Materiales Didácticos

Matemáticas II

BACHILLERATO

Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos

Ciencias de la Naturaleza y de la Salud / Tecnología

Matemáticas II

Autores:

M.ª Dolores Rodríguez Soalleiro

Ángel Sánchez Catalán

Coordinación:

Javier Brihuega Nieto

del Servicio de Innovación

Ministerio de Educación y Ciencia

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR

DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

- *Coordinación de la edición:* Ana Francisca Aguilar Sánchez
- *Maquetación y supervisión de pruebas:* Pedro Sauras Jaime

Ministerio de Educación y Ciencia

Secretaría de Estado de Educación

Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N. I. P. O.: 176-95-113-7
I. S. B. N.: 84-369-2669-2
Depósito legal: M. 25.034-1995
Imprime: Imprenta Fareso, S. A.
Paseo de la Dirección, 5 - 28039 Madrid

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para el Bachillerato es orientar a los profesores que, a partir de octubre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas de Bachillerato en los centros que han anticipado su implantación. Pretenden facilitarles el desarrollo de las materias de segundo curso, algunas de las cuales continúan las de primer curso. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone el haber anticipado desde el curso 1992/93 la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente asignatura, y que su utilización por profesores, en la medida en que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionar estos materiales y para elaborar otros.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental: destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

El Real Decreto 1179/1992 de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato, contiene en su anexo la información referida a esta asignatura que aparece reproducida al término del presente volumen.

Índice

Introducción

Son tres los puntos que nos han guiado a la hora de elaborar este trabajo:

- Se trata de unas Matemáticas dirigidas a unos alumnos y alumnas que posteriormente, bien a nivel profesional o bien a nivel académico, se van a desenvolver en un marco estrictamente científico o tecnológico.
- Se trata de una asignatura obligatoria y que, por tanto, tendrán que cursar todos aquellos alumnos y alumnas que sigan estas modalidades de Bachillerato.
- Se trata del último curso de Enseñanza Secundaria.

En esta programación hemos estructurado los contenidos en tres bloques: álgebra, análisis y geometría, con un creciente grado de interrelación entre ellos, de tal forma que los alumnos y alumnas sean capaces de utilizarlos en este curso y posteriormente. No se trata de que posean muchas y sofisticadas herramientas sino las estrictamente necesarias y que las manejen con destreza y oportunamente.

Por otra parte, el conocimiento matemático, debe tener a este nivel un respaldo teórico. Las definiciones, demostraciones y los encadenamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las instituciones y confieren solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en esta asignatura.

Sin embargo, éste es el primer momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad a la fundamentación teórica de las matemáticas y el aprendizaje, por tanto, debe ser equilibrado y gradual.

Dejamos en manos del profesor profundizar, o en caso contrario ignorar, algunos determinados puntos, de acuerdo con el grado de conocimiento que posean los alumnos y alumnas concretos con los que se encuentre, así como el interés de los mismos y su capacidad para adquirir y desarrollar los nuevos conceptos que se les enseña.

Orientaciones didácticas y para la evaluación

Orientaciones didácticas

El protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser siempre el alumno, no las matemáticas ni el profesor. Por tanto, hay que huir de una concepción de las matemáticas como un cuerpo de conocimientos acabado y de una metodología de mera transmisión que deja al alumno en una posición pasiva. Es aconsejable, por tanto, utilizar actividades de grupo que favorezcan la discusión, la confrontación y la reflexión sobre las experiencias matemáticas, y como fuente de experiencias matemáticas utilizar diferentes espacios de actividad de los alumnos y alumnas, dentro y fuera de lo estrictamente académico.

La incorporación de las nuevas tecnologías a diversos ámbitos de actividad humana y, sobre todo, en actividades científicas y tecnológicas, aconsejan la incorporación de estas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje no de una manera puntual, sino como una práctica habitual y sistemática y dentro de su propio entorno de aprendizaje.

La informática y los medios audiovisuales (ordenadores, calculadoras, transparencias, diapositivas, fotografías, vídeos y otros materiales) proporcionan nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introduciendo los cambios metodológicos y programáticos necesarios en una línea de investigación e innovación en el aula.

En cuanto a los contenidos de esta materia en estas modalidades de Bachillerato, han de servir para proporcionarles los conocimientos y herramientas matemáticas imprescindibles para la continuación de sus actividades posteriores, pero, por otra parte, han de proporcionar al alumno y la alumna los conocimientos necesarios para desenvolverse eficazmente en una sociedad en continua evolución tecnológica.

Por último, en este curso y teniendo en cuenta su carácter terminal, las matemáticas han de contribuir a la adquisición de nuevas actitudes y al desarrollo de las adquiridas en etapas y cursos anteriores, como la curiosidad ante situaciones nuevas, interés por investigar a fondo una situación, rigor en la aplicación de los conceptos matemáticos, actitud crítica ante informaciones y apreciaciones intuitivas, mentalidad abierta y receptiva a las ideas de los demás, confianza en las propias capacidades para abordar situaciones nuevas y madurez y reflexión ante la toma de decisiones.

Orientaciones para la evaluación

La evaluación ha de tener en cuenta dos aspectos:

- Aprendizaje de los alumnos y alumnas.
- Funcionamiento de la Unidad didáctica.

Evaluación del aprendizaje

Dentro de este apartado habría que evaluar, a su vez, tres aspectos:

- Conocimientos previos.
- Objetivos.
- Formación.

Conocimientos previos

Los alumnos y alumnas, en Primer curso de Bachillerato y en la E. S. O. se han aproximado a conceptos y han desarrollado técnicas que se van a desarrollar y profundizar en este curso. Aun cuando creemos necesario, en general, recordar aquellos que se necesiten dentro de cada Unidad didáctica con el fin de unificar los conocimientos de los alumnos y alumnas, hará falta una evaluación inicial de los mismos, puesto que lo consideramos conveniente para redistribuirlos de una manera eficaz según los resultados obtenidos por los mismos. Esta Prueba inicial podría ser al comienzo del curso o de cada tema.

Adquisición de los objetivos

Para realizar esta evaluación se propondrán, como mínimo y por supuesto dependiendo de la Unidad de que se trate, dos controles. El primero se realizará hacia la mitad de la Unidad didáctica, pretendiéndose con él observar si aquellos conocimientos que consideramos fundamentales para continuar con provecho el resto de la Unidad han sido adquiridos por los alumnos y alumnas del grupo.

El segundo control se hará al término de la Unidad y será global de toda ella.

Estos controles han de ser elaborados para comprobar el grado en que los alumnos y alumnas han conseguido los objetivos propuestos al principio de la Unidad. Se pretende medir, por tanto, conocimientos, tanto en conceptos como en procedimientos y actitudes, teniendo como referente los criterios de evaluación de este curso.

Formación

Con esta evaluación se pretende adecuar la ayuda que el profesor presta a cada alumno y alumna en particular.

Esta evaluación, al contrario que la anterior que es cuantitativa y «objetiva», es esencialmente cualitativa y «subjetiva». El profesor, para realizarla, ha de tener en cuenta parámetros como los siguientes:

- El trabajo diario de los alumnos y alumnas.
- Actitud en clase.
- Colaboración prestada por parte de cada alumno o alumna tanto al profesor como a sus compañeros y compañeras.
- Intervenciones en la clase.
- Trabajo en equipo y papel que realiza el alumno dentro del mismo.

- Opiniones de los alumnos y alumnas recogidas en conversaciones tanto individuales como colectivas.
- Autoevaluación por parte de los alumnos y alumnas.

Evaluación del funcionamiento de cada Unidad

El funcionamiento de cada Unidad didáctica se evaluará a partir del análisis de los parámetros recogidos en la evaluación de la formación. Para ello, trataremos de observar todas las situaciones que se den en el aula, estén o no previstas, con lo cual podremos mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, se trata de entrar en un proceso que se retroalimente de manera continua.

Cada actividad propuesta en cada Unidad deberá ser analizada con el fin de adecuar su grado de dificultad al nivel que presenten los alumnos y alumnas con los que estamos interactuando. Así conseguiremos detectar posibles «lagunas» en contenidos importantes que deberán ser subsanadas y que pueden referirse a aspectos que necesitan refuerzo y que pueden o deben ser añadidos.

El proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas deberá ser analizado, en lo posible, para analizar la secuencia de los contenidos de cada Unidad didáctica.

Los recursos utilizados en las unidades, también serán motivo de estudio, observando su aportación, necesidad y ayuda a la mayor comprensión de la misma por parte de los alumnos y alumnas.

Otro aspecto importante en la evaluación de la Unidad es el análisis del funcionamiento del binomio profesor-alumnos en torno al estudio de la misma. Para ello analizaremos por qué y en qué momento:

- Ha existido un mayor interés y participación.
- Ha existido un mayor desinterés y aburrimiento.
- El grupo ha actuado como tal convirtiéndose el estudio de la Unidad en una tarea común.
- Surgen estrategias para la formación de los grupos de trabajo, así como sus modos de funcionamiento.
- Aumentan o disminuyen las posibilidades de potenciar la participación de los alumnos y alumnas.
- Es mayor la adaptación a las distintas individualidades de los alumnos y alumnas.

Programación

Introducción

Álgebra

La finalidad fundamental del álgebra en este curso es la resolución de los problemas que pueden plantearse mediante sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto, todo el desarrollo que se hace en las unidades didácticas previas a la resolución de los mismos, matrices y determinantes, se ha hecho teniendo continuamente presente este objetivo.

Mediante sistemas de ecuaciones lineales, se pueden plantear multitud de situaciones de la vida real tanto en Física, como en Geometría y otras ciencias. El álgebra resuelve estos sistemas de ecuaciones, en este curso, mediante la aplicación de métodos sencillos que se desarrollarán en las distintas unidades didácticas de que consta este tema.

Las matrices nos van a permitir agrupar de manera ordenada y lógica una gran cantidad de información y más teniendo en cuenta los medios informáticos actuales que nos permiten el tratamiento de matrices de tamaño considerable. Los determinantes permiten trabajar con las matrices desarrollando al máximo sus propiedades y permitiendo tratar aspectos de las mismas fundamentales para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Tienen, además, implicaciones propias en los sistemas de ecuaciones lineales de cara a su resolución y tratamiento.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Matrices.*
  Tiempo: 2 semanas.
- ***Unidad 2:*** *Determinantes.*
  Tiempo: 3 semanas.
- ***Unidad 3:*** *Sistemas de ecuaciones lineales.*
  Tiempo: 4 semanas.

Desarrollo de las Unidades didácticas

Unidad 1: MATRICES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Representar e interpretar una tabla de números como una matriz, identificando elementos concretos de la misma, así como los tipos de matrices más característicos.
- Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.
- Interpretar y manejar las matrices y sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales.
- Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones y, en general, para resolver situaciones diversas.

Contenidos

Conceptos

- Matrices.
- Dimensión u orden de una matriz.
- Igualdad de matrices.
- Tipos de matrices: fila, columna, regular, cuadrada, diagonal, simétrica, hemisimétrica,...
- Matriz transpuesta.
- Matriz nula y matriz opuesta.
- Matriz unidad y matriz inversa.
- Rango de una matriz.

Procedimientos

- Representación de matrices.
- Transposición de matrices.
- Operaciones con matrices:
  - Suma de matrices.
  - Producto de un número real por una matriz.
  - Producto de dos matrices.
- Producto de una matriz mxn por una matriz fila o columna.
- Cálculo de la inversa mediante procedimientos elementales.
- Cálculo del rango de una matriz mediante el método de Gauss.

Actitudes

- Apreciación de los números como instrumento útil para describir y estudiar la realidad.
- Sensibilidad y gusto por la presentación tabulada y clara de números.

- Tendencia a expresar resultados numéricos en forma de matrices.
- Valoración de los medios tecnológicos (hojas de cálculo) para el tratamiento de la información.

Actividades

Abordamos el estudio teórico de matrices simultáneamente con problemas reales de geometría, economía, etc., para que los alumnos y alumnas comprueben la necesidad real de las mismas, así como podremos realizar el estudio de matrices de dimensiones elevadas a través de las posibilidades que nos proporcionan las hojas de cálculo.

Así, por ejemplo, consideraremos matrices en las que por filas estarán las 50 provincias españolas y por columnas figurarán los 10, 15,... últimos años. Como elementos de dicha matriz figurarán la población de cada una de las provincias en esos años, pudiéndose obtener diversos resultados de forma cómoda: qué provincias han aumentado de población, en qué cuantía, qué Comunidades Autónomas han aumentado/disminuido, etc. De esta manera podemos cubrir todos los conceptos y procedimientos expuestos anteriormente.

Para contextualizar las operaciones se pueden proponer ejercicios de representar matricialmente polígonos y analizar los movimientos por medio de operaciones con matrices.

A continuación se puede proponer el estudio de la matriz «input-output» del conjunto de las actividades económicas de un país (por supuesto, no de manera exhaustiva).

Unidad 2: DETERMINANTES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Interpretar un determinante como un número asociado a una matriz cuadrada y expresar, mediante determinantes, propiedades geométricas tales como paralelismo, intersección, etc.
- Resolver un determinante por distintos métodos: método de Sarrus, método de Gauss, método de los adjuntos.
- Resolver determinantes aplicando las propiedades de los mismos.
- Calcular el rango de una matriz así como su inversa, mediante determinantes.

Contenidos

Conceptos

- Determinante de una matriz cuadrada.
- Regla de Sarrus.
- Propiedades de los determinantes.

Procedimientos

- Cálculo del valor del determinante de una matriz mediante distintos métodos: Sarrus, Gauss, por adjuntos.
- Cálculo del valor del determinante de una matriz aplicando sus propiedades.
- Cálculo del rango de una matriz mediante determinantes.
- Cálculo de la matriz inversa mediante determinantes.

Actitudes

- Confianza en las propias capacidades y gusto por el desarrollo de estrategias de cálculo.
- Curiosidad por indagar y explorar regularidades y relaciones que aparecen en tablas de números.

Actividades

Una primera actividad consiste en, después de definir el determinante de una matriz cuadrada como un número real asociado a ella, relacionarlos con los sistemas de ecuaciones de la siguiente manera: dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, formar el determinante de los coeficientes comprobando cómo son las ecuaciones en relación con el valor nulo o no nulo del determinante.

De esta manera, además, y si queremos que los propios alumnos descubran las propiedades que verifican los determinantes, podemos plantear que las filas de los mismos sean coeficientes de ecuaciones estableciendo un paralelismo entre las actuaciones sobre éstas y las que se realizan sobre las filas de los determinantes.

Se puede proponer, a aquellos alumnos y alumnas que posean conocimientos más profundos, determinantes cuyos elementos sean polinomios en una indeterminada y funciones trigonométricas para consolidar los estudios de expresiones algebraicas, ecuaciones y trigonometría realizados en Matemáticas I.

En este momento sería interesante plantear a los alumnos y alumnas que, dado un determinante cualquiera, lo resuelvan por todos los métodos posibles, incluso aplicando las propiedades que conozcan.

Unidad 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Transcribir situaciones reales como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlas, cuando sea posible.
- Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocer y utilizar diversos métodos de resolución de sistemas: Gauss, Cramer y método de la matriz inversa.
- Estudiar y resolver sistemas dependientes de un parámetro.

Contenidos

Conceptos

- Sistemas de ecuaciones lineales. Interpretación geométrica.
- Ecuaciones equivalentes. Sistemas equivalentes.
- Solución de una ecuación. Solución de un sistema. Interpretación geométrica.
- Matriz de los coeficientes y matriz ampliada.
- Sistemas homogéneos.
- Teorema de Rouché-Fröbenius.

Procedimientos

- Interpretación, representación y resolución, mediante un sistema de ecuaciones lineales, de problemas de enunciado real.
- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
- Estudio de la compatibilidad o incompatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, aplicando el teorema de Rouché.
- Estudio de un sistema de ecuaciones lineales que dependa de un parámetro, aplicando el teorema de Rouché.
- Resolución de un sistema de diferentes formas: método de Gauss, regla de Cramer y método de la matriz inversa.

Actitudes

- Sentido crítico ante las soluciones intuitivas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en la representación gráfica de las rectas y planos.

Actividades

Se puede comenzar abordando el estudio de sistemas como aplicación geométrica a la posición relativa de rectas y planos.

[Esta Unidad se desarrolla en el capítulo IV]

Además de lo que se contempla en dicha Unidad didáctica, proponemos que aquellos alumnos y alumnas cuyos conocimientos sean elevados hagan un estudio pormenorizado, en sistemas dependientes de un parámetro, de los significados geométricos a que dan lugar los diversos valores que puede tomar dicho parámetro: planos paralelos, secantes todos ellos según una recta, secantes dos a dos, etc.

Análisis

Introducción

El Análisis matemático, en este curso, estudia las dependencias entre magnitudes variables en general con abstracción de su contenido; es decir, lo importante no son las funciones particulares sino las funciones en general, funciones que se han visto en Primer Curso de manera intuitiva, asociando a cada familia su tipo de gráfica.

En este curso se comienza abordando el problema de los límites de funciones. La idea del límite, para los alumnos y alumnas, equivale a determinar el valor exacto de una cierta magnitud mediante una serie de aproximaciones. Esta idea, que hoy constituye un instrumento básico, fue elaborada en el transcurso de siglos.

El siguiente concepto fundamental es el de derivada y surge al resolver el problema de determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en cualquier punto de ésta. Por otro lado, al ser el cálculo diferencial un método que permite encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un cierto tiempo, nos sirve de apoyo para que los alumnos y alumnas vean la interconexión tan profunda que existe entre las Matemáticas y la Física.

En cuanto al uso que se hace del cálculo diferencial en la representación de curvas, nos sirve como nexo del Análisis con la Geometría.

El cálculo integral surge ante la necesidad de calcular el área encerrada por una o varias curvas —por ejemplo, encuentra la distancia recorrida por un cuerpo cuando se conoce su velocidad—.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Límites de funciones. Continuidad*
  Tiempo: 2 semanas
- ***Unidad 2:*** *Derivadas de funciones.*
  Tiempo: 3 semanas.
- ***Unidad 3:*** *Máximos y mínimos de funciones. Representación de funciones.*
  Tiempo: 4 semanas.
- ***Unidad 4:*** *Concepto de área. Integral definida.*
  Tiempo: 2 semanas.

Desarrollo de las Unidades didácticas

Unidad 1: Límites de funciones. Continuidad.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Comprender y aplicar el concepto de límite de una función en un punto y en el infinito.
- Calcular límites elementales.
- Comprender y utilizar el concepto de continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- Interpretar una situación real en la que aparezca involucrada la idea de límite.

Contenidos

Conceptos

- Límite de una función en el infinito.
- Límites laterales de una función en un punto.
- Límite de una función en un punto.
- El número **e** como límite de la función $f(n) = (1+1/n)^n$.
- Dominio de una función.
- Continuidad de una función en un punto.

Procedimientos

- Interpretación gráfica del límite de una función en el infinito, de los límites laterales de una función en un punto y del límite de una función en un punto.
- Cálculo de límites.
- Interpretación gráfica de función continua en un punto.
- Cálculo de los dominios de funciones elementales.

Actitudes

- Gusto por la precisión en la medida y en las representaciones gráficas de los hechos cotidianos.
- Valoración del análisis matemático como instrumento para analizar e interpretar la realidad.

Actividades

Se comienza proporcionando a los alumnos y alumnas diversidad de funciones, tanto teóricas como extraídas de problemas reales, teniendo que estudiar gráficamente la tendencia de las mismas en diversos puntos. Estas funciones, en lo posible, serán las estudiadas en cursos anteriores: polinómicas, racionales, etc. Es conveniente ayudarse en esta fase de la actividad con todos los medios que las nuevas tecnologías nos proporcionan.

Posteriormente, han de calcular analíticamente los límites en los mismos puntos, comprobando la identidad de los valores obtenidos con su idea gráfica.

En lo que respecta a la continuidad de funciones, se comenzará planteando gráficamente las diversas posibilidades de tipos de discontinuidades que pueden ocurrir con funciones definidas a trozos para, a partir de la idea de límite, llegar al concepto de continuidad en un punto. Posteriormente, se puede ampliar al estudio de continuidad de una función y el cálculo de su dominio.

Unidad 2: Derivadas de funciones.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Adquirir y manejar el concepto de derivada de una función en un punto.
- Adquirir y manejar el concepto de función derivada.
- Calcular derivadas de funciones elementales y de las operaciones con ellas (producto, cociente y función compuesta).

Contenidos

Conceptos

- Composición de funciones.
- Derivada de una función en un punto.
- Función derivada de una función dada.
- Reglas para el cálculo de derivadas (de una suma, de un producto, de un cociente y de la función compuesta).

Procedimientos

- Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Cálculo de la derivada de una función en un punto aplicando la definición.
- Cálculo de funciones derivadas de funciones elementales, aplicando la definición.
- Aplicación de las reglas de cálculo de derivadas para derivar algunas funciones más complejas.
- Analizar la relación existente entre la continuidad y la derivabilidad de una función.

Actitudes

- Valoración de la potencia del cálculo matemático.
- Valoración de la potencia de las Matemáticas para interpretar la realidad.
- Disposición a realizar abstracciones y modelizar.
- Creación y desarrollo de hábitos de investigación sistemática.
- Sensibilidad y gusto por la elaboración y presentación cuidadosa de los cálculos realizados.

Actividades

Se puede comenzar esta Unidad planteando un problema de una trayectoria parabólica (por ejemplo, el lanzamiento a canasta de un jugador de baloncesto) en el que se conoce la función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo. Los alumnos y alumnas ya conocen la tasa de variación media, que podemos relacionar con la velocidad y, a partir de ahí, calcular el valor de la derivada de la función en un punto, insistiendo en el hecho de ser la pendiente de la recta tangente.

Posteriormente se calculan varias rectas tangentes a una misma función. Con ello conseguimos dos objetivos: por un lado, afianzan el concepto de derivada en un punto y, simultáneamente, perciben la necesidad de ampliar ese concepto, para generalizar al concepto de función derivada. Mediante el mismo podremos calcular diversas tangentes a una misma curva sin necesidad de repetir una y otra vez el cálculo del límite, dando el siguiente paso y, a través de las propiedades que verifican las derivadas, aprender a calcular las mismas sin necesidad de acudir a la definición.

Posteriormente, se procederá a formar una tabla de derivadas elementales, cada alumno según su propio ritmo, procediendo al final a unificar la misma. Para finalizar se incluirán en dicha tabla las derivadas de funciones compuestas sencillas.

Unidad 3: MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Calcular máximos y mínimos de problemas extraídos de la realidad y que tengan traducción en una función de una sola variable.
- Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, concavidad y convexidad, de una función, así como sus máximos y mínimos relativos y sus puntos de inflexión.
- Calcular las asíntotas que posea una determinada función.
- Calcular e interpretar gráficamente, las simetrías de diferente tipo que pueda poseer una función.
- Representar funciones.

Contenidos

Conceptos

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Máximos y mínimos relativos de funciones.
- Concavidad y convexidad.
- Puntos de inflexión de una función.
- Asíntotas.
- Simetría respecto del eje de ordenadas y respecto del origen de coordenadas.

Procedimientos

- Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Análisis de las condiciones para la existencia de extremos relativos.
- Cálculo de los máximos y mínimos relativos.
- Maximizar o minimizar problemas extraídos de la realidad y que tengan traducción en una función de una sola variable.
- Cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad de una función.
- Análisis de las condiciones para la existencia de los puntos de inflexión.
- Cálculo de los puntos de inflexión.
- Cálculo de las asíntotas de una función.
- Cálculo de simetrías.
- Reconocimiento de la periodicidad de algunas funciones.
- Elaboración de un esquema general para el estudio de la gráfica de una función.
- Interpretación y discusión global de los datos obtenidos previos a la representación gráfica.

Actitudes

- Sensibilidad y gusto por la elaboración y presentación cuidadosa de las gráficas.
- Reconocimiento de la facilidad tan extraordinaria que para la representación gráfica de funciones ha supuesto la utilización de la herramienta informática.
- Aprecio de los medios tecnológicos como instrumento para analizar la realidad.
- Desarrollo de los hábitos de investigación sistemática.
- Incorporación del lenguaje gráfico a la forma de tratar la información.
- Tendencia a formularse preguntas a partir de un fenómeno dado y explotar al máximo esta situación.

Actividades

Se comenzará con el cálculo de máximos y mínimos relativos de funciones extraídas de la realidad (problemas de optimización) puesto que estos problemas aparecen de forma natural e inmediata al considerar el hecho de la derivada nula o tangente horizontal.

Posteriormente se van generalizando los nuevos conceptos que aparecen relacionados con la derivada: crecimiento y decrecimiento, concavidad, convexidad, puntos de inflexión,... con vistas a construir un todo que dé forma definitiva a cualquier gráfica que nos aparezca.

Por último, antes de representar gráficamente las primeras funciones, se deben recordar y formalizar el resto de los elementos necesarios para dicha representación: dominios, simetrías, asíntotas y periodicidad, estructurando todos los conceptos y procedimientos anteriores en una tabla útil para representar cualquier función.

Una vez representadas una serie de funciones, no excesivamente complicadas, se debería hacer uso de alguno de los programas informáticos existentes en la actualidad para la realización de gráficas de funciones más complicadas reforzando, de esta forma, el conocimiento de la forma general que poseen las diversas familias de funciones, interpretando, en su gráfica las propiedades locales estudiadas. Profundizando un poco en esta idea, los alumnos y alumnas serán capaces de representar por sus propios medios la gráfica de la función seno y, posteriormente, obtener a través del ordenador las gráficas de las restantes razones trigonométricas y su relación entre ellas.

Unidad 4: CONCEPTO DE ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Utilizar el concepto de integral definida para calcular áreas delimitadas por funciones elementales.
- Relacionar cálculo diferencial y cálculo integral para resolver integrales inmediatas.

Contenidos

Conceptos

- Área encerrada bajo una curva.
- Área encerrada por varias funciones.
- Integral propia.
- Primitiva de una función.
- Regla de Barrow.

Procedimientos

- Aplicación de la regla de Barrow para el cálculo de áreas definidas por funciones.
- Utilización de las propiedades de la integral.
- Cálculo de primitivas mediante técnicas elementales.
- Utilización de la tabla de integrales inmediatas.
- Método de integración mediante un cambio de variable.

Actitudes

- Valoración de la importancia fundamental que ha tenido el cálculo integral en el desarrollo de diversas disciplinas, en particular, de la Física.

Actividades

Se introduce el concepto de área encerrada bajo una curva a través del problema de Física que trata de calcular el espacio recorrido por un móvil conocida la función velocidad del mismo.

Posteriormente se plantea el problema genérico del área encerrada bajo una curva cualquiera y, a partir de ahí, la interrelación existente entre el cálculo integral y el diferencial, llegándose de forma inmediata a la regla de Barrow.

A continuación se elaborará la tabla de integrales inmediatas que nos servirá para el cálculo de integrales inmediatas y cuasinmediatas, pasando, por último, a resolver integrales por el método de cambio de variable.

Geometría

Introducción

Según señala Alexandrov en el Séptimo Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (Quebec, agosto de 1992):

> *«La Geometría Euclidiana elemental ocupa una posición específica entre otras ramas de las Matemáticas y entre otras disciplinas, debido a su carácter único, consistente en la unión entre **lógica, imaginación y práctica**».*

La esencia de la Geometría consiste en saber unir e interrelacionar la lógica con la imaginación. De ahí la importancia de su estudio en la Enseñanza Secundaria.

En la enseñanza de la Geometría debe asegurarse que los estudiantes comprendan cada concepto, cada teorema en su contenido visual e intuitivo, lo que es más importante que su expresión formal. Esta última no tiene significado geométrico sin la primera. Se puede admitir el sacrificio de fragmentos de rigor en beneficio de una claridad gráfica evidente.

De esta forma, damos por supuesto:

— La existencia del plano, formado por infinitos puntos.

— La existencia de rectas, como subconjuntos propios del plano y formadas también por infinitos puntos.

— Que por dos puntos distintos pasa una recta y sólo una.

Que, junto con elementos que ya conocidos como son los vectores y segmentos, nos permite abordar el estudio de la Geometría vectorial donde encuentra cabida de manera natural el estudio de problemas de tipo posicional de rectas y planos así como los problemas métricos.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Vectores. Operaciones.*
  Tiempo: 3 semanas.
- ***Unidad 2:*** *Rectas y planos.*
  Tiempo: 3 semanas.
- ***Unidad 3:*** *Lugares geométricos. Cónicas. La esfera.*
  Tiempo: 4 semanas.
- ***Unidad 4:*** *Curvas y superficies.*
  Tiempo: 3 semanas.

Desarrollo de las Unidades didácticas

Unidad 1: Vectores. Operaciones con vectores.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Conocer y utilizar el concepto de vector.
- Aplicar el cálculo vectorial a la resolución de problemas físicos y geométricos.
- Interpretar geométricamente cuestiones de dependencia e independencia lineal en el plano y en el espacio.
- Conocer el producto escalar, vectorial y mixto y el tipo de problemas que se pueden resolver con ellos.

Contenidos

Conceptos

- Coordenadas polares y esféricas.
- Vectores fijos y libres: coordenadas, módulo, dirección y sentido.
- Operaciones elementales con vectores: vector suma, vector resultante del producto de un número real por un vector.
- Dependencia e independencia lineal de vectores.
- Productos escalar, vectorial y mixto. Definiciones y expresiones analíticas. Propiedades.

Procedimientos

- Cambio de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.
- Representación geométrica de un vector.
- Cálculo del módulo, dirección y sentido de un vector a partir de las coordenadas cartesianas. Proceso inverso.
- Interpretación geométrica de la equipolencia.
- Cálculo de la suma de vectores y cálculo del producto de un vector por un número real. Aplicaciones a la resolución de problemas de la Geometría y de la Física.
- Estudio mediante el rango de matrices de la dependencia e independencia lineal de vectores.
- Aplicaciones de las propiedades del producto escalar y vectorial a problemas de la Geometría y de la Física.
- Aplicación del producto mixto al cálculo del volumen de algunos cuerpos geométricos.

Actitudes

- Reconocimiento de la utilidad de los vectores para interpretar geométricamente resultados en el campo de la Física.

— Reconocimiento y valoración del cálculo vectorial con resultados de la Geometría clásica (área de un rectángulo, volumen de un tetraedro).

— Valoración de la Geometría como instrumento útil para resolver problemas de la vida real.

Actividades

A partir del Tema «El número complejo» dado en Primero de Bachillerato proponemos que se relacione el conjunto de los vectores en el plano con el de los números complejos explicado en ese curso. Con ello los alumnos y alumnas pueden afianzar todos los conocimientos adquiridos en el cálculo de números complejos e interpretar geométricamente los resultados. A partir de esta situación se extiende el concepto de vector al espacio, para más adelante, incluso, hablar de 4 y n dimensiones.

Por otro lado, es necesario que vean de forma palpable la interdisciplinariedad existente entre las diversas materias que componen el currículo de sus estudios y, así, plantear problemas sencillos de composición de fuerzas o del tipo de movimiento que describe un cuerpo sometido a la acción de la gravedad (tiro parabólico).

De las actividades anteriores surgirá, además, de modo inmediato, la necesidad de establecer un sistema de referencia (bases) fijo en el cual basar los resultados que se obtienen.

La artificiosidad que plantea presentar el producto escalar, vectorial y mixto de vectores se resuelve en gran medida al relacionarlos con el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas elementales.

No se debe dudar en ningún momento con reforzar las explicaciones de los conceptos y procedimientos anteriormente citados con la ayuda de cualquiera de los vídeos que sobre vectores existen actualmente en el mercado.

Unidad 2: RECTAS Y PLANOS.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

— Identificar los elementos que determinan una recta en el plano y en el espacio, conociendo e interpretando las diversas formas de ecuación de una recta.

— Identificar los elementos que determinan un plano en el espacio, conociendo e interpretando las diversas formas de ecuaciones de los planos.

— Resolver problemas sencillos de intersección, incidencia y paralelismo entre rectas y planos.

— Resolver problemas sencillos de cálculo de distancias en el plano y en el espacio.

— Analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales.

Contenidos

Conceptos

— Punto, recta y plano.

— Vector director de una recta. Vector perpendicular a un plano.

— Recta como intersección de planos.
— Posiciones relativas de rectas y planos. Interpretación geométrica.
— Ángulo entre rectas y planos.
— Distancias en el plano y en el espacio.

Procedimientos

— Determinación de una recta. Cálculo y utilización de las ecuaciones de una recta.
— Determinación de un plano. Cálculo y utilización de las ecuaciones de un plano.
— Resolución de problemas de incidencia, intersección y paralelismo en el plano y en el espacio.
— Identificación y medida de ángulos entre rectas y planos.
— Cálculo de distancias en el plano y en el espacio.

Actitudes

— Valoración de la importancia de la interrelación de las distintas ramas de las Matemáticas para la resolución de problemas concretos.
— Aprecio de las nuevas tecnologías como herramientas para describir y comprender la realidad.
— Creación y desarrollo de hábitos de investigación sistemáticos.
— Tenacidad y constancia en la realización de investigaciones geométricas.

Actividades

Teniendo en cuenta que los alumnos y alumnas ya conocen la ecuación de una recta en el plano y que están capacitados para un estudio más profundo de la Geometría Analítica por los conceptos adquiridos en 1.º de Bachillerato, abordamos el estudio de la ecuación de la recta mediante vectores basándonos en la Unidad didáctica anterior, en concreto el producto de un vector por un número real. Por tanto, podemos introducir la ecuación vectorial de una recta, para deducir, posteriormente, las diversas formas de la ecuación de la misma. De forma análoga, obtendremos las diversas formas de ecuaciones de un plano.

Posteriormente, pasaremos a estudiar las posiciones relativas que pueden ocupar las rectas y los planos, en casos sencillos, haciendo uso del estudio y solución de los sistemas de ecuaciones y de su interpretación geométrica. Pasando, por último, a resolver problemas de distancias y a calcular ángulos entre rectas y entre planos.

Unidad 3: LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS. LA ESFERA.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

— Determinar lugares geométricos.
— Conocer las ecuaciones y propiedades de las cónicas, resolviendo problemas relacionados con las mismas.

— Resolver problemas cualesquiera de lugares geométricos importantes.

— Reconocer la esfera como lugar geométrico en el espacio.

Contenidos

Conceptos

— Lugar geométrico.

— Mediatriz de un segmento. Ecuación y propiedades.

— Bisectriz de un ángulo. Ecuación y propiedades.

— Circunferencia. Ecuación y propiedades.

— Elipse, hipérbola y parábola.

— La esfera.

Procedimientos

— Obtención de la ecuación de la mediatriz de un segmento.

— Obtención de la ecuación de la bisectriz de un ángulo.

— Obtención de la ecuación reducida y general de una circunferencia.

— Obtención de las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

— Obtención de la circunferencia que pasa por tres puntos.

— Hallar la intersección de una recta y una circunferencia, o de dos circunferencias, deduciendo las posiciones relativas que ocupan.

— Obtención de la ecuación de una recta tangente a una circunferencia.

— Obtención de la potencia de un punto respecto de una circunferencia.

— Obtención de la ecuación reducida de la elipse, de la hipérbola y de la parábola.

— Obtención de la ecuación de la esfera.

Actitudes

— Gusto por reconocer el Universo y sus formas.

— Aprecio por el mundo real que nos rodea.

— Reconocimiento del extraordinario avance que han supuesto las nuevas tecnologías de la información, informática y vídeos, en el reconocimiento y uso de estas formas en el Universo.

Actividades

La idea de lugar geométrico no es nueva para los alumnos y alumnas, puesto que en la Unidad anterior han obtenido las ecuaciones vectoriales de la recta y el plano, respectivamente, como lugares geométricos.

Una vez recordado este hecho, se propone encontrar lugares geométricos sencillos como, por ejemplo: dado un segmento fijo, hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que con dicho segmento forman triángulos de área constante, o de perímetro constante.

Posteriormente, los propios alumnos obtendrán las ecuaciones de la mediatriz de un segmento, de las bisectrices de un ángulo y de la ecuación reducida de la circunferencia como lugares geométricos.

Problema también muy interesante y fácil de resolver por parte de los alumnos y alumnas, es estudiar cómo la potencia de un punto respecto de una circunferencia no depende de la recta que se considere. Una vez lo hayan comprobado se les puede dirigir hacia el cálculo de dicha potencia basándose en el centro de la circunferencia de que se trate y en su radio.

Hay que tener en cuenta que los alumnos y alumnas ya han estudiado a lo largo de la E. S. O. las cónicas como cortes del cono y, en algún caso, también como lugares geométricos, aunque esto último no se puede generalizar. En cuanto a la elipse, se propondrá el dibujo de varias de ellas haciendo uso de una cuerda de longitud fija, sujeta sobre dos puntos también fijos (método del jardinero), así como la obtención de la órbita de la Tierra alrededor del Sol (leyes de Kepler).

Por último, se pueden proponer actividades sobre antenas parabólicas y/o trayectorias de proyectiles para que los alumnos valoren la ecuación de la parábola y analicen algunas superficies parabólicas.

Con posterioridad a encontrar la ecuación de la esfera, como lugar geométrico, se aplicará la misma al estudio de las coordenadas astronómicas y a las distintas construcciones de mapas geográficos, como proyecciones de la esfera en el plano.

Unidad 4: Curvas y superficies.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Familiarizarse con algunas formas geométricas presentes en la naturaleza y en la arquitectura.
- Estudiar algunas formas geométricas relacionando sus ecuaciones con sus características geométricas.

Contenidos

Conceptos

- Espirales y hélices.
- Envolventes de rectas. La cicloide.
- Envolventes de curvas. La cardioide.
- Superficie de revolución de rectas y cónicas.

Procedimientos

- Obtención de las ecuaciones de algunas espirales.
- Obtención de las ecuaciones de algunas hélices sencillas.

— Obtención de la ecuación y trazado de la cicloide y la cardioide. Análisis de sus propiedades.

— Obtención de las ecuaciones de algunas superficies de revolución.

— Análisis de las propiedades de algunas superficies de revolución sencillas.

Actitudes

— Gusto por estudiar las curvas y superficies que se presentan en la naturaleza y en la arquitectura.

— Aprecio por el mundo real que nos rodea.

— Reconocimiento del papel de las nuevas tecnologías en la representación de curvas y superficies.

Actividades

Para comenzar esta Unidad es necesario recordar los distintos tipos de coordenadas para representar en el plano y en el espacio.

A partir del visionado de vídeos y diapositivas de formas arquitectónicas y naturales en las que aparecen curvas y superficies sencillas (arcos de puentes, escaleras de caracol, caracoles, chimeneas, plantas trepadoras, etc.), de las que se van a estudiar, se pasará al estudio de sus ecuaciones en los distintos tipos de coordenadas.

Las espirales y las hélices son las más sencillas y por lo tanto deberán ser las primeras en estudiarse. El ordenador será un instrumento esencial para su representación, con programas como «Derive», que permiten su visualización de una manera sencilla y clara.

Posteriormente se introduce el concepto de envolvente de una recta, utilizando las cónicas que se acaban de estudiar, completando de esta manera todas sus formas de aparición, para terminar con las envolventes de curvas sencillas.

Por último se introducen las superficies generadas por revolución de rectas y curvas sencillas y se estudian las ecuaciones de alguna de ellas (conos, cilindros, etc.). Para su estudio gráfico es necesario la utilización de las nuevas tecnologías.

Desarrollo de la Unidad: Sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Como se indica en la introducción del Álgebra, la finalidad fundamental de la misma en 2.º de Bachillerato es la obtención de resultados en los problemas que pueden plantearse mediante sistemas de ecuaciones. Ahora bien, para poder obtener un máximo aprovechamiento en cuanto al estudio y resolución de problemas de sistemas de ecuaciones, son necesarias una serie de herramientas básicas como son las matrices y los determinantes. Por ello, previo al estudio de los sistemas, es necesario que aquéllos adquieran un cierto grado de conocimiento de dichas herramientas.

Además, y puesto que como es lógico, el Álgebra comprende la primera parte del currículo de las Matemáticas en este curso, es decir, está situada en el primer trimestre, la situación temporal de esta Unidad será a mediados del mes de noviembre y durando su estudio hasta aproximadamente las vacaciones de Navidad.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Transcribir situaciones reales como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlas, cuando sea posible.
- Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocer y utilizar diversos métodos de resolución de sistemas: Gauss, Cramer y método de la matriz inversa.
- Estudiar y resolver sistemas dependientes de un parámetro.

Contenidos

Conceptos

- Sistemas de ecuaciones lineales. Interpretación geométrica.
- Ecuaciones equivalentes. Sistemas equivalentes.
- Solución de una ecuación. Solución de un sistema. Interpretación geométrica.
- Matriz de los coeficientes y matriz ampliada.
- Sistemas homogéneos.
- Teorema de Roché-Fröbenius.

Procedimientos

- Interpretación, representación y resolución mediante un sistema de ecuaciones lineales de un problema de enunciado real.
- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
- Estudio de la compatibilidad o incompatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, aplicando el teorema de Roché.
- Estudio de un sistema de ecuaciones lineales que dependa de un parámetro, aplicando el teorema de Rouché.
- Resolución de un sistema: método de Gauss, regla de Cramer y método de la matriz inversa.

Actitudes

- Sentido crítico ante las resoluciones intuitivas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en la representación gráfica de las rectas y planos.

Conocimientos previos

Dentro de estos conocimientos están algunos estudiados por los alumnos y alumnas en Primer curso de Bachillerato y en la E. S. O., como son: ecuaciones, resolución de sistemas sencillos, representación gráfica de una recta, etc., y otros, dados dentro de este curso de Bachillerato, como son matrices y determinantes.

En cuanto a los primeros, hemos creído conveniente recordarles dentro de la propia Unidad Didáctica, antes de comenzar con los nuevos contenidos, buscando, por un lado, retomar dichos conocimientos y, por otro, que haya una continuidad en los mismos, de todas formas es importante que se realice una prueba inicial, que nos dé una idea concreta de los niveles de conocimientos de las alumnas y alumnos respecto de este tema.

En cuanto a los segundos, matrices y determinantes, los hemos visto inmediatamente antes de esta Unidad y, por tanto, no deben tener dificultades con ellos.

Ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas

Planteamiento y definición

El profesor comenzará la Unidad recordando cuáles son las ecuaciones lineales, ecuaciones que los alumnos y alumnas han visto ya en cursos anteriores. Así mismo, hará hincapié en que todo lo que se diga en la Unidad didáctica es para estas ecuaciones: esto es algo que los alumnos y alumnas han de tener presente en todo momento.

Así, son ecuaciones lineales las siguientes:

$x + 2y = 3;$ $\qquad$ $2x + 3y + z = 7$

Mientras que las ecuaciones

$x^2 + 2y = 3$

$2x + 3y + z^3 = 7$

$xy + 7x = 5$

no serían ecuaciones lineales.

En definitiva:

> Ecuaciones lineales son aquellas en las que sus incógnitas, todas ellas y siempre que aparezcan, están elevadas a la unidad, no apareciendo, además, indicado el producto de dos de ellas.

Por otro lado, los alumnos también saben ya que una ecuación lineal con dos incógnitas como $x + 2y = 3$, representa una recta. Como por dos puntos distintos sólo puede pasar una recta, con obtener un par de puntos de la misma, podríamos hallar su representación gráfica.

Aunque lo anterior es de sobra conocido por los alumnos y alumnas, siempre suelen oponer una cierta resistencia a obtener solamente esos dos puntos, ya que normalmente están acostumbrados a representar una recta dando cuatro, cinco o incluso más valores, creyendo que, de esta forma, «sale mejor».

Por otro lado, aunque sea anticipar un hecho que posteriormente se estudiará en Geometría, es bueno que se indique que una ecuación lineal de tres incógnitas, como $2x + 3y + z = 7$, representa un plano en el espacio. Evidentemente, no es ahora el momento, ni mucho menos, de profundizar en este tema: sólo deben conocerlo.

Como más adelante se estudiará en Geometría, tres puntos determinan un plano; por tanto, si quisiéramos representar el mismo, tendríamos que calcular tres ternas, tres puntos, para poder hacer su representación gráfica sobre los tres ejes de coordenadas, sistema de referencia del espacio.

Actividades

- Dada una serie de ecuaciones, proponer a los alumnos y alumnas que las clasifiquen en lineales y no lineales.
- Dada una serie de ecuaciones, proponer a los alumnos y alumnas que las clasifiquen según su número de incógnitas y que hagan su interpretación geométrica.
- Proponer a los alumnos y alumnas problemas que den lugar a una ecuación con una incógnita, algunos con solución y otros sin solución.
- Recordar las diversas ecuaciones de líneas rectas que se han visto en primer curso.
- Estudio básico en el espacio: dibujar puntos en el espacio, dibujar rectas en el espacio, dibujar planos en diversas posiciones relativas, etc.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Planteamiento

Comenzaremos con un problema sencillo similar al siguiente:

> **«Descomponer el número 27 en dos partes de manera que al dividir una entre otra obtengamos 2 de cociente y 6 de resto».**

Habrá alumnos que resolverán este problema planteando una ecuación con una sola incógnita, llamando x a una de las cantidades y 27 - x a la otra. Es importante en este momento, resaltar que lo más conveniente para resolver este tipo de problemas, será considerar dos incógnitas, una para cada uno de los números que hay que encontrar.

En general a los alumnos y alumnas les cuesta bastante la «traducción» de los enunciados verbales a lenguaje algebraico, por tanto el profesor comenzará recordando y reiterando los pasos necesarios para conseguirlo:

- Leer comprensivamente todo el enunciado del problema.
- Fijarse de forma concreta en las preguntas que se hacen en el problema.
- Asignar una incógnita a cada uno de los elementos desconocidos que hay que calcular.
- Escribir las ecuaciones correspondientes.

En consecuencia tendremos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 27 \\ y &= 2x + 6 \end{aligned}\right\}$$

Sistema que hay que resolver.

Resolución. Interpretación geométrica

Resolver un sistema es hallar la solución del mismo, es decir, los valores que hay que dar a cada una de las incógnitas para que se verifiquen *simultáneamente* todas las ecuaciones.

Por cualquiera de los métodos ya conocidos: sustitución, reducción o igualación, los alumnos y alumnas resolverán el sistema anterior obteniendo el resultado de $x = 7$ e $y = 20$. Aquí el profesor insistirá en el hecho de que tienen total libertad para resolver los sistemas elementales de la forma que crean más conveniente, ya que no existe un método «mejor» que otro de manera objetiva.

Es conveniente insistir en el hecho de que este par de valores, 7 y 20, no son las dos soluciones del problema sino que son la única solución de este sistema.

Uno de los problemas más comunes es los abusos de lenguaje que se comenten en cuanto a la cantidad de soluciones que posee un sistema. El profesor deberá insistir en ello desde este momento.

Hay que recalcar también que esos dos números, la solución, son los únicos que verifican simultáneamente ambas ecuaciones, llegando a la conclusión de su significado a través de las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos pares de números verifican la ecuación $x + y = 27$?
- ¿Cuál será la representación gráfica de todos esos pares de números?

— ¿Verifican todos esos pares de números la ecuación $y = 2x + 6$?
— ¿Cuál es la representación gráfica de todos esos pares de números?
— ¿Verifican todos esos pares de números la ecuación $x + y = 27$?
— Por último: ¿cuál es el único punto del plano que pertenece simultáneamente a ambas rectas?

De esta manera hemos hecho la interpretación geométrica de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de su solución. Es también el momento de insistir en ello y relacionar siempre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con la posición de las rectas asociadas a ellos.

Para mayor y mejor aclaración del método gráfico, usaremos dos transparencias realizadas sobre papel cuadriculado o milimetrado. En una de ellas, estará dibujada la recta $x + y = 27$, mientras que en la otra estará la segunda recta. Al solapar ambas transparencias se comprobará cuál es el punto solución.

Actividades

Los alumnos y alumnas, de manera individual, resolverán ahora el siguiente ejercicio:

1. En un corral hay 50 animales entre gallinas y conejos. El número total de patas es de 150. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Normalmente, los alumnos y alumnas están muy acostumbrados a que las soluciones que resultan en cualquiera de los problemas que resuelven sean soluciones enteras. Por ello, propondremos ahora estos dos ejercicios:

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 159 \end{array}\right\}$$

De solución $x = 41/2$ e $y = 59/2$.

Una vez que se les ha insistido en que no tienen por qué extrañarse de que la solución no sea entera, sino que en general será un número real, les propondremos, de nuevo, el problema de los conejos y las gallinas:

3. En un corral hay 50 gallinas y conejos. El número total de patas es de 159. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Al resolver este problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtendremos el mismo sistema que en el ejercicio anterior. Posiblemente habrá alumnos que, sin pensar más, se dediquen a resolverlo, mientras que otros plantearán en este momento objeciones en cuanto al resultado que va a aparecer. Así, este ejercicio, nos servirá para insistir en el hecho de que deben estudiar si las soluciones que resultan no solamente son correctas, sino si, además, son válidas.

Número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Hasta ahora todos los ejemplos que se han propuesto tienen una única solución, sea ésta válida o no. Es conveniente abordar ya el estudio de sistemas en los que esto no sea cierto.

Planteamiento

Propondremos a los alumnos y alumnas que, por grupos, intenten resolver sistemas como los siguientes sacando sus propias conclusiones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 4x - 4y = 5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 8 \end{array}\right\}$$

Ninguno de ellos tiene una única solución. En el primer caso no tiene solución, las dos rectas que representan ambas ecuaciones son paralelas y, por tanto, no se cortan, y en el segundo caso tiene infinitas soluciones, puesto que ambas rectas son coincidentes.

Tanto un caso como otro se pueden apreciar muy bien mediante sendas transparencias superpuestas.

Conclusión

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede:

- Tener una solución: punto de intersección de dos rectas.
- No tener solución: ambas rectas son paralelas.
- Tener infinitas soluciones: ambas rectas son coincidentes.

Definiciones

Si un sistema tiene solución se dice que es compatible. Si la solución es única se dice compatible determinado, mientras que si tiene infinitas soluciones se dice compatible indeterminado.

Un sistema que no tiene solución se dice que es incompatible.

Insistiendo sobre estas definiciones:

- Si dos rectas se cortan en un punto estaremos ante un sistema compatible determinado.
- Si dos rectas son coincidentes estaremos ante un sistema compatible indeterminado.
- Si dos rectas son paralelas estaremos ante un sistema incompatible.

Actividades

Comenzaremos planteando la siguiente pregunta, dando tiempo a que, por grupos, los alumnos y alumnas discutan los posibles resultados: ¿Puede un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tener 2 soluciones? ¿Por qué?

Como indicación se les puede aconsejar que intenten representar dos rectas que se corten en dos puntos y nada más que en dos puntos.

Posteriormente, propondremos estudiar la posición relativa de tres rectas, a través de dos ejemplos:

1. Estudiar la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$2x - y = 2$; $x + y = 3$; $-x + 5y = 5$;

Haciendo la representación gráfica de las mismas sobre tres transparencias, vemos que las tres se cortan en un punto.

¿Será compatible o incompatible el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores?

2. Estudiar la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

$\mathbf{x - 2y = 2; \quad x - y = -2; \quad 4x + 5y = 20;}$

Igual que en el caso anterior, haciendo la representación gráfica de las mismas, comprobamos que esas rectas se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto en común para las tres.

¿Será compatible o incompatible el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores?

Generalización

Es llegado ya el momento de que el profesor vaya formalizando los resultados estudiados hasta el momento, haciendo abstracción de datos concretos y generalizando los conceptos y resultados obtenidos.

Definiciones

Se llaman sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a expresiones del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Se llama solución del sistema a un par de números (s_1, s_2) tales que al cambiar la x por s_1 y la y por s_2, se verifiquen ambas ecuaciones.

Expresión matricial

Consideremos las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Al ser la primera de ellas de dimensión 2x2 y la segunda de dimensión 2x1, ambas se pueden multiplicar siendo el producto de ambas la matriz de dimensión 2x1 siguiente:

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix}$$

Igualando esta matriz a la matriz columna $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, por la propia definición de igualdad de matrices, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

En definitiva, lo que acabamos de comprobar es que el sistema genérico de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by \ = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

Notación vectorial

Consideremos ahora la siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la operación producto de número por matriz, podremos poner:

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sumando las dos matrices del primer miembro:

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Y, por último, de acuerdo con la definición de igualdad de matrices, tendremos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \ = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\}$$

Por supuesto, realizando el proceso inverso, es decir, partiendo del sistema último, llegaremos a la ecuación matricial escrita al principio de este punto.

Así, cualquier sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by \ = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

puede escribirse en la forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

a la que se conoce como expresión vectorial del sistema y en la que cada incógnita aparece mutiplicada por la matriz columna que tiene como elementos los coeficientes de esa incógnita en el sistema.

Actividades resueltas

Aunque tanto la notación matricial como la vectorial no tienen ninguna dificultad pues anteriormente han trabajado en profundidad con las matrices, es conveniente que, antes de proseguir con nuevos conceptos, los alumnos y alumnas no tengan ninguna duda a la hora de escribir un sistema cualquiera en alguna de estas dos formas. Vamos, pues, a resolver un par de ejemplos sobre estos puntos.

1. Escribir matricial y vectorialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ -x + 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Solución:

La notación matricial será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Y, por su parte, escrito vectorialmente, el sistema será:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Escribir matricial y vectorialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x \quad = 4 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Solución:

La notación matricial será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Y la notación vectorial será:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

Propondremos a continuación problemas que den lugar a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se plantearán para su resolución en grupos de 3-4 alumnos, debiendo escribir los sistemas resultantes tanto en notación matricial como en notación vectorial.

Por ejemplo:

- **Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 11.000 pesetas. Calcular el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 800 pesetas.**
- **Un rectángulo tiene de área 12 cm². Si alargamos un centímetro su base y acortamos dos centímetros su altura, el área es 8. Hallar su base y su altura.**

Sistemas equivalentes

Planteamiento

Propondremos a los alumnos y alumnas la resolución de los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + 3y = -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + 7y = -5 \\ 3x - 5y = 8 \end{array}\right\}$$

Vemos que la solución para ambos es la misma: $x = 1$

$y = -1$

Por ocurrir este hecho, se dice que ambos sistemas son **equivalentes**.

Definición

Dos sistemas se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

La utilidad que posee la equivalencia de sistemas es evidente: se trata de resolver un sistema cuyas ecuaciones son complicadas; en su lugar, vamos a resolver otro sistema que tenga las mismas soluciones que el propuesto (sistema equivalente) y que sea de ecuaciones mucho más sencillas.

Interpretación geométrica

La interpretación geométrica de la equivalencia de sistemas es inmediata: ya que por un punto pasan infinitas rectas, se trata de elegir dos pares de las mismas de entre todas las que pasen por el punto considerado.

Por otro lado, esto es para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. De forma natural se extiende esta idea a la de cualquier sistema de ecuaciones.

Criterios de equivalencia

Es conveniente, aunque sea sabido ya por los alumnos y alumnas, hacer un breve repaso de las propiedades más útiles que se manejan a la hora de trabajar con sistemas.

Se trata de ver cuáles son las transformaciones que podemos efectuar en un sistema dado de manera que obtengamos otro sistema equivalente y más sencillo.

Se van a comprobar a través de ejemplos. Las demostraciones quedan fuera del alcance de este nivel de estudios.

1. Al intercambiar dos ecuaciones cualesquiera de un sistema, resulta un sistema equivalente al dado.

En efecto, consideramos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$$

Al intercambiar las dos ecuaciones obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\}$$

La solución de ambos sistemas es, obviamente, la misma.

2. Al multiplicar toda una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, resulta un sistema equivalente al dado.

Así, el sistema $\left.\begin{array}{ll} 2x - y & = -1 \\ 2x + 2y & = 8 \end{array}\right\}$

es equivalente a cualquiera de los dos anteriores.

Hay que recalcar el hecho de que el cambio de signo no es más que un caso muy concreto del producto: producto por –1.

3. Si una ecuación de un sistema se sustituye por ella misma más una combinación lineal de las demás, el sistema que se obtiene es equivalente al dado.

Así, si en el primer sistema que escribimos, sustituimos la segunda ecuación por ella misma más la primera, obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - y & = -1 \\ 3x & = 3 \end{array}\right\}$$

Sistema que es equivalente al dado.

Llegados a este punto, el profesor comentará la idea geométrica subyacente a todos los criterios que estamos estudiando:

Ha tenido que quedar ya perfectamente claro para los alumnos y alumnas la relación biunívoca existente entre las ecuaciones lineales de dos incógnitas y las ecuaciones de las rectas en el plano. Ya hemos visto también que resolver un sistema no es más que hallar el punto de corte de las dos rectas que lo forman.

Así, lo que nos interesa de esas rectas que forman el sistema a resolver, no son ellas mismas, sino el punto de corte de ambas. Pero por ese punto pasan infinitas rectas (haz de rectas que pasan por un punto) y, en definitiva, cuando estamos escribiendo ecuaciones equivalentes a las dadas, lo que hacemos es elegir las rectas que más nos convengan de entre todas las que pasen por ese punto; de entre todas las que se cortan en él.

Para terminar el profesor también puede comentar el hecho de que al decir que la solución de un sistema es «$x = 3$» e «$y = 5$», lo que se hace es definir un punto del plano, el punto (3, 5), como intersección de dos de las rectas que pasan por él y que tienen la particularidad de que son paralelas a los ejes.

Actividades

Se trata de conseguir que los alumnos y alumnas sean capaces de romper su pasividad; que no estén a la espera de que el profesor proponga un enunciado y que ellos mismos sean capaces de inventarse/plantearse los problemas. Por este motivo se plantean las siguientes actividades que los alumnos han de resolver por grupos:

- **Proponer a los alumnos y alumnas una serie de sistemas debiendo éstos agrupar todos aquellos que sean equivalentes entre sí.**
- **Dar un sistema de ecuaciones teniendo que plantear los alumnos y alumnas sistemas equivalentes al mismo.**
- **Escribir varios sistemas de ecuaciones que tengan como soluciones unos valores indicados por el profesor.**

Será obligación del profesor exigir algo más a sus alumnos y alumnas: normalmente los ejemplos que éstos se propongan serán de dos ecuaciones con dos incógnitas; el profesor hará que también se planteen enunciados de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Método de Gauss

Sistemas escalonados

En este momento de la Unidad didáctica vamos a enseñar a los alumnos y alumnas a resolver sistemas más amplios que los vistos hasta el momento utilizando una nueva técnica para ellos desconocida: el método de Gauss, como paso previo necesario al aprendizaje de técnicas más poderosas (teorema de Rouché–regla de Cramer).

Comenzaremos planteando el siguiente ejercicio:

Averiguar cuántos hombres, mujeres y niños hay en una reunión sabiendo que:

- **Si hubiera un niño más, habría igual número de niños que de hombres y mujeres juntos.**
- **Si hubiera 8 mujeres más, el número de éstas doblaría a la suma de hombres y niños.**
- **El triple de la cantidad de hombres más el número de mujeres es igual al número de niños más 5.**

Evidentemente, este enunciado, a la hora de resolverlo, se nos transforma en un sistema. Se trata de resolver este sistema aplicando los criterios de equivalencia que hemos visto en el apartado anterior.

Empezamos escribiendo el sistema resultante del enunciado. Como ya se ha comentado anteriormente, muchos alumnos y alumnas tienen una enorme dificultad en «traducir» los enunciados de los problemas. Para paliar este hecho, deberán ser los propios alumnos y alumnas, no el profesor, los que lleguen, por sus propios medios, a escribir las ecuaciones correspondientes, aun a costa de una «pérdida» de tiempo. Es conveniente que en este primer ejercicio, los alumnos se agrupen, como mucho de tres en tres, para la discusión y escritura de las ecuaciones correspondientes y que se siga este sistema en los tres o cuatro ejercicios siguientes. Posteriormente se les ha de exigir que los planteen de forma absolutamente individual.

Así mismo, se les debe recordar que tienen que comenzar todos los problemas de este tipo indicando claramente a qué llaman de qué modo.

Si llamamos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños, el sistema será el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} z + 1 = x + y \\ y + 8 = 2(x + z) \\ 3x + y = z + 5 \end{array}\right\}$$

A continuación, hacemos que cada ecuación tenga todas las incógnitas en el primer miembro, *quedando en el segundo miembro únicamente los términos independientes:*

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\}$$

(Al mismo tiempo hemos hecho que la «x» tuviera siempre el signo positivo exclusivamente por cuestión de comodidad.)

Restando a la 2.ª ecuación el doble de la 1.ª, obtenemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\}$$

Restando a la 3.ª ecuación el triple de la 1.ª, llegaremos al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ -2y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

La 3.ª ecuación es simplificable. La dividimos por 2, aunque realmente no haga falta, más que nada para que los alumnos y alumnas se acostumbren a trabajar con las expresiones más sencillas posibles.

Simultáneamente, cambiamos de signo a las ecuaciones 2.ª y 3.ª para hacer que la primera incógnita tenga signo positivo. Igual que decíamos antes, esto no es necesario en absoluto: únicamente se trata de seguir insistiendo en crear hábitos de trabajo que faciliten la tarea a realizar en el futuro.

En definitiva, el sistema queda convertido en:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3y - 4z &= -6 \\ y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos la 3.ª ecuación por 3 y le restamos la 2.ª con el fin de eliminar la «y». El sistema resultante es:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3y - 4z &= -6 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Ya se ha obtenido el valor de una de las incógnitas: la z.

No se debe dar por supuesto que una vez hallada la z, los valores de la x y la y son obtenidos por los alumnos y alumnas de forma elemental: hay que hacer que los obtengan.

Para hallar el valor de la «y», sustituimos en la 2.ª ecuación la «z» por 3, obteniéndose $y = 2$.

Por último, para obtener el valor de la «x», sustituimos en la 1.ª ecuación la «y» por 2 y la «z» por 3, obteniéndose $x = 2$ y quedando resuelto el problema:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

El sistema que hemos obtenido al final se dice que tiene forma **escalonada**.

Por último, hay que recalcar que las incógnitas a eliminar en un sistema escalonado pueden ser cualesquiera, no la x y la y, sino los que más convenga en función de la sencillez de las operaciones a efectuar.

Definición

Un sistema de ecuaciones se dice que tiene forma escalonada cuando cada una de las ecuaciones tiene una incógnita menos que la anterior.

Método de Gauss

El método que hemos seguido para la resolución del problema anterior es una ampliación del método de reducción ya conocido por los alumnos y alumnas. A esta ampliación del método de reducción se le conoce como **método de Gauss**.

Definición

Diremos que un sistema de ecuaciones se ha resuelto por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones previa la reducción del sistema dado a otro equivalente a él que sea escalonado.

Como ejercicio, resolveremos por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a eliminar de la 2.ª y 3.ª ecuaciones la x.

Para eliminar la x de la 2.ª ecuación, multiplicamos a la 1.ª ecuación por 2 ($2x + 2y + 2z = 4$) y se la restamos a la 2.ª.

Para eliminar la x de la 3.ª ecuación, sencillamente le restamos la 1.ª.

El sistema equivalente resultante será:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -3y - 3z &= -3 \\ -3y + 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Eliminamos ahora de la 3.ª ecuación la y. Le restamos la 2.ª ecuación quedando, en definitiva, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -3y - 3z &= -3 \\ 5z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Sistema escalonado de solución única:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Interpretación geométrica

Como se comentó al comienzo de la Unidad, una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$ es la ecuación de un plano en el espacio, donde las ternas de números (x_1, y_1, z_1) que verifican dicha ecuación, son puntos del plano correspondiente.

Por tanto, resolver sistemas con tres incógnitas no es más que hallar los puntos del espacio que verifican las correspondientes ecuaciones o, con otras palabras, que están en los correspondientes planos representados por las mismas.

Así, decir que la solución del sistema anterior era la $x = 2$, $y = 2$ y $z = 3$ es lo mismo que decir que los tres planos:

$x + y - z = 1$; $\quad 2x - y + 2z = 8$; $\quad 3x + y - z = 5$

se cortan en el punto (2, 2, 3).

Generalización

Al igual que se hizo en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, generalizamos lo visto hasta el momento sobre los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Definiciones

Se llaman sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas a expresiones del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$

Se llama solución del sistema a una terna de números (s_1, s_2, s_3) tales que al cambiar la x por s_1, la y por s_2 y z por s_3, se verifiquen simultáneamente las tres ecuaciones.

Expresión matricial

Consideremos las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Al ser la primera de ellas de dimensión 3 x 3 y la segunda de dimensión 3 x 1, ambas se pueden multiplicar siendo el producto de ambas la matriz de dimensión 3 x 1 siguiente:

$$\begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \\ a''x + b''y + c''z \end{pmatrix}$$

En definitiva, lo que acabamos de comprobar es que el sistema genérico de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$

se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

Notación vectorial

De forma por completa análoga a como veíamos con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, la notación vectorial consiste en multiplicar a cada incógnita por la matriz columna de sus respectivos coeficientes. Por tanto, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$

escrito en notación vectorial, será:

$$\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Escribir matricial y vectorialmente el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 1 \\ x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

La notación matricial será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y la notación vectorial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Actividades resueltas

1. Resolver, en grupos de dos y aplicando el método de Gauss, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a eliminar la x de la 2.ª y 3.ª ecuaciones restándoles a ambas la 1.ª:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \\ 2y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ahora intentamos eliminar la y de la 3.ª ecuación. Para ello, le sumamos la 2.ª obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Con lo cual, esa 3.ª ecuación nos sobra, quedando nuestro sistema reducido al sistema equivalente siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Por tanto, al tener menos ecuaciones que incógnitas, no va a tener solución única, sino que va a tener infinitas soluciones.

De la misma forma que decíamos en los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, podemos plantear en este momento a los alumnos si dos planos pueden tener 2 puntos, y sólo 2, de contacto.

Más adelante, después de estudiar el teorema de Rouché, veremos el método para obtener esas soluciones.

2. Resolver, individualmente y aplicando el método de Gauss, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array}\right\}$$

Al restar a la 2.ª y 3.ª ecuaciones la 1.ª para eliminar la x, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 1 \\ 2y - 3z = 2 \end{array}\right\}$$

Posteriormente, al sumarle a la 3.ª ecuación la 2.ª para eliminar la y:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 1 \\ 0 = 3 \end{array}\right\}$$

Es decir, llegamos a un absurdo. Por tanto, este sistema no tiene solución.

Conclusión:

Los sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, lo mismo que los de 2 con 2, pueden ser:

- Compatibles determinados: con una única solución.
- Compatibles indeterminados: con infinitas soluciones.
- Incompatibles: sin solución.

Actividades propuestas

Proponer a los alumnos y alumnas problemas que den lugar a sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, como por ejemplo los siguientes:

- **Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus dos hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?**

- **La suma de las tres cifras de un número es 12. La cifra de las decenas es la suma de las unidades más la de las centenas y si se invierte el orden de las cifras, el número así obtenido es 198 unidades más pequeño que el dado. Calcular el número.**

Además de plantear y resolver estos sistemas, los alumnos y alumnas han de escribir sus notaciones matricial y vectorial.

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Definiciones

Se llama sistema de «m» ecuaciones con «n» incógnitas a cualquier expresión del tipo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Donde:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las incógnitas del sistema.
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ son los coeficientes de las incógnitas.
- $b_1, b_2, \dots, b_m$ son los términos independientes.

Se llama solución del sistema al conjunto de números $(s_1, s_2, \dots s_n)$ tal que, al sustituir la x_1 por s_1, la x_2 por s_2, ... la x_n por s_n, se nos verifiquen simultáneamente las m ecuaciones.

Resolver un sistema es hallar su solución o soluciones, si es que existen.

Discutir un sistema es analizar cuantas soluciones posee: una, infinitas o ninguna. Normalmente, la discusión se hace de modo independiente a la búsqueda de la solución y previamente a la misma.

Clasificación

Los sistemas, según las soluciones que posean, se clasifican de la siguiente manera:

— Un sistema se dice que es compatible si tiene al menos una solución.

Si esa solución es única, se dice compatible determinado. Si las soluciones son infinitas, se dice que el sistema es compatible indeterminado.

— Si un sistema no tiene solución se dice que es incompatible.

Hay que insistir en el hecho, como ya se comentó en los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y en los de 3 con 3, de que si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones. Es decir, no cabe el caso de un sistema que tenga un número finito de soluciones distinto de 1.

En resumen:

Sistemas
- **Compatibles:** con solución
  - **Determinados:** una
  - **Indeterminados:** infinitas
- **Incompatibles:** sin solución

Expresión matricial

Ya hemos visto las expresiones matriciales respectivas de los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. De forma análoga, generalizando, escribimos la expresión matricial de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ecuación que se acostumbra a escribir de forma más sencilla de la siguiente manera: $C.X = B$, siendo la matriz C la matriz de los coeficientes, la matriz X la matriz columna formada por las incógnitas y la matriz B la matriz columna de los términos independientes.

Expresión vectorial

Generalizando lo ya visto para sistemas más reducidos, la expresión vectorial de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ecuación que, resumida, se puede escribir así:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \dots\dots\dots + A_nx_n = B$$

donde, con A_i, con i variando desde 1 hasta n, (i = 1, 2,..., n) hemos querido representar la matriz columna de orden mx1 siguiente:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Y por B la matriz columna de los términos independientes.

Ejemplo:

Escribir matricial y vectorialmente el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + t + v &= 2 \\ 2x + 3y - z - 2v &= 1 \\ -x - y + 2z - 3t + 4v &= -2 \\ 4x + 2y - z + 2t - 3v &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Observaciones:

En los ejercicios y ejemplos que se hagan en clase se deben usar indistintamente, como nombre de las incógnitas, tanto las letras x, y, z, ..., como la notación x_1, x_2, x_3,..., con el fin de que los alumnos y alumnas se acostumbren a manejar sin problemas tanto la una como la otra.

De la misma forma, si estamos hablando de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas, m distinto de n, debemos acostumbrarles/acostumbrarnos a no escribir siempre sistemas que tengan igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Solución:

La notación matricial será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y la notación vectorial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes y matriz ampliada

Por último, asociadas a cualquier sistema, siempre consideraremos dos matrices:

— *Matriz de los coeficientes:*

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, esta matriz es de dimensión **mxn**

— *Matriz ampliada:*

$$C^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz ampliada es la matriz de los coeficientes a la que se le ha añadido una columna más: la columna de los términos independientes.

Por tanto, la dimensión de esta matriz es **mx (n + 1)**

Como ejemplo, haremos escribir a los alumnos y alumnas las dos matrices asociadas al último sistema visto.

La matriz de los coeficientes es la matriz de orden 4 x 5 siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz ampliada es la matriz de orden 4 x 6 siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema de Rouché-Fröbenius

Como se ha comentado anteriormente, antes de resolver un sistema lo normal será discutirlo, es decir, averiguar si tiene o no tiene soluciones y, en el caso de que sí tenga, cuántas.

Además, la discusión muchas veces nos indicará cuál es la mejor forma de abordar el problema de la resolución.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

Además, si los dos rangos son iguales e iguales al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (una única solución) mientras que si el rango es menor al número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

De otra manera, el teorema de Rouché-Fröbenius afirma:

– Si rang $(C) \neq$ rang (C^*) el sistema es incompatible.

– Si rang $(C) =$ rang $(C^*) = n$ el sistema es compatible determinado.

– Si rang $(C) =$ rang $(C^*) < n$ el sistema es compatible indeterminado.

Evidentemente el rango de una matriz no puede ser mayor que el número de columnas de la misma, por tanto rang (C) no podrá ser nunca mayor que n.

Demostración:

Vamos a demostrar únicamente la primera parte del teorema del Rouché-Fröbenius. Vamos a hacer esta demostración porque es necesario que vean ya (están estos alumnos y alumnos en el último curso del Bachillerato) una demostración formal.

Por otro lado, no haremos la segunda parte porque, además de requerir un aparato matemático más elevado, no compensarán el tiempo y el esfuerzo dedicados con los resultados obtenidos.

Entre las diversas formas de demostrar este teorema hemos seleccionado la siguiente:

Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Así como su notación vectorial:

$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \dots\dots\dots + A_nx_n = B$

y las dos matrices asociadas al mismo, la matriz de los coeficientes y la matriz asociada.

Condición necesaria

Si el sistema tiene solución el rango de las dos matrices coincide. En efecto:

Sea $(s_1, s_2, ..., s_n)$ una solución del sistema, que existe al suponer que es compatible.

Por ser ese conjunto de números solución, verifica todas las ecuaciones del sistema y, por tanto, ha de verificar la ecuación vectorial del mismo. Así se ha de cumplir que

$A_1s_1 + A_2s_2 + A_3s_3 + \dots\dots\dots\dots + A_ns_n = B$

Con ello, estamos diciendo que la columna última de la matriz ampliada es combinación lineal de las demás columnas, que son precisamente las columnas de la matriz de los coeficientes y, por tanto, el rango de las dos matrices ha de ser el mismo, puesto que, a efectos de rango, esa columna se podría eliminar de la matriz ampliada.

Por tanto, está demostrado que si el sistema es compatible entonces los dos rangos coinciden.

Condición suficiente

Si el rango de las dos matrices coincide, el sistema tiene solución. En efecto:

Consideremos las columnas A_1, A_2, ... A_n de la matriz C de los coeficientes y las columnas A_1, A_2, ... A_n, B de de la matriz ampliada C*.

Por ser rang (C) = rang (C*), se verificará que

rang $(A_1, A_2, ... A_n)$ = rang $(A_1, A_2, ... A_n, B)$

con lo cual, forzosamente ha de ser la columna B combinación lineal de las otras n columnas. Es decir, han de existir n números s_1, s_2, ... s_n tales que:

$B = A_1s_1 + A_2s_2 + A_3s_3 + \dots + A_ns_n$

que es, precisamente, la condición para que los números s_1, s_2, ... s_n sean solución del sistema y queda demostrada la condición suficiente del teorema.

Actividades resueltas

Vamos a hacer ahora diversos ejemplos de aplicación del teorema de Rouché-Fröbenius. Comenzaremos con ejemplos puramente numéricos (del 1 al 4) para, posteriormente, pasar a discutir algún sistema que dependa de algún parámetro (5 y 6). Por último, el ejemplo 7 nos introduce los sistemas homogéneos.

Por otro lado, el primer ejemplo será enteramente resuelto por el profesor en clase. Posteriormente, por grupos, los alumnos y alumnas han de resolver el ejemplo segundo.

Además, las soluciones se dan tan pormenorizadas para que el profesor pueda optar, en caso de necesidad por falta de tiempo o porque así lo estime conveniente en orden a que sus alumnos y alumnas autocorrijan sus soluciones, por la entrega de fotocopias a los mismos.

Ejemplos

1. Discutir, sin resolver aunque fuera posible, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución

Consideremos las dos matrices asociadas a este sistema:

matriz de los coeficientes

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz ampliada

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y vamos a calcular el rango de ambas matrices.

Aquí se ha de insistir en que *siempre* que haya que resolver un sistema, se ha de empezar escribiendo ambas matrices.

Calculamos el determinante de la matriz C:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 2 + 4 + 2 - 4 = 0$$

Por tanto, rang (C) < 3.

(Podíamos haber sabido que el determinante anterior valía cero sin necesidad de hacerlo mediante la regla de Sarrus, sin más que fijarnos que la 2.ª fila es el doble de la 1.ª).

Además, como el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

se verifica que rang(C) $= 2$.

Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada. Ya sabemos que será como mínimo 2 puesto que, evidentemente, el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

pertenece también a la matriz C*.

Ampliamos **este menor distinto de cero**, *con el que hemos visto que rang (C) = 2*, a los diversos menores de orden 3 que podamos formar con él dentro de la matriz C*.

Ya sabemos que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{vale cero.}$$

Calculamos, el valor del otro menor de orden 13:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 8 - 16 - 1 - 8 \neq 0$$

Por tanto, por ser distinto de cero este menor, es:

rang $(C)^* = 3 \neq$ rang (C)

Por tanto, por el teorema de Rouché-Fröbenius, este sistema es incompatible. No tiene solución.

2. Discutir, sin resolver aunque fuera posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Consideremos las dos matrices asociadas a este sistema:

Matriz de los coeficientes — Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y vamos a calcular el rango de ambas matrices.

La matriz C es la misma que en el ejercicio anterior, por tanto sabemos ya que rang $(C) = 2$ debido a que el determinante de C es 0 mientras que el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada.

Ampliamos este menor distinto de cero, con el que hemos visto que rang $(C) = 2$, a los diversos menores de orden 3 que podamos formar con él dentro de la matriz C^*.

Ya sabemos que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{vale cero.}$$

Calculamos, el valor del otro menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Puesto que la 2ª fila es el doble de la 1ª, este determinante vale 0. Por tanto, por ser iguales a cero todos los posibles menores de orden 3 que se pueden formar, tenemos:

rang (C)* = 2 = rang (C)

Por tanto, por el teorema de Rouché-Fröbenius, este sistema es compatible. Además, como el rango es 2, menor que el número de incógnitas, será compatible indeterminado, es decir, tendrá infinitas soluciones.

Más todavía: puesto que la 2.ª fila de la matriz ampliada es combinación lineal de las otras (en particular, es el doble de la primera), podemos eliminar la 2.ª ecuación del sistema puesto que no nos proporciona ninguna información que no tengamos ya y, por tanto, las infinitas soluciones de nuestro sistema saldrán de resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$$

Nota: el cálculo de esas infinitas soluciones lo haremos más adelante.

3. Discutir, sin resolver aunque fuera posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 2y - z = 4} \\ \mathbf{2x + 4y - z = 8} \\ \mathbf{x + y + z = 2} \end{array}\right\}$$

Solución:

Comenzamos, como en los ejercicios anteriores, calculando el determinante de la matriz de los coeficientes con el fin de hallar el rango de la misma.

Dicho determinante, en este caso, vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 2 + 4 + 1 - 4 \neq 0$$

Por tanto, es rang (C) = 3

Además, el rango de la matriz ampliada también ha de valer 3 puesto que solamente tiene 3 filas (con lo cual no puede ser 4) y el determinante anterior es un menor de dicha matriz.

Así, rang (C) = rang (C)* = 3 = número de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible determinado.

4. Determinar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{lcr} \mathbf{x + y + 3z - 2t - v} & \mathbf{=} & \mathbf{5} \\ \mathbf{x - y + z \quad + 2v} & \mathbf{=} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2x + 2y - 2z + t + v} & \mathbf{=} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{x + y + z + t + v} & \mathbf{=} & \mathbf{-1} \end{array}\right\}$$

Solución:

Escribimos las dos matrices asociadas a este sistema:

$$\underset{\text{Matriz de los coeficientes}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Matriz ampliada}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Vemos que la 4.ª fila de ambas matrices es igual a la suma de la 2.ª con la 3.ª. Por tanto, al ser combinación lineal, podemos eliminar la 4.ª ecuación (fila) y tendremos que calcular los rangos de las matrices siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Empezamos a calcular el rango de C.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

es distinto de cero, el rango ya será, como mínimo, 2.

Ampliamos este menor a los de orden 3 para comprobar si el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 6 - 2 + 2 \neq 0$$

Por tanto, rang (C) = 3.

Además, como rang (C*) = 3 por tener solamente 3 filas dicha matriz y por contener al menor anterior, este sistema será compatible, e indeterminado por ser 5 el número de incógnitas.

Vamos a discutir ahora algunos sistemas que dependen de algún parámetro:

5. Discutir, según los valores de m, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Al tratarse de un nuevo tipo de problema, será resuelto íntegramente por el profesor.

Solución:

Comenzamos, como siempre, escribiendo las matrices correspondientes a este sistema.

$$C=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^*=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Vamos a intentar calcular cuánto vale el rango de la matriz C. Para ello vamos a calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6m + 2 - 1 + 2 - 2m - 3 = 4m$$

El rango de la matriz C será 3 o menor que 3 dependiendo de que este determinante sea distinto de cero o igual a cero.

Igualamos, por tanto, dicho determinante a 0, con lo cual, obtenemos que $m = 0$.

Por tanto:

— Si $m \neq 0$, rang (C) = rang(C*) = n.º incógnitas. Compatible determinado.

— Si $m = 0$:

El sistema a resolver se convierte en el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Con sus matrices asociadas:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

es distinto de 0 y el determinante de C vale 0, el rango de dicha matriz C es 2.

Calculemos el rango de C* a partir del menor de orden 2 anterior:

— El menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

vale 0 según hemos impuesto anteriormente.

Calculamos, por tanto, el otro menor de orden 3 que podemos formar:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 + 2 \neq 0$$

Por tanto, rang $(C^*) = 3$.

Sistema incompatible.

En definitiva, si $m \neq 0$: compatible determinado.

Si $m = 0$: incompatible.

6. Determinar, según los distintos valores del parámetro m, la compatibilidad o incompatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Este ejemplo lo han de resolver los alumnos y alumnas mediante trabajo en grupo.

Solución:

Las dos matrices asociadas a este sistema son las siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz C *resulta igual a:*

$m^3 - 3m + 2$

Donde, si lo igualamos a 0 obtenemos como soluciones:

$m = 1$ (doble)

$m = -2$

Se nos presentan, por tanto, tres casos según que m tome valores distintos de 1 y -2, que m tome el valor 1 o que m tome el valor -2. Estudiamos cada caso.

— Para $m \neq 1$ y $m \neq -2$.

En este caso el determinante de C es distinto de 0. Por tanto, rang (C) = 3 rang (C^*) = n.º incógnitas. Compatible determinado.

— Para $m = 1$.

Las dos matrices se nos convierten en:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente es rang (C) = rang (C*) = 1.

Por tanto, el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 3 > 1, es indeterminado.

— Para m = -2

Las dos matrices que tenemos en este caso son:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de C ya sabemos que vale 0. Como el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$ vale $3 \neq 0$, el rango de C es, por tanto, 2.

Calculamos ahora el rango de C* a partir de este menor de orden 2.

Para ello, únicamente nos falta por calcular el valor del determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinante es distinto de 0. Por tanto, el rango de C* es 3. Por tanto, el sistema, en este caso, es incompatible.

Resumiendo:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado.
- Si m = 1 el sistema es compatible indeterminado.
- Si m = -2 el sistema es incompatible.

A continuación, sin comentario previo por parte del profesor, propondremos el ejemplo siguiente:

7. Estudiar el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 4x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes, es decir, resolvemos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 2 - 8 - 2 - 3 = -5$$

Por ser distinto de cero, el rango de la matriz de los coeficientes será 3.

Por otro lado, el rango de la matriz ampliada será también 3 al tener la columna correspondiente a los términos independientes toda ella formada por ceros. Por tanto, el sistema es compatible determinado teniendo una única solución.

Esta solución, por las especiales características que tiene el sistema propuesto, será $x = y = z = 0$.

Preguntas que se pueden hacer en este momento a los alumnos y alumnas son las siguientes:

- Un sistema en el que todos los términos independientes sean cero, ¿puede no tener solución?
- En el caso de que tenga siempre solución ¿cuál será ésta de manera obligatoria?
- ¿Serán siempre los rangos de las dos matrices iguales?
- ¿Serán siempre los rangos de las dos matrices igual al número de incógnitas?

Sistemas homogéneos

> Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se dice que es homogéneo si los m términos independientes son todos ellos igual a cero.

Es decir, la forma general de un sistema homogéneo será la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Con lo cual, cualquier sistema homogéneo va a tener siempre como solución la $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots\dots, x_n = 0$. A esta solución se le llama la solución trivial.

Las dos matrices asociadas a cualquier sistema homogéneo serán de la forma:

— Matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots\dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

— Matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots\dots a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots\dots a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots\dots a_{3} & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots\dots a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que, por tener la matriz ampliada una columna toda ella de ceros, el rango de ambas matrices siempre va a ser el mismo.

Por tanto, un sistema homogéneo **siempre** va a ser **compatible**, es decir, siempre va a tener una solución (la trivial).

Evidentemente, pueden darse dos casos: que el rango de ambas matrices sea igual al número de incógnitas del sistema o que dicho rango sea menor a ese número.

Caso 1.º

Rango de la matriz de los coeficientes **igual** al número de incógnitas.

Estaremos ante un sistema **compatible determinado**: una única solución que será la trivial.

Caso 2.º

Rango de la matriz de los coeficientes **menor** al número de incógnitas.

Estaremos ante un sistema **compatible indeterminado**: infinitas soluciones que obtendremos por los métodos que veremos a continuación.

Actividades propuestas

Propondremos a los alumnos y alumnas el estudio de diversos sistemas dependientes o no de algún parámetro. Ejemplos serían las siguientes actividades:

- **Calcular el valor del parámetro m de manera que el sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (m-1)\,x + y + z = m \\ x + (m-1)\,y - z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Tenga solución única

b) Tenga infinitas soluciones

c) No tenga solución.

- **Dado el sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - z = -2 \end{array}\right\}$$

Añadir una tercera ecuación de manera que resulte un sistema:

a) Compatible

b) Incompatible

Ambas actividades han de ser resueltas de forma individual.

Vamos a ver ya cómo se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales compatibles. Lo vamos a hacer por dos métodos: regla de Cramer y método de la matriz inversa.

Además de ellos, en algún momento se recomienda que, sin avisar previamente a los alumnos y alumnas, se proponga un sistema sencillo para que se resuelva por los métodos tradicionales con el fin de hacerles ver que estos métodos que estamos estudiando son ayudas a nuestro trabajo, pero no son estrictamente obligatorios en determinados casos.

Resolución de sistemas: Regla de Cramer

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de Cramer si verifica dos condiciones:

— El número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

— El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0.

A continuación, el profesor hará que se repasen todos los ejercicios vistos hasta el momento para comprobar cuáles de ellos son sistemas de Cramer. Posteriormente se hará ver a los alumnos y alumnas que todos los sistemas que son sistemas de Cramer son compatibles determinados y que todos ellos se van a poder resolver de la siguiente manera:

Regla de Cramer

En un sistema de Cramer el valor de cada una de las incógnitas es igual a un cociente que tiene como divisor el determinante de la matriz de los coeficientes (es distinto de 0 y, por tanto, se puede dividir por él) y como dividendo el determinante que resulta de sustituir en el anterior la columna correspondiente a la incógnita que estamos considerando por la columna de los términos independientes.

Actividades resueltas

Actividad 1

Estudiar y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Esta actividad, por ser la primera que se va a realizar, la resolverá el profesor.

Solución:

Según vimos en el ejemplo 5 de los correspondientes al teorema de Rouché-Fröbenius, este sistema es compatible determinado al ser $m \neq 0$.

Tenemos, de otra forma, que es un sistema de Cramer, ya que:

— El número de ecuaciones es igual al de incógnitas.

— El determinante de la matriz de los coeficientes vale 4 ($m = 1$).

Lo resolvemos, por tanto, aplicando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{9}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-3}{4}$$

El siguiente ejemplo se propondrá para su realización en grupo por parte de los alumnos y alumnas.

Actividad 2

Estudiar y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ x + 5y - 4z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Comenzamos resolviendo el determinante de la matriz de los coeficientes. Este determinante vale $-12 \neq 0$.

Por tanto, el sistema es compatible determinado al ser los rangos de las dos matrices igual a 3.

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-34}{-12} = \frac{17}{6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-38}{-12} = \frac{19}{6}$$

Vamos ahora a resolver sistemas compatibles indeterminados aplicando la regla de Cramer. Veamos el primer ejemplo que, por supuesto, resolverá el profesor.

Actividad 3

Estudiar y resolver, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 2 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Las dos matrices asociadas a este sistema son:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de C vale 0. Por tanto el rango de C será menor que 3.

Como el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

es distinto de 0, el rango de C vale 2.

Por otro lado, el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

también vale 0. Por tanto, el rango de C^* también es 2.

Estamos así ante un sistema compatible indeterminado, es decir, ante un sistema que tendrá infinitas soluciones. Vamos a calcular esas soluciones:

1.º El rango de ambas matrices nos ha resultado 2. Según el menor de ese orden que hemos tomado distinto de 0, la tercera fila nos ha resultado combinación lineal de las dos primeras. Por tanto, podemos eliminar dicha fila y, como ella no es más que la correspondiente a la 3.ª ecuación, podemos eliminar la 3.ª ecuación de nuestro sistema.

Así, el sistema a resolver será, realmente, el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

2.º Vamos a dejar ahora unas incógnitas en el primer miembro de las ecuaciones y trasladamos otra(s) al segundo miembro.

Para ello, volvemos a considerar el menor de orden 2 distitno de 0 que nos ha proporcionado el rango de las matrices.

Ese menor está formado por los coeficientes de las incógnitas x e y. Pues bien, esas son las incógnitas que dejamos en el primer miembro, pasando las restantes (en este caso solamente la z) al segundo miembro.

Reconvertiremos, por tanto, nuestro sistema en el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 + z \\ 2x + y &= 2 + 2z \end{aligned}\right\}$$

y este será el sistema que, en definitiva, resolveremos, considerando que las únicas incógnitas que tiene son la x y la y. (La z se nos ha convertido en lo que se llama incógnita secundaria).

3.º Vemos que el sistema que tenemos que resolver verifica:

- Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (la x y la y).
- El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0.

En definitiva, nuestro nuevo sistema es un sistema de Cramer.

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 2+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} = \frac{1 + z - 4 - 4z}{-3} = \frac{-3 - 3z}{-3} = 1 + z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2 + 2z - 2 - 2z}{-3} = 0$$

Es decir, hemos obtenido como soluciones:

$$x = 1 + z$$
$$y = 0$$

Pero nuestro sistema, el primero que nos propusieron, era de tres incógnitas. Hay que dar, por tanto, la solución de las tres.

Para ello, lo que hacemos es considerar a la(s) incógnita(s) secundaria (z) como un parámetro pudiendo llamarla, por ejemplo, t.

Y, en definitiva, las soluciones del sistema propuesto son:

$$x = 1 + t$$
$$y = 0$$
$$z = t$$

Lo que se conoce como ecuaciones paramétricas.

Obteniéndose las infinitas soluciones que comentamos al principio que existían (vimos que era compatible indeterminado) sin más que dar al parámetro t los valores reales que nosotros deseemos.

Por ejemplo, si $t = 0$: $x = 1$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

será una solución.

Si $t = 1$: $x = 2$

$$y = 0$$

$$z = 1$$

será otra solución, y así sucesivamente.

Observación 1

Para hallar cualquier solución hemos comentado que se le da al parámetro t el valor que nosotros deseemos. Es conveniente insistir en el hecho de que lo que no se puede hacer es dar a t un valor para hallar una cualquiera de las incógnitas y, dentro de la misma solución, darle otro valor distinto para hallar otra de las incógnitas.

Observación 2

El número de parámetros de los que dependen las soluciones de los sistemas compatibles indeterminados vienen dados por la siguiente fórmula:

n.º parámetros = n.º incógnitas – n.º ecuaciones independientes

Así, nuestro sistema ha resultado uniparamétrico al ser el número de incógnitas de 3 y tener solamente dos ecuaciones.

Observación 3

Prácticamente toda la discusión del sistema, así como la obtención de sus soluciones, se ha hecho a partir del menor de orden 2 que nos resultó distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Insistiremos en el hecho de que nos hemos basado en él porque fue el que nos proporcionó el rango de las matrices y, por tanto, las ecuaciones independientes y las incógnitas principales y secundarias; pero que si hubiéramos considerado otro menor cualquiera de orden 2 distinto de cero como, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

el resultado final hubiera sido el mismo. (No las ecuaciones paramétricas como tales, pero sí las soluciones que se pueden obtener).

Observación 4

Sería conveniente insistir en el hecho de que nuestro sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{array}\right\}$$

se podría haber resuelto por los métodos tradicionales sin mayor problema. Así, por ejemplo, si multiplicamos la 1.ª ecuación por 2 ($-2x - 4y = -2 - 2z$) y la sumamos a la 2.ª:

$-3y = 0$. Por tanto, $y = 0$

y sustituyendo este valor en la 1.ª ecuación: $x = 1 + z$.

Los tres ejemplos que vienen a continuación se pueden considerar como actividades de profundización. De todas formas aconsejamos que se intenten realizar debido a la gran diversidad de tareas que presentan.

De esta manera, el ejemplo 4 puede servir como resumen de todo lo visto hasta ahora, mientras que el ejemplo 5 servirá de ejemplo de un sistema compatible indeterminado que depende de dos parámetros y el ejemplo 6 servirá para afianzar el estudio de los sistemas homogéneos.

Actividad 4

Estudiar y resolver, en su caso, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (2m + 2)x + my + 2z &= 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y &= 0 \\ (m + 1)x + (m + 1)z &= m - 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Al calcular el determinante de la matriz de los coeficientes e igualarlo a 0, obtenemos las siguientes soluciones para m:

$m = -1$

$m = 0$

$m = 1$

Se nos presentan, por tanto, cuatro casos, dependiendo de que m tome uno u otro de estos valores o no tome ninguno de ellos.

Vamos a estudiar cada uno de estos casos:

1.º Para $m \neq -1$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$

El determinante de la matriz de los coeficientes será distinto de cero y, en consecuencia, los rangos de ambas matrices será 3. Estaremos ante un sistema compatible determinado que resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2m-2 & m & 2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ m-1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{2m(1-m^2)} = \frac{2m(m-1)(2-m)}{2m(1-m^2)} = \frac{m-2}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2m+2 & 2m-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{vmatrix}}{2m(1-m^2)} = \frac{-4m(m-1)}{2m(1-m^2)} = \frac{2}{m+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}}{2\,m\,(1-m^2)} = \frac{-2\,m\,(m-1)}{2\,m\,(1-m^2)} = \frac{1}{m+1}$$

2.º Para $m = -1$

Nos resultan las dos matrices siguientes:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz c es 2 puesto que el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

El rango de la matriz C* es 3 puesto que el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Estamos, por tanto, ante un sistema **incompatible**.

3.º Para $m = 0$

Las dos matrices resultantes son:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser el menor de orden dos siguiente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

distinto de cero, el rango de la matriz c es 2, siendo la 3.ª fila de dicha matriz combinación lineal de las dos primeras.

Por otro lado, como el menor de orden 3 siguiente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

es igual a 0, también es el rango de la matriz C^* igual a 2, siendo la tercera fila combinación lineal de las dos primeras y siendo, por tanto, un sistema **compatible indeterminado.**

En definitiva, el sistema de Cramer que vamos a resolver será el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = -2-2z \\ 2x + 2y = 0 \end{array}\right\}$$

De la 1.ª ecuación obtenemos $x = -1-z$.

Y puesto que de la 2.ª ecuación resulta que $y = -x$, será:

$$y = 1 + z$$

Con lo cual, las infinitas soluciones de este sistema serán:

$$\begin{array}{l} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = t \end{array}$$

4.º Para $m = 1$

Las dos matrices resultantes son:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser el menor de orden dos siguiente:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

distinto de cero, el rango de la matriz C es 2, siendo la 3.ª fila de dicha matriz combinación lineal de las dos primeras.

Por otro lado, como el menor de orden 3 siguiente:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

es igual a 0, también es el rango de la matriz C^* igual a 2, siendo la tercera fila combinación lineal de las dos primeras y siendo, por tanto, un sistema **compatible indeterminado.**

En definitiva, el sistema de Cramer que vamos a resolver será el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + y = -2z \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos:

$2x = -2z$; y, por tanto, $x = -z$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $y = 2z$.

Por tanto, las soluciones del sistema serán:

$x = -t$
$y = 2t$
$z = t$

Actividad 5

Estudiar y resolver, de forma individual, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= m \\ x + y + mz &= m^2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Comenzamos, como siempre, escribiendo las dos matrices asociadas a este sistema.

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz C resulta igual a $(m+2)(m-1)^2$, con lo cual, al igualar a 0, obtenemos como soluciones para la m los valores -2 y 1.

Es decir, los tres casos que hay que resolver son:

— para $m \neq -2$ y $m \neq 1$.

— para $m = -2$

— para $m = 1$

1.º Para $m \neq -2$ y $m \neq 1$.

El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, y por tanto, los dos rangos son iguales a 3. Estaremos ante un sistema **compatible determinado** de soluciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{-(m+1)(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{-(m+1)}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{1}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{(m+1)^2(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

2.º Para $m = -2$.

Las dos matrices resultan:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el menor de orden dos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero, el rango de C es 2.

Por otro lado, el menor:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero y, por tanto, rang $(C^*) = 3$. Estamos así, en este caso ante un **sistema incompatible**.

3.º Para $m = 1$.

En este caso, las dos matrices son las siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, en este caso, el rango de las dos matrices es igual a 1. Estamos así ante un sistema **compatible indeterminado** y, como única ecuación a resolver, tendremos:

$x + y + z = 1$, que convertiremos, por ejemplo, y por ser el elemento a_{11} distinto de cero en: $x = 1 - y - z$.

Por otro lado, al tener 3 incógnitas y una sola ecuación, las infinitas soluciones de este sistema nos dependerán de $3 - 1 = 2$ parámetros.

En definitiva, las infinitas soluciones son:

$x = 1 - t - s$
$y = t$ con t y s números reales cualesquiera
$z = s$

Así, una solución será, por ejemplo:

– si $t = 1$ y $s = 0$: $x = 0$
$y = 1$
$z = 0$

Y otra, tomando $t = 2$ y $s = -3$:

$$x = 2$$
$$y = 2$$
$$z = -3$$

Actividad 6

Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes (que será el mismo que el de la matriz ampliada por ser un sistema homogéneo) resolviendo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 6 - 9 - 4 - 4 = 0$$

Por tanto, al ser cero, el rango de dicha matriz será menor que 3. Como además el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero, el rango será 2.

Así, este sistema es un sistema compatible indeterminado dependiendo sus infinitas soluciones de un parámetro.

Estas soluciones se obtendrán de resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3z \\ 2x + 3y &= -4z \end{aligned}\right\}$$

Tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -4z & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-9z + 8z}{-1} = z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-4z + 6z}{-1} = -2z$$

Con lo que, en definitiva, las infinitas soluciones del sistema son:

$x = t$
$y = -2t$ siendo t un número real cualquiera.
$z = t$

Resolución de sistemas: Método de la matriz inversa

Este es un método que en la práctica no se utiliza excesivamente. Por otro lado, después de todo lo que han visto los alumnos y alumnas en cuanto a la resolución de sistemas y al trabajo con matrices, no deben tener la más mínima dificultad en su aplicación. Así, requerirá poco tiempo el estudio de este apartado.

Vimos en su momento que un sistema cualquiera podía escribirse de forma matricial de la siguiente manera:

$A.X = B$

donde A es la matriz de los coeficientes, X la matriz columna de las incógnitas y B la matriz columna de los términos independientes.

Supongamos ahora que el sistema es de Cramer, es decir:

- Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Eso obliga a que la **matriz A sea cuadrada.**
- El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. Por tanto, esa **matriz A posee inversa.**

Considerando todas estas condiciones, el sistema podemos resolverlo de la siguiente forma:

1.º Multiplicamos a la ecuación matricial por la izquierda por la matriz inversa de la matriz A (recordamos que el producto de matrices no es conmutativo y que, por tanto, no es lo mismo multiplicar por un lado que por otro). Tendremos entonces:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

2.º Como el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad (I):

$$IX = A^{-1}B$$

3.º El producto de la matriz identidad por cualquier matriz da como resultado esa misma matriz (IX = X):

$$X = A^{-1}B$$

Ecuación que nos da el resultado del sistema.

Ejemplo 1

Resolver, en grupo y por el método de la matriz inversa el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ -x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

La ecuación matricial de este sistema es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, la matriz de los coeficientes es cuadrada y, por otro lado, su determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$$

Por tanto, el sistema propuesto es un sistema de Cramer y siguiendo los pasos indicados en el punto anterior, la ecuación matricial nos quedará de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos, por tanto, la matriz inversa indicada, cuyo resultado es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y, en definitiva: $x = -1$
$y = 2$

son las soluciones del problema.

Ejemplo 2

Resolver, de forma individual y por el método de la matriz inversa, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrl} \mathbf{x_1} & + \mathbf{x_2} & + \mathbf{x_3} & = \mathbf{-2} \\ \mathbf{2x_1} & & - \mathbf{x_3} & = \mathbf{1} \\ & - \mathbf{x_2} & + \mathbf{x_3} & = \mathbf{-5} \end{array}\right\}$$

Solución:

Resolvemos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Al ser distinto de cero la matriz es regular o inversible. Por tanto podemos aplicar el método de la matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es: $x_1 = -1$
$x_2 = 2$
$x_3 = -3$

Por otro lado, de acuerdo con lo expuesto al comienzo de este libro, consideramos que si los alumnos y alumnas tienen posibilidades de tener acceso a algún programa informático de Matemáticas, como puede ser «Derive», éste es un método muy útil y rápido para la resolución de los sistemas, pues dichos programas realizan todos los cálculos de manera prácticamente inmediata.

Como aplicación práctica, vamos a resolver el ejemplo que figura a continuación, propuesto en las pruebas de Selectividad del año 1991, aplicando dicho programa.

Partimos del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 + & & x_2 + & & x_3 & = & 540.000 \\ 27x_1 + & & 28x_2 + & & 31x_3 & = & 16.000.000 \\ 7x_1 - & & 3x_2 - & & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

- *Paso 1.º*: Declaramos («Declare») la matriz («Matrix») de los coeficientes de orden 3x3.

  En nuestra primera línea aparecerá, por tanto, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 28 & 31 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

- *Paso 2.º*: Declaramos la matriz de orden 3x1 de los términos independientes.

  En la 2.ª línea aparecerá:

$$\begin{pmatrix} 540.000 \\ 16.000.000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Paso 3.º*: Procedemos a calcular la inversa de la matriz de los coeficientes:

  Seleccionamos «Author» y tecleamos: #1^-1

  En la línea 3 aparece la matriz de los coeficientes elevada a -1.

  Para proceder a su cálculo seleccionamos la orden «Simplify».

  En la línea 4 aparece la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 0 & 1/10 \\ 149/15 & -1/3 & -2/15 \\ -277/30 & 1/3 & 1/30 \end{pmatrix}$$

- *Paso 4.º*: Procedemos a realizar el producto de esta matriz (está en la posición #4) por la matriz de los términos independientes (se encuentra en la posición #2).

Seleccionamos «Build» y escribimos: #4 . #2

Seleccionando «aproX» aparece, por último, el resultado final:

$$\begin{pmatrix} 162.000 \\ 30.667 \\ 347.333 \end{pmatrix}$$

Evaluación

De acuerdo con lo expuesto en el apartado de «**Orientaciones didácticas y para la evaluación**», proponemos los siguientes modelos de pruebas de control.

Todos los problemas que figuran en estos controles han sido propuestos en diversos tribunales de Selectividad en los últimos años.

PRUEBA 1

1. *Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, calculando si es posible la solución del mismo:*

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \\ x - z &= 3 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2. *Sea el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Añadir una ecuación al sistema de modo que el sistema resultante sea compatible.

b) Añadir una ecuación de modo que el sistema resultante sea incompatible.

c) Interpreta geométricamente los apartados anteriores.

PRUEBA 2

1. *Determinar los valores del parámetro «t» para que el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} t^2x + t^3y + tz &= 1 \\ x + t^2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tenga solución.

2. *Dado el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} (a + 1)x + y + z &= 3 \\ x + 2y + az &= 4 \\ x + ay + 2z &= 2a \end{aligned}\right\}$$

a) Estudiarlo.

b) Resolverlo para $a = 2$.

c) Interpretación geométrica.

Bibliografía y recursos

Bibliografía recomendada

- ALEXANDROV, KOLMOGOROV, LAURENTIEV y otros. *Las matemáticas: su contenido, métodos y significado.* Madrid. Alianza Editorial. 1980.
- ALONSO, C., y otros. *Matemáticas 3.º*. INBAD. Madrid. Ed. MEC. 1990.
- APARY, R., y otros. *Pensar la Matemática.* Barcelona. Tusquets editores. 1984.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. *Funciones y gráficas.* Madrid. Ed. Síntesis. 1990.
- COXETER, H. S. M. *Fundamentos de Geometría.* Limusa Wiley. 1971.
- GUZMÁN, M. y CÓLERA, J. *Matemáticas I de COU.* Madrid. Ed. Anaya. 1989.
- GUZMÁN, M., CÓLERA, J. y SALVADOR, A. *Matemáticas de 3.º*. Madrid. Ed. Anaya. 1987.
- OPEN UNIVERSITY. *Álgebra lineal I, II, III y IV.* México. Ed. Mc Graw-Hill. 1974.
- POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid. Ed. Tecnos. 1966.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México. Ed. Trillas. 1965.
- SALVADOR, A., BRIHUEGA, J. y PÉREZ, A. *Matemáticas I.* Ed. MEC. 1992.
- SPIVAK, M. *Calculus: cálculo infinitesimal.* Barcelona. Ed. Reverté. 1970.
- VIZMANOS, J. R. y ANZOLA, M. *Matemáticas I de COU.* Madrid. Ed. SM. 1988.
- VIZMANOS, J. R. y ANZOLA, M. *Matemáticas. Algoritmo 3.* Madrid. Ed. SM. 1990.

Recursos recomendados

Medios materiales

- Calculadora.
- Reglas, compás y escuadras.
- Acetatos.

Medios audiovisuales

El uso de los medios audiovisuales en la clase de Matemáticas, lejos de ser algo excepcional, como hasta la fecha ha venido ocurriendo, debería ser habitual, pues pueden prestar un apoyo fundamental a la enseñanza de nuestra asignatura: en la actualidad hay disponible en el mercado una importante cantidad de este tipo de medios aplicados a la enseñanza y didáctica de las Matemáticas.

- Proyector de diapositivas.
- Retroproyector de transparencias.
- Pantalla de proyección.
- Magnetoscopio y televisor.
- Cámara de vídeo.

Vídeos didácticos

- *El ojo matemático (2.ª parte).*

  Cómo abordar problemas.
  Yorkshire T. V.
  Distribuidora: Imagen 35 & Asociados.

- *Símbolos y ecuaciones.*
  The Open University.

Materiales informáticos

Se debe tener siempre presente que no se trata de «enseñar Informática». Por el contrario, se trata de aplicar la herramienta informática al desarrollo y aprendizaje de nuestra asignatura. Por ello, se deben buscar programas de fácil manejo y que no requieran unos grandes medios en cuanto a los recursos físicos.

- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial SM. Madrid 1987.
  Distribuidor: Ediciones SM.

- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial SM-Idealogic, S. A. Madrid 1989.
  Distribuidor: Idealogic, S. A.

- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial Edicinco, S. A. Valencia 1989.
  Distribuidor: Edicinco, S. A.

- *Estudio de funciones.*
  Editorial Edicinco, S. A. Valencia.
  Distribuidor: Edicinco, S. A.

- *Derive: A Mathematical Assistant Program.*
  Distribuidor: Add Link.

- *Mathematica 2.0*
  Editorial Champaign.
  Distribuidor: Wolfram Research Inc.

Anexo: Currículo oficial (*)

Introducción

Las Matemáticas constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos que tienen en común un determinado modo de representar la realidad. Nacen de la necesidad de resolver determinados problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir, modelizar situaciones reales y dar consistencia y rigor a los conocimientos científicos. Les caracteriza la naturaleza lógico-deductiva de su versión acabada, el tipo de razonamientos que utilizan y la fuerte cohesión interna dentro de cada campo y entre unos campos y otros. Su estructura, por otra parte, lejos de ser rígida, se halla en continua evolución, tanto por la incorporación de nuevos conocimientos como por su constante interrelación con otros campos, muy especialmente en el ámbito de la ciencia y la técnica.

Participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su «forma de hacer». La adquisición del conocimiento matemático, de ese «saber hacer matemáticas» para poder valerse de ellas, es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones que son un paso previo al proceso de formalización. Por ello es indudable que aunque los aspectos conceptuales están presentes en la actividad matemática, no son los únicos elementos que actúan en su desarrollo. A menudo no son más que pretextos para la puesta en práctica de procesos y estrategias y sirven para incitar a la exploración y a la investigación.

En la Educación Secundaria Obligatoria los alumnos se han aproximado a varios campos del conocimiento matemático que ahora están en condiciones de asentar y utilizar. Esta será la base sobre la que se apoyará el desarrollo de capacidades tan importantes como la de abstracción, la de razonamiento en todas sus vertientes, la de resolución de problemas de cualquier tipo, matemático o no, la de investigación y la de analizar y comprender la realidad. Además, este será el momento de introducirse en el conocimiento de nuevas herramientas matemáticas, necesarias para el aprendizaje científico que el alumno necesita, en el Bachillerato y para sus posteriores estudios técnicos o científicos.

Las Matemáticas en el Bachillerato desempeñan un triple papel: instrumental, formativo y de fundamentación teórica. En su papel instrumental, proporcionan técnicas y estrategias básicas, tanto para otras materias de estudio, cuanto para la actividad profesional. Es preciso, pues, atender a esta dimensión, proporcionando a los alumnos instrumentos matemáticos básicos, a la vez que versátiles y adaptables a diferentes contextos y a necesidades cambiantes. No se trata de que los alumnos posean muchas y muy sofisticadas herramientas, sino las estrictamente necesarias y que las manejen con destreza y oportunamente.

(*) Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato. («B.O.E.» n.º 253 de 21 de octubre de 1992).

En su papel formativo, las Matemáticas contribuyen a la mejora de estructuras mentales y a la adquisición de aptitudes cuya utilidad y alcance trascienden el ámbito de las propias matemáticas. En particular, forman al alumno en la resolución de problemas genuinos, es decir, de aquellos en que la dificultad están en encuadrarlos y en establecer una estrategia de resolución adecuada, generando en él actitudes y hábitos de investigación, proporcionándole técnicas útiles para enfrentarse a situaciones nuevas. Pero el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse a un adiestramiento en la resolución de problemas, por importante que éste sea, debiendo completarse con la formación en aspectos como la búsqueda de la belleza y la armonía, una visión amplia y científica de la realidad, el desarrollo de la creatividad y de otras capacidades personales y sociales.

El conocimiento matemático, en el Bachillerato, debe tener un cierto respaldo teórico. Las definiciones, demostraciones y los encadenamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las instituciones y confieren solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en estas asignaturas. Sin embargo, este es el primer momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad a la fundamentación teórica de las matemáticas, y el aprendizaje, por tanto, debe ser equilibrado y gradual.

Los contenidos incluidos bajo el nombre de «Resolución de problemas», básicamente procedimentales, pretenden desarrollar en el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático, entendido como un proceso dinámico, mediante la ocupación activa con problemas relacionados con el resto de los contenidos; entendiendo aquí como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permite formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar las decisiones ejecutivas pertinentes. Estos contenidos han de tener, por consiguiente, un marcado carácter transversal, y deben estar presentes también en las Matemáticas II.

Objetivos generales

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que las alumnas y alumnos adquieran las siguientes capacidades:

1. Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.
2. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.
3. Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes, utilizando herramientas matemáticas, para formarse una opinión propia que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.
4. Utilizar, con autonomía y eficacia, las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.
5. Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.
6. Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas, la apertura a nuevas ideas.
7. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.

8. Abordar con mentalidad abierta los problemas que la continua evolución científica y tecnológica plantea a la sociedad dominando el lenguaje matemático necesario.

9. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber, mostrando una actitud flexible y abierta ante opiniones de los demás.

   La materia de Matemáticas II contribuirá a que los alumnos que la cursen progresen en la adquisición de estas capacidades.

Contenidos

Álgebra lineal

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar datos estructurados en tablas y grafos. Operaciones con matrices: suma, producto, cálculo de la inversa. Interpretación de las operaciones y de sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales.
- Aplicación del estudio de las matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Determinante de una matriz: concepto, cálculo y propiedades, aplicados a la resolución de sistemas y al cálculo de productos vectoriales y mixtos para determinar áreas y volúmenes.

Análisis

- Introducción a los conceptos de límite y derivada de una función en un punto.
- Cálculo de límites y derivadas de las familias de funciones conocidas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación al estudio de propiedades locales de las funciones.
- Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación de funciones y al estudio de situaciones susceptibles de ser tratadas mediante las funciones.
- Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas.

Geometría

- Vectores: introducción al concepto y operaciones a partir del estudio de problemas físicos concretos.
- Aplicaciones del cálculo vectorial a la resolución de problemas físicos y geométricos en el plano y en el espacio. Interpretación geométrica de las operaciones con vectores. Productos escalar, vectorial y mixto.
- Estudio de algunas formas geométricas (rectas, curvas, planos y superficies), relacionando las ecuaciones con sus características geométricas.
- Introducción al conocimiento de algunas curvas y superficies comunes.
- Idea de lugar geométrico. Iniciación al estudio de las cónicas, combinando los enfoques analíticos y sintéticos.

Criterios de evaluación

1. *Transcribir situaciones de las ciencias de la naturaleza y de la geometría a un lenguaje vectorial, utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.*

   La finalidad es evaluar la capacidad del alumno para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos.

2. *Interpretar geométricamente el significado de expresiones analíticas correspondientes a curvas o superficies sencillas.*

   Se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de reconocer, averiguar puntos y visualizar las formas geométricas a partir de su expresión analítica. Se considerarán curvas y superficies simples tanto por su expresión analítica como por su forma geométrica.

3. *Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos, analizar sus propiedades métricas y construirlas a partir de ellas, estudiando su aplicación a distintas ramas de la ciencia y la tecnología.*

   Mediante este criterio se pretende comprobar que los alumnos han adquirido la experiencia y las capacidades necesarias en la utilización de algunas técnicas propias de la geometría analítica, como para aplicarlas al estudio de las cónicas y de algunos otros lugares geométricos muy sencillos.

4. *Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones, y en general para resolver situaciones diversas.*

   Este criterio va dirigido a comprobar si los alumnos son capaces de utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica, útil para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos y con la geometría analítica.

5. *Elaborar estrategias para la resolución de problemas concretos, expresándolos en lenguaje algebraico y utilizando determinadas técnicas algebricas para resolverlos.*

   Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumno para enfrentarse a la resolución de problemas y va dirigido a comprobar si el alumno es capaz de expresar el problema en lenguaje algebraico, resolverlo, aplicando técnicas algebraicas adecuadas: de resolución de sistemas de ecuaciones, productos escalares vectoriales y mixtos, etc., e interpretar críticamente la solución obtenida.

6. *Utilizar el concepto y cálculo de límites y derivadas para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas en forma explícita.*

   Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis, han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y desarrollado las destrezas en el manejo de las técnicas usuales del cálculo de límites y derivadas. El cálculo de derivadas se limitará a las familias de funciones conocidas y con no más de dos composiciones. En cuanto a los límites, sólo se considerarán aquellos que corresponden a indeterminaciones sencillas.

7. *Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida.*

   Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumno para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio analítico de las funciones. Con respecto a este criterio valen las mismas acotaciones incluidas en el criterio anterior en cuanto al cálculo de límites y derivadas. El cálculo de integrales se limitará a los métodos generales de integración, y en todo caso, con cambios de variable simples.

8. *Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.*

Se pretende evaluar la madurez del alumno para enfrentarse con situaciones nuevas utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR

DIRECCIÓN GENERAL DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA

CENTRO DE DESARRROLLO CURRICULAR