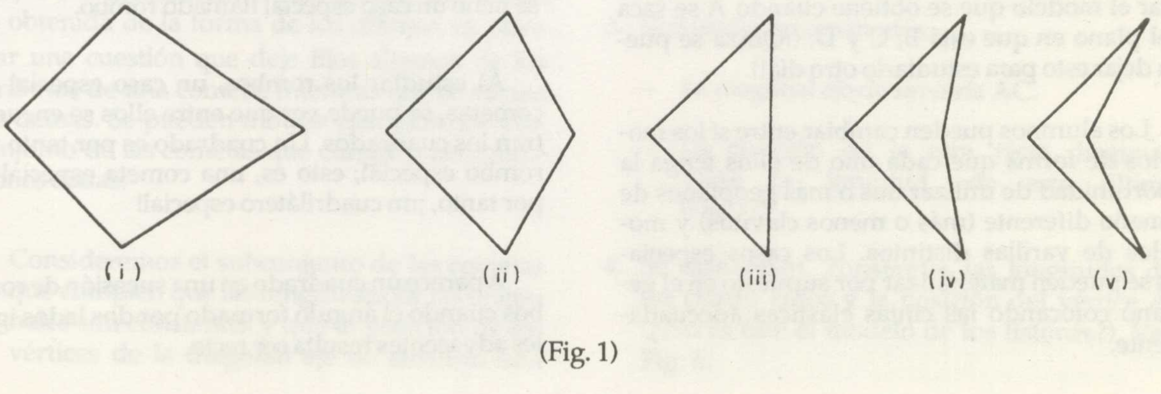
¿Qué pueden desarrollar los niños en la escuela a partir de esto? ¿Se pueden obtener lecciones de interés profundizando en las nociones geométricas y en los procesos geométricos inherentes a esta figura?.

Es esencial que cada alumno disponga de un modelo físico para utilizarlo. Inmediatamente se nos ocurren los geoplanos y las varillas. Se puede utilizar una cinta elástica para formar una cometa sobre un geoplano o bien unir dos varillas iguales a otras dos de igual longitud (pero preferiblemente distinta de las del primer par). Si se colorean las varillas se puede hablar de los dos lados rojos o de los dos lados amarillos.

Las varillas se pueden unir con trozos más cortos de otras atados y pegados a ellas, aunque el modelo que resulta no es demadiado sólido. También se puede unir entre sí por medio de hilos , pero de nuevo la carencia de riguidez puede resultar un inconveniente. Mejor que las varillas, unos pequeños listones de madera unidos por un remache de plástico pueden proporcionar un modelo excelente.

Si a cada alumno de la clase se le dan cuatro listones de madera preparados para ser unidos, iguales dos a dos, y se les hace la siguiente invitación "une los listones de manera que consigas una figura plana de cuatro lados", se pueden obtener dos tipos de cuadriláteros. Algunos alumnos obtendrán un modelo que, después de observarlo, resulta ser distinto de los demás. Un tipo de modelo se denominará (o se reconocerá a partir de conocimientos previos como) un paralelogramo. El otro no lo es, evidentemente; es una cometa. Así pues una descripción operativa de las dos clases de cuadriláteros surge de la necesidad de distinguir entre ambos.

Se puede pedir a los alumnos que construyan distintas clases de cometas sobre un geoplano; "cometas grandes, cometas pequeñas, cometas especiales, cometas finas". La facilidad y la rapidez con la que se pueden mover las cintas de goma proporciona un gran número de formas que están de acuerdo con la descripción aceptada: cuatro lados, longitudes iguales dos a dos, los lados iguales adyacentes, no opuestos.



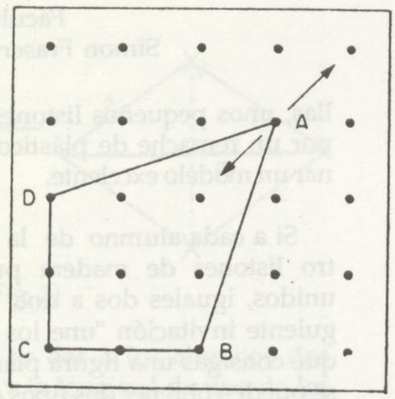
(Fig. 1)

A veces se obtiene una sucesión de formas moviendo solamente un vértice; sobre la marcha, se pueden inventar nombres para las cometas obtenidas. "Ala delta", "punta de flecha" son nombres suficientemente buenos hasta que se establezcan los nombres más técnicos de "cometas cóncavas y convexas".

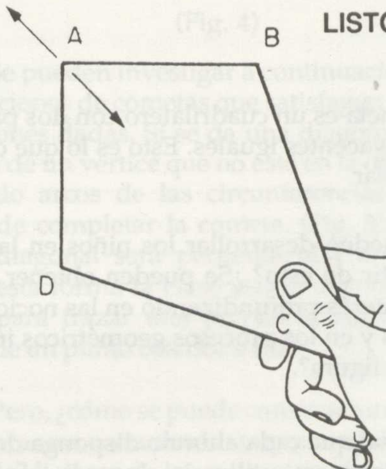
Algunos descubrimientos pueden llevar a discusiones vivas en las que no todo el mundo está de acuerdo. ¿Estamos seguros de que todas esas figuras son cometas? ¿Hay cuatro lados y son iguales los pares adyacentes? ¿Incluso la dada en el diagrama (iii)? ¿Se podría llamar a ésta un triángulo con el punto medio de un lado indicado? ¿Las figuras (iv) y (v) son cometas? Los niños parecen aceptar que todas esas figuras son cometas, explicando que (iii) es un caso especial en el que dos de los lados están alineados.

Hay una serie de preguntas interesantes que hacer, cualquiera que sea el modelo que se utilice.

GEOPLANO



LISTONES



(Fig. 2)

¿Cual es, teóricamente, el límite del vértice A al "alejarlo" cada vez más de los demás vértices?

¿Qué caso especial se obtiene cuando A se mueve hacia C, si se considera una cometa en cada posición?

¿Qué otros casos especiales aparecen cuando A se mueve a lo largo de la recta AC?

¿Se puede producir un modelo móvil presionando suavemente los listones BC y DC?

¿Cuáles son teóricamente los límites de esta presión y su opuesta, la que abre BCD? Estudiar el modelo que se obtiene cuando A se saca del plano en que está B, C y D; (!Quizá se pueda dejar esto para estudiarlo otro día!).

Los alumnos pueden cambiar entre sí los modelos de forma que cada uno de ellos tenga la oportunidad de utilizar dos o más geoplanos de tamaño diferente (más o menos clavitos) y modelos de varillas distintos. Los casos especiales se pueden materializar por supuesto en el geplano colocando las cintas elásticas adecuadamente.

A través de las discusiones, de pruebas y errores y de dibujos hechos sobre papel se podrán llegar a la apreciar muchas de las propiedades de las cometas consideradas como un subconjunto del conjunto de los cuadriláteros. Algunos de ellas aparecen normalmente a partir del estudio de los modelos físicos de la forma siguiente:

Cada cometa tiene cuatro lados. Dos de ellos, que se cortan, son de longuitudes iguales. Los otros dos, que también se cortan, también tienen longuitudes iguales.

Si los cuatro lados son de longitudes iguales se tiene un caso especial llamado rombo.

Al estudiar los rombos, un caso especial de cometas, se puede ver que entre ellos se encuentran los cuadrados. Un cuadrado es por tanto un rombo especial; esto es, una cometa especial y, por tanto, ¡un cuadrilátero especial!

Aparece un cuadrado en una sucesión de rombos cuando el ángulo formado por dos lados igules adyacentes resulta ser recto.

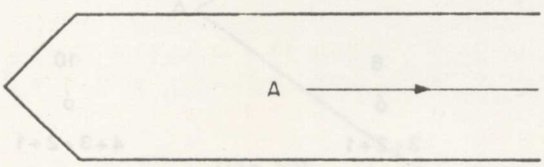
Se puede imaginar que el vértice A se lleva cada vez más lejos. Cuando está "muy lejos" dos de los lados se vuelven cada vez más paralelos entre sí. Parece plausible que haya un caso especial en que los lados sean paralelos que se pueda considerar una cometa. A veces se dice que los lados " se cortan en el infinito" (Fig. 3).

Cada cometa tiene dos diagonales. En las cometas cóncavas una de ellas está "fuera" de la región interior de la cometa. La intersección de las diagonales también está fuera. (¿Qué pasa si la interseccción de las diagonales está **sobre** uno de los lados? Estudiar los casos en que está "en el interior" y "en el exterior".)

Una diagonal es un eje de simetría de la cometa. La otra, generalmente no lo es. Si en algún caso especial la segunda diagonal es un eje de simetría, la cometa es un rombo.

Una vez que se ha reconocido un eje de simetría, se pueden obtener inmediatamente muchas propiedades:

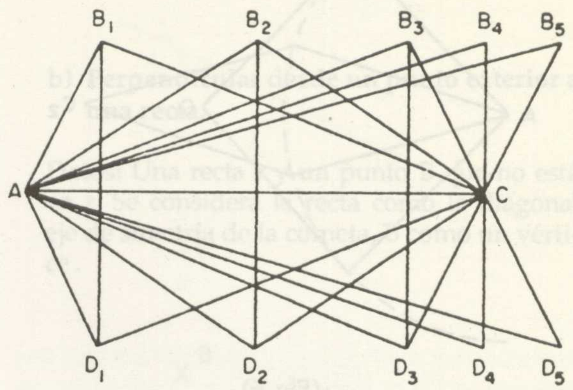
Se puede dividir una cometa en dos triángulos congruentes; hay otros pares de triángulos congruentes si se consideran ambas diagonales. Las diagonales se cortan en ángulo recto.



(Fig. 3)

Una actividad que proporciona una mayor comprensión de las cometas y de sus propiedades, e incidentalmente, una satisfacción estética obtenida de la forma de los dibujos, es plantear una cuestión que deje fijos algunos de los atributos de una cometa, mientras que se varían los demás. Se pueden dibujar ejemplos del subconjunto de las cometas que cumplen las condiciones dadas.

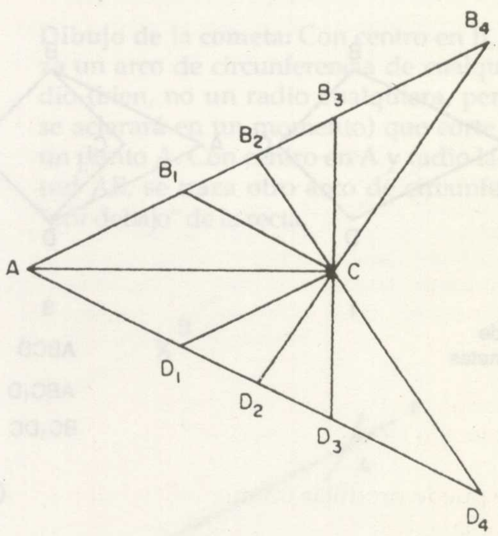
1. Consideremos el subconjunto de las cometas que cumplen que las longitudes de las diagonales son constantes y que la posición de los vértices de la diagonal eje de simetría está fija. Los dibujos resultantes son más o menos así.



(Fig. 4.)

$AB_n CD_n$ es una cometa para n= 1, 2,3, ... etc.

2. Se mantienen constantes las rectas de los dos lados AB, AD (el ángulo entre ellas) y la posición de C.



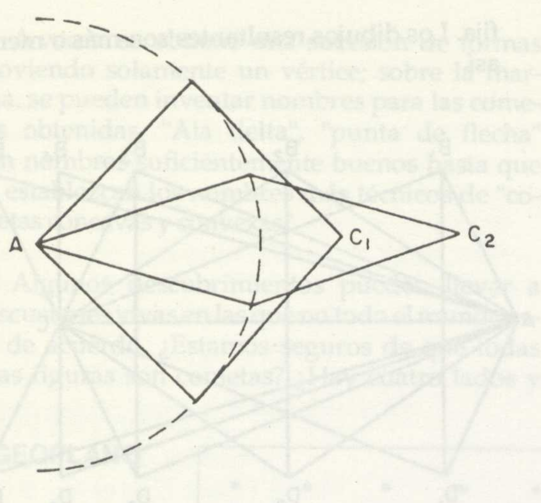
(Fig. 5)

3. Se mantienen constantes:

– La diagonal eje de simetría AC.

– La posición de la otra recta diagonal. Varía la longitud de esta última (Fig. 7).

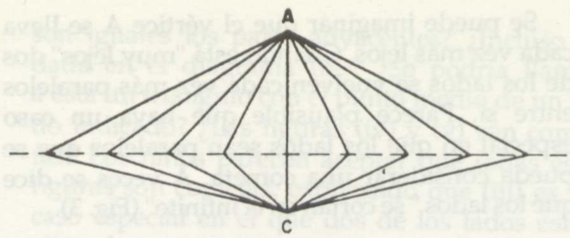
4. Se mantienen constantes las longitudes de los cuatro lados y la posición del vértice A. (¿No es éste el modelo de los listones?). Ver Fig. 6.



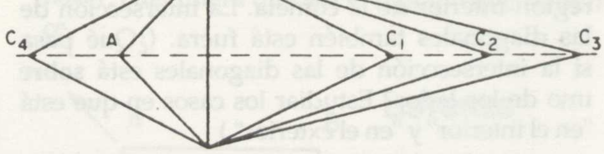
(Fig. 6)

¿Qué pasa si se fijan A y C?

5. Se fijan la recta eje de simetría y el vértice A, y también la longitud y posición de la segunda diagonal. El vértice C puede ser cualquier punto situado sobre la recta de la diagonal eje de simetría (Fig. 8).

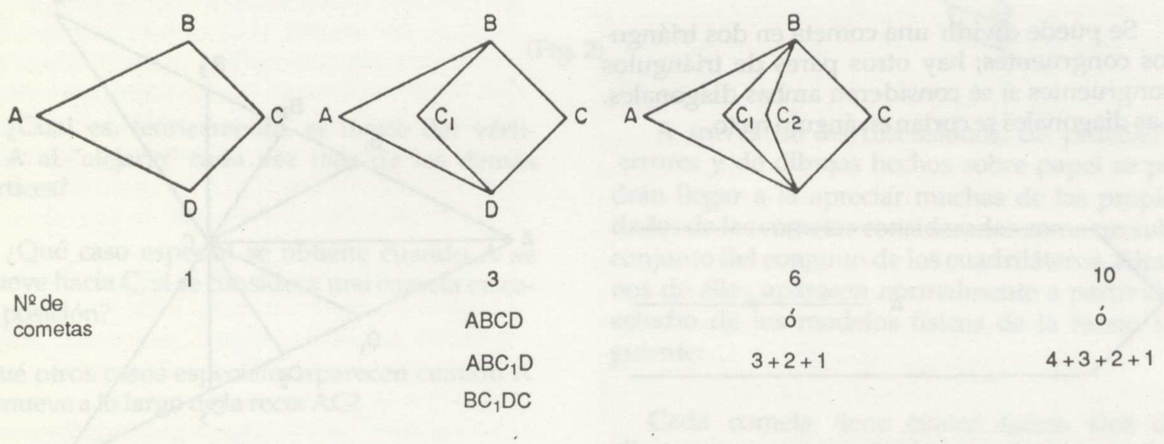


(Fig. 7)



(Fig. 8)

Se puede plantear a partir de esos dibujos la pregunta: ¿Cuántas cometas tenemos? Porque puede haber otras cometas además de las que hemos considerado, según haya cada vez más rectas en los dibujos. Una sucesión de dibujos relativa al número 5 puede ser algo parecido a esto:



(Fig. 9)

Estos son los "números triangulares", y el descubrimiento del modelo numérico a través de la experimentación de los propios alumnos es la mejor manera de que los aprendan en ese momento.

Muchas propiedades geométricas interesantes pueden surgir a partir de un estudio como éste, utilizando geoplanos, modelos de varillas, papel, lápiz y los instrumentos de dibujo habituales. En la práctica, el uso del color o del sombreado resalta los descubrimientos. Este tipo de estudios integra además muchas de las propiedades de los triángulos isósceles como casos especiales de cometas, rombos, cuadrados y bisecciones de ángulos. Una consecuencia de todo esto que es necesario, por último, destacar, es que sugiere en gran medida una forma de proceder en la enseñanza de las matemáticas. Este procedimiento resulta ser mucho más participativo, comprensible, elegante y global que el tratamiento tradicional.

En muchos libros de texto hay aún cuatro construcciones para realizar con papel y lápiz que parecen ser obligatorias para los estudiantes. Los niños aprenden como trazar:

a) la bisectriz de un ángulo.

b) la perpendicular por un punto exterior a una recta.

c) la perpendicular a una recta desde un punto de la misma.

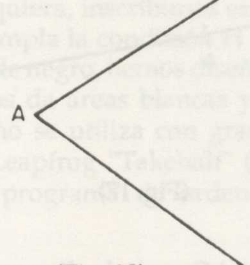
d) la mediatriz de un segmento.

Los pasos que se usan en esas construcciones se presentan tradicionalmente sin dar demasiadas razones, y los alumnos los aprenden rutinariamente.

Supongamos sin embargo que un alumno tiene experiencia en los trabajos con las cometas y que los ha estudiado concienzudamente en la línea que hemos marcado. Puede disponer ahora de una nueva visión de estas cuatro construcciones.

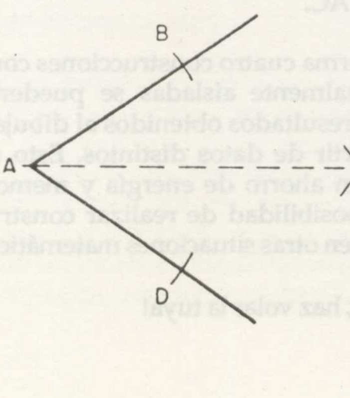
a) Bisectriz de un ángulo.

Datos: Un par de rectas que se cortan en A. Se considera el ángulo como los dos lados de una cometa de vértice A sobre la diagonal eje de simetría.



(Fig. 10)

Dibujo de la cometa: Se llevan sobre cada recta segmentos iguales, AB, AD. Con centro en B y en D, se trazan sendos arcos de circunferencia del mismo radio. Si se cortan en C, entonces AC es la bisectriz buscada, porque es la diagonal eje de simetría de la cometa ABCD.

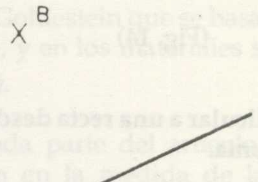


(Fig. 11)

Se puede comprobar comenzando de nuevo con las mismas rectas y dibujando una cometa distinta.

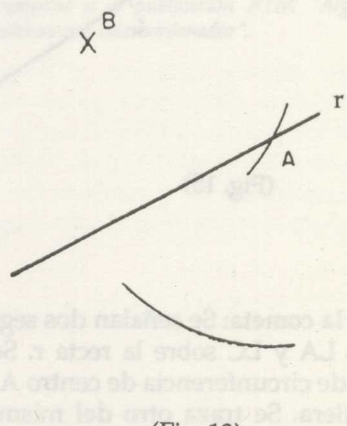
b) Perpendicular desde un punto exterior a una recta.

Datos: Una recta r y un punto B que no está en r. Se considera la recta como la diagonal eje de simetría de la cometa, B como un vértice .



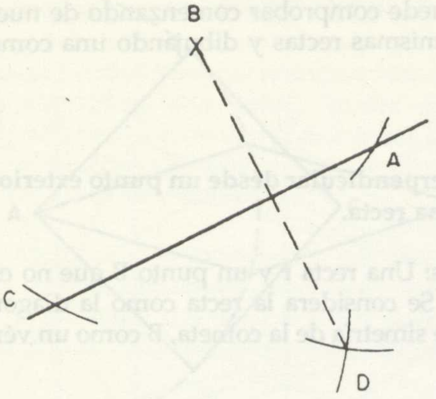
(Fig. 12)

Dibujo de la cometa: Con centro en B, se traza un arco de circunferencia de cualquier radio (bien, no un radio cualquiera, pero esto se aclarará en un momento) que corte a r en un punto A. Con centro en A y radio la longitud AB, se traza otro arco de circunferencia "por debajo" de la recta.



(Fig. 13)

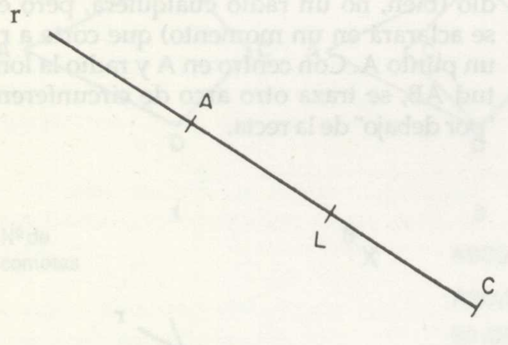
Se traza otro arco de circunferencia de radio cualquiera y centro B, que corte a r en C, y con centro en C y radio BC se traza otro arco de circunferencia que corte al otro arco por debajo de r. La intersección de esos arcos es el cuarto vértice de la cometa. BD es la perpendicular buscada ya que es la segunda diagonal.



(Fig. 14)

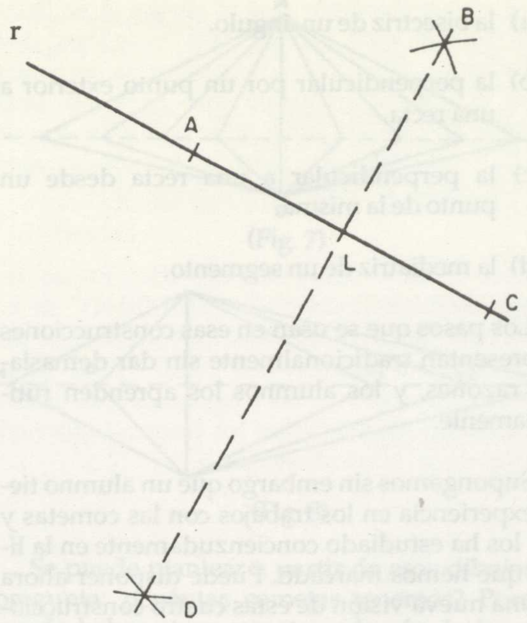
c) Perpendicular a una recta desde un punto de la misma.

Datos: Una recta r y un punto L sobre ella. Se considera la recta como la diagonal que no es eje de simetría de una cometa, y L como la intersección de las dos diagonales.



(Fig. 15)

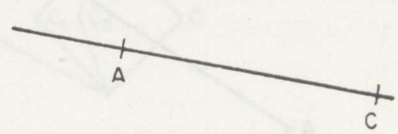
Dibujo de la cometa: Se señalan dos segmentos iguales LA y LC sobre la recta r. Se traza un arco de circunferencia de centro A y radio cualquiera. Se traza otro del mismo radio y centro C. La intersección de esos arcos, B, es el tercer vértice de la cometa. LB es, por tanto, la perpendicular buscada. (*).



(Fig. 16)

d) Mediatriz de un segmento.

Dato: un segmento AC.



(Fig. 17)

Se considera AC como la diagonal que no es eje de simetría de una cometa.

Dibujo de la cometa: Se procede exactamente como en c) a partir de "de centro A.." Los puntos A y C no tienen por qué trazarse pues ya están dados. Deben hallarse los vértices B y D para dibujar BD, la diagonal eje de simetría que corta por el punto medio al segmento AC.

De esta forma cuatro construcciones consideradas habitualmente aisladas se pueden presentar como resultados obtenidos al dibujar una cometa a partir de datos distintos. Esto representa un gran ahorro de energía y memoria, y además, la posibilidad de realizar construcciones análogas en otras situaciones matemáticas.

¡Adelante, haz volar la tuya!

(*) (Para comprobarlo, se pueden trazar otros arcos, de centros A y C y radio cualquiera; su intersección es el cuarto vértice, D, de la cometa; los puntos D, L y B deben estar alineados.)

M.T. 28 PARKER, J.H.D. **Revisión del Concepto de área**

Este artículo es lo suficientemente antiguo como para requerir el uso de logaritmos para hacer los cálculos. Da coherencia a la deducción de fórmulas de las áreas de varias figuras geométricas habituales, tales como triángulos, trapecios y paralelogramos. Podríamos decir que no hay nada nuevo, pero también extiende el hecho bien conocido de que el área de un cuadrado inscrito en otro cuadrado es la mitad del cuadrado original, al estudio de un cuadrilátero inscrito en un rectángulo. Antes de que siga leyendo ¿sabe Ud, qué condición debe cumplir el cuadrilátero para que su área sea la mitad del área del rectángulo? Llamémosla condicion H. ¿Se da Ud. cuenta ahora del interés que tienen? Pues bien, nos dice que si tomamos un rectángulo cualquiera, inscribimos en él un cuadrilátero que cumpla la condición H y pintamos el cuadrilátero de negro, hemos diseñado un dispositivo que nos da áreas blancas y negras iguales. Este hecho se utiliza con gran efecto en la película de Leapfrog "Takehalf" ("Tome la mitad"), en el programa de ordenadores hecho por Ronnie Goldestein que se basa precisamente en tal hecho, y en los materiales sobre baldosas de Smile. (4).

La segunda parte del artículo, en la que el área se basa en la medida de la cantidad de plano atravesada por un segmento que se mueve, relaciona con eficacia las nociones de área y mosaicos, y ayuda a conocer más profundamente el principio de Cavalieri.

Otra magnífica idea descrita es la que utiliza el perímetro medio de dos rectángulos concéntricos para calcular el área que hay entre ellos.

---

(4) Takehalf se encuentra en el disco MICRO SMILE. Materiales relacionados con SMILE son "Rompecabezas cuadrados", "Versátiles" y los posters "Posthalf". Se pueden obtener más detalles en el centro SMILE, Middle Row School, Kensal Road, London W10 5DB. "Takehalf" se encuentra también en el disco que acompaña a la publicación ATM "Algunas lecciones de Matemáticas con microordenador".

Revisión del concepto de área

M.T. 28 PARKER, J.H.D.
RIDDELSON COUNTY, SECUNDARY SCHOOL, PURLEY.

La innegable necesidad de revisar de vez en cuando en la escuela secundaria cuestiones matemáticas básicas tales como el cálculo de áreas origina una demanda correspondiente de nuevos enfoques. Cuando los alumnos de la escuela secundaria se hacen mayores es necesario recopilar las ideas al uso sobre el área y presentarlas con un enfoque nuevo de manera que obtengan un conocimiento más profundo del concepto. Al alcanzar el tercer curso, los niños empiezan posiblemente a perder una parte del entusiasmo que tenían cuando realizaban trabajos de recortar cuadrados de un papel engomado y colocarlos de forma que recubrieran áreas regulares e irregulares; saben ya cómo dividir un rectángulo para obtener un paralelogramo y cómo se puede dividir de forma que dé dos triángulos de la misma área. Han dividido también un rectángulo para formar un trapecio; y puede incluso que hayan dividido un círculo para formar un rectángulo (muy) aproximado, y que hayan apreciado quizá que el límite de estas divisiones sea un rectángulo perfecto. Posiblemente también hayan empezado a encontrar un poco tediosa la tarea de encontar cuadrados en un papel cuadriculado, y la aplicación de la fórmula "la mitad de la base por la altura" a nuevos problemas en que intervengan medidas lo suficientemente inmanejables como para que haga falta usar logaritmos, no es en sí misma la manera de llamar la atención de una mente de catorce años.

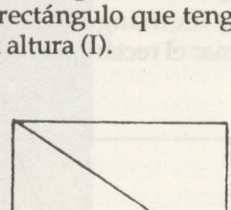
Algunas escuelas pueden ser lo suficientemente afortunadas como para encontrarse en un lugar en cuyo entorno haya gran cantidad de charcas y campos pequeños de forma irregular y cuya área se pueda calcular: pero nuestros campos de juego sólo tienen unos pocos acres y la piscina de la escuela es absolutamente rectangular. Los trabajos, por tanto, deben hacerse más bien en la clase con una regla, que en el exterior con una cinta de agrimensor, con lo que el tratamiento de los materiales habituales debe introducir nuevos enfoques de las viejas fórmulas en lugar de nuevas aplicaciones; cualquier chispa de interés se debe producir a partir de la consideración de las ideas ya establecidas bajo una nueva luz más clarificadora.

Hay dos enfoques que prometen proporcionar algún interés intelectual. El primero reduce las fórmulas más importantes a variaciones sobre una fórmula básica, la del área del rectángulo. El segundo relaciona el concepto de área con el movimiento de un segmento de recta en el plano e implica la idea de integración como suma. Este procedimiento pone al alumno en la senda que le conducirá eventualmente al teorema de Pappus.

El primer enfoque admite que la fórmula del área de un rectángulo es el producto de la longitud por la anchura, ya que esta fórmula es susceptible de verificación por medio de la división del rectángulo en cuadrados unidad. Con esta figura básica se relacionan las demás.

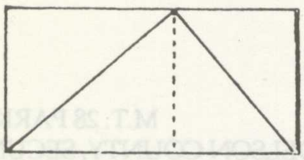
El triángulo

1. Se puede demostrar geométricamente que un triángulo rectángulo es exactamente la mitad de un rectángulo que tenga la mima base y la misma altura (I).



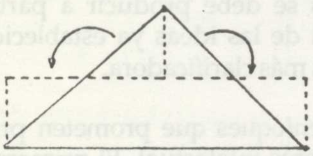
(I)

2. Si se incluye un triángulo cualquiera en un rectángulo de la misma base y altura y se divide en dos partes por medio de la perpendicular trazada desde el vértice superior, se puede demostrar que es la mitad del rectángulo. Se demuestra algebráicamente que las dos mitades de los rectángulos suman la mitad del área total del rectángulo inicial.



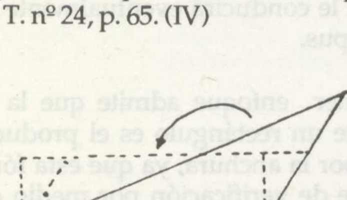
(II)

3. Un triángulo cuyos ángulos de la base son menores que 90º, se puede dividir, para formar un rectángulo con la misma base pero que tenga solamente la mitad de la altura del triángulo. (III)



(III)

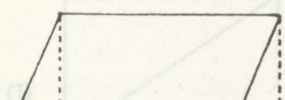
4. Se puede dividir un triángulo tal que uno de los ángulos de la base sea obtuso de manera que se pueda formar un rectángulo con la misma base y con altura la mitad de la del triángulo. Este procedimiento se puede ver en M. T. nº 24, p. 65. (IV)



(IV)

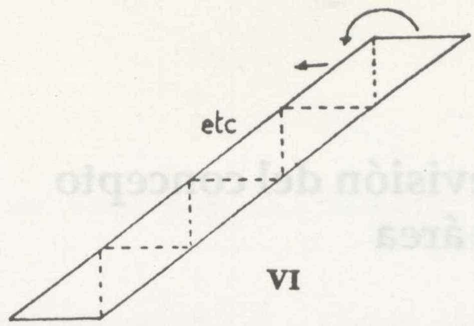
El paralelogramo

1. La división y formación de un rectángulo es muy sencilla; interviene solamente el corte y traslado de un triángulo de un extremo al otro para formar el rectángulo. (V)



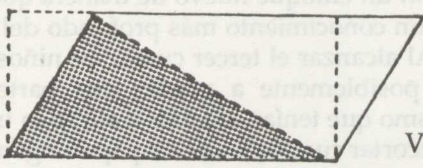
V

Si el paralelogramo tiene una base muy corta, puede ser necesario hacer una división en paralelogramos más pequeños. (VI)



VI

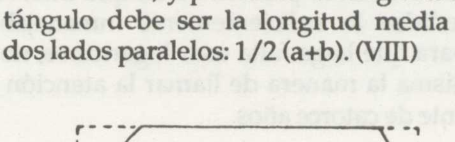
2. Cualquier paralelogramo está compuesto por dos triángulos congruentes, cada uno de los cuales tiene como área la mitad de la de un rectángulo de la misma base y con la misma altura que el paralelogramo. (VII). Esto implica que el rectángulo y el paralelogramo tienen áreas iguales.



VII

El trapecio

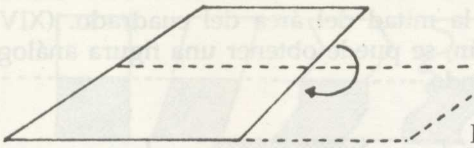
1. Una rotación de 180º de cada uno de los dos triángulos que están en los terminales del trapecio lo transforman en un rectángulo. El centro de rotación debe ser el punto medio del lado inclinado y un lado del triángulo que se gira debe ser perpendicular a los lados paralelos del trapecio. La suma de las longitudes de los lados paralelos se mantiene constante, y por tanto la longitud del rectángulo debe ser la longitud media de los dos lados paralelos: 1/2 (a+b). (VIII)



VIII

2. En M.T. 24 p. 67 se describe la formación de un paralelogramo a partir de un trapecio por medio de un sólo corte. El corte se hace por la recta que une los puntos medios de los

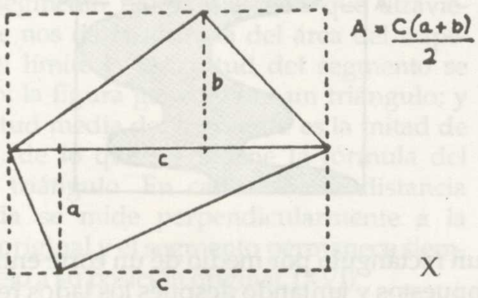
lados inclinados; por medio de un giro de la sección superior se forma un paralelogramo cuya área es la suma de los lados paralelos multiplicada por la mitad de la altura. (IX)



IX

El cuadrilátero

Cualquier cuadrilátero convexo tiene como área la mitad de la de un rectángulo circunscrito, siempre que una diagonal del cuadrilátero sea paralela a un lado del rectángulo. El área será la longuitud de esa diagonal multiplicada por la suma de las distancias en perpendicular desde los otros dos vértices del cuadrilátero a la diagonal, y todo ello dividido por dos. (X)



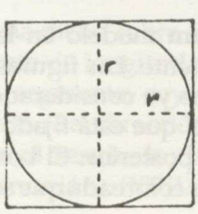
X

El rombo y la cometa

Las dos diagonales de esas figuras son perpendiculares a los lados del rectángulo circunscrito descrito antes, por lo que el área es la mitad del producto de las diagonales.

El círculo y la elipse

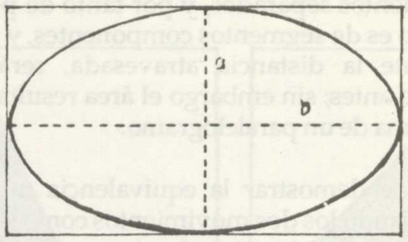
El círculo es una fracción fija del cuadrado circunscrito: Este último tiene como área $4r^2$ y la del círculo es $\pi/4$ de la anterior:
$\pi/4 \times 4r^2 = \pi r^2$. (XI)



XI

Si se alarga la figura (XI), el cuadrado se convierte en un rectángulo y la circunferencia en una elipse; el área del rectángulo es $4\underline{ab}$ y la de la elipse sigue siendo los $\pi/4$ de ella, esto es:

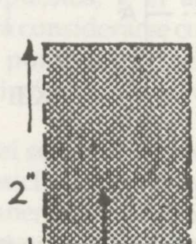
$$\pi/4 \times 4\underline{ab} = \pi\, \underline{ab}\ . \text{ (XIa)}$$



XIa

El segundo enfoque es el que considera el área como la medida de la cantidad de plano atravesada por un segmento de recta móvil. Empecemos con un segmento de longitud dada, digamos de una pulgada. Nos movemos entonces en dirección perpendicular al propio segmento a una nueva posición, pongamos a dos pulgadas, de manera que generamos un rectángulo en el plano. Si suponemos que el segmento ha permanecido siempre paralelo a su posición original, resulta entonces que ha pasado por todos los puntos que se encuentran entre la posición de partida y la posición final y, al mismo tiempo, ha coincidido con cada segmento de recta de la misma longitud que se encuentra entre esas dos posiciones. Esto es, ha tomado todas las posibles posiciones entre las dos posiciones inicial y final y, por lo tanto, el área que ha atravesado debe ser equivalente a la suma de todas esas posiciones. Esta "suma" variará según la distancia que ha atravesado el segmento: sumar las posiciones individuales es imposible porque su número es infinito y su anchura es nula. Solamente podemos tomar la distancia que ha atravesado el segmento como una indicación satisfactoria de una "suma". En este caso la distancia que ha atravesado el segmento es de dos pulgadas. El área es por tanto una pulgada multiplicada por dos pulgadas, o bien dos (pulgadas)^2, esto es, dos pulgadas cuadradas. (XII)

Posición final

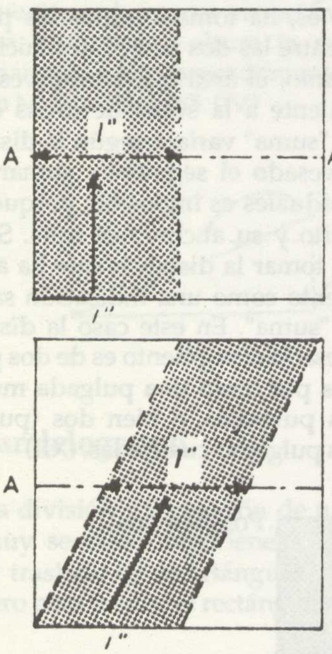


XII

Posición inicial

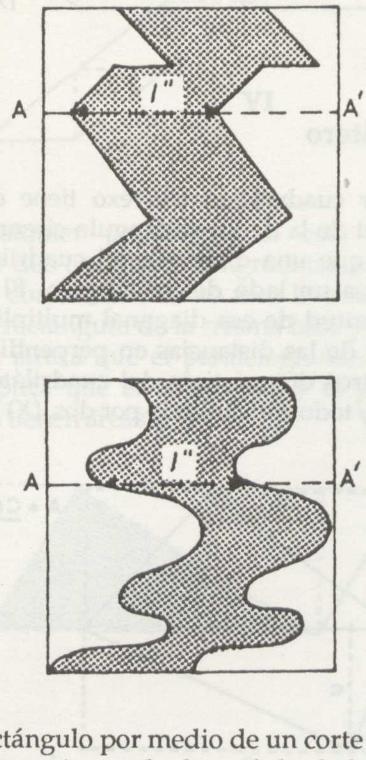
Si el segmento se mueve no en una dirección perpendicular a sí mismo sino formando un ángulo agudo consigo mismo mientras que permanece paralelo a su posición original, atravesará la misma área, dos pulgadas cuadradas, cuando se haya movido dos pulgadas medidas perpendicularemenrte a su posición original. El número de movimientos separados, y por tanto de posiciones, esto es de segmentos componentes, y por consiguiente la distancia atravesada, será el mismo que antes; sin embargo el área resultante tiene la forma de un paralelogramo.

Se puede demostrar la equivalencia de las áreas dibujando los dos movimientos como si tuvieran lugar en el interior de un cuadrado de dos pulgadas. En el primer caso el segmento de recta se mueve directamente desde un lado del cuadrado hasta el otro, tocando siempre un tercer lado; en el segundo caso el segmento se mueve oblicuamente a través del cuadrado. Si trazamos una recta AA' a través del cuadrado paralela al segmento, y hallamos la fracción de la sección cubierta por el segmento de recta en ese punto, encontraremos que esta fracción es exactamente un medio, independientemente del camino seguido por el segmento y por tanto el área total del cuadrado atravesado por el segmento de recta será la mitad en cada uno de los dos casos. (XIII)



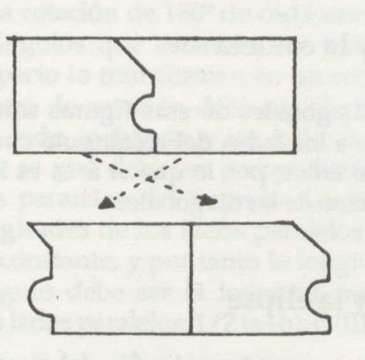
XIII

De este resultado se desprende que no influye el camino que siga el segmento cuando se mueve a través del cuadrado, siempre y cuando se mantenga paralelo a su posición original. Puede cambiar de dirección tanto como quiera, e incluso cambiarla continuamente. Cada vez que se tome una sección paralela al lado del cuadrado en que se apoya el segmento, el segmento ocupará exactamente la mitad de dicha sección; y el área total atravesada será exactamente la mitad del área del cuadrado. (XIV). Más aún, se puede obtener una figura análoga dividiendo



XIV

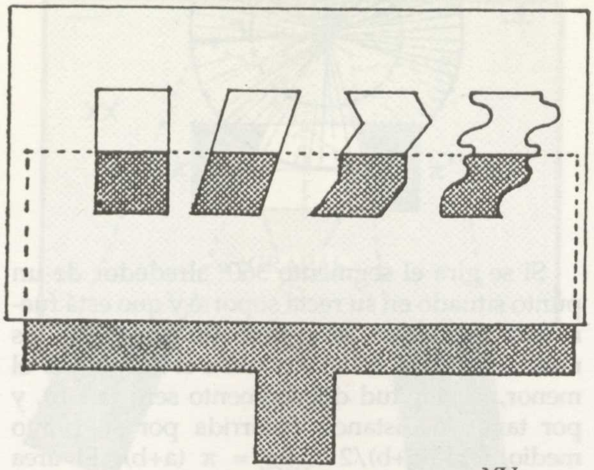
un rectángulo por medio de un corte entre lados opuestos y juntando después los lados restantes. (XIVa). Se obtiene así la regla de que el



XIVa

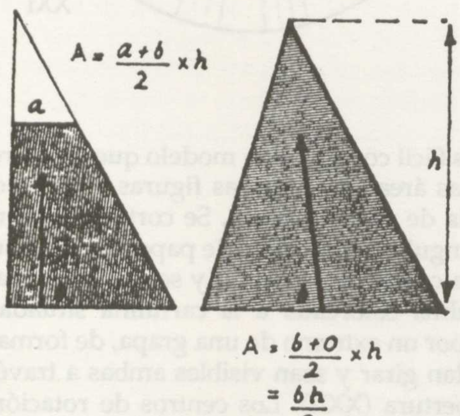
área atravesada es la longitud del segmento multiplicada por la distancia en perpendicular que ha sido atravesada.

Se puede hacer un modelo en la clase para mostrar este movimiento. Las figuras correspondientes a los caminos ya considerados se cortan en un trozo de papel que está fijado en sus bordes a una cartulina posterior. El borde recto de un trozo de cartulina coloreada que se mueve detrás del papel mostrará los diversos movimientos de segmentos iguales. (XV)



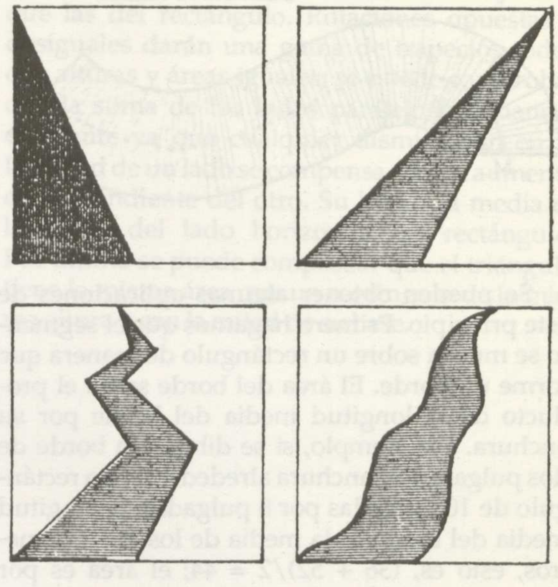
XV

Si el segmento se acorta en proporción constante a medida que se mueve en una dirección dada, generará un trapecio. El área atravesada será entonces el producto de la longitud media del segmento por la distancia que atraviesa, lo que nos da la fórmula del área del trapecio. En el límite la longuitud del segmento se hace cero; la figura generada es un triángulo; y la longuitud media del segmento es la mitad de la inicial, de lo que se obtiene la fórmula del área del triángulo. En cada caso la distancia atravesada se mide perpendicularmente a la posición original y el segmento permanece siempre paralelo a su posición original. (XVI)



XVI

Lo que se ha dicho sobre el camino que recorre un segmento de longitud constante se puede aplicar a un segmento cuya longitud decrece constantemente. La dirección del movimiento no influye en el resultado; las figuras mostradas a continuación (XVII) tienen todas la misma área. La condición para ello es que en cualquier sección del cuadrado por medio de una paralela a un lado, el segmento tenga igual longitud en cada figura. Se puede construir un modelo análogo al ya descrito para obtener una selección de figuras generadas por un segmento decreciente en longitud.

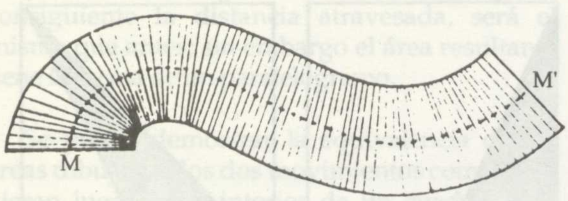


XVII

Si el segmento cambia de alineación y no permanece paralelo a su posición original, no se puede calcular el área atravesada de la misma forma que antes. Sin embargo se puede hallar un fórmula para ella. En primer lugar debemos distinguir entre área positiva y área negativa. El área positiva es el área atravesada durante el movimiento del segmento en una dirección convenida. Si cualquier parte del segmento se mueve en sentido contrario al de la otra parte, es decir, si algún punto del segmento es estacionario y actúa como centro de rotación, una parte del segmento estará atravesando un área negativa. Cuando el segmento gira alrededor de su punto medio, cada parte del segmento atravesará un área igual, pero esas áreas tendrán signos opuestos, y el área resultante atravesada deberá considerarse como cero. Solamente cuando el punto medio se mueve en una dirección "positiva" será el área resultante positiva.

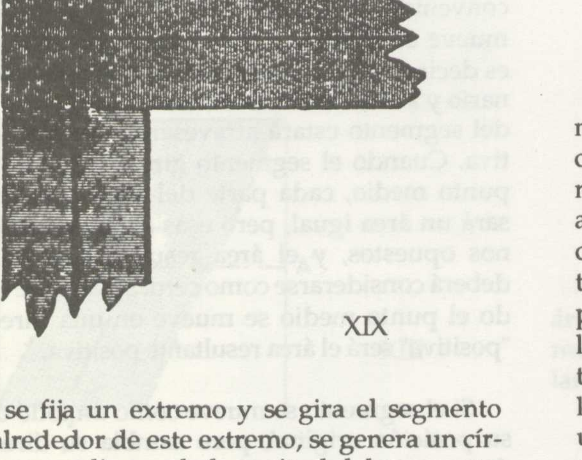
Si el segmento se mueve como un todo desde su posición original, pero cambia su dirección de manera que genere un área curvilínea, mientras que en cada instante permanece perpendicular a la dirección de su movimiento (XVIII), los caminos trazados por cada punto tendrán longitudes distintas. Se puede demostrar, sin embargo, que un punto del segmento recorrerá un camino de longitud media. Este es el punto medio del segmento. El área atravesada será por tanto el producto de la longitud del segmento por la longitud del camino recorrido por su punto medio.

LA TRAYECTORIA
DEL PUNTO MEDIO



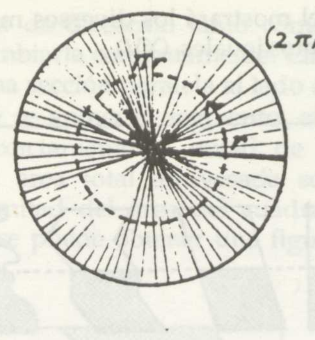
XVIII

Se pueden obtener algunas aplicaciones de este principio. Primero hagamos que el segmento se mueva sobre un rectángulo de manera que forme un borde. El área del borde serán el producto de la longitud media del borde por su anchura. Por ejemplo, si se dibuja un borde de dos pulgadas de anchura alrededor de un rectángulo de 10 pulgadas por 8 pulgadas, la longitud media del borde es la media de los dos perímetros, esto es, $(36 + 52)/2 = 44$; el área es por tanto 88 pulgadas cuadradas. La figura (XIX) muestra el comportamiento del segmento en las esquinas del rectángulo, la línea gruesa es el camino recorrido por el punto medio y la recta de puntos muestra la situación de la línea que tiene la misma longitud que la media de los dos perímetros. El resultado es válido para cualquier curva simple, sea cerrada o abierta.



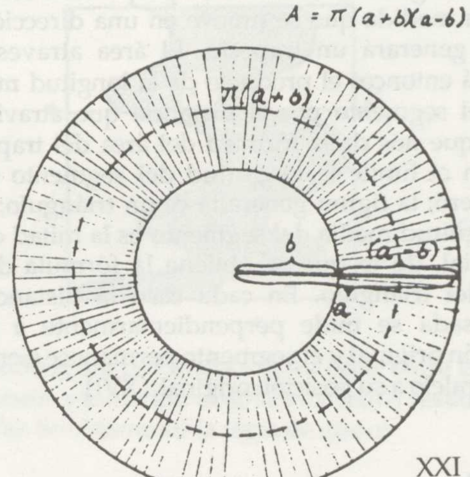
XIX

Si se fija un extremo y se gira el segmento 360º alrededor de este extremo, se genera un círculo cuyo radio r es la longuitud del segmento. El extremo libre del segmento ha recorrrido una distancia de $2\pi r$, y el punto medio ha recorrido la mitad de esa distancia, πr. El área atravesada es $r \times \pi r$, o sea πr^2. (XX)



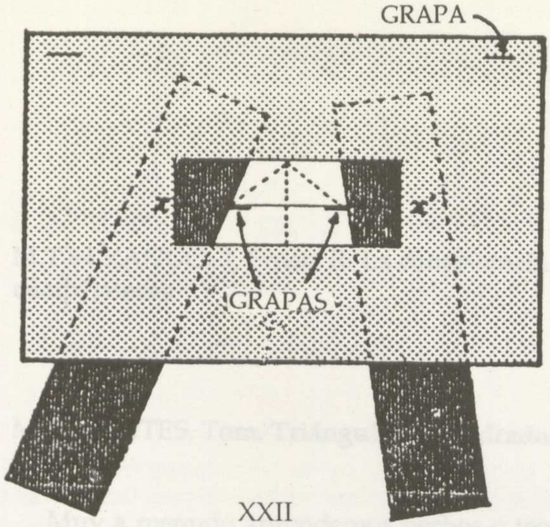
XX

Si se gira el segmento 360º alrededor de un punto situado en su recta soporte y que está fuera del segmento, se genera un anillo. Si los radios extremos del anillo son **a** el mayor y **b** el menor, la longitud del segmento será **(a - b)**, y por tanto la distancia recorrida por su punto medio será $(a+b)/2 \times 2\pi = \pi\,(a+b)$. El área atravesada será $\pi\,(a+b)\,(a-b)$. (XXI)



XXI

Es fácil construir un modelo que muestre cómo las áreas de distintas figuras se relacionan con la de un rectángulo. Se corta una abertura rectangular en un trozo de papel que está sujeto a una cartulina posterior; y se fijan dos tiras de cartulina coloreada a la cartulina situada detrás por un extremo de una grapa, de forma que puedan girar y sean visibles ambas a través de la abertura (XXII). Los centros de rotación están teóricamente en los centros de los rectángulos en que se divide la abertura por medio de una recta vertical trazada por su propio centro, aunque por consideraciones prácticas se colocarán ligeramente desviados hacia los lados de la abertura. Se fijan las tiras cuando sus bordes forman un triángulo con el borde inferior de la abertura; el vértice superior de este triángulo está en el punto medio del borde superior del rectángulo.



XXII

El área de la cartulina de detrás que es visible a través de la abertura permanece constante, a pesar de los cambios de forma ocasionados por la rotación de las tiras; cualquier área adicional obtenida por la rotación se compensa con el área cubierta. Cuando las tiras están en posición vertical se forma un rectángulo; rotaciones iguales en las mima dirección dan una serie de paralelogramos de igual base, altura y área que las del rectángulo. Rotaciones opuestas o desiguales darán una gama de trapecios todos con alturas y áreas iguales; se puede comprobar que la suma de los lados paralelos permanece constante ya que cualquier disminución en la longitud de un lado se compensa con un aumento correspondiente del otro. Su longitud media es la mitad del lado horizontal del rectángulo. Por último se puede comprobar qué el triángulo tiene la misma área que un rectángulo de la misma altura y con la mitad de su base.

El área de la cartulina coloreada que es visible a través de la abertura permanece constante, a pesar de los cambios de forma ocasionados por la rotación de las tiras; cualquier área adicional obtenida por la rotación se compensa con el área cubierta. Cuando las tiras están en posición vertical se forma un rectángulo; rotaciones iguales en la misma dirección dan una serie de paralelogramos de igual base, altura y área que las del rectángulo. Rotaciones opuestas o desiguales darán una gama de trapecios todos con alturas y áreas iguales; se puede comprobar que la suma de los lados paralelos permanece constante ya que cualquier disminución en la longitud de un lado se compensa con un aumento correspondiente del otro. Su longitud media es la mitad del lado horizontal del rectángulo. Por último se puede comprobar que el triángulo tiene la misma área que un rectángulo de la misma altura y con la mitad de su base.

[illegible] este principio. [illegible] lo se mueva sobre un rectángulo de manera que forme un borde. El área del borde será el producto de la longitud media del borde por su anchura. Por ejemplo, si se dibuja un borde de dos pulgadas de anchura alrededor de un rectángulo de 10 pulgadas por 6 pulgadas, la longitud media del borde es la media de los dos perímetros, esto es, (36 + 52)/2 = 44; el área es por tanto 88 pulgadas cuadradas. La figura (XIX) muestra el comportamiento del segmento en las esquinas del rectángulo. La línea gruesa es el camino recorrido por el punto medio y la recta de puntos muestra la situación de la línea que tiene la misma longitud que la media de los dos perímetros. El resultado es válido para cualquier curva simple, sea cerrada o abierta.

Si se fija un extremo y se gira el segmento 360º alrededor de este extremo, se genera un círculo cuyo radio r es la longitud del segmento. El extremo libre del segmento ha recorrido una distancia de 2 πr, y el punto medio ha recorrido la mitad de esa distancia, πr. El área atravesada es r x πr, o sea πr². (XX)

está en el punto medio del borde superior del rectángulo (XXIII).

[illegible] punto [illegible] ra del [illegible] se genera un [illegible] los radios [illegible] del anillo son a el [illegible] el menor, [illegible] del segmento [illegible] y por tanto [illegible] distancia recorrida por [illegible] medio [illegible] b)/2 x 2π = π (a+b) [illegible] área atravesada será π (a+b) (a-b). (XXI)

Es fácil construir un modelo que muestre cómo las áreas de distintas figuras se relacionan con la de un rectángulo. Se corta una abertura rectangular en un trozo de papel que está sujeto a una cartulina posterior, y se fijan dos tiras de cartulina coloreada a la cartulina situada detrás por un extremo de una grapa, de forma que puedan girar y sean visibles ambas a través de la abertura (XXII). Los centros de rotación están teóricamente en los centros de los rectángulos en que se divide la abertura por medio de una recta vertical trazada por su punto medio, aunque por consideraciones prácticas se colocan ligeramente desviados hacia los lados de la abertura. Se fijan las tiras cuando sus bordes formen un triángulo con el borde inferior de la abertura; el vértice superior de este triángulo

M.T.64 RANUCCI, Ernest R. **La congruencia de cuadriláteros**

M.T.88 BATES, Tom. **Triángulos y cuadrados**

Muy a menudo aprendemos hechos o teoremas, o hacemos definiciones en matemáticas sin darnos cuenta o sin saber que estamos considerando circunstancias restrictivas muy especiales. La primera vez que me di cuenta de ello fue cuando pedí a los niños que hicieran moldes de papel para construir conos circulares rectos. ¡Eso es fácil de decir!. Bien, se puede encontrar incluso a algún ingeniero que sea capaz de dibujar un triángulo. Todo fue bien hasta que pensé que sería bueno que los niños hiciesen modelos de yeso blanco no sólo de conos circulares rectos, sino también de conos circulares oblicuos. Bien, ¡encontré que no podía hacer un molde para un cono circular oblicuo! Recuérdese que la base sigue siendo circular.

Llevé el problema no resuelto a la reunión de la ATM de los primeros años setenta, ¡y sólo una persona de las que se lo enseñé pudo dar con una solución! Quedé verdaderamente sorprendido de que al mover el vértice del cono e unidades "hacia fuera del centro" el problema se volviese tan difícil.

Cono circular recto.
P está directamente encima del centro C de la circunferencia

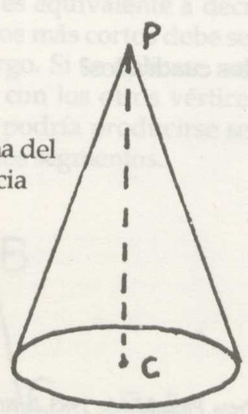


Fig. 1

Cono circular oblicuo.
P no está directamente encima del centro C de la circunferencia.

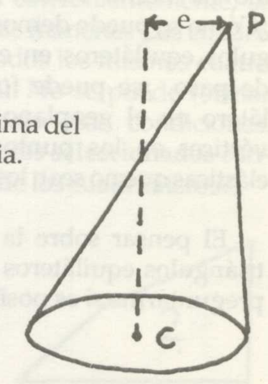


Fig. 2

El hecho de que la nueva solución no sea tan fácil no resta importancia al hecho de que debamos darnos cuenta de que un cono circular recto es un cono muy especial.

Un ejemplo, no tan extremo como este, aparece cuando se discute en los textos las condiciones bajo las que los triángulos son congruentes, sin plantear siquiera la cuestión de bajo qué condiciones son congruentes dos cuadriláteros. Ranucci hace en su artículo exactamente esto, y aún mucho más.

¿Ha pensado alguna vez lo especial que es un triángulo equilátero? Por supuesto que conoce muchas razones por las que es muy especial; y aún puede sacar muchas ideas nuevas del artículo de Bates. Incluso los 15 triángulos equiláteros tan bien dispuestos en un diagrama equilátero pueden dar lugar a múltiples discusiones y a que se pongan de relieve una gran cantidad de ideas. Una de las más importantes maneras en que un triángulo equilátero es especial se plantea en la pregunta "¿Se puede construir un triángulo equilátero en un geoplano ?" y se discute a continuación. La forma en que Bates trata la situación cuando una estudiante le muestra un triángulo que ella pretende que es equilátero es una valiosa lección general de pedagogía. Bates describe varias maneras distintas de tratar la situación según la "creencia personal de cada uno sobre el nivel de comprensión de la persona de que se trate". Y, ¿no es en eso en lo que consiste una buena enseñanza? Sus sensatas observaciones me animaron a tener más cuidado en otras ocasiones.

Considerar el triángulo "pseudo" equilátero $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, me hizo pensar en el problema siguiente: Hallar otros triángulos "pseudo" equiláteros de esta especie que puedan ser representados en el geoplano. Uno, dado por Bates, tiene como lados 8, $\sqrt{65}$, $\sqrt{65}$. ¿Se pueden encontrar otros? ¿Por medio de construcciones como ha hecho Bates? ¿De alguna otra forma? ¿Cómo se puede demostrar que no existen triángulos equiláteros en el geoplano? Y dicho sea de paso, ¿se puede formar un triángulo equilátero en el geoplano si se permite que haya vértices en los puntos de cruce de las cintas elásticas que no sean los clavos?

El pensar sobre la posibilidad de construir triángulos equiláteros en un geoplano me hace preguntarme si es posible construir un cuadrado en un geoplano que tiene sus clavos situados en una red de triángulos equiláteros.

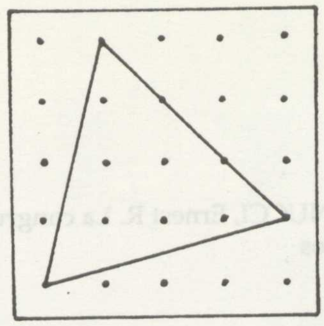


Fig. 3

¿Es éste un triángulo equilátero?

Y todo esto me recuerda una pregunta planteada en "What if not?"(5): Las cuestiones relacionadas con un geoplano cuadrado, ¿tienen siempre sentido en un geoplano de triángulos equiláteros? Y si es así, ¿Cuáles serían las soluciones? La comparación de los dos tableros plantea algunas veces nuevas cuestiones. Por ejemplo, si se hace que coincidan las dos filas de clavos del fondo de los dos tableros, ¿coincidirán algunos otros clavos? Si no es así, ¿por qué?, y si es así, ¿cuáles?

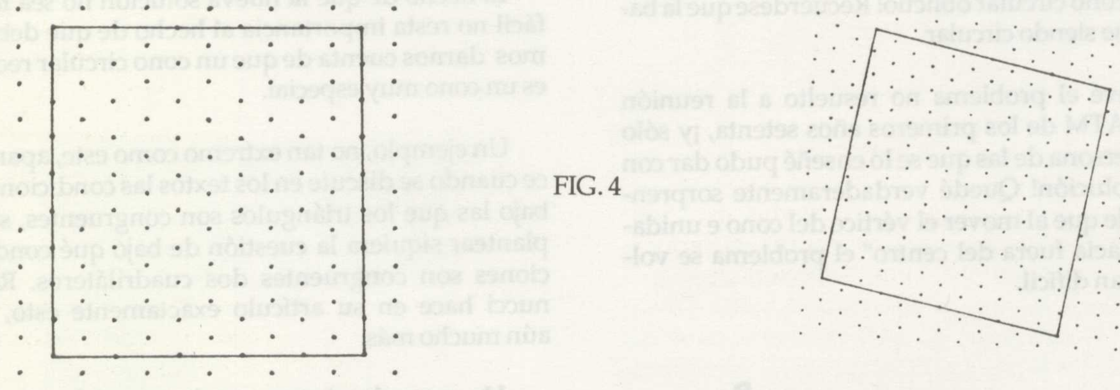


FIG. 4

¿Son estas dos figuras dos cuadrados?

(5) *Walter, M. y Brown, S. What if not? M.T. 46*
Brown, S. y Walter M. The Art of Problem Posing. Franklin Institute Press, Philadelphia, 1983, lleva a cabo una discusión más detallada del planteamiento de problemas.

La congruencia de cuadriláteros

Se ha escrito mucho sobre la congruencia de triángulos. Los libros de texto de geometría no pueden pasarse sin ella. Se ha escrito relativamente poco sobre la congruencia de cuadriláteros. Una lección o dos sobre la materia sirve habitualmente para ilustrar la congruencia de triángulos, señalando las similitudes y las diferencias entre ambas. Una discusión de la rigidez de los polígonos en general servirá como una buena plataforma de lanzamiento.

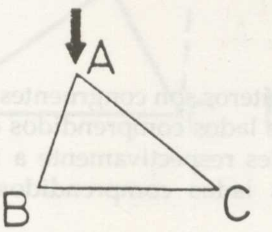


Fig. 1

El triángulo es el único polígono que es rígido en sí mismo. Esto significa que los segmentos AB, BC y AC seleccionados convenientemente determinarán una y sólo una figura –el propio triángulo–. Entendemos por "seleccionados convenientemente" que la suma de las longituitudes de dos cualesquiera de ellos sea mayor que la longitud del tercero. Esto es equivalente a decir que la suma de los dos lados más cortos debe ser mayor que el lado más largo. Si se aplicase una fuerza a A (o a B o a C), con los otros vértices fijos, el único cambio que podría producirse sería alguna deformación de los segmentos.

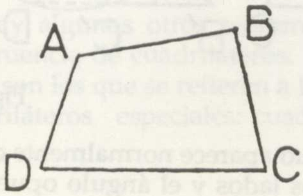


Fig. 2

RANUCCI, Ernest R.
State University of Nev York. Albany.

Un cuadrilátero ABCD, formado con cuatro segmentos seleccionados convenientemente, se puede deformar de muchas maneras. Los cuadriláteros 1, 2, 3 y 4 tienen todos los mismos cuatro segmentos que el original. No se puede formar un **único** cuadrilátero bajo esas condiciones. (¿Qué quiere decir **segmentos seleccionados convenientemente** en el caso de los cuadriláteros?)

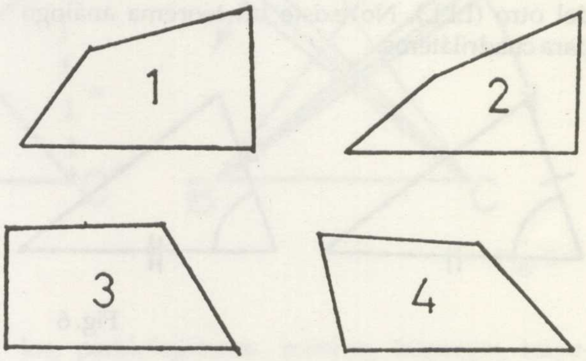


Fig. 3

Si se añade al cuadrilátero una o más diagonales, entonces sí que **aparece** la rigidez. Ahora el cuadrilátero está formado por triángulos, y cada uno de ellos es rígido. Se obtiene una mayor solidez se se trazan las dos diagonales, que así se refuerzan entre sí en E. Entonces los ocho triángulos colaboran en la rigidez. (Identificar los ocho triángulos).

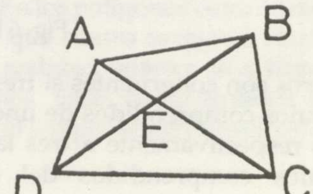


Fig. 4

Los teoremas sobre congruencia relativos a los cuadriláteros casi invariablemente hacen referencia a consideraciones sobre la rigidez. Esto justifica el que sea necesario un estudio preliminar de este aspecto de la geometría.

En los diagramas que damos a continuación, se establece el paralelismo entre los teoremas sobre conguencia de triángulos (cuando son pertinentes) con los teoremas comparables sobre congruencia de cuadriláteros; sólo se consideran cuadriláteros convexos.

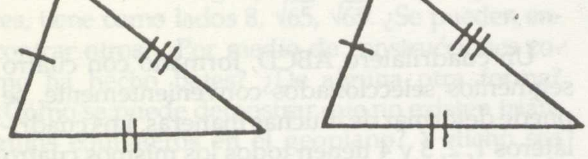


Fig. 5

Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son iguales a los tres lados del otro (LLL). No existe un teorema análogo para cuadriláteros.

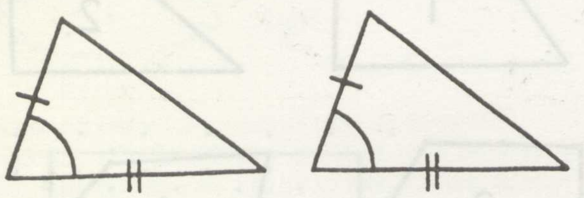


Fig. 6

Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de uno de ellos son iguales a dos lados y el ángulo comprendido del otro (LAL)

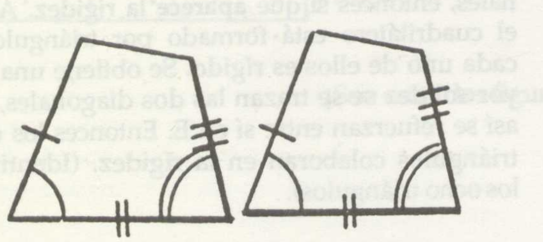


Fig. 6 bis

Dos cuadriláteros son congruentes si tres lados y los dos ángulos comprendidos de uno de ellos, son iguales respectivamente a tres lados y los dos ángulos comprendidos del otro (LALAL)

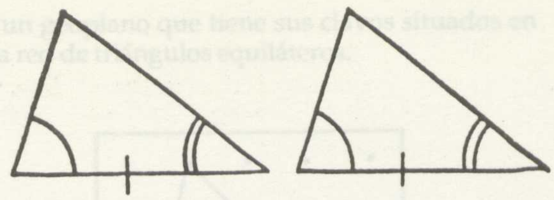


Fig. 7

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido de uno de ellos, son iguales a dos ángulos y el lado comprendido del otro (ALA)

La congruencia ángulo-lado-ángulo se continúa habitualmente con la congruencia lado-ángulo-lado. Después de todo la suma de los ángulos de un triángulo es constante.

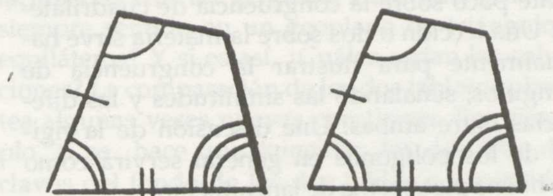


Fig. 7 bis

Dos cuadriláteros son congruentes si tres ángulos y los dos lados comprendidos de uno de ellos, sin iguales respectivamente a tres ángulos y los dos lados comprendidos del otro (ALALA)

Este teorema no se cumple en los cuadriláteros. Si tres ángulos del cuadrilátero son iguales a tres ángulos de otro, los cuatro ángulos deben ser iguales. Pero los cuadriláteros no son necesariamente congruentes si un lado y los cuatro ángulos de uno de ellos son respetivamente iguales a un lado y los cuatro ángulos del otro.

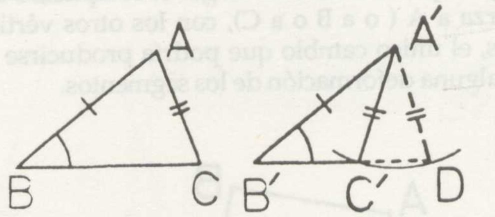


Fig. 8

El caso ambiguo aparece normalmente cuando se trata de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ABC en la figura anterior no es congruente con el triángulo A' B' C'. Si la longuitud A' C' se pasase a la posición A' D, en tonces **resultarían** congruentes. De ahí el uso del término **ambiguo.** (LLA)

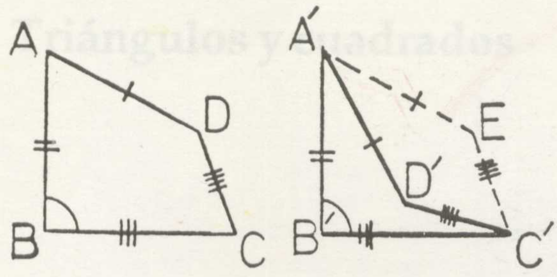


Fig. 8 bis

Una situación análoga aparece en el caso de los cuadriláteros. Los cuadriláteros **no** son congruentes en esas circunstancias. Si se hace A' E igual a A' D' y C' E igual a C' D' si **serán** congruentes. Así pues los cuadriláteros no tiene por qué ser congruentes incluso si los cuatro lados de uno sin iguales a los cuatro lados del otro y también igual uno de los ángulos correspondientes en cada cuadrilátero. En el primer caso los cuadriláteros serán no convexos. (LLLLA)

En la discusión de la congruencia de cuadriláteros surgen teoremas en que aparecen las diagonales. No tienen paralelismo en la congruencias de triángulos, por supesto, porque los triángulos no tienen diagonales. El problema de la "diagonal flotante" surge frecuentemente al estudiar las condiciones bajo las que los cuadriláteros son congruentes.

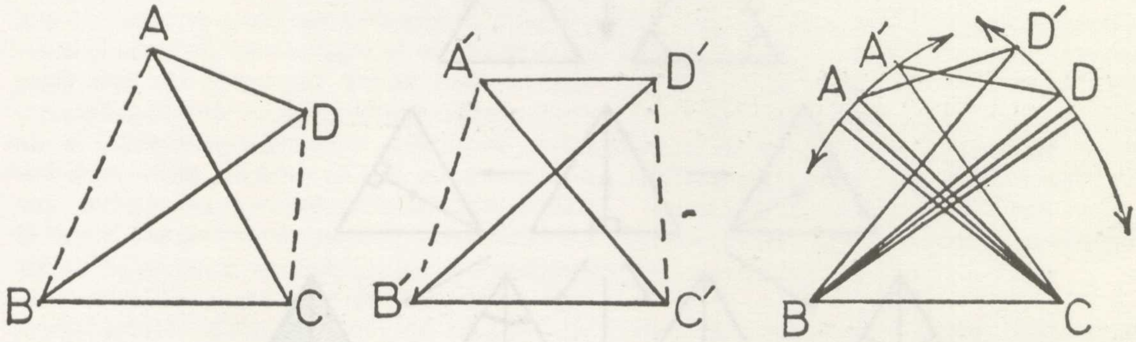


Fig. 9

Los cuadriláteros ABCD y A' B' C' D' **no** son necesariamente congruentes incluso aunque dos lados y dos diagonales sean respectivamente iguales. Si se fija BC y se trazan arcos con las longitudes de las diagonales, se puede obtener el lado AD con diversas orientaciones. De ahí el término de"diagonal flotante". Se deben fijar estas diagonales para asegurar la rigidez y la unicidad.

Dos cuadriláteros son congruentes si dos lados correspondientes y los dos pares de diagonales son iguales **y** la inclinación de las diagonales sobre los lados correspondientes está fijada.

Hay algunos otros teoremas relativos a la congruencia de cuadriláteros. Los más productivos son los que se refieren a la congruencia de cuadriláteros especiales: cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos, trapecios, trapecios isósceles, etc.

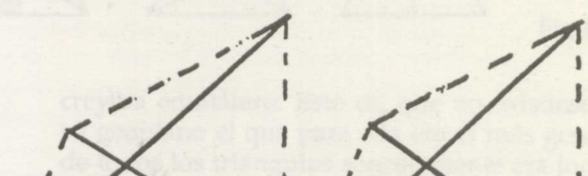


Fig. 10

En los polígonos cuyo número de lados es mayor que cuatro surgen diversas complicaciones. En realidad aparece una **complejidad** de situaciones. Estas complejidades servirán para probar el temple de los Einstein en potencia.

uno de ellos. ABC en la figura anterior no es congruente con el triángulo A' B' C' si la longitud A' C' se pasase a la posición A' D, entonces resultarían congruentes. De ahí el uso del término ambiguo. (LLA)

Fig. 8 bis

Los cuadriláteros ABCD y A' B' C' D' no son necesariamente congruentes incluso aunque dos lados y dos diagonales sean respectivamente iguales. Si se fija BC y se trazan arcos con las longitudes de las diagonales, se puede colocar el lado AD con diversas orientaciones. De ahí el término de "diagonal flotante". Se deben fijar estas diagonales para asegurar la rigidez y la unicidad.

Dos cuadriláteros son congruentes si dos lados correspondientes y los dos pares de diagonales son iguales y la inclinación de las diagonales sobre los lados correspondientes está fijada.

Hay algunos otros teoremas relativos a la congruencia de cuadriláteros. Los más productivos son los que se refieren a la congruencia de cuadriláteros especiales: cuadrados, rectángulos, paralelogramos, rombos, trapecios, trapecios isósceles, etc.

Fig. 9

Fig. 10

En los polígonos cuyo número de lados es mayor que cuatro surgen diversas complicaciones. En realidad aparece una complejidad de situaciones. Estas complejidades servirían para probar el temple de los alumnos en potencia.

En la discusión de la congruencia de cuadriláteros surgen teoremas en que aparecen las diagonales. No tienen paralelismo en la congruencia de triángulos, por supuesto, porque los triángulos no tienen diagonales. El problema de la "diagonal flotante" surge frecuentemente al estudiar las condiciones bajo las que los cuadriláteros son congruentes.

* Una situación análoga aparece en el caso de los cuadriláteros. Los cuadriláteros no son congruentes en estas circunstancias. Si se hace A' D igual a A' D' y C' D' igual a C' D serían congruentes. Así pues los cuadriláteros no tienen por qué ser congruentes incluso si los cuatro lados de uno son iguales a los cuatro lados del otro y también igual uno de los ángulos correspondientes en cada cuadrilátero. En el primer caso los cuadriláteros serían no convexos. (LLLLA)

Triángulos y cuadrados

TOM BATES
University of British Columbia

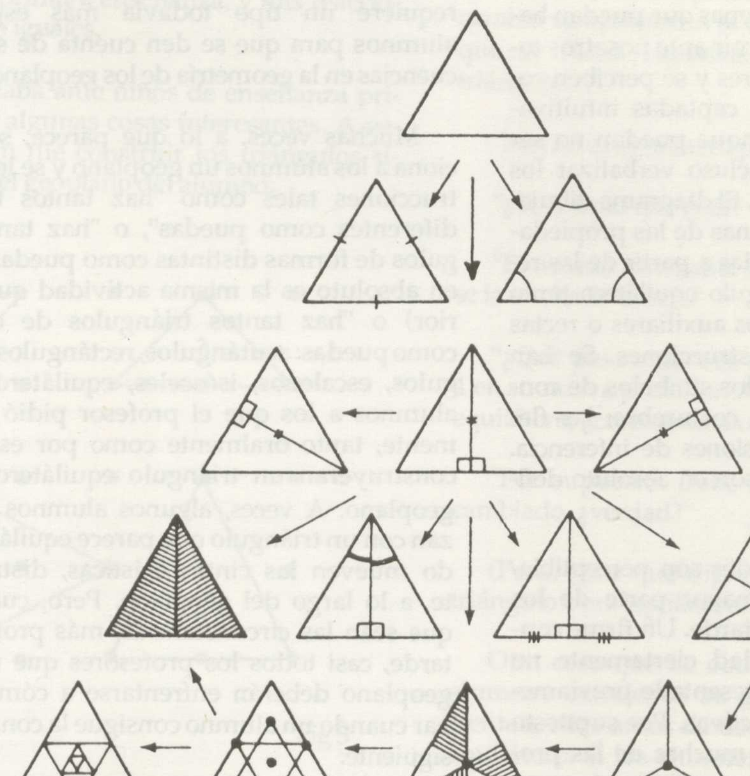


Fig 1

"¡Eh! gritó Susan, una estudiante universitaria de tercer curso de Educación. ¡Lo conseguí! He **construido** un triángulo equilátero. ¡Míralo!"

Susan agitaba triunfante su geoplano como reacción a una afirmación mía anterior que decía que aunque se pueden construir muchas clases de triángulos distintos sobre un geoplano, los triángulos equiláteros no son una de ellas. Susan, como muchos estudiantes y muchos escolares jóvenes, parecía tener una fuerte predilección hacía la simetría en las figuras geométricas; si se le pedía que dibujase "un triángulo cualquiera", elegiría sin duda dibujar uno que creyera equilátero. Esto es, que no existiese en su geoplano el que para ella era el más general de todos los triángulos sencillamente era inconcebible. Sin embargo, para otros estudiantes de la clase los triángulos equiláteros eran tan especiales que no les resultaba sorprendente que hubiese aún otros aspectos en que fuesen especiales. Después de la clase empecé a meditar sobre los triángulos especiales y sobre los alumnos y estudiantes especiales que he conocido; este artículo es el resultado de esas meditaciones.

¿Qué es lo que hay tan especial en los triángulos equiláteros? Lo difícil es saber por dónde empezar. A partir de la definición sabemos que los lados deben tener longitudes iguales, pero pronto aparecen claramente otras propiedades interesantes. El triángulo también es equiángulo, una propiedad que no tienen generalmente los polígonos equiláteros. Las tres alturas tienen la misma longitud, cada altura biseca a un ángulo y biseca a un lado; hay simetría axial respecto de cada altura y simetría central respecto del centroide. Se puede hacer fácilmente una representación razonablemente buena de un triángulo equilátero de muchas maneras distintas - usando varillas, un mecano, o el plegado de papel, o (¿como último recurso?) regla y compás. Incluso a partir de las representaciones razonablemente buenas que puedan hacer los alumnos, parecen surgir ante nosotros todas las propiedades anteriores y se perciben como evidentes; parecen ser captadas intuitivamente por los alumnos aunque puedan no ser capaces de formalizar o incluso verbalizar los conceptos correspondientes. El diagrama dibujado más arriba muestra algunas de las propiedades que pueden ser **percibidas** a partir de las representaciones de un triángulo equilátero junto con unos cuantos segmentos auxiliares o rectas utilizadas en diversas construcciones. Se han utilizado en los diagramas los símbolos de congruencia impuestos por la costumbre; las flechas indican **posibles** sucesiones de inferencia. Sin embargo las flechas no son en absoluto definitivas.

Creo que estas propiedades son perceptiblemente evidentes para la mayor parte de los alumnos más pronto o más tarde. Un firme convencimiento de su veracidad ciertamente no depende de que se hayan presentado previamete las demostraciones deductivas. Por supuesto que la propia obviedad de muchas de las propiedades, una vez que se han percibido, es un argumento pedagógico suficientemente fuerte como para ni siquiera tratar de demostralas en las escuelas con ningún estudio deductivo, sino más bien para aceptarlas como axiomas. Hay, sin embargo, otra propiedad que no es en absoluto evidente ni intuitivamente obvia; de hecho cuando los alumnos utilizan geoplanos cuadrados o papel cuadriculado, esta propiedad particular puede desembocar en conflictos entre la percepción y la razón en los que a menudo la razón es la que pierde. Me refiero a la propiedad de que si la longitud de un lado de un triángulo equilátero es un número racional, entonces la longitud de su altura debe ser un número irracional.

No es difícil, por supuesto, si se conoce el teorema de Pitágoras y se cree en él, y si se tiene alguna habilidad en el manejo algebráico, deducir que siempre que la longitud del lado de un triángulo equilátero es un número racional, la longitud de la altura se puede expresar como un múltiplo de $\sqrt{3}$; análogamente se puede demostrar que cuando la longitud de la altura es un número racional, entonces la longitud del lado es un múltiplo de $\sqrt{3}$. Pero si analizamos los conocimientos y destrezas necesarios para llegar a esas conclusiones, parece poco probable que muchos de los alumnos sean capaces de "ver" su veracidad antes de que se encuentren bien entrados en la enseñanza secundaria. Se precisa un tipo especial de alumnos para entender esa especial propiedad de un triángulo especial antes de esta etapa de la enseñanza, y se requiere un tipo todavía más especial de alumnos para que se den cuenta de sus consecuencias en la geometría de los geoplanos.

Muchas veces, a lo que parece, se proporciona a los alumnos un geoplano y se les dan instrucciones tales como "haz tantos triángulos diferentes como puedas", o "haz tantos triángulos de formas distintas como puedas", (lo que en absoluto es la misma actividad que la anterior) o "haz tantos triángulos de esta clase como puedas: acutángulos, rectángulos, obtusángulos, escalenos, isósceles, equiláteros". Sé de alumnos a los que el profesor pidió explícitamente, tanto oralmente como por escrito, que construyeran un triángulo equilátero sobre el geoplano. A veces, algunos alumnos se tropiezan con un triángulo que parece equilátero cuando mueven las cintas elásticas, distraidamente, a lo largo del geoplano. Pero, cualesquiera que sean las circunstancias, más pronto o más tarde, casi todos los profesores que utilizan el geoplano deberán enfrentarse a cómo reaccionar cuando un alumno consigue la configuración siguiente:

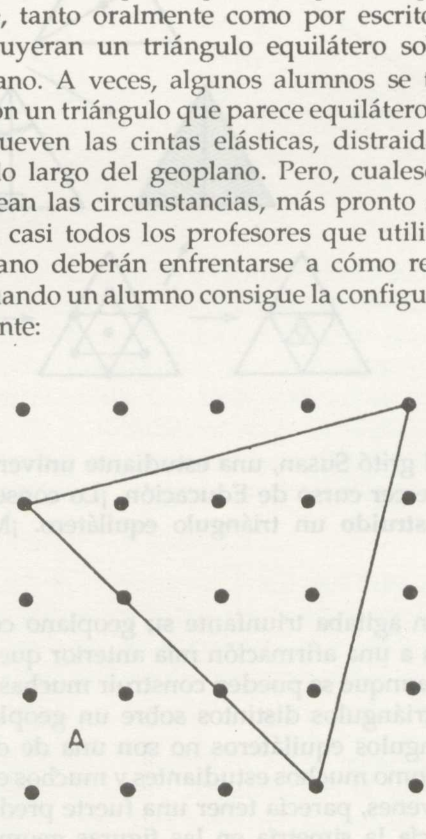


Fig 2

e **insiste** en que es un triángulo equilátero.

No hay duda de que parece equilátero; y si no estuviesen ahí los puntos de la red, podría incluso no caber la duda de que realmente es equilátero. Pero lo puntos de la red están ahí, y es posible deducir que aunque el triángulo es isósceles, con los lados de longitud $\sqrt{17}$, el tercer lado tiene longitud $\sqrt{18}$. ¿Cómo se debe reaccionar ante esto? Hasta cierto punto, por supuesto , la respuesta dependerá de lo que uno piense sobre el nivel de conocimientos de la persona a quien se constesta. Personalmente he tenido que reaccionar ante esta cuestión con alumnos de enseñanza primaria y secundaria, así como con alumnos que se estaban preparando para ser profesores de primera enseñanza, y mis reacciones no han sido iguales.

Cuando estaba ante niños de enseñanza primaria observé algunas cosas interesantes. A veces mi reacción fue construir los triángulos siguientes sobre el geoplano del alumno:

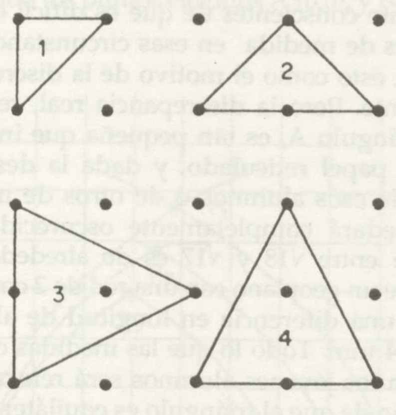


Fig 3

con el tablero orientado hacia el alumno de la misma forma en que el diagrama lo está hacia el lector. Pregunté entonces, sucesivamente, al alumno si los triángulos 1, 2, 3, y 4 eran también equiláteros. Esto me ayudó a saber si el alumno estaba simplemente confundiendo "equilátero" con isósceles", pero algo que he observado en varias ocasiones es que incluso si el alumno parece conocer la diferencia entre las dos clases de triángulos puede, en un principio, afirmar que el triángulo 3 no es equilátero, pero que el triángulo 4 si lo es. (No tienen por qué utilizarse necesariamente las palabras "equilátero" e "isósceles": expresiones tales como "los tres lados iguales" o "sólo dos lados iguales" pueden servir muchas veces para estos propósitos). Cuando ha sucedido esto, generalmente he girado el tablero noventa grados de manera que el triángulo 3 ocupe la posición del triángulo 4. Las reacciones a esto fueron interesantes y variadas; incluyeron las siguientes:

"¡Oh, ahora sí lo es (equilátero)"

(¿Cúales son las cosas que permanecen invariantes para este alumno? ¿Qué es lo que conserva?)

"Estaba equivocado. Si que era equilátero"

(¿Qué es lo que ha hecho que este alumno cambie de opinión? ¿El reconocimiento de que se parece al triángulo 4 que recuerda y que ya ha clasificado como equilátero? Pero, ¿por qué no cambia su opinión en la dirección opuesta y dice que se había equivocado antes respecto del triángulo 4?)

"No, no es equilátero porque es el mismo"

"¿El mismo que cuál?

"El mismo que había antes de que Ud. le diese la vuelta la tablero"

"¿Qué pasa entonces con este?" (El triángulo 4 en su nueva posición). "Tú dijiste antes que era equilátero; ¿crees todavía que lo es?

"Por supuesto. Debe serlo. No puede haber cambiado, ¿verdad?"

(Pero, ¿por qué dijo en primer lugar que el triángulo 4 era equilátero?)

Otra cosa que he observado es que algunos alumnos mantienen su geoplano verticalmente frente a ellos antes de decidir si un triángulo es equilátero. Si los alumnos están sentados y han dicho que el triángulo 4 es equilátero, a veces cambian de opinión cuando he levantado el tablero de forma que permanezca vertical; ¿esto es así porque creeen que yo espero que cambien de opinión o porque realmente parece distinto? A veces he continuado creando triángulos de la forma siguiente:

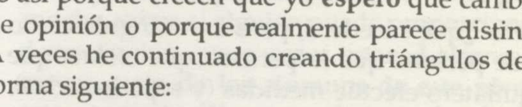


Fig. 4

y de nuevo las respuestas han sido interesantes y variadas, especialmente cuando se trataba de alumnos muy jóvenes. A menudo los niños bajitos dicen que el triángulo B no es equilátero, pero que el triángulo C sí lo es (cuando ambos están orientados como en la figura). ¿Dicen esto porque son **bajitos** o porque son jóvenes? ¿Qué importancia tiene el acortamieto que se produce cuando miramos un plano oblicuamente en lugar de ortogonalmente?

Muchas veces he presentado a alumnos mayores (y más altos), triángulos casi equiláteros mucho más grandes sobre una hoja de papel reticulado y les he preguntado si esos triángulos eran equiláteros. Sus reacciones, de nuevo, fueron muy interesantes. A menudo, antes de contestar, giraban el papel, pero luego eran incapaces de explicar en qué les ayudaba esto. ¿Estaban buscando ejes de simetría entre los puntos de la red? Yo sospecho que sí. ¿Afecta a su decisión el hecho de que el triángulo A (o cualquier otro triángulo con uno de sus lados formando ángulos de 45º con las filas de puntos de la red) contiene una distribución simétrica de "puntos" cuando se mira desde una dirección particular (tal como desde la parte inferior izquierda a la superior derecha), incluso aunque no aparezcan distribuciones simétricas análogas en otras direcciones? Como era de esperar, el tomar decisiones sobre triángulos más grandes llevó habitualmente más tiempo que hacerlo sobre triángulos más pequeños, independientemente de que las propias decisiones fuesen correctas o equivocadas. Todo esto me sugiere que al decidir si un triángulo es equilátero o no, y si hemos de tomar la decisión basándonos solamente en la percepción y sin hacer ninguna medida o utilizar el razonamiento matemático, el tamaño real del triángulo es un factor que afecta a nuestra decisión, la orientación del triángulo es otro factor, y estos factores influyen incluso cuando se construye el triángulo sobre una red cuadrada con sus vértices en los puntos de la red.

Pero ¿qué sucede si, para un triángulo como el A se permite que la persona que afirma que es equilátero efectúe medidas (y sepa hacerlas), o utilice razonamientos matemáticos (y sepa utilizarlos)? Una cosa que he observado es que esto no necesariamente resuelve la cuestión y que la creencia de que el triángulo es equilátero se mantiene con gran tenacidad.

Esto no es sorprendente en el caso de alumnos de la escuela primaria. En primer lugar, probablemente no conocen el teorema de Pitágoras; e incluso si lo conocen pueden no ser capaces de aplicarlo a este caso, y si son capaces de aplicarlo a este caso probablemente no tienen suficiente fe en su universalidad e invariancia como para contrarrestar la poderosa evidencia contraria obtenida por medio de la percepción. Y si recurren a la medida, entonces la evidencia perceptiva se suplementa por medio de la **demostración** de que el triángulo es equilátero, porque la demostración en este nivel no es lo que nosostros queremos decir cuando utilizamos esta palabra en otros contextos matemáticos. Demostrar es sencillamente hacer algo suficientemente evidente como para producir una creencia. Los alumnos de la escuela primaria no son siempre muy cuidadosos cuando efectúan medidas, y cuando no son cuidadosos, no son demasiado diestros; esto es así incluso cuando miden segmentos cuyos puntos extremos están bien definidos sobre una superficie firme y plana, y si usan una regla graduada o un compás. Se puede imaginar cuánto menos precisas serán sus medidas realizadas en un segmento cuyos puntos extremos están mal definidos, tal y como sucede en un geoplano, y si miden un triángulo casi equilátero sobre un geoplano y descubren alguna pequeña discrepancia, son suficientemente conscientes de que es difícil evitar los errores de medida en esas circunstancias y aceptarán esto como el motivo de la discrepancia aparente. Pero la discrepancia real, respecto del triángulo A, es tan pequeña que incluso sobre un papel reticulado, y dada la destreza manual de esos alumnos o de otros de mayor edad, quedará completamente oscurecida. La diferencia entre $\sqrt{18}$ y $\sqrt{17}$ es de alrededor de 0,12; sobre un geoplano con una red de 2 cm. esto significa una diferencia en longitud de alrededor de 2,4 mm. Todo lo que las medidas conseguirán en los jóvenes alumnos será reforzar su convicción de que el triángulo es equilátero y en tanto que se identifican los triángulos con sus representaciones, sean éstas dibujos o algo más tangible, los alumnos piensan de modo absolutamente correcto, y no sólo relativamente correcto. Por ejemplo, el triángulo A está probablemente más cercano a ser equilátero que cualquier otro que ellos puedan **percibir**, y lo que es más, probablemente no se puede distinguir, por ningún medio a su alcance, de cualquier triángulo equilátero que puedan **concebir**. Para ellos es equilátero y se puede demostrar que lo es. Yo no trataría de discutir esto con alumnos jóvenes si por azar surge la cuestión, sino que en el transcurso de una clase normal en este nivel yo trataría conscientemente de evitar que surgiese esta cuestión a través de mis propias preguntas o a través de ejercicios de libros de texto.

Pero, ¿qué pasa si se trata con alumnos de la enseñanza secundaria que conocen el teorema de Pitágoras y pueden aplicarlo? ¿Con cuánta fuerza creen en él a pesar de que la evidencia de la percepción y de la medida sea tan irresistible?. A mí me parece que muchos de ellos se enfrentarán a un dilema; y mi expereiencia me dice que no hay mucha diferencia en que hayan seguido un curso de geometría formal deductiva o no. La evidencia de la percepción parece muy a menudo tener mayor fuerza; a veces es como si apareciese algo atávico. ¿Qué puede hacer el profesor? ¿Qué debe hacer el profesor?

Una de las cosas que yo he hecho a veces al tratar esto con los alumnos de la escuela secundaria es proporcionarles papel cuadriculado (a pesar del sistema métrico, yo prefiero papel de 1/4 de pulgada por muchas razones) y pedirles que utilicen regla y compás para construir triángulos. En primer lugar, señalan un origen de un sistema de coordenadas, en algún lugar cercano al borde inferior izquierdo. Entonces les sugiero dos pares de coordenadas para los puntos extremos de un segmento que está contenido en el eje horizontal. El diagrama muestra los puntos elegidos A (0,0), y B_1 (10, 0).

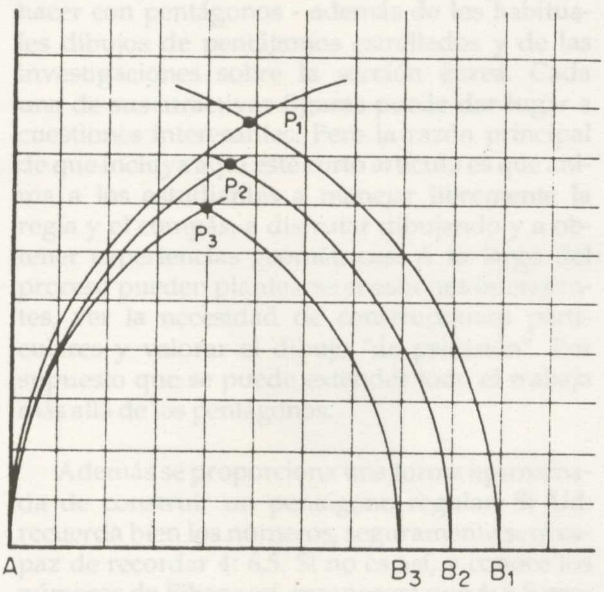


Fig. 5

Entonces se trazan arcos iguales de radio 10 y con centros en A y B_1, que se cortan en P_1. El triángulo AB_1P_1 es ciertamente equilátero, pero evidentemente P_1 no es un punto de la red. ¿Qué sucede si reducimos la longitud de la base del triángulo de 10 a 9?...Cuando los alumnos llegan a construir el triángulo AB_3 P_3, muchos de ellos piensan que P_3 es un punto de la red. Pero la comprobación, utilizando el teorema de Pitágoras les muestra que $AP_3 = B_3P_3 = \sqrt{65}$, en lugar de $\sqrt{64}$.

La cuestión es, entonces, encontrar tres puntos de la red de los que pueda demostrar, usando el teorema de Pitágoras, que son los vértices de un triángulo equilátero.

"¿Puede ser la base mayor que 10?"

" Sí."

"¿Debe estar la base en el eje horizontal?"

"No"

"¿Debe estar un vértice sobre el eje?"

" No."

...(Como muchos profesores, muchas veces encuentro útil el insistir en forzar a los alumnos a que formulen sus preguntas de modo que baste con una respuesta si/no. Es este caso el único tipo de pregunta no permitida es "¿Es posible que...?") lo que ocurre generalmente es que, después de un tiempo, algunos alumnos llegan a pensar que no se puede hacer; otros, aunque no lo piensen, no están dispuestos a intentarlo más; otros ponen varías hojas de papel, unas a continuación de las otras, ideando formas ingeniosas de alargamiento del compás para trazar arcos con el radio más grande y, a pesar de no haber tenido éxito, están convencidos de que si pudieran utilizar puntos suficientemente lejanos, para algún ángulo de inclinación de la base con el eje horizontal se podría encontrar el resultado deseado. Así pues, ¿qué hacer ahora?

La dificultad estriba en que en este nivel pocos alumnos tienen la madurez matemática necesaria para comprender una demostración general que resuelva la cuestión. (Esto puede ser demasiado atrevido. Quizá debería decir tan sólo" ....una demostración general en la que yo haya sido capaz de pensar ...". Me gustaría mucho saber si alguien puede proporcionar una demostración que parezca estar al alcance de la mayor parte de los alumnos de este nivel). En este momento sólo se puede hacer la afirmación dogmática de que no es posible hacerlo. Esto probablemente no satisface a nadie, a los alumnos menos capaces porque consideran lo que han hecho como una pérdida de tiempo, incluso aunque probablemente no lo sea; a los alumnos más capaces porque, correctamente, deploran las afirmaciones hechas ex catedra por los profesores. En lugar de esto se puede adoptar una actitud de esfinge (o de Mona Lisa, si se prefiere el enigma a la inescrutabilidad) y sencillamente dejar pendiente la cuestión; esto, de nuevo, probablemente no satisfaga a nadie. En el pasado he tratado de adoptar una vía intermedia sugiriendo que, hasta ahora, nadie ha sido capaz de encontrar tres puntos de la red que cumplan los requisitos pedidos. Esto es cierto, por supuesto. A la vez, y sin parecer categórico, he tratado de dar la impresión de que nadie lo hará nunca. Solamente si me han preguntado: ¿Se puede demostrar que es imposible?", he contestado que sí se puede demostrar, pero que la demostración requiere un mayor conocimiento matemático del que ellos tienen en ese momento. En lo que concierne a mi experiencia, la mayor parte de los alumnos se quedan razonablemente satisfechos con estas últimas reacciones. En particular, si se me ha pedido una respuesta categórica de esta forma; los alumnos menos capaces parecen sentirse más apaciguados, quizás porque piensen que las cosas podrían haber ido peor - podría ser que hubiesen tenido que aprender una nueva demostración; y los alumnos más capaces a veces reaccionan tratando de desarrollar una demostración por sí mismo o si aún son escépticos acerca de mi afirmación, siguen intentando encontrar un contraejemplo. En cualquier caso, yo también me quedo satisfecho.

M.T.89 PINEL, Adrián. **Progresiones geométricas**

M.T.93 GIFFOULD, Gerald. **Pentágonos sin dificultad**

Los dos artículos siguientes no sólo están relacionados en contenido, sino que probablemente pueden compartir el premio a la brevedad en artículos.

La página de modelos de Giffould basada en pentágonos, puede facilitar ideas sobre qué hacer con pentágonos - además de los habituales dibujos de pentágonos estrellados y de las investigaciones sobre la sección áurea. Cada una de sus atractivas figuras puede dar lugar a cuestiones interesantes. Pero la razón principal de que incluya aquí este corto artículo es que anima a los estudiantes a manejar libremente la regla y el compás, a disfrutar dibujando y a obtener experiencias geométricas. A lo largo del proceso pueden plantearse cuestiones interesantes, ver la necesidad de construcciones particulares y valorar el dibujo "de precisión". Por supuesto que se puede extender todo el trabajo más allá de los pentágonos.

Además se proporciona una forma aproximada de construir un pentágono regular. Si Ud. recuerda bien los números, seguramente será capaz de recordar 4: 6,5. Si no es así, y conoce los números de Fibonacci, reconocerá que 4: 6,5 proviene de 8:13. Yo me sentí inmediatamente tentada de comprobar que el pentágono se construye mucho mejor utilizando 8:13 en lugar de 5:8.

Mis estudiantes han trabajado muchas veces con el dibujo de un cuadrado dentro de otro cuadrado.

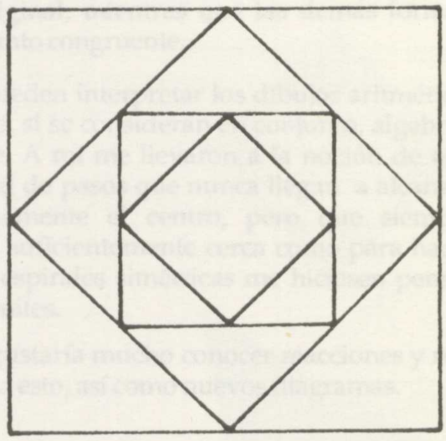


Fig. 1

y lo han utilizado para obtener la sucesión geométrica $2,\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}$, ...de las longitudes de los lados, o 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ...de las áreas. También han estudiado los pentágonos estrellados inscritos en pentágonos y han utilizado ambas cosas para explorar modelos visuales. Pinel en su artículo nos proporciona muchas formas creativas nuevas de extender estas ideas a otras formas inicales y a otras reglas para obtener progresiones geométricas. Aunque se nos dan sugerencias visuales de cómo se ha construido cada dibujo, se debe tratar de obtener cada una de ellas, y es realmente entretenido hacerlo. Los dibujos son todos ellos nuevos; y este es el tipo de trabajo en que cada estudiante tiene la posibilidad de contribuir con algo original.

Progresiones geométricas

ADRIAN PINEL
Christ. Chuch College, Canterbury.

Al pensar en las progresiones aritméticas y en las progresiones geométricas y al preguntarme por qué las progresiones **aritméticas** y **geométricas** se deben estudiar como una parte del álgebra, con las palabras de Mary Boole sobre nuestro perdido "instinto geométrico" bien presentes, me di cuenta de que he visto muchas veces dibujos de progresiones geométricas, pero que estos tienen poco que ver con lo que se hace al dar las progresiones geométricas.

En la fotocopiadora, un colega de Artes me habló de un dibujo que "progresaba geométricamente".

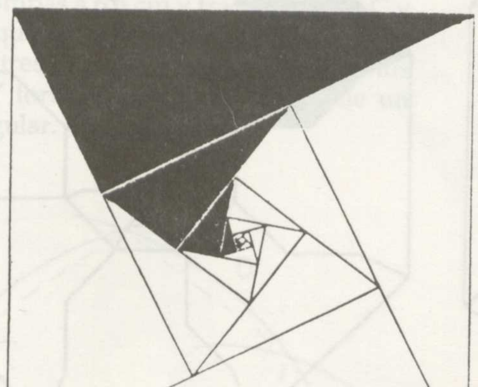
Estos dibujos son una parte de la investigación que resultó. Se atienen a unas reglas geométricas, que gradualmente consiguieron limitar y enfocar mi atención.

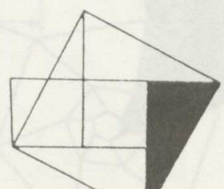
Cada diagrama progresa en pasos; tiene un centro de simetría común a todos los pasos y cada paso es de la misma forma.

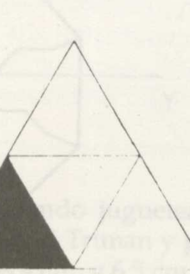
Cada paso empieza con una figura; la divide en un cierto número de partes de igual área. De esas partes, la central es semajante a la figura original, mientras que las demás forman un conjunto congruente.

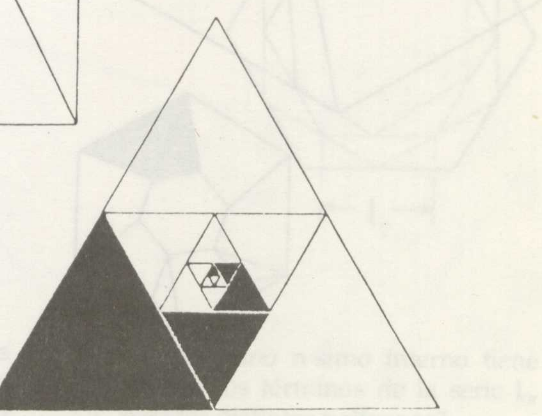
Se pueden interpretar los dibujos aritméticamente, o, si se consideran en conjunto, algebraicamente. A mí me llevaron a la noción de una infinidad de pasos que nunca llegan a alcanzar completamente el centro, pero que siempre están lo suficientemente cerca como para hacer que las espirales simétricas me hiciesen pensar en los límites.

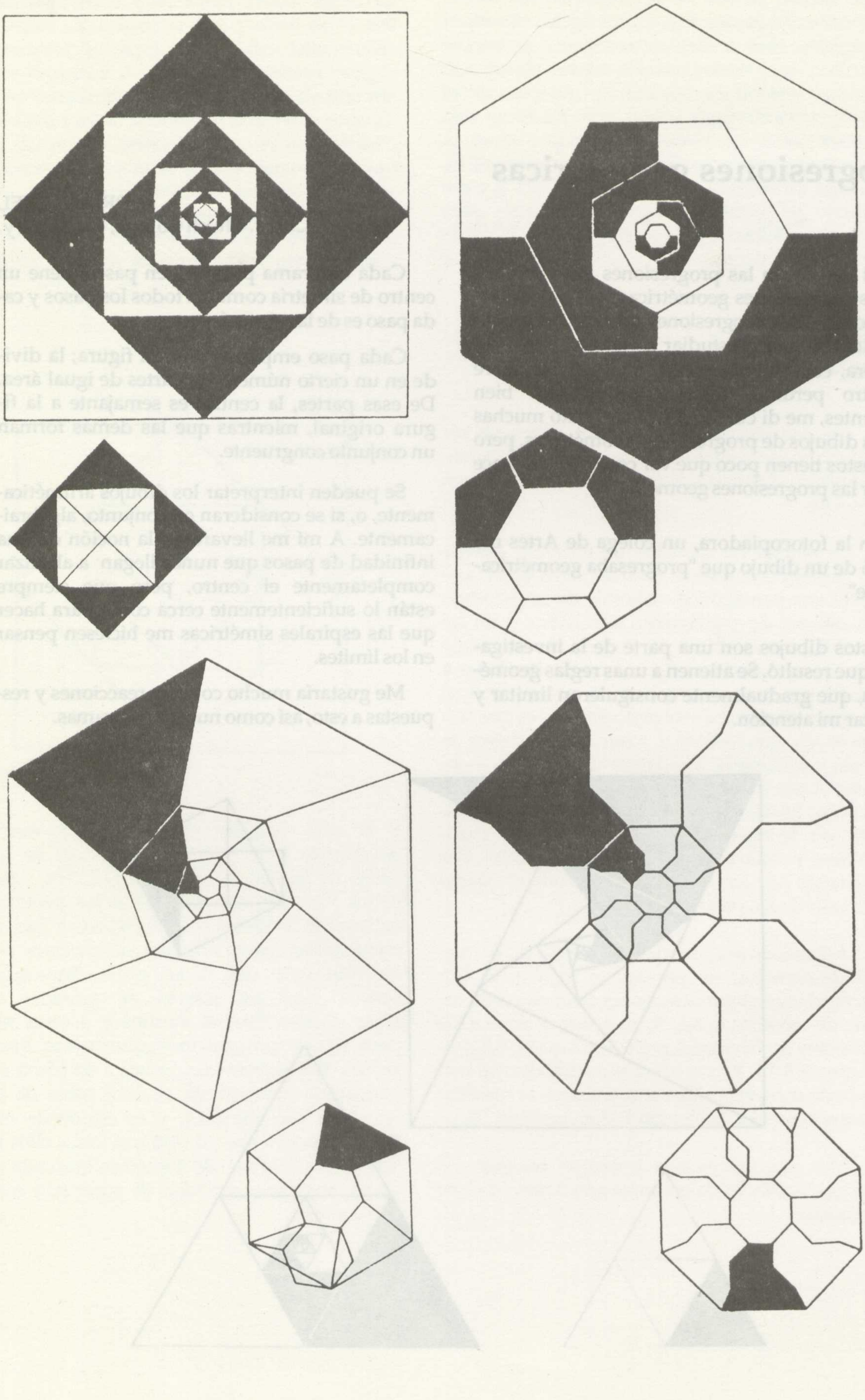
Me gustaría mucho conocer reacciones y respuestas a esto, así como nuevos diagramas.











Pentágonos sin dificultad

GERALD GIFFOULD
Bartholemew School, Eynsham.

Dibuje un segmento de longitud XY = 4 cm. Abra su compás 4 cm. y trace los arcos A y B con ese radio.

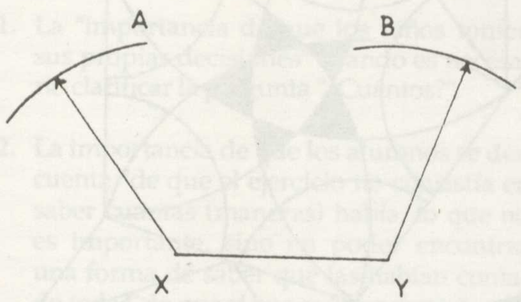
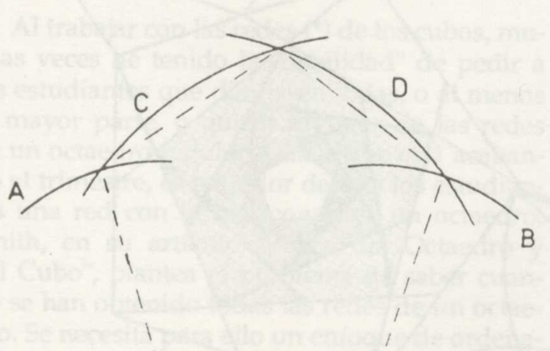


Fig. 1

Abra su compás a 6,5 cm y trace los arcos C y D de manera que se corten como se muestra en la figura. Esas tres intersecciones junto con los puntos X e Y forman los cinco vértices de un pentágono regular.



Descubrí esto cuando jugueteaba con mis Compases de Seguridad Triman y pronto me di cuenta de que radios 4 cm. y 6,5 cm. pertenecían al mismo ajuste. ¿El resultado? ¡Sólo veinte segundos para dibujar un pentágono regular! Inténtelo Ud.

Ya que este trabajo me llevaba un tiempo mínimo, dibujé pentágonos por todas partes. Al ir floreciendo las figuras iban surgiendo una serie de estudios interesantes, como la serie de longitudes de los lados en Z. Estudié también series análogas para otros polígonos.

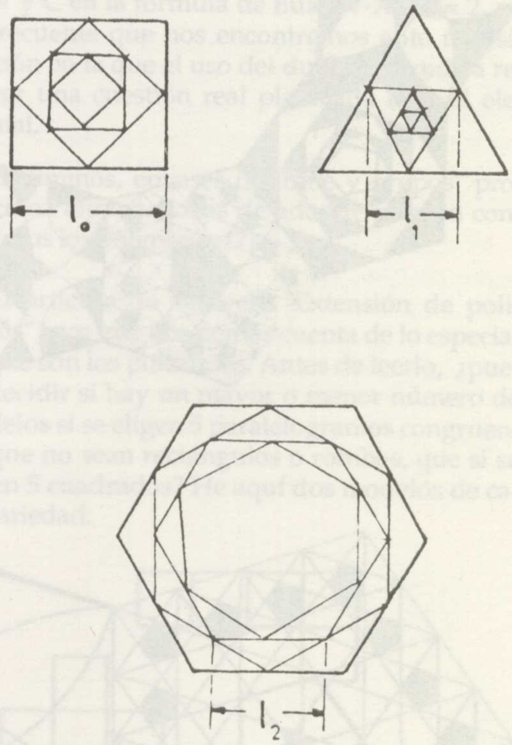


Fig. 3

Si el polígono n-simo interno tiene lado l_n, ¿cuáles son los términos de la serie l_0, l_1, l_2, l_3, ...l_n para los distintos polígonos?

Ha sido una actividad muy gratificante en varias clases de alumnos de aprendizaje lento, el usar compases para construir pentágonos de 6 cm. de lado, y unirlos formando un dodecaedro. Esto nos permitió construir un calendario que exhibimos orgullosamente en la clase.

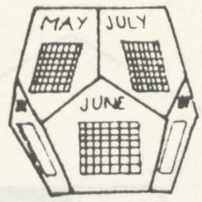
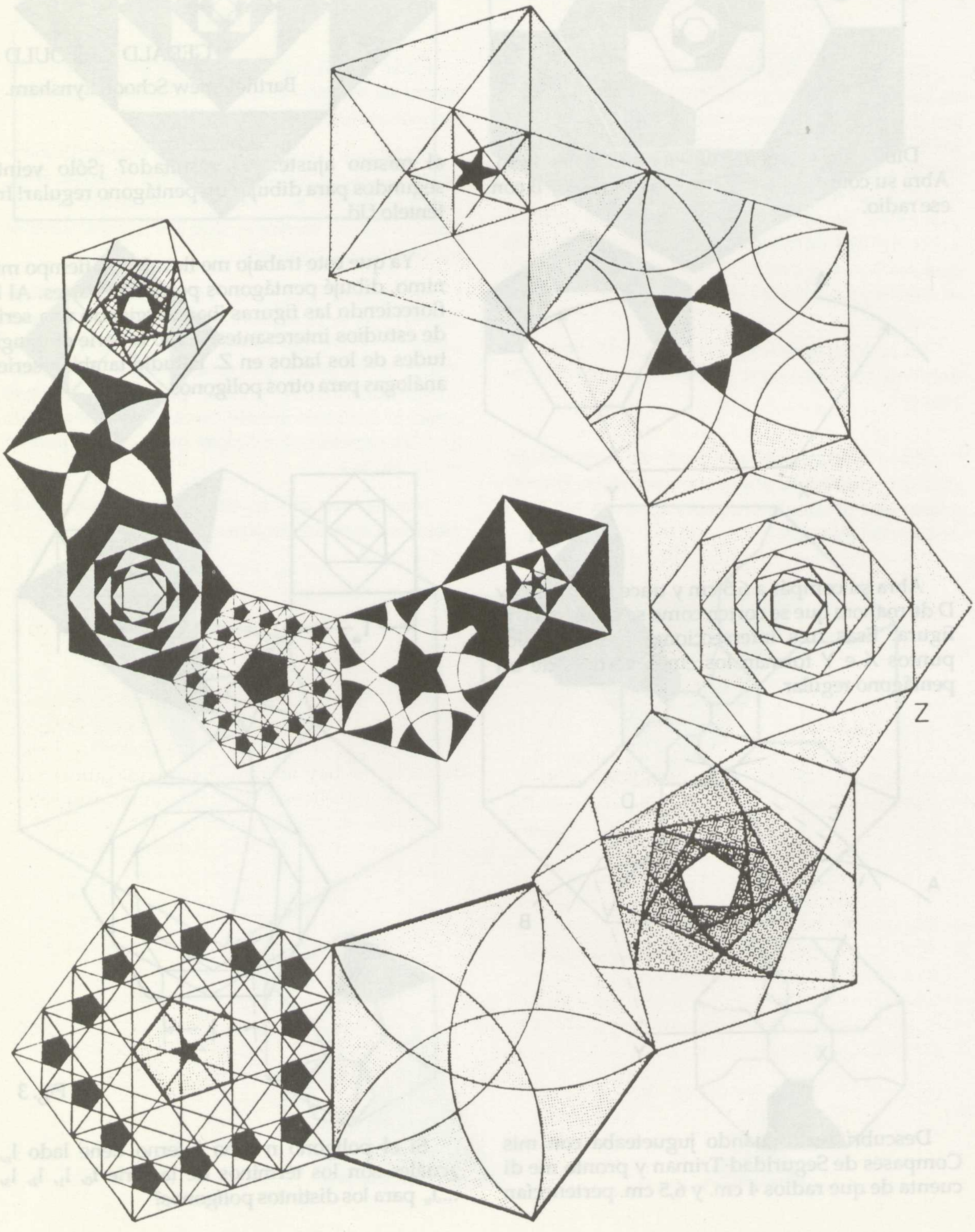


Fig 4



PROBLEMAS RELATIVOS A CONTAR

M.T. 42 SMITH, D. V. **Redes del octaedro y del cubo.**

M. T. 43 WALTER, Marion. **Poliminós, envases de leche y grupos.**

M.T. 71 BIDWELL James K. **Extensiones de poliminós.**

M.T. 72 HALE, David. **Una cosa lleva a otra**

M.T. KUPER, Marie, y WALTER, Marion. **De aristas a sólidos.**

Hay muchos artículos que tratan de una forma u otra sobre la pregunta "¿cuántos?" David Fielker trata muchos puntos importantes acerca de ellos en una serie de artículos publicados en Mathematics Teaching (6). Señala:

1. La "importancia de que los niños tomen sus propias decisiones" cuando es necesario clarificar la pregunta "¿Cuántos?".

2. La importancia de que los alumnos se den cuenta "de que el ejercicio no consistía en saber cuantas (maneras) había, lo que no es importante, sino en poder encontrar una forma de saber que las habían contado todas - lo que sí que es importante".

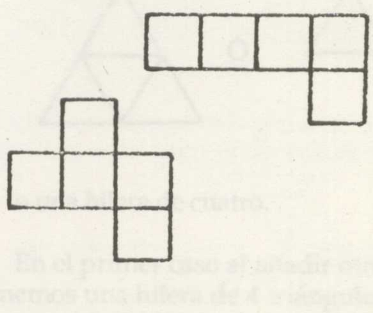
3. La importancia de que los alumnos sean capaces de "justificar (que) su ordenación (esto es, su método para ordenar) consigue contar todas las posibilidades una vez y sólo una vez cada una, porque entonces han demostrado que las han encontrado todas".

Al trabajar con las redes (*) de los cubos, muchas veces he tenido la "debilidad" de pedir a los estudiantes que dibujasen todas, o al menos la mayor parte, o quizás algunas de las redes de un octaedro regular. Cuando se está acabando el trimestre, es tentador darle a los estudiantes una red con la que construir un octaedro. Smith, en su artículo "Redes del Octaedro y del Cubo", plantea el problema de saber cuando se han obtenido todas las redes de un octaedro. Se necesita para ello un enfoque de ordenación sistemática para hallarlas, y Smith nos proporciona un razonamiento informal elegante para conseguirlo. Se puede comprobar que las propiedades obtenidas son correctas por medio de experimentos reales, tal y como se puede hacer con el cubo.

Tenemos ante nosotros una sorprendente recompensa al final de la lectura (¡quizá si pensásemos un poco nos resultaría evidente!). Es verdaderamente encantador disponer de una situación en que resulta útil dibujar y considerar duales. Aunque pedimos a menudo a los estudiantes que dibujen duales de mosaicos o que adviertan la relación de dualidad que existe entre V y C en la fórmula de Euler V-A + C= 2, no es frecuente que nos encontremos ante una situación en la que el uso del dual nos ayuda a resolver una cuestión real planteada a nivel elemental.

"Poliminós, envases de leche y grupos" proporciona algunas ideas de adonde pueden conducirnos los poliminós. (7).

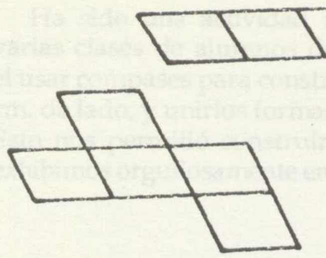
El artículo de Bidwell. "Extensión de poliminós" hace que nos demos cuenta de lo especiales que son los poliminós. Antes de leerlo, ¿puede decidir si hay un mayor o menor número de modelos si se eligen 5 paralelogramos congruentes que no sean rectángulos o rombos, que si se eligen 5 cuadrados? He aquí dos modelos de cada variedad:



(6) *FIELKER, David: "Removing the Shackles of Euclid V: Order" M.T.991982.*

(*) *N. del T: Se ha traducido la palabra inglesa net como red, pues el término **desarrollo**, quizá más usual en este caso, puede sugerir una figura que "se desarrolla" y no una figura que "se construye" a partir de la red.*

(7) *Para ver más trabajo, consultar Walter, M. "Boxes, Squares and Other Things", NCTM Preston VA 1971.*



El artículo de David Hale, "Una cosa lleva a otra" tiene varios aspectos interesantes. Comienza planteando la pregunta "¿Cuántos triángulos distintos cuyos lados tengan como longitudes números enteros, y tales que su (s) lado (s) mayor (es) tengan una longitud de n unidades, se pueden dibujar?". Al trabajar sobre este problema los estudiantes llegan realmente a compreder que la suma de dos lados de un triángulo debe ser mayor que el tercero. En segundo lugar el estudio del problema combina cuestiones geométricas y modelos numéricos y acaba con una sucesión de la que no es fácil encontrar el término general. Esto me recuerda uno de mis libros favoritos (8), en el que se relacionan todas las sucesiones conocidas que hayan sido escritas (hasta 1967), da sus nombres si lo tienen, su término general si es conocido y relaciona todas las referencias.

Incluyo entre estos artículos "De aristas a sólidos" porque trata varios problemas en que interviene la pregunta "¿cuántos?", tanto en dos dimensiones como en tres. Y las actividades con materiales concretos que describe funcionan realmente bien en la clase.

Al considerarlo retrospectivamente me doy cuenta de que cuando escribí este artículo con Marie Kuper no sólo estaba influida por los estudios que había realizado sobre poliminós, sino probablemente también por un taller de enseñanza que Mary Harries presentó en un congreso de la ATM hace varios años. Ella repartió a los niños muchas figuras recortadas y les preguntó qué solidos podían formar con ellas. Incluía entre sus figuras recortadas no sólo rectángulos y cuadrados sino también paralelogramos no rectangulares, trapezoides y triángulos, si no recuerdo mal. Recuerdo ahora ese taller de enseñanza porque he visto en acción los Mathematical Activity Tiles de la ATM (9). Me pregunté al verlos por qué no hemos pensado antes en dar a los estudiantes diversas figuras y ver qué podían hacer con ellas. ¡Entonces recordé que Mary Harris había hecho exactamente esto! Muchas veces sometemos a limitaciones a los estudiantes desde el principio -como se hace en el artículo "De aristas a sólidos". Podríamos haber empezado diciendo: elige tres números- por ejemplo, 3, 5, 8,. Dibuja y recorta tantas figuras como sea posible usando esos números como longitudes de los lados. Si queremos limitar el número infinito de posibilidades podríamos haber añadido: construye figuras con no más de cuatro lados en dos dimensiones, ni más de seis caras en tres dimensiones.

Si hubieramos considerado este problema, habríamos encontrado en seguida alguna relación con una parte del contenido del artículo de Hale "Unas cosas llevan a otras", o con el de Ranucci "Congruencias de un cuadrilátero". De haber considerado figuras en tres dimensiones ... bien, habríamos necesitado algunos artículos más. Pero me doy cuenta de que cuando preguntamos "¿cuántas cajas rectangulares puedes hacer?" estamos tratando una situación muy especial.

---

(8) Sloane, N.J.A The handbook of Integer Sequences Academic Press 1974

(9) Los M.A.T. se pueden conseguir en la oficina de la ATM. Se describen con detalle en PINEL, Adrian, "Poliedra from Mats", M.T. 96 1981.

Redes del octaedro y del cubo

A. SANDERS
Shenstone College of Education

D. V. SMITH
Hereford College of Education

Ahora que se anima a que se hagan "descubrimientos" matemáticos en todos los niveles de la enseñanza, ha surgido el problema de encontrar situaciones convenientes en las que puedan producirse estos descubrimientos. Una de estas situaciones es la de hallar cuantas redes distintas se pueden plegar de forma que se construya un cubo. Esto ha sido investigado por niños y estudiantes, como lo ha sido también el problema correspondiente para el octaedro. Cuando se plantea este tipo de investigación conviene ser consciente de algunos de los posibles "descubrimientos" que se pueden hacer. Lo que se expone a continuación es un informe de una investigación en la que los resultados obtenidos fueron asombrosos y de gran interés, aunque no se sugiere que los niños hayan hecho todos esos descubrimientos.

El problema de saber cuantas redes distintas hay en un cubo se resuelve con facilidad por el método de prueba y error. El problema correspondiente respecto del octaedro no es tan fácil. Se pueden dibujar varias redes de forma inmediata, pero se queda uno con el sentimiento de que debe haber alguna más. El enfoque sistemático que se expone a continuación fue diseñado para poder encontrar el conjunto de todas las redes posibles.

Primero daremos algunos lemas sobre las redes del octaedro.

LEMA 1. A lo más cuatro triángulos confluyen en un punto de la red. Se puede ver esto fácilmente ya que seis triángulos están en un plano y cinco triángulos que confluyen en un punto se plegarían en un vértice en el que confluyen cinco caras.

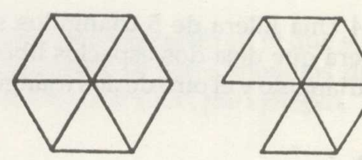


Fig. 1

LEMA 2. Cada red debe contener al menos una hilera de 4 ó más triángulos. Tres triángulos unidos forman siempre un trapecio.

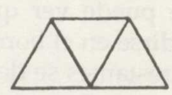


Fig. 2

Añadiendo otro triángulo obtenemos

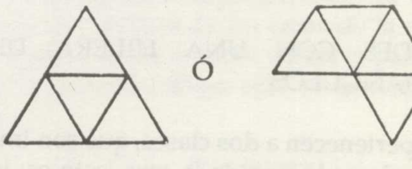


Fig. 3

o una hilera de cuatro.

En el primer caso al añadir otro triángulo obtenemos una hilera de 4 triángulos. En el segundo caso el añadir un quinto triángulo sin violar el lema 1 produciría una hilera de 4 triángulos.

Como la red del octaedro consiste en 8 triángulos, debe aparecer en algún lugar una hilera de al menos cuatro triángulos.

LEMA 3. Una hilera de 6 triángulos se pliega en un lazo cerrado del octaedro que deja libres dos espacios de un triángulo cada uno.

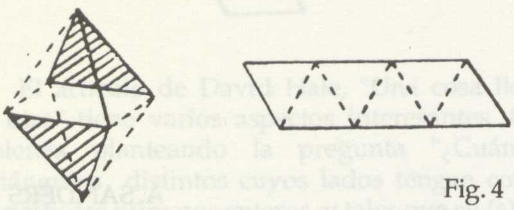


Fig. 4

Se puede ver esto a partir del diagrama, en el que los triángulos rayados son los espacios libres. Se debe observar que esos triángulos aparecen en extremos opuestos del lazo. El lazo se forma uniendo los bordes más pequeños del paralelogramo compuesto por los seis triángulos.

Corolario. Ninguna red contiene una hilera de más de 6 triángulos.

LEMA 4 Una hilera de 5 triángulos se pliega de manera que deja dos espacios libres, uno de un sólo triángulo y el otro de dos triángulos.

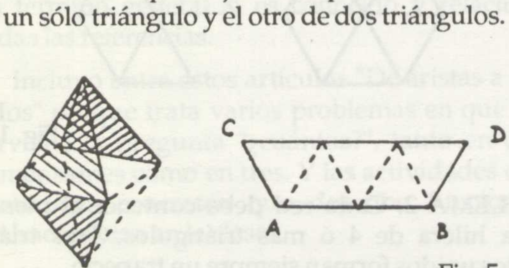


Fig. 5

Para completar una red con una hilera de solo 5 triángulos se puede ver que el triángulo solitario debe añadirse en el borde CD, y que el par de triángulos restantes se debe añadir en el borde AB.

Apartir de lo expuesto resulta que las redes se pueden clasificar y contar bajo tres epígrafes:

(a) REDES CON UNA HILERA DE 6 TRIANGULOS

Estas pertenecen a dos clases, que son imágenes especulares la una de la otra, esto es, la hilera de seis es

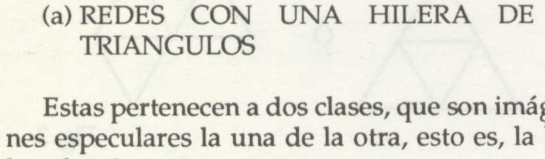


Fig 6

y se pueden considerar como distintas si se tiene en cuenta la dirección del plegado, esto es, si postulamos que todas las redes que vamos a relacionar se pliegan hacia fuera del papel. Consideremos las del primer tipo:

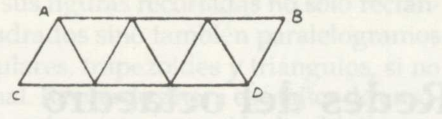


Fig. 7

por el lema 3 se debe añadir un triángulo a cada uno de los bordes AB y CD. Hay por tanto la posibilidad de elegir tres posiciones para cada triángulo, lo que se puede hacer de 3 x 3= 9 maneras. Algunas de ellas dan la misma red, pero se pueden eliminar fácilmente las repeticiones.

(b) REDES CON UNA FILA DE 5 TRIANGULOS.

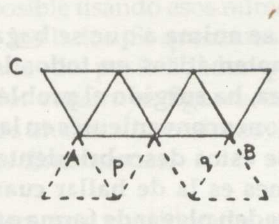


Fig. 8

Por el lema 4 debemos añadir un triángulo al borde CD. Se puede hacer esto de tres maneras. Debemos añadir dos triángulos al borde AB, pero esto sólo se puede hacer de dos maneras (p o q en el diagrama), ya que cualquier otra violaría el lema 1. Esto da un total de 3 x 2 = 6 redes; de nuevo hay repeticiones que se pueden eliminar fácilmente.

(c) REDES CON UNA HILERA DE 4 TRIANGULOS.

Su número es bastante pequeño, y no lleva mucho tiempo dibujar todas las redes posibles que no tengan ninguna hilera de más de 4 triángulos y que no violen el lema 1. De esta forma se pueden obtener todas las redes del octaedro que no tengan hileras de más de 4 triángulos.

Sumando los números obtenidos en (a), (b) y (c) obtenemos un total de 20 redes distintas. Si no se cuentan las imágenes especulares como distintas y no se tiene en cuenta la dirección del plegado, el total se reduce a once redes.

El resultado fue a primera vista sorprendente ya que el número es el mismo que para el cubo. Hubiéramos esperado más, ya que pensamos

que el número de redes debe aumentar cuando se aumenta el número de caras. Está, sin embargo, la dualidad entre el cubo y el octaedro que se refiere a las caras y los vértices, y ello nos lleva a pensar en la existencia de una dualidad entre las redes de los dos cuerpos. El descubrimiento de que esto es así resulta de sumo interés: lo daremos en la forma en que se obtuvo.

Una manera alternativa de considerar el problema original es hallar todas las formas posibles de cortar las aristas del octaedro de forma que se desarrolle sobre un plano. Se puede ver que cada forma de hacerlo requiere exactamente cinco cortes. Estos cortes no deben formar lazos cerrados, ya que si es así la red resultaría en más de una pieza; y al menos debe llegar un corte a cada vértice. A continuación se muestra una de las maneras de cortar un octaedro.

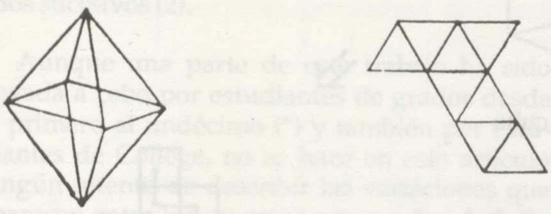


Fig. 9

No fue fácil visualizar los cortes sobre un octaedro tridimensional, de manera que se utilizó una red topológicamente equivalente para dibujar todas las redes posibles obtenidas por cortes, del modo siguiente:

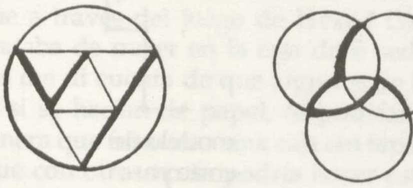


Fig. 10

La primera es una elección obvia, pero se vió que la segunda era más conveniente. Cada vértice del octaedro corresponde a un punto de corte de la línea en la red. Es evidente así si un corte que contiene un vértice continúa a la derecha, a la izquierda o sigue recto. El corte correspondiente en el octaedro hará lo mismo.

Utilizando esta red encontramos todos los cortes posibles que pasan a través de cada vértice y que dejan la superficie en un sola pieza. Para evitar repeticiones se dibujaron esos cortes en una red cuadrada, por ejemplo:

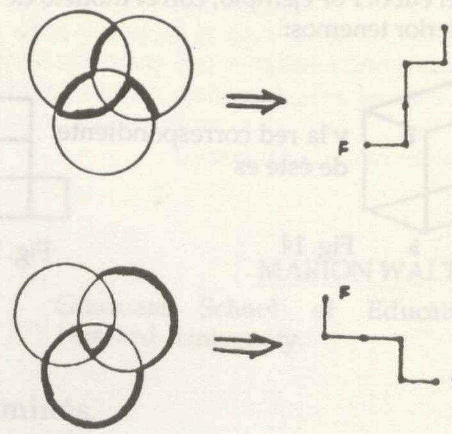
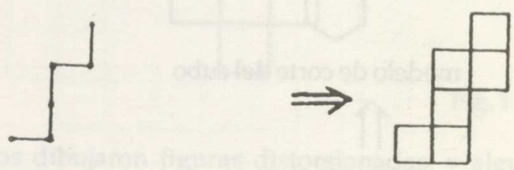


Fig. 11

Cuando se dibujan de esta forma es evidente que los dos diagramas de la izquierda del ejemplo nos dan el mismo modelo de corte y por tanto la misma red. De esta forma se obtuvieron los 20 modelos de cortes del octaedro.

Fue en este momento en el que surgió la idea feliz. La forma de estos modelos de cortes sugirió las redes del cubo, por ejemplo.



modelo de corte del octaedro

red del cubo.

Fig. 12

Fig. 12 bis

Queda ahora por demostrar que la correspondencia también funciona en el otro sentido, esto es, encontrar una forma en que la red del octaedro proporciona un modelo de cortes para el cubo. Si estudiamos el ejemplo anterior vemos que al unir los centros de las caras de la red del cubo se obtiene un modelo de corte para el octaedro. Intentemos ahora esto en la red del octaedro.

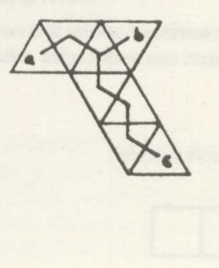
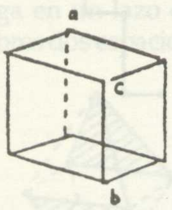


Fig 13

El modelo está contenido en un retículo hexagonal. En cada punto de intersección del retículo se cortan tres rectas, igual que para cada vértice del cubo. Por ejemplo, con el modelo de cortes anterior tenemos:



y la red correspondiente de éste es

Fig. 14

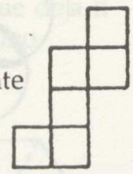


Fig. 15

La red resultante para el cubo es la misma con la que comenzamos. De esta forma, se establece una correspondencia uno a uno entre las redes del cubo y las redes del octaedro. Como resultado obtenemos modelos de cortes para cada uno de ellos.

A continuación damos un ejemplo de la correspondencia entre una red del cubo y una red del octaedro, junto con los modelos de cortes generados por cada una de ellas.

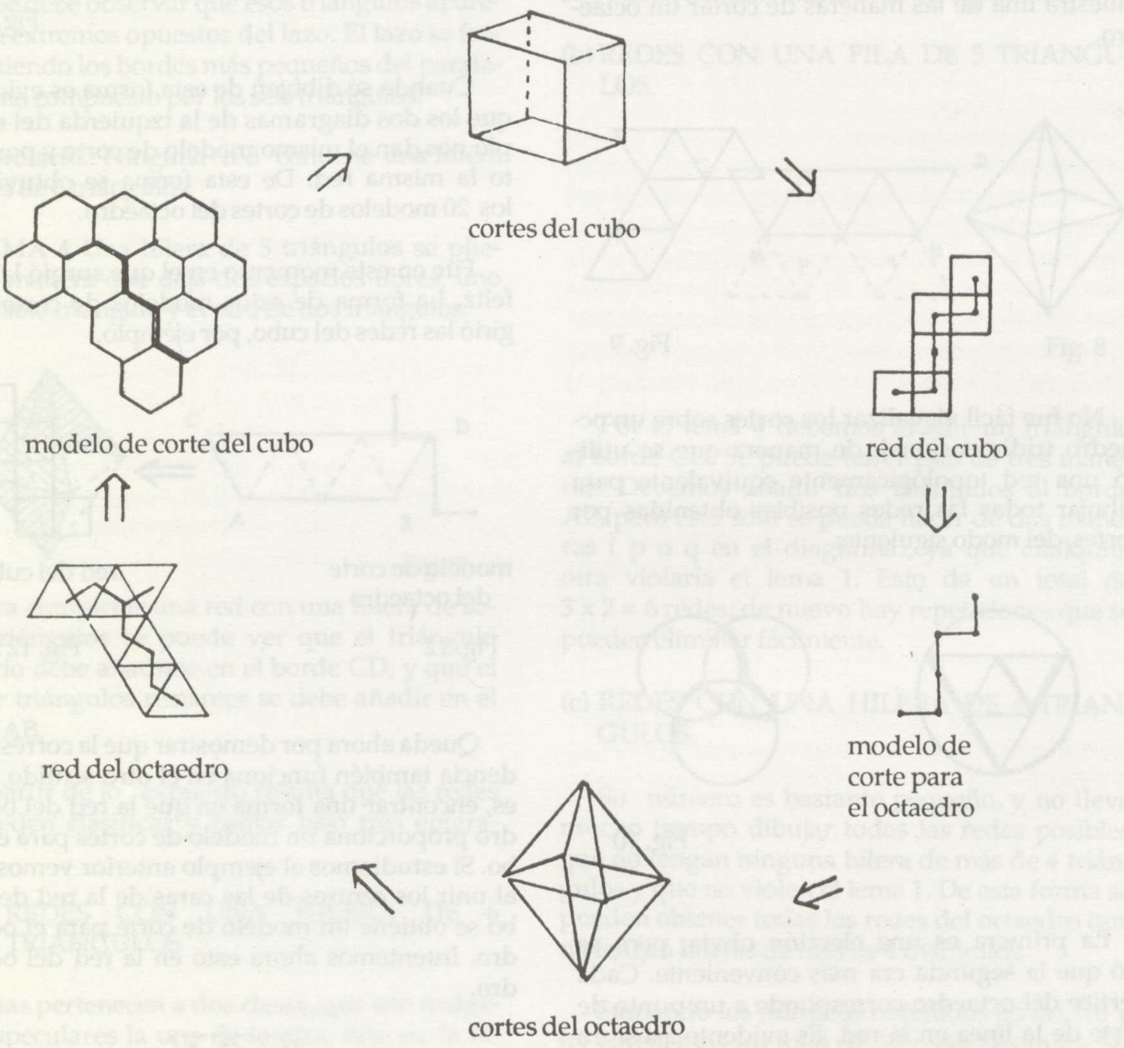


Fig. 16

Poliminós, envases de leche y grupos

MARION WALTER
Graduate School of Education, Harvard University.

Han aparecido recientemente varios artículos que tratan sobre la utilización los poliminós en clase (1). Este artículo da una breve reseña de unos trabajos basados en ellos, iniciados con niños en el verano de 1964 y que continuaron en años sucesivos (2).

Aunque una parte de este trabajo ha sido llevada a cabo por estudiantes de grados desde el primero al undécimo (*) y también por estudiantes de College, no se hace en este artículo ningún intento de describir las variaciones que aparecen entre los diversos grupos de edad. En lugar de ello, y mientras no se advierta lo contrario, los comentarios se refieren a niños del sexto grado, de once años de edad.

Mi motivación original fue la de proporcionar a los niños de los grados primero y sexto práctica en visualizar figuras de dos y tres dimensiones. Mi primer contacto con los poliminós fue a través del juego de **Hexed** (3). Mientras trataba de meter en la caja doce seductoras figuras me di cuenta de que algunos de los modelos, si se hacían de papel, se podrían plegar de manera que formasen una caja sin tapa, mientras que con otros no se podría hacer esto. Esto me dió la idea de cómo empezar.

Poliminós.

Se pidió a los niños del grado sexto que cerrasen los ojos y visualizaran una caja - una caja pequeña, una grande, una larga y así sucesivamente. Por último se les pidió que visualizasen una caja sin tapa y cuyos lados fuesen todos cuadrados (4). Cuando se les preguntó cómo se podría colocar las caras en un plano, muchos estudiantes dibujaron lo siguiente:

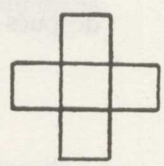


Fig. 1

otros dibujaron figuras distorsionadas, y algunos otros dibujaron

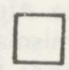


Fig. 2

(los cinco cuadrados uno encima de otro) (5).

---

(1) Ver, por ejemplo, Mathematics Teaching Nº 39, Verano de 1967, pp. 37-38, y Nº 41, Invierno de 1967, pp. 54-57. The Aritmetic Teacher, Vol. 14, Nº 3, Mayo 1967, pp. 353, 382.

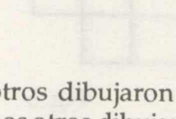
(2) El autor comenzó el desarrollo de este trabajo durante la reunión del verano de 1964 de la Conferencia de Cambridge sobre matemáticas escolares que tuvo lugar en Morse School, Cambridge, Massachusetts. Una breve discusión preliminar de este trabajo se incluyó en las notas mimeografiadas (No. 34) "Geometría informal para niños" distribuida por C.C.S.M.

(*) N. del T. En Estados Unidos los cursos de enseñanza primaria y secundaria se numeran desde el primer grado (6 años) hasta el grado 12 (17-18 años).

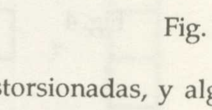
*(3) **Hexed** consiste en una caja que contiene cada uno de los doce pentominós. El problema consiste en volverlos a colocar en la caja de 10 x 6.*

(4) Lo que sigue es una explicación y resumen de actividades realizadas en varias clases de sexto grado. Sin embargo, y para facilidad de exposición, supondremos que todo ha sucedido con el mismo grupo de niños.

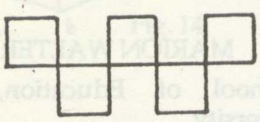
(5) Cuando se preguntó la misma cuestión a un grupo de treinta y dos estudiantes graduados, todos menos uno trazaron.



Sólo uno dibujó



Cuando había alguna duda de que un modelo se pudiese plegar en una caja, los estudiantes lo recortaban y comprobaban si era posible hacerlo. Esto nos llevó a buscar otras figuras de cinco cuadrados sin pensar en si se podía o no plegarlos formando una caja. Algunos niños encontraron más figuras que otros; otros necesitaron juntar cinco cuadrados sueltos para construir nuevas figuras. Modelos como



y

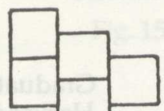


Fig. 3

se excluyeron en esta etapa (6). Se pidió a los niños que buscasen tantas figuras diferentes como fuera posible, sin dar en este momento ninguna explicación de lo que podría significar la palabra "diferente". Después se hizo un esfuerzo conjunto para dibujar todas las figuras posibles formadas por cinco cuadrados en la pizarra. Como suele suceder alguno de los niños dibujó

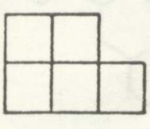


Fig. 4

después de que

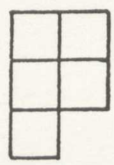


Fig. 5

ya se hubiera dibujado. Alguien dijo inmediatamente "los dos son la misma" y explicó que se podía convertir la segunda figura en la primera moviéndola. Se pidió al estudiante que mostrase cómo la misma figura hecha en papel se adaptaba a los dos dibujos (7). Los niños no siempre tuvieron éxito al principio al emparejar dos figuras. No se encontró por ejemplo, ninguna dificultad en colocar una figura hecha de papel sobre

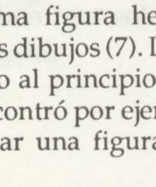
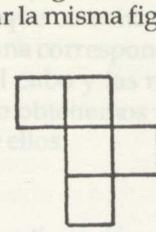
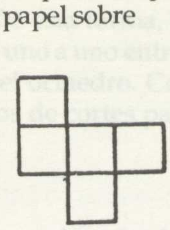


Fig. 6

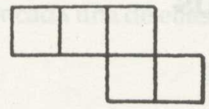
Sin embargo no resultó siempre fácil para ellos colocar la misma figura de papel sobre



y



ó en



y

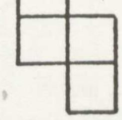
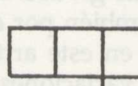


Fig. 7

al primer intento. Algunas veces los niños pensaron que se correspondían dos figuras que en realidad no lo hacían. Por ejemplo, se pensó que las dos figuras



y

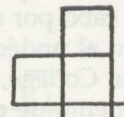


Fig. 8

eran figuras correspondientes. Algunos alumnos obtuvieron las doce figuras, pero habiendo repetido varias de ellas.

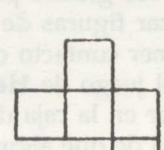


Fig. 9

aparecía a menudo después de que se hubiese dibujado

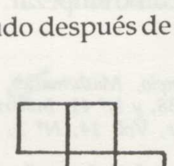


Fig. 10

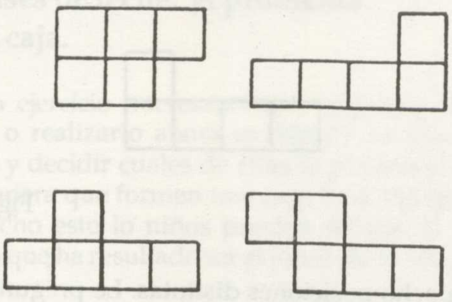
Los estudiantes resolvieron por sí mismos cualquier discusión sobre si dos figuras eran iguales, comprobando que la misma figura hecha en papel se adaptaba a ambos dibujos.

---

(6) Algunos estudiantes investigaron el número de dibujos diferentes de cinco cuadrados con la regla "sólo se tocan los vértices", por su propia iniciativa, algún tiempo más tarde.

(7) Se pidió a los niños que dibujasen las figuras en la pizarra más o menos del mismo tamaño que los recortes de papel.

Los niños jugaron en equipos, con gran entusiasmo, en varias ocasiones. Cada equipo utilizó la mitad de la pizarra para dibujar tantas figuras distintas como pudo. Cada miembro de un equipo dibujó una figura en la pizarra; no se permitía realizar consultas.Tampoco se permitió borrar un dibujo una vez hecho. El juego acababa cuando un equipo pensaba que había dibujado todas las figuras. Entonces cada equipo buscaba repeticiones entre los dibujos del otro. De nuevo utilizaron figuras recortadas en papel para comprobar cuando tenían alguna duda. Debido principalmente al ambiente de competición entre los equipos, se produjeron repeticiones en los dibujos de los dos equipos, aunque los estudiantes habían entendido claramente que estaban buscando figuras que no se pudiesen hacer coincidir. Entre las figuras repetidas más a menudo aparecieron las siguientes:



y

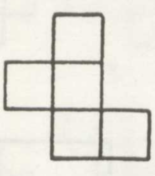


Fig. 11

Este juego nos llevó a plantearnos la cuestión de por qué algunos dibujos son más "peligrosos" que otros. Los niños muy pronto se dieron cuenta de que

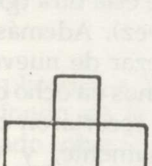


Fig. 12

es una figura "segura"; esto es, que apenas se dibujaba dos veces. Pensaron entonces que era "segura" porque, independientemente de la manera en que se colocara la figura de papel en la pizarra, siempre parecía la misma (8). Un niño surgirió entonces que se podría dibujar como

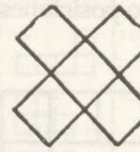


Fig. 13

Esto condujo a una discusión interesante sobre cuantas posiciones distintas se podrían conseguir si se permitiese dibujar posiciones "situadas entre dos". Los niños habitualmente dibujaron todas sus líneas horizontalmente o verticalmente, sin que se les hubiera pedido hacerlo así. La figura

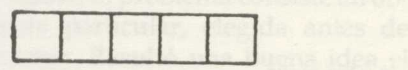


Fig. 14

también se consideró segura porque sólo había dos maneras de dibujarla

y

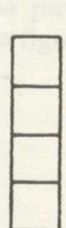
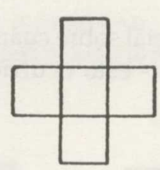


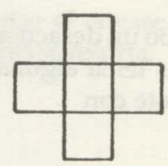
Fig. 15

---

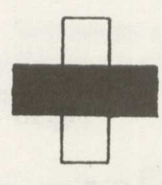
(8) Un estudiante del tercer grado pensaba que



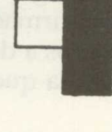
y



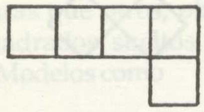
eran distintas. Al preguntarle quedó claro que veía la primera como



y la segunda como



Esto llevó a los niños a investigar todas las diversas maneras de dibujar las doce piezas (no se tuvieron en cuenta las traslaciones). Por ejemplo, encontraron ocho posiciones para la figura



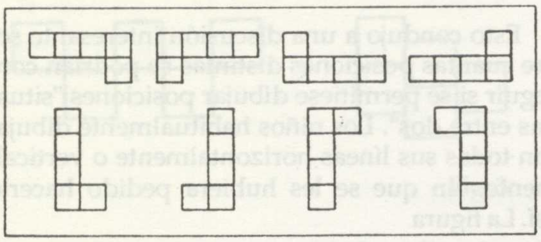
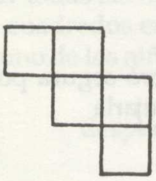


Fig. 16

y cuatro para



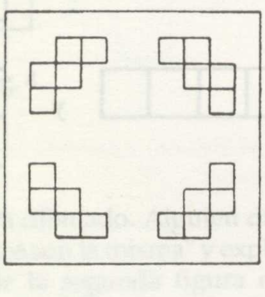


Fig 17

Hubo un desacuerdo inicial sobre cuántas posiciones tenía alguna pieza - esto ocurrió especialmente con

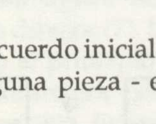


Fig. 18

Incluso algunos estudiantes de College, que habían afirmado que había ocho y que estaban dispuestos a demostrarlo, no cambiaron de opinión hasta que realmente movieron la figura y la dibujaron bordeándola. Los niños utilizaron gran variedad de métodos para obtener sus resultados; de nuevo ellos mismos pudieron comprobar si estos habían sido correctos. Algunos, al considerar

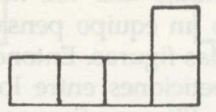


Fig. 19

dibujaron diversas posiciones de golpe o se equivocaron (a menudo) al utilizar papel reticulado. Otros utilizaron una forma sistemática de dibujar las figuras. Un niño anunció casi inmediatamente que

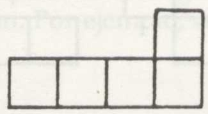


Fig. 20

tenía ocho posiciones distintas. Le pregunté entonces cómo podía decirlo tan deprisa. El niño enseñó un trozo de papel que había cortado de la hoja

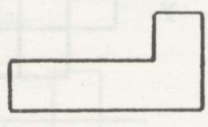


Fig. 21

y anunció "bien, Ud. puede ponerlo de esta manera, de esta o de esta otra (girándolo un cuarto de vuelta cada vez). Además puede Ud. darle la vuelta y empezar de nuevo. Así se obtienen cuatro más. Esto nos da ocho que parecen distintas." Otros niños recortaron cada figura, la movieron cuidadosamente, y dibujaron lo que veían. Hicieron la tabla que se da a continuación. Véase Fig. 22.

Los niños se mostraron conformes con que las piezas "seguras" tuviesen pocas posiciones "distintas", y con que las "peligrosas"tuviesen más. Unas cuantas piezas fueron consideradas como "seguras" por algunos niños y "peligrosas" por otros.

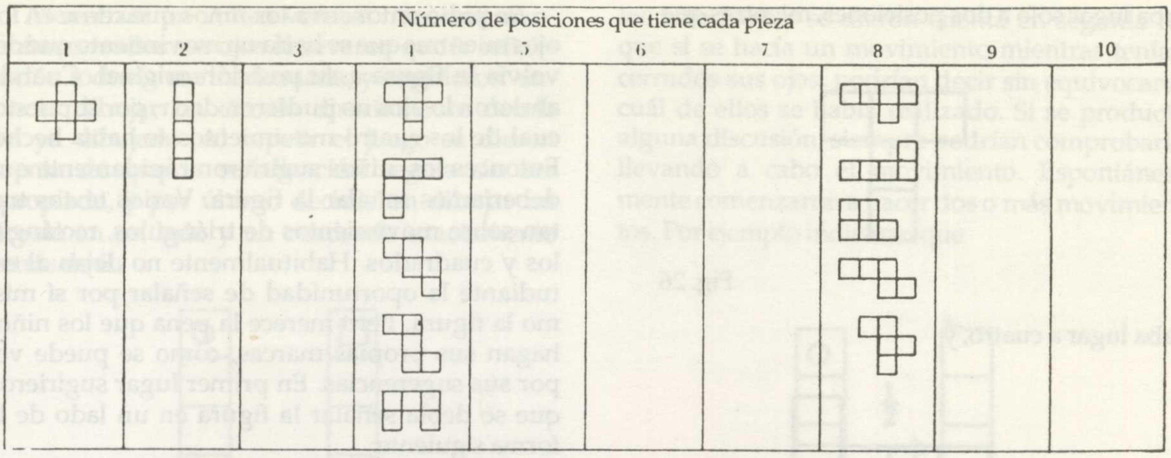


Fig. 22

Envases de leche: el problema de la caja.

Un ejercicio interesante que se puede hacer antes o realizarlo ahora es dibujar las doce figuras y decidir cuales de ellas se pueden plegar de manera que formen una caja. Una vez que se ha hecho esto lo niños pueden señalar el cuadrado que ha resultado ser el fondo de la caja.

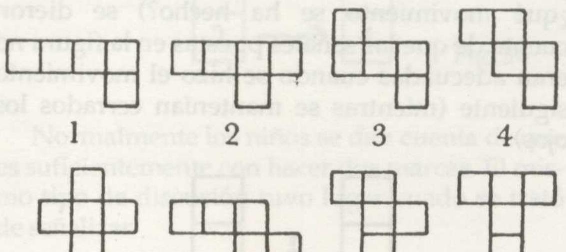


Fig. 23

¿Qué cuadrado se convierte en el fondo de la caja?

No es fácil explicarles a los niños lo que quiere decir por fondo de la la caja; algunos piensan que es el lado sobre el que yace. Se aclaró fácilmente esa confusión describiendo como fondo de la caja el lado opuesto al lado abierto. No resultó obvio para todos los niños el que sólo un cuadrado se pudiese convertir en el fondo de la caja, y por tanto les pregunté a menudo qué **cuadrados** se podían convertir en el fondo de la caja. Otro problema con el que los niños disfrutaron mucho fue el de recortar la caja de caras cuadradas sin cerrar para obtener una de las figuras (nos sirvieron de mucho los envases de leche recortados). El problema consiste en obtener una figura particular, elegida antes de empezar a recortar. Resultó una buena idea el pedir a los niños que numerasen las ocho figuras y que escribiesen el número que habían elegido en el fondo de la caja antes de empezar a recortar. De esta forma podían recordar qué figura estaban tratando de obtener, porque siempre, por supuesto, se obtenía una de las ocho figuras, si al recortar no salía más de una pieza. Un problema más dificil fue elegir una figura particular, por ejemplo

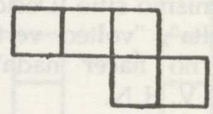


Fig. 24

mirarla brevemente y recortar el envase de leche sin mirar la figura mientras se recorta.

Grupos

Volviendo a las distintas posiciones de cada figura, se planteó la cuestión de por qué la figura

Fig. 25

daba lugar sólo a dos posiciones, mientras que

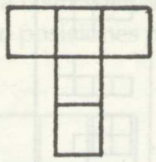


Fig. 26

daba lugar a cuatro, y

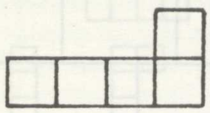


Fig. 27

a ocho. Los niños experimentaron plegando los modelos y utilizando espejos para reflejarlos (9). Examinaron la figura

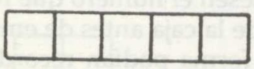


Fig. 28

y observaron que algunos movimientos la devuelven a su posición original y que otros no lo hacen así. Discutieron sobre los movimientos y practicaron con ellos; después de discutir un rato encontraron cuatro movimientos que dejaban la figura en su mismo sitio. Decidimos llamarlos "media vuelta", "volteo vertical", "volteo horizontal", y "no hacer nada". Decidimos abreviarlo en 1/2, V, H, N.

Entonces los niños miraron la figura dibujada en la pizarra y que era

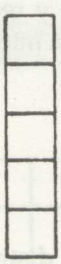


Fig. 29

(9) *Algunos niños utilizaron "Tarjetas Especulares" (ver Teaching Arithmetic, Vol 5, NO 2, Summer Term, 1967, pp. 24-30). Se puede investigar mucho más la cuestión planteada y trabajar mucho más con la simetría rotacional. Por falta de tiempo, en ninguna clase pudimos avanzar tanto como para que los niños manejasen este material.*

Se pidió entonces a los niños que cerrasen los ojos mientras que se hacía un movimiento que devolvía la figura a su posición original. Cuando abrieron lo ojos no pudieron decir, por supuesto, cual de los cuatro movimientos se había hecho. Entonces los niños sugirieron rápidamente que deberíamos señalar la figura. Varios textos tratan sobre movimientos de triángulos, rectángulos y cuadrados. Habitualmente no dejan al estudiante la oportunidad de señalar por sí mismo la figura. Pero merece la pena que los niños hagan sus propias marcas, como se puede ver por sus sugerencias. En primer lugar sugirieron que se debía señalar la figura en un lado de la forma siguiente:

Fig. 30

Al realizar el juego (mirar la pintura en su posición inicial dada arriba – cerrar los ojos–, ¿qué movimiento se ha hecho?) se dieron cuenta de que las señales puestas en la figura no eran adecuadas cuando se hizo el movimiento siguiente (mientras se mantenían cerrados los ojos).

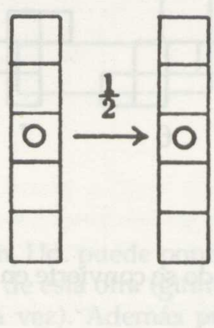
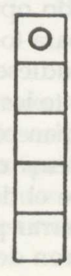


Fig. 31

Surgieron los niños entonces hacer la marca siguiente:



Al realizar un volteo vertical mientras mantenían cerrados sus ojos observaron que la señalización todavía era inadecuada, y sugirieron entonces dibujar un círculo directamente detrás del ya dibujado. Al repetir el juego se dieron cuenta de que la señalización seguía sin ser apropiada, y por último decidieron dibujar un círculo en un lado y un cuadrado exactamente detrás de él:

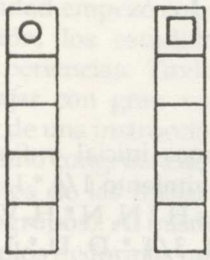


Fig. 33

Otros sugirieron poner otras marcas. Por ejemplo, se sugirió a veces

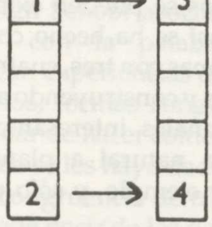


Fig. 34

Normalmente los niños se dan cuenta de que es suficientemente con hacer dos marcas. El mismo tipo de discusión tuvo lugar cuado se trató de señalizar

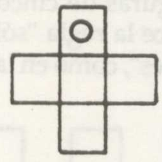


Fig. 35

con un círculo en un lado y un cuadrado detrás de él.

Una vez que se hubo señalizado

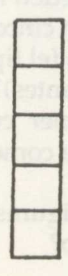


Fig. 36

los estudiantes se dieron cuenta en seguida de que si se hacía un movimiento mientras tenían cerrados sus ojos, podrían decir sin equivocarse cuál de ellos se había realizado. Si se producía alguna discusión, siempre podrían comprobarlo llevando a cabo el movimiento. Espontáneamente comenzaron a hacer dos o más movimientos. Por ejemplo indicaran que

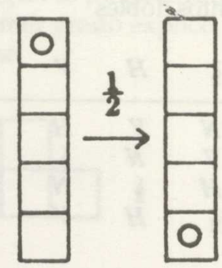


Fig. 37

se podría haber hecho también por medio de un V seguido de un H. Convinimos entonces en jugar a preguntarnos "¿Qué dos movimientos se han hecho?". Decidimos denotar "seguido por" con "*", de manera que los dos movimientos anteriores se abreviaron en V * H. Ahora empezamos a divertirnos - porque si se hacían dos movimientos no podíamos decir cuales dos eran. Por ejemplo, si se llevaba a cabo

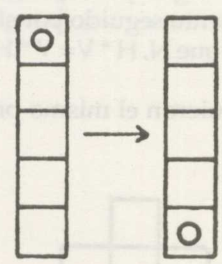


Fig. 40

en dos movimientos, los niños podrían intuir (y comprobar) que quizás había tenido lugar 1/2 * N, N *1/2, V * H o H * V. Hicimos una relación de todas las posibilidades y los niños se dieron cuenta entonces de que cualquiera de esos movimientos llevaba

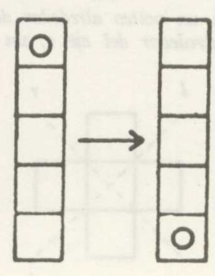


Fig. 41

y que si se hubiese hecho un sólo movimiento entonces debería haber sido 1/2. Los niños pronto aprendieron a jugar por sí solos. Se divirtieron también dando tres movimientos para un problema como el de más arriba. Se mostraron encantados con descubrimientos tales como que 1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 * V * V * H * H * 1/2 realizan el mismo movimiento. Se divirtieron mucho con estas largas cadenas. Posteriormente hicimos una tabla para todos los posibles movimentos dobles

*	1/2	H	V	N
1/2	N	V	H	1/2
H	V	N	1/2	H
V	H	1/2	N	V
N	1/2	H	V	N

Fig. 42

Los niños examinaron la tabla y encontraron muchas cuestiones interesantes, entre ellas:

La tabla es la misma por las "dos partes"

N está en toda la diagonal

Cada fila tiene 1/2, H, V, N.

Cada columna tiene 1/2, H, V, N.

Todo movimiento seguido por sí mismo da el mismo resultado que N, H * V = V * H, etc.

Los niños siguieron el mismo procedimiento con la figura

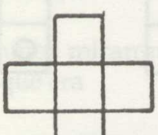


Fig. 43

Denotamos los ocho movimientos que dejan esta pieza en su mismo sitio por H, V, N, 1/4, 1/2, 3/4, I, D. Practicaron entonces con I y D (10). Se sorprendieron mucho al descubrir , por ejemplo, que I * 1/4 no daba el mismo resultado que 1/4 * I. Los niños se divirtieron otra vez hallando todos los posibles pares de movimientos que diesen un resultado particular. Por ejemplo, si

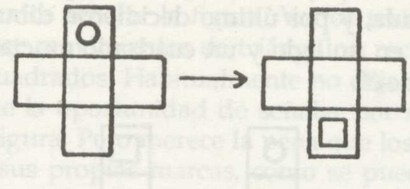


Fig. 44

son las posiciones inicial y final, y se había realizado el movimiento 1/4 * I, se propusieron los movimientos H * N, N * H, V * 1/2, 1/2 * V, 1/4 * I, I * 3/4, 3/4 * D, D * 1/4 y se dieron cuenta de que son todos equivalentes a llevar a cabo H. Hicimos otra tabla después de jugar varias veces. También se examinó esta tabla y se encontraron varias propiedades interesantes.

Estos trabajos se pueden extender en varias direcciones y así se ha hecho considerando los mismos problemas con tres, cuatro o seis cuadrados o triángulos y construyendo así muchas figuras tridimensionales interesantes. Este trabajo lleva de forma natural a plantearse diversas cuestiones. Por ejemplo, y sólo para mencionar unas cuantas:

1. ¿Cómo varían los problemas si se sustituyen los cuadrados por rectángulos?, ¿y si son triángulos isósceles en lugar de equiláteros?

2. ¿Cuántas figuras de cinco cuadrados hay si se establece la regla "sólo se pueden tocar los vértices", como en la figura?

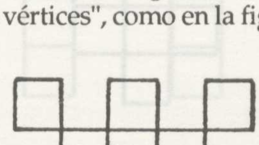


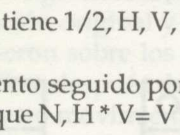
Fig. 45

3. ¿Cúal es el número máximo de figuras distintas que se pueden recortar en una hoja cuadriculada con cinco filas de cuatro cuadrados cada una (el tipo de papel que utilizan los estudiantes)? ¿Para qué figuras se pueden obtener cuatro duplicados a partir de una hoja como esa?

4. ¿Con qué otras figuras se puede embaldosar un rectángulo?

---

(10) Llamamos a un volteo alrededor del eje l un volteo a izquierdas (I), y alrededor del eje r, un voleto a derechas (D).



5. ¿Qué otras figuras tridimensionales se pueden hacer con papel?

6. ¿Se puede construir una figura que tenga diez movimientos que la dejen en su mismo lugar? ¿Once? ¿Doce? ¿Cinco?

Algunos comentarios sobre esta unidad

Aunque la unidad empezó como un ejercicio sobre visualización, los estudiantes tuvieron algunas otras experiencias. Tuvieron la oportunidad de trabajar con gran variedad de figuras y disponer de una instrucción informal en conceptos tales como congruencia, simetría, movimientos (distintos de las traslaciones) y grupos (e incluso subgrupos). Al mismo tiempo dispusieron de ejemplos de formas no congruentes, sin simetrías, y de movimientos no conmutativos. Creo que es particularmente importante que los niños puedan encontrar el concepto de congruencia en situaciones que no se refieren a triángulos. Estoy seguro de que en un test de asociación de palabras la mayor parte de los estudiantes de High School asociarían la palabra "congruente" con la palabra"triángulo". Aquí los niños sacan experiencias del manejo de materiales concretos, formas congruentes y no congruentes, al tratar de hacer coincidir dibujos - mucho antes de que se les haya dado una definición formal de la congruencia de triángulos. Algo parecido se puede decir de los demás conceptos.

Además, ellos pueden hacer y comprobar sus propias hipótesis y respuestas utilizando recortes de papel. La habilidad necesaria para hacer estos trabajos es muy variable. En una clase del sexto grado, un niño necesitó disponer de cuadrados sueltos para construir dibujos con cinco cuadrados, mientras que otro, sin recortar papeles, pudo seguir adelante y encontrar todos los dibujos de seis cuadrados y hacer dos listas con ellos, según se plegasen en cajas o no. Un alumno del primer grado explicó por qué, cuando una niña puso

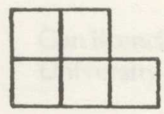


Fig. 46

y otra

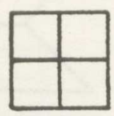


Fig. 47

en un tablero de fieltro, independientemente del lugar en que situase el último cuadrado, obtendría siempre la primera figura. "Puedes poner el cuadrado adicional aquí, aquí, o aquí, o aquí ...", dijo moviéndose alrededor de él y poniéndolo en cada uno de los lugares posibles y "en cualquier lugar que lo pongas siempre obtendrás la misma figura".

y que si se hubiese hecho un sólo movimiento entonces debería haber sido 1/2. Los niños pronto aprendieron [illegible] se divirtieron también dando dos movimientos para un problema como el de más arriba. Se mostraron [illegible] como que 1/4 * 1/2 [illegible] H * H [illegible] 1/4 realizan [illegible] divirtieron mucho con estas [illegible] tenían [illegible] una tabla para todos los posibles movimientos:

*	½	H	V	N
½	N	V	H	½
H	V	N	½	H
V	H	½	N	V
N	½	H	V	N

Fig. 42

Los niños examinaron la tabla y encontraron muchas cuestiones interesantes, entre ellas:

La tabla es la misma por las "dos partes".

[illegible]

Todo movimiento seguido [illegible] da el mismo resultado que N, H * V = V * H, etc.

Los niños siguieron el mismo procedimiento con la figura

Fig. 43

Denotamos los ocho movimientos que dejan esta pieza en su mismo sitio por: H, V, N, 1/4, 1/2, 3/4, I, D. Practicaron [illegible] (10). Se sorprendieron mucho al descubrir, por

(10) [illegible] a izquierda (I), y [illegible] a derecha (D).

ejemplo, que I * 1/4 no daba el mismo resultado que [illegible] llando todos los posibles pares de movimientos que diesen un resultado particular. Por ejemplo,

[illegible]

son las posiciones [illegible] realizando el movimiento 1/4 [illegible]

[illegible]

1. ¿Cómo varían los problemas si se sustituyen los cuadrados por rectángulos?, ¿y si son triángulos isósceles en lugar de equiláteros?

2. ¿Cuántas figuras de cinco cuadrados hay si se establece la regla "sólo se pueden tocar los vértices", como en la figura?

Fig. 45

3. ¿Cuál es el número máximo de figuras distintas que se pueden recortar en una hoja cuadriculada con cinco filas de cuatro cuadrados cada una (el tipo de papel que utilizan los estudiantes)? ¿Para qué figuras se pueden obtener cuatro duplicados a partir de una hoja como esa?

4. ¿Con qué otras figuras se puede embaldosar un rectángulo?

Extensiones de poliminós

JAMES K. BILDWELL
University of Stirling
Con licencia de la Central Michigan University

En mi seminario sobre la enseñanza de las matemáticas de la escuela secundaria se discutía sobre el concepto de generalización. Mis alumnos progresaban muy poco en estas ideas, de manera que sugerí que casi todos los temas se podían generalizar cambiando las condiciones. Como suele suceder, la clase dudó de la veracidad de mi afirmación. Puesto que habíamos estado en ese momento hablando sobre posibles experiencias utilizando poliminós, los estudiantes me pidieron que les diera algunas extensiones de esa materia.

Hay dos formas obvias en que se pueden considerar extensiones de los poliminós. En primer lugar, la figura básica para las construcciones puede ser un polígono regular distinto, esto es, se pueden formar las figuras colocando triángulos equiláteros o hexágonos regulares con sus lados juntos; esas extensiones han sido ya estudiadas por varios autores. Las extensiones consideradas en este artículo se han obtenido relajando las condiciones de regularidad del cuadrilátero.

Polirrombos

Una manera de relajar las condiciones puede ser el utilizar dos ángulos distintos pero solamente una longitud de lado. Esto cambia el cuadrado en un rombo. Colocando tres, cuatro, cinco o más rombos lado contra lado se pueden formar distintas figuras; un nombre que parece correcto para ellas puede ser **polirrombos.** Al experimentar con **trirrombos** se puede ver que es posible construir ocho figuras distintas, dos de las cuales son las siguientes:

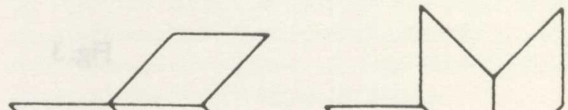


Fig. 1

Estas figuras generales no parecen servir para ninguna extensión evidente de los poliminós, de manera que nos limitaremos a los polirrombos que se pueden orientar en una cuadrícula rómbica. Esto nos produce exactamente tres trirrombos.

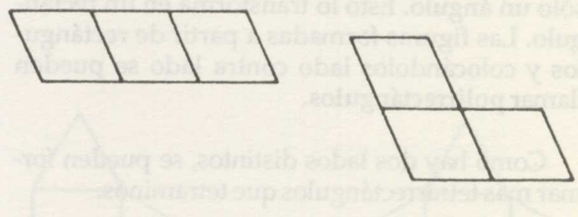


Fig. 2

Como se han relajado las condiciones vemos que hay más polirrombos que poliminós. Por ejemplo, hay cinco tetraminós y siete tetrarrombos.

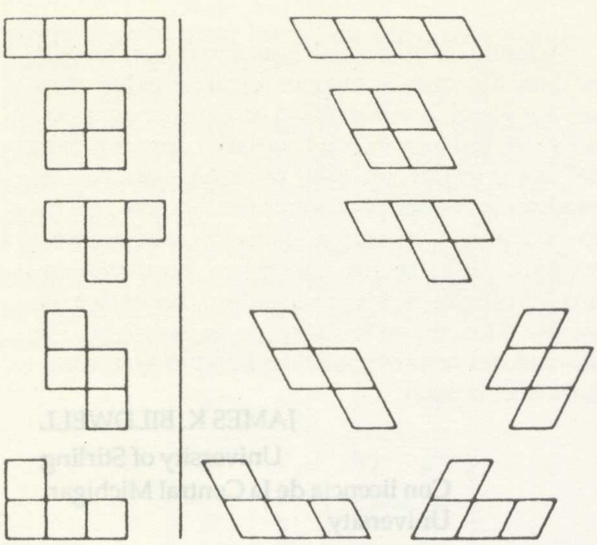


Fig. 3

Hay doce pentominós y veinte pentarrombos. Todos, menos el pentarrombo en forma de X, se pueden duplicar, y todos se pueden reproducir en tamaño triple usando nueve pentarrombos. Incluso hemos cuadruplicado la mayor parte de ellos utilizando las piezas. (Probablemente se pueden cuadruplicar todos ellos). Así pues se pueden hacer muchas más cosas con polirrombos que con poliminós.

Polirrectángulos

Una segunda manera de relajar las condiciones del cuadrado puede ser el disponer de dos longitudes diferentes para las aristas pero de sólo un ángulo. Esto lo transforma en un rectángulo. Las figuras formadas a partir de rectángulos y colocándolos lado contra lado se pueden llamar **polirrectángulos**.

Como hay dos lados distintos, se pueden formar más tetrarrectángulos que tetraminós.

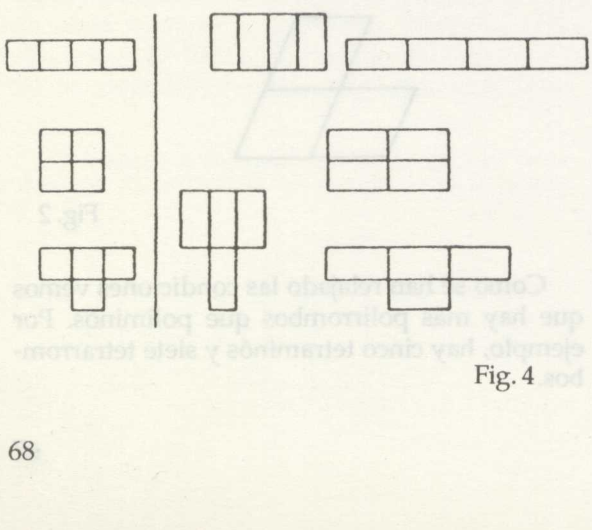


Fig. 4

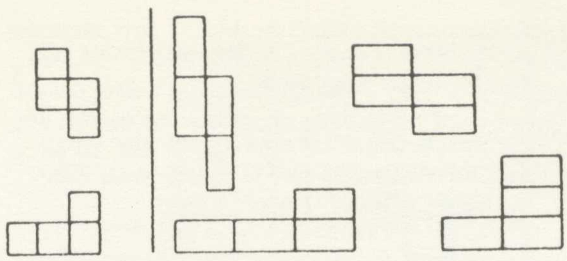


Fig. 5

Este aumento en el número de figuras distintas tiene una recompensa inmediata. Mientras que no se puede reproducir ninguno de los tetraminós en doble tamaño utilizando cuatro de las cinco figuras, **todos** los tetrarrombos se pueden doblar de esta manera

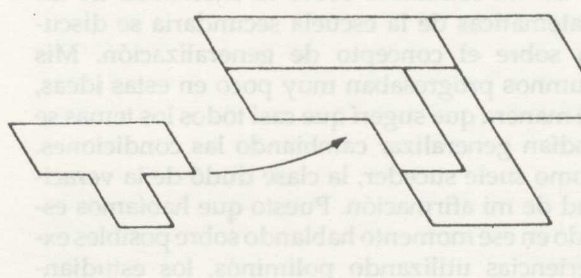


Fig. 6

De los nueve tetrarrectángulos, siete de ellos se pueden duplicar usando cuatro piezas. (Los "rectos" no se pueden duplicar)

Aunque no lo hayamos descubierto nosotros, los nueve tetrarrectángulos pueden formar un rectángulo grande. Es posible también que algunos de ellos se puedan triplicar utilizando las nueve piezas.

Hay ventiún pentarrectángulos. Todos excepto la figura con forma de X se pueden duplicar, y todos se pueden triplicar. Nosotros hemos cuadruplicado la mayor parte de ellos utilizando 16 piezas. Probablemente todos se pueden cuadruplicar.

Poliparalelogramos

Relajando las dos condiciones de igual lado y de igual ángulo a la vez, se transforma el cuadrado en un paralelogramo. Llamaremos a las figuras formadas por paralelogramos congruentes, **poliparalelogramos.** Suponemos de nuevo que las figuras están orientadas sobre una retícula paralelográmica para hacer la extensión consistente con los poliminós.

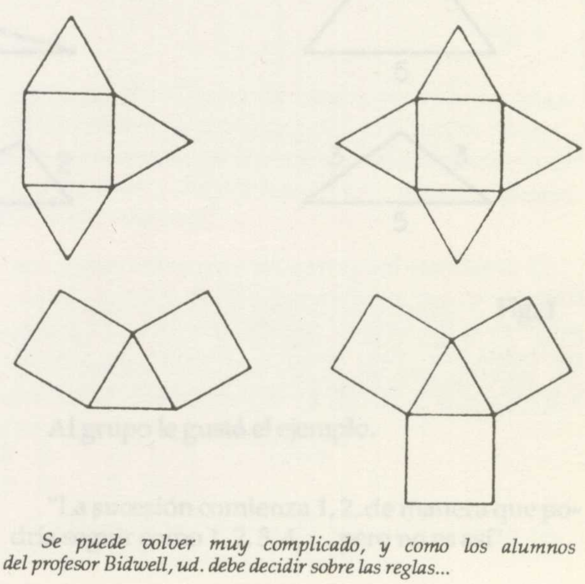
Como algunos de los tetraminós generan cuatro tetraparalelogramos distintos, hay trece tetraparalelogramos. Once de ellos se pueden duplicar. Todos ellos se pueden triplicar. Dejamos al lector otros descubrimientos.

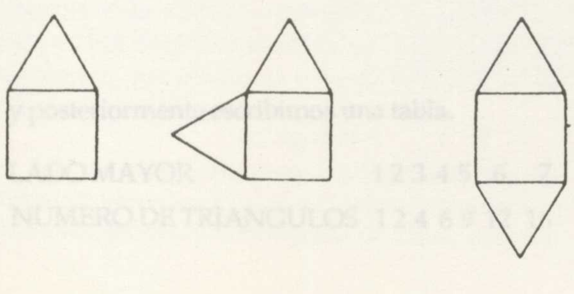
Resulta de esto que esas nueva figuras constituyen un territorio abierto a la exploración. Son posibles varias direcciones por las que aventurarse. Los pentaminós se pueden unir para formar rectángulos. ¿Se pueden conseguir con polirrombos, polirrectángulos o poliparalelogramos figuras análogas? Extendiéndose a figuras formadas por seis piezas, 35 hexaminós generan 61 hexarrombos, 68 hexarrectángulos y 118 hexaparalelogramos. Se pueden duplicar todas estas figuras.

Si se construyen polirrombos y poliparalelogramos sin la restricción de una retícula de dibujo, se pueden construir muchos más. Estas figuras más generales tienen propiedades interesantes que están esperando a que las descubra alguien.

Nota del editor (edición inglesa)

Durante una reciente conferencia NORMAC en Liverpool dirigí una sesión basada en materiales de mosáicos. Un par de profesores se sintieron estimulados a investigar qué figuras distintas se podrían hacer combinando cuadrados y triángulos equiláteros.





Se puede volver muy complicado, y como los alumnos del profesor Bidwell, ud. debe decidir sobre las reglas...

Una cosa lleva a otra

DAVID HALE

Shell Centre for Mathematic Education
University of Nottingham

Los acontecimientos siguientes ocurrieron durante un curso de formación para profesores de enseñanza secundaria en ejercicio.

Acabábamos de tener una sesión dedicada a generar sucesiones de números a partir de diversas situaciones y a reflexionar sobre su uso potencial en la clase (imaginar una regla general, expresarla en palabras y símbolos, demostrarla, poner ejemplos que pudieran probar que una conjetura estaba equivocada, estrategias, considerar diferencias, etc.). Advertí entonces la necesidad de introducir un ejemplo en el que se haga más fácil la formulación de una regla general observando los términos alternos de la sucesión. Se me ocurrió entonces el siguiente ejemplo como comienzo de la siguiente sesión.

¿Cuántos triángulos distintos hay con lados de longitud entera y tales que el lado (o lados) mayor(es) tenga(n) una longitud de n unidades?

Para n = 5 encontramos nueve triángulos, esto es,

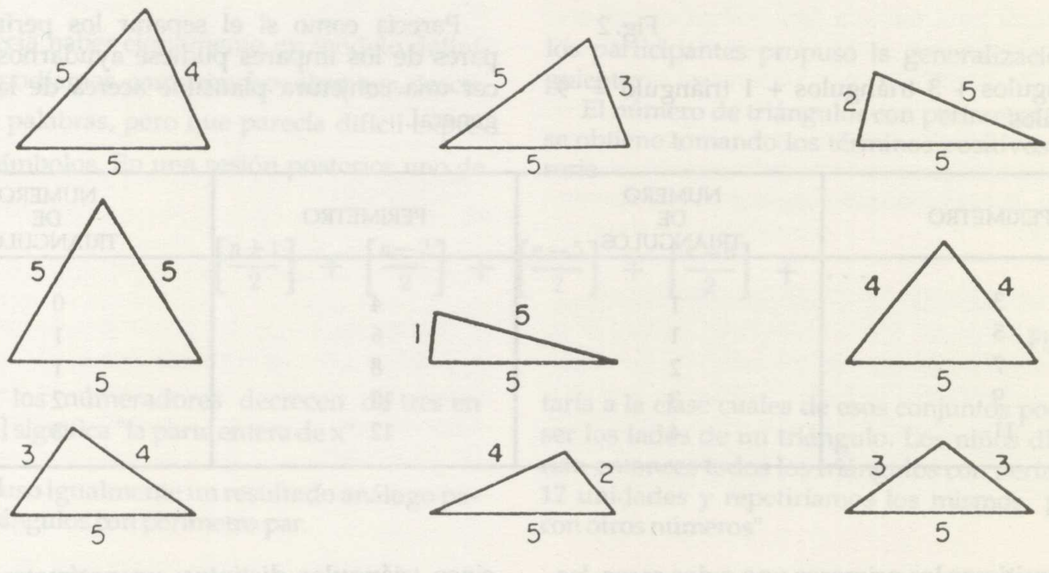


Fig. 1

y posteriormente escribimos una tabla.

LADO MAYOR	1	2	3	4	5	6	7
NUMERO DE TRIANGULOS	1	2	4	6	9	12	16

Al grupo le gustó el ejemplo.

"La sucesión comienza 1, 2, de manera que podría seguir como 1, 2, 3, 4, ..., pero no es así"

"La sucesión comienza por 1, 2, 4, de manera que podría seguir como 1, 2, 4, 8, 16, ..., pero no sigue así"

"La sucesión comienza por 1, 2, 4, 6, de manera que omitiendo el 1 como un caso especial, podría seguir como 1, 2, 4, 6, 8, 10, ..., pero no sigue así"

"Las diferencias son 1, 2, 2, 3, 3, 4, ... Quizás continúen como 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, ... "

"Consideremos cada dos números. ¡Son cuadrados de números!

Al considerar de nuevo n= 5 y clasificar los nueve triángulos como se muestra más abajo, pareció justificarse la conjetura, esto es, que para valores impares de n el número de triángulos es un cuadrado.

5 5 5	5 4 4	5 3 3
5 5 4	5 4 3	
5 5 3	5 4 2	
5 5 2		
5 5 1		

Fig. 2

5 triángulos + 3 triángulos + 1 triángulo = 9 triángulos

Consideramos entonces los números de triángulos correspondientes a valores pares de n y utilizamos una clasificación análoga para justificar (¿demostrar?) el resultado general.

Al preparar la sesión siguiente que debía tener con el grupo, recordé una cuestión del examen GCE de "cuatro horas" de Abbey Wood: **Investigar el conjunto de triángulos cuyo perímetro es de 12 unidades.**

En la clase siguiente con los profesores, consideramos el problema de hallar el número de triángulos distintos que se pueden costruir de forma que tengan lados de longitud entera y perímetro n unidades. Hubo una sorpresa inicial

n= 12: 552 543 444 3 triángulos

n= 11: 551 542 533 433 4 triángulos

¡Un valor menor de n produce más triángulos!

Recopilamos entonces los resultados para n= 3,4, ..., 12.

PERIMETRO	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
NUMERO DE TRIANGULOS	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3

Parecía como si el separar los perímetros pares de los impares pudiese ayudarnos a hacer una conjetura plausible acerca de la regla general.

PERIMETRO	NUMERO DE TRIANGULOS	PERIMETRO	NUMERO DE TRIANGULOS
3	1	4	0
5	1	6	1
7	2	8	1
9	3	10	2
11	4	12	3

Fig. 3

Si omitimos los primeros uno o dos casos, las sucesiones empezaban por 1, 2, 3, 4 y 1, 2, 3 respectivamente, lo que sugería que la regla general debía ser muy sencilla. Alguien demostró que un perímetreo de 13 unidades daba lugar a cinco triángulos distintos; un perímetro de 14 producía cuatro triángulos; empezó a parecer todo evidente. Sin embargo, nuestras esperanzas tuvieron vida corta. Otro miembro del gurpo encontró lo siguiente:

$n=15$:	7 7 1	6 6 3	5 5 5	7 triángulos
	7 6 2	6 5 4		
	7 5 3			
	7 4 4			

Fig. 4

De manera que volvimos a considerar la información que habíamos obtenido y clasificamos los triángulos según la longitud de su lado mayor) (o sus lados mayores).

Los primeros perímetro impares dan la tabla siguiente.

PERIMETRO	TRIANGULOS	NUMERO DE TRIANGULOS
3	1 1 1	1 = 1
5	2 2 1	1 = 1
7	3 3 1 3 2 2	2 = 2
9	4 4 1 3 3 3 4 3 2	2 + 1 = 3
11	5 5 1 4 4 3 5 4 2 5 3 3	3 + 1 = 4
13	6 6 1 5 5 3 6 5 2 5 4 4 6 4 3	3 + 2 = 5
15	7 7 1 6 6 3 5 5 5 7 6 2 6 5 4 7 5 3 7 4 4	4 + 2 + 1 = 7

Fig. 5

Parecía haber ciertamente un modelo definido que podíamos, como muchos alumnos, describir con palabras, pero que parecía difícil expresar en símbolos. En una sesión posterior uno de los participantes propuso la generalización siguiente:

El número de triángulos con perímetro 2n + 1 se obtiene tomando los términos positivos de la serie

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n-2}{2}\right] + \left[\frac{n-5}{2}\right] + \left[\frac{n-8}{2}\right] + \dots$$

Fig. 6

en que los numeradores decrecen de tres en tres y [X] significa "la parte entera de x"

Propuso igualmente un resultado análogo para los triángulos con perímetro par.

En otra sesión discutimos sobre las formas en que se puede introducir y utilizar en la clase el material sobre el que habíamos estado trabajando. Una sugerencia sobre el ejemplo de los triángulos que tenían el mismo perímetro, fue más o menos la siguiente:

"Yo pediría que buscaran conjuntos de tres número que sumasen 12. Cuando hubiesen obtenido los niños la relación completa de ellos, preguntaría a la clase cuales de esos conjuntos podrían ser los lados de un triángulo. Los niños dibujarían entonces todos los triángulos con perímetro 12 unidades y repetiríamos los mismos pasos con otros números"

Discutimos sobre los posibles méritos y desventajas de este y de otros enfoques, y los participantes, al final de la sesión, fueron a ensayar la situación por sí mismos, dispuestos a referir luego sus experiencias.

Posiblemente merezca la pena considerar un problema que me sugirió esta discusión.

¿Cuántas formas hay de expresar n como la suma de tres números? (Para lo que me propongo no influye el orden de los números; por ejemplo, 4 3 4 y 3 4 4 se toman como la misma partición).

Se dan a continuación los valores para n = 3, 4, ..., 13.

NUMERO	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
NUMERO DE PARTICIONES	1	1	2	3	4	5	7	8	11	12	14

Después de experimentar un poco, y haciendo uso de la experiencia obtenida a través de los demás ejemplos, hallé que el distinguir entre los casos par e impar y el clasificarlos según el **menor** número utilizado sugería una posible pauta. El resto se deja al lector, así como el número de particiones para valores impares de **n**.

Debe quedar claro que los acontecimientos que he descrito no surgieron en un curso planificado cuidadosamente de antemano, con propósitos y objetivos definidos de acuerdo con la moda al uso. Una idea llevaba a otra, pero un poco al azar, de forma no estructurada y apasionante.

Quizás esta manera espontánea de generar material sea una parte importante de la actividad de formación de profesores en ejercico. Si esta afirmación parece imprecisa y vaga, permítaseme concluir sugiriendo , a modo de ejemplo, algunos componentes más específicos para cursos de matemáticas dirigidos a profesores en ejercicio:

a) Es necesario que los participantes (especialmente los tutores/responsables) se compromentan en investigaciones matemáticas individuales, sin tener demasiado en cuenta que tengan una relevancia inmediata para trabajos en la clase;

b) (muy relacionado con (a)). Deben existir oportunidades para experimentar los procesos de la actividad matemática –clasificación, simbolización, generalización, conjetura, demostración y refutación, etcétera.– y para considerar las formas en que los alumnos pueden acceder a experiencias análogas;

c) Debe haber asimismo oportunidades para discutir los diversos enfoques de materias que aparecen habitualmente como **contenidos** de los programas, y referir después las reacciones experimentadas por los alumnos.

Post Scriptum

Algunos meses más tarde, volví a considerar el ejemplo de los triángulos clasificados por la longitud de sus lados mayores y observé un rasgo que había escapado previamente a mi atención: la preponderancia de triángulos isósceles en cada una de las clases. De los nueve triángulos dibujados en el diagrama, por ejemplo, sólo había dos escalenos. Esta observación me hizo contar el número de triángulos escalenos relativos a los demás valores del lado mayor. Los resultados se muestran en la siguiente versión ampliada de la primera tabla.

LADO MAS LARGO	1	2	3	4	5	6	7
NUMERO DE TRIANGULOS	1	2	4	6	9	12	16
NUMERO DE TRIANGULOS ESCALENOS	0	0	0	1	2	4	6

Fig. 7

De forma que, quizá el número de triángulos **escalenos** cuyo lado mayor sea (n+3) unidades sea el mismo que el número **total** de triángulos cuyo lado mayor sean **n** unidades. ¿Cómo se puede demostrar?

De aristas a sólidos

MARIE KUPER
Municipal High Scholl, Haifa & Curriculum Centre
Israel Ministry of Education

MARION WALTER
Departament of Instruction
State University of New York. Buffalo.

Elíjanse tres números, por ejemplo, 3, 5, 8. Dibújense y recórtense todos los rectángulos que se puedan construir utilizando cualquiera de esos números como longitudes de los lados.

Algunas veces, cuando empiezan, los niños dicen que no pueden construir un rectángulo con sólo tres longitudes o lados, de manera que hay que explicarles que se puede usar cada longitud más de una vez. Algunos piensan que los cuadrados no son rectángulos, y esta confusión proporciona una buena ocasión para organizar una discusión en la clase. Una vez que los niños empiezan a trabajar, muy pronto encuentran los seis rectángulos que hay.

Se proporciona entonces a cada pequeño grupo de niños alrededor de quince rectángulos de cada clase. Realmente no hacen falta tantos, pero es útil que dispongan de más de los que van a necesitar. A continuación, se pide a cada grupo que construya todas las cajas distintas que se puedan formar con esos rectángulos. Sin explicar en ese momento lo que se entiende por "distintas". Se puede pedir a los niños que adivinen de antemano cuántas cajas distintas habrá. Incluso los adultos no siempre hacen estimaciones aceptables.

Es muy interesante observar cómo los niños (¡y los adultos!) hacen las cajas. Unos las hacen extendiendo todo el desarrollo de la caja y pegando las piezas después. Otros colocan las piezas en su posición final y luego van pegando pieza por pieza. Muchas veces se ensayan combinaciones que no sirven.

Cuando han acabado de hacer las cajas, se les puede pedir que comprueben que no hay dos cajas con la misma forma.

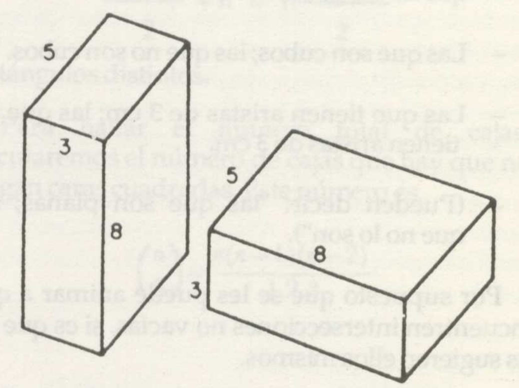


Fig. 1

Los niños pueden entonces comparar sus colecciones de cajas y cerciorarse de que han obtenido las diez posibilidades.

Un problema estimulante que se puede proponer ahora es el de ordenar las cajas a ojo según su volumen. ¡Trate ud. de hacerlo en primer lugar!. Haga que los niños marquen las cajas y hagan una relación de ellas por orden y sólo después permita que calculen su volumen. Puede que se lleven alguna sorpresa cuando completen la tabla.

	CAJA	VOLUMEN
A	3, 3, 3	27
B	3, 3, 5	45
C	3	
D	. . .	
E		
J	8, 8, 8	512

Fig. 2

Se puede empezar de nuevo con otras ternas de números. Ordenar las cajas a ojo por su volumen puede ser más (o menos) difícil.

Se pueden sugerir una gran variedad de juegos que den a los niños una mejor percepción de las distintas formas de cajas. Pida a dos o más niños que jueguen juntos. Un niño cierra los ojos mientras el otro esconde una caja; entonces el primer niño trata de averiguar qué caja ha escondido el otro. No es demasiado fácil.

Otro juego está basado en disponer las cajas en conjuntos. Un niño agrupa las cajas en dos o más conjuntos, según una regla inventada por él. El otro niño, (o niños), trata de adivinar la regla que ha usado el primero. Entre las clasificaciones que se han elegido están las siguientes:

- Las que tienen sus caras cuadradas; las que no las tienen.

- Las que son cubos; las que no son cubos.

- Las que tienen aristas de 3 cm; las que no tienen aristas de 3 cm.

- (Pueden decir: "las que son planas; las que no lo son").

Por supuesto que se les puede animar a que encuentren intersecciones no vacías, si es que no las sugieren ellos mismos.

No es imposible, incluso para niños muy pequeños, el construir la tabla siguiente. Pueden obtener la información necesaria contando.

Nº DE LONGITUDES DE LADOS	POSIBLE Nº DE CUADRADOS	POSIBLE Nº DE RECTANGULOS NO CUADRADOS	TOTAL
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6
4	4	6	10

Fig. 3

Pueden a continuación examinar la tabla para hallar pautas numéricas, y quizás incluso para encontrar una regla general. Discutiremos sobre esta actividad más adelante.

Si se disponen las cajas ordenadas según los **volúmenes** crecientes, ¿estarán también ordenadas según las **áreas totales** crecientes? ¿Qué pasa entonces con la suma de las longitudes de las aristas? ¿están en el mismo orden? ¿Cómo están relacionadas con el volumen de la caja?

Por otra parte, incluso los niños que no han aprendido a calcular el volumen pueden comparar volúmenes llenando las cajas con judías o garbanzos (y contándolas o pensándolas luego), o colocando dentro de ellas cubos unidad. Cuando estaba tratando de llenar una caja con cubos unidad, una niña de diez años se dio cuenta en seguida de que no necesitaba llenar completamente la caja, sino hacer lo siguiente:

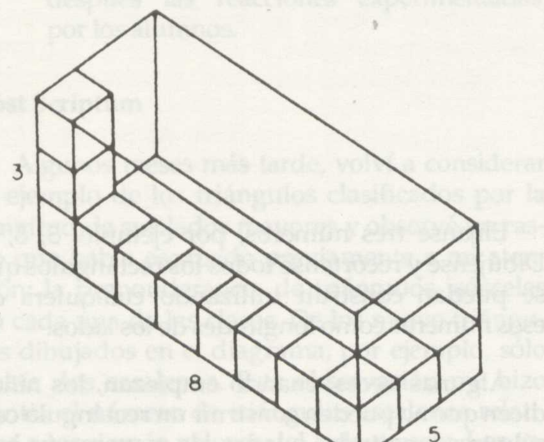


Fig. 4

e hizo el resto multipicando.

Si se proporciona a los niños un conjunto de cajas bien hechas, se pueden hallar los volúmenes llenándolas con arena e incluso con agua. Se puede también usar papel cuadriculado para comparar las áreas de las caras, contando los cuadrados del papel. No intente que los niños construyan cajas bien terminadas en esta etapa. Si necesitan un conjunto de cajas bien hechas, proporcióneles un lote ya preparado. Es importante que la precisión al hacerlas no les distraiga cuando están hallando el número de cajas que es posible construir.

En clases de alumnos mayores se pueden generalizar las cuestiones anteriores a cualquier número de longitudes distintas.

Dadas cuatro longitudes, tales como 2, 3, 5 y 8, hay al menos dos maneras en que un alumno puede tratar el problema de hallar cuántos rectángulos y cajas se pueden construir. Una de ellas es dibujarlas y construirlas y después contar. Las comparaciones que hagan los alumnos entre sí pueden ayudar a eliminar las repeticiones y a hallar las que falten. Otro método es hallar una forma sistemática de tabular todos los rectángulos y todas las cajas posibles. Se puede resolver el problema también por medio de la teoría combinatoria.

Consideremos primero el caso particular en que sólo haya tres longitudes, por ejemplo, 3, 5 y 8. En un rectángulo de lados **a** y **b**, podemos elegir en primer lugar **a** como 3. Entonces **b** puede ser 3, 5, 8, lo que nos da tres rectángulos distintos. Tomando **a** como 5 obtenemos un nuevo rectángulo cuando **a** es 5 u 8. Por último si **a** es 8, tenemos solamente el cuadrado 8 por 8. En total tenemos

$$3 + 2 + 1 = 6$$

rectángulos distintos. Por medio de razonamientos análogos podemos encontrar el número de rectángulos cuando se dan 4, 5, 6, ..., n longitudes diferentes de los lados. A continuación los alumnos pueden hallar el número de cajas distintas que se pueden formar para un valor dado de **n**, considerando sus aristas y enumerando todas las posibilidades sin repetir ninguna.

Otro método consite en considerar los rectángulos en lugar de las aristas y enumerar las maneras que hay de juntarlos

Nº DE LONGITUDES DE LADOS (1)	Nº DE RECTANGULOS (2)	Nº DE CAJAS (3)
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20

Fig. 5

Podemos observar algunas pautas numéricas en esa tabla. Por ejemplo, el número de rectángulos aumenta regularmente, esto es, las diferencias están en progresión aritmética. Las diferencias primeras de la columna (3) son los mismos números que aparecen en la columna (2). Este modelo numérico nos permite generalizar para el caso en que el número de aristas distintas sea **n**. Al estudiar la tabla los alumnos pueden darse cuenta de que en el caso general el número de rectángulos será

$$\frac{n\,(n+1)}{2}$$

El número de cajas con n aristas de longitudes distintas es más difícil de calcular. Los estudiantes pueden observar que el número que aparece en el lugar **n** de la columna (3) es la suma hasta **n** de todos los rectángulos posibles, esto es, la suma de los números de la columna (2).

Se puede también calcular el número de rectángulos a partir de **n** aristas considerando primero los rectángulos que no sean cuadrados. Hay

$$\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

rectángulos de esa clase. A estos debemos añadir el número de cuadrados, que es, por supuesto, **n**, lo que nos da

$$\frac{n\,(n-1)}{2} + n = n\frac{(n+1)}{2}$$

rectángulos distintos.

Para hallar el número total de cajas, calcularemos el número de cajas que hay que no tengan caras cuadradas. Este número es.

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

Para calcular el número de cajas que tengan dos caras cuadradas, podemos elegir solamente dos longitudes, esto es, la longitud de un lado del cuadrado y la longitud de la tercera arista. Para cada elección de **a** y **b** obtenemos dos cajas distintas, que son **a** x **a** x **b** y **a** x **b** x **b**. De manera que debemos multiplicar $\binom{n}{2}$ por 2.

Hay **n** cuerpos sólidos cuyas caras son todas cuadradas, esto es, cubos. Obviamente no es posible construir cajas con cuatro o con un número impar de caras cuadradas, de forma que hemos terminado nuestro cálculo. En total tenemos

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{2n(n-1)}{1.2} + n$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

cajas distintas . Este resultado es igual a

$$\sum_{1}^{n} \frac{m(m+1)}{2}$$

Obsérvese que el número de cajas que no tienen caras cuadradas es

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

El estudio de esta cuestión puede ser un ejercicio interesante para niños pequeños, que pueden hallar el resultado de forma inductiva.

Una vez construido un conjunto de diez cajas utilizando aristas de longitudes 2, 3, y 5, tratamos de ordenarlas a ojo por volumen. Al hacer esto, se ve que es bastante difícil ordenar correctamente varios pares de nuestras cajas. Tanto los niños como los adultos consideran este ejercicio sorprendente y divertido.

Queríamos investigar un poco más sobre esta situación y ver si es posible encontrar una manera de predecir cuales son las cajas "peligrosas", tanto para este conjunto de números como para otros. Decidimos disponer las cajas en una ordenación sistemática y elegimos arbitrariamente el orden que damos a continuación. Las etiquetamos de A a J y repetimos los cálculos con un segundo conjunto de aristas **a, b y c**; denotamos estas cajas de A' a J'. A continuación damos los resultados obtenidos para los dos conjuntos de valores:

CAJAS	LONGITUD DE ARISTAS 3, 5, 8	VOL.	CAJAS	LONGITUD DE ARISTAS 2, 7, 11	VOL.
A	3, 3, 3	27	A′	2, 2, 2	8
B	3, 3, 5	45	B′	2, 2, 7	28
C	3, 3, 8	72	C′	2, 2, 11	44
D	3, 5, 5	75	D′	2, 7, 7	98
E	3, 5, 8	120	E′	2, 7, 11	154
F	3, 8, 8	192	F′	2, 11, 11	242
G	5, 5, 5	125	G′	7, 7, 7	343
H	5, 5, 8	200	H′	7, 7, 11	539
I	5, 8, 8	320	I′	7, 11, 11	847
J	8, 8, 8	512	J′	11, 11, 11	1331

Fig. 6

Obsérvese que según nuestra forma sistemática de ordenarlas, las cajas del primer conjunto (A a J) no estaban dispuestas en orden creciente de volumen, mientras que el segundo conjunto (A' a J') si lo estaba. Los pares de cajas E y G, C y D resultaron difíciles de ordenar a ojo, y, como se puede ver, son bastante parecidas en volumen, pero no están adyacentes en nuestra tabla. Esto nos llevó a plantearnos la cuestión de averiguar cuales son las condiciones que deben cumplir las aristas $a \leq b \leq c$ para que en nuestra particular manera de ordenar las cajas resulten dispuestas según los volúmenes crecientes.

CAJAS	LONGITUDES DE ARISTAS a, b, c	VOLUMEN	RAZON ENTRE VOLUMENES DE CAJAS VECINAS
A	a, a, a	a^3	
B	a, a, b	a^2b	$\frac{a}{b}$
C	a, a, c	a^2c	$\frac{b}{c}$
D	a, b, b	ab^2	$\frac{ac}{b^2}$
E	a, b, c	abc	$\frac{b}{c}$
F	a, c, c	ac^2	$\frac{b}{c}$
G	b, b, b	b^3	$\frac{ac^2}{b^3}$
H	b, b, c	b^2c	$\frac{b}{c}$
I	b, c, c	bc^2	$\frac{b}{c}$
J	c, c, c	c^3	$\frac{b}{c}$

Fig. 7

Escribimos algebraicamente los volúmenes y pedimos a un joven estudiante, Gabriel Kuper, que investigase sobre las condiciones requeridas. Este estudió la tabla y, comparando los volúmenes adyacentes, redujo la condición relativa a los volúmenes crecientes a

$$\frac{a}{b} < \frac{b^2}{c^2} < 1$$

Obsérvese que la terna 2, 7, 11 satisface esta condición, ya que

$$\frac{2}{7} < \frac{49}{121} < 1$$

En nuestra primera terna 3, 5, 8,

$$\frac{3}{5} > \frac{25}{64}$$

de manera que no se cumple la condición, y por tanto las cajas no estaban ordenadas por volúmenes crecientes.

Hay otras muchas cuestiones que explorar. ¿Cómo podemos predecir qué cajas son "peligrosas", esto es, difíciles de ordenar a ojo? ¿Cuándo es V_C, el volumen de la caja C, igual al volumen V_D de la caja D? ¿Qué relación hay entre V_E y V_G? Si $V_C = V_D$ entonces $a^2 c = = ab^2$ y para que $V_E = V_G$ debe ser $abc = b^3$. Así pues las cajas C y D (y también las E y G) son iguales en volumen cuando $a/b = b/c$, esto es, cuando b es la media geométrica de **a** y **c**. Si también se cumple que **a + b = c**, entonces **c** está dividido en la razón áurea. Obsérvese que en el caso de las longitudes 3, 5, 8 de nuestro ejemplo, **a + b = c** y a/b es muy próximo a b/c. Cuando elegimos números en la sucesión de Fibonacci, obtenemos siempre esas cajas próximas en volumen, y la aproximación se hace mayor cuanto más avancemos en la sucesión. Otros problemas que se pueden investigar son las condiciones impuestas a las áreas de las caras y a las sumas de las longitudes de las aristas.

Se pueden calcular las razones de los volúmenes de las cajas vecinas colocadas en orden distinto. ¿Podría servir para hacer el análisis el utilizar **a**, $a+d_1$, $a+d_2$, con $d_1 \leq d_2$, en lugar de **a, b** y **c** como longitudes de las aristas? La utilización de esta notación proporciona una gran práctica con la multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Hay muchas cuestiones que están relacionadas de forma natural con este problema.

1. Problemas de coloreado. ¿De cuántas maneras se pueden colorear la caja abierta y la caja cerrada? ¿Qué relación hay entre esos dos resultados? Estudiar el problema para distintos números de colores. Ver "Nuevos pasatiempos matemáticos", de Martin Gardner para una discusión más avanzada del problema de colorear.
2. Problemas relativos a las áreas de las caras de las cajas.
3. Cuestiones sobre el número de caras cuadradas y rectangulares que tienen las cajas, tanto en casos particulares como en el caso general.
4. ¿Cómo se generaliza la condición sobre los volúmenes vecinos a 4 ó más aristas?
5. ¿Qué problemas se pueden generar si se tiene en cuenta el hecho de que **a, b** y **c** pueden ser primos entre si o no serlo?
6. ¿Cuántos tetraedros ditintos se pueden formar utilizando cualquiera de las tres longitudes diferentes? ¿Y con cuatro longitudes diferentes? (Leslie Chambers, un estudiante de S.U.N.Y., trató este problema después de haber trabajado esta unidad. No es tan fácil como parece, e invitamos al lector a que lo intente. Se puede suponer que es posible construir triángulos con todas las combinaciones).

Hemos empezado con una actividad concreta de construir cajas, una actividad para niños muy interesante desde el punto de vista matemático, y hemos terminado con problemas que pueden ser difíciles incluso para alumnos de enseñanza secundaria. Investigar una situación es una forma de desarrollar materiales para el curriculo, e hicimos esto mientras escribíamos materiales de este tipo para el Ministerio Israelí de Educación y Cultura. Como hay ya muchos libros sobre cubos y otros sólidos, decidimos investigar cajas rectangulares que no sean necesariamente cubos.

Referencias

F. Basseti, H. Ruchlis & D. Malament: **Maths Projets: Polyhedral Shapes** (Book-Lab Inc., 1449 37 th St. Brooklyn, N. Y. 11218.

J. Mold: **Solid Models** (Cambridge University Press).

D. Fielker: **Cubes** (Cambridge University Press).

M. Walter: **Boxes, Squares and other Things: A Teachers Guide for a Unit in Informal Geometry** (National Council of Teachers of Mathematics, Wahington D. C.)

M. Walter & S. T. Brown: **What if not y What if not: And Exploration and Second Ilustration** (MT nº 46 & 51). No hemos seguido aquí esa técnica, pero nos llevó a la idea de utilizar rectángulos y tetraedros.

M. Wenninger: **Polyhedra Models for the classroom** (National Council of Teachers of Mathematics)

de manera que no se cumple la condición, y por tanto las cajas no estaban ordenadas por volúmenes crecientes.

Hay otras muchas cuestiones que explorar. ¿Cómo podemos predecir qué cajas son "peligrosas", esto es, difíciles de ordenar a ojo? ¿Cuándo es V_C, el volumen de la caja C, igual al volumen V_D de la caja D? ¿Qué relación hay entre V_E y V_G? Si $V_C = V_D$ entonces $a^2c = ab^2$ y para que $V_E = V_G$ debe ser $abc = b^3$. Así pues las cajas C y D (y también las E y G) son iguales en volumen cuando $a/b = b/c$, esto es, cuando b es la media geométrica de a y c. Si también se cumple que $a + b = c$, entonces c está dividido en la razón áurea. Obsérvese que en el caso de las longitudes 3, 5, 8 de nuestro ejemplo, $a + b = c$ y a/b es muy próximo a b/c. Cuando elegimos números en la sucesión de Fibonacci, obtenemos siempre esas cajas próximas en volumen, y la aproximación se hace mayor cuanto más avanzamos en la sucesión. Otros problemas que se pueden investigar son las condiciones impuestas a las áreas de las caras y a las sumas de las longitudes de las aristas.

Se pueden calcular las razones de los volúmenes de las cajas vecinas colocadas en orden distinto. ¿Podría servir para hacer el análisis el utilizar a, $a+d_1$, $a+d_2$, con $d_1 \le d_2$, en lugar de a, b y c como longitudes de las aristas? La utilización de esta notación proporciona una gran práctica con la multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Hay muchas cuestiones que están relacionadas de forma natural con este problema.

1. Problemas de coloreado. ¿De cuántas maneras se pueden colorear la caja abierta, y la caja cerrada? ¿Qué relación hay entre esos dos resultados? Intentar el problema para distintos números de colores. (Ver "Polyhedra" de Martin Gardner para una discusión más avanzada del problema de colorear.)

2. Problemas relativos a las áreas de las caras de las cajas.

3. Cuestiones sobre el número de caras cuadradas y rectangulares que tienen las cajas, tanto en casos particulares como en el caso general.

4. ¿Cómo se generaliza la condición sobre los volúmenes idénticos a 4 ó más aristas?

5. ¿Qué problemas se pueden generar si se tiene en cuenta el hecho de que a, b y c pueden ser primos entre sí o no serlo?

6. ¿Cuántos tetraedros distintos se pueden formar utilizando cualquiera de las tres longitudes diferentes? ¿Y con cuatro longitudes diferentes? (Leslie Chambers, un estudiante de S.U.N.Y., trató este problema después de haber trabajado esta unidad. No es tan fácil como parece, e invitamos al lector a que lo intente. Se puede suponer que es posible construir triángulos con todas las combinaciones).

Hemos empezado con una actividad concreta de construir cajas, una actividad para niños muy interesante desde el punto de vista matemático, y hemos terminado con problemas que pueden ser difíciles incluso para alumnos de enseñanza secundaria. Investigar una situación es una forma de desarrollar materiales para el currículo, e hicimos esto mismo escribiendo materiales de este tipo para el Ministerio Italiano de Educación y Cultura. Como hay ya muchos libros sobre cubos y otros sólidos, decidimos investigar cajas rectangulares que no sean necesariamente cubos.

Referencias

1. Bassen, H. Ruchlis & D. Malament: Maths Projects: Polyhedral Shapes (Book-Lab Inc. 1449 37th St. Brooklyn, N.Y. 11218.

Mold: Solid Models (Cambridge University Press).

D. Holden: Cubes (Cambridge University Press).

M. Walter: Boxes, Squares and other Things: A Teachers Guide for a Unit in Informal Geometry (National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C.)

M. Walter & S. T. Brown: What if not y What if not: And Exploration and Second Illustration (MT nº 46 y 51). [illegible] pero nos llevó a la idea de utilizar rectángulos y triángulos.

M. Wenninger: Polyhedra Models for the classroom (National Council of Teachers of Mathematics).

EMPEZANDO A PARTIR DE MATERIALES

MT. 74 WALTER, M. **Dos problemas a partir de un triángulo.**

M.T. 51 FIELKER, D. **Notas sacadas de un centro matemático.**

M.T. 73 ZASLAVSKY, C. **Dibujos de redes africanas.**

M.T. 70 FUREY, W. **Edredones.**

M.T. 27 GILES, G. **Mosaicos: Una aventura en matemáticas.**

M.T. 72 FIELKER, D. **Cinco palillos.**

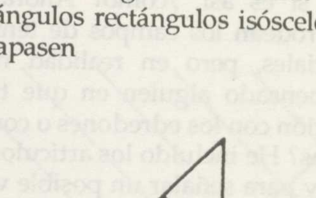
M.T. 93 WALTER, M. **Hacer matemáticas con un trozo de papel**

Sabemos (¡más o menos!) cómo resolver los problemas "standard" planteados en los textos. Pero, ¿qué hay de los problemas o investigaciones que surgen a partir de los materiales que encontramos a nuestro alrededor? He afirmado muchas veces que se puede empezar una investigación o plantear problemas a partir de casi todo. Casi estaría dispuesto a omitir la palabra "casi" en la afirmación anterior. Una vez, cuando acudía a una clase en Halifax, N.S., que debía durar 4 horas, pensando que disponía de tiempo de sobra, al encontrar sobre mi mesa dos grandes triángulos isósceles rectángulos de papel, pregunté : ¿qué matemáticas se pueden hacer con estos triángulos? Como quería que todos tuviesen un triángulo rectángulo isósceles, cogí uno de ellos y lo corté en dos triángulos rectángulos isósceles que, por supuesto, eran semejantes al original. Repetí esto ... y hubo risas cuando cada uno recibió su triángulo rectángulo isósceles. Y se marcharon. Dos problemas planteados aquel día por los estudiantes fueron:

Dos problemas a partir de un triángulo

MARION WALTER

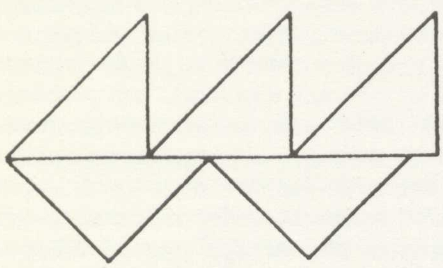
Problema 1. Vaghela Mansukh colocó dos de los triángulos rectángulos isósceles de forma que se solapasen



¿Qué área tiene la intersección?

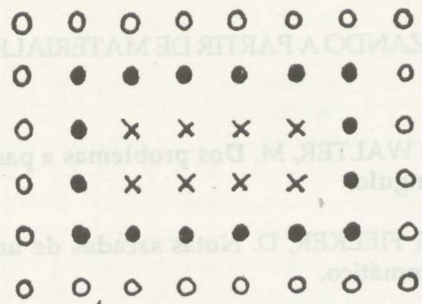
Por la tarde traté de explicar el problema por teléfono a mi colega Stephen Brown. ¡Le sugiero que trate de hacer esto con algún amigo sin que éste haga ningún dibujo y sin usar letras para su explicación!

Problema 2. Desgraciadamente no tengo el nombre del estudiante que pensó en este problema. Dipónganse un conjunto de triángulos rectángulos isósceles de forma tal que la hipotenusa de cada uno de ellos esté situada en la misma recta. Tómese otro conjunto de triángulos y sitúese de forma que un cateto esté sobre la misma recta.



¿Tendrán las dos hileras de triángulos algún vértice en común en que coincidan el extremo de una hipotenusa y el extremo de un cateto?

Otro problema que no puedo resistirme a plantear es: ¿qué otras figuras se pueden dividir en dos mitades congruentes que sean semejantes a la original? En "Notas sacadas de un centro matemático", Fielker utiliza como ejemplo las vallas de alambres que rodean un campo de tenis. Aunque cuenta lo que sucedió en el taller de trabajo, nos abre una gran cantidad de posibilidades de pensar en nuevos problemas! Nadie planteó, por ejemplo, el problema de si es posible construir la valla a partir de una sola pieza, - y si es así, ¿cómo? Ahora bien, las vallas que rodean los campos de tenis parecen muy especiales, pero en realidad no lo son. ¿Hubiera pensado alguien en que tienen una fuerte relación con los edredones o con los dibujos africanos? He incluido los artículos de Furey y Zaslavsky para señalar un posible vínculo entre ellos (para más información sobre los trabajos en matemáticas y arte en Africa ver el libro de Zaslavsky, "Africa Cuenta", al que se refiere al final de su artículo). El segundo punto de partida de Fielker utiliza clavijas y tableros para colocarlas. Siempre he encontrado que este es un punto de partida enormemente rico. Simplemente el contar puede constituir un problema difícil. Muchas veces he discutido sobre cuantas clavijas hay en el borde exterior:



Durante las discusiones algunos adultos avanzaron como respuestas (2 x 6) + (2 x 7). Los estudiantes pueden costruir sus propios modelos y hallar el número de clavijas que hay en el n-simo borde, o el número total de clavijas usadas después de haber colocado el n-simo borde. Estos trabajos constituyen un ejemplo de un punto de partida geométrico o visual y que termina con un trabajo sobre números, sucesiones o funciones.

Aunque decidí no incluir ninguno de los numerosos artículos publicados sobre mosaicos, hay uno de los primeros que debía ser incluido. Muy poca gente ha tenido acceso a Mathematics Teaching 27, y aunque el artículo se llama mosaicos, es mucho más que eso, su subtítulo "Una aventura en Matemáticas", lo describe mejor. Da una idea de lo apasionate y valiosa que puede ser la investigación matemática y "aclara la ayuda que puede prestar la razón a la intuición". Creo que podemos aprender mucho en este artículo sobre cómo se debe enseñar la geometría. Antes de leerlo podría Ud. preguntarse qué se puede hacer en una situación que requiere recortar cuartos de círculo en una hoja de cualquier cosa. Después de eso, ud. habrá hecho su propia investigación y disfrutará doblemente del artículo.

"Cinco palillos" y "Hacer matemáticas con una hoja de papel" hablan por sí mismos.

Notas sacadas de un centro matemático

DAVID S. FIELKER
Abbey Wood Mathematics Centre

Un miércoles por la tarde de un caluroso día de verano ... en mitad de un curso sobre el sistema métrico para juniors (*). "Salid y obtened algunas relaciones matemáticas de la valla de alambre que rodea la pista de tenis." ... Les hago algunas sugerencias, y deseo no haberlo hecho.

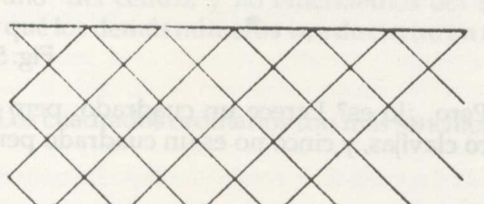


Fig. 1

Para cuando salgo yo mismo, tres señoritas han calculado el número de agujeros que hay y están tratando de hallar la cantidad total de alambre de la valla.

Piensan que quizás pueden multiplicar la cantidad de alambre que hay alrededor de un agujero por el número de agujeros. Saben más o menos que no pueden hacerlo, pero no saben por qué.

¿Cómo podemos hacerlo?, me preguntan. Yo no tengo intención de decírselo.

Ellas dibujan un diagrama

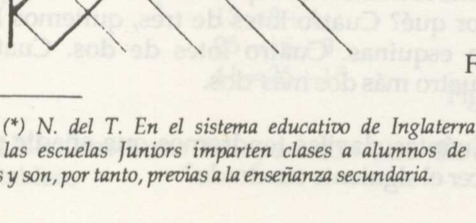


Fig. 2

(*) *N. del T. En el sistema educativo de Inglaterra y Gales, las escuelas Juniors imparten clases a alumnos de 7 a 11 años y son, por tanto, previas a la enseñanza secundaria.*

y empiezan con la serie 1 + 3 + 5 ..., pero se preguntan sobre el alambre dirigido hacia el otro lado; ¿será el doble?

¿Cómo podemos hacerlo?, preguntan. Yo no voy a decírselo todavía.

Se acuerdan del viejo problema de la distancia entre postes telegráficos y vuelven sobre la cantidad de alambre que hay alrededor de cada agujero.

Pero lo dejan de nuevo.

Ud. no va a decírnoslo, ¿verdad?, dicen.

Podemos medir la cantidad de alambre que hay en un pie cuadrado. (¿Perdón?, digo. Lo sentimos - un metro cuadrado, me dicen. Después de todo, esto empezó como un curso sobre el sistema métrico). Marcan con tiza un cuadrado de un metro de lado, cuyos vértices están en las intersecciones de los alambres y empiezan a medir los alambres desde la esquina de abajo a la derecha; dos de ellas sostienen los extremos de una cinta métrica y la otra hace las anotaciones.

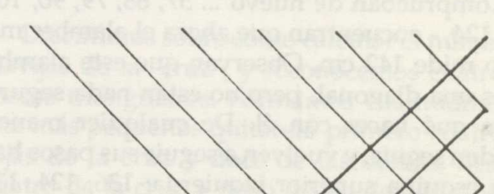


Fig. 3

El primer alambre tiene una longitud de 12 cm. No están seguras de que el siguiente tenga 23 cm. ó 24 cm. Supongamos que tiene 24 cm., sugieren; debe haber entonces un modelo: 36 cm., 48 cm., 56 cm., - ¡oh! 68 cm., 80 cm., 90 cm. - evidentemente no hay ningún modelo.

102 cm., 114 cm., (esto es, de nuevo 12), 124 cm (¡oh!), 136 cm., 142 cm. ¿Vamos bien?, preguntan. Yo no lo sé.

Han alcanzado la diagonal del metro cuadrado, y me preguntan si los números debe producirse ahora "hacia atrás de nuevo", pero como yo no lo sé, lo mejor que pueden hacer es comprobarlo. Desgraciadamente el alambre siguiente mide 129 cm., y no 136 cm.

Cuando una de ellas ha alcanzado la esquina del metro cuadrado, la otra no lo ha hecho del todo porque los agujeros "cuadrados" de la valla de alambre no son cuadrados del todo, y no hay alambre a lo largo de la diagonal del metro cuadrado.

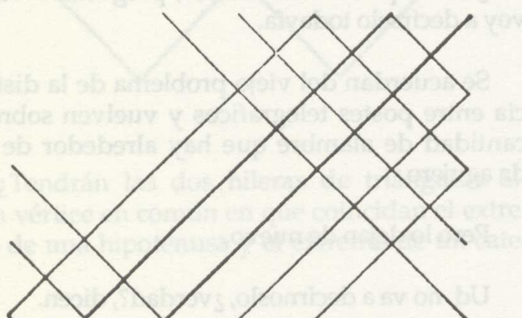


Fig. 4

Desgraciadamente la persona que está en el otro extremo de la cinta métrica cree que debería haber alcanzado la esquina y mueve su extremo de la cinta sobre el alambre siguiente. Llevan a cabo la medida desde el principio de un alambre hasta el final del siguiente, 118, 106, 96, 84, 73, 62, 52, 40, 29 - ¡por fin se dan cuenta de que sus alambre se cruzan!

Comprueban de nuevo ... 57, 68, 79, 90, 102, 112, 124, - encuentran que ahora el alambre más largo mide 142 cm. Observan que este alambre no es una diagonal, pero no están nada seguras sobre qué hacer con él. De cualquier manera deciden seguir, y vuelven a seguir sus pasos hasta la esquina superior izquierda: 136, 124, 112, 101, 90, 79, 68, 57, 34, 23, 12.

Ahora tenemos que hacerlo en el otro sentido.

¿Podemos duplicar lo que hemos medido? preguntan. Yo confieso mi ignorancia.

Comprobemos y veamos qué sale. Comprueban unos cuantos y deciden de lo que han obtenido que efectivamente es correcto duplicar.

Hacen un montón de cálculos.

2340 metros, me dicen. ¿Es correcto?

Se quedan muy sorprendidas cuando les digo que no lo sé.

Lunes por la tarde ... alguien en la parte de atrás coloca clavitos en un geoplano ... tres maestros están sentados alrededor de un gran tablero en que se puedan colocar clavijas, haciendo garabatos con una mezcolanza de clavijas de colores brillantes, mientras que se asoma la cabeza de un junior y mira.

Uno de ellos ha hecho un cuadrado

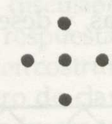


Fig. 5

Pero, ¿lo es? Parece un cuadrado, pero hay cinco clavijas, y cinco no es un cuadrado perfecto.

¿Se pueden hacer cuadrados mayores?

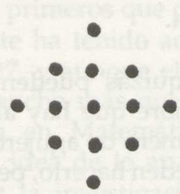


Fig. 6

¿Cuántas clavijas hemos añadido?

Empiezan a contar, pero yo pongo mi mano sobre las clavijas. ¡Oh, Dios mio! Cierran los ojos y siguen contando. Pero enseguida dejan de contar y empiezan a calcular. Tres por tres - nueve - no. Cuatro lotes de tres - doce - no.

Quito la mano. Por supuesto que son ocho, pero ¿por qué? Cuatro lotes de tres, quitemos las cuatro esquinas. Cuatro lotes de dos. Cuatro más cuatro más dos más dos.

¿Cuántas clavijas tendremos que añadir para hacer el siguiente cuadrado?

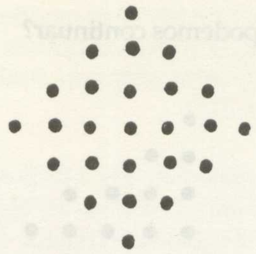


Fig 7

Nuevamente nos encontramos con las mismas dificultades, pero ahora vamos más deprisa.

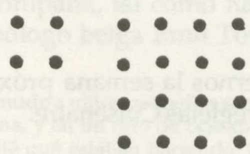
Volvemos atrás y colocamos las clavijas de una en una; construimos la tabla siguiente

$$1 = 1$$
$$5 = 1 + 4$$
$$13 = 1 + 4 + 8$$
$$25 = 1 + 4 + 8 + 12$$

Fig. 8

El paso siguiente es más fácil; ya tenemos alguna idea sobre ello. Sin embargo nos sorprende el "uno" del centro, y no entendemos del todo por qué los demás números van de cuatro en cuatro.

Los cuadrados ordinarios son más sencillos



$$4 = 4$$
$$16 = 4 + 12$$
$$36 = 4 + 12 + 20$$
$$64 = 4 + 12 + 20 + 28$$

Fig. 9

Entonces ¿por que no aumentan aquellos en ocho cada vez en lugar de hacerlo en cuatro?

Sin embargo hemos observado los distintos colores del primer lote de cuadrados, y nos hemos dado cuenta de más cosas:

$$5 = 4 + 1$$
$$13 = 9 + 4$$
$$25 = 16 + 9$$
$$41 = 25 + 16$$

Fig. 10

Mientras tanto ha aparecido otro dibujo en el tablero

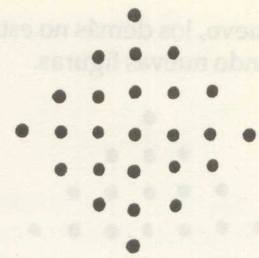


Fig. 11

Hablemos de triángulos y de números triangulares. Un número triangular está formado a partir de 1 +2 + 3 + 4... Por tanto esta pauta nos dice que 25 = (4 + 3 + 2 + 1) + 2 (3 + 2 + 1) + (2 + 1) y el cuadrado siguiente en tamaño será

41= (5 + 4 + 3 + 2 + 1) + 2 (4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) y así sucesivamente.

Mientras obteníamos estos resultados, alguien ha encontrado que dos números triangulares consecutivos suman uno de los números cuadrados ordinarios

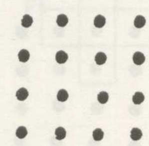


Fig. 12

y cuando estamos discutiendo sobre esto ha aparecido en el tablero el dibujo siguiente:

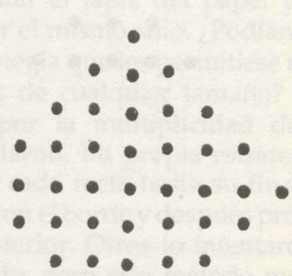


Fig. 13

Discutimos sobre cómo calcular el número de clavijas de la "cruz", y reconocemos cuatro números triángulares. Formamos cuadrados cada vez más pequeños quitando primero cuatro clavijas de la cruz y doce de las demás, después cuatro de la cruz y ocho de las demás, después cuatro de la cruz cuatro de las demás. Hablamos sobre esto y escribimos.

$$41 = (4 \times 4) + 1 + 4(3 + 2 + 1)$$
$$25 = (4 \times 3) + 1 + 4(2 + 1)$$
$$13 = (4 \times 2) + 1 + 4(1)$$
$$5 = (4 \times 1) + 1 + 0$$

Fig. 14

Pero, de nuevo, los demás no están escuchando sino formando nuevas figuras.

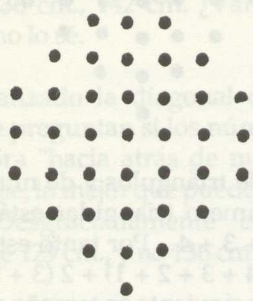


Fig. 15

La cruz se ha contraído, los cuatro triángulos se han cerrado y

$$41 = 4(4+3+2+1)+1$$
$$25 = 4(3+2+1)+1$$
etc.

Fig. 16

¿Se pueden hacer los cuadrados ordinarios a partir de cuatro triángulos?

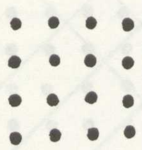


Fig. 17

¡Hum! Hagamos uno mayor

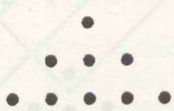


Fig. 18

Bien, ¿cómo podemos continuar?

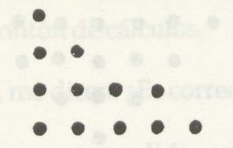


Fig. 19

Pero el cuadrado siguiente tiene cinco clavijas en su borde ... y hay cuatro en la base del triángulo.

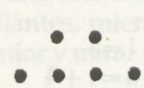


Fig. 20

¡Oh!

¿Qué pasó con nuestros números triángulares?

A continuación los clasificamos, y de pronto nos damos cuenta de que son las nueve y hemos estado jugando con los cuadrados durante hora y media.

Venga a vernos la semana próxima y lo haremos con las regletas Cuisenaire.

Dibujos de redes africanas

CLAUDIA ZASLAVSKY
Woodlands High School, Hartsdale, N. Y.

Leí el artículo de Wendy G. Furey sobre Edredones (MT No. 70) cuando estaba probando una unidad sobre redes en varias clases de niños de once años. Excepto por lo que se refiere a que el clima del Zaire generalmente no requiere el uso de edredones, el contenido del artículo casi coincidía con varias secciones de mi unidad, las que tratan de los dibujos que los niños africanos hacen sobre la arena. Estos dibujos derivan de los diseños de los tejidos que hacen los Bakuba (Bushongo), creadores de unos terciopelos de rafia y trajes bordados justamente famosos, así como de objetos de madera y metal bellamente tallados y decorados.

Expongo aquí uno de esos dibujos y la historia que lo acompaña, tal como ha sido contada por el antropólogo belga Emil Torday (pp. 213-14) (1).

"Vimos a menudo a niños pequeños sentados en círculo y jugando con arena, y en un rato de ocio me dirigí a ellos un día y les pregunté qué estaban haciendo. Como algunos de mis amigos más íntimos estaban entre ellos, me invitaron a sentarme , y uno, Minge Bengala, se quitó su taparrabo y me lo ofreció para que hiciera de asiento. Esto mejoraba la acción de Sir Walter Raleigh, ya que mi galante joven no estaba provisto de ningún otro vestido. Los niños estaban dibujando y me pidieron en seguida que realizase algunos trabajos imposibles; hubo un gran regocijo cuado resultó que el hombre blanco era incapaz de hacerlos. ¡Dibujar la figura siguiente sin levantar el dedo!"

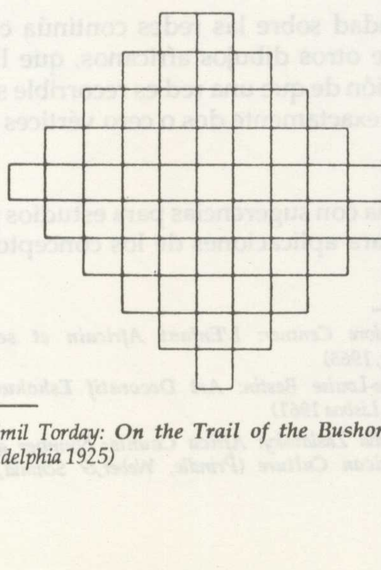


Fig. 1

Un mínimo conocimiento de la teoría de redes revela que la tarea no es imposible. Yo dividí esta tarea en varias más sencillas para los niños americanos en una clase introduciendo las redes más prácticas siguientes

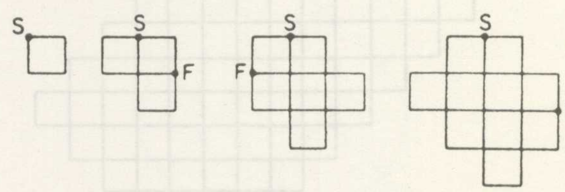


Fig. 2

Señalé el punto de partida y el punto final, los dos vértices (nudos) de orden impar. Pedí a los niños que los dibujasen en papel cuadriculado sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio. ¿Podían ellos diseñar una estrategia que les permitiese recorrer redes análogas de cualquier tamaño? Me quedé asombrada por la multiplicidad de métodos que desarrollaron. Mi propia estrategia consistía en seguir cada recta hasta su final. Algunos niños dibujaron el borde y después procedieron a rellenar el interior. Otros lo intentaron cuadrado a cuadrado, pero este método requiere una gran habilidad para evitar los puntos muertos. Por fin pudieron dibujar el diseño original. Unos cuantos niños fueron más lejos y dibujaron redes que cubrían toda la página e incluso se salían de ella.

Por supuesto, estas redes, diseñadas para hacer ejercicios, están pidiendo un análisis de sus pautas de crecimiento. ¿Qué es lo que se ve en ellas? La primera tiene un pequeño cuadrado; la segunda tiene tres cuadrados; la tercera tiene seis; la cuarta diez; ... una forma distinta de obtener nuestros excelentes números triangulares. Al contar el número de cuadraditos que hay en cada fila (o columna) obtendremos, sin duda, los números naturales, aunque no en su orden.

(1) *Emil Torday: On the Trail of the Bushongo (Lippincott, Philadelphia 1925)*

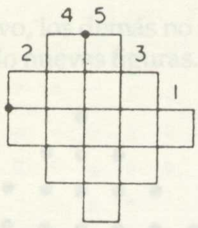


Fig. 3

Los números impares consecutivos están a un lado, y los pares al otro.

Torday esbozó otro de los dibujos de los niños Bakuba.

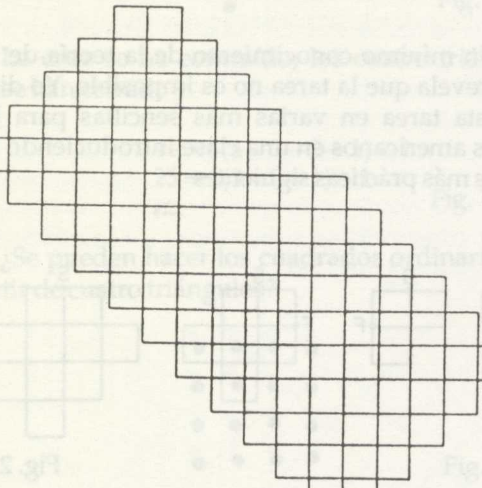


Fig. 4

Los estudiantes que hayan completado su análisis del primer dibujo pueden utilizar un procedimiento análogo para el segundo, y quizás inventar sus propias redes. Pueden colorear los cuadrados y hacer así interesantes dibujos con la red. Se puede construir una red muy decorativa pegando una tira de hilo de color a un tablero de roble, resaltando así el concepto de "recorribilidad".

El pueblo Chokwe, que vive en regiones que ocupan parte de Zaire, Angola y Zambia, tiene una larga tradición, que ahora está desapareciendo, de dibujar redes para ilustrar historias de sus antepasados, de animales, o de la vida diaria. Alguna historias tienen moraleja, otras son acertijos. ¿Puede adivinar ud. que objeto se ilustra por medio de esta red de recorrido simple?

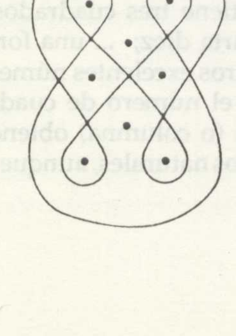


Fig. 5

Le damos una pista: se puede usar para enviar mensajes, y a los danzarines les gusta mucho. (La respuesta está al final del artículo. Centner (2), p. 218)

Las tradiciones de los Chokwe sobre el comienzo del mundo se ilustran por medio de la elaborada red siguiente (Bastin (3), p. 39, traducido en Zaslavsky (4), pp. 108-109)

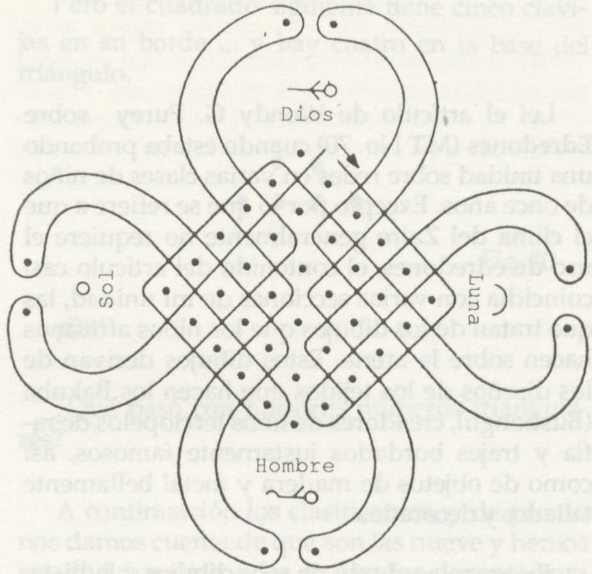


Fig. 6

Tanto el punto de partida como el punto final están en el cuadrante "Dios". Los niños experimentan realmente la sensación de haber logrado un éxito importante cuando consiguen dibujarla de una tirada.

Dibujarla en otra hoja de papel requiere más maña. Es mejor empezar dibujando el retículo de seis por seis puntos en una hoja de papel cuadriculado, igual que hacían los ancianos Chokwe en la arena.

Mi unidad sobre las redes continúa con un análisis de otros dibujos africanos, que lleva a la conclusión de que una red es recorrible si y sólo si tiene exactamente dos o cero vértices impares.

Termina con sugerencias para estudios posteriores y para aplicaciones de los conceptos ma-

---

(2) Theodore Centner: L'Enfant Africain et ses Jeux, (CEPSI, Zaire, 1963)

(3) Marie-Louise Bastin: Art Decoratif Eshokwe (Museu do Dondo, Lisboa 1961)

(4) Claudia Zaslavsky: Africa Counts: Number and Pattern in African Culture (Prindle, Weber,& Schmid, Boston 1973)

nejados en las redes a nuestra propia cultura: usar un mapa para planear un viaje, diagramas eléctricos, circuitos impresos, etc.

La teoría de redes era una materia completamente nueva para la mayoría de los niños con los que trabajé, y estaban encantados con ella. Algunos de los estudiantes pensaban que formaba parte del curriculum escolar en Africa, de donde salió el nombre de "matemáticas africanas". Incluso estos estudiantes dijeron que preferían asistir a las escuelas africanas en lugar de a las americanas. Otros consideraron que las redes eran una buena diversión como entretenimiento pero que no merecía la pena incluirlas en su estereotipada versión de lo que son las matemáticas "básicas". Sin embargo lo que no se cuestionó nunca fue el interés que tenía para ellos. Al pensar en mi etapa escolar recuerdo haber pasado muchas horas dibujando esto.

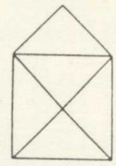


Fig. 7

con un solo trazo de lápiz. ¡Qué poco pensaba entonces en que estaba haciendo matemáticas!

Estamos en los Estados Unidos muy agradecidos a los británicos por sus numerosas innovaciones en la enseñanza de las matemáticas; entre ellas yo colocaría en los primeros lugares el enfoque "hacer matemáticas con todo". Todos los pueblos del mundo han desarrollado matemáticas hasta donde requerían sus sociedades. Nuestros niños perderían mucho si no pudiésemos extender el concepto "hacer matemáticas con todo"al estudio de otras culturas.

Respuesta al acertijo: *Un tambor con dos cabezas.*

Los números impares consecutivos están a un lado y los pares al otro.

cho. (La respuesta ... Centner (2), p. 218)

Fig. 4

Los estudiantes que hayan completado su análisis del primer dibujo pueden utilizar un procedimiento análogo para el segundo, y quizás inventar sus propias redes. Pueden colorear los cuadrados y hacer así interesantes dibujos con la red. Se puede construir una red muy decorativa pegando una tira de hilo de color a un tablero de roble, resaltando así el concepto de "recorribilidad".

El pueblo Chokwe, que vive en regiones que ocupan parte de Zaire, Angola y Zambia, tiene una larga tradición, que ahora está desapareciendo, de dibujar redes para ilustrar historias de sus antepasados, de animales, o de la vida diaria. Alguna historias tienen moraleja, otras son acertijos. ¿Puede adivinar ud. qué objeto se ilustra por medio de esta red de recorrido simple?

Fig. 5

Fig. 6

Tanto el punto de partida como el punto final están en el cuadrante "Dios". Los niños experimentan realmente la sensación de haber logrado un éxito importante cuando consiguen dibujarla de una tirada.

Dibujarla en otra hoja de papel requiere más maña. Es mejor empezar dibujando el retículo de seis por seis puntos en una hoja de papel cuadriculado, igual que hacían los ancianos Chokwe en la arena.

Mi unidad sobre las redes continúa con un análisis de otros dibujos africanos, que lleva a la conclusión de que una red es recorrible si y sólo si tiene exactamente dos o cero vértices impares.

Termina con sugerencias para estudios posteriores y para aplicaciones de los conceptos ma-

(2) Théodore Centner: *L'Enfant Africain et ses Jeux* (CEPSI, Zaire, 1963)

(3) Marie-Louise Bastin: *Art Décoratif Tshokwe* (Museu do Dondo, Lisboa 1961)

(4) Claudia Zaslavsky: *Africa Counts: Number and Pattern in African Culture* (Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1973)

Edredones

WENDY G. FUREY

Este verano decidí recoser el acolchado de nuestros sacos de dormir, que estaban realmente deteriorados. Al observar el edredrón no me sentí muy segura de que se pudiera completar el cosido en un lazo continuo, de manera que empecé en un extremo y seguí el viejo cosido hasta que, después de muchas vueltas y revueltas, volví al punto de partida. Después de realizar una concienzuda investigación llegué a la conclusión de que había cubierto todo el cosido, así como que el punto de partida podría haber sido uno cualquiera; esto es, que el cosido era de recorrido simple.

Esto me hizo pensar sobre si cualquier dibujo de un edredon sería de recorrido simple o si los fabricantes habían elegido éste porque lo era. Ante todo debía elegir una notación que distinguiera los distintos dibujos; lo hice contando el número de "bultos" que había en la parte superior y el número que había al contar en el lateral, lo que dio que mi edredón era de 5 por 6. Como se puede ver experimentando, este edredón se puede coser de un tirón.

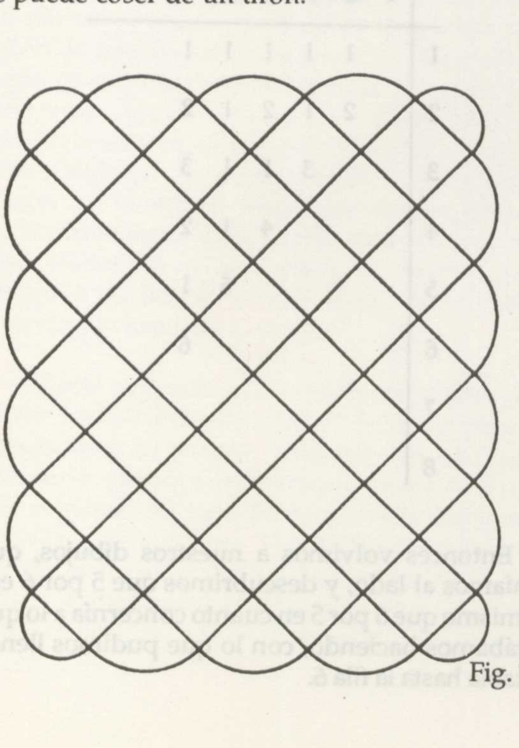
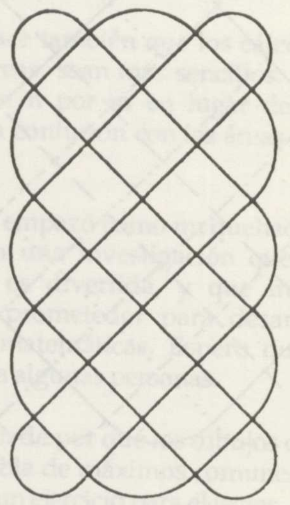


Fig. 1

Realicé entonces varios dibujos de edredones desde 1 por 1 hasta 8 por 8 y traté de dibujarlos de una tirada. Esto produjo varios resultados interesantes.



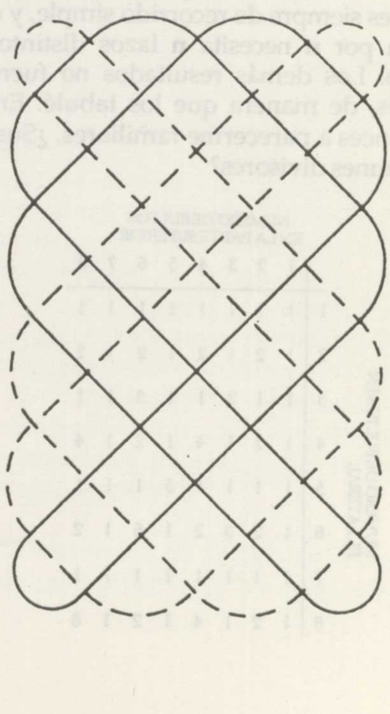


Fig. 2

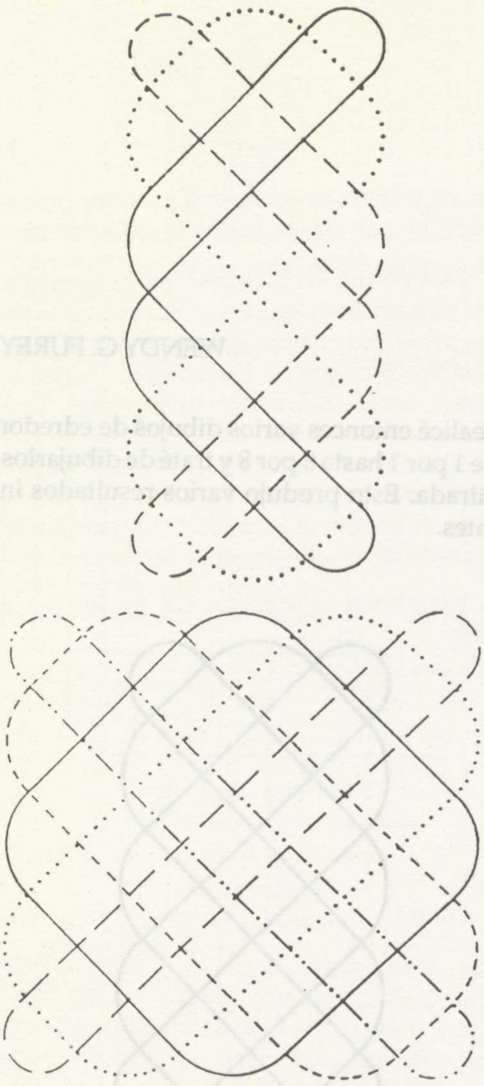


Fig. 3

El más evidente fue que cualquier dibujo **n** por **n+1** es siempre de recorrido simple, y que un dibujo **n** por **n** necesita **n** lazos distintos para dibujarlo. Los demás resultados no fueron tan evidentes, de manera que los tabulé. Empezaron entonces a parecerme familiares. ¿Sus máximos comunes divisores?

NUMERO DE BULTOS EN LA PARTE SUPERIOR

NUMERO DE BULTOS EN EL LATERAL

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8

En este momento llegó mi marido y estropeó toda la brillante teoría realizando un dibujo 4 por 4 en una sola curva . Una vez que le di en la cabeza con un **Mathematics Teaching** que tenía a mano, decidí que había llegado el momento de utilizar el recurso de los matemáticos de inventar una definición que me sacara del apuro. Así pues inventé una condición y con ello dejé a Simón completamente descolgado. Esta condición establece que una vez que se ha empezado a dibujar en una dirección, se debe uno mantener en ella hasta que ha alcanzado el borde antes de cambiar de dirección.

Poco después tuve la ocasión de ensayar este descubrimiento con un pequeño grupo de alumnos de 10-11 años en una sesión de la **ATM London Branch**. Una vez que les hube enseñado mi saco de dormir y explicado el origen del problema, les di hojas de papel por duplicado con dibujos de edredones desde uno por dos hasta 6 por 6, y además numerosos rotuladores. A continuación les pedí que encontrasen todo lo que pudiesen sobre los dibujos.

Descubrí rápidamente que mi condición no estaba expresada con suficiente claridad; y para mantenerlos en el buen camino la corregí "en cualquier cruce se debe ir recto, sin torcer ni a derecha ni a izquierda ". Dicho esto, la mayor parte de ellos terminó con bastante rapidez y en seguida llenaron la tabla siguiente hasta donde pudieron.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1		
2		2	1	2	1	2		
3			3	1	1	3		
4				4	1	2		
5					5	1		
6						6		
7								
8								

Entonces volvimos a nuestros dibujos, que teníamos al lado, y descubrimos que 5 por 6 era lo mismo que 6 por 5 en cuanto concernía a lo que estábamos haciendo, con lo que pudimos llenar la tabla hasta la fila 6.

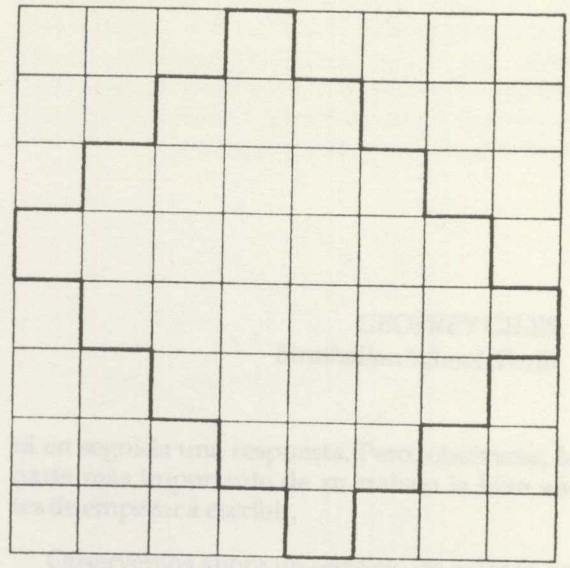
En lugar de realizar el esfuerzo de dibujar edredones con 7 y 8 bultos, consideramos el número de dibujos de cada fila y tratamos de continuar las filas y columnas 1, 2, 3, 4, 5, y 7 correctamente. (Aquí debo hacer la advertencia de que no se deben hacer demasiadas hipótesis sobre pautas aparentemente continuas sin hacer comprobaciones).

En este momento la tabla estaba casi completa; y observamos a continuación la diagonal principal. Mencioné su simetría, pero como esto era nuevo para los niños, no seguí insistiendo sobre ello.

Como la clase duraba una hora, y aún teníamos 15 minutos por delante, les pregunté sobre los divisores, y comprobé que la mayor parte del grupo sabía lo que eran. Así pues construimos otra tabla que mostrase los divisores comunes de 1 a 8, y finalmente descubrimos que los mayores de esos divisores comunes nos daban la misma tabla que nuestros dibujos de edredones.

Cuando llegamos a esto era hora de terminar la clase; sin embargo esta investigación se podría extender a cuestiones tales como: "¿Cuánto hilo se necesita para hacer cada edredón?", "¿Qué superficie de edredón está contenida por la costura exterior?" "¿Cuál es la razón entre la longitud del hilo y la superficie en cada caso?". Se podría responder a la segunda cuestión, en una clase que conociese el número π, con bastante precisión utilizando semicírculos, cuadrantes y cuadrados en el dibujo, y quizá se podría también encontrar una fórmula general para la superficie de un edredón x por y formado por cuadrados de lado a.

Los dibujos se pueden aproximar en papel cuadriculado para evitar repeticiones.

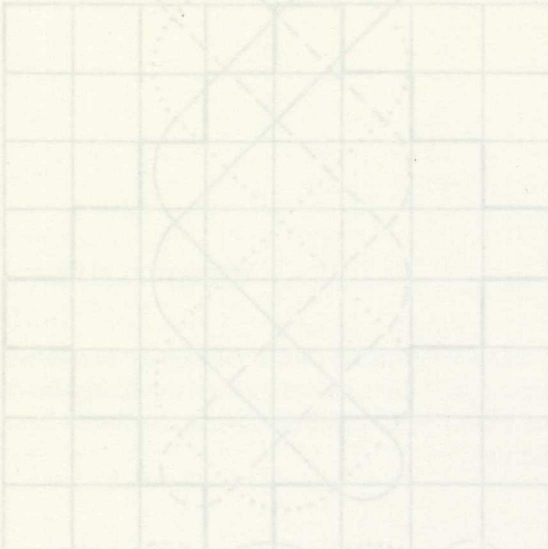


Esto hace también que los cálculos de longitudes y áreas sean más sencillos. (He utilizado la notación n por m en lugar de n x m para evitar toda confusión con las áreas de los rectángulos).

Lo que empezó como un quehacer doméstico floreció en una investigación que en su nivel más bajo es divertida, y que me parece un comienzo prometedor para desarrollar diversas ideas matemáticas. Espero que así sea, al menos para algunas personas.

La razón de por qué los dibujos de edredones dan una tabla de máximos comunes divisores la dejó como un ejercicio para el lector.

Los dibujos se pueden aproximar en papel cuadriculado para evitar repeticiones.



Esto hace también que los cálculos de longitudes y áreas, sean más sencillos. (He utilizado la notación n por m en lugar de n x m para evitar toda confusión con las áreas de los rectángulos).

Lo que empezó como un quehacer doméstico floreció en una investigación que en su nivel más bajo es divertida, y que me parece un comienzo prometedor para desarrollar diversas ideas matemáticas. Espero que así sea, al menos para algunas personas.

La razón de por qué los dibujos de edredones dan una tabla de máximos comunes divisores la dejo como un ejercicio para el lector.

En lugar de realizar el esfuerzo de dibujar edredones con 7 y 8 bultos, consideramos el número de dibujos de cada fila y tratamos de continuar las filas y columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 correctamente. (Aquí debo hacer la advertencia de que no se deben hacer demasiadas hipótesis sobre pautas aparentemente continuas sin hacer comprobaciones).

En este momento la tabla estaba casi completa, y observamos a continuación la diagonal principal. Mencioné su simetría, pero como esto era nuevo para los niños, no seguí insistiendo sobre ello.

Como la clase duraba una hora, y aún teníamos 15 minutos por delante, les pregunté sobre los divisores, y comprobé que la mayor parte del grupo sabía lo que eran. Así pues construimos otra tabla que mostrase los divisores comunes de 1 a 8, y finalmente descubrimos que los mayores de esos divisores comunes nos daban la misma tabla que nuestros dibujos de edredones.

Cuando llegamos a esto era hora de terminar la clase; sin embargo esta investigación se podría extender a cuestiones tales como: "¿Cuánto hilo se necesita para hacer cada edredón?, ¿Qué superficie de edredón está contenida por la costura exterior?, ¿Cuál es la razón entre la longitud del hilo y la superficie en cada caso?". Se podría responder a la segunda cuestión, en una clase que conociese el número π, con bastante precisión utilizando semicírculos, cuadrantes y cuadrados en el dibujo, y quizá se podría también encontrar una fórmula general para la superficie de un edredón x por y formado por cuadrados de lado a.

Mosaicos: Una aventura en matemáticas

GEOFREY GILES
Strathallan School, Perth

El mayor obstáculo que puede encontrar un alumno en el estudio de las matemáticas es que crea que son principalmente lógicas. Esta es una afirmación muy drástica pero son necesarias las afirmaciones drásticas.

¿Qué es lo que distingue a un matemático? Sin duda su perspicacia, su comprensión intuitiva de los aspectos matemáticos de las situaciones, y su habilidad en elegir y utilizar técnicas apropiadas. La lógica solamente concierne al uso de estas técnicas.

Se suele juzgar a un cirujano por su dominio de la técnica y por su destreza en el manejo del instrumental. Sin embargo antes de empezar una operacion debe saber exactamente lo que está tratando de hacer, y debe decidir cómo lo va a hacer. El mismo modelo se puede aplicar evidentemente a cualquier tarea que se pueda imaginar, - construir un aeroplano, cuidar gallinas o dar una clase. Se suele tener la enorma tentación de ignorar esas dos premisas esenciales, ya que en ellas se trata solamente de pensar. Por supuesto que en trabajos repetitivos están relegadas al subconsciente - solemos decir que tenemos "experiencia" y que sabemos lo que hay que hacer sin pensar en ello. Pero sin la motivación y la dirección proporcionadas por las dos primeras etapas, la tercera etapa de acción puede llegar a ser tan sin sentido como un ordenador sin ningún usuario.

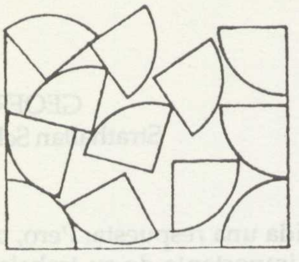
Dadle un problema a un matemático. ¿Qué hace con él? **Piensa** sobre él. Si es necesario lo traducirá a su propio lenguaje –y esto puede causarle grandes molestias–. Después tratará de construir un modelo e intentará relacionarlo con lo que ya conoce. De pronto pega un salto, lanza una exclamación, agarra un lápiz y se pone a garabatear frenéticamente. Si su intuición es correcta y sabe manejarse bien, producirá en seguida una respuesta. Pero, obsérvese, la parte más importante de su trabajo la hizo antes de empezar a escribir.

Observemos ahora un ejercicio de examen en matemáticas. No tengamos en cuenta los cálculos. ¿Qué queda? Posiblemente un par de problemas absurdos, estereotipados. ¿Es esta una preparación razonable para la vida real? ¿La capacidad de aprobar tales exámenes es indicio de alguna capacidad para utilizar las matemáticas en los problemas que plantea la vida real? ¿Qué posibilidad tienen los que realizan el examen de desarrollar su intuición matemática? Lo que enseñamos debería ser una mezcla de intución y razón en cantidades adecuadas a la edad de los que reciben la enseñanza. En todas las matemáticas que se enseñan en la escuela debería ser un propósito primordial resaltar las ayudas que pueda prestar la razón a la intuición.

El problema del cuadrante

El siguiente problema, que surgió de una forma completamente natural e inesperada, me hizo empezar una investigación que casi se puede describir como una aventura. Algunos muchachos estaban haciendo lámparas de pared. Estas lámparas debían tener formas cónicas y hacerse a partir de cuartos de círculo de pergamino. ¿Qué cantidad de pergamino tenían que encargar? Una vez conocidos los tamaños y los números, esto era una cuestión sencilla. Sin embargo, esto esconde una cuestión mucho más interesante: si un industrial tiene que suministrar un gran número de cuadrantes sacados todos de hojas de pergamino, ¿cuánto puede reducir el pergamino que desperdicia?

Evidentemente, el tamaño relativo de las hojas de pergamino y de los cuadrantes requeridos es muy importante. Si los cuadrantes fuesen más grandes que las hojas, el pergamino no utilizado sería el 100%. Por otra parte cuanto más grandes sean las hojas, tanto menor serán los efectos que produzcan los bordes. (Esto,¿se aprecia por medio de la razón o de la intuición?) Obviemos esta dificultad suponiendo una hoja continua de pergamino

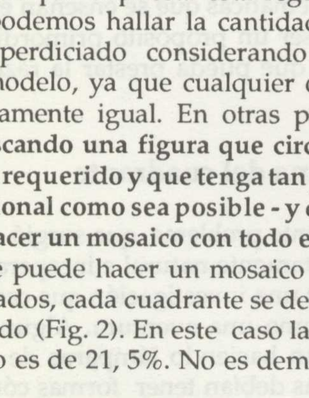


Colocación al azar

Fig. 1

Ahora tenemos que considerar cómo debemos cortar los cuadrantes si queremos minimizar el pergamino no utilizado. Podemos trabajar empíricamente, colocándolos uno a uno como se colocan los comestibles en una caja (Fig. 1). Pero parece razonable suponer que el mejor método consiste en construir un modelo regular. (Al menos así me lo parece a mí. Sin embargo no me gustaría ciertamente tener que **demostrar** que esto es así)

Si damos por supuesta esta regularidad del modelo, podemos hallar la cantidad de pergamino desperdiciado considerando una "unidad"del modelo, ya que cualquier otra unidad será exactamente igual. En otras palabras: **Estamos buscando una figura que circunscriba el cuadrante requerido y que tenga tan poca superficie adicional como sea posible - y que además permita hacer un mosaico con todo el plano.** Por ejemplo se puede hacer un mosaico en el plano con cuadrados, cada cuadrante se debe cortar en un cuadrado (Fig. 2). En este caso la pérdida de pergamino es de 21, 5%. No es demasiado buena.



Colocación ordenada

Fig. 2

Ahora bien, esta nueva manera de enunciar el problema ya es un paso más. Lo sabemos por la cantidad de ideas y posibilidades que nos asaltan. Hay muchas maneras de proceder; es difícil saber cual elegir. Echemos un vistazo a un par de ellas. (Si quiere ud. divertirse haciéndolas por sí mismo, no siga leyendo - ¡y no mire los diagramas!).

Camino 1

Tratemos de colocar metódicamente los cuadrantes juntos. Sabiendo que cuatro cuadrantes pueden formar un círculo, podemos tratar de situar círculos (Figs. 3,4) formando así el mosaico básico. Esto es lo más que podemos hacer con círculos. ¡Un momento! La figura 3 utiliza el mismo mosaico que la figura 2 y utilizando de nuevo el mismo podemos disponer los cuadrantes como en la figura 5, en la que se puede reducir evidentemente la pérdida de pergamino "estrujándola"! Esto plantea un bello problema de un tipo más tradicional: ¿Qué porcentaje hay ahora de pergamino desperdiciado? (Sin embargo todo esto se refiere a pensar y no a manipular)

¿Qué se puede decir sobre otras maneras de colocar los cuadrantes metódicamente? Ahora ya no es tan fácil visualizar las posibles disposiciones. La mejor manera de proceder sería recortar algunos de ellos y ver qué pasa ...(**Recuerde: debe ud. recoger unos cuantos posavasos la próxima vez que vaya a un bar).**

Camino 2

¿De qué mosaicos disponemos? ¿Podemos adaptarlos de forma que convengan a nuestro problema del cuadrante? Veamos algunos de ellos: cuadrados (los acabamos de considerar); rectángulos (eche un vistazo a la figura 5); paralelogramos (¿Alguna idea sobre esto? ¡Yo no tengo ninguna!); triángulos (Figura 6 - se puede adaptar esta figura, tal como se verá adelante, de forma que proporcione una solución).

¿Y los cuadriláteros? Lo intentamos con muchas dudas. ¡Funciona! (Figura 7). Usémoslo. Pero, ¿cómo podemos circunscribir un cuadrilátero de área mínima alrededor de nuesto cuadrante? (Figura 8) ¿Es A, B o C? Después de pensar un poco nuestra intuición nos dice que debe ser una cometa formada por dos triángulos isósceles. (¿O bien llegamos a esta conclusión lógicamente? Mirándola algunos minutos nos damos cuenta de que es la cuarta parte de un octógono regular. ¡Interesante! Si nos volvemos a la figura 4 vemos que el cuadrilátero básico es la cuarta parte de un hexágono regular. ¡Más interesante aún!

La figura 9 muestra una parte del mosaico que obtenemos. ¿No podríamos reducir el pergamino desperdiciado apretándolo un poco más de manera que llevemos a los ángulos rectos a cortar las circunferencias?

¿Qué consideramos después de los rectángulos? ¿Pentágonos? No se pueden hacer mosaicos con pentágonos regulares. ¿Con qué pentágonos se podrían hacer? Esto es más difícil. Forma parte de un problema más general que debemos abordar ahora:

¿Con qué figuras se pueden formar mosaicos?

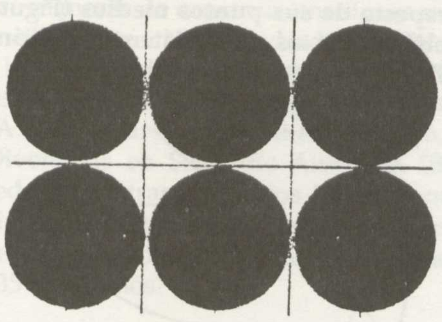


Fig. 3 Colocación de círculos en cuadrados

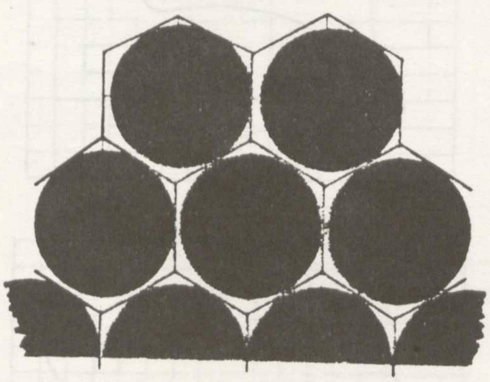


Fig. 4 Colocación triangular de círculos

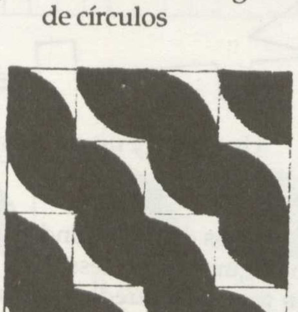


Fig. 5 Otra colocación de cuadrantes en cuadrados

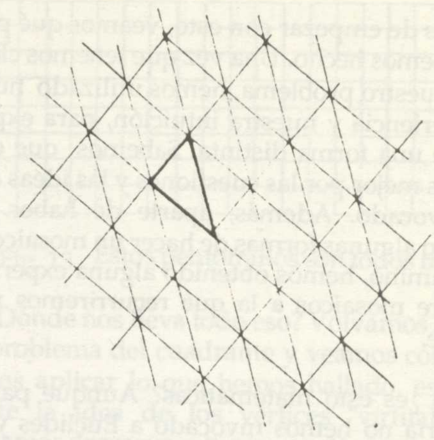


Fig. 6 Mosaico de base triangular

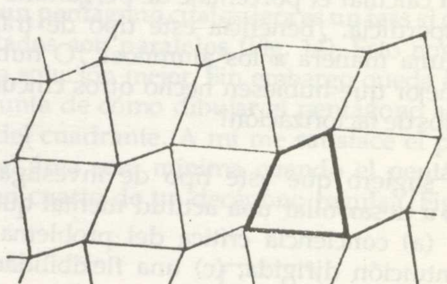
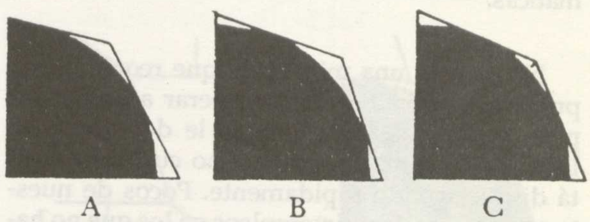


Fig. 7 Mosaico basado en cuadriláteros



A B C

Fig. 8 ¿Qué cuadrilátero tiene área mínima?

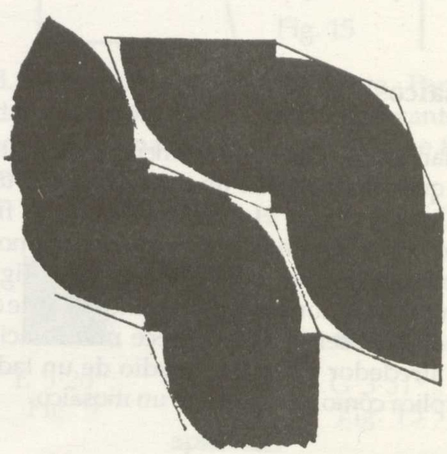


Fig. 9

Antes de empezar con esto, veamos qué progresos hemos hecho. Una vez que tenemos clarificado nuestro problema, hemos utilizado nuestra experiencia y nuestra intuición, para expresarlo de una forma distinta. Sabemos que esta forma es mejor por las cuestiones y las ideas que ha provocado. Además, aparte de haber encontrado algunas formas de hacer un mosaico en el pergamino, hemos obtenido alguna experiencia sobre mosaicos a la que recurriremos más adelante.

Pero ¿es esto matemáticas? Aunque parece geometría no hemos invocado a Euclides y no hemos utilizado las técnicas habituales - excepto para calcular el porcentaje de pergamino que se desperdicia. ¿Beneficia este tipo de trabajo de alguna manera a los alumnos? ¿O hubiera sido mejor que hubiesen hecho otros cincuenta ejemplos de factorización?

Yo sugiero que este tipo de investigación ayuda a desarrollar una actitud mental que incluye: (a) conciencia crítica del problema; (b) una intuición dirigida; (c) una flexibilidad de enfoque. ¿Qué mejor preparación podemos dar a los alumnos que han de enfrentarse con tantos problemas impredecibles en el último cuarto de este siglo? Esta actitud mental es incluso de mucha mayor importancia que las propias matemáticas.

No es sólo una minoría la que requiere esta preparación. Nadie puede esperar a que el rápido avance de la tecnología le deje de lado. La vieja demanda de trabajo no cualificado está disminuyendo rápidamente. Pocos de nuestros alumnos tendrán empleos en los que no haga falta pensar. La gran mayoría se encontrará inmersa en nuevas técnicas y nuevos desarrollos cualquiera que sea la carrera que escoja. Y habrá un premio para las mentes despejadas.

Mosaicos

Llamemos, por conveniencia, a cualquier figura que pueda formar un mosaico plano, un tess (*). Consideremos el problema de qué figuras son tesses observando cómo se forma un mosaico. Veamos uno de los cuadriláteros de la figura 7. ¿Cómo se relaciona con sus vecinos? Tarde o temprano, se observa que aparece una rotación de 180º alrededor del punto medio de un lado. Esto explica cómo se construye un mosaico.

(*) *N. del T. - Se mantiene la palabra inglesa tess, formada a partir de tessellation (mosaico)*

Esto mismo sucede en el mosaico triangular. Pero aquí nuestra experiencia y nuestra razón nos hacen ver más allá. Podemos considerar un triángulo como un cuadrilátero con un lado de longitud despreciable. Como una rotación alrededor del punto medio de uno de sus lados es equivalente a la rotación del triángulo alrededor de un vértice, vemos que la rotación de cualquier triángulo del mosaico de 180º alrededor del punto medio de cualquier lado o alrededor de cualquier vértice, da la posición de otro triángulo del mosaico. Por esto, el mosaico completo es simétrico alrededor de esos puntos.

Revisando con detenimiento estas ideas, nos damos cuenta de pronto de que podemos hacer un avance importante. Los lados del triángulo o del cuadrilátero no tienen por qué ser rectos para que sea un tess - **siempre que sean simétricos respecto de sus puntos medios** (Figura 10). Llamemos a estos cuadriláteros y triángulos modificados, trisides y cuadrisides.

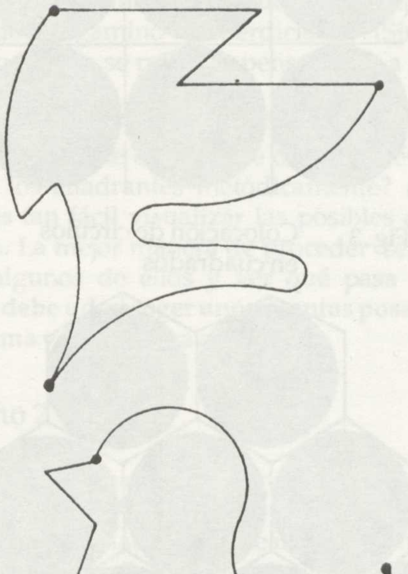


Fig. 10 Un triside y un cuadriside

Ahora podemos dar una condición suficiente para que una figura sea un tess. **Una figura cualquiera es un tess si se puede dividir su perímetro por medio de tres o cuatro "vértices" en lados de forma que cada uno de ellos sea simétrico respecto de su punto medio.** Esto nos abre una enorme cantidad de posibilidades. Para evitar el peligro de aturdirnos entre tanta proliferación, refugiémosnos en el papel cuadriculado. La Figura 11 nos muestra algunos cuadrisides inmediatos.

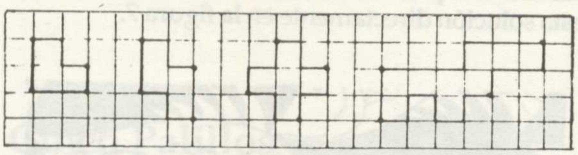


Fig. 11

Al tratar de dibujar un triside de esta forma, hacemos un descubrimiento interesante. Los vértices de un tess no tiene por qué estar en los bordes de su superficie (Fig. 12). Esto aumenta aún más la cantidad de figuras que se puede demostrar que son tesses. La Figura 13 nos muestra las doce maneras de construir una figura uniendo sencillamente cinco cuadrados. S. W. Golomb las ha llamado "pentominós" ("poliminós" es la generalización completa de dominó (NOTA: Ver Gardner: Mathematics Puzzles and Diversions en Scientific American (Bell)). Se puede demostrar que todos los pentominós son trisides. Y si encuentra sencillo el hacerlo, ¿Puede ud. comprobar que lo mismo es cierto para los 35 hexaminós?

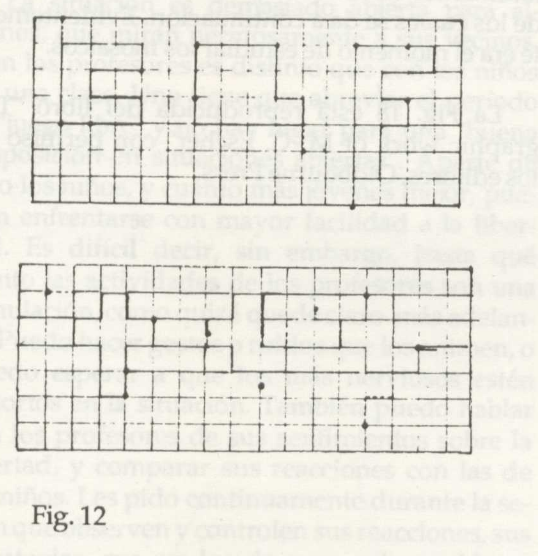


Fig. 12

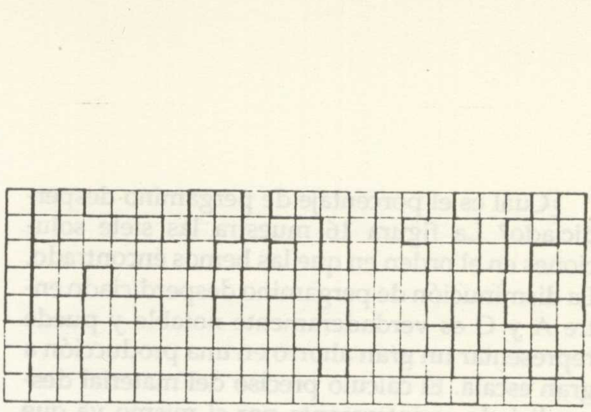


Fig. 13 Estos pentominós son todos trisides

¿Dónde nos lleva todo eso? Volvamos a nuestro problema del cuadrante y veamos cómo podemos aplicar lo que hemos hallado, especialmente la idea de los vértices "virtuales". Si pensamos de nuevo sobre los pentágonos, nos damos cuenta en seguida de que podemos afirmar que: **un pentágono cualquiera es un tess si dos de sus lados son paralelos** (Fig. 14). Esto nos lleva a una solución mejor. Sin embargo queda aún la pregunta de cómo dibujar el pentágono alrededor del cuadrante. A mí me satisface el pensar que el área será mínima cuando el pentágono sea un cuarto de un decágono regular (Fig. 15).

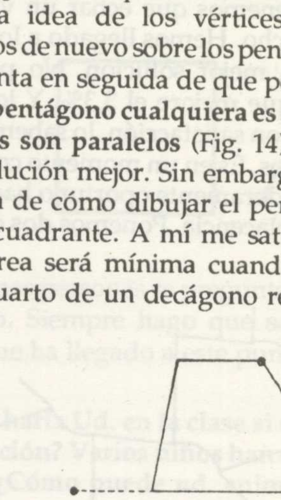


Fig. 14

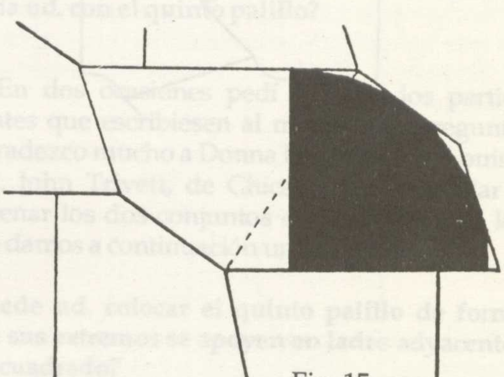
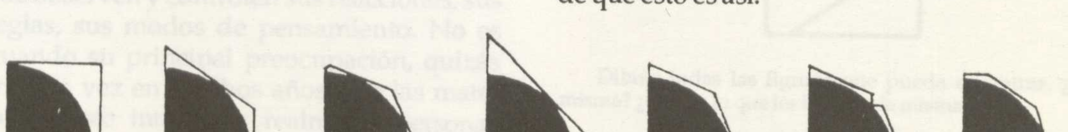


Fig. 15

Si Ud. quiere demostrarlo, adelante. Para mí una demostración formal sería irrelevante, ya que no añadiría nada a la convicción que tengo de que esto es así.



A 21·5% Figs. 2,3,5 | B 9·25% Fig. 4 | C 4·56% Fig. 5 aplastada | D 21·5% Fig. 6 | E 5·20% Fig. 9 | F 4·56% Fig. 9 aplastada | G 3·31% Fig. 15

Fig. 16

¿Cuál es el porcentaje de pergamino desperdiciado? La figura 16 muestra las siete soluciones en el orden en que las hemos encontrado. La disminución de pergamino desperdiciado entre A y G es verdaderamente notable y puede representar un gran ahorro en una producción a gran escala. El cálculo preciso del material desperdiciado es interesante por sí mismo ya que resalta la necesidad de buscar un camino para alcanzar la solución en lugar de la aplicación de una técnica.

Ahora sólo tenemos que echar un vistazo a lo que hemos hecho. Hemos llegado a lo que seguramente es la mejor solución. No podemos imaginar nada que mejore el 3,3%. Y lo que es más, pensamos con satisfacción, lo sabemos todo sobre los mosaicos. Es en un momento como este cuando es verdaderamente oportuno hacer vacilar nuestra complacencia. Ponemos dos de nuestros pentágonos finales lado contra lado (Fig. 15). Dibujamos distraídamente una diagonal ¡y nos damos cuenta de que lo que tenemos son, en realidad, dos cuadriláteros! –Si hubiéramos sabido lo que buscábamos hubiéramos visto esta solución directamente en la figura 7.

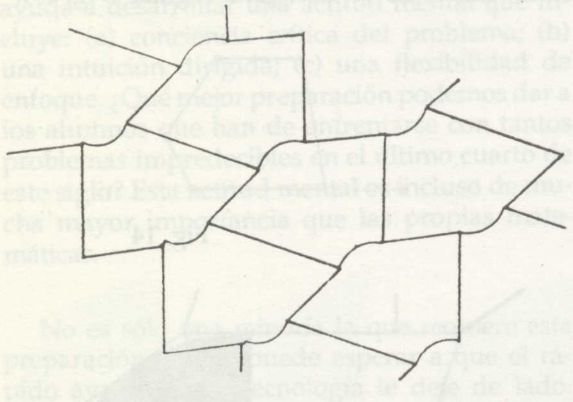


Fig. 17

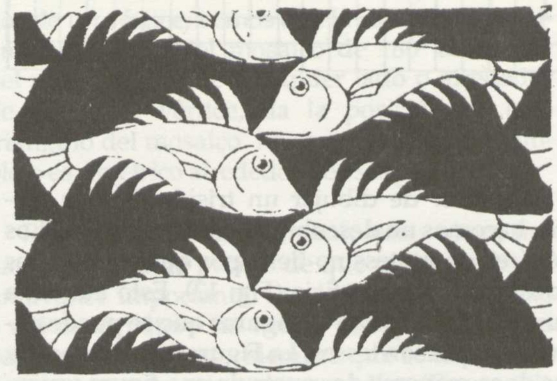


Fig. 18

Recibimos otra sorpresa desagradable al darnos cuenta, quizá estudiando la solución C, de que podemos dislocar nuestro mosaico básico formado por cuadriláteros y obtener otro tipo de mosaico. (Fig. 17)

Por último, cuando estaba terminando esta etapa recibí el **Mathematics Teaching** No. 21 en el que estaban incluidos algunos ejemplos fascinantes de los trabajos de M. C. Escher, uno de los cuales se da a continuación. Evidentemente era el momento de estudiar los mosaicos.

La Fig. 18 está reproducida del libro "The graphic work of M. C. Escher" con permiso de los editores, Oldbourne Press.

Cinco Palillos

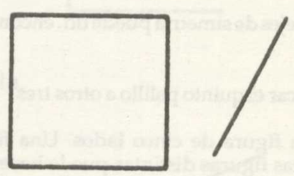
DAVID FIELKER

Lo que describimos aquí es un ejemplo de las sesiones realizadas con profesores de enseñanza primaria y secundaria de ambos lados del Atlántico, con estudiantes postgraduados de profesorado e incluso con un grupo de padres, en las que he tomado parte. El equipo utilizado (excepto en Chicago, en donde lo hicimos igual con pajitas de las usadas para beber) fue una caja de "palillos", piezas delgadas de madera de 6 pulgadas de largo que son virtualmente rectas. (El folleto de la ATM Sticks proporciona una selección de actividades que se pueden realizar con ellos).

Coja cinco palillos. Haga algo con ellos

La situación es demasiado abierta para algunos, que miran nerviosamente a sus vecinos. Con los profesores es distinto que con los niños en una clase. Uno tiene que abreviar el período de"juego libre" y no hay lugar para una "buena disposición en situaciones abiertas". Aparte de esto los niños, y cuanto más jóvenes mejor, pueden enfrentarse con mayor facilidad a la libertad. Es difícil decir, sin embargo, hasta qué punto las actividades de los profesores son una simulación, como quizá quede claro más adelante. Puedo hacer gestos o ruidos que los animen, o puedo esperar a que los más nerviosos estén absortos en la situación. También puedo hablar con los profesores de sus sentimientos sobre la libertad, y comparar sus reacciones con las de los niños. Les pido continuamente durante la sesión que observen y controlen sus reacciones, sus estrategias, sus modos de pensamiento. No es fácil cuando su principal preocupación, quizás por primera vez en muchos años, son las matemáticas; y este interés es realmente personal, muy por encima del interés secundario de salirse de sí mismo y observarse.

Hay una cierta tendencia bastante extendida a construir cuadrados con cuatro de los palillos.

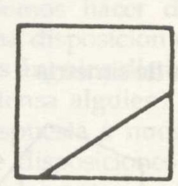


Algunas personas se preguntan qué hacer con el quinto. Siempre hago que se detenga cualquiera que ha llegado a este punto.

¿Qué haría Ud. en la clase si se encuentra en esa situación? Varios niños han construido cuadrados. ¿Cómo puede ud. animarles a que saquen más cuestiones matemáticas de esta situación? ¿Qué preguntas se les podría hacer? ¿Qué haría ud. con el quinto palillo?

En dos ocasiones pedí a todos los participantes que escribiesen al menos una pregunta. Agradezco mucho a Donna Logsdo de St. Louis y a E. John Trivett, de Chicago, por recopilar y ordenar los dos conjuntos de preguntas, de los que damos a continuación un resumen.

¿Puede ud. colocar el quinto palillo de forma que sus extremos se apoyen en lados adyacentes del cuadrado?



Dibuje todas las figuras que pueda encontrar. ¿Son la misma? ¿Qué es lo que les hace ser la misma?

El perímetro y el área parece que cambian. ¿Cómo? ¿Cuándo hay un máximo y un mínimo?

¿Cambia la suma de los dos lados más pequeños del triángulo? ¿Cómo cambia? Mueva el extremo inferior del quinto palillo desde una esquina del cuadrado a lo largo del lado en varias etapas. ¿Cómo afecta cada movimiento al área del triángulo?

Dibuje el quinto palillo en muchas posiciones distintas y superpuestas. ¿Qué figura ha producido el conjunto de rectas resultante?.

Señale un punto en el quinto palillo de modo que cada uno de sus extremos esté sobre uno de los lados del cuadrado y dibuje el lugar geométrico recorrido por el punto. ¿Qué forma tiene? ¿Qué formas obtendría com otros puntos del palillo?

¿Hay alguna relación entre las áreas del triángulo y del cuadrado?

¿Se mueven los puntos extremos del palillo siempre la misma distancia cuando el palillo gira?

Cuando el triángulo es isósceles, ¿qué fracción del cuadrado es?

¿Cuántos ejes de simetría puede ud. encontrar con el quinto palillo?

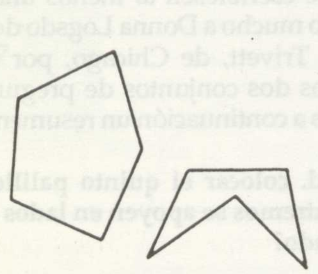
¿Puede tocar el quinto palillo a otros tres?

Haga una figura de cinco lados. Una figura de cuatro lados. ¿Cuántas figuras distintas puede hacer? ¿Cuántos pares simultáneos de figuras puede hacer?

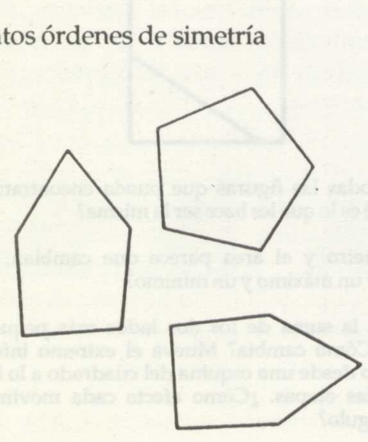
¿Dónde colocaría la quinta pajita para obtener 1/4 del cuadrado? ¿1/2 del cuadrado? ¿1/3 del cuadrado? ¿De cuántas maneras se puede hacer cada uno de ellos?

¿Es más fácil colocar la quinta pajita dentro o fuera del cuadrado?

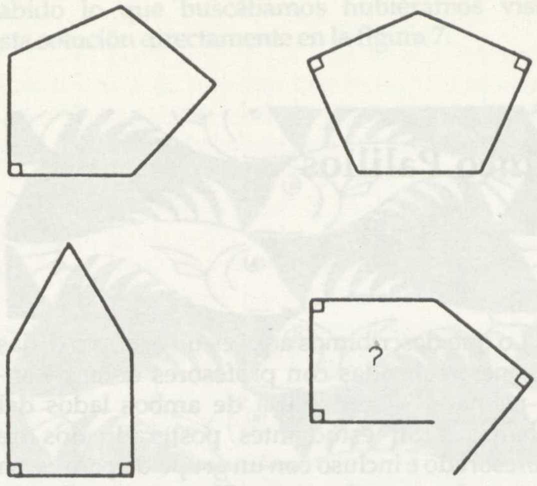
En Blackpool hubo un gran predominio de pentágonos regulares. Pregunté a cada uno de los participantes cuantos pentágonos podía construir. Los participantes adoptaron una sorprendente variedad de reglas. Muchos de ellos se limitaron a pentágonos equiláteros, haciendo que los palillos se tocasen en los extremos. Se aceptaron distintas clasificaciones: convexo o cóncavo



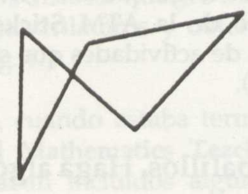
o distintos órdenes de simetría



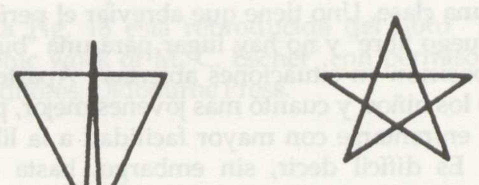
¿Qué cantidad de ángulos rectos se pueden obtener?



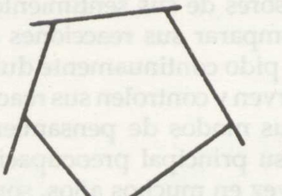
¿Se pueden cruzar los palillos?



¿Cuántos números distintos de cruces se pueden obtener?



Algunos permitieron que sus palillos asomasen más allá de los vértices.



¿Cuántas disposiciones distintas de los salientes son posibles?

En cualquier situación (cuadrados o pentágonos), indico que esto no es lo que quería hacer.

Algunos parecen incrédulos. Explico que tanto la ventaja como la desventaja de una situación abierta consisten en las posibilidades que se ofrecen. En una clase es útil si el profesor se da cuenta de las posibilidades, no de antemano, sino cuando surgen. De algún modo es más útil partir del punto de vista del niño y empezar con una situación que haya creado por si mismo. Cada vez más, como los profesores, crearán también ellos sus propios problemas. Pero esto es una sesión para profesores y somos capaces en el fondo de aceptar las implicaciones que tiene para la clase, y avanzar de la forma que he planeado.

Coja un solo palillo. ¿Qué puede hacer con él?

No mucho. Solamente una línea recta. Lo giran sobre la mesa. La idea de rotación está ahí, pero es difícil ver un sistema de referencia a menos que lleguemos hasta el borde de la mesa; ¿está permitido eso?

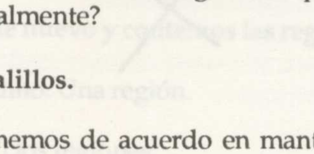
Alguien apoya el palillo en un extremo. Esto parece más interesante. Tenemos ahora una recta y un plano. Podemos reconocer cuando la recta es perpendicular al plano; hay un ángulo recto "todo alrededor". Cuando no es perpendicular, ¿dónde medimos el ángulo? ¿No es éste un concepto diferente de ángulo del que manejamos habitualmente?

Coja dos palillos.

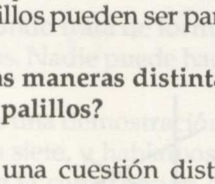
Nos ponemos de acuerdo en mantenerlos en el plano de la mesa, aún reconociendo que esta decisión es arbitraria y que sin ella habría algunas otras posibilidades. Podemos hacer ángulos. Los palillos pueden ser paralelos.

¿De cuántas maneras distintas podemos disponer los dos palillos?

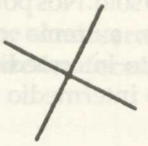
Esta es una cuestión distinta. Empiezan las discusiones. Los palillos se pueden unir de varias maneras: extremo contra extremo,



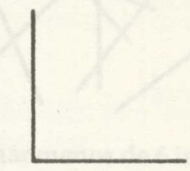
extremo con un punto intermedio,



un punto intermedio con otro,

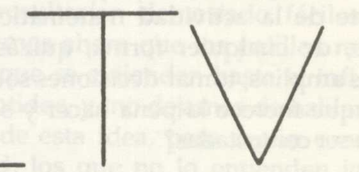


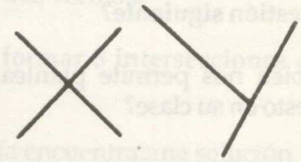
en ángulo recto,



en línea recta,

Algunos consideran letras del alfabeto,

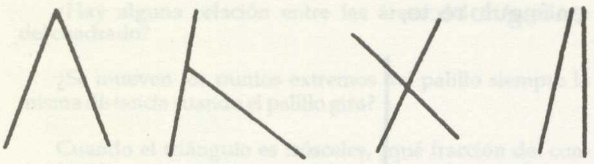




Esto provoca una nueva discusión. La "L" es evidentemente un ángulo recto. ¿Qué ángulo es la "V"? ¿Podemos hacer distintas "V"? Cada ángulo ¿es una disposición distinta de los palillos? ¿Cuántos ángulos distintos podemos construir? (360, piensa alguien). Si hay un número infinito, la respuesta a nuestra pregunta sobre el número de disposiciones debe ser "infinito" Pero esto es solamente una "porción" de infinito. Hay otra "porción" de infinito para la "T", porque la parte vertical puede cortar a la horizontal en cualquier lugar.

¿Merece la pena plantearse esta cuestión? ¿Merece la pena contar los infinitos?

Lo que tenemos que hacer es tomar decisiones que nos permitan dar un sentido, tanto a las preguntas como a las respuestas. Cada infinidad de casos es una clase de casos que se puede considerar como uno sólo. Nos ponemos de acuerdo en cuatro casos: extremo contra extremo, extremo contra punto intermedio, punto intermedio contra punto intermedio y que no se toquen en absoluto.



Alguien sugiere que si el "punto intermedio" puede estar en cualquier punto de una infinidad de ellos a lo largo del palillo, entonces esto incluye los extremos. De manera que hay sólo dos casos, que se toquen o que no se toquen. Coincidimos en que esta es una decisión posible que se puede adoptar. Pero no parece demasiado interesante.

¡Obsérvese que hemos permitido que se tomen decisiones en su clase? ¿Quién toma las decisiones en su clase? ¿El profesor? ¿El libro de texto? ¿No es cierto que tomar decisiones es parte de la actividad matemática? ¿No es válido, de cualquier forma, quizás en contextos más amplios, tomar decisiones sobre las preguntas que merece la pena hacer y sobre cómo deben ser contestadas?

¿Cúal es la cuestión siguiente?

¡Ah! También nos permite plantear cuestiones, ¿Sucede esto en su clase?

Bien, la pregunta siguiente es bastante evidente.

¿Cuántas disposiciones se pueden formar con tres palillos?

Estamos aceptando las decisiones anteriores. Esto parece como si fuera bastante fácil. Mucha gente empieza dibujando diagramas. Hay problemas con el orden y las clasificaciones. Quizá no sea tan fácil después de todo.

Los matemáticos murmuran algo sobre combinaciones. Si hay cuatro maneras en que los palillos se pueden cortar, entonces hay 4 maneras de que se corten cada uno de los tres pares de palillos, de forma que en total hay 4 x 4 x 4 = 64 maneras. No, no tantas. Hemos contado las 6 permutaciones en cada manera, de forma que la respuesta correcta es 64: 6 = ... ¡Hay evidentemente algo equivocado en nuestro razonamiento!

Los que utilizan un enfoque sistemático, un orden lógico, llegan a una posible solución, aunque no está muy seguros de ella. Es difícil reconocer las repeticiones, y más difícil aún asegurarse de que no hay omisiones.

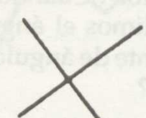
¿Lo dejamos?

¡Si por favor!

¿Está justificado que lo dejemos? ¿Sucede esto en su clase? ¿De quién es la pregunta después de todo? ¿Hemos aprendido algo al tratar de encontrar una respuesta? Si se siente ud. culpable, puede terminarlo como trabajo para casa. Si está ud. muy preocupado con ellos puede acabarlo ahora, mientras los demás hacemos alguna otra cosa.

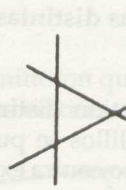
Dos palillos: ¿Cuántas intersecciones se pueden formar?

Fácil; exactamente una.



Tres palillos: ¿número máximo de intersecciones?

Tres.



Para completar todos los casos, establezcamos que un palillo no da ninguna intersección; formamos entonces la tabla siguiente:

1 →0
2 →1
3 →3
4 →6
5 →10

¿Qué es lo que viene a continuación?

No, no puede ud. usar otro palillo.

Quince.

¿Por qué?

Porque son los números triangulares.

Porque las diferencias son 1, 2, 3, 4, de manera que la diferencia siguiente debe ser 5.

¿Cómo sabe ud. que debe serlo?

Bueno ... y se dan cuenta de que no lo saben, hasta que alguien es capaz de encontrar un razonamiento sobre los palillos y sus intersecciones que demuestra algo sobre el modelo numérico, y no viceversa.

A menudo pasamos una buena parte del tiempo de clase estableciendo modelos, lo que es una buena cosa; sin embargo de vez en cuando necesitamos disminuir nuestro optimismo con los modelos. Puedo presentar la conocida situación que se refiere al número de regiones interiores a un círculo formadas al unir n puntos de la circunferencia por medio de cuerdas. Sin embargo, la actividad siguiente es una buena sacudida.

Empecemos de nuevo y contemos las regiones.

Ningún palillo: Una región.

Un palillo: Dos regiones.

Dos palillos: Cuatro regiones.

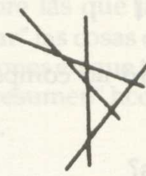
Todo el mundo trata de formar ocho regiones con tres palillos. Nadie puede hacerlo.

Discutimos una demostración de que el máximo número es siete, y hablamos de nuevo sobre los peligros de la construcción de modelos y de la noción de demostración. Tenemos otro modelo.

0 → 1
1 → 2
2 → 4
3 → 7
4 →

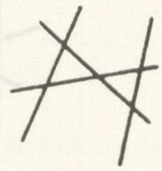
El siguiente debería ser once, y, practicando, logramos crear once regiones con cuatro palillos. Pero, ¿estamos seguros de que es el máximo, y sabemos la forma en que continúa el modelo? Se produce un cierto sentimiento intuitivo sobre ello en este momento, y la intuición hay que respetarla siempre. Dejémoslo por ahora.

Hemos hallado que el número máximo de intersecciones que se pueden formar con cuatro palillos es 6.



¿Puede ud. formar menos de 6 intersecciones?

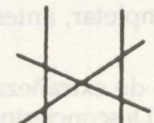
¿Está permitido esto?



Pensamos que no, porque los dos palillos se cortarán si se prolongan, y porque, como conocemos la siguiente sucesión de preguntas, las respuestas a ellas resultarían demasiado fáciles. Por tanto suponemos ahora que los palillos representan rectas que se extienden hasta el infinito en ambos sentidos, y no dejamos de hablar con generalidad de esta idea, pero según continúa la actividad, los que no lo entienden lo discuten con sus vecinos.

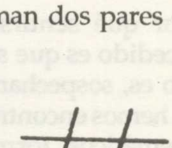
¿Puede Ud. formar 5 intersecciones con cuatro palillos?.

La mayoría encuentra una solución.

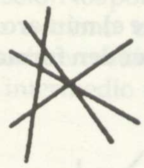


¿Cuatro intersecciones?

Muchos forman dos pares de palillos paralelos.



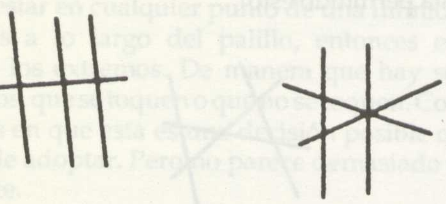
y algunos construyen intersecciones múltiples.



Yo observo, pero no comparto mis conocimientos.

¿Tres intersecciones?

Hay dos soluciones.



Empecemos por el otro lado. ¿Puede ud. conseguir que no haya intersecciones?

Esto parece bastante fácil.

¿Y puede Ud. colocarlos de manera que haya sólo una?

Algunos descubren ahora por primera vez las intersecciones múltiples, y vuelven atrás para encontrar soluciones alternativas a las cuestiones anteriores.

Nos quedan dos intersecciones.

Trato de decirlo en un tono de voz que sugiera que esto ahora es mera rutina, que vamos a hacerlo para completar, antes de seguir adelante.

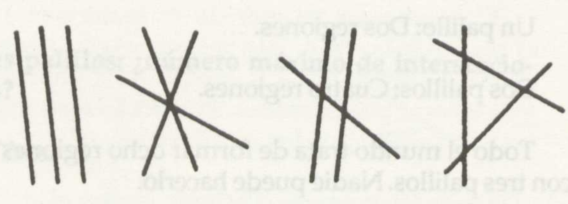
Pero hay gestos de extrañeza por todas partes. Perplejidad. Desconcierto. Incredulidad. ¿Se puede hacer? Lo intentan durante algún tiempo, ninguno está seguro de ello, pero nadie ha encontrado una solución. No creen que sea posible, pero no están seguros de por qué.

¡No hay por qué sentirse culpable por ello! Lo que ha sucedido es que se ha formulado una hipótesis; esto es, sospechamos que algo es cierto, pero aún no hemos encontrado una demostración. Los matemáticos formulan hipótesis muy a menudo. Los científicos están siempre haciéndolo. Una de las diferencias entre las matemáticas y las ciencias reside en el método de "demostración". A los matemáticos les gusta demostrar sus hipótesis por medio de la deducción a partir de un conjunto de axiomas autoconsciente y con el que todo el mundo esté de acuerdo. Los científicos sólo pueden comprobar las suyas en un gran número de casos. El hecho de que no hayamos encontrado una manera de obtener 2 intersecciones con cuatro palillos reafirma nuestra hipótesis desde el punto de vista científico. Matemáticamente podemos argumentar sobre ello mañana.

Lo importante es reconocer que esta actividad de formular hipótesis es una actividad matemática legítima, y ciertamente un prerrequisito necesario para la demostración. ¡Necesita ud. algo que demostrar! Pero, ¿quién proporciona habitualmente los "teoremas"? El libro de texto (y proporciona también las demostraciones), o el profesor (y, ¿de dónde obtienen los profesores los teoremas?). ¿Deja ud. que sus alumnos formulen hipótesis, hagan suposiciones, que conjeturen, que adivinen? Las pruebas pueden sugerir, y pueden también confirmar. Pero la hipótesis puede existir, y de hecho existe, independientemente de la demostración, matemática y pedagógicamente, y puede estar orientada por la intuición o por evidencias circunstanciales. Quizá debiéramos dejar que los niños lo hagan más a menudo.

¿Qué pasa con tres palillos?

Esta vez se puede obtener cualquier número de intersecciones.



Extraño.

¿Qué piensa ud. que pasará con cinco palillos?

Hay algunas opiniones muy bien informadas sobre la imposibilidad de 2 intersecciones, y una conjetura o dos acerca de tres intersecciones. La experiencia lo confirma. Tenemos otras hipótesis de que 2 y 3 intersecciones son imposibles con cinco palillos.

A pesar de nuestra experiencia anterior, la urgencia de encontrar modelos nos acucia. ¿Puede suceder que con seis palillos sean imposibles 2, 3 y 4 intersecciones y con siete palillos...? Bueno, el nombre respetable para la elaboración de modelos es el de generalización y tenemos una hipótesis generalizada, que con n palillos cualquier número de intersecciones entre 2 y n-2 es imposible. (¡Y ni siquiera hemos demostrado uno de los casos particulares!)

¿Podemos encontrar una demostración?
¿Qué tipo de demostración esperamos dar a los niños?
¿Podemos tratar las regiones de la misma forma que las intersecciones?
¿Son posibles discusiones análogas sobre planos en tres dimensiones?
¿Son convenientes estas actividades para los niños?

¿Son importantes los resultados? Si no es así, ¿Qué es lo importante?

Las sesiones con los profesores, como las clases con los alumnos, son habitualmente finitas, pero en cualquier caso probablemente es preferible terminar con una colección de preguntas sin respuestas, sobre las que la gente siga pensando, a "redondear" las cosas comodamente con algunas conclusiones en que todos "estén de acuerdo", o con un "resumen" hecho por quien está llevando la sesión.

Y, quizás, también esto lleve un mensaje para la conducta en clase.

Yo observo, pero no comparto mis descubrimientos.

¿Tres intersecciones?

Hay dos soluciones.

Empecemos por el otro lado. ¿Puede ud. conseguir que no haya intersecciones?

Esto parece bastante fácil.

¿Y puede Ud. colocarlos de manera que haya sólo una?

Algunos descubren ahora por primera vez las intersecciones múltiples, y vuelven atrás para encontrar soluciones alternativas a las cuestiones anteriores.

Nos quedan dos intersecciones.

Trato de decirlo en un tono de voz que sugiera que esto ahora es mera rutina, que vamos a hacerlo para completar, antes de seguir adelante.

Pero hay gestos de extrañeza por todas partes. Perplejidad. Desconcierto. Incredulidad. ¿Se puede hacer? Lo intentan durante algún tiempo, ninguno está seguro de ello, pero nadie ha encontrado una solución. No creen que sea posible, pero no están seguros de por qué.

¡No hay por qué sentirse culpable por ello! Lo que ha sucedido es que se ha formulado una hipótesis; esto es, sospechamos que algo es cierto, pero aún no hemos encontrado una demostración. Los matemáticos formulan hipótesis muy a menudo. Los científicos están siempre haciéndolo. Una de las diferencias entre las matemáticas y las ciencias reside en el método de "demostración". A los matemáticos les gusta demostrar sus hipótesis por medio de la deducción a partir de un conjunto de axiomas autoconsistente y con el que todo el mundo esté de acuerdo. Los científicos sólo pueden comprobar las suyas en un gran número de casos. El hecho de que no hayamos encontrado una manera de obtener 2 interse[illegible] fico. Matemáticamente podemos argumentar [illegible] dad de formular hipótesis [illegible] sito necesario para la demostración. ¡Necesita ud. algo que demostrar! Pero, ¿quién proporciona habitualmente los "teoremas"? El libro de texto (y proporciona también las demostraciones), o el profesor (y, ¿de dónde obtienen los profesores los teoremas?). ¿Deja ud. que sus alumnos formulen hipótesis, hagan suposiciones, que conjeturen, que adivinen? Las pruebas pueden sugerir, y pueden también confirmar. Pero la hipótesis puede existir, y de hecho existe, independientemente de la demostración, matemática y pedagógicamente, y puede estar orientada por la intuición o por evidencias circunstanciales. Quizá debiéramos dejar que los niños lo hagan más a menudo.

¿Qué pasa con tres palillos?

Esta vez se puede obtener cualquier número de intersecciones.

Extraño.

¿Qué piensa ud. que pasará con cinco palillos?

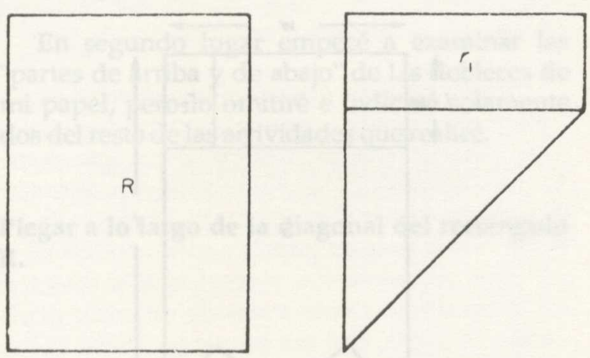
Hay algunas opiniones muy bien informadas sobre la imposibilidad de 2 intersecciones, y una conjetura o dos acerca de tres intersecciones. La experiencia lo confirma. Tenemos otras hipótesis de que 2 y 3 intersecciones son imposibles con cinco palillos.

A pesar de nuestra experiencia anterior, la urgencia de encontrar modelos nos acucia. ¿Puede suceder que con seis palillos sean imposibles 2, 3 y 4 intersecciones y con siete palillos...? Bueno, el nombre respetable para la elaboración de modelos es el de generalización y tene-

Hacer matemáticas con un trozo de papel

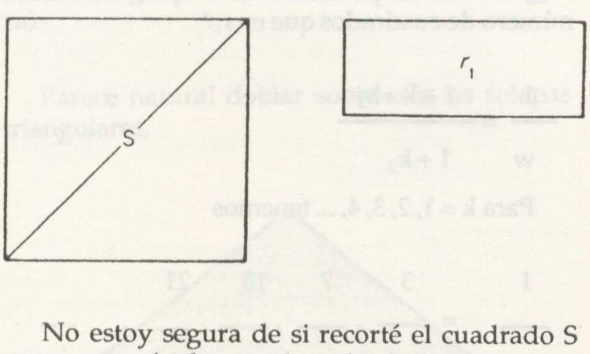
MARION WALTER
University of Oregon. Departament of Mathematics.

Pliego el rectángulo de papel R.



Esto fue lo primero que hice. Estaba pensando en hacer un cuadrado. Lo hice de una forma tan automática, que estoy completamente segura de que esta acción venía directamente de mis recuerdos de niña, de construir cuadrados como punto de partida para hacer muchas cosas.

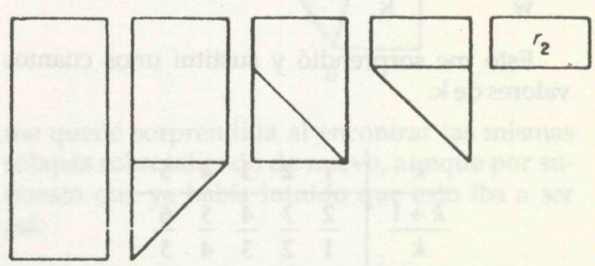
Recorto el rectángulo adicional; obtengo así un cuadrado S y un pequeño rectángulo r_1.



No estoy segura de si recorté el cuadrado S porque quería obtener el cuadrado o porque estaba pensando que el trozo sobrante de papel (r_1) me serviría para algo".

Suelo tener la actitud de pensar que "todo sirve para algo".

Miro el rectángulo, le doy la vuelta y empiezo de nuevo a plegar el papel para formar cuadrados.

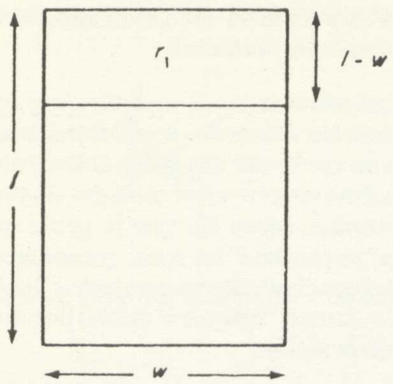


Me pregunto que cuantos cuadrados puedo obtener de este pequeño rectángulo. Obtengo 2 cuadrados y me queda de nuevo otro pequeño rectángulo r_2.

Me planteo ahora cuando obtendré exactamente k cuadrados pequeños sin que me sobre ningún rectángulo.

Me empieza a gustar este problema. Me doy cuenta de que con la forma habitual de plegar una hoja de papel obtendremos siempre un cuadrado y nos sobrará un trozo de papel.

¿Cuándo nos dará el rectángulo R un cuadrado junto con un rectángulo r_1 que nos proporcione exactamente k cuadrados?



En el fondo de mi mente, después de haber hecho el dibujo, se escondía la propiedad del rectángulo áureo: al quitar un cuadrado de un rectángulo áureo nos queda un rectángulo que también es áureo. Yo, a propósito y con toda conciencia, traté de no pensar en esto, porque no quería que me influyese, ya que sabía adonde me conduciría el rectángulo áureo.

r_1 dará exactamente k cuadrados cuando

w = k (1-w)

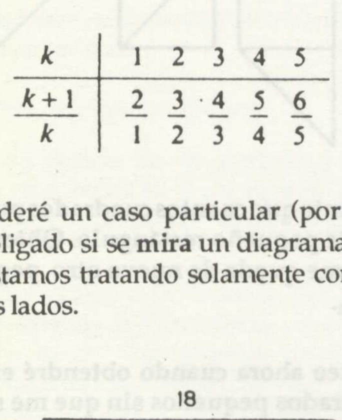
esto es, cuando

$$\frac{1}{w} = \frac{k+1}{k}$$

Esto me sorprendió y sustituí unos cuantos valores de k.

k	1	2	3	4	5
$\frac{k+1}{k}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$

Consideré un caso particular (por supuesto que es obligado si se mira un diagrama) Y es claro que estamos tratando solamente con la razón de los dos lados.



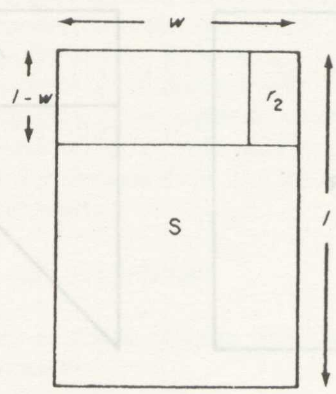
Aquí,

$$\frac{1}{w} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$

y $\quad k = 6$

Esto parece una buena aplicación de razón y proporción: Dado un rectángulo cualquiera que se divide en un cuadrado y un rectángulo, que a su vez se divide en exactamente k cuadrados, la razón de la longitud a la anchura del rectángulo original es k + 1 / k. ¡Me gusta! Así que me pregunté qué sucedería si el rectángulo r_1 se descompone en k cuadrados y queda como resto el rectángulo r2.

¿Cuándo consistirá el rectángulo r_2 en exactamente n cuadrados?



Cuando

$$\frac{1}{w} = \frac{n+1+nk}{1+nk}$$

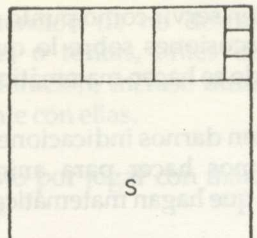
Todo esto resultaba un poco confuso, así que me pregunté que pasaría si n = k.

¿Cuándo se pueden formar en r_2 el mismo número de cuadrados que en r_1?

$$\frac{1}{w} = \frac{1+k+k_2}{1+k_2}$$

Para k = 1, 2, 3, 4, ... tenemos

$$\frac{1}{w} = \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{13}{10}, \frac{21}{17}, ...$$

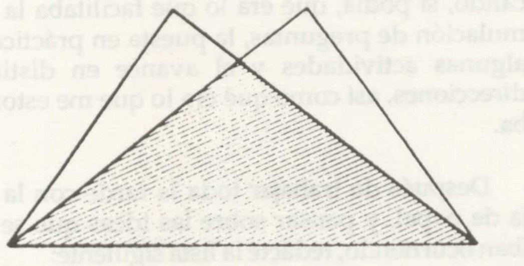


En este momento no me detuve para preguntarme sobre lo que pasaría en la etapa siguiente. Lo hice más adelante. ¿Cúal cree ud. que puede ser la razón l/w si r_1, r_2 y r_3 contienen cada uno 3 cuadrados y r_3 contiene exactamente 3 cuadrados?

¡Intente generalizarlo!

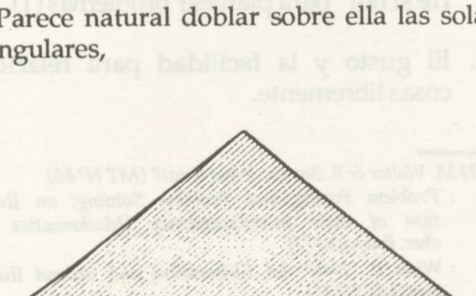
En segundo lugar empecé a examinar las "partes de arriba y de abajo" de las dobleces de mi papel, pero lo omitiré e indicaré solamente dos del resto de las actividades que realicé.

Plegar a lo largo de la diagonal del rectángulo R.

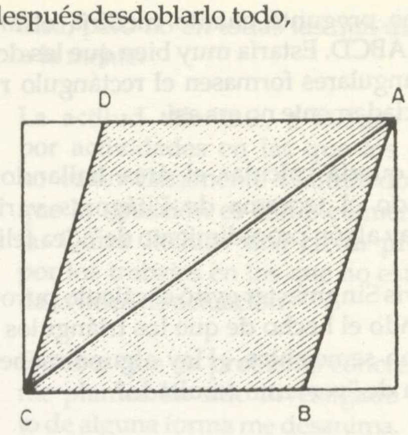


Después de mirar otra vez el plegado a lo largo de la diagonal del cuadrado, doblé la figura por la diagonal del rectángulo R y miré la doble hoja que resultó (sombreada en la figura)

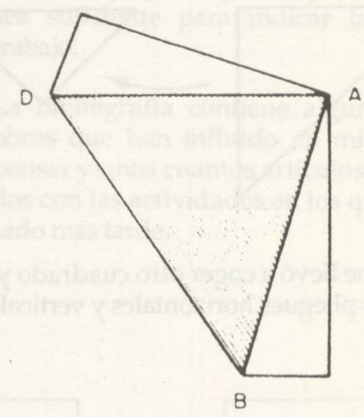
Parece natural doblar sobre ella las solapas triangulares,



y después desdoblarlo todo,



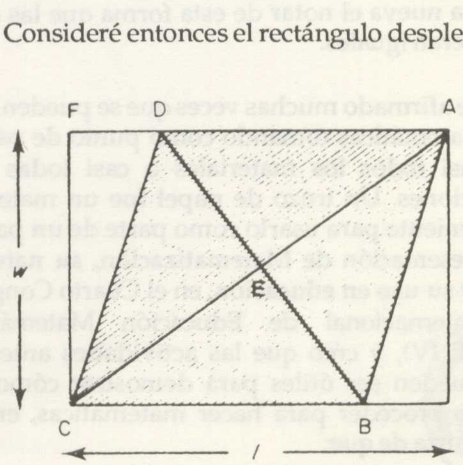
Aunque era "evidente" que la región sombreada es un rombo, decidí comprobarlo plegando alrededor de BD.



me quedé sorprendida al encontrar las mismas solapas sobresaliendo de nuevo, aunque por supuesto que ya había intuido que esto iba a ser así.

¿Se siente ud. igual de satisfecho si dobla la figura sobre la diagonal AC, remete las solapas y después lo deshace todo y repite las dobleces con la diagonal BD?

Consideré entonces el rectángulo desplegado

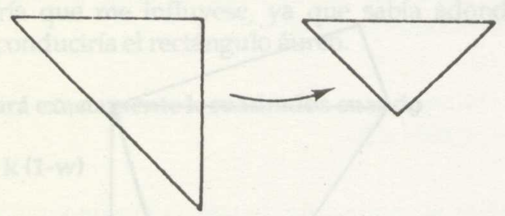


y me pregunté cuanto mediría el área del rombo ABCD. Estaría muy bien que las dos solapas triangulares formasen el rectángulo r_1, pero desgraciadamente no era así.

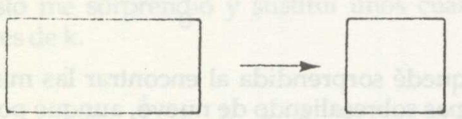
No quería calcular el área hallando CB y aplicando el teorema de Pitágoras varias veces. ¿Hay algún procedimiento de "idea feliz"?

Davis Singmaster evitó el cálculo puro y duro utilizando el hecho de que los triángulos ADE y ACF son semejantes. ¿Hay alguna manera más sencilla de "ver" este resultado?

Después de plegar a lo largo de la segunda diagonal del rombo, decidí plegar a lo largo de la segunda diagonal de un cuadrado. Un cuarto de cuadrado, pensé.



Esto me llevó a coger otro cuadrado y doblarlo usando pliegues horizontales y verticales.



Cogí los dos "cuartos", uno en cada mano. ¡Trate de hacerlo ud.! Parece un procedimiento más fuerte que cualquier otro para demostrar que esas dos piezas tienen la misma área. Yo "sabía" esto, y sin embargo resultó una experiencia nueva el notar de esta forma que las dos áreas eran iguales.

He afirmado muchas veces que se pueden hacer matemáticas tomando como punto de partida casi todos los materiales o casi todas las situaciones. Un trozo de papel fue un material conveniente para usarlo como parte de un panel de presentación de **Matematización, su naturaleza y su uso en educación,** en el Cuarto Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME IV), y creo que las actividades anteriores pueden ser útiles para demostrar cómo se puede proceder para hacer matemáticas, en la esperanza de que:

(i) pueden servir como punto de partida para discusiones sobre lo que tiene lugar cuando se hacen matemáticas.

(ii) pueden darnos indicaciones sobre lo que podemos hacer para animar a los niños a que hagan matemáticas.

(iii) pueden animar a otras personas a presentar sus propias experiencias.

¿Qué razones hay para hacer matemáticas a partir de "cualquier cosa", aparte de la diversión que nos produzca el hacerlo?

Creo que hay al menos dos razones; primero, el hacerlo puede llevar, en todos los niveles, a ideas nuevas, quizá útiles e interesantes, sobre el curriculum y los temas a desarrollar. En segundo lugar, si se proporciona a los niños estos ejemplos, y se les anima a desarrollar estas actividades, pueden darse cuenta del valor que tienen, aunque no estén "en el libro".

Decidí empezar con una hoja de papel porque, probablemente, todo el mundo dispone de una. (¡Estuve tentada de empezar con una naranja de California!). Se me plantearon entonces dos cuestiones: qué problemas e ideas podía generar con la hoja de papel, y cómo podría recoger mis pensamientos y resgistrarlos mientras iba avanzando. Debía tratar de empezar explicando, si podía, qué era lo que facilitaba la formulación de preguntas, la puesta en práctica de algunas actividades y el avance en distintas direcciones, así como qué era lo que me estorbaba.

Después de trabajar toda la tarde con la hoja de papel, y pensar sobre las ideas que se me iban ocurriendo, redacté la lista siguiente:

1. Creo que lo más importante fue observar y reflexionar. Ello se relaciona con prestar atención a los atributos. Dependiendo de lo que "ví" y de en qué me fijé, hice distintas preguntas y dejé de hacer otras. Esto está ligado al método de "¿Qué ocurre si no?" para plantear problemas (1).

2. El gusto y la facilidad para relacionar cosas libremente.

(1) M. Walter & S. Brown: What if not? (MT Nº 46)
: Problem Posing and Problem Solving: an Illustration of their Interdependence (Mathematics Teacher. Enero, 1977)
: What if Not? An Elaboration and Second Illustration (MT Nº 51)

3. La intención de no descartar ideas por inútiles o tontas, antes de tomarlas en consideración, incluso aunque no se siga adelante con ellas.

4. El gusto por jugar con materiales y situaciones.

5. Las experiencias anteriores tienen bastante peso, incluso en las memorias infantiles, tanto las experiencias matemáticas como las obtenidas con actividades similares. (2).

6. Conocer el programa que se debe cubrir me influye probablemente en alguna idea, pero no en todas las que me vienen a la mente.

7. La actitud tolerante, e incluso el gusto por actividades en las que los objetivos no están claramente delimitados, en las que la situación es completamente abierta. Quizá incluso una cierta preferencia por los trabajos en los que no está marcada la línea de actuación.

8. El saber que un problema concreto que se me plantea ha sido investigado o resuelto de alguna forma me desanima.

Obtuve esta lista sólo después de haber examinado **todo** el material que desarrollé al hacer matemáticas con una hoja de papel. Las actividades anteriores son sólo una pequeña parte, que espero que sea suficiente para indicar la línea de trabajo.

La bibliografía contiene algunas de las obras que han influido en mi modo de pensar y unos cuantos artículos relacionados con las actividades en los que he pensado más tarde.

---

(2) Hay muchos sitios en que se dan ejemplos interesantes. Ver por ejemplo Banwell, Saunders & Tahta: Starting Points (O.U.P.) especialmente pp. 67, 139 y 44-49; pero todo el texto tiene interés.

*Martin Gardner: **Mathematical Games: the Combinatorial Richness of Folding a Piece of Paper** (Scientific American, May 1971)*

*Marion Walter: **Two Problems from a Triangle** (MT Nº 74)*

*: **Boxes, Squares and Other Things** (N.C.T.M., 1970)*

*: **Frame Geometry: an example in Posing and Solving Problems** (Arithmetic Teacher, Oct. 1980)*

[illegible] área del rombo ABCD. Estaría muy bien que las dos solapas triangulares formasen el rectángulo r_1, pero desgraciadamente no es así.

No es así [illegible] CB y aplicando el teorema de Pitágoras varias veces. [illegible]

Davis Singmaster [illegible] y duro utilizando el hecho de que los triángulos ADE y ACE [illegible] más sencillo [illegible]

Después de plegar a lo largo de la segunda diagonal del rombo [illegible] a lo largo de la segunda diagonal [illegible] del cuarto de cuadrado [illegible]

Esto me llevó a coger otro cuadrado y doblarlo usando pliegues horizontales y verticales.

Cogí los dos "cuartos", uno en cada mano. ¡Trate de hacerlo ud.! Parece un procedimiento más fuerte que cualquier otro para demostrar que esas dos piezas tienen la misma área. Yo "sabía" esto, y sin embargo resultó una experiencia nueva el notar de esta forma que las dos áreas eran iguales.

He afirmado muchas veces que se pueden hacer matemáticas tomando como punto de partida casi todos los materiales o casi todas las situaciones. Un trozo de papel fue un material conveniente para usarlo como parte de un panel de presentación de Matematización, su naturaleza y su uso en educación, en el Cuarto Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME IV), y creo que las actividades anteriores pueden ser útiles para demostrar cómo se puede proceder para hacer matemáticas, en la esperanza de que:

(i) pueden servir como punto de partida para discusiones sobre lo que tiene lugar cuando se hacen matemáticas;

(ii) pueden darnos indicaciones sobre lo que podemos hacer para animar a los niños a que hagan matemáticas;

(iii) pueden animar a otras personas a presentar sus propias experiencias.

¿Qué razones hay para hacer matemáticas a partir de "cualquier cosa", aparte de la diversión que nos produzca el hacerlo?

Creo que hay al menos dos razones: primero, el hacerlo puede llevar, en todos los niveles, a ideas nuevas, quizá útiles e interesantes, sobre el [illegible] y los temas a desarrollar. En segundo lugar, si se proporcionan a los niños ejemplos, y se les anima a desarrollar estas actividades, pueden darse cuenta del [illegible]

[illegible] la hoja de papel [illegible] porque probablemente todo el mundo dispone de una. (Estuve tentada de empezar con una naranja de [illegible]) Me planteé entonces dos cuestiones: qué problemas e ideas podía generar con la hoja de papel, y cómo podría recoger mis pensamientos y resgistrarlos mientras iba avanzando. Debía tratar de empezar explicando, si podía, qué era lo que facilitaba la formulación de preguntas, la puesta en práctica de algunas actividades y el avance en distintas direcciones, así como qué era lo que me estorbaba.

Después de trabajar toda la tarde con la hoja de papel, y pensar sobre las ideas que se me iban ocurriendo, redacté la lista siguiente:

1. Creo que lo más importante fue observar y reflexionar. Ello se relaciona con prestar atención a los atributos. Dependiendo de lo que "vi" y de en qué me fijé, hice distintas preguntas y dejé de hacer otras. Esto está ligado al método de "¿Qué ocurre si no?" para plantear problemas (1).

2. El gusto y la facilidad para relacionar cosas libremente.

---

(1) *M. Walter & S. Brown: What if not? (MT N° 46)*

· Problem Posing and Problem Solving: an Illustration of their Interdependence (Mathematics Teacher, Enero, 1977)

· What if Not? An Elaboration and Second Illustration (MT N° 51)

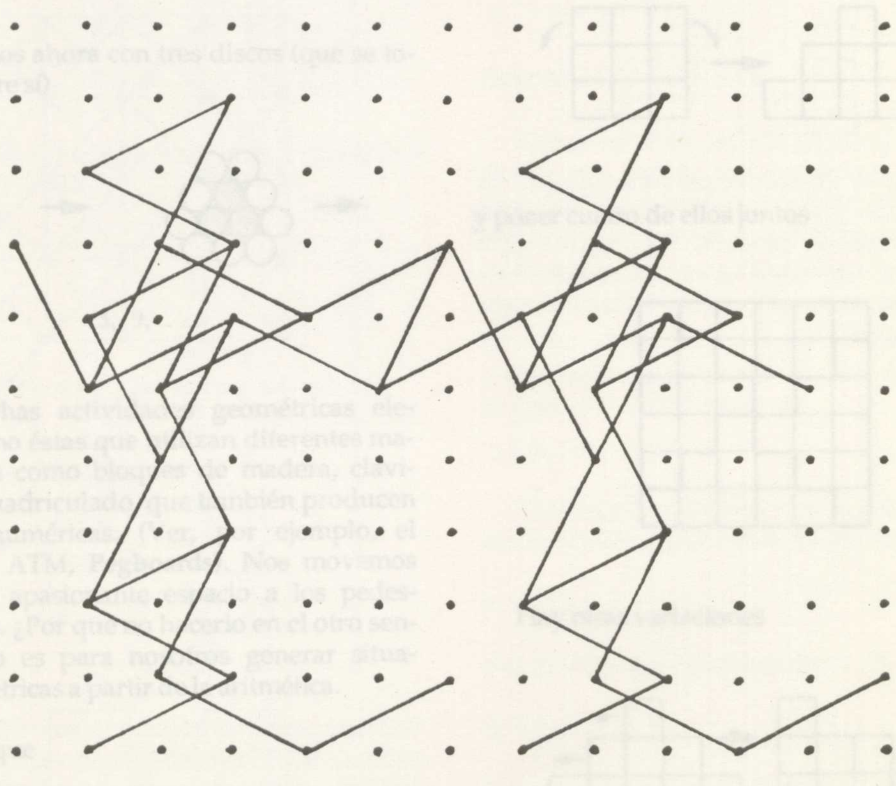
M.T.71 HARRIS, Ian. **Arte aritmético**

M.T.79 CARYL, Deborah. **Más arte aritmético y octógonos**

Hay muchos artículos en MT que producen dibujos. Son tantos los que tratan de mosaicos que, como ya he dicho en la introducción, deberían estar reunidos en una colección propia. He elegido este artículo, que comienza con aritmética, como indica su título, porque he utilizado muchas veces las ideas que sugiere con distintos propósitos. Se puede usar en la aritmética modular y con los números irracionales. Pero también se puede utilizar para generar muchas cuestiones geométricas sobre dibujos, y los estudiantes pueden llevar a cabo una gran variedad de investigaciones. Una de mis estudiantes, Deborah Caryl, en S.U.N.Y. en Buffalo, se apartó realmente del artículo de Harris y escribió un artículo muy largo con diagramas preciosos dibujados en colores. Una parte condensada de su artículo es el segundo incluido aquí.

Caryil demuestra que los artículos del MT pueden servir como catalizadores y puntos de partida para trabajos realizados por los estudiantes. Obsérvese que estudia una pequeña cuestión del tipo "¿Qué pasa si no?" en el artículo. ¿Qué pasa si la regla para generar S_n **no** es $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$?

Cuando leí el artículo de Harris y traté de hacer un dibujo tuve la suerte del principiante. El primer dibujo fue:

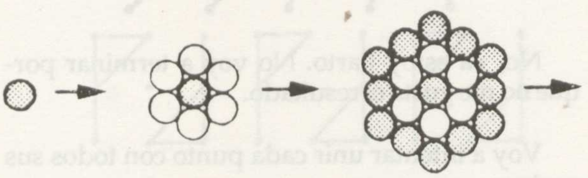


Lo llamé los gemelos $\sqrt{5}$.

Arte aritmético

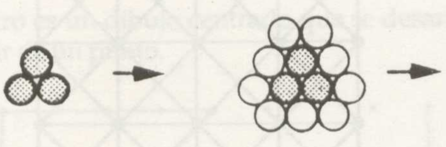
IAN HARRIS
King' s College, London

Una de las ideas expresadas en **Algunas ideas sobre geometría** (MT No 68) es que "demasiadas veces, los temas de geometría empiezan en el espacio y terminan con números". Por ejemplo, tomemos un conjunto de discos circulares de cartón; empecemos por uno. ¿Cuántos más se necesitan para ordenarlo completamente? ¿Cuántos para rodear estos últimos? Y así sucesivamente.



1, 6, 12, . . .

Empecemos ahora con tres discos (que se tocan todos entre sí)



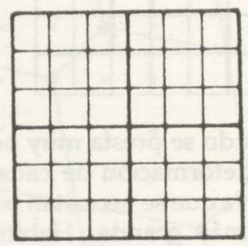
3, 9, . . .

Hay muchas actividades geométricas elementales como éstas que utilizan diferentes materiales, tales como bloques de madera, clavijas o papel cuadriculado, que también producen sucesiones numéricas. (Ver, por ejemplo, el folleto de la ATM, **Pegboards**). Nos movemos así desde el apasionante espacio a los pedestres números. ¿Por qué no hacerlo en el otro sentido? El reto es para nosotros generar situaciones geométricas a partir de la aritmética.

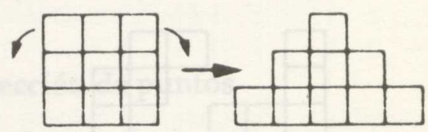
Sabemos que

$$4 \times 3^2 = 6^2$$

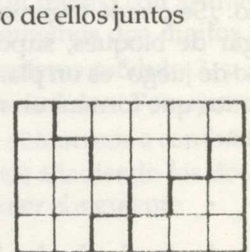
Podemos interpretar esto espacialmente utilizando bloques de madera



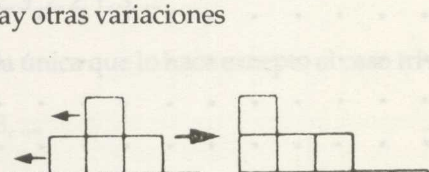
Podemos deformar cada nueve

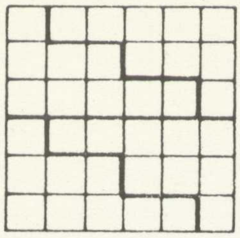


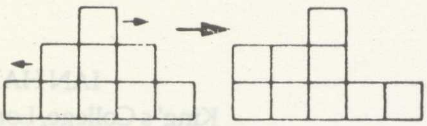
y poner cuatro de ellos juntos

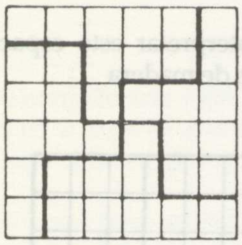


Hay otras variaciones

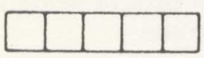


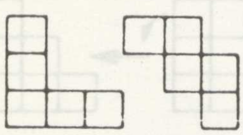




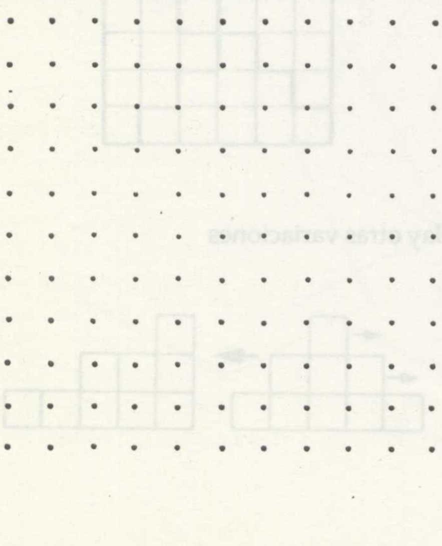


Muy a menudo se presta muy poca atención al proceso de deformación de cada uno de los bloques de nueve que se necesitan para construir un cuadrado más grande. Habitualmente se plantea una pregunta del tipo"¿Cuántos?"; por ejemplo, ¿cuántos pentominós distintos hay?





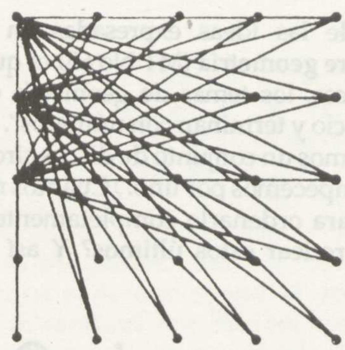
Todo esto es divertido, pero parece que carece de método. ¿Se puede organizar de alguna forma? En lugar de bloques, supongamos que nuestro "campo de juego" es un plano con un andamiaje de puntos que forman un retículo regular de cuadrados.



Una ud. algunos puntos. ¿Qué es lo que obtiene?

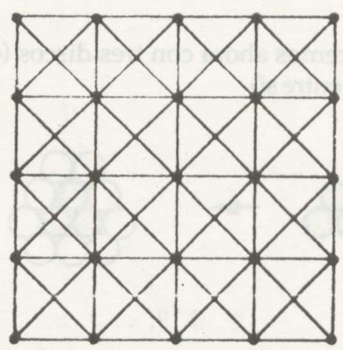
Esto me desanima, especialmente si el retículo contiene muchos más puntos. Me siento como un artista enfrentado con un gran lienzo blanco y al que se le pide que pinte ahora. ¿Qué debo hacer? ¿Donde tengo que empezar? ¿Qué color elegiré? ¡Cuánto más fácil es trabajar sobre un lienzo en el que ya hay el comienzo de una pintura!

Volvamos a los puntos. Voy a unir cada uno con todos los demás.

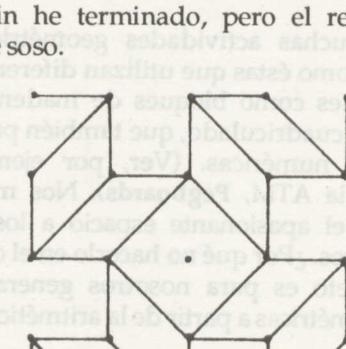


No, ya estoy harto. No voy a terminar porque no me gusta el resultado.

Voy a intentar unir cada punto con todos sus vecinos.



Al fin he terminado, pero el resultado es bastante soso.



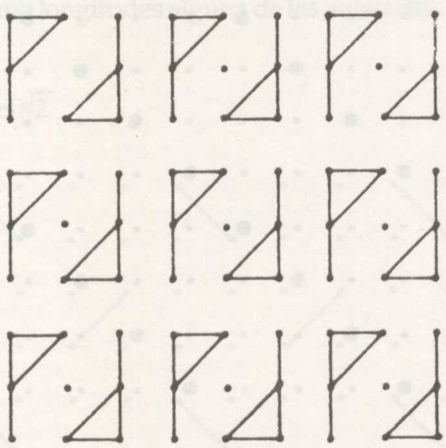
¡Ah! Eso ya está mejor.

Esta vez es un resultado sencillo e interesante, no con las aburridas y confusas respuestas anteriores. Evidentemente una solución completa y exhaustiva no es lo que se desea. El último dibujo está contenido en el inmediatamente anterior, pero no utiliza ni todos los puntos ni todas las rectas.

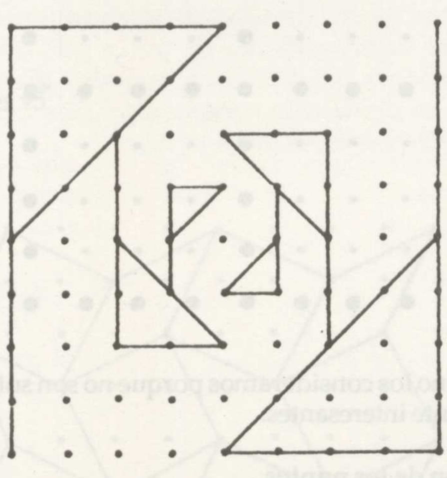
¿Cómo podemos limitar los puntos y las rectas?

(Antes de seguir adelante, conviene hacer algunas observaciones sobre los dibujos que estamos haciendo.)

Hay dos tipos de dibujos que pueden cubrir el plano; uno es el dibujo repetido sucesivamente, como los que suelen aparecer en los empapelados de las paredes,



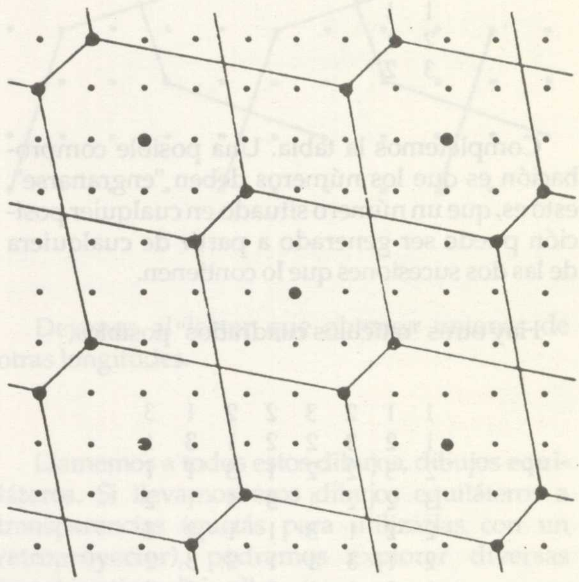
y el otro es un dibujo centrado que se desarrolla a partir de un punto.



Los dos dibujos se pueden extender indefinidamente en todas las direcciones. Para nuestros propósitos consideramos solamente los del primer tipo, es decir, un dibujo repetitivo.)

Nuestro objetivo es producir dibujos estéticamente atractivos. Esta es nuestra motivación. ¿Cuáles son las dificultades?

La principal es que tenemos demasiadas posibilidades de unir los puntos. Para evitarlo, necesitamos, en primer lugar, seleccionar solamente algunos puntos del retículo, y en segundo lugar, una regla restrictiva para unirlos. Se puede lograr esto utilizando sucesiones aritméticas sencillas y longitudes de medidas determinadas. He aquí un ejemplo.



Selección de puntos

Cómo se debe repetir el dibujo, también se tienen que repetir las sucesiones utilizadas, lo cual sugiere el trabajo con aritmética modular o de "reloj". Tomemos dos dígitos de entre 1, 2, 3 (≡0), en los enteros módulo 3, y generemos una sucesión sumándolos. Por ejemplo, si empezamos por 1,1, obtenemos a continuación 2 (≡ 1 + 1) y continuamos añadiendo los dos últimos números para obtener el siguiente

1, 1, 2, 3, 2 ,2, ...

Esta es, por supuesto, una sucesión de Fibonacci. Se repite después de ocho términos

1, 1, 2, 3 ,2, 2, 1, 3, ...

y es la única que lo hace excepto el caso trivial

3, 3, 3, ...

ya que todos los pares de números con los que se puede comenzar están contenidos en ella.

Extendamos ahora la idea utilizando un bloque de cuatro dígitos.

1	2
3	1

Apliquemos la regla de Fibonacci que acabamos de ver para generar los números tanto hacia abajo como hacia la derecha.

1	2	3	2	2	1	3	1
3	1	1	2	3	2	2	1
1	3						
1	1						
2	1						
3	2						

Completemos la tabla. Una posible comprobación es que los números deben "engranarse", esto es, que un número situado en cualquier posición puede ser generado a partir de cualquiera de las dos sucesiones que lo contienen.

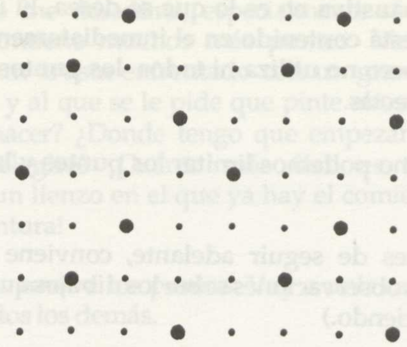
Hay otros "retículos cuadrados" posibles

1	1	2	3	2	2	1	3
1	2	3	2	2	1	3	1
2	3	2	2	1	3	1	1
3	2	2	1	3	1	1	2
2	2	1	3	1	1	2	3
2	1	3	1	1	2	3	2
1	3	1	1	2	3	2	2
3	1	1	2	3	2	2	1

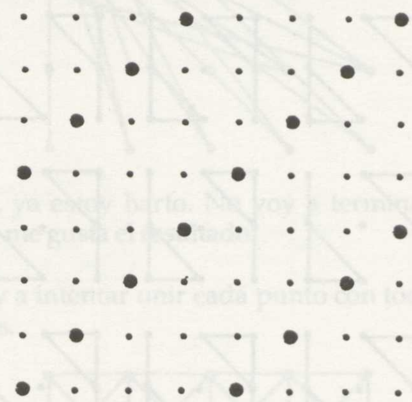
1	1	2	3	2	2	1	3
1	1	2	3	2	2	1	3
2	2	1	3	1	1	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3
2	2	1	3	1	1	2	3
2	2	1	3	1	1	2	3
1	1	2	3	2	2	1	3
3	3	3	3	3	3	3	3

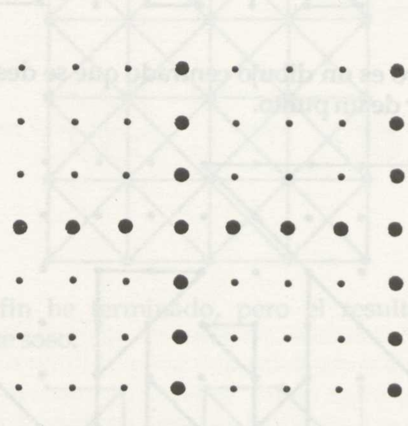
1	2	3	2	2	1	3	1
3	1	1	2	3	2	2	1
1	3	1	1	2	3	2	2
1	1	2	3	2	2	1	3
2	1	3	1	1	2	3	2
3	2	2	1	3	1	1	2
2	3	2	2	1	3	1	1
2	2	1	3	1	1	2	3

Imaginemos ahora que se superpone cada cuadrado de números sobre nuestro retículo de puntos, de manera que a cada punto le hacemos corresponder un número. Seleccionemos, para el último retículo de números, todos los puntos asociados al 3, el módulo del sistema.



Los otros cuadros de números dan las otras dos disposiciones posibles de puntos

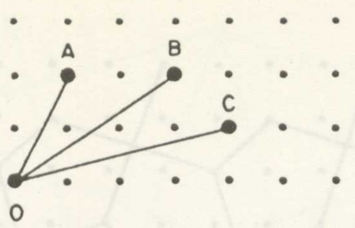




pero no los consideramos porque no son suficientemente interesantes.

Unión de los puntos

Consideremos en un retículo cuadrado completo de puntos, las uniones de pares de puntos no paralelas a los lados del cuadriculado.



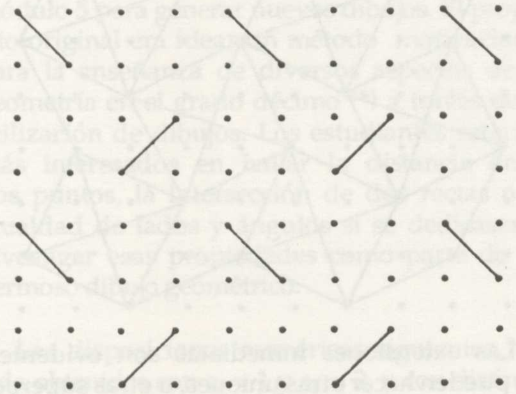
Si la longitud del lado del cuadrado es de 1 unidad, entonces OA = $\sqrt{5}$, OB = $\sqrt{13}$, OC = $\sqrt{17}$.

Hay por tanto una sucesión ordenada formada por estas uniones,

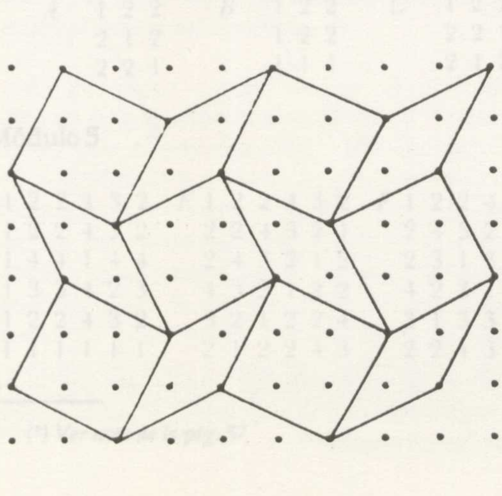
$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{20}, \ldots$

Tenemos ahora una regla restrictiva conveniente para unir los puntos. Hagamos todas la uniones entre los puntos seleccionados que tienen como longitudes alguna de las anteriores.

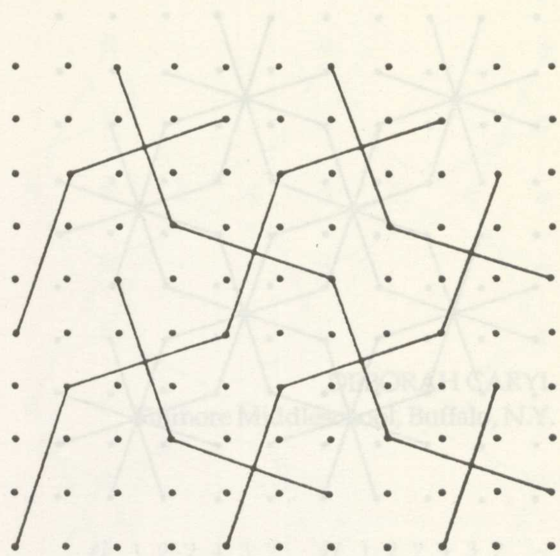
uniones $\sqrt{2}$



uniones $\sqrt{5}$



uniones $\sqrt{10}$

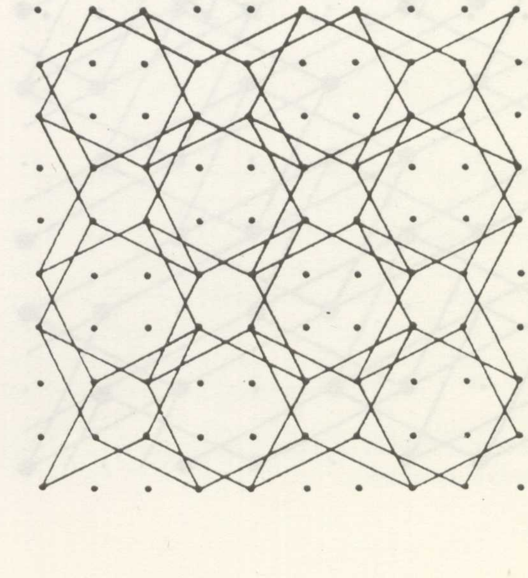


Dejamos al lector que obtenga uniones de otras longitudes.

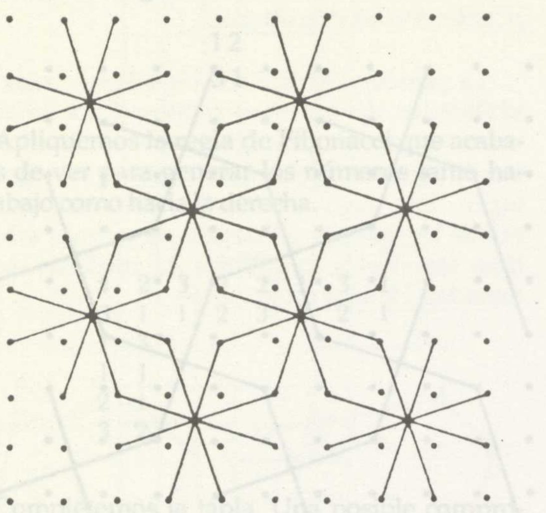
Llamemos a todos estos dibujos, dibujos **equiláteros**. Si llevamos esos dibujos equiláteros a transparencias (quizás para utilizarlas con un retroproyector), podremos explorar diversas "combinaciones" de ellos.

Se pueden formar nuevos dibujos superponiéndolos.

Dos dibujos $\sqrt{5}$

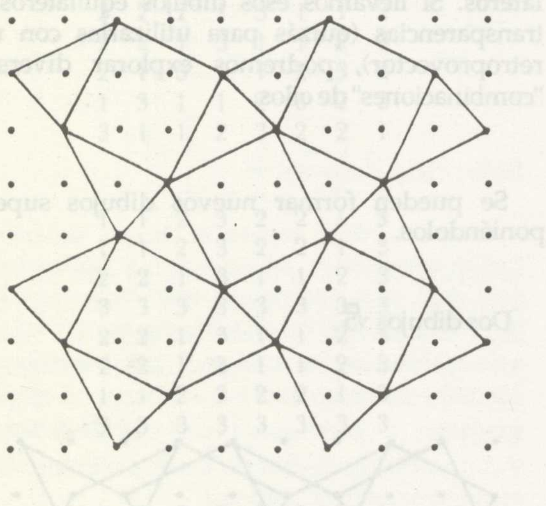


Dos dibujos $\sqrt{10}$.

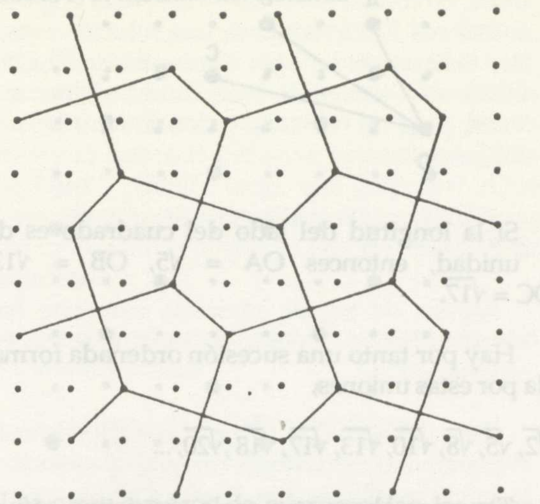


Podemos superponer también dos dibujos distintos, que encajarán bien si se han generado a partir del mismo conjunto de puntos.

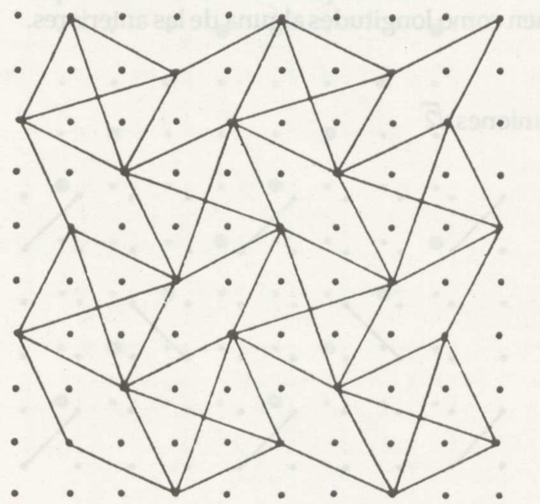
$\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$



$\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$



$\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$



Las extensiones inmediatas son evidentes. ¿Se pueden hacer otras uniones, u otras superposiciones de dos dibujos? ¿Pueden ser interesantes las superposiciones de tres o más dibujos? ¿El módulo 2 es demasiado sencillo? ¿El módulo 4 es demasiado complicado? ¿Son posibles otras disposiciones de los puntos?

Más arte aritmético, y octógonos

DEBORAH CARYL
Fillmore Middleschool, Buffalo, N.Y.

En el artículo de Ian Harris, Arte aritmético, MT Nº 71, se generaban dibujos por medio de una sucesión de Fibonacci finita colocada sobre una cuadrícula, y de forma que los puntos estuviesen conectados entre sí por distancias previamente elegidas. De forma similar decidí utilizar la sucesión $s_n = (s_{n-1}) \times (s_{n-2})$ módulo 3 y módulo 5 para generar nuevos dibujos. El propósito original era idear un método motivacional para la enseñanza de diversos aspectos de la geometría en el grado décimo (*) a través de la utilización de dibujos. Los estudiantes estarían más interesados en hallar la distancia entre dos puntos, la intersección de dos rectas o la igualdad de lados y ángulos si se dedicasen a investigar esas propiedades como parte de un hermoso dibujo geométrico.

Las disposiciones numéricas siguientes han sido obtenidas con $s_o = 1$ y $s_1 = 2$, y con distintas elecciones para la segunda fila.

Módulo 3

A	1	2	2
	2	1	2
	2	2	1

B	1	2	2
	1	2	2
	1	1	1

C	1	2	2
	2	2	1
	2	1	2

Módulo 5

D	1	2	2	4	3	2
	1	2	2	4	3	2
	1	4	4	1	4	4
	1	3	3	4	2	3
	1	2	2	4	3	2
	1	1	1	1	1	1

E	1	2	2	4	3	2
	2	2	4	3	2	1
	2	4	3	2	1	2
	4	3	2	1	2	2
	3	2	1	2	2	4
	2	1	2	2	4	3

F	1	2	2	4	3	2
	2	4	3	2	1	2
	2	3	1	3	3	4
	4	2	3	1	3	3
	3	1	3	3	4	2
	2	2	4	3	2	1

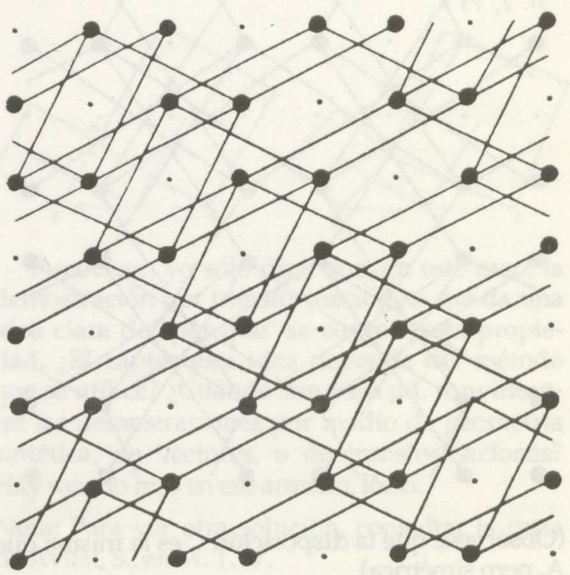
(*) *Ver nota de la pág. 57*

G	1	2	2	4	3	2
	4	3	2	1	2	2
	4	1	4	4	1	4
	1	3	3	4	2	3
	4	3	2	1	2	2
	4	4	1	1	4	1

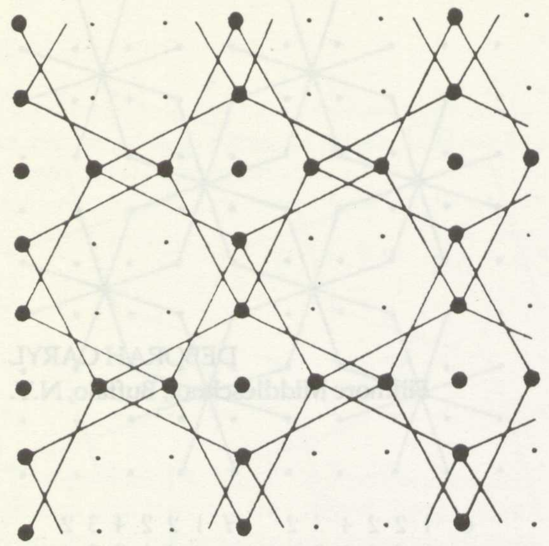
H	1	2	2	4	3	2
	3	2	1	2	2	4
	3	4	2	3	1	3
	4	3	2	1	2	2
	2	2	4	3	2	1
	3	1	3	3	4	2

Como sugiere Ian Harris, vamos a elegir ahora un número de cada disposición numérica para seleccionar puntos en un retículo cuadrado de puntos, y obtengamos un dibujo uniendo todos los pares de puntos que distan entre sí una cierta distancia prefijada.

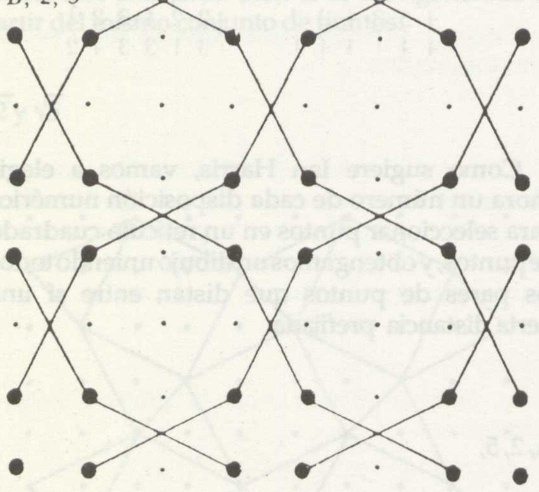
A, 2, 5,



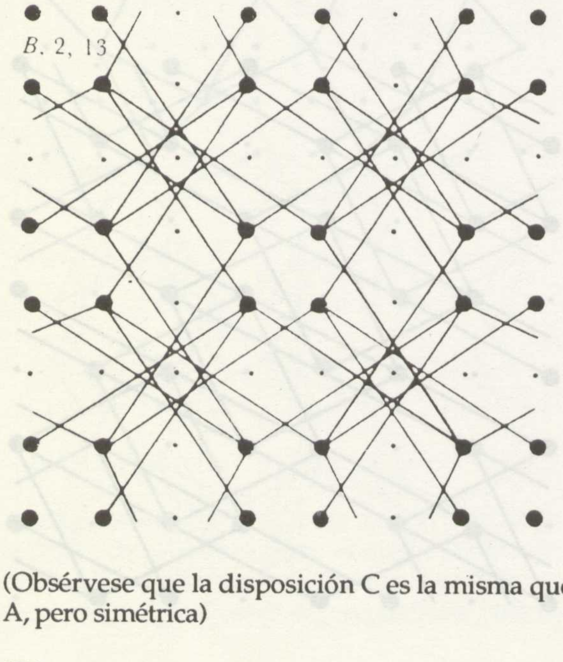
B, 1, 5 (compárese con el primer diagrama de la página 29 de MT No 71)



B, 2, 5

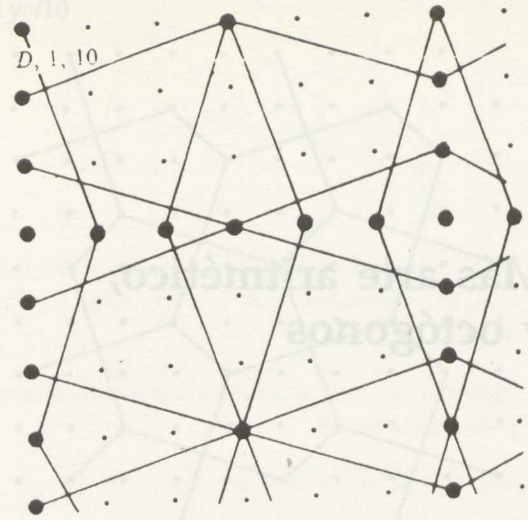


B, 2, 13

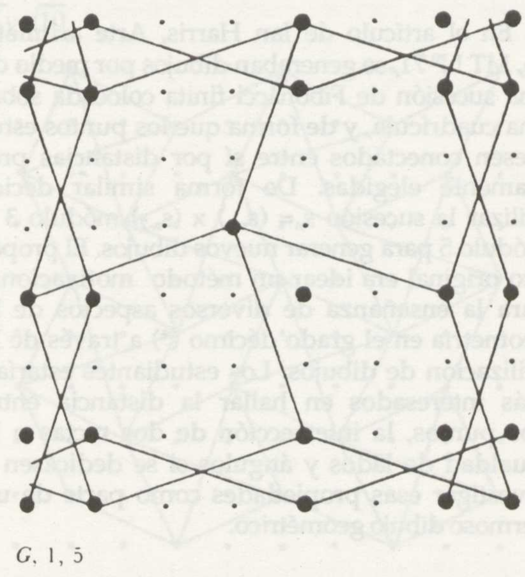


(Obsérvese que la disposición C es la misma que A, pero simétrica)

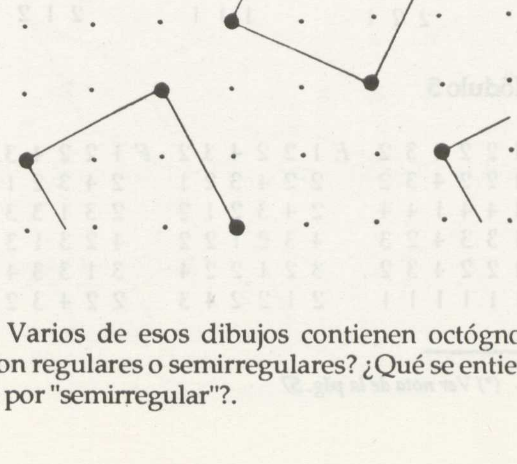
D, 1, 10



D, 2, 10



G, 1, 5



Varios de esos dibujos contienen octógnos. ¿Son regulares o semirregulares? ¿Qué se entiende por "semirregular"?.

MAS SOBRE TRIANGULOS

M.T.45 GILES, G. **Un poco de geometría usando transformaciones**

M.T.54 BRYANT, V.W. y AUSTIN, A.K. **Un triángulo equilátero inscrito**

Se puede pensar que se sabe "todo" sobre una figura tan sencilla como el triángulo. Ya hay un artículo en esta colección sobre un triángulo equilátero en la sección que trata de lo especiales que son algunas cosas de las que estudiamos.

El problema presentado por Bryant y Austin se puede enunciar con sencillez y se entiende fácilmente. Los métodos de solución no son en absoluto evidentes para mí, y eso me gusta. Obsérvese que escribo métodos. Hay diversos métodos distintos y, lo que es más apasionante, ¡no todos llevan a la misma solución, esto es, la solución no es única! Si Ud. aprecia los problemas que tienen más de una solución, añada este a su colección. Y de paso, trate de resolver el problema después de leer de qué se trata y antes de ver ninguna de sus soluciones.

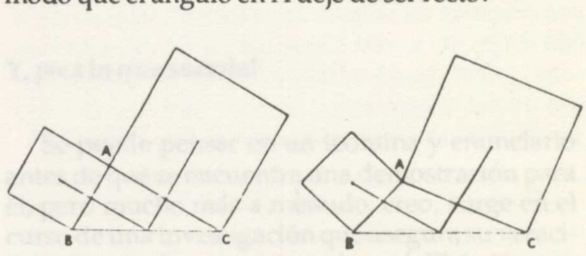
¡Y qué gran sorpresa y placer encontrará ud. al final, cuando se encuentre con una asombrosa generalización! Una generalización que va más allá de la esperada de pasar de un triángulo a un n-ágono. Quizá, para no estropeársela ud. mismo, debería tapar la última columna y tratar de hacerla antes de leerla.

Al principio pensé incluir el artículo de Giles en una sección con el título de "Demostraciones por transformación". Sin embargo, las propiedades de los triángulos que se indican en él son más fuertes que el hecho de que se deduzcan de transformaciones. Cuando apareció el artículo esas propiedades no me llamaron la atención tanto, lo que muestra una vez más que merece la pena releer los artículos, ya que los intereses propios cambian. Encontrará ud. allí algunas propiedades apasionantes y poco conocidas de los triángulos.

Una de las propiedades descritas es la siguiente:

Si se trazan cuadrados sobre dos lados de un triángulo y se unen sus centros al punto medio del tercer lado, entonces esos dos segmentos son congruentes y perpendiculares.

La demostración por transformación no me da una idea suficiente de por qué esto debe ser cierto. Usando la geometría sintética, es evidente por qué se cumple la propiedad para un triángulo rectángulo isósceles, para un triángulo rectángulo o para un triángulo isósceles. ¿Hay alguna manera de "ver" por qué se puede generalizar la propiedad a cualquier triángulo por medio de la geometría sintética, o bien considerando un modelo? Por ejemplo, si es cierta para un triángulo rectángulo **¿Por qué** debe seguir siendo cierta cuando se mueven AB o AC de modo que el ángulo en A deje de ser recto?



Puede ser, yo sólo digo que, en este caso, la demostración por transformación no me da una idea clara de "por qué" se cumple esta propiedad. ¿El captar esta idea depende del método que se utilice? ¿Cuándo son para ud. convincentes las demostraciones por medio de geometría sintética, de vectores, o de transformaciones? Hay mucho más en ese artículo, léalo.

Nota: Para ver otra solución, consultar la carta de Avital, S., en M. T. 57.

MAS SOBRE TRIANGULOS

M.T.45 GILES, G. Un poco de geometría usando transformaciones

M.T.54 BRYANT, V.W. y AUSTIN, A.K. Un triángulo equilátero inscrito

Se puede pensar que se sabe "todo" sobre una figura tan sencilla como el triángulo. Ya hay un artículo en esta colección sobre un triángulo equilátero en la sección que trata de lo especiales que son algunas cosas de las que estudiamos.

El problema presentado por Bryant y Austin se puede enunciar con sencillez y se entiende fácilmente. Los métodos de solución no son en absoluto evidentes para mí, y eso me gusta. Obsérvese que escribo, métodos. . Hay diversos métodos distintos y, lo que es más apasionante, ¡no todos llevan a la misma solución, esto es, la solución no es única! Si Ud. aprecia los problemas que tienen más de una solución, añada éste a su colección. Y de paso, trate de resolver el problema después de leer de qué se trata y antes de ver ninguna de sus soluciones.

¡Y qué gran sorpresa y placer encontrará ud. al final, cuando se encuentre con una asombrosa generalización! Una generalización que va más allá de la esperada de pasar de un triángulo a un n-ágono. Quizá, para no estropeársela ud. mismo, debería tapar la última columna y tratar de hacerla antes de leerla.

Al principio pensé incluir el artículo de Giles en una sección con el título de "Demostraciones por transformación". Sin embargo, las propiedades de los triángulos que se indican en él son más fuertes que el hecho de que se deslizan de transformaciones. Cuando apareció el artículo esas propiedades no me llamaron la atención tanto, lo que muestra una vez más que merece la pena releer los artículos, ya que los intereses propios cambian. Encontrará ud. allí algunas propiedades apasionantes y poco conocidas de los triángulos.

Una de las propiedades descritas es la siguiente:

Si se trazan cuadrados sobre dos lados de un triángulo y se unen sus centros al punto medio del tercer lado, entonces esos dos segmentos son congruentes y perpendiculares.

La demostración por transformación no me da una idea suficiente de por qué esto debe ser cierto. Usando la geometría sintética, es evidente por qué se cumple la propiedad para un triángulo rectángulo isósceles, para un triángulo rectángulo o para un triángulo isósceles. ¿Hay alguna manera de "ver" por qué se puede generalizar la propiedad a cualquier triángulo por medio de la geometría sintética, o bien considerando un modelo? Por ejemplo, si es cierta para un triángulo rectángulo ¿Por qué debe seguir siendo cierta cuando se mueven AB o AC de modo que el ángulo en A deje de ser recto?

Puede ser, yo sólo digo que, en este caso, la demostración por transformación no me da una idea clara del "por qué" se cumple esta propiedad. ¿El captar esta idea depende del método que se utilice? ¿Cuándo son para ud. convincentes las demostraciones por medio de geometría sintética, de vectores, o de transformaciones? Hay mucho más en ese artículo; léalo.

Nota: Para ver otra solución, consultar la carta de Avital, S., en M.T.57.

Un poco de Geometría usando transformaciones

Geoffrey Giles
University of Stirling

Coja un cuadrilátero. Gírelo ciento ochenta grados alrededor del punto medio de uno de sus lados y obtendrá un hexágono con sus lados opuestos iguales y paralelos.

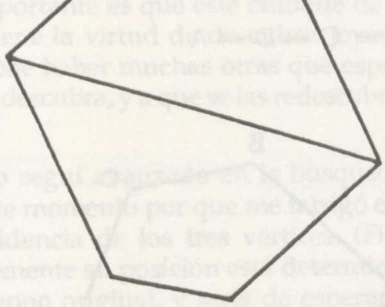


Fig. 1

Ahora añada triángulos equiláteros alrededor

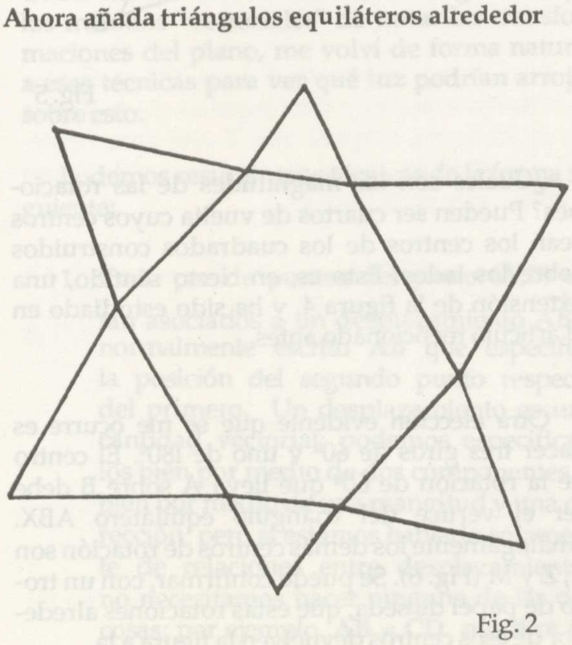


Fig. 2

y por último, cogiendo las puntas de la estrella a pares construya más triángulos equiláteros esta vez apuntando hacia el interior.

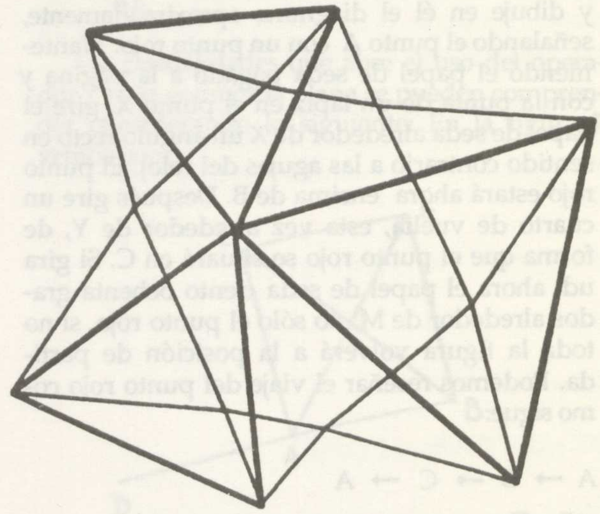


Fig. 3

Y, ¡vea lo que sucede!

Se puede pensar en un teorema y enunciarlo antes de que se encuentre una demostración para él, pero mucho más a menudo, creo, surge en el curso de una investigación que asegura su veracidad. Esto es lo que me pasó a mí. El fascinante artículo de D.F. St. John Jesson en M.T. 42 que trata sobre algunas aplicaciones de los métodos de la geometría de las transformaciones me hizo empezar a preguntarme ...

Un pequeño trabajo (adaptado del artículo antes citado) ayudará a los que aún no han experimentado la alegría y el asombro que pueden ocasionar el "ver" una demostración por medio de la geometría de las transformaciones:

Coloque una hoja de papel de seda (la variedad perforada es la ideal) sobre una versión más grande de la figura 4

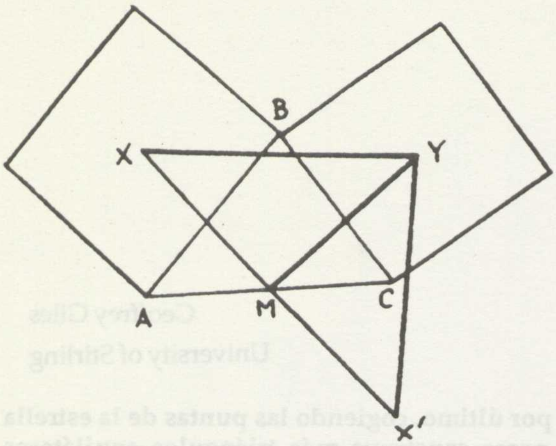


Fig. 4

y dibuje en él el diagrama aproximadamente, señalando el punto A con un punto rojo. Manteniendo el papel de seda pegado a la página y con la punta de un lápiz en el punto X, gire el papel de seda alrededor de X un ángulo recto en sentido contrario a las agujas del reloj. El punto rojo estará ahora encima de B. Después gire un cuarto de vuelta, esta vez alrededor de Y, de forma que el punto rojo se situará en C. Si gira ud. ahora el papel de seda ciento ochenta grados alrededor de M, no sólo el punto rojo, si no toda la figura volverá a la posición de partida. Podemos reseñar el viaje del punto rojo como sigue:

A → B → C → A

Repita ahora las tres mismas transformaciones después de señalar la posición original de X con un punto verde. No se precipite. Aunque ud. sabe que el punto verde va a ir a parar a la misma posición que tenía, no sabe por qué camino va a ir y eso es importante...

Haciendo esto (y creo que hacer esto es realmente mucho más valioso que limitarse a imaginar lo que sucede, porque van apareciendo poco a poco ideas inesperadas) podrá confirmar que la ruta que ha seguido es

X → X → X' → X

y verá que la segunda transformación le dice que YX y Y X' tienen igual longitud y son perpendiculares. La tercera transformación le dice además que M es el punto medio de X' X. Resulta entonces que MX y MY son iguales en longitud y forman un ángulo recto.

¿Habría adivinado estas propiedades mirando el diagrama? Y, ¿de qué otra forma se podría haber demostrado con tanta sencillez?

Hay dos hechos esenciales en este pequeño trabajo. En primer lugar que si se hace girar al papel de seda dos cuartos de vuelta y después media vuelta, entonces se vuelve a su orientación original. En segundo lugar, si un punto del papel de seda (en este caso A) termina en su posición original, así lo hacen todos los demás cuando la orientación final es la misma que la orientación original.

Lo que a mí me resulta realmente apasionante de esta teoría es que, como ha demostrado D. F. St. John Jesson, se puede utilizar no sólo para demostrar propiedades geométricas, sino también para encontrar nuevas propiedades.

Supongamos que tenemos cuatro rotaciones que son equivalentes a la transformación idéntica. Tomando A como punto de partida, supongamos que las rotaciones sucesivas dan la aplicación compuesta

A → B → C → D → A

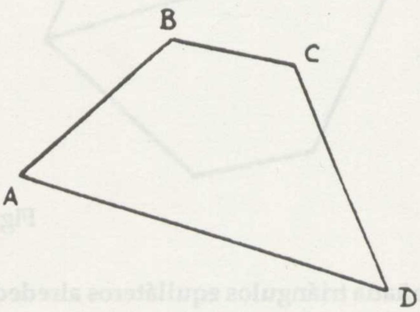


Fig. 5

¿Cuáles son las magnitudes de las rotaciones? Pueden ser cuartos de vuelta cuyos centros sean los centros de los cuadrados construidos sobre los lados. Esto es, en cierto sentido, una extensión de la figura 4, y ha sido estudiado en el artículo mencionado antes.

Otra elección evidente que se me ocurre es hacer tres giros de 60º y uno de 180º. El centro de la rotación de 60º que lleva A sobre B debe ser el vértice del triángulo equilátero ABX. Análogamente los demás centros de rotación son Y, Z y M (Fig. 6). Se puede confirmar, con un trozo de papel de seda, que estas rotaciones alrededor de esos centros devuelven la figura a la

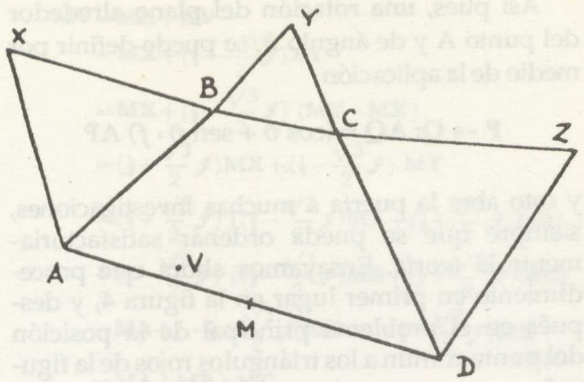


Fig. 6

posición inicial. Si consideramos ahora, como lo hemos hecho en la figura 4, las imágenes sucesivas de X, vemos que tenemos la propiedad mostrada en la figura 3 aunque allí el diagrama ha sido "completado".

Yo no sé si esta bella propiedad ha sido observada antes de ahora. Naturalmente me gusta pensar que es un descubrimiento nuevo, pero lo importante es que este enfoque de la geometría tiene la virtud de descubrir joyas como esta. Debe haber muchas otras que esperan a que se las descubra, y a que se las redescubra.

No seguí avanzado en la búsqueda a partir de este momento por que me intrigó el punto de coincidencia de los tres vértices. (Fig. 3). Evidentemente su posición está determinada por el hexágono original, y sería de esperar que estuviese relacionado con el hexágono de una forma sencilla, pero yo no puedo ver esta conexión. Como me han interesado durante algún tiempo los métodos "vectoriales" de tratar las transformaciones del plano, me volví de forma natural a esas técnicas para ver qué luz podrían arrojar sobre esto.

Podemos resumir esas técnicas de la forma siguiente:

1. Cada par de puntos del plano (A,B) están asociados a un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$, -normalmente escrito **AB** que especifica la posición del segundo punto respecto del primero. Un desplazamiento es una cantidad vectorial; podemos especificarlos bien por medio de dos componentes, o bien por medio de una mangitud y una dirección, pero si estamos hablado solamente de relaciones entre desplazamientos no necesitamos hacer ninguna de las dos cosas; por ejemplo, **AB** = **CD** nos dice inmediatamente que ABCD es un paralelogramo.

2. Como las longitudes, los desplazamientos son abstracciones de situaciones geométricas y, también como las longitudes, los desplazamientos se pueden sumar; la adición utilizada se llama adición "vectorial". Los casos más sencillos son los del tipo **AB + BC = AC**; pero un cálculo puede implicar adiciones como (Fig.7) **AE + CB = DB**. Es conveniente recordar que **QP = -PQ** y que **PQ = AQ - AP** para todos los puntos A, P y Q. También tiene el significado evidente una expresión del tipo 3 **AB**.

3. f es un operador definido sobre el conjunto de los desplazamientos por la relación **PQ** = f **RS** $\Leftrightarrow$ **PQ** y **RS** son iguales en longitud y **PQ** forma un ángulo de 90º con **RS**.

Las posibilidades que abre el uso del operador f en la geometría plana se pueden comprender considerando lo siguiente: En la figura 7 vemos que:

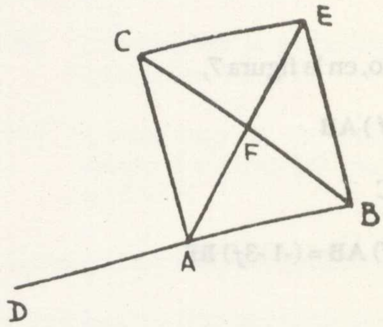


Fig. 7

AC = f **AB** y análogamente.

AD = f **AC**, de manera que podemos escribir

si queremos **AD** = f (f **AB**)

o **AD** = f^2 **AB**

Pero AD = -AB, de manera que el efecto de usar el operador f dos veces sobre un desplazamiento es el mismo que multiplicarlo por -1. Podemos decir entonces que f es la raiz cuadrada de -1.

Pero de momento no no interesa el nuevo enfoque que dan los operadores a los números complejos. Estamos hablando de geometría, de manera que consideremos de nuevo la figura 7.

Tenemos

$$AE = AB + BE$$

$$= AB + AC$$

o bien podemos escribir $AE = AB + f\,AB$

o, si queremos, $AE = (1 + f)\,AB$

¿Se siente ud. satisfecho con esto? ¿Qué derecho tenemos a sumar números y operadores de esta manera? ¿Debemos justificar primero el procedimiento?

No. Tenemos perfecto derecho a explorar la situación usando solamente un razonamiento plausible. Si lo que encontramos parece tener sentido, deberemos fundamentarlo todo sobre una base sólida antes de afirmàr que es algo más que algunos garabatos interesantes. Pero así como los descubrimientos preceden a las demostraciones, el razonamiento heurístico debe preceder a la argumentación lógica.

Probablemente resultará evidente de lo que hemos hecho que cada desplazamiento se puede expresar en función de un desplazamiento dado:

por ejemplo, en la figura 7,

$$AE = (1 + f)\,AB$$

$$AB = -f\,AC$$

$$DE = (2 + f)\,AB = (-1 - 3f)\,BF$$

etc.

Observemos en particular que $AF = (1/2 + 1/2\,f)\,AB$.

El significado de que cada desplazamiento se pueda expresar en función de cualquier otro desplazamiento del plano quizá se aprecie mucho mejor si se considera la figura 8. Si OM tiene la misma longitud que OL y forma un ángulo ϑ con él, entonces

$$OM = ON + NM = \cos\vartheta .\ OL + \operatorname{sen}\vartheta .\ f\,OL = (\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta .\ f)\,OL$$

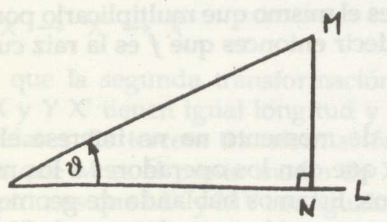


Fig. 8

Así pues, una rotación del plano alrededor del punto A y de ángulo ϑ, se puede definir por medio de la aplicación

$$P \to Q\colon AQ = (\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta \cdot f)\,AP$$

y esto abre la puerta a muchas investigaciones, siempre que se pueda ordenar satisfactoriamente la teoría. Ensayamos ahora este procedimiento en primer lugar en la figura 4, y después en el problema principal de la posición del punto común a los triángulos rojos de la figura 3.

En la figura 4 tenemos

$$MX = MA + AX = MA + (1/2 + 1/2\,f)\,AB = MA + (1/2 + 1/2\,f)(MB - MA) = (1/2 - 1/2f)\,MA + (1/2 + 1/2f)MB$$

Análogamente $MY = (1/2 - 1/2f)\,MB + (1/2 + 1/2f)\,MC = (-1/2 - 1/2f)\,MA + (1/2 - 1/2f)\,MB$

Como $MC = -MA$ tenemos, "multiplicando" cada miembro por f, y recordando que se puede sustituir f^2 por -1,

$$f\,MY = (-1/2\,f + 1/2)\,MA + (1/2\,f + 1/2)\,MB = MX$$

Así pues MX y MY son iguales en longitud y perpendiculares entre sí.

Esta forma alternativa de obtener el primer resultado no aumenta en gran medida mi visión de la naturaleza geométrica de la figura, pero promete ser un método bastante fuerte para demostrar hipótesis, una vez que se le haya dado respetabilidad.

Pero ahora queremos ir más allá y revelar la relación entre el punto especial de la figura 3 y el hexágono original. Sea V este punto especial de coincidencia de los vértices en la figura 6. Prepararemos el camino

$$MX = MA + AX = MA + (\cos 60^{\circ} + \operatorname{sen} 60^{\circ}\,f)\,AB = MA + (1/2 + \sqrt{3}/2\,f)\,AB = MA + (1/2 + \sqrt{3}/2\,f)(MB - MA) = (1/2 - \sqrt{3}/2f)\,MA + (1/2 + \sqrt{3}/2\,f)\,MB$$

(Esto sugiere un teorema ......)

Análogamente $MY = (1/2 - \sqrt{3}/2f)\,MB + (1/2 + \sqrt{3}/2\,f)\,MC$.

Vayamos ahora directamente a lo que nos interesa:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{MV} &= \mathbf{MX}+\mathbf{XV}\\
&= \mathbf{MX}+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{XY}\\
&= \mathbf{MX}+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)(\mathbf{MY}-\mathbf{MX})\\
&= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MX}+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MY}\\
&= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\left[\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MA}+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MB}\right]\\
&\quad+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\left[\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MB}+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MC}\right]\\
&= \mathbf{MA}+\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MB}+\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{J}\right)\mathbf{MB}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathbf{MC}\\
&= \mathbf{MA}-\mathbf{MB}+\mathbf{MC},
\end{aligned}
$$

lo que es realmente un resultado muy sencillo. Su significado geométrico se puede ver escribiéndolo como

$$\mathbf{MV} - \mathbf{MC} = \mathbf{MA} - \mathbf{MB},$$

esto es,

$$\mathbf{CV} = \mathbf{BA}$$

Por tanto ABCV es un paralelogramo.

Esto parece una respuesta tan "natural", y tan evidente en la **figura 3**, si se sabe lo que se busca, que me molestó no haberla imaginado antes. Y si ahora se completa del todo la figura 3, aparecen mucho más claras las interrelaciones entre las diversas partes. Considérese el triángulo sombreado, por ejemplo, y véase lo que sucede si se gira ....

Tenemos

AE = AB + BE

= AB + AC

o bien podemos escribir AE = AB + f AB

o, si queremos, AE = (1 + f) AB

[illegible] hecho tanteos [illegible] esta manera. ¿Funciona [illegible] en general?

Sí. Tenemos perfecto derecho a explorar la situación usando solamente lo que parece plausible. Si lo que encontramos parece tener sentido, deberemos fundamentarlo todo sobre una base sólida antes de afirmar que es algo más que algunos garabatos interesantes. Pero así como los descubrimientos preceden a las demostraciones, el razonamiento heurístico debe preceder a la argumentación lógica.

Probablemente resultará evidente de lo que hemos hecho que cada desplazamiento se puede expresar en función de un desplazamiento dado:

por ejemplo, en la figura 7,

AE = (1 + f) AB

AB = $-f$ AC

DE = (2 + f) AB = (-1 -3f) BE

etc.

Observemos en particular que AF = (1/2 + 1/2 f) AB.

El significado de que cada desplazamiento se pueda expresar en función de cualquier otro desplazamiento del plano quizá se aprecie mucho mejor si se considera la figura 8. Si OM tiene la misma longitud que OL y forma un ángulo θ con él, entonces

OM = ON + NM = cos θ. OL + sen θ. f OL = (cos θ + sen θ. f) OL

Fig. 8

Así pues, una rotación del plano alrededor del punto A y de ángulo θ se puede definir por medio de la aplicación

$$P \rightarrow Q: AQ = (\cos\theta + \text{sen}\,\theta \cdot f)\, AP$$

y esto abre la puerta a muchas investigaciones, siempre que se pueda ordenar satisfactoriamente la teoría. Ilustraremos este procedimiento en primer lugar en la figura 4, y después en el problema principal de la posición del punto común a los triángulos rojos de la figura 3.

En la figura 4 tenemos

MX = MA + AX = MA + (1/2 + 1/2 f) AB = MA + (1/2 +1/2 f) (MB - MA) = (1/2 - 1/2f) MA + (1/2 + 1/2f)MB

Análogamente MY = (1/2 - 1/2f) MB + (1/2 + 1/2f) MC = (-1/2 -1/2f) MA + (1/2 - 1/2f) MB

Como MC = -MA tenemos, "multiplicando" cada miembro por f, y recordando que se puede sustituir f^2 por -1,

f MY = (-1/2 f + 1/2) MA + (1/2 f + 1/2) MB = MX

Así pues MX y MY son iguales en longitud y perpendiculares entre sí.

Esta forma alternativa de obtener el primer resultado no aumenta en gran medida mi visión de la naturaleza geométrica de la figura, pero promete ser un método bastante fuerte para demostrar hipótesis, una vez que se le haya dado respetabilidad.

Pero ahora queremos ir más allá y revelar la relación entre el punto especial de la figura 3 y el hexágono original. Sea V este punto especial de coincidencia de los vértices en la figura 6. Prepararemos el camino

MX = MA + AX = MA + (cos 60º + sen 60º f) AB = MA + (1/2 + $\sqrt{3}$/2 f) AB = MA + (1/2 + $\sqrt{3}$/2 f) (MB - MA) = (1/2 - $\sqrt{3}$/2f) MA + (1/2 + $\sqrt{3}$/2 f) MB

(Esto sugiere un teorema .....)

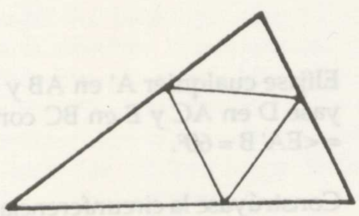
Análogamente MY = (1/2 - $\sqrt{3}$/2f) MB + (1/2 + $\sqrt{3}$/2 f) MC.

Vayamos ahora directamente a lo que nos interesa:

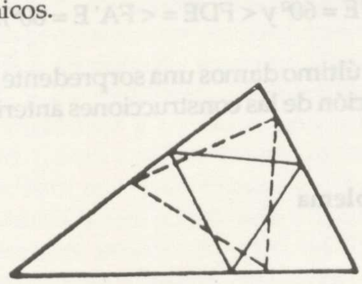
Un triángulo equilátero inscrito

V. W. BRYANT y A.K. AUSTIN
The University of Sheffield

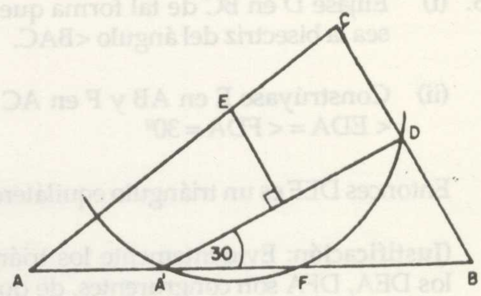
Hace poco propusimos la siguiente cuestión a una clase de jóvenes matemáticos: "Dado un triángulo, mostrar cómo se pueden construir tres puntos, uno sobre cada lado, que sean vértices de un triángulo equilátero". Esta situación se ilustra en la figura siguiente



Nos quedamos tan encantados con la variedad de soluciones elegantes que obtuvimos y con una notable generalización de los resultados, que decidimos presentar aquí una cuantas de las construcciones posibles. Observemos en primer lugar que los tres puntos hallados no son en absoluto únicos.



Por tanto las diversas construcciones que damos a continuación darán lugar a triángulos equiláteros distintos. Por otra parte hace falta elegir con cuidado el punto de partida de algunas de estas construcciones. Como dijo uno de los alumnos de la clase, "se debe elegir el primer punto "sensatamente"", y aquí hemos supuesto que siempre es así. De hecho esto significa sencillamente que se deben excluir unos cuantos puntos no tan razonables.



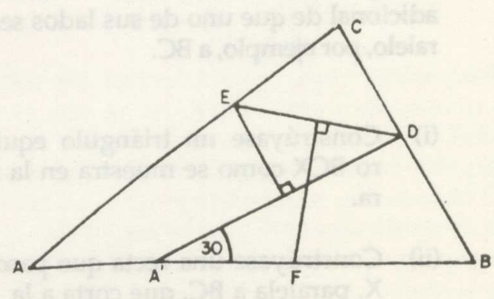
1. (i) Elíjase cualquier A' en AB y constrúyase D en BC con < DA' B = 30º.

   (ii) Constrúyase la mediatriz de A' D que corta a AC en E.

   (iii) Constrúyase la circunferencia de centro E y radio ED que corta AB en A' y F.

   Entonces DEF es un triángulo equilátero.

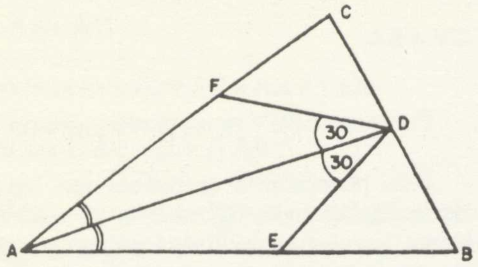
   (Justificación: Por las propiedades angulares de una circunferencia, tenemos que < FED = 2 < FA' D = 60º. Por tanto, como EF = ED, resulta que DEF es equilátero)



2. (i) y (ii) como el ejemplo 1.

   (iii) Construir la mediatriz de DE. Corta a AB en F.

DEF es el mismo triángulo equilátero construido en el ejemplo 1.

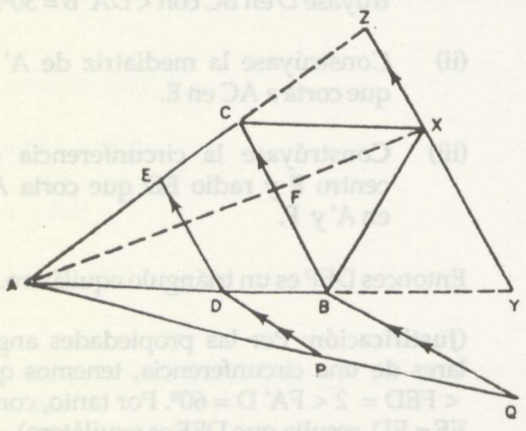


3. (i) Elíjase D en BC de tal forma que AD sea la bisectriz del ángulo <BAC.

   (ii) Constrúyase E en AB y F en AC con < EDA = < FDA = 30º

   Entonces DEF es un triángulo equilátero.

   (**Justificación**: Evidentemente los triángulos DEA, DFA son congrurentes, de donde tenemos que DE = DF, y DEF es equilátero)



4. **En este ejemplo construiremos un triángulo equilátero inscrito con la restricción adicional de que uno de sus lados sea paralelo, por ejemplo, a BC.**

   (i) Constrúyase un triángulo equilátero BCX como se muestra en la figura.

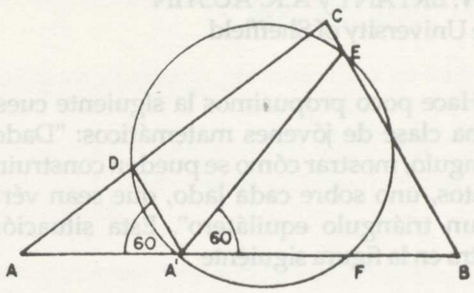
   (ii) Constrúyase una recta que pase por X, paralela a BC, que corta a la prolongación de AB en Y y a la prolongación de AC en Z.

   (iii) Constrúyase una recta APQ con <YAQ agudo y distinto de cero, y con AP = AB y AQ = AY

   (iv) Constrúyase D en AB con PD/ /QB, E en AC con DE/ /BC, y supongamos que BC y AX se cortan en F.

   Entonces DEF es un triángulo equilátero con DE / / BC.

   (**Justificación**: DEF, inscrito en ABC, es sencillamente una versión "a escala reducida" de BCX, inscrito en AYZ).



5. (i) Elíjase cualquier A' en AB y constrúyase D en AC y E en BC con <DA'A =<EA' B = 60º.

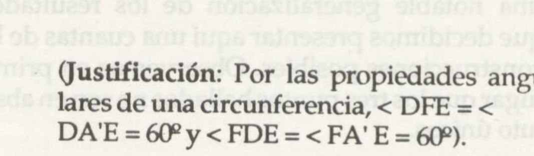
   (ii) Constrúyase la circunferencia que pasa por D, E y A' y que corta a AB en F.

   Entonces DEF es un triángulo equilátero.

   (Justificación: Por las propiedades angulares de una circunferencia, < DFE = < DA'E = 60º y < FDE = < FA' E = 60º).

   Por último damos una sorpredente generalización de las construcciones anteriores:

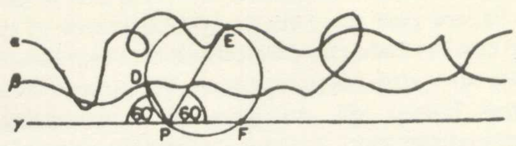
Problema



En una situación de este tipo (que se puede describir, por supuesto, analíticamente, pero aquí bastará con un diagrama), construir tres puntos, uno en cada una de las curvas α, β y γ, que sean vértices de un triángulo equilátero.

Soluciones

Podemos adaptar cada uno de los ejemplos 1, 2 y 5 a este problema mucho más general. Por ejemplo, como en 5, elijamos P en γ y construyamos D, E como se ha dicho. Entonces, la circunferencia que pasa por D, E y P corta a γ de nuevo en F y da el triángulo equilátero DEF.



Es sorprendente cuánta diversión puede aún encontrarse en el "eterno triangulo".

DEF es el mismo triángulo equilátero construido en el ejemplo 1.

3. (i) Elíjase D en BC de tal forma que AD sea la bisectriz del ángulo <BAC.

   (ii) Constrúyase E en AB y F en AC con < EDA = < FDA = 30º

   Entonces DEF es un triángulo equilátero.

   (Justificación: Evidentemente los triángulos DEA, DFA son congruentes, de donde tenemos que DE = DF, y DEF es equilátero)

4. En este ejemplo construiremos un triángulo equilátero inscrito con la restricción adicional de que uno de sus lados sea paralelo, por ejemplo, a BC.

   (i) Constrúyase un triángulo equilátero BCX como se muestra en la figura.

   (ii) Constrúyase una recta que pase por X, paralela a BC, que corta a la prolongación de AB en Y y a la prolongación de AC en Z.

   (iii) Constrúyase una recta APQ con <YAQ agudo y distinto de cero, y con AP = AB y AQ = AY

   (iv) Constrúyase D en AB con PD// QB, E en AC con DE// BC, y supongamos que BC y AX se cortan en F.

   Entonces DEF es un triángulo equilátero

   (Justificación: DEF, inscrito en ABC, es sencillamente una versión "a escala reducida" de BCX, inscrito en AYZ)

5. (i) Elíjase cualquier A' en AB y constrúyase D en AC y E en BC con <DA'A = <EA'B = 60º.

   (ii) Constrúyase la circunferencia que pasa por D, E y A' y que corta a AB en F.

   Entonces DEF es un triángulo equilátero.

   (Justificación: Por las propiedades angulares de una circunferencia, < DFE = < DA'E = 60º y < FDE = < FA'E = 60º).

   Por último damos una sorpredente generalización de las construcciones anteriores:

   Problema

En una situación de este tipo (que se puede describir, por supuesto, analíticamente, pero aquí bastará con un diagrama), construir tres puntos, uno en cada una de las curvas α, β y γ, que sean vértices de un triángulo equilátero.

M.T.67 OLDKNOW, Adrian. Geometría del movimiento en acción

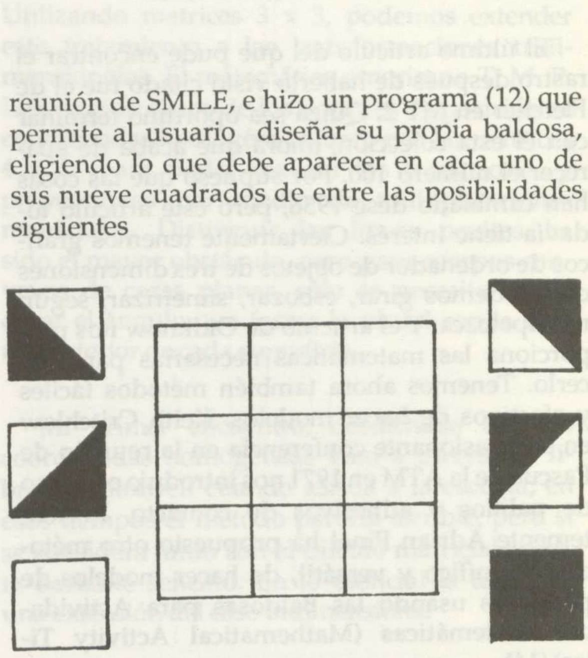
M.T.2 FLETCHER, T.J. Dibujos sólidos

Hace más o menos veinte años, la pregunta que se hacía con más frecuencia sobre la geometría trataba del papel que juega Euclides en la Geometría escolar. Posteriormente se planteó la cuestión de qué papel debe jugar la geometría de transformaciones. En la actualidad la pregunta que oigo más frecuentemente trata del efecto que los ordenadores tendrán en la enseñanza de la Geometría.

Fielker (10) ha escrito una serie de artículos titulados "Romper las cadenas de Euclides" y Alan Bell (11) ha escrito otra con el nombre de "Proof in Transformation Geometry". (*)

Yo no puedo contestar a la pregunta de qué papel jugarán los ordenadores en la Geometría, pero puedo mencionar dos ejemplos. He visto muchos programas de ordenador en una reunión de SMILE, pero el que me impresionó más se llamaba TILES (baldosas), y permitía al usuario girar, simetrizar y trasladar una baldosa en un retículo. Como a mi me interesan mucho las artes visuales, quise ser capaz de dibujar mi propia baldosa y ver su eficacia cuando se utiliza en diferentes posiciones y pautas. Esto es, quería usar mi propio dibujo de baldosas con el programa TILES.

Afortunadamente, David Dwyer, que es un programador muy experimentado, estaba en la reunión de SMILE, e hizo un programa (12) que permite al usuario diseñar su propia baldosa, eligiendo lo que debe aparecer en cada uno de sus nueve cuadrados de entre las posibilidades siguientes



El segundo ejemplo que quiero mencionar trata de los gráficos generados por ordenador basados en la película de Leapfrog, "Takehalf" (Tome la mitad) (13). TILES obtiene posters y dibujos a partir de ellos.

Fue un verdadero privilegio poder participar en dos de las clases sobre ordenadores dadas por Adrian Oldknow en el Instituto de Educación de West Sussex; mencionaré solamente una de las cosas apasionantes que mostró Oldknow. Me refiero al programa que dibuja en pantalla una casa o un dodecaedro y que permite ver en qué se convierte el dibujo cuando se gira

---

(*) Demostraciones en Geometría de las transformaciones.

*(10) Fielker, D.S.: **Removing the Shackles of Euclid** M.T. Nos: 95, 96, 97, 98, 99, 101, 102, 104. Publicado en otro libro de esta colección con el título: "Romper las cadenas de Euclides"*

*(11) Bell, A.W.: **Proof in Transformation Geometry** M.T. Nos: 57, 58, 61, 63, 66.*

(12) Este programa, "NEWTILE", es sólo una idea de trabajo en el momento de enviar a prensa esta publicación.

(13) Disponible en "MICROSMILE" y ATM, "Some Lessons in Mathematics with a Microcomputer". Ver (4) para más detalles.

un cierto número de grados, se refleja o se secciona. Parece casi un milagro que aparezca el dibujo con las líneas de puntos que representan los lados no vistos correctamente dibujadas. No es bueno hablar de milagros en matemáticas. Afortunadamente, mirando numeros atrasados de MT me encontré con un artículo al que prácticamente no hice caso en su momento, y que por lo tanto no recordaba. Este artículo es el siguiente que presento; habla por sí mismo y está directamente relacionado con el programa descrito antes.

Además proporciona una lección importante en general. No es suficiente leer revistas y anotar los artículos relevantes. Los focos de interés de cada uno pueden cambiar; distintos artículos tienen interés en momentos diferentes.

El último artículo del que pude encontrar el rastro después de haberlo visto citado fue el de Fletcher en MT 2. Quizá sea oportuno terminar con él esta colección, ahora que acaba de aparecer el número 100. Por supueso que las cosas han cambiado dese 1956, pero este artículo todavía tiene interés. Ciertamente tenemos gráficos de ordenador de objetos de tres dimensiones que podemos girar, esbozar, simetrizar, según nos apetezca. Y el artículo de Oldknow nos proporciona las matemáticas necesarias para hacerlo. Tenemos ahora también métodos fáciles y efectivos de hacer modelos. Keith Critchlow en su apasionante conferencia en la reunión de Pascua de la ATM en 1971 nos introdujo en el uso de palillos y adhesivos de contacto. Recientemente Adrian Pinel ha propuesto otro método, magnífico y versátil, de hacer modelos de poliedros usando las Baldosas para Actividades Matemáticas (Mathematical Activity Tiles) (14).

Sin embargo creo que aún hay mucho campo para las imágenes estereoscópicas como instrumentos de enseñanza. Además, hay pocas cosas de este tipo, que yo conozca, que se puedan comparar con la emoción que se produce cuando una imagen en dos dimensiones se convierte de pronto en una de tres dimensiones. O cuando una imagen que aparece plana en el libro, de repente aparece en tres dimensiones. Y el hecho de que el modelo se distorsione con sólo mover la cabeza es realmente apasionante. Desgraciadamente hay un pequeño porcentaje de personas incapaces de percibir las imágenes estereocópicas.

El artículo da tal cantidad de información que estoy segura de que al volverlo a publicar aquí mucha gente se sentirá atraida por él. (Por cierto que me gustaría ver algún diagrama que me hiciese ver por cuanto tiempo ha sido suscriptora una persona que tenga el M.T. 100 ¿Cuántas personas en activo tienen en la actualidad el número 2? ¡Yo estoy ahora protegiendo el nombre de la persona que me lo prestó!) En serio, estoy segura de que muchos lectores querrán tratar de hacer sus propias imágenes estereoscópicas.

Yo he visto retroproyectores que proyectaban imágenes tridimensionales en medio de una sala de conferencias y que se podían usar con gafas polaroid. ¡Se puede incluso proyectar un puntero!

Quizá la ATM sea capaz todavía de organizar la primera exposición de anaglifos geométricos, tal como esperaba Fletcher en 1956 (¿O se ha hecho ya?) Quizá la exposición pudiese incluir gráficos de ordenador de modelos en tres dimensiones, hologramas y un sitio donde los visitantes pudiesen hacer modelos.

Yo espero con impaciencia tal "exposición". Parece algo casi natural para la ATM.

De cualquier manera, espero que cuando el número 200 salga alguien pueda reunir otra colección de artículos apasionantes. Pero una advertencia a esa persona - ¡elegir unos pocos es realmente difícil!

(14) "Mathematical Activity Tiles". Está disponible en la ATM.

Geometría del movimiento en acción

Adrian Oldknow
Bognor Regis College of Education

En el pasado me he sentido frustado por lo artificiales que eran los ejemplos geométricos que encontaba para enseñar matrices y vectores, de manera que me encantó dar con algunas aplicaciones realmente prácticas. Estas provienen del campo de los gráficos de ordenador y tratan de la manipulación de un cuerpo tridimensional y su representación visual en la pantalla. De esta forma, un diseñador de automóviles con una pantalla visual de representación controlada por ordenador, puede esbozar el diseño de un nuevo modelo, y después manipular su representación de forma que se pueda ver desde muchos ángulos distintos.

Los gráficos de ordenador, cuya historia se remonta a hace sólo diez años más o menos, se han apoyado con fuerza en los algoritmos matemáticos, más que en instrumentos electrónicos, para realizar la manipulación de dibujos. Los problemas que allí aparecen son:

(i) transformación de un cuerpo tridimensional

(ii) su proyección en una pantalla bidimensional

y (iii) cálculo de qué planos y aristas están escondidos a la vista.

Los métodos matemáticos empleados para resolver estos problemas son :

(i) representación matricial de las transformaciones geométricas

(ii) coordenadas homogéneas tridimensionales

(iii) productos escalar y vectorial.

En los textos School Mathematics Project, por ejemplo, se utilizan las matrices 2 x 2 para representar transformaciones planas, excepto la traslación, que requiere adición vectorial. Utilizando matrices 3 x 3, podemos extender este tratamiento a las transformaciones tridimensionales. El matemático americano T. M. P. Lee, sugirió el uso de los vectores de posición en coordenadas homogéneas junto con las matrices 4 x 4 para poder realizar las traslaciones y proyecciones por medio de multiplicaciónes matriciales. Distinguir las líneas ocultas ha sido el mayor obstáculo, pero para cuerpos convexos de caras planas, sólo se necesita considerar el ángulo que forma la visual con la normal exterior de cada superficie.

Mi primer encuentro, desdichado con las coordenadas homogéneas vino a través del libro de Maxwell cuando asistía a la escuela; en esos tiempos el método parecía terrible, pero si se considera junto con el cálculo matricial resulta bastante sencillo. En lo esencial la teoría es una extensión del caso bidimensional

Un punto Q en coordenadas tridimesionales (x, y, z) viene representado por el vector

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones T vienen representadas por matrices 4 x 4, y se puede hallar la imagen Q' de Q por medio de T formando el producto **Tr** y normalizando el resultado de forma que la cuarta componente sea la unidad.

Por ejemplo

$$\mathbf{Tr} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'/c \\ y'/c \\ z'/c \\ 1 \end{pmatrix}$$

da (x'/c, y'/c, z'/c) como coordenadas de Q'.

Se puede comprobar fácilmente la siguiente representación matricial de las transformaciones:

(i) identidad: cualquier matriz de la forma

$$\mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con $c \neq 0$

(ii) Traslación de vector (a, b, c)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

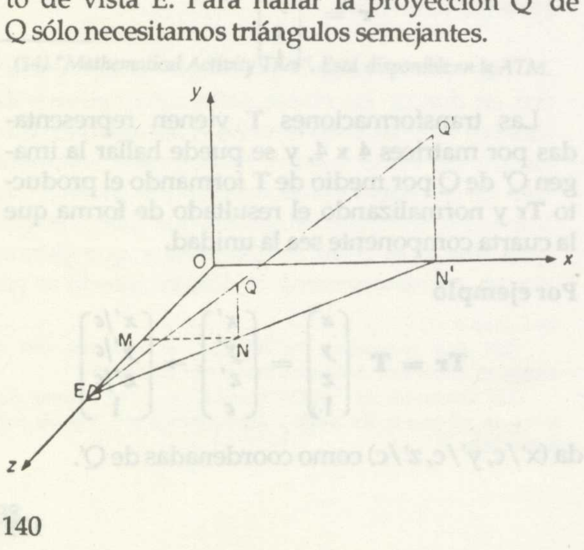
(iii) Homotecia de centro el origen y razón f,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/f \end{pmatrix}$$

(iv) rotación de ángulo ϑ en sentido positivo para ternas orientadas a derechas, alrededor de un eje; por ejemplo, alrededor del eje OX.

$$\mathbf{R}_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las vistas en perspectiva requieren un poco más de detalle. Supongamos primero que los ejes OX y OY están en el plano de proyección y elijamos el eje OZ de modo que pase por el punto de vista E. Para hallar la proyección Q' de Q sólo necesitamos triángulos semejantes.



Supongamos que las coordenadas del ojo son E (0, 0, s), y las de Q (x, y, z).

Tenemos entonces que N (x, 0, z) y M (0, 0, z) Si la proyección Q' de Q tiene como coordenadas Q'(x', y'', 0), entonces tendremos N' (x', 0, 0).

Ahora bien, por semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{x'} = \frac{MN}{ON'} = \frac{QN}{Q'N} = \frac{y}{y'} = \frac{ME}{OE} = \frac{s-z}{s}.$$

y por tanto

$$x' = \frac{sx}{s-z} = \frac{x}{c}$$

$$y' = \frac{sy}{s-z} = \frac{y}{c}$$

donde

$$c = \frac{s-z}{s} = 1 - \frac{z}{s}$$

Así pues, volviendo a las matrices, tenemos que se puede realizar la proyección por medio de

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s & 1 \end{pmatrix}$$

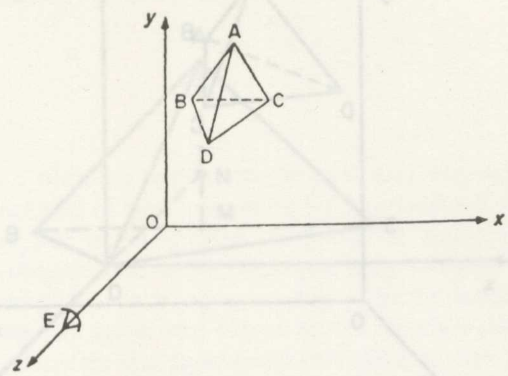
ya que

$$\mathbf{Pr} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 - \frac{z}{s} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{sx}{s-z} \\ \frac{sy}{s-z} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos ahora el instrumento necesario para describir, manejar y ver un cuerpo. Antes de considerar algunos ejemplos, echemos un vistazo al problema de localizar las líneas ocultas. Esto requiere el uso de productos vectoriales, pero el lector que haya tratado principalmente con matrices lo puede obviar de una forma fácil.

Si un punto P de un plano es visible, entonces lo son todos los puntos del plano. Si conocemos dos vectores **r**, **s** que pasan por P, entonces podemos tomar **r** Λ **s** con un signo apropiado para representar la normal exterior **n** al plano en P. Si e es la visual EP, entonces **e.n** será negativo si el ángulo entre **e** y **n** es agudo. Por tanto el plano será visible si **e.n** < 0, y estará oculto en otro caso. Se puede ver fácilmente que una arista está oculta si y sólo si es la intersección de dos planos ocultos.

Como ejemplo sencillo, consideremos un tetraedro regular desde varios puntos de vista



ABCD tiene una arista de $2\sqrt{3}$ unidades y D está en (o, 2, -1), con BCD paralelo al plano XZ, y A contenido en el plano YZ. Las demás coordenadas se pueden obtener por medio de cálculo; son A $(0,\ 2+2\sqrt{2},\ -3)$; B $(-\sqrt{3},\ 2,\ -4)$ y C $(\sqrt{3},\ 2,\ -4)$. Supongamos que el ojo se encuentra en E (0, 0, 5).

Ejemplo 1: Hallar la proyección de ABCD sobre el plano XY a partir de E.

Usemos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

sobre

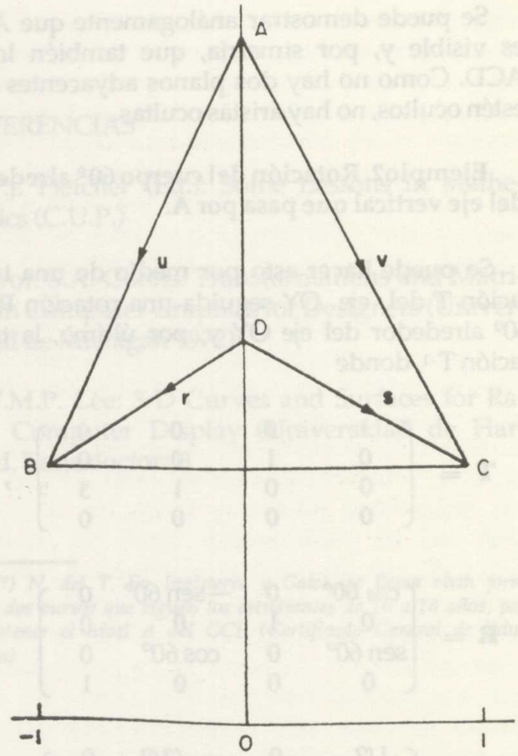
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 2+2\sqrt{2} & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde P es la matriz de proyección desde el punto de vista E, y M tiene como columnas las coordenadas homogéneas de los vectores de A, B, C y D.

$$\mathbf{PM} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 2+2\sqrt{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8/5 & 9/5 & 9/5 & 6/5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.96 & 0.96 & 0 \\ 3.02 & 1.11 & 1.11 & 1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en dos dimensiones. Por tanto las coordenadas proyectadas son A (0, 3,02), B (-0,96, 1,11), C(0, 96, 1,11) y D (0, 1,67).



Podemos demostrar ahora que, por ejemplo, el plano BCD es visible mientras que ABC está oculto.

Sea

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{ED} = (0, 2, -1) - (0, 0, 5) = (0, 2, -6),$$

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{DB} = (-\sqrt{3}, 0, -3)$$

y $\mathbf{s} = \overrightarrow{DC} = (\sqrt{3}, 0, -3)$.

Para hallar la normal exterior n a BCD en D tomaremos r Λ s para obtener n = r Λ s = (0, $-6\sqrt{3}$, 0)

Así pues n.p = $-12\sqrt{3}$ < 0, y por tanto BDC es visible.

Consideremos ahora ABC.

Sea

$$q = EA = (0,\ 2+2\sqrt{2},\ -8),$$

$$u = \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3},\ -2\sqrt{2},\ -1)$$

y $$v = \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3},\ -2\sqrt{2},\ -1).$$

La normal exterior a ABC en A es

$$k = v \wedge u = (0, 2\sqrt{3}, -4\sqrt{6})$$

y $k.q = 4\sqrt{3} + 36\sqrt{6} > 0$, de manera que ABC está oculto.

Se puede demostrar análogamente que ABD es visible y, por simetría, que también lo es ACD. Como no hay dos planos adyacentes que estén ocultos, no hay aristas ocultas.

Ejemplo2. Rotación del cuerpo 60º alrededor del eje vertical que pasa por A.

Se puede hacer esto por medio de una traslación **T** del eje OY seguida una rotación **R** de 60º alrededor del eje OY y, por último, la traslación T^{-1}, donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 60° & 0 & -\operatorname{sen} 60° & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} 60° & 0 & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Aquí

$$\mathbf{T^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y podemos comprobar que $TT^{-1} = I$.

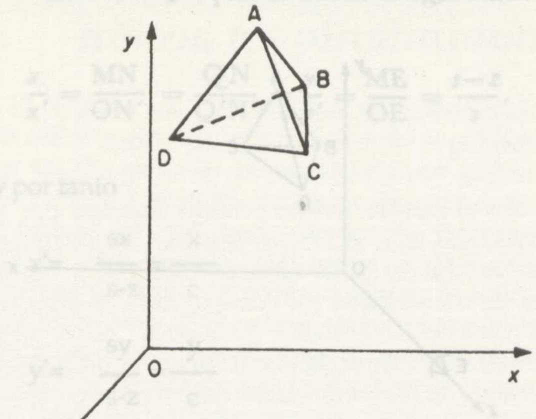
La transformación completa es, por tanto,

$$\mathbf{T^{-1}RT} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 & -3\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la imagen M' del cuerpo es

$$\mathbf{M' = T^{-1}RTM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{2} & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

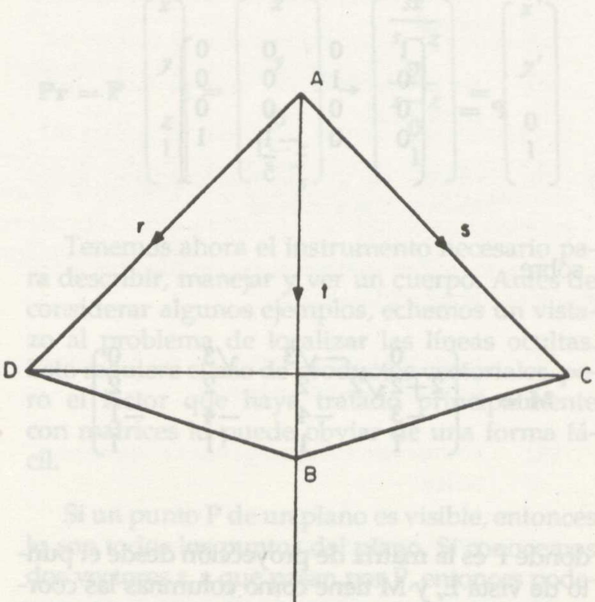
de donde se pueden encontrar fácilmente las nuevas coordenadas tridimensionales.



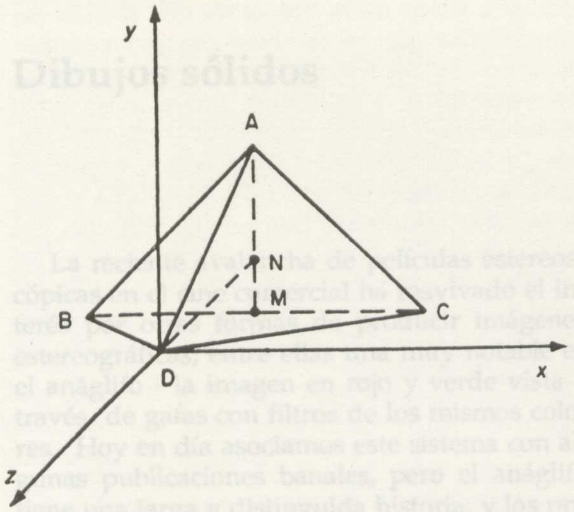
Aplicando ahora la misma perspectiva **P**, tenemos

$$\mathbf{PM'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8/5 & 2 & 7/5 & 7/5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.24 & -1.24 \\ 3.02 & 1 & 1.43 & 1.43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



El lector puede ahora tratar de demostrar que AB es una línea oculta, después intentar trasladar D desde su posición original al origen y, por último, girar hasta que la altura que pasa por D esté en el eje OZ.



Evidentemente el método se puede aplicar a cuerpos más complicados extendiendo la matriz M de manera que tenga tantas columnas como vértices tiene el cuerpo, y señalando qué pares de vértices están unidos por aristas. Los primeros intentos prácticos hechos sobre el terreno se hicieron colocando modelos de limpiapipas en un retroproyector, y proyectándolos sobre una pantalla. Usando ejes convenientes y medidas aproximadas, se pudieron calcular las posiciones previstas de las imágenes, y compararlas con las imágenes reales. A pesar de los problemas de enfoque, los resultados fueron bastante buenos.

Personalmente, creo que es reconfortante pensar que los sofisticados métodos de solución habituales para un importante problema práctico hagan intervenir técnicas que están al alcance de los estudiantes del sixth form (*) He incluido un gran número de detalles porque es casi imposible encontrar referencias de esas técnicas. Debo agradecer a Bob Parslow del Departamento de Ordenadores de la Universidad de Brunel el que me haya llamado la atención sobre estas ideas.

REFERENCIAS

1. T.J. Fletcher (Ed.): Some Lessons in Mathematics (C.U.P.)

2. Prof. S.A. Coons: Transformations and Matrices in Computer Graphics for Designers (Universidad de Michigan 1972)

3. T.M.P. Lee: 3-D Curves and Surfaces for Rapid Computer Display (Universidad de Harvard, Tesis doctoral)

(*) N. del T. En Inglaterra y Gales, se llama sixth form a los dos cursos que siguen los estudiantes de 16 a 18 años, para obtener el nivel A del GCE (Certificado General de Educación)

pesar de los problemas de enfoque, los resultados fueron bastante buenos.

Personalmente, creo que es conveniente pensar que los sofisticados métodos de solución habituales para un importante problema práctico hagan intervenir técnicas que están al alcance de los estudiantes del sixth form (*). He incluido un gran número de detalles porque es casi imposible encontrar referencias de esas técnicas. Debo agradecer a Bob Parslow del Departamento de Ordenadores de la Universidad de Brunel el que me haya llamado la atención sobre estas ideas.

REFERENCIAS

1. T.J. Fletcher (Ed.): Some Lessons in Mathematics (C.U.P.)

2. Prof. Sutt: Coons: Transformations and Matrices in Computer Graphics for Designers (Universidad de Michigan, 1972)

3. T.M.P. Lee: 3-D Curves and Surfaces for Rapid Computer Display (Universidad de Harvard, Tesis doctoral)

(*) N. del T. En Inglaterra y Gales, se llama sixth form a los dos cursos que siguen los estudiantes de 16 a 18 años, para obtener el nivel A del GCE (Certificado General de Educación)

El lector puede ahora tratar de demostrar que AB es una línea oculta, después intentar trasladar D desde su posición original al origen y, por último, girar hasta que la altura que pasa por D esté en el eje OZ.

Evidentemente el método se puede aplicar a cuerpos más complicados extendiendo la matriz M de manera que tenga tantas columnas como vértices tiene el cuerpo, y señalando qué pares de vértices están unidos por aristas. Los primeros intentos prácticos hechos sobre el terreno se hicieron colocando modelos de limpiapipas en un retroproyector, y proyectándolos sobre una pantalla. Usando ejes convenientes y medidas aproximadas, se pudieron calcular las posiciones previstas de las imágenes, y compararlas con las imágenes reales. A pesar de los proble-

Dibujos sólidos

T.J. FLETCHER.

La reciente avalancha de películas estereoscópicas en el cine comercial ha reavivado el interés por otras formas de producir imágenes estereográficas; entre ellas una muy notable es el anáglifo - la imagen en rojo y verde vista a través de gafas con filtros de los mismos colores.- Hoy en día asociamos este sistema con algunas publicaciones banales, pero el anáglifo tiene una larga y distinguida historia, y los primeros que se ocuparon de la estereoscopía fueron serios hombres de ciencia que ignoraban que sus invenciones producirían los comics espaciales del siglo veinte y las versiones en tres dimensiones de Lovely Ladies de Charing Cross Road.

Todos los sistemas estereoscópicos se basan en que los dos ojos que ven el mundo de nuestro alrededor lo hacen desde puntos de vista ligeramente distintos. Las primeras observaciones que se recuerdan sobre las diferencias entre visión monocular y binocular fueron hechas por Euclides, pero no se diseñó ninguna forma de usar dos imágenes planas que proporcionen imágenes distintas para los dos ojos, hasta que Wheatstone construyó el primer estereoscopio en 1832. La forma de estereoscopio más frecuente actualmente fue inventada por Brewster doce años más tarde.

La idea de poner las imágenes en dos colores complementarios fue sugerida por primera vez por Helmholtz; Rollman construyó un aparato en 1853, pero utilizaba diapositivas de linterna mágica proyectadas sobre una pantalla. Las conocidas imágenes impresas en verde y rojo no aparecieron hasta 1891 y fueron inventadas por Ducos du Hauron, que también acuñó el nombre de **anáglifo**, que proviene del griego y significa una pieza grabada en bajo relieve; un significado que aún tiene esta palabra, junto con el nuevo que ahora es más familiar.

Esta era la situación en el cambio de siglo. Mientras los inventores continuaban experimentado con todos los sistemas imaginables, el primer hombre que llevó estos descubrimientos a su uso práctico en la enseñanza de las matemáticas fue Henry Richard, un pionero de la educación cuyo nombre ha sido casi olvidado. Richard fue director del Lycée Marceau en Chartres. Como muchos profesores antes y después de él, se dio cuenta de que los alumnos tenían grandes dificultades en visualizar situaciones tridimensionales, de manera que preparó un cierto número de ilustraciones tridimensionales en anáglifos. Estas ilustraciones se mostraron en la Conferencia de Matemáticos de Cambridge, en 1912 (aunque las actas oficiales no hacen mención de ellas) y fueron publicadas por Vuibert, de París, con el título de **Les Anaglyphes Geometriques** el mismo año. Este libro escasea mucho, pero aún es posible encontrar copias de él. Después de dieciseis páginas de introducción y comentarios, vienen treinta y dos diagramas en diez y seis láminas que ilustran teoremas sobre los volúmenes de cuerpos sólidos, ángulos diedros y poliedros, cilindros, conos, geometría descriptiva, cristalografía y refracción óptica. La introducción acaba con estas palabras; "Nos proponemos, el Sr. Richard y yo, hacer pequeños álbumes de anáglifos para usarlos en las distintas ramas de la enseñanza. Más aún, haremos para la enseñanza secundaria una colección de láminas (principalmente de geometría y geometría descriptiva) en un formato mayor que este libro. Estaremos encantados de recibir todas las sugerencias que los profesores quieran hacer sobre materias que se puedan reproducir en forma de anáglifos". Yo no sé si se llevó a cabo alguno de estos proyectos.

El siguiente libro que apareció sobre anáglifos lo hizo en Suiza dos años más tarde. Se titulaba "Le Relief en Geometrie" y fue escrito por Perregaux y Weber, profesores en el Technicum de Le Locle. Suiza ha sido siempre un país con una magnífica producción de libros, y su publicación es la más elegante de esta clase que se haya impreso nunca, con diagramas de gran calidad y considerable complejidad. Contiene un texto bilingüe en francés y alemán y 50 láminas de 15 " por 11", la mitad de las cuales muestran rectas y planos en tres dimensiones, con teoremas sobre perpendiculares y paralelas, volúmenes, los cinco sólidos regulares, esferas, cilindros, etc., mientras que el resto está dedicado a la geometría descriptiva. La geometría descriptiva es un tema muy popular en el Continente, y las ilustraciones comienzan con los fundamentos de la proyección en los planos coordenados, y abatimientos, y llegan hasta la solución de problemas sobre construcciones más difíciles, que incluyen el dibujo de la intersección de un prisma y una pirámide.

Se puede uno preguntar qué ventajas tienen los dibujos de esos libros sobre los modelos sólidos. Los autores aducen una economía de espacio y la baratura de su producción. Se puede conceder que tienen estas dos ventajas, pero también tienen desventajas. En primer lugar, el proceso anáglifo es insatisfactorio desde el punto de vista técnico. Algunas personas son capaces de ver los diagramas con absoluta claridad, pueden estudiar figuras complicadas exactamente como si estuvieran realmente en el espacio ante ellas, y describir configuraciones geométricas que no les eran familiares y que no habían analizado antes, de forma que no deja lugar a dudas sobre la forma en que el anáglifo les está dando información. Pero otros, no tan afortunados, necesitan algún tiempo para acostumbrarse a ver los dibujos, y encuentran que las partes del dibujo que están más alejadas del plano del papel no se pueden ver claramente porque las dos imágenes no se funden; y algunas personas, por supuesto, no pueden usar en absoluto diagramas de este tipo. El destino que han sufrido estos libros tan bellamente impresos y el olvido en que se encuentran ahora indica cual es el balance de las opiniones - los anáglifos, como sustitutos de los modelos espaciales, no ha tenido éxito.

Sin embargo, los anáglifos requieren consideración como ayudas a la enseñanza por otras razones, como señaló Graf en algunos artículos publicados en revistas alemanas de educación inmediatamente antes de la última guerra. Si se mira un anáglifo o una película estereoscópica desde demasiado cerca, el dibujo se aplana, mientras que si el punto de vista está muy distante, el dibujo se hace más profundo. Si el observador se mueve hacia un lado, el dibujo no se comporta como lo hubiera hecho la escena real, sino que los objetos se distorsionan por el cambio de perspectiva. Todas estas distorsiones son transformaciones afines, y así los anáglifos proporcionan ilustraciones de la geometría afín de una forma que no hacen los dibujos planos o los modelos rígidos. (La geometría afín es la parte de la geometría que estudia las propiedades que no cambian por poryecciones paralelas. Se sitúa lógicamente entre la geometría euclídea y la geometría proyectiva.) Estas observaciones de Graf indican el verdadero status de las ilustraciones anaglíficas y muestran cómo se pueden aplicar a usos didácticos lo que se pudiera considerar que son los defectos del medio. Si se hacen películas estereoscópicas en el futuro, es de esperar que se tenga en cuenta su carácter esencialmente afín; quienes las hagan deben tener como objetivo la geometría afín en lugar de la euclídea.

A pesar de lo bien fundado de las observaciones de Graf, no es fácil ver como pueden dar fruto. La dificultad estriba en imaginar situaciones característicamente afines que permitan explotar ventajosamente las peculiaridades del medio; y realmente, el libro **Mathematische Raumbilder**, que publicaron Kohler, Graf y Calov en Dresde, en 1941, se lee con sentimientos contradictorios. La materia de que trata es prácticamente la misma que la que aparece en libros anteriores, y sin embargo, no surge de sus figuras la peculiar sensación de la geometría afín que se espera encontrar al leer el excelente ensayo con que comienza el libro. Los diagramas son obras maestras de dibujo lineal; y verdaderamente no puede uno dejar de sentirse impresionado por los dos dibujos de las esferas de Dandelin. Las treinta y dos láminas están impresas sobre un fondo rosa asalmonado que permite un mejor visión - una innovación debida a Calov-.

La misma técnica se utiliza en los diagramas que hizo Jack Coote para ilustrar **Stereoscopic Transmission,** de R y N. Spottiswoode. Sus dibujos se encuentran entre los más efectivos hechos por medio de este proceso; el libro se puede conseguir fácilmente en Inglaterra.

Se abrieron posibilidades enteramente nuevas en América en 1940 cuando la Polaroid Corporation introdujo el proceso Vectograph. En este proceso se reproducen los dos dibujos fotográficamente sobre dos hojas superpuestas de polaroid que están dipuestas con sus direcciones de polarización perpendiculares. Se pueden ver de la manera habitual con las gafas polaroid que son corrientes en el cine de tres dimensiones. El efecto es asombroso, y se obvian con él todas las deficiencias del sistema de rojo y verde. La figura salta del plano del papel sin ninguna duda. los ojos no necesitan ningún tiempo para acomodarse, y como la luz que se pierde en los filtros es mucho menor, la figura aparece clara y brillante.

Se ha hecho muy poco material educativo por este proceso; yo puedo tan sólo recordar un conjunto de dibujos para ilustrar Celestial Navigation que la Polaroid Corporation hizo para las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos durante la guerra. El ejemplar que tengo es "más plano" de lo que debiera ser; la explicación de esto puede ser que los dibujos fueran hechos originalmente para producir diapositivas. Los dibujos proyectados de esta forma son mucho más grandes que los hechos sobre cartulina para que se puedan ver directamente, y las paralajes, que son correctas en el primer caso, no lo son en el segundo.

El Vectograph es caro, y no se puede encontrar en Gran Bretaña, aunque sí se puede importar. Aunque no es un material de uso fácil, cualquier fotógrafo aficionado con inclinaciones matemáticas que quiera aprender esa técnica, debe ser capaz de hacerlo. Ciertamente es muy necesario que alguien combine las mejores calidades de los trabajos realizados a ambos lados del Atlántico; no me cabe ninguna duda de que si se hiciera esto se producirían ilustraciones estereográficas del mayor interés y valor. Todo este campo ofrece grandes oportunidades a los investigadores aficionados, porque incluso los que no deseen pasar por las dificultades y gastos que representa la importación de Vectograph desde América, pueden construir anáglifos por el viejo procedimiento de tizas o tintas de colores e investigar algunos de los problemas interesantes que todavía presentan.

Un pequeño experimento nos mostrará que el rojo clavel da excelentes resultados cuando se utiliza para los dibujos rojos, mientras que el verde trópico es apropiado como color complementario si se diluye en la misma cantidad de agua. Se pueden adoptar en su lugar las sugerencias hechas por Mr. John Craig en el Architect's Journal de Enero de 1954, y usar los lápices Derwent número 14 (rojo), número 40 (azul-verde) y número 23 (púrpura). Se utiliza la sombra púrpura en las líneas que se solapan en ambas figuras y que se deben ver a través de los dos filtros.

Es incluso posible usar tizas de color en una pizarra (¡siempre que se inviertan los colores!), pero es difícil producir un dibujo estereoscópico que convenza a un observador imparcial; y dar una clase incorporando esta técnica constituiría una hazaña verdaderamente notable.

Cualquiera que esté interesado en realizar alguno de esos experimentos sin duda disfrutará diseñando sus propios métodos de dibujo. Son de dos tipos principales. Se puede calcular algebraicamente las paralajes o bien hacer modificaciones sobre los métodos que utilizan habitualmente los delineantes para dibujar vistas en perspectiva, trazándolos dos veces, una para cada ojo. El mejor de ellos es el conocido como "el método del arquitecto", que utiliza intersecciones de proyecciones desde una vista lateral y de un plano. Su uso en ilustraciones estereoscópicas ha sido descrito por el Profesor Rule en algunos artículos publicados en el **Journal of the Optical Society of America**.

El modesto experimentador con tintas y lápices tiene una ventaja sobre el más ambicioso usuario del Vectograph, ya que puede experimentar también la introducción de colores. En octubre de 1955 la revista **Picture Post** publicó por primera vez anáglifos en color. Todas las ilustraciones eran fotografías y, para producir su efecto, dependían de que los filtros de las gafas permitiesen el paso de una anchura de banda lo suficientemente amplia como para que diese al observador algunas sensaciones de colores distintos. Los dos ojos, por supuesto, ven cualquier objeto del dibujo en dos colores distintos, pero los funden en uno cuando integran sus impresiones visuales.

A pesar de todo, los observadores difieren bastante en la cantidad de color que ven en esas ilustraciones del **Picture Post**. Queda mucho que investigar sobre este problema, aunque se puede hacer bastante con poco dinero. De cualquier forma aún está por hacer la primera exhibición pública de anáglifos geométricos en color, y nos gustaría mucho organizarla en alguna futura exposición de la A.T.M.

NOTA: Una información obtenida por Mr. I. Harris ha revelado que la Polaroid Corporation fabrica el Vectograph todavia de forma experimental, y que por lo tanto aún no se puede obtener ni siquiera con licencia de importación. ¡Esperemos que se puedan conseguir materiales de este procedimiento algún día!

[illegible]

Cualquiera que esté interesado en realizar alguno de estos experimentos [illegible] tará diseñando [illegible] procedimientos de dibujo. Son de dos tipos principales [illegible] algo [illegible] las paralajes [illegible] definiciones sobre los dos [illegible] habitualmente [illegible] dibujos [illegible] vistas en perspectiva [illegible] para cada ojo. [illegible] conseguido con el método del arquitecto, que utiliza intersecciones de proyecciones desde una vista lateral y de un plano. Su uso en ilustraciones estereoscópicas ha sido descrito por el Profesor Rule en algunos artículos publicados en el Journal of the Optical Society of America.

El modesto experimentador con tintas y lápices tiene una ventaja sobre el más ambicioso usuario del Vectograph, ya que puede experimentar también la introducción de colores. En octubre de 1953 la revista Picture Post publicó por primera vez anaglifos en color. Todas las ilustraciones eran litografías y, para producir su efecto, dependían de que los filtros de las gafas permitiesen el paso de una anchura de banda lo suficientemente amplia como para que diese al observador algunas sensaciones de colores distintos. Los dos ojos, por supuesto, ven cualquier objeto del dibujo en dos colores distintos pero los funden en uno cuando integran sus impresiones visuales.

A pesar de todo, los observadores difieren bastante en la cantidad de color que ven en esas ilustraciones del Picture Post. Queda mucho que investigar sobre este problema, aunque se puede hacer bastante con poco dinero. De cualquier forma aún está por hacer la primera exhibición pública de anaglifos geométricos en color, y nos gustaría mucho organizarla en alguna futura exposición de la A.T.M.

NOTA: Una información [illegible] lado que la Polaroid Corporation fabrica el Vectograph todavía de forma experimental, y que por lo tanto [illegible] se puede [illegible] de [illegible] producir materiales de este procedimiento algún día.

roid que son corrientes en el cine de tres dimensiones. El efecto es asombroso, y se olvidan con él todas las deficiencias del sistema de rojo y verde. La figura salta del plano del papel sin ninguna duda, los ojos no necesitan ningún tiempo para acomodarse, y como la luz que se pierde en los filtros es mucho menor, la figura aparece clara y brillante.

Se ha hecho muy poco material educativo por este proceso; yo puedo tan sólo recordar un conjunto de dibujos para ilustrar Celestial Navigation que la Polaroid Corporation hizo para las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos durante la guerra. El ejemplar que tengo es "más plano" de lo que debiera ser; la explicación de esto puede ser que los dibujos fueran hechos originalmente para producir diapositivas. Los dibujos proyectados de esta forma son mucho más grandes que los hechos sobre cartulina para que se puedan ver directamente, y las paralajes, que son correctas en el primer caso, no lo son en el segundo.

El Vectograph se [illegible] en Gran Bretaña aunque sí se puede importar. Aunque no es un material de uso fácil, cualquier [illegible] aficionado con inclinaciones matemáticas que quiera aprender esa técnica debe ser capaz de hacerlo. Ciertamente es muy necesario que alguien combine las mejores cualidades de los trabajos realizados a ambos lados del Atlántico; no me cabe ninguna duda de que si se hiciese esto se producirían ilustraciones estereográficas del mayor interés y valor. Todo este campo ofrece grandes oportunidades a los investigadores aficionados, porque incluso los que no deseen pasar por las dificultades y gastos que representa la importación de Vectograph desde América, pueden construir anaglifos por el viejo procedimiento de [illegible] tintas de colores e investigar algunos de los problemas más interesantes que todavía presentan.

Un pequeño experimento nos mostrará que el rojo clave da excelentes resultados cuando se utiliza para los dibujos rojos, mientras que el verde trópico es apropiado como color complementario si se diluye en la misma cantidad de agua. Se pueden adoptar en su lugar las sugerencias hechas por Mr. John Craig en el Architect's Journal de Enero de 1954, y usar los lápices Derwent número 14 (rojo), número 40 (azul-verde) y número 23 (púrpura). Se utiliza la sombra púrpura en las líneas que se solapan en ambas figuras y que se deben ver a través de los dos filtros.