SIMPOSIOS

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA A DEBATE

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA A DEBATE

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
SUBDIRECCION GENERAL DE PERFECCIONAMIENTO
DEL PROFESORADO
1985

©

Edita: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
1.ª edición: Octubre 1985. Tirada: 1.000 ejemplares.

Imprime: Industrias Gráficas Caro, S. L.
Isabelita Usera, 80. 28026 MADRID

I.S.B.N.: 84-369-1248-9
Depósito Legal: M-37419-1985

Printed in Spain - Impreso en España.

Indice

PRESENTACION

El Plan de actuación de la Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado preveía, entre otras tareas a abordar, la celebración de una serie de Simposios internacionales a lo largo de 1984. El sexto de ellos cuyas actas presentamos ahora, tuvo lugar la última semana del mes de mayo y constituyó un encuentro fructífero entre docentes de Educación General Básica y Enseñanzas Medias, propiciando la discusión y contraste de soluciones, así como la exposición y debate sobre temas de vanguardia en la investigación aplicada a la docencia de las matemáticas.

En el campo de las matemáticas existe una multitud de sociedades y grupos de trabajo, algunos de ellos con cierta antigüedad y prestigio. Convocadas y organizadas por estos grupos se han venido realizando desde hace tres años unas *Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* que, surgidas de la base, movilizan a un número creciente de profesores. La labor de intercambio de trabajos y la función de lugar de encuentro y discusión se consideraron cubiertos por estos encuentros.

Además se advertía en los últimos encuentros de trabajo de los grupos una reiteración de los temas tratados, un cierto agotamiento y la sensación, entre los grupos más activos, de haber tocado techo en las posibilidades de intercambio y enriquecimiento mutuos. El Simposio de Matemáticas constituyó una forma de buscar otras alternativas a esta situación.

Por todo esto el Simposio se programó en función de las necesidades de mayor interés cualitativo que tenían los profesores de matemáticas con inquietudes didácticas.

Asistieron al Simposio unos 220 profesores, habiéndose hecho previamente una distribución de plazas de modo que el 70 por 100 de los asistentes fueron propuestos por los responsables de Formación Permanente del Profesorado de las Comunidades Autónomas y los Directores Provinciales, teniendo en cuenta el número proporcional de enseñantes de cada zona.

De todos modos, para dar coherencia a los planteamientos del Simposio, se procuró que los asistentes pertenecieran a grupos de trabajo estables o fueran personas con un interés manifiesto por la renovación de la enseñanza de las matemáticas, y que pudieran, en cierta medida, transmitir posteriormente sus experiencias a las personas de su entorno educativo.

Por lo demás, el carácter internivelar del Simposio, con especial incidencia en las edades de 12 a 16 años, propició el contacto de dos niveles educativos –primario y secundario– que, si bien son contiguos, a menudo desarrollan su trabajo en completo desconocimiento.

El equipo coordinador del Simposio, en el que participaron personas vinculadas a grupos de trabajo, representativas de los distintos niveles educativos, estuvo compuesto por:

- CARMEN DA VEIGA, Asesora de Matemáticas de la Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.
- FERNANDO ALONSO, del Grupo Azarquiel de Madrid, profesor de Bachillerato.
- CARMEN AZCARATE, del Grupo Zero de Barcelona, profesora de Escuela Universitaria de Formación del Profesorado.
- MIGUEL de GUZMAN, profesor de la Universidad Autónoma de Madrid.
- FRANCISCO HERNAN, del Grupo Cero de Valencia, profesor de Bachillerato.
- PEP SALES, del Grupo Puig Adam de Barcelona, profesor de Formación Profesional.

Los objetivos del Simposio podrán resumirse en los siguientes cinco puntos:

1. Abrir vías hacia nuevas formas de trabajo a través del conocimiento de proyectos curriculares de importancia

Los directores del Proyecto Genovés y del S.M.P., con cierta influencia en el trabajo de algunas de las personas dedicadas a la didáctica de la matemática en España, difundieron sus materiales (se realizó una exposición de libros del S.M.P.) y proporcionaron modelos acabados y coherentes para la determinación del currículum que no tienen hasta ahora una réplica comparable en nuestro país.

2. Introducir un tema de actualidad: la resolución de problemas

Esta tendencia de investigación relativamente reciente sostiene que el proceso de resolución de problemas sigue ciertas reglas comunes, independientes de la materia a que se refiera el problema y, en consecuencia, trata de descubrir estrategias generales que sirvan a un gran número de éstos.

Aunque esto no resulta ya una novedad en otros países, pues es un tema obligado en congresos, sección fija en revistas y ámbito de especialización de gran número de profesores, en España no ocurre lo mismo y únicamente algunos pioneros se ocupan del tema de forma aislada y con escasas repercusiones en el resto de los profesores.

Hubo muchos ponentes que de forma explícita como Schoenfeld, o de un modo indirecto como Fielker, Santaló y M.ª Elisa Carrillo, trataron el tema del papel de la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo de las capacidades de razonamiento, pudiéndose confrontar sus propuestas con las de los italianos Boero y Rossi, que relacionan las matemáticas con el entorno real del alumno y las utilizan como un instrumento para conocer la realidad.

3. Conocer investigaciones aplicadas, con base psicológica

En nuestro país este tipo de trabajos no abunda, al menos en equipos entre los que haya profesores de matemáticas conectados con la práctica docente. La exposición de la investigación de Vergnaud, Ricco y Rouchier resultó muy completa, analizándose un mismo tema desde puntos de vista diferentes: desde los principios y la metodología, desde las situaciones didácticas y desde las aplicaciones en clase y sus posibles implicaciones.

4. Analizar la situación española en la formación y el perfeccionamiento del profesorado de matemáticas

Con este fin se realizaron dos mesas redondas, una de formación inicial con representantes de Escuelas de Magisterio y Facultades de Pedagogía y Matemáticas, y otras de formación permanente con Grupos de Trabajo de Básica y Medias.

5. Recibir información sobre los proyectos oficiales en marcha

Aunque éste no era un objetivo propio del Simposio, se quiso aprovechar la presencia de los profesores asistentes para difundir algunos de los proyectos educativos que se estaban llevando a cabo. Se informó sobre las reformas del 3.º Ciclo de EGB y de Enseñanzas Medias en el área de Matemáticas y sobre los proyectos de Formación Inicial y Formación Permanente, especialmente en el tema de la creación de los Centros de Profesores.

Además se aprovechó la ocasión del encuentro para distribuir documentación bibliográfica entre los asistentes y una amplia información sobre grupos de trabajo en España.

Según los resultados de la encuesta, que se distribuyó al término del Simposio, de entre los asistentes que respondieron (120 de un total de 220) más de la mitad pertenece al Bachillerato y el resto se reparte casi por igual entre F.P., EGB y Escuelas de Magisterio.

En general las opiniones consultadas coinciden en señalar que el Simposio fue muy completo y que se analizaron estilos distintos, aunque sin duda compatibles, de hacer matemáticas en clase. No se ha profundizado mucho en los temas, aunque esto es común a este tipo de encuentros, que, por otra parte, no pretenden agotar la actividad de perfeccionamiento del profesor de esta especialidad.

La calidad de los participantes y de las ponencias ha sido considerada muy alta y ha parecido interesante la selección del programa, aunque se considera que el horario ha sido excesivo, con poco tiempo para coloquios.

Creemos que este Simposio sirvió para contribuir a la plasmación de una nueva línea de trabajo en el diseño curricular, actualizada, abierta y dinámica, y, si bien la incidencia del mismo no puede ser calificada de decisiva, dado el número reducido de asistentes respecto al colectivo de enseñantes del país, estamos seguros de que habrá servido para avanzar en la renovación de la formación permanente del profesorado de Matemáticas.

Carmen da VEIGA
Asesora Técnico Docente de la Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado

La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario

(Alumnos de 12 a 16 años de edad)

Por L. A. Santaló *

1. LA GEOMETRIA Y LAS OTRAS RAMAS DE LA MATEMATICA

La Matemática se ha dividido tradicionalmente en diversas componentes, que en las enseñanzas elemental y media son la Geometría, la Aritmética y el Algebra, a las cuales en la enseñanza terciaria se añade el Análisis o Cálculo infinitesimal con todas sus aplicaciones. Los límites que separan esas componentes no son muy precisos y, además, ellas se influyen mutuamente, dando a la Matemática un carácter de unidad indisoluble a pesar de las grandes diferencias de detalle. De las distintas componentes es seguramente la Geometría la que más interviene sobre las demás, sobre todo en su aprendizaje, debido a que aporta la «interpretación geométrica» de muchos resultados, a través de la «intuición visual», que en la Geometría es una necesidad y en las demás partes de la Matemática una valiosa ayuda. En el Algebra, por ejemplo, la interpretación geométrica es fundamental para la mejor comprensión de sus ecuaciones y en el Análisis, el estudio geométrico de curvas y superficies, como representantes de funciones, ha sido siempre un apoyo esencial para comprender conceptos, aclarar comportacimientos y descubrir nuevas direcciones de estudio.

Con todo ello, la unidad de la Matemática se ha ido haciendo cada día más evidente. A pesar de su continuo crecimiento en distintas y divergentes direcciones, las diversas ramas terminan siempre entrelazándose entre sí, de manera que con toda su exuberante frondosidad, el árbol de la Matemática resulta cada vez más homogéneo y unificado.

Un primer problema didáctico que se presenta es decidir si conviene enseñar la Matemática como una unidad, con sus diversos capítulos tratados simultáneamente, o bien si conviene, para un mejor aprendizaje, desenmarañar las trenzas en que las distintas ramas se han ido entrelazando y presen-

* Universidad de Buenos Aires.

tarlas separadamente, dejando para más adelante, en un período posterior, el estudio de las analogías y coincidencias.

No hay unanimidad al respecto. En todos los niveles, hay la tendencia unificadora de estudiar la Matemática como una sola unidad (enseñanza integrada) y la tendencia, más clásica, de estudiar por separado las distintas componentes: geometría, aritmética, álgebra, análisis y sus aplicaciones (probabilidades, estadística, cálculo numérico y gráfico, computación...). Probablemente ninguno de los dos métodos, usados con exclusividad, sea óptimo. Cada rama de la Matemática tiene su «metodología» y un aprendizaje por separado parece recomendable para una mayor claridad y simplificación de las ideas. Pero en ningún momento hay que olvidar que todas las ramas proceden del mismo tronco y que cada una de ellas puede servir, en muchos aspectos, de guía y sostén de las otras. Ninguna clase de Matemáticas, sea de Geometría, Aritmética o Algebra, debe olvidar que las demás ramas existen y hay que acudir con mucha frecuencia a ellas, tanto para recordar conocimientos ya adquiridos y mostrarlos bajo distintos ángulos, como para ayudar y motivar la adquisición de nuevos conocimientos en la disciplina particular que se está tratando.

La presentación por separado, sin exagerar esta separación, tiene la ventaja de poner de manifiesto las peculiaridades de cada rama, de manera que los alumnos contemplan diversos aspectos y pueden reaccionar más libremente sobre ellos de acuerdo con su particular manera de ser. Un temperamento intuitivo, con fuerte tendencia visual, gustará más de la Geometría, que le enseñará a poner orden en el mundo que contempla y desea entender. Un temperamento más abstracto, puede resultar interesado por el formalismo del álgebra o las propiedades curiosas de los números de la Aritmética. Pero uno y otro irán constatando que se necesita la colaboración de todas las ramas para mejor iluminar y comprender el universo de la Matemática. El teorema de Pitágoras va unido a la raíz cuadrada y la geometría de las cónicas al álgebra de las formas cuadráticas. De esta manera la unificación se va haciendo a través de un aprendizaje diferenciado, pero con una exposición sin barreras e intercambio fluido de una rama a la otra.

2. OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

Estamos, en la actualidad, en un mundo rápidamente cambiante y los educadores tenemos en nuestras manos el trascendental problema de estudiar la educación más conveniente, en metodología y contenidos, para que los futuros ciudadanos que hoy concurren a las aulas puedan desempeñarse, en el mundo distinto con el que se van a encontrar dentro de unos años, con la máxima eficiencia, para provecho propio y de toda la sociedad.

La enseñanza de la Matemática, en particular, está sujeta a grandes discusiones y dudas. En primer lugar ¿qué tendencia debe prevalecer, la enseñanza formativa, para educar, o la informativa, para impartir los conocimientos útiles en la vida diaria? Hay que hacer las dos cosas, pero el problema está en la proporción de las mismas. Las herramientas se vuelven obsoletas e inútiles con el tiempo, pero el método sólo, sin los ejemplos clarificadores, puede formar temperamentos demasiado alejados del mundo real y de sus necesidades cotidianas.

Hay que revisar los contenidos y las metodologías. En cuanto a los primeros, no hay duda de que el mundo actual exige conocimientos matemáticos muy distintos de los necesarios hasta mitad del siglo. Nociones de probabilidad y estadística, por ejemplo, son hoy día imprescindibles, así como muchas disciplinas con ellas relacionadas (análisis de mercados, encuestas de opinión, tablas de números al azar, conmutación, teoría de la decisión). Queda la parte formativa: ¿qué debe enseñarse y de qué manera, en cada nivel, que sea realmente adecuado para formar al hombre del año 2000, en estos años de fines de siglo? Corresponde a nosotros, en esta ponencia, examinar el caso de la Geometría.

Muchas veces se han expuesto los objetivos de la enseñanza de la Geometría. Sin grandes variantes, se mencionan siempre los siguientes:

2.1. Informar sobre el espacio exterior, mostrando una sistemática de la forma y de las figuras, así como sus propiedades.

2.2. Contribuir a la formación intelectual, ejercitando el método deductivo como medio para ordenar el pensamiento y adquirir los conocimientos necesarios para la vida contemporánea. Desarrollar el pensamiento crítico, la expresión verbal precisa y la capacidad de abstracción.

2.3. Desarrollar la imaginación y la creatividad, estimulando el pensar independiente y la elaboración y desarrollo de ideas propias, promoviendo el reconocimiento de la Geometría, igual que toda la Matemática como una disciplina abierta, en continua evolución y cambio.

2.4. Desarrollar la habilidad para resolver problemas, introduciendo en la construcción de modelos geométricos y en el uso de gráficos, como medios para visualizar, intuir y comprender mejor situaciones problemáticas.

2.5. Integrar las ideas geométricas con las otras ramas de la Matemática, para formar conciencia de la unidad de la misma.

Respecto de estos objetivos es difícil que haya discrepancia. Todo el mundo está de acuerdo. Las diferencias aparecen cuando se trata de la manera de lograrlos. Veamos un poco de historia.

En su origen, la geometría fue la aplicación del razonamiento matemático a las formas de la Naturaleza. En este sentido fue una ciencia física, intuitiva y visual, íntimamente ligada al mundo exterior. Posteriormente, con Euclides, se hizo de ella una ciencia puramente intelectual, totalmente en el mundo de las ideas. Surgió la axiomática como teoría matemática por excelencia. Los matemáticos se entusiasmaron por la potencia del razonamiento deductivo, que permite construir teorías y adquirir conocimiento a partir de axiomas y definiciones claramente establecidos. De esta manera nació la confusión, que ha durado siglos, entre la Geometría como disciplina para matemáticos, deseosos de poner a prueba su capacidad para elaborar preciosuras intelectuales, y la geometría para el hombre común, que solamente pretende razonar sobre figuras concretas que sus ojos ven, con el fin de satisfacer las necesidades que la vida de todos los días le presenta.

El problema básico de la didáctica de la Geometría consiste en decidir en qué proporción uno y otro de estos dos aspectos debe prevalecer en la enseñanza. Se trata de elegir el justo balance entre la geometría axiomática, construida en el mundo de las ideas siguiendo a Euclides o la versión moderna de Hilbert, y la geometría intuitiva, la de las lúnulas de Hipócrates, los poliedros de Platón, el teorema de Pitágoras, las cónicas de Apolonio, la perspectiva y división aurea de los pintores y arquitectos o los mosaicos y adornos geométricos de los árabes. Todo es geometría, pero su exposición, su estructura y su método de enseñanza son distintos.

La proporción entre una y otra tendencia depende de la edad. En la primera enseñanza, hasta los 12 años, no parece que haya duda en que la Geometría debe ser experimental e intuitiva. Hay que tomar ejemplos de la naturaleza y esquematizar los mismos como primeros pasos hacia la abstracción. Hay que dibujar e interpretar figuras: el alumno debe usar constantemente la regla, el compás, y el transportador. Esta parte es tradicional y más o menos están bien establecidos los contenidos en los textos clásicos, así como la metodología en base a dibujos y construcciones en cartulina o plastilina. Otros métodos didácticos, como los geoplanos, pueden ser útiles, pero deben dejarse a gusto del maestro quien decidirá su metodología propia, ya que el éxito de los materiales didácticos depende, esencialmente, del convencimiento del maestro de su utilidad.

En la otra punta, o sea, en la enseñanza terciaria, destinada a alumnos que ya han hecho una elección vocacional hacia carreras en que la Matemática es esencial, la tendencia axiomática es importante y tal vez fundamental. A este nivel superior hay que ver también la construcción de la Geometría por vía algebraica (espacios vectoriales) y comparar distintos sistemas axiomáticos.

El problema está en la enseñanza secundaria, para alumnos entre 12 y 16 años. A este ciclo vamos a referirnos con detalle.

3. LOS DOS CICLOS DE LA ENSEÑANZA MEDIA

La enseñanza para las edades de 12 a 16 años comprende en general dos ciclos. Un ciclo básico de tres años, que forma parte de la enseñanza obligatoria y común a todos los alumnos, y un ciclo superior de dos años, que es conveniente sea diversificado, destinado a alumnos cuya mayoría seguirá luego estudios terciarios.

La máxima preocupación debe ser para el ciclo básico. Si el Estado impone su obligatoriedad debe procurar que su enseñanza sea verdaderamente útil a los alumnos, tanto en su aspecto formativo, cosa no fácil de evaluar, como en su aspecto informativo, más fácil de decidir a través de los contenidos. Estos contenidos, que deben ser adaptados a las necesidades de la sociedad ambiente, deben revisarse periódicamente y son rápidamente cambiantes, de manera que un primer obstáculo a vencer es la inercia usual de los enseñantes, que quisieran enseñar siempre lo que ellos aprendieron, y de los responsables de la enseñanza, casi siempre misoneístas y temerosos de introducir cambios con demasiada frecuencia, sin tener en cuenta que la escuela no debe distanciarse demasiado del mundo exterior a ella. Cuando lo que se enseña en el aula es muy distinto de lo que se aprende en la calle, el sistema educativo se desequilibra.

En las clases de geometría de hoy deben ser de uso corriente presentaciones gráficas, transformaciones geométricas, coordenadas, máximos y mínimos, ecuaciones e inecuaciones y el manejo de calculadoras y computadoras. Hay que introducir en el ciclo básico todo lo necesario para comprender y actuar en el mundo de hoy, sin miedo a que la capacidad de los alumnos no lo permita, sino más bien tomando como un reto a los educadores, la búsqueda de metodologías adecuadas para que estos conocimientos puedan ser absorbidos.

Si se piensa, como a veces se ha hecho, que todo lo que se enseña debe deducirse de la nada, suponiendo que se parte de cero y que el alumno debe realizar su aprendizaje paso a paso y rigurosamente, recorriendo los caminos que han seguido los matemáticos para llegar al estado actual de su ciencia, evidentemente no es posible llegar muy lejos y los tres años del ciclo básico se pierden en definiciones y enunciados triviales e insustanciales. Si se considera en cambio, que el aprendizaje puede hacerse a saltos y que con una presentación adecuada el alumno puede comprender y asimilar muchos conceptos tenidos por difíciles y superiores, es mucha la información, y a su través la formación, que el alumno puede recibir en este período de la enseñanza secundaria. No hay que pretender que el alumno de 12 a 14 años comprenda, ni tan sólo vea la necesidad, de las sutilezas que los matemáticos descubrieron en el siglo pasado. Hay muchas cosas que el profesor debe conocer, pero debe también saber callar para no confundir al alumno.

Para el ciclo superior, alumnos de 15 y 16 años, se puede iniciar una mayor sistematización puesto que se trata de alumnos que ya han elegido seguir con estudios terciarios y posiblemente alguna carrera en que la matemática es importante.

4. PREMISAS FUNDAMENTALES

Los contenidos y la metodología correspondiente de la Geometría en la escuela media son variables con el lugar y con el tiempo. Deben depender, en gran parte, de las particularidades de la escuela y del medio ambiente en que se mueven los alumnos. Es muy posible que convenga diferenciar a las escuelas de zonas rurales de aquellas de zonas industriales, pues las necesidades de los alumnos en unas y otras pueden ser diferente. No se trata de una diferencia de nivel, sino de una diferencia en el enfoque y en la selección de ejemplos y aplicaciones. Sin embargo, creemos que en cualquier tipo de escuela hay que tener siempre en cuenta los siguientes postulados.

4.1. La Geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior

En este sentido hay que proseguir con la clasificación de las formas de los objetos reales iniciada en la escuela primaria, e insistir en las medidas de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Algunas fórmulas deben demostrarse (como las de las áreas del triángulo y trapecio a partir de la del rectángulo) y otras justificarse de manera experimental e intuitiva (como el área del círculo). Hay que operar con figuras irregulares, dejando que el alumno decida sobre las medidas a tomar para poder calcular el área. Hay que dar medios aproximados para los cálculos de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos irregulares, que son los más frecuentes en la vida real. Un plano de la ciudad y un mapa del país debe estar en el aula para medir distancias, ángulos y áreas y derivar problemas de significado real.

4.2. La presentación axiomática de la Geometría no es posible en la enseñanza media

La fundamentación axiomática de la Geometría es complicada y engorrosa. Durante el siglo pasado se vio que los axiomas de Euclides, base de la enseñanza de la Geometría durante veinte siglos, no eran suficientes, y después de varias tentativas de matemáticas ilustres, David Hilbert en 1899 publicó sus *«Fundamentos de la Geometría»*, de gran importancia conceptual. El sistema fue de extraordinario valor para la investigación matemática al nivel superior, pero su aplicabilidad a la enseñanza media resultó siempre un fracaso, por ser imposible su transcripción completa y perder todo su valor al ser recortado y simplificado al «alcance de los alumnos». Se trata, al decir de Dieudonné, de un «venerable diplodocus» imposible de usar como libro de texto para aprender Geometría (6).

Otros sistemas que se han ensayado, como los de Choquet (2), Bachman (1), Levi (10), Dieudonné (5), citados en la Bibliografía, tienen el mismo defecto. Sin discutir su valor matemático al nivel de investigación, que es mucho, resultan inadecuados para la enseñanza elemental y media. La creencia de que los fundamentos de una disciplina es la parte más fácil y comprensible de la misma, es un grave error. Se trata de sutilezas y virtuosismos lógicos que solamente se pueden comprender y valorizar cuando se tiene una elevada preparación matemática.

La conclusión es que es preferible dejar del todo la axiomatización, en este ciclo básico, y limitarse a elaborar sistemas «locales» a partir de definiciones e hipótesis intuitivas, establecidas de manera clara y precisa, pero sin pretensiones de que sean completos ni de que tengan todo el rigor que se exige al nivel terciario: el rigor es una función de la edad, como ha sido función del tiempo en la historia de la matemática. Más que en sutilezas lógicas hay que insistir en teoremas como «uniendo ordenadamente los puntos medios de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo», «las alturas de un triángulo concurren en un punto», «la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos»,... que no son evidentes y su demostración hace comprender al alumno la potencia del método deductivo del razonamiento matemático y el paso de una propiedad «particular» a un enunciado «general» válido para todos los casos de un cierto conjunto.

4.3. Hay que educar en la solución de problemas

Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas. En una conferencia pronunciada en 1968 en S. Agustín (Trinidad), George Polya decía: «Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, empezando con el Papyrus Rhind, del siglo XVIII antes de nuestra era, contenga problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática».

Obsérvese que no es lo mismo hacer «ejercicios» para practicar una rutina, que resolver «problemas» para ejecitar y poner a prueba las habilidades discursivas. Naturalmente que nos referimos a problemas en el sentido amplio, incluyendo la demostración de propiedades geométricas de las figuras y el establecimiento de relaciones entre ellas. Lo importante es que haya algo que buscar o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado.

Es interesante buscar problemas que interesen al alumno, para que llegue a preocuparse por su tratamiento y llegue a sentir la satisfacción y goce que produce su solución cuando se consigue. La habilidad del profesor consiste en buscar problemas adaptados al nivel de la clase, o a cada grupo de alumnos de la misma, con enunciados atractivos. No interesa tanto que sean de interés práctico como que llamen la atención y muevan la curiosidad del alumno. Pueden elegirse ejemplos en los abundantes libros de recreaciones matemáticas o en los hermosos libritos de De Finetti (3) o Miguel de Guzmán (4) citados en la Bibliografía. Naturalmente que no toda la enseñanza debe reducirse a un conjunto de curiosidades ni a una colección de problemas ingeniosos, pero una colección de ellos, bien organizada y dosificada a lo largo del curso, puede ser de gran utilidad para el aprendizaje de las distintas partes de la Geometría.

En este sentido es útil la organización o la participación en Olimpiadas Matemáticas, para estimular a los alumnos más interesados. Estas Olimpiadas, que muchas veces se celebran a nivel regional, nacional e internacional, tienen muchas ventajas. Hay colecciones de problemas propuestos en ellas (9), (16), que pueden ser muy útiles para comparar niveles de enseñanza y para canalizar las inquietudes de los alumnos de mayor capacidad y vocación. Más que para alumnos, muchos de estos libros son útiles para los profesores, que podrán elegir en ellos algunos problemas y adaptarlos y modificarlos para ponerlos al nivel de la clase. La experiencia de otros lugares no debe ser nunca despreciada para la conducta propia.

Sobre la enseñanza de la matemática a través del planteo y solución de problemas se puede ver el Capítulo 9 dedicado a «Problem solving» de los Proceedings del Congreso Internacional de Berkeley, 1980 (7), en particular los artículos de J. Pascual Ibarra y Diana Burkhart. Todo problema lleva consigo una serie de preguntas y consideraciones que contribuyen mucho a su interés didáctico, como ser: ¿el problema tiene solución?, ¿tiene suficientes datos?, ¿la solución será única?, ¿recuerda algún problema parecido?, ¿se le ocurre alguna generalización? Sobre la teoría de la «solución de problemas» en educación ha publicado interesantes trabajos A. H. Schoenfeld (7, pág. 454).

4.4. El aprendizaje muchas veces no es lineal, sino que opera «a saltos»

Una cosa es la exposición sistemática de la Geometría, hecha por y para matemáticos ya formados, y otra cosa enseñar Geometría para que el alumno aprenda de la mejor manera posible, la mayor cantidad de conocimientos posible, en el mínimo tiempo posible. En la enseñanza de la Geometría la intuición debe jugar un papel fundamental y puede ayudar mucho a la adquisición rápida de conocimientos y también a su afianzamiento y dominio. Se ha insistido mucho sobre los peligros de la intuición, pero de ninguna manera ello significa que deba suprimirse de raíz. Lo que debe hacerse es cultivarla y educarla para que sea un poderoso auxiliar del razonamiento, permitiéndole avanzar con rapidez sobre zonas no trilladas y ariscas. Como ha dicho H. Freudenthal (7, pág. 4) «nadie intenta demostrar una cosa si no tiene la sospecha de que es cierta, y esta sospecha proviene de su intuición y también la demostración suele estar guiada por la intuición».

En la enseñanza de la Geometría hay que usar constantemente dibujos y modelos, y hay que educar en la búsqueda de situaciones geométricas en la naturaleza y en el medio ambiente. Según una frase afortunada de De Finetti, en geometría hay que «saber ver» (3). Hay conceptos que en una exposición rigurosa y sistemática de la Geometría aparecen en una etapa bastante avanzada, como ser los de «longitud de una curva», «área de una superficie curva», «medida de ángulos», pero que sin embargo, por ser de uso común desde la primera enseñanza y aún en la via de relación fuera de la escuela, pueden y deben usarse en la enseñanza secundaria sin ningún temor de que falte una definición precisa, que en esta etapa no sería comprendida, pues la intuición es suficiente para entender de qué se trata y difícilmente conducirá a error.

Hace un par de décadas se puso de moda anteponer la geometría afín a la geometría métrica, por el hecho de que en la construcción de la Geometría a partir de los espacios vectoriales, los espacios afines son más simples que los métricos (que suponen la existencia de una forma cuadrática invariante). Sin embargo, para la enseñanza es mucho mejor empezar con la geometría métrica, pues el alumno está acostumbrado a «medir» y a clasificar las figuras por «congruencias», más que por «afinidades». Para un alumno de enseñanza media es una curva más fácil y simple la circunferencia que la elipse, a pesar de ser ambas equivalentes por afinidades. Nuestro intelecto, moldeado por la intuición, comprende mejor la geometría métrica que la afín, a pesar de su mayor complejidad en la construcción sistemática de la Geometría. De igual manera como el estómago digiere sin saber química ni desmenuzar previamente los alimentos en sus componentes químicos elementales, así la inteligencia asimila directamente conocimientos complicados y aunque es interesante su análisis a un nivel superior, al nivel elemental y medio puede seguirse adelante con estos conocimientos complejos sin necesidad de su disección en partes simples.

4.5. **Vincular la Geometría con la Aritmética y el Algebra**

Las clases de Matemática no son compartimentos estanco, sin comunicación entre sí. Al contrario, siempre que haya oportunidad hay que mostrar las relaciones entre las distintas partes de la matemática, para evidenciar la unidad de la misma. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, es una buena oportunidad para repasar todo lo referente a la raíz cuadrada y las propiedades de los números cuadrados perfectos. El estudio de las cónicas debe servir para repasar las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primero y segundo grado. La geometría de los puntos de coordenadas enteras se vincula con la combinatoria (número de camino mínimos para ir de un punto a otro). No importa que algunos temas se vean en el curso de Geometría y luego se repitan en los de Aritmética o Algebra, o al revés. La repetición de hechos importantes desde puntos de vista diferentes es bueno para ir fijando las ideas sobresalientes de la matemática; solamente los hechos triviales se encuentran una sola vez.

4.6. No olvidar la geometría del espacio

En muchos países ha ido desapareciendo en los últimos años la geometría del espacio. Conviene revertir la situación. Puesto que vivimos en un mundo tridimensional, su conocimiento es indispensable. Hay que estudiar los cuerpos y las superficies y sus representaciones planas. Hay que desarrollar la intuición visual, para «saber ver» el espacio y las relaciones entre sus formas. Es instructiva la «banda de Moebius» y una idea elemental de la clasificación topológica de las superficies. Tampoco hay que olvidar la geometría de la esfera, que es la forma de nuestro planeta: la idea de geodésicas y la comparación de los diversos tipos de mapas, son conceptos importantes al alcance de la enseñanza media.

4.7. Aprovechar todos los conocimientos del alumno

Al llegar a la enseñanza secundaria el alumno conoce ya muchas cosas de la escuela elemental y de su vida familiar y de relación con la sociedad en que vive. Hay que utilizarlas y aprovecharlas para adquirir nuevos conocimientos, sin pretender empezar de nuevo, repitiendo cosas conocidas, con el pretexto de que «ahora lo vamos a ver en forma rigurosa». Esta revisión debe dejarse para etapas más avanzadas y para alumnos que ya hayan elegido estudiar disciplinas científicas. A este respecto coincidimos plenamente con las siguientes ideas de Arnold Kirsch en el Congreso de Karlsruhe sobre educación matemática (1976) (8): «Estamos en contra de la tendencia, muy extendida, de desarrollar la matemática *ab ovo*, o de retroceder al principio y empezar de nuevo sin suponer nada conocido, tendencia que se encuentra no solamente en matemáticos sistematizadores (cuando, por ejemplo, dicen a sus alumnos que se olviden de todo lo que han aprendido en la escuela elemental) sino también en didácticos de orientación genética. Nosotros preferimos alentar a los alumnos a hacer uso de todos sus conocimientos previos, aún de los que proceden de campos ajenos a la matemática. Los alumnos tienen una experiencia considerable que puede ser usada en la geometría elemental. En particular pensamos en su familiaridad con la existencia y propiedades de las medidas de longitudes, ángulos y áreas. Esta familiaridad procede de afuera de las clases de matemáticas y a veces de afuera de la escuela, lo que debemos considerar como una situación particularmente afortunada.

Hoy en día no se debe insistir más en querer desarrollar la geometría elemental de manera completamente rigurosa, y va entrando la costumbre de hacer uso de esas medidas sin ningún comentario sobre ellas».

5. UN LISTADO TENTATIVO DE CONTENIDOS

Para ejemplificar las ideas anteriores, vamos a dar un listado tentativo de contenidos, que convenientemente ordenados y rellenados con los detalles que el profesor estime necesarios, pueden constituir el esquema de la geometría de la escuela media. No hay que considerarlos demasiado rígidos, sino más bien con suficiente elasticidad para ser adaptados a cada escuela y aún al criterio de cada profesor particular. El campo de la geometría es inmenso y en gran manera «enseñar» es «elegir» los temas y la metodología que más se adaptan a cada grupo de alumnos, para que adquieran una útil y correcta visión del mundo y adquieran conciencia de la potencia del razonamiento matemático para medir y establecer relaciones entre sus formas. Lo esencial es que el profesor no pierda de vista que la capacidad de aprendizaje de los alumnos es inmensa, pero que también lo es la cantidad de conocimientos necesarios para entender y actuar en el actual mundo tecnológico, por lo cual, conviene elegir bien y no perder el tiempo en definiciones insustanciales, ni en trivialidades disfrazadas con ropaje más o menos científico. Las clases de geometría, en cualquier nivel y para cualquier escuela, deben tener fondo y substancia y nunca ser una mera exposición, en lenguaje difícil, de cosas que el alumno ya sabe de manera fácil. Lo que sea intuitivamente evidente para el alumno debe aceptarse como tal, para poder seguir adelante en la adquisición de conocimientos menos evidentes.

Primer año

Construcciones en el plano (mediatrices, bisectrices, triángulos, circunferencias). Vectores en el plano. Polígonos. Convexidad. La circunferencia y el círculo: ángulos inscritos, arco capaz.

Coordenadas cartesianas ortogonales en el plano. Representación de la función lineal. Ecuaciones e inecuaciones lineales: solución gráfica.

Puntos del plano de coordenadas enteras: la ciudad cuadriculada. Distancia efectiva entre dos puntos. Caso de calles con dirección única: distancia del taxímetro.

Cuerpos del espacio. Los 5 poliedros regulares. Cuerpos redondos: definiciones y propiedades.

Indicaciones. Se insistirá en el uso de la regla, el compás y el transportador para hacer construcciones geométricas. Las áreas de figuras planas se suponen conocidas de la escuela primaria y se utilizarán de entrada en los ejercicios, aunque la exposición y el repaso sistemático se posterga para el segundo año. La definición de ángulo como par de semirectas del mismo origen es preferible a la definición como intersección de semiplanos, que es obligada desde el punto de vista conjuntista, pero no es intuitiva ni se usa a este nivel elemental. De todas maneras el profesor puede elegir la que más le guste, siempre que insista en que cualquiera es buena y deje al alumno libertad de elección.

En el plano cuadriculado se puede observar que el número de caminos posibles para ir de un punto A (m,n) al origen O (0,0) es el número combinatorio $C_{m}^{m\,n}$ (combinaciones de m n objetos tomados n a n). Vincularlo con el triángulo de Pascal. Buscar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro fijo.Llamando «rectas» a los caminos mínimos siguiendo lados de los cuadrados, hallar propiedades de la geometría correspondiente.

Segundo año

Transformaciones en el plano: traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y semejanzas. Composición de transformaciones: inversas. Teorema de Thales. Triángulos semejantes. Grupos de transformaciones. La inversión.

Areas de figuras planas. Areas de polígonos irregulares por descomposición en triángulos: medidas necesarias. Teorema de Pitágors: solución con números enteros. Areas de figuras circulares. Gráficos estadísticos.

Funciones trigonométricas. Ecuación de la circunferencia. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.

Areas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.

Indicaciones. Dado un polígono irregular (por ejemplo un terreno) preguntar qué medidas hay que tomar para poder calcular el área. Aprovechar el teorema de Pitágoras para calcular raíces cuadradas por tablas o computadora. Cálculo de distancias inaccesibles.

Dibujar y calcular el área de figuras curiosas limitadas por arcos de circunferencia, como las lúnulas de Hipócrates. Dibujar polígonos regulares: ¿por qué el lado del exágono es igual al radio?

El cálculo de volúmenes de cuerpos irregulares que se pueden definir de manera simple, da lugar a problemas curiosos e instructivos. Por ejemplo, calcular el volumen del cuerpo engendrado por rotación de un trapecio alrededor de una de sus bases: discusión según el tipo de trapecio y la base alrededor de la cual se hace girar.

Tercer año

La Geometría y el Arte. Descubrimiento de simetrías, rotaciones y semejanzas en cuadros, ornamentos y edificios. Razón aurea o divina proporción. Cubrimiento del plano por polígonos convexos congruentes.

La elipse, la hipérbola y la parábola como lugares geométricos y como secciones de un cono de revolución.

Fórmulas de adición para senos y cosenos: aplicaciones.

Area y volumen de la esfera. Area y volumen del toro.

Problemas de máximos y mínimos geométricos.

Indicaciones. Se trata, en esencia de repasar conocimientos de geometría ya adquiridos, a través de modelos de la vida real. Los ejemplos de la división aurea y del cubrimiento del plano por baldosas convexas congruentes no deben ser exclusivos y pueden variar con el profesor y el interés que note en los alumnos. La idea es tratar algunos temas ilustrativos de cómo la geometría se proyecta en la naturaleza. Se podrían tratar, por ejemplo, propiedades de grafos o analizar distintas formas que aparecen en biología (forma y distribución de las hojas en las ramas de las plantas, simetrías en los caparazones de ciertos moluscos, geometría de algunas moléculas cristalinas vistas al microscopio). Al respecto se puede ver el libro de K. L. Wolf y D. Kuhn (17), o el más superior, pero atractivo de B. B. MANDELBROT, *Fractais: Form, Chance and Dimension,* San Francisco, W. H. Freeman and Co. 1977.

Los tres años anteriores constituyen el Ciclo Básico, común a todos los alumnos. Los dos años restantes constituyen el Ciclo Superior. Es posible que este ciclo sea también el mismo para todos los alumnos, pero se trata ya de alumnos que piensan seguir estudios terciarios y por tanto la enseñanza puede ser algo más formal, introduciendo un nivel de abstracción que permita al alumno seguir adelante con bases más firmes y poderosas, aunque momentáneamente parezca una enseñanza un poco apartada de la realidad ambiente. Sería recomendable, sin embargo, que después del Ciclo Básico, la enseñanza se diversificará y hubiera unas cuantas asignaturas «electivas», entre las cuales podría estar la Geometría, para que el alumno eligiera según su particular vocación.

Dentro de la matemática del Ciclo Superior, creemos que la Geometría ocupa un lugar secundario y que debe reservarse para los alumnos que piensen seguir estudios superiores de matemática o por lo menos alguna carrera científica. Para el resto, es mucho más importante destinar el tiempo dedicado a la matemática a estudiar computación y probabilidades y estadística, que son ramas de mucha mayor trascendencia en la vida actual.

Vamos a dar un ejemplo de contenidos posibles, pero pensando siempre en alumnos que de alguna manera han decidido seguir estudios en que la matemática juega un papel primordial. Estos contenidos, por otra parte, deberían darse conjuntamente con otros conceptos matemáticos, completando y puliendo todo lo visto en el Ciclo Básico.

Cuarto año

Espacios vectoriales sobre un cuerpo, especialmente sobre los reales. El plano afín. Producto escalar: el plano euclidiano. Geometría en coordenadas del plano y del espacio.

Geometría de la esfera: área del triángulo esférico.

Indicaciones. Muchas cuestiones de la geometría en coordenadas del plano ya se han visto en los años anteriores. Como es importante su conocimiento fluido, aquí se repasará todo y se ordenará sistemáticamente. La geometría de la esfera es interesante como modelo de geometría no euclidiana. Observar que en ella no hay semejanza.

Quinto año

Aplicaciones lineales y afines entre planos. Matrices. Composición de aplicaciones y producto de matrices. Aplicaciones y matriz inversas. Determinantes.

Alguna geometría finita como modelo de construcción axiomática. Nociones de topología de superficies cerradas: teorema de Euler y orientabilidad de superficies.

Indicaciones. Se trata únicamente de unos ejemplos de temas que pueden variar de un año a otro, según los intereses y el nivel de los alumnos. No son temas fundamentales, sino modelos para ejercitar todos los conocimientos adquiridos en el Ciclo Básico, que al mismo tiempo abren horizontes y perspectivas a los alumnos con mayores inquietudes. En la segunda parte, junto con las geometrías finitas, se puede dar una idea de los cuadrados latinos y ortogonalres y sus aplicaciones al diseño de experimentos.

6. LA GEOMETRIA Y LA COMPUTACION

Digamos, finalmente, que lo mismo que en cualquier otra clase de Matemáticas, el uso de las computadoras no debe olvidarse en las clases de Gometría. Su uso depende del tipo de computadora disponible, pero siempre hay que tender a que el alumno se acostumbre al «pensar informático». Seymour Papert con su LOGOS y su tortuga pretende desarrollar en los niños de manera rápida y profunda el sentir geométrico. Ver los libros de Papert (11) y Horacio Reggini (15). A un nivel superior, pero siempre dentro de la enseñanza media, hay el «pensar algorítmico» de A. Engel (7, pág. 312) y el uso de las computadoras como complementos para el dibujo y la obtención de formas indicado por A. A. Di Sessa (7, pág. 632). Estamos todavía en una etapa experimental, pero conviene prestar al problema la máxima atención.

BIBLIOGRAFIA

1. BACHMAN, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff,* Springer, Berlín, 1959.
2. CHOQUET, G.: *L'Enseignement de la Géométrie,* Herman, París, 1964.
3. DE FINETTI, B.: *Il «saper vedere» in Matematica,* Loescher Editore, Torino, 1967.
4. DE GUZMAN, M.: *Mirar y ver,* Ed. Alhambra, Madrid, 1977.
5. DIEUDONNE, J.: *Algebre Lineaire et Géométrie Elementaire,* Hermann, París, 1969.
6. DIEUDONNE, J.: *Pour une revision des programmes de mathématiques,* I et II, Gazette des Mathematiciens, n.º 4, Mai 1964.
7. ICME: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* Birkhauser, Boston, 1983.
8. KIRSCH, A.: *Aspects of simplification in mathematics teachin,* Proceedings third International Congress of Mathematical Education, Karlsruse, 1976, págs. 98-120.
9. KURSCHAK, J.: *Hungarian problem book* (2 vols.), Randon House, New York, 1963.
10. LEVI, H.: *Foundations of Geometry,* Prentice Hall, New York, 1960.
11. PAPERT, SEMOUR: *Desafío a la mente, Computadoras y Educación,* Ediciones Galápago, Buenos Aires, 1981. Traducción del original inglés titulado *Mindstorms, Children, Computers and powerful ideas.*
12. POLYA, G.: *Hou to solve it?* Doubleday-Anchor book, New York, 1957.
13. POLYA, G.: *Mathematics and plausible reasoning* (2 vols.), Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1954.
14. POLYA, G.: *Mathematical Discovery* (2 vols.), Wiley, New York, 1962-64.
15. REGGINI, H: *Alas para la mente: LOGO, un lenguaje de computadoras y un estilo de pensar,* Ediciones Galápago, Buenos Aires, 1982.
16. SHKLARSKY Y OTROS: *The USSR olympiad problem book,* Freeman, San Francisco, 1962.
17. WOLF, K. L. y KUHN, D.: *Forma y Simetría,* EUDEGA, Buenos Aires, 1959. Traducción del original alemán *Gestalt und Symmetrie,* Tübingen, 1952.

Ideas y tendencias en la resolución de problemas

Alan H. Schoenfeld *

A título de introducción, se me pidió que describiera brevemente el «estado actual» en que se encuentra la resolución de problemas. ¿Cómo se ve el tema a nivel mundial? ¿Y en los Estados Unidos? ¿Por qué el resolver problemas es un tema de interés?

No hay respuestas fáciles a estas preguntas, y no existe una única respuesta a cada pregunta. «La resolución de problemas», según que país, nada tiene que ver el, por ejemplo, el trabajo realizado en Francia, con el de Inglaterra y con el de los Estados Unidos; incluso dentro de un país se pueden dar 3 ó 4 enfoques distintos al tratar dicho tema. Solamente en los Estados Unidos, el término «resolución de problemas» se ha usado para describir (a) trabajos sobre problemas presentados de forma escrita en la escuela primaria, (b) «matemáticas aplicadas» o modelos matemáticos, (c) estudio psicológico de los procesos mentales matemáticos y (d) el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales los alumnos pueden aprender a pensar matemáticamente. Intentaré describir brevemente por qué existe el «movimiento» en favor de la resolución de problemas, así como algunas de sus características.

En algunos aspectos dicho movimiento es bastante nuevo: dos hechos lo atestiguan. El primero nos llega por medio de dos números especiales de la revista «Educational Studies in Mathematics ESM» (Estudios Educativos en Matemáticas). En mayo y agosto de 1978, ESM publicó un informe elaborado para la «International Commission on Mathematical Instrucción - ICMI» (Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas) bajo el título «Change in Mathematics Education Since the Late 1950's - Ideas and realizations» (Cambios en la enseñanza de las matemáticas desde finales de la década de los 50 - Ideas y logros). Este estudio contiene artículos sobre las tendencias en la enseñanza de las matemáticas en Australia, Bangladesh,

* Universit of Rochestes (U.S.A.)

Francia, Gran Bretaña, India, Irán, Países Bajos, Nigeria, Polonia, Sierra Leona, Sri Lanka, Sudán, Tailandia, Estados Unidos y las Indias Occidentales. Como tal, sirve de guía para conocer «el estado actual de la materia» en el plano internacional en 1977. Estoy bastante seguro de que el término «resolución de problemas» no aparece en absoluto en el informe del ICMI, por supuesto no aparece en el significado que tiene hoy. Casi todos los artículos que contiene el informe centran su atención en el aspecto más significativo de los planes de estudios desde los años 1957 hasta 1977: las nuevas matemáticas. Dichos artículos se centran en lo que se había intentado y como funcionó o si falló. La resolución de problemas no aparecía por ninguna parte.

El segundo testimonio que nos llega sobre el movimiento fue a través de los documentos preparados para el «IV International Congress on Mathematical Education - ICME 4» (IV Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas) que se celebró en Berkeley, en agosto de 1980. En 1978 escribí a los organizadores del ICME 4, preguntándoles si habría en Berkeley un foro para discusiones sobre la resolución de problemas. Me aseguraron que habría. Pocos meses más tarde recibí un ejemplar del programa preliminar del ICME 4. Por más que busqué en el programa, al final no encontré más que una sola sesión dedicada a la solución de problemas; solamente había ésta y se había incluido bajo la categoría de ¡«aspectos poco comunes de los planes de estudio»! Cuando el ICME 5 se reúna en Australia en agosto de 1984, la resolución de problemas será uno de los principales temas del Congreso. ¿Por qué ha aumentado tan súbitamente la importancia de este tema?

El 4 de octubre de 1957, la Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite artificial. El lanzamiento del Sputnik I tuvo un efecto inmediato y dramático sobre el sistema educativo de los Estados Unidos. En un ambiente de «crisis de la educación» existía el consenso de que eran necesarias mejoras en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas, y de que nuevos planes de estudios eran igualmente necesarios para mejorar la formación ofrecida a los estudiantes americanos. La impresión general en 1957 era la de que los alumnos aprendían en clase a manejar las operaciones aritméticas básicas y los algoritmos más frecuentes y poco más. Se necesitaba algo más, y como resultado nacieron las «nuevas matemáticas» que, por diferentes motivos, no cumplieron su cometido. Puedo pecar de injusto, pero la impresión general ha sido la de que las nuevas matemáticas han sido con mucho, peor que la enseñanza de las que venían a reemplazar. Los alumnos no solamente no conseguían dominar las matemáticas abstractas del nuevo plan de estudios, sino que tampoco conseguían dominar las operaciones básicas! Como resultado surgió a finales de la década de los 60, un fuerte rechazo en contra de las nuevas matemáticas y apareció el movimiento de «vuelta al dominio de las técnicas básicas». Dicho movimiento, que continuó a lo largo de las décadas de los años 60 y 70, puso el énfasis en los ejercicios y en la repetición. Se centró en el dominio de operaciones y algoritmos básicos, se supone que como «fundamento» para estudios posteriores.

El organismo que regulaba a nivel nacional la administración de los exámenes comprobó que dicho movimiento no remediaba la situación. En una prueba normalizada, por ejemplo, de los «College Board's Mathematics Examinations» (Exámenes de matemáticas de la Junta de Evaluación de Ingreso en la Universidad) se constató que la nota media alcanzada en los tests, en todo el país, bajaba continuamente desde 1964 hasta 1980. Resumiendo, los estudiantes a los que se les había hecho practicar los ejercicios básicos podían, ciertamente, realizar aquellas operaciones individuales en las que habían sido adiestrados. Hasta este punto, el movimiento para volver a hacer hincapié en el dominio de las operaciones básicas había sido un éxito, pero un éxito limitado y carente de sentido: los estudiantes no entendían qué operación debían aplicar a los distintos tipos de problemas. Dicho sin rodeos, no se les había enseñado a pensar. De bien poco sirve saber lo fundamental, si no sabe cómo y cuándo usarlo.

A principios y mediados de la década de los 70, existía gran descontento con este movimiento. Dominar lo fundamental no era suficiente: los alumnos tenían que ser capaces de poder pensar matemáticamnte y de poder resolver problemas complejos. Como resultado de todo esto, nació el movimiento en favor de la enseñanza de la «resolución de problemas». El objetivo era el desarrollar en los alumnos las destrezas necesarias para poder aplicar las matemáticas que habían aprendido.

Podemos considerar el comienzo del movimiento en favor de la enseñanza de la resolución de problemas en los Estados Unidos hacia finales de la década de los 70. La primera declaración «oficial» que conozco proviene de un informe del «National Council of Supervisors of Mathematics» (Consejo Nacional de Inspectores de Matemáticas), en el que se pronunciaban al respecto: «Aprender a resolver problemas es el principal objetivo a la hora de estudiar las matemáticas». Quizá el documento más influyente sobre el tema sea el del «National Council of Teachers of Mathematics -NCTM» (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas), «Agenda for Action» (Planes de actuación) en 1980. Este documento contiene ocho recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas en colegios e institutos en los 80. La primera de estas recomendaciones dice así:

> **El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas recomienda que la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas en los ochenta.**

Uno de los principales objetivos del NCTM desde 1980 –con la ayuda de numerosas publicaciones– ha sido el de, a su vez, ayudar a los profesores a enseñar las técnicas para resolver problemas. Las publicaciones del NCTM respecto al tema incluyen diversos anuarios (1980 y 1983), recopilaciones de problemas con aplicaciones útiles y resúmenes de trabajos de investigaciones de utilidad. He traído conmigo una recopilación de las publicaciones del NCTM, que tratan de la resolución de problemas, junto con una lista completa del material educativo del NCTM y las he dejado en el Ministerio de Educación y Ciencia. Esta documentación les explicará el «estado actual de la materia», en los centros de segunda enseñanza de los Estados Unidos, mucho mejor que nada de lo que yo pueda exponer aquí.

Quisiera resaltar que he realizado la descripción que antecede de forma general y fragmentaria, y se ha centrado en la evolución del tema que tratamos únicamente en los Estados Unidos. Dentro de los Estados Unidos, los trabajos sobre la resolución de problemas han seguido caminos o enfoques diferentes. Describiré a continuación cuatro de estos enfoques.

1. Se ha hecho gran hincapié en los problemas presentados de forma escrita en los Estados Unidos; a menudo son problemas muy sencillos para el primero y segundo año. Veamos un ejemplo:

Juan tiene siete manzanas. Le da tres a Mary. ¿Cuántas manzanas le quedan a Juan?

Ejercicios de este tipo colocan las matemáticas en el contexto del «mundo real», y la resolución de tareas que toman como modelo tales situaciones reales tiene por supuesto más «relevancia» que el resolver ejercicios numéricos como

$$7 - 3 = ?$$

No obstante, es muy discutible el que se puedan considerar estos tipos de trabajos escolares como de «resolución de problemas» propiamente dichos. Tales ejercicios son, es verdad, más reales y relevantes que los puramente numéricos, pero, en el fondo, todavía son ejercicios de tipo algorítmico o de fórmulas; hay muho poco de «problema» en resolver uno de estos ejercicios, cuando ya se han hecho docenas de tipo parecido.

2. Un segundo camino importante seguido en la resolución de problemas es el de las «matemáticas aplicadas» o modelos matemáticos: es decir, el uso de sofisticadas matemáticas para tratar los problemas que reflejan el «mundo real». En los Estados Unidos apenas se han intentado realizar tales trabajos con alumnos de escuelas secundarias. Richar Lesh es uno de los que trata el tema en su obra «Applied Problem Solving Project». Las investigaciones de Lesh (Lesh, Landau y Hamilton, 1983) indican claramente que las técnicas que los alumnos aprenden en relación con las matemáticas, a nivel de colegio, no son fácilmente transferibles a la hora de aplicarlas a situaciones «reales». Cursos a nivel universitario aparecen hoy día por todos los Estados Unidos, aunque no de manera normalizada. En general, son cursos que tratan de modelos matemáticos. La mejor idea de lo abarcado por tales trabajos puede obtenerse de la «Mathematical Association of America» (Asociación Matemática de América) (1981), en su «Recommendations for a general mathematical sciences program» (Recomendaciones para un programa general de las ciencias matemáticas).

3. Por parte de los psicólogos y otros investigadores interesados en los procesos cognitivos de la mente, se ha seguido un tercer camino consistente en intentar explorar, con gran detalle, aspectos del pensamiento matemático –la mayoría de las veces en relación con problemas sencillos, como el señalado anteriormente–, y de vez en cuando en relación con problemas más complejos. Tales intentos se encuentran vinculados a los estudios sobre «psicología del tratamiento de la información», los ordenadores y la inteligencia artificial. Los trabajos de Vergnaud, Ricco y Rouchier entran, en gran medida, dentro de esta tradicción y su participación en este Simposio ayudará a explicar tales trabajos.

4. Existen intentos en el sentido de entender y enseñar los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas de matemáticas complejos. Esta clase de trabajo se basa en gran medida en la obra de George Polya, y en su clasificación de estrategias en la resolución de problemas –conocido como el método heurístico–. La obra de Polya sobre este tema, con sus libros «How to Solve it», «Mathematical Discovery» y «Mathematics and Plausible Reasoning», sentó las bases para el estudio de las estrategias heurísticas.

Naturalmente que los cuatro caminos descritos anteriormente no están desvinculados unos de otros; se puede pensar en ellos como las bases vectoriales en el actual espacio de la resolución de problemas.

El enfoque aplicado en otros países, de todo el mundo, a menudo difiere de manera dramática del aplicado en Estados Unidos. Por ejemplo, el énfasis prestado a los problemas presentados de forma escrita en la escuela primaria, se restringe en gran medida a los Estados Unidos, al igual que la exploración psicológica detallada de los procesos mentales que forman parte de la resolución de tales problemas. No todo el mundo tiene en alta estima tal trabajo. En una reciente crítica, por ejemplo, George Glaeser (1983) descartaba la mayoría de tales trabajos como totalmente triviales; sugería que sería necesario que los avances se buscarán «en aquellos lugares en los cuales no se trabaje en las condiciones de subdesarrollo, en las que actualmente se encuentra este tema en los Estados Unidos». El trabajo de Glaeser tiene sólidos cimientos matemáticos en la línea de Polya, y los matemáticos que trabajan en esta línea tienden a considerar como superficiales los problemas presentados de forma escrita en la escuela primaria. No obstante, en Francia, al igual que en los Estados Unidos, existen grandes diferencias en la manera de enfocar el tema, por ejemplo, los Profesores Vergnaud, Ricco y Rouchier representan una línea de trabajo bastante distinta, pero será mejor que conozcan sus trabajos por ellos mismos. Asimismo, tenemos, en este Simposio, expertos en la enseñanza de las matemáticas de Argentina, Gran Bretaña e Italia; sería absurdo por mi parte tratar de describir como está el tema en sus respectivos países. Existen, igualmente, trabajos muy interesantes en Japón, donde la enseñanza en grupos pequeños se considera muy importante, y en la Unión Soviética, donde las investigaciones sobre las «habilidades matemáticas» (véase los «Estudios Soviéticos») producen resultados muy interesantes y sirven de base para algunos trabajos recientes en los Estados Unidos. Existe, pues, no solamente un único «movimiento para la solución de problemas». Se presta atención a este tema en países muy distintos y de muy diferentes maneras.

A pesar de todas estas diferencias, por lo menos, existe algún paralelismo en los países de habla inglesa que actualmente dedican atención al tema, entre ellos están Australia, Canadá y Gran Bretaña. Anteriormente se ha descrito el empuje que hay detrás del movimiento para la resolución de problemas en los Estados Unidos, pues bien, en Gran Bretaña se ha dado un empuje semejante. En un importante informe sobre la educación secundaria en dicho país «Aspects of Secondary Education» (Aspectos de la enseñanza secundaria, 1980), basado en la observación de más de 50.000 horas de clase, se indicaba que, en dichas clases, predominaban en gran medida la exposición por parte del profesor, junto con la repetición de ejercicios por parte de los alumnos, y que otro tipo de actividades «libres» o interacción profesor-estudiante eran muy raras. Un informe posterior «Mathematics Counts, 1982» (La matemática sí vale) del «Cockroft Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Primary and Secondary Schools» (Comité Cockroft de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas en los centros de primera y segunda enseñanza, contenía el siguiente párrafo, citado ya en innumerables ocasiones:

243. En todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas debería incluir oportunidades para:

- la exposición por parte del profesor
- la discusión entre profesor y alumno y entre los propios alumnos
- el trabajo práctico apropiado
- la consolidación y práctica de técnicas y rutinas fundamentales
- la resolución de problemas, incluida la aplicación de las matemáticas a situaciones de la vida diaria
- el trabajo de investigación.

El informe pasa a indicar que tal equilibrio es raro en la práctica. En mi opinión, la enseñanza de las matemáticas debe luchar, por conseguir este equilibrio en vez de limitarse a recalcar un solo enfoque, incluidos los ejercicios para la resolución de problemas.

El actual énfasis puesto en la resolución de problemas no debe tomarse en el sentido de que toda la enseñanza deba impartirse a través de problemas; más bien refleja un intento por corregir el desequilibrio existente.

Para ser ecuánime, debe resaltarse el hecho de que, en muchos sentidos, dicho movimiento no es nuevo. En su actual forma, la resolución de problemas ha recibido un empuje reciente, pero el trabajo de la década pasada tiene un antiguo y distinguido linaje. Se puede, por ejemplo, encontrar el origen de recientes trabajos en la obra de Descartes. En su «Regulae ad Directionem Ingenii», Descartes señaló lo que podría llamarse «modelos del pensamiento productivo», o «consejos para aquéllos que quisiesen poder resolver problemas con facilidad». Sus consejos eran, por supuesto, válidos y todavía hoy los alumnos pueden beneficiarse de ellos. Trescientos años más tarde, las investigaciones de G. Polya hacen revivir la tradición de las investigaciones de Descartes. En las últimas décadas, se han llevado a cabo cuidadosas investigaciones sobre la naturaleza del método heurístico, aunque, solamente en los últimos años, el término «resolución de problemas» se lo han adjudicado al trabajo sobre la didáctica de la enseñanza heurística. Vemos, pues, que este tema no es tan nuevo como parece. Lo que sí *es* nuevo, sin embargo, es el énfasis puesto en el intento de comprender la naturaleza de los procesos mentales del pensamiento de los alumnos. A continuación sugiero algunas ideas prácticas para la enseñanza de la resolución de problemas. En mi libro «Mathematical Problem Solving», que aparecerá en breve, queda explicada la labor investigadora en que baso dichas sugerencias.

Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos *

Alan H. Schoenfeld

No existe una única manera «correcta» de enseñar a resolver problemas, y sería presunción por mi parte recomendar una; existen tantas maneras de enseñar eficazmente a pensar matemáticamente cómo existen profesores de talento. Además, los métodos empleados en clase son una cuestión de estilo personal; lo que «funciona» con un profesor puede que con otro tenga que modificarse para que éste pueda usarlo cómodamente, si es que consigue beneficiarse de ello en algún sentido. Hago estas sugerencias, por tanto, teniendo esto en cuenta, y por eso están escritas de manera informal y en primera persona. Las ideas que presento han funcionado bien en clase. Por favor sírvanse considerarlas como lo harían con las de un colega mío. Estúdienlas, prueben las que les parecen apropiadas a su clase y adáptenlas para que se sientan cómodos utilizándolas.

1. PRINCIPIOS BASICOS Y RAZON DE SER

Hay una enorme diferencia entre la manera en la que nosotros trabajamos las matemáticas y la manera en la que lo ven nuestros alumnos. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de alcanzar a comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos. Primero dominamos una parte; según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. Lo verificamos con ejemplos, buscamos los ejemplos contrarios, intentamos enjuiciar el por qué vamos por buen camino. Cuando creemos que sabemos por qué funciona, probamos a demostrarlo. Este ensayo puede tener o no tener éxito. Pode-

(*) La mayor parte de esta ponencia está tomada con el permiso del autor de «Notes Number 1» del MAA «La resolución de problemas en los planes de estudio de las matemáticas» (Mathematical Association of America - MAA - Asociación de Matemáticos de América, 1983).

mos comenzar por un camino equivocado; sufrir algún revés, tener que batirnos en retirada, hacer modificaciones. Con perseverancia y suerte, el resultado termina por poner cada cosa en su sitio. Pocas experiencias son tan gratificantes o emocionantes; hemos explorado terrenos desconocido y nos hemos enriquecido al hacerlo.

Desgraciadamente, nuestros alumnos raras veces tienen la idea de que trabajar las matemáticas pueda ser así. Aunque parezca raro, son las víctimas de nuestro profesionalismo; debido a la cantidad de materia que tiene que aprender, les presentamos los resultados de nuestras exploraciones matemáticas de manera organizada y coherente. Como resultado de esto, pueden «dominar» mejor la materia, pero este tipo de «dominio» tiene funestas consecuencias. Los alumnos piensan que de las matemáticas ya se sabe todo y que, como si de la gramática latina se tratara, debe ser repetido hasta que se aprenda. No existe la emoción por descubrir algo nuevo, sino simplemente la (pequeña) satisfacción de adquirir ciertas habilidades. Como el manejar las matemáticas parece cosa fícil en nosotros, al ver lo difícil que es para ellos los alumnos se sienten incapaces. No tienen idea de que nosotros, también, hemos de esforzarnos por entender ideas matemáticas nuevas y, lo que es aún más importante, no tienen ni idea de que «entender» las matemáticas significa hacerse preguntas hasta que las cosas tengan sentido; en vez de ello, para los alumnos significa reproducir pasivamente lo que se les ha enseñado.

Yo sostendré aquí que podemos y debemos introducir a nuestros alumnos en la experiencia de ejercitar las matemáticas como nosotros las conocemos y, lo que es más, creo que esto se puede conseguir con cierto éxito, cuando aún no están muy entrados en sus estudios matemáticos. En cierto sentido, mi curso sobre resolución de problemas va dirigido a enseñar el dominio de las técnicas de estudio adecuadas; es inquietante ver que los alumnos de primer curso de universidad no piensan corrientemente en dibujar un esquema que les ayude a entender la exposición de un problema, o para confirmar una hipótesis mediante casos concretos, etc. Todavía es más preocupante el hecho de que mis alumnos raras veces se den cuenta –si es de alguna vez se dieron– de que son capaces de pensar, de que pueden observar cómo piensan y de que al reflexionar sobre sus éxitos y sus fracasos, pueden mejorar su rendimiento en lo que a la resolución de problemas se refiere. Lo que parece perfectamente natural en la práctica de cualquier deporte, bien sea el tenis u otro, ¡parece totalmente ajeno al tratarse del adiestramiento de la propia mente!

Por obvio que parezcan, merece la pena preguntarnos qué es lo que queremos que nuestros alumnos saquen de los cursos de matemáticas que cursan. Casi la mitad de nuestros alumnos han recibido su última lección formal de enseñanzas matemáticas en un curso de cálculo. «Las matemáticas universitarias» se han convertido en sinónimo de «cálculo» y apuntarse a este curso es casi un rito. Ahora bien, sin embargo, veo que bien poco sirve el entrenar a tales alumnos para (por ejemplo) calcular el área de la superficie de un sólido de revolución. No es que tales resultados carezcan de valor intrínseco –tanto estético como matemático– pero es que los alumnos, en general, no verán ninguno de los dos. No tendrán la facultad de poder aplicar las matemáticas (este es su último curso en esta materia) y, por diversas razones, lo estético no nos concierne. Los alumnos que cursan la carrera de matemáticas también salen perdiendo. En el tira y afloja de la exploración matemática, el procedimiento para calcular las áreas de una superficie puede «descubrirse» y «apreciarse» cómo una aplicación hábil de las sumas de Riemmann, que se especializan en matemáticasa, pasa por alto un aspecto que la mayoría de nuestros alumnos lo ven como un procedimiento mecánico de (dudoso) valor a la hora de aplicarlo.

Me parece a mí que la auténtica ayuda que podemos prestar a nuestros alumnos, tanto a los que han elegido matemáticas como carrera, como a los que nunca volveremos a ver, es el de facilitarles las técnicas mentales que podrán usar *después* de que hayan realizado los exámenes finales. No tengo la menor duda de que las matemáticas pueden servir como vehículo ideal para esto. No existe una disciplina mejor para aprender lo que «comprender» significa. El pensamiento matemático es lógico y riguroso, y las técnicas que empleamos para enfrentarnos a los problemas son aplicables en muchos campos, pero a menos que las presentemos con claridad, no es probable que los alumnos adquieran la intuición necesaria para «comprender» o beneficiarse de ellas: no es probable que desarrollen la manera de pensar matemáticamente después de haber cursado sus estudios, a menos que les hayamos servido de catalizador para ello. Creo que lo podemos conseguir. A continuación expongo algunas de las maneras como doy mi clase sobre resolución de problemas y algunos de los motivos por los que sigo esto método.

2. ALGUNOS PLANTEAMIENTOS SOBRE LA ENSEÑANZA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

A. EL PAPEL DEL PROFESOR COMO MODELO DE COMPORTAMIENTO

Se cuenta una anécdota sobre un famoso profesor que razonaba tan deprisa que, a menudo, dejaba a los alumnos perplejos, sin aclararles nada de lo que le preguntaban. Un día, al comienzo de la clase, un alumno levantó la mano y le pidió que le resolviera un determinado problema que tenía como trabajo para casa. El matemático leyó el problema, se puso a pensar durante unos pocos segundos y dijo «¡Ah!, sí la respuesta es n/4» y lo escribió en el encerado. El alumno, que era listo, se las ingenió para conseguir más información: «Disculpe, profesor, ¿podría resolver el problema de otra manera?» «Esa es una pregunta muy interesante», dijo el profesor. Se quedó absorto durante un tiempo y entonces dijo: «Esta otra forma es más sencilla, aunque los cálculos son un poco más complicados». Se volvió al encerado y escribió con toda nitidez de nuevo n/4, al lado del que había escrito al principio, y preguntó a la clase si tenían más preguntas.

Parte de la dificultad de enseñar las técnicas necesarias para pensar matemáticamente es que hemos conseguido dominar la materia tan bien (especialmente cuando enseñamos matemáticas elementales) que no tenemos que pararnos a pensar en ello; lo hacemos sin más, de manera automática. *Sabemos* la manera más adecuada de abordar la mayoría de los problemas que se nos van a presentar en clase, cosa que los estudiantes no saben por tanto, el mostrarles sin más la forma adecuada no les ayuda a evitar todos los enfoques erróneos que ellos mismos podrían intentar. Por este motivo, tenemos que exponer los pasos que hemos dado al pensar, para que puedan seguirnos.

Existen tres maneras parecidas de hacer esto.

1. **Siguiendo el proceso «paso a paso» (incluso cuando se sabe la respuesta)**

Veamos el siguiente problema, por ejemplo:

1. Sean P(x) y Q(x) dos polinomios de coeficientes «invertidos»:

   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$

   $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x + a_n$

   donde $a_n \neq 0 \neq a_0$ ¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y las de Q(x)? Demuestra tu respuesta.

Existe, desde luego, una solución elegante que aparecerá en una o dos páginas, pero pienso que algo del orden de lo que sigue, aun cuando puede que parezca un poco artificial, es mejor a la larga.

¿Qué hacer cuando uno se enfrenta a un problema como éste? No tengo un procedimiento generalizado para encontrar las raíces de un polinomio, mucho menos para comparar las raíces entre dos de ellos. Probablemente, lo mejor que se puede hacer de momento es examinar algunos ejemplos sencillos y esperar que a partir de ellos se pueda intuir algo. En lugar de examinar un par de polinomios cualquiera, quizá sería mejor considerar un par de ecuaciones cuadráticas, que por lo menos puedo resolver. Por tanto, qué sucedería si

$$¿\ P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ y } \\ Q(x) = cx^2 + bx + a?$$

Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \text{ respectivamente.}$$

Esto ciertamente puede sugerirnos algo, ya que tiene el mismo numerador, pero no puedo ver nada que pueda desarrollar o que se preste a generalización. Lo pensaré un par de minutos, pero puede que tenga que intentar algo distinto...

Bien, aunque sólo sea por no pasarlo por alto, miremos el caso lineal. Si

$P(x) = ax + b$ y $Q(x) = bx + a$, las raíces son

$-b/a$ y $-a/b$, respectivamente.

Son recíprocas, pero esto no es muy interesante en sí mismo. Volvamos a las cuadráticas. Todavía no intuyo lo que está pasando. Haré un par de ejemplos sencillos y buscaré algún tipo de modelo. Lo inteligente quizá sería escoger polinomios que puedan ponerse en forma de factores: de esta manera sería fácil no perder de vista las raíces. Ahora bien, y ¿qué pasará con algo fácil como $(x + 2)(x + 3)$?

Entonces $P(x) = x^2 + 5x + 6$ con raíces -2 y -3. De manera que

$$Q(x) = 6^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1) \text{ con raíces } -1/2 \text{ y } -1/3.$$

Estas también son recíprocas. Esto comienza a ser interesante.
Veamos

$$P(x) = (3x + 5)(2x - 7) = 6x^2 - 11x - 35\text{? Las raíces son } -5/3 \text{ y } 7/2:$$

$$Q(x) = -35x^2 - 11x + 6 = -(35x^2 + 11x - 6) = -(7x - 2)(5x + 3).$$

Bien, las raíces son $2/7$ y $-3/5$. Son recíprocas de nuevo, y esta vez no puede ser por casualidad. Mejor todavía, examinemos los factores: ¡están invertidos! ¿Y qué pasa con

$$P(x) = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd\text{? Entonces } Q(x) = bdx^2 + (ad + bc)x + ac = (bx + a)(dx + c).$$

¡Ajá!, funciona de nuevo y creo que puedo generalizar...

«En este punto se pueden seguir dos caminos. Puedo sacar la hipótesis de que las raíces de $P(x)$ son las recíprocas de las raíces de $Q(x)$, en general. (Si todavía no estoy seguro, podría intentarlo con una cúbica factorizable o condor. Ahora puedo intentar generalizar el razonamiento anterior, pero no es tan sencillo: no todos los polinomios pueden ponerse en forma de factores, y seguir la pista de los coeficientes puede no ser tan fácil. Quizá merezca la pena pararse, replantear mis deducciones e intentarlo partiendo de cero:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes «invertidos». Demostrar que las raíces de $P(x)$ y $Q(x)$ son recíprocas.

Muy bien, examinemos lo que el problema nos pide. ¿Qué significa que un número, digamos r, sea la raíz de $P(x)$? Significa que $P(r) = 0$. Ahora bien, suponemos que la recíproca de r debe ser una raíz de $Q(x)$. Así tenemos que $Q(1/r) = 0$. ¡Qué extraño! Volvamos al caso cuadrático y veamos lo que pasa.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Si r es una raíz de $P(x)$, entonces $P(r) = ar^2 + br + c = 0$. ¿Cómo aparece ahora $Q(1/r)$?

$$Q(1/r) = c(1/r)^2 + b(1/r) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

Así que funciona, y este razonamiento puede genealizarse. Ahora puedo escribir una demostración:

Teorema: Sea $P(x)$ y $Q(x)$ como en (1) anteriormente. Entonces las raíces de $Q(x)$ son las recíprocas de las raíces de $P(x)$.

Demostración: Sea r una raíz de P(x), de forma que P(r) = 0. Obsérvese que r $\neq 0$, ya que $a_0 \neq 0$.

Además, $Q(1/r) = a_0(1/r)^n + a_1(1/r)^{n-1} + ... + a_{n-2}(1/r) + a_n = (1/r^n)(a_0 + a_1r + + a_2r^2 + ... + a_{n-2}r^{n-2} + a_{n-1}r^{n-1} + a_nr^n) = (1/r^n) P(r) = 0$, por lo que (1/r) es una raíz de Q(x)

A la inversa, si S es una raíz de Q(x), vemos que $P(^1/_S) = 0$ con lo cual queda demostrado.

Muy bien, ahora nos toca hacerle un «reconocimiento post-mortem». Obsérvese que la demostración –como un razonamiento matemático clásico–es bastante concisa y presenta los resultados del proceso mental. ¿Pero de dónde nos llegó la inspiración para la demostración? Si repasamos de qué manera se desarrolló el razonamiento, se observará que hubo dos momentos claves.

El primero tuvo que ver con la comprensión del problema, con su intuición. El planteamiento del problema, generalizado en lo posible, ofrecía poco con lo que ayudarnos: lo que hicimos fue *estudiar casos concretos* para buscar un modelo. Concretamente, nuestro primer intento al respecto, examinando la fórmula cuadrática, no nos llevó muy lejos. Debimos pasar a ejemplos aún más específicos, según lo que sigue: *Examinamos una serie de ejemplos sencillos que son fáciles de calcular, para ver si aparecía algo que nos sirviera de modelo; con suerte, quizá se podría generalizar a partir de dicho modelo.* En este caso buscábamos las raíces de polinomios, así que elegimos los que se podían poner fácilmente en forma de factores. Evidentemente, otras circunstancias nos llevarán a elegir algo distinto, pero esta estrategia nos permitió sacar deducciones.

«Después de esto, vino el segundo momento clave. Aunque teníamos cierta idea de que íbamos por buen camino, el razonamiento parecía confuso y nos paramos a reflexionar un tiempo; lo que hicimos en ese momento fue muy importante y a menudo se pasa por alto: *volvimos a las condiciones del problema, las examinamos y buscamos conexiones concretas entre ellas y los resultados que queríamos.* Preguntas como: ¿qué significa que r sea una raíz de P(x)? ¿cómo es la recíproca de r? y ¿qué significa que (1/r) sea una raíz de Q(x)? Pueden parecer casi triviales, si las vemos fuera de contexto, pero fijaron nuestra atención en aquello que nos dio la solución».

Ahora bien, las últimas páginas pueden producir la impresión de que hemos estado dando palos ciegos. En principio el matemático se interesa en el resultado, que solamente nos costó demostrarlo unas pocas líneas; los procesos del pensamiento que lo generaron son mucho más automáticos-para nosotros. Mi experiencia, sin embargo, es que son totalmente ajenos al alumno. El aclarar estos procesos nos facilita dos cosas. (1) Desmitifica las matemáticas y las hace más accesibles; cuando el alumno ve de dónde proviene la idea, ya no le parece que es como sacarse un as de la manga. (2) Las estrategias que subrayábamos anteriormente se pueden generalizar y son útiles en otros casos. El aprender a usarlas ayuda a los alumnos a mejorar su capacidad de resolver problemas.

Mi objeción principal a lo dicho anteriormente es que la presentación todavía se hace en un solo sentido: el profesor todavía sigue exponiendo cómo enfoca el problema. Si el resolver un problema es una experiencia personal, entonces el alumno necesita verse involucrado. Esto nos lleva a la segunda manera de servir como modelo de comportamiento.

II. Resolver el problema con el alumno, utilizando sus ideas

La idea aquí es que la clase conjuntamente solucione el problema, con el profesor como «moderador», llevando la batuta para dirigir las ideas y como el «alter ego» que plantea importantes cuestiones y se asegura de qué todo siga su cauce. El profesor no está para dar soluciones, sino para ayudar a los alumnos a utilizar lo mejor posible los recursos de que disponen. El profesor puede haber repartido algunos problemas (para trabajo en casa o al principio de la clase) y reunido a los alumnos para que comenten uno de ellos. La siguiente serie de preguntas «ejecutivas», paso a paso durante el estudio del problema, es típica:

«¿Tiene alguien alguna sugerencia que hacer? ¿Alguna otra? ¿Qué te hizo pensar en eso? ¿Qué te hace pensar en eso como algo razonable? Muy bien. Tenemos las siguientes ideas posibles. ¿Cuál debemos poner en práctica? ¿Qué te hace creer que es más adecuado? Cuando hayamos terminado ¿cómo seguirás? Muy bien, ¿te suena lógico? ¿quieres que lo intente?».

«Bueno, llevamos haciendo esto cinco minutos y no nos conduce a ninguna parte. ¿Estáis realmente seguros de que entendemos suficientemente bien el problema? ¿Qué podríamos ver ahora? ¿Se podría aplicar alguna idea del método heurístico?, etc.

El intercambio de ideas va en esta línea, a la que volveremos de nuevo en la sección 3.4. Con suerte (y perseverancia por parte del profesor) estas preguntas se convertirán finalmente en algo automático para los alumnos. A mediados de semestre les puedo decir: «Bien, ¿qué pregunta voy a hacer ahora?» y normalmente lo saben; a final de semestre, ellos mismos pueden plantear las preguntas.

III. El profesor a prueba: resolución de problemas «sin preparación previa»

Seguir un curso para aprender a resolver problemas es muy duro para los alumnos, ya que no existen «reglas»; justo cuando piensan que tienen las cosas claras, un nuevo problema les desborda. Así que para darles un descanso y que me vean en una situación parecida a aquélla en la que ellos se encuentran, les permito que me planteen algunos problemas de la misma manera que yo les pregunto a ellos. La clase comienza con: «¿Alguna pregunta?» y si tienen alguna lo explico «en voz alta» usando el encerado. De esta forma me ven utilizar las estrategias para resolver el problema de manera no preparada, lo cual quita el carácter de «artificial» de las explicaciones. Véase (1) anteriormente. Esto también da otros resultados: véase la sección 2 G.

B. EL PROFESOR COMO ENTRENADOR

He oído a algunos de mis colegas describir las matemáticas a sus alumnos como un «deporte de contacto»; lo que quieren decir, por supuesto, es que en el trabajo de las matemáticas hay que involucrarse; si se contemplan desde la línea de banda, no se pueden apreciar. Se da también otro sentido a esta analogía del deporte: el profesor, quien normalmente desempeña el papel del que reparte conocimientos, en vez de eso, aquí, desempeña el papel rar el proceso que se debe seguir e incluso detallarlo al máximo, se le dice cómo estar de pie, cómo debe colocar las manos, etc. Al atleta generalmente se le «guía paso a paso» en cada una de las partes que tiene que aprender, hasta aquí todo es análogo a la enseñanza. Igualmente al atleta se le manda practicar por un tiempo, pero casi inmediatamente vuelve el entrenador para corregirle de manera muy detallada: «Tienes el hombro demasiado bajo, al tirar no formas el arco bien», etc. Y si la actividad es importante, no es raro ver al atleta y al entrenador revisar a cámara laneta las cintas de vídeo del alumno realizando el acto en cuestión, para poder estudiar aisladamente aquellos aspectos susceptibles de mejora.

Este aspecto del entrenamiento tiene que ver con lo que podría llamarse las «técnicas básicas» o procedimientos habituales, pero los entrenadores hacen mucho más que eso. Gran parte de su tarea consiste en entrenar a las personas a su cargo para que tomen decisiones inteligentes a lo largo del juego: probablemente la queja más frecuente oída a un entrenador, justo después de haberse cometido el error, sea: «Eso fue un tiro (o jugada) con pocas posibilidades de éxito. No valía la pena intentarlo».

Consideremos el equivalente intelectual de lo anterior, incluso en un problema de rutina. Por ejemplo, en un examen de técnicas de integración, 44 de 178 alumnos evaluaron $\int \frac{x \quad dx}{x^2 - 9}$ por fracciones parciales y otros 17 lo hicieron utiliando la substitución $x = 3$ sen θ. No tiene sentido intentar ninguno de estos dos enfoques, los dos son una pérdida de tiempo; un breve repaso nos indica que el problema puede resolverse por medio de la substitución mucho más elemental $u = x^2$. Un consejo que se puede aplicar ampliamente es: «No intentes ninguna solución difícil, hasta que estés seguro de que no haya una más fácil». Es la clase de consejo que daría un entrenador, y se me ocurre como mucho más valiosa que simplemente mostrar al alumno la manera «correcta» de resolver un problema.

C. HAY MÁS DE UNA MANERA DE PONERLE EL CASCABEL AL GATO MATEMÁTICO

Puesto que la mayoría de los «problemas» que resolvemos en clase son en realidad ejercicios, nos conformamos normalmente con la primera solución que se parezca en gran medida a las técnicas que hemos enseñado a los alumnos, y cuando se ha resuelto ese «problema», pasamos al siguiente; el ejercicio ha cumplido su propósito. Nuestros alumnos se quedan con la impresión de que han visto la manera «correcta» de solucionar el problema, y de que hay una única forma correcta.

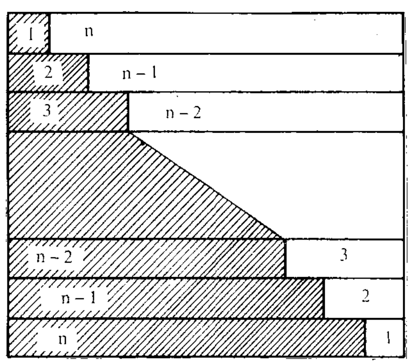
Esto no tiene sentido, consideremos, por ejemplo, el gran número de demostraciones que conocemos del teorema de Pitágoras y lo feliz que se sentiría cualquier de nosotros si descubriera una nueva. Parte de la satisfaccioín que proporcionan las matemáticas consiste en descubrir algo nuevo, pero otra parte consiste también en descubrir las relaciones entre las que ya conocemos, o en encontrar nuevos modos de ver eso con lo que ya estamos familiarizados. La frecuencia con que aparecen en revistas artículos titulados: «Nueva demostración del teorema X» nos sirve para aclarar este punto.

Por otra parte, esa idea de una única forma «correcta» es peligrosa, lo cual tiene mayor importancia. «Entender» un hecho o sistema matemático significa poderlo «relacionar» tanto como sea posible. Mi comprensión de la suma de Gauss, $\sum_{i=i}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$, es de lo más amplia, ya que la veo:

(1) como el resultado de n/2 pares que cada uno de ellos suma (n + 1)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

(2) gráficamente como la mitad de n x (n + 1) según se presenta a continuación



que puede representarse simbólicamente por la siguiente suma aritmética

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\text{también,}\ \underline{s = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ 3 + 2 + 1}$$

$$\underbrace{\text{así pues, } 2s = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots\ (n+1)\ (n+1) + (n+1)}_{\text{un total de n veces}}$$

(3) como un razonamiento que puede comprobarse por inducción.

(4) como el caso especial de una ecuación diferencial; y así sucesivamente.

Podría considerárseme «empobrecido» o «falto de algo» si sólo conociera una de las cuatro formas que he señalado anteriormente, pero este empobreciamiento es solamente parte de la historia: cada una de estas maneras de entender el problema expresa una ligera diferencia en el modo de pensar, y puede generalizarse de muchas formas. Al enfrentarme con un nuevo problema, cualquiera de estos enfoques (pero no necesariamente todos ellos) puede darme la «clave» del problema.

Asimismo, el asimilar la idea de que los problemas pueden resolverse de muchas formas diferentes produce un efecto sobre la manera en la que las personas los trabajan. Los alumnos que piensan que solamente hay una «forma correcta» de solucionar un problema, intentan resolver un determinado problema durante algún tiempo; si no avanzan en su solución, puede que lo dejen y esperen a que se les muestre la técnica «adecuada». (Esto es, después de todo, el sistema que implícitamente han aprendido en la escuela). El alumno que cree que hay lugar para explorar las matemáticas –y se beneficia de ello– está más inclinado a jugar con el problema, a buscar las relaciones pertinentes y quizá a tropezar con una solución inesperada.

D. MAYOR CANTIDAD NO ES SIEMPRE MEJOR

Halmos (1980) nos da el siguiente razonamiento. Comparto su opinión. A muchos profesores les preocupa la cantidad de materia que tienen que dar durante el curso. Un sarcástico propuso la siguiente fórmula: puesto que, dijo, los alumnos por término medio, retienen solamente alrededor de un 40% de lo que se les enseña, lo que hay que hacer es meter en cada asignatura el 25%, de lo que se espera se les quede. Por muy ingenioso que parezca, es poco probable que funcione.

Las clases que tratan sobre la resolución de problemas sí sirven. A los alumnos que han seguido las mías a menudo les felicitaron posteriores profesores. Se les felicitó por su actitud alerta, su habilidad para llegar rápidamente al fondo del asunto, y por sus inteligentes y penetrantes preguntas, que mostraban que entendían lo que se estaba haciendo en clase. Esto sucedió en más de una materia, en cálculo, en álgebra lineal, en teoría de conjuntos y por supuesto, en cursos de postgraduados sobre teoría de las medidas y análisis funcional.

¿Por qué debemos cubrir en el programa todo aquello que esperamos que a la larga aprenderán los alumnos? Aunque (por ejemplo) pensemos que la prueba M de Weierstrass es de suma importancia, y que cada alumno de matemáticas debe saber que existe y entender cómo aplicarla, aún en ese caso, podría ser conveniente suprimirla de una asignatura. Supongamos que hay que explicar a los alumnos unos 40 temas importantes en un trimestre. ¿Significa esto que tenemos que dar 40 clases completas y esperar que todo lo explicado se les quede? ¿No sería mejor dedicar a 20 de estos temas solamente unos diez minutos (dando el nombre, el enunciado, mencionando algunas de sus posibles aplicaciones) y tratar los otros 20 temas en profundidad, a través de problemas resueltos por los alumnos, ejemplos construidos por ellos y aplicaciones descubiertas también por ellos? Creo firmemente

(*) Halmos, P. R.: «The Heart of Mathematics», *Americal Mathematical Monthly,* 87, 1980, págs. 519-524.

que este último método enseña más y lo enseña mejor. No se *cubre* toda la materia, pero se *descubre* mucho sobre ella (un antiguo juego de palabras que viene al caso y que merece que se mantenga vivo) y, de este modo, el método abre puertas que nunca habríamos sospechado existieran bajo la estructura, sólidamente construida, de hechos reconocidos. Respecto a la prueba de M Weierstrass, o a cualquier otro tema que hayamaos dado por encima en clase, bueno, para algo están los libros y las revistas y se ha dado el caso de que los alumnos los han leído, cuando no han tenido más remedio.

E. SI EL PROFESOR NO LO DICE (LA MAYORÍA DE LAS VECES) LOS ALUMNOS NO LO CAPTARÁN

La mayor parte de lo que hemos comentado hasta ahora, y la sección que sigue sobre una clase que nos servirá de «muestra», puede parecer como debatir lo evidente. Una historia que nos cuenta Mary Grace Kantowski acerca de una investigación sobre resolución de problemas (*) puede indicarnos lo contrario.

La investigación consistió en un «experimento didáctico» en el cual se les había dado a los alumnos un adiestramiento especial para resolver problemas, y posteriormente se les sometió a una comprobación muy detallada (con entrevistas, etc.) para determinar cómo la enseñanza había afectado su rendimiento a la hora de resolver problemas. La enseñanza se basaba en el concepto de Polya sobre la resolución de problemas, y se había puesto mucho énfasis en el cuarto paso: «mirando atrás». Casi el cuarenta por ciento del tiempo de la clase se pasó revisando las soluciones dadas, recapitulando y acortando los razonamientos, generalizando, etc.

La comprobación produjo sobresalto entre los investigadores: los alumnos no se ocupaban en absoluto de «mirar atrás», a pesar del enorme énfasis puesto en ello en la clase. Las cintas de vídeo tomadas en la clase aclararon el motivo; después que se había resuelto un problema, el profesor normalmente se hacía a un lado y decía algo como: «Muy bien, volvamos a revisar la solución y veamos lo que podemos aprender de ella». Lo que el profesor *quería decir* y pensó que estaba claro, era algo como «La revisión es parte importante del proceso de resolución de problemas. Verificar la respuesta, comprobar el razonamiento, buscar otras derivaciones, situarlo en otros contextos, utilizar el método o el resultado en otros problemas, todo ello nos ayuda a conseguir una mejor comprensión de la solución». Lo que el alumno *vio* fue lo siguiente: «El profesor va a revisar la solución. Yo ya la he entendido, así que en verdad no hace falta que preste gran atención a esto». Si no decimos algo claramente –no importa lo evidente que a nosotros nos parezca– existe siempre la posibilidad de que no se oiga. Esto es, sospecho, el motivo por el que se dan las clásicas instrucciones para la elaboración de los manuales de instrucción del ejército norteamericano.

(*) Sobre el tema se informó en la Reunión Anual del NCTM en 1979, en la sesión de investigación.

1. Dígales lo que les va a decir.
2. Dígaselo.
3. Dígales lo que les ha dicho (*).

Huelga decir que no hay que seguir estas instrucciones al cien por cien, sobre todo en una clase donde se supone que los alumnos tienen que descubrir por ellos mismos. La mayoría de los resultados. No perjudica, sin embargo, asegurarse de que han hecho estos descubrimientos. ¿Cuánto se debe explicar? Haríamos bien en seguir el consejo dado a un viajero sobre cuánta propina debía dar a los taxitas en un país extranjero. «Deja caer en la mano del taxista las monedas de una en una; cuando comience a alegrarse su cara, deja de echar monedas».

F. Dos observaciones sobre la dificultad de los problemas

1. Los problemas «elementales» pueden ser estimulantes o instructivos.

Adiestramos a los alumnos para que hagan cosas extraordinariamente sofisticadas en nuestras clases y es natural pensar que debemos «desafiarles» en los cursos que tratan sobre problemas. Existe, pues, la tentación de evitar aquellos problemas que nos parecen «sencillos» a nosotros. Fuera del contexto, no obstante, los problemas elementales pueden ser bastante estimulantes. Yo di la primera versión de mi clase sobre resolución de problemas a un grupo de ocho alumnos de penúltimo y último año de la especialidad de Matemáticas en Berkeley. Todos habían terminado el curso de cálculo superior (los tipos de análisis). Algunos habían hecho topología y teoría de la medida, otros habrían hecho sofisticadas matemáticas aplicadas. A principio de curso, les puse el siguiente problema para casa.

> Demostrar que en cualquier círculo, el ángulo central que abarca un arco dado es dos veces mayor que el ángulo inscrito que abarca el mismo arco.

El problema se resuelve como cosa rutinaria en las clases de geometría en la escuela secundaria, y tuve la inconfundible sensación –cuando asigné el problema– de que los alumnos pensaban que estaba por debajo de sus capacidades. Uno logró reconstruir el clásico razonamiento, que utiliza el caso especial en el que un lado de un ángulo dado es el diámetro del círculo. ¡El otro usó integrales de longitud de arco! En el grado décimo (*), cuando se les había indicado la clave que resolvía el problema y pedido que la memorizaran, el problema parecía trivial. Cuando se les dejó que utilizaran sus propios recursos, sin embargo, este problema «elemental» fue un desafío. Una buena fuente de tales problemas es la colección de construcciones de regla y compás, al final del Capítulo 1 de «Mathematical Discovery» de Polya. A pesar de su carácter elemental, podría muy bien dar qué pensar a los alum-

(*) Existe otra versión que consiste en tres reglas concisas para asegurarse que las personas recuerden lo que se ha dicho:
Regla 1. Repítalo.
Regla 2. Repítalo.
Regla 3. Repítalo

(*) Nota del traductor: El grado décimo en Estados Unidos es para alumnos de 16 años. Las escuelas primaria y secundaria van del nivel 1 (1st grade) al 12 (12th grade).

nos que comienzan sus estudios de postgraduados (¡y a algún profesor falto de práctica!). Por ejemplo:

Constrúyase un triángulo dados dos segmentos cuyas longitudes respectivas son:

la longitud de un lado a del triángulo
la longitud de la altura a a

y un ángulo cuya medida es
la medida del ángulo α opuesto al lado a.

Problemas igualmente sencillos procedentes de otros campos son también enriquecedores. El siguiente sirvió como un problema del primer día de curso de matemáticas para alumnos de letras, o igualmente para cursos de resolución de problemas para alumnos de primer año, así como para alumnos del segundo ciclo (que no habían seguido el curso pertinente en teoría de los números):

Un truco mágico

Toma cualquier número de tres cifras y escríbelo dos veces para que forma un número de seis dígitos (por ejemplo, 123 se convertiría en 123.123). Te apuesto gustoso 1 dólar a que el número de seis dígitos se puede dividir por 7 sin que quede ningún resto.

¿Quieres recuperar el dólar? Toma el cociente de la división por 7 que acabas de realizar. Te apuesto otro dólar a que se puede dividir por 11 sin dejar ningún resto.

De acuerdo, de modo que he tenido suerte. Aquí tienes ahora tu gran oportunidad: doble o nada. Te apuesto a que el cociente que acabas de obtener al dividir por 11 se puede dividir por 13 sin dejar ningún resto.

(¿POR QUE sucede esto?).

Asimismo, preguntas como:

¿Puedes encontrar una regla sencilla para determinar si un número es divisible por 4? (o cualquier otro dígito).

o

¿Cuál es el máximo común divisor de 692.481 y 237.612? Pueden llevarnos a conseguir matemáticas muy razonadas y de alto nivel.

2. Problemas largos y tediosos también son importantes.

Una de las funestas consecuencias de nuestra enseñanza es la de que los alumnos creen que las matemáticas *tienen que* ser fáciles. Debido a que nosotros hacemos nuestra «preparación» de las clases bien y explicamos de manera clara y coherente, sacan la impresión de que el conocer y el comprender las ideas matemáticas debe ser cosa lógica y sencilla. Debido a que la mayoría de nuestros «problemas» son ejercicios que pueden solucionarse empleando las técnicas que les hemos mostrado (seamos sinceros, ¿cuántos problemas de los que hemos enseñado nos han llevado más de 15 minutos solucionarlo?) sacan la impresión de que dichos problemas pueden resolverse en el tiempo, digamos de media o una hora. Muchos sencillamente abandonan después de este tiempo, creyendo que si no pueden resolver un problema en ese tiempo, simplemente no podrán nunca. Aquellos de nosotros que hemos pasado días, semanas o meses intentando entender un problema, sabemos lo errónea que es esta valoración; pero en parte por nuestra amabilidad y en parte porque tenemos demasiadas cosas rutinarias por dar, raras veces les pedimos a los alumnos, en los niveles elementales, que trabajen aquellos problemas que son largos y que exigen mucho tiempo. Sin embargo, es importante para los alumnos el saber (1) que algunas veces el trabajo penoso es necesario (2) que a menudo se necesitan pasar gran cantidad de tiempo explorando (de forma juiciosa), antes de que se pueda realmente intuir un problema. Mis alumnos de la clase de cálculo superior estaban disgustados conmigo cuando, después de derivar la fórmula para la regla trapezoidal y aproximaciones parabólicas por integrales definidas, les pedí que derivaran la fórmula por la mejor aproximación cúbica. Lo cual les llevó horas de cálculos ¡(pero ¿no son las matemáticas así?)! De modo parecido en un curso de resolución de problemas para los alumnos del primer año mandé problemas como:

> Qué numeros de la forma aaaaaaa... aa (el mismo dígito a repetido n veces) son cuadrados perfectos?

y

> Deriva una fórmula, en general, para el polinomio de grado n + 1 que pase a través de n puntos
>
> $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$$

Nos puede llevar una o dos semanas solucionar el problema, volviendo a él periódicamente para ver cómo han progresado los alumnos. Lo mismo se puede decir de los problemas que mando para hacer en casa como examen de mitad de semestre. Unos días después de haber distribuido el examen, algunos alumnos, desesperados, encontraron un poco consuelo en mis afirmaciones en el sentido de que «si les dedicas suficiente tiempo, comenzará a tener sentido». Le dedicaron ese tiempo, y, efectivamente, así fue, tuvo sentido.

G. EL PROFESOR «¿INFALIBLE?»

Indicaba en la Sección A que mis alumnos tienen el «derecho», al principio de cada clase, de hacerme preguntas para que yo las resuelva. Al principio del curso me las plantean con recelo; sin embargo, a la tercera o cuarta semana del semestre: (1) me conocen mejor y se sienten más cómodos con este cambio de papeles y (2) han estado constantemente frustrados en clase (el intercambio de preguntas y respuestas de una clase sobre problemas es

Aviso: Tales acciones pueden dañar la salud del profesor. Los alumnos, acostumbrados a que se les dé el «aprendizaje» en pequeñas dosis, pueden sentirse molestos de lo que perciben como sadismo por nuestra parte. Sin embargo, he encontrado que una vez les he explicado *por qué* les hago lo que les hago, están dispuestos a darme el beneficio de la duda (por algún tiempo). Al final del curso no hay dificultad alguna.

más duro para el alumno que la pasividad de una clase dada normalmetne) y les hace ilusión, sin malicia, creo yo, el verme entre la espada y la pared también a mí. También es justo ver si sé usar mis propias estrategias. A mitad del curso, puedo normalmente esperar una respuesta positiva a la pregunta con la que comienzo la clase: ¿Tiene alguien un problema para mí?

La verdad, pocas veces ofrecen ninguna dificultad dichos problemas. Muchos de ellos me son conocidos. Cuando un alumno comienza «Llegas a una bifurcación en la carretera y...» o «Tenemos un pastel cuadrado cuyos lados y parte superior están igualmente escarchados. Hay siete personas...». Les digo «Lo siento pero conozco el problema. Lo resolveré en el encerado (o con la clase, si creo que es un buen problema para los alumnos) pero no quiero hacerles creer que parto de cero para solucionarlo».

La mayoría de los problemas que no conozco son sencillos. El desarrollar los problemas en voz alta en el encerado es un proceso bastante lento, por lo que tengo tiempo para pensar; normalmente me las arreglo para resolverlos sin parecer demasiado lento, pero de vez en cuando un problema me plantea dificultades. Un día me pidieron que resolviera el siguiente problema:

> Construya un triángulo dadas la longitud de dos lados a y b y la longitud de la mediana m_c del tercer lado.

Comencé el problema como de costumbre, considerando con todo detalle las opciones normales, decidiendo qué quería hallar, etc. Mi primer enfoque falló, así que intenté un nuevo enfoque. Falló igualmente, y después de unos quince minutos se hizo evidente que no iba a solucionar el problema allí y en ese momento entonces dije algo como lo que sigue: «Bueno, creo que he intentado todo lo que se me ocurre por el momento. De vez en cuando algún problema no se resuelve con las técnicas normales. En estos momentos, no puedo pensar en nada producitivo que pueda hacer y no servirá de nada teneros aquí mirándome cómo le doy vueltas. Por lo tanto, continuemos. Pensaré en ello esta noche y os diré cómo lo he solucionado en la próxima clase.

Es difícil describir la reacción de la clase, sin ser melodramático. Se hizo un silencio pasmoso en una atmósfera de total incredulidad. Por supuesto, había visto a algunos profesores tropezar en ocasiones, pero tales errores son normalmente considerados como lapsus matemáticos (y existen gran diversidad de maneras de librarnos de tales situaciones sin quedar muy mal). Naturalmente, me había oído decirles que, como alumno, había pasado por las mismas dificultades que ellos estaban experimentando en la clase; aún más, que cuando trabajaba con problemas difíciles utilizaba las mismas estrategias que les estaba enseñando a usar a ellos. No obstante, pienso que no habían creído realmente nada de esto, sino que les decía estas cosas simplemente para animarles. Esta demostración de que no soy infalible –que también tengo dificultades y que realmente he pasado por los mismos conflictos que ellos– fue una de las lecciones más valiosas del curso.

3. ORGANIZACION DE LA CLASE

Los alumnos aprenden haciendo, no mirando. El curso sobre el tema que tratamos utiliza gran variedad de formas, todas pensadas para animar a los alumnos a participar. Se da el menor número de clases teóricas posibles: aun cuando exista algún punto que quiero que se entienda, se puede ser más convincente si los alumnos se han esforzado sin conseguirlo, por resolver un problema antes de que se les muestre otra manera de enfocarlo que «tiene sentido». En total, quizás el 10% del tiempo de la clase se invierte en clases teóricas. El 5-10% de dicho tiempo se dedica a resolver conmigo problemas «directamente» en el encerado, según describí anteriormente. La mayor parte del tiempo de la clase, en partes más o menos iguales, se emplea de las siguientes tres maneras.

A. Discusión de los problemas resueltos en casa

Si un alumno ha resuelto un problema que se puso en la última clase que tuvimos, él o ella presenta la solución. La clase hace dos tipos de preguntas para ver (1) si es correcta o no la solución propuesta y por qué debemos aceptarla y (2) de dónde «sale» la solución. ¿Qué es lo que le llevó a este alumno a resolverlo de esa forma y por qué? Si el problema no se ha resuelto todavía, quizás lo trabajamos juntos todo el grupo durante algún tiempo (véase las discusiones en la sección 3.4) o puede que les diga que vuelvan a trabajar en ello, haciendo o no alguna sugerencia. Algunos de los problemas más largos, como aquéllos de la sección 3.2.F, antes de ocuparnos de ellos han sido objeto durante una semana o dos, de discusiones esporádicas para que salieran a satisfacción de todos.

B. Solución de nuevos problemas trabajando en pequeños grupos

Cuando llevamos aproximadamente un tercio del tiempo de la clase distribuyo unos cuantos «problemas para pensárselos». Un ejemplo típico de este tipo de hoja se da a continuación en la figura 3.1.

(*) La mayoría de los aspectos que se desean aclarar se pueden hacer más eficazmente y de manera más natural, durante la discusión que tenemos en clase sobre la resolución del problema.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS PARA HACER EN CLASE

1. Supongamos que P es cualquier número primo mayor que 3. Demuestra que P^2 da de resto 1 cuando se divide por 12.

   (Primera pregunta: ¿con qué está relacionado esto? ¿qué te sugiere?).

2. Supongamos que P es un polígono con 1.001 lados. ¿Puedes

   a) nunca
   b) algunas veces, pero no siempre.
   c) siempre

   encontrar una línea recta que pase a través de todos los lados de P?

3. Pottsylvania utiliza como moneda billetes de 7 y 17 dólares. ¿Puedes comprar un libro por cinco dólares y que te devuelvan el cambio exacto? (utilizando solamente billetes de 17 y 7 dólares). ¿Una revista por 11 dólares? ¿Un tanque de 98769876 dólares?

4. Transylvania utiliza como moneda billetes de 6 y 15 dólares. ¿Puedes comprar un lápiz de 12 dólares con la cantidad de dinero exacta? ¿Un libro de 5 dólares? ¿Una réplica de tamaño natural de zepelín de Goodyear de 123456789 dólares?

5. Si A, B, C, D son números positivos, demuestra que

$$\frac{(A^2+1)(B^2+1)(C^2+1)(D^2+1)}{ABCD} \geqslant 16$$

6. Dado un segmento de longitud L ¿puedes construir uno de longitud $L([\sqrt{13}-3]/4)$ ¿Es esto fácil o difícil?

7. Hallar la suma

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$$

8. Para aquéllos a quienes les gusta la «criptoaritmética»: cada letra significa un dígito. Resolver

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ +\ \text{TEN} \\ +\ \text{TEN} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

La discusión sobre la naturaleza de tales problemas, y los detalles de cómo se lleva a cabo la discusión en el aula, se da en la sección 4 (*).

Los problemas que he repartido nos tendrán normalmente ocupados durante el resto del día. La mitad del tiempo se pasa trabajando en pequeños grupos. Cuando los alumnos reciben los problemas se dividen en grupos de aproximadamente cuatro en cada grupo, y trabajan los problemas en equipo. Mientras los alumnos hacen esto, doy vueltas por la clase sirviendo de «asesor». El propósito de este asesoramiento no es asegurarse el que los alumnos consigan las respuestas correctas, sino más bien comprobar que están procediendo de manera razonable. Si un grupo lo está haciendo bien, quizá pase a su lado sin hacer comentario alguno, o quizá les pida que justifiquen los pasos que han dado. Saben que espero de ellos –en cualquier punto que se hallen de la solución del problema– que sean capaces de (a) detallar cualquier operación en la que estén ocupado (b) poder justificar el por qué de esa operación y (c) poder decir qué harán con el resultado, según se acerquen a la solución del problema. El énfasis en controlar y evaluar la evolución de la solución de los problemas se centra en evitar que los alumnos pierdan tiempo «saliéndose por los cerros de Ubeda», lo que caracteriza mucho de su trabajo. Si los alumnos se han atascado de verdad, les remito a la lista de estrategias heurísticas, o les sugiero que piensen en algún problema parecido que hayamos resuelto. En general, la idea es decir lo menos posible, a la vez que se asegura el que los alumnos sigan adelante.

El dividir la clase en pequeños grupos para trabajar los problemas es una manera no ortodoxa de emplear el tiempo de clase, y hay que justificarlo. A continuación, doy algunas de las razones por las que creo útil el formar grupos pequeños.

1. El organizar la clase en grupos da al profesor una oportunidad única de intervenir directamente en el proceso de la resolución del problema, en vez de tener que limitarse a enfrentarse con el «producto terminado». El impacto de dicha intervención en el comportamiento del alumno puede ser mucho más fuerte que cualquier otro tipo de actividad de la clase.

A pesar de que consideremos casi primaria la manera como resuelven los problemas, el hecho es que estos alumnos (que se han ofrecido voluntarios para seguir este curso, después de haber trabajado bien en la clase de cálculo) son los que *han triunfado* en nuestro sistema educativo. Se han apuntado en mi curso precisamente porque han aprovechado bien los hábitos adquiridos en resolver problemas, desarrollados a lo largo de doce años o más de escolarización. En gran medida, les estoy pidiendo que «olviden» lo que han aprendido, al igual que hace un profesor de música o un entrenador cuando encuentra un alumno que vale, pero que ha aprendido malos hábitos y tiene que quitarle de la cabeza costumbres que ha practicado mucho, pero que son contraproducentes. Esto no se consigue simplemente con explicárselo al alumno. Puedo pasarme horas hablando sobre «evalúa a cada paso tu solución» y «no te vayas por los cerros de Ubeda» y todo lo demás. Es casi segu-

(*) «Un tercio de la clase» es una estimación aproximada que nos vale bastante bien en una clase de 75 minutos. Prefiero tener clases de 75 minutos, dos veces en semana, porque esto nos permite meterle el diente a problemas bastante complejos. Si solamente tenemos 50 minutos de clase, hay que hacer las cosas de otra manera. Un día se puede dedicar a trabajar nuevos problemas, otro a que los alumnos presenten las soluciones de los deberes, etc.

ro que tales palabras por sí mismas no causan efecto en el comportamiento del alumno cuando se pone a preparar los deberes los antiguos hábitos se ponen a funcionar y se hace lo que uno está acostumbrado a hacer. Sin embargo, mis intervenciones en clase producen un efecto inmediato. El diálogo que aparece a continuación se ha desarrollado muchas veces en clase (*).

El profesor: ¿Por qué estas calculando el área de ese triángulo (o...)?
El alumno: Creía que... bueno, realmente, no estoy seguro.
P.: Imagina que te diera el área del triángulo. ¿Qué harías con ella?
El alumno(s): Bueno, umm...
P.: ¿Cuánto tiempo llevas con ese cálculo?
A: Cinco minutos o quizá diez.
P.: ¿Qué conclusión has sacado?
A: Nada, supongo.
P.: Espera un segundo. El asunto no es que yo no vea valor alguno en dicho cálculo. Quizá tienes un motivo perfectamente válido y quizá yo no había pensado en ello. No es mi «desaprobación» lo que cuenta aquí, pero el caso es que llevas algún tiempo con esto y quizá estés un rato más, solamente para terminar con algo que resultará que no te sirva para nada. Me parece que si paras un momento y te preguntas algo como: «Esto todavía me llevará un rato. ¿Qué voy a sacar con ello? ¿Cómo lo voy a aplicar? ¿Hay otras posibilidades?, te ahorrarías muchas molestias.

2. El resolver problemas en grupo provoca discusiones sobre las diferentes posibilidades. Cuando un alumno se enfrenta solo a un problema a menudo sigue la primera opción «razonable» que se le ocurre. Cuando un grupo pequeño de alumnos estudian juntos un problema, es más probable que se sugieran dos o tres maneras de enfocar dicho problema. El decidir sobre las ventajas de cada una –el por qué se elige una y no otra– es precisamente lo que los alumnos deben practicar. Les comento que, más adelante, ellos, por sí mismos, deberán deducir diversidad de opciones y elegir entre ellas al igual que hacen en grupo.

3. El hallar la solución de un problema no es siempre cosa de uno. Nuestros discípulos tienen pocas oportunidades de trabajar en equipo y esto no perjudica a nadie.

4. Los alumnos son terriblemente inseguros, especialmente en un curso de estas características. El trabajar en grupo les da confianza: permite ver las dificultades que tienen los demás compañeros y que estos tienen que esforzarse igualmente, por darle sentido a los problemas que se les asignan.

C. SE REÚNE LA CLASE ENTERA PARA RESOLVER NUEVOS PROBLEMAS

Después de que los grupos han tenido ocasión de profundizar en los problemas, nos reunimos toda la clase para estudiarlos paso a paso. Por entonces, los alumnos ya se han podido familiarizar con ellos, así que trabajamos sobre una base firme. La clase hace sus sugerencias y yo actúo como mode-

(*) La conducta que promueve el diálogo que se da a continuación es típica. La transcripción de una sesión de veinte minutos, en la cual los alumnos perdieron quince intentando calcular el área del triángulo que no les servía para nada se discute en mi «Episodes and executive decisions in mathematical problem solving».

rador. En la próxima sección se incluye un ejemplo detallado de una discusión. Naturalmente, no podemos resolver todos los problemas un día: los que hemos tenido tiempo de acabar quedan como deberes para casa y los terminaremos en la próxima clase.

D. Observaciones al dar clase a un grupo numeroso

La forma ideal de aprender matemáticas es en clases pequeñas, pero la realidad a veces dispone lo contrario. Tom Butts ha dado cursos de resolución de problemas a clases numerosas (n > 100). Nos hace las siguientes sugerencias en relación con el planteamiento y dirección, así como con la manera de calificar (*).

Planteamiento

Cuanto más numerosa es una clase, más se tiene que depender del personal auxiliar y menos de debates espontáneos del tipo de los que a menudo hacen que una clase pequeña progrese mucho en poco tiempo. Asimismo, las clases muy numerosas tienden a depender mucho de la lectura por parte de los alumnos. En tales cursos éstos necesitan que se les dé más confianza y una organización más estructurada. Salvo para unos pocos, aunque se quiera, el contacto con el profesor es mínimo; por lo tanto, el planificar la clase se convierte en asunto de vital importancia.

Es imprescindible tener ayudantes altamente cualificados y bien entrenados. Lo ideal sería que dichos ayudantes (teaching assistants TAS) (a) asistieran a las clases teóricas (actuando como asesores en las clases prácticas, tomando apuntes, etc.) (b) clasificaran los deberes y (c) dedicaran algunas horas más a la semana que para los cursos normales a despachar con alumnos. Los TAS han de estar sensibilizados ante los procesos de resolución de problemas –tanto al calificar como en la tutoría–. Asimismo, soportarán la tristeza y frustración de los alumnos durante el tiempo en que se están esforzando en aprender los procesos mentales matemáticos. Por estos motivos, es esencial trabajar en estrecha coordinación con los TAS antes y durante el curso. El reunirse con ellos después de la clase, aunque sea brevemente, proporciona grandes beneficios. Beneficios del tipo de paga extra serían muy aconsejables para este tipo de trabajos adicionales, siempre que esto fuera posible.

Al comenzar el semestre, los alumnos necesitan algún tipo de «ancla» que les afiance para que no se sientan totalmente perdidos. El libro de texto proporciona algo de esto, por supuesto, y cada día hacen su aparición en el mercado más libros de texto sobre la resolución de problemas. Si no se usa ningún texto, se podría pensar en darles a los alumnos apuntes (quizá de los tomados por los TAS o de los asignados como «trabajos semestrales» a los alumnos), unas «hojas con las estrategias», juegos de problemas típicos,

(*) El dar clase a un grupo numeroso y el enseñarles cómo resolver problemas es un poco como hacer juegos malabares con tres o más pelotas, mientras se monta una bicicleta de una sola rueda. Recomiendo encarecidamente que se desarrolle cada destreza por separado, antes de intentar combinar todas.

acompañado cada uno de diferentes soluciones, o algún artículo sobre la resolución de problemas. Este material debería estar disponible al menos, en la biblioteca.

Incluso si usas un libro de texto, puede que quieras confeccionar tus propios problemas. La sofisticación de los alumnos, y el tipo de respuestas que esperas te den, puede indicarte el nivel de «ayuda» que es apropiado incluir en los enunciados de los problemas. Piensa, por ejemplo, en las reacciones de los alumnos a las siguientes versiones de un problema muy corriente:

1. ¿Cuántas diagonales tiene un (a) cuadrilátero (b) pentágono (c) hexágono de 17 lados (e) de 101 lados (f) de n lados convexo?
2. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 17 lados convexo?
3. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 101 lados convexo?
4. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados convexo? Explica tu respuesta.
5. Hay n personas en una habitación. Todo el mundo se da la mano con todo el mundo, excepto con los dos que tiene más cerca. ¿Cuántos apretones de mano se han dado?

Asimismo, se deben fijar las «normas». ¿Qué queremos decir con «explica tu respuesta»? y ¿qué aceptaremos como explicación? En general, el tiempo dedicado a discutir cosas como (a) qué se entiende como solución «admisible» de un problema y (b) la naturaleza del lenguaje matemático, por ejemplo, «halla todo», «por lo cual n», etc., es tiempo bien empleado.

Dirección del curso

Uno de los objetivos principales de este tipo de curso es enseñar a solucionar adivinanzas; para romper el hilo y animarles, podemos empezar el día con problemas que no son matemáticos, como el que sigue:

¿Qué tienen en común:

a) mitad, papel, azul
b) grasa, espacio, tenis
c) Navidad, Pascua, Melville
d) Victoria, el rey Eduardo III, Angel?

A los alumnos que normalmente no se encuentran dispuestos a hablar en voz alta, a menudo les encanta participar en adivinar problemas como éste. Se les puede animar igualmente a adivinar problemas matemáticos.

Al igual que en clases pequeñas, es importante conseguir que los alumnos trabajen juntos los problemas. Este modelo de grupos pequeños puede adaptarse a las clases teóricas, aunque los detalles concretos de cómo hacerlo es generalmente más complejo. Después de plantear un problema, les das tiempo a los alumnos para que trabajen en ello, mientras que los TAS y tú actuáis como asesores. Ten un problema o dos de más preparados para los que acaban pronto. Por ejemplo,

En «fútbol simplificado» solamente se pueden marcar 7 puntos al cruzar la línea de meta con el balón y 3 puntos al lanzarlo con el pie entre los palos. ¿Qué valores son posibles para el número de puntos que cada equipo puede marcar?

Pregunta adicional 1:

¿De cuántas maneras puede un equipo marcar 2100 puntos?

Pregunta adicional 2:

Supongamos que las reglas del juego especificaran N y M puntos por las dos formas de marcar. Si existen un total de 14 tantos que es imposible marcar, ¿qué valores pueden tener N y M?

El decidir en qué momento se debe poner fin al trabajo en grupo es un asunto delicado. Por una parte, los alumnos necesitan tiempo para involucrarse en el problema y para profundizar en él. Por otra, no hay necesidad de hacerles llegar a soluciones pulidas. La interacción con los alumnos por parte del profesor, utilizando las ideas parciales que formulan para solucionar un problema, es una excelente manera de emplear el tiempo de clase (véase la sección 4C). Asimismo, los conceptos erróneos y las soluciones incorrectas que proponen sirven a menudo de punto de partida para futuras discusiones.

Como previamente he señalado en la sección 2E, puede ser difícil el conseguir que los alumnos «repasen» las soluciones que han dado. Se les puede estimular a seguir esta conducta con algunos problemas pensados con este propósito. Por ejemplo, el que aparece a continuación:

A. Calcular $\sqrt{\underbrace{(111\ldots1)}_{100\ 1\text{'s}}\underbrace{(1000\ldots05)}_{99\ 0\text{'s}}+1}$

puede seguirse con

B. Construye un problema parecido.

La mayoría de los alumnos conseguirán la respuesta de A mirando casos más sencillos y sacando el resultado a partir del modelo. Normalmente se contentan con esto. Sin embargo, el problema B les obliga a echar otro vistazo al asunto para ver cómo y por qué funciona. Esto es lo mismo que si les pedimos que busquen leyes generales o que busquen otra solución totalmente distinta. En general, están más dispuestos a volver a estudiar la solución que han dado, si les pedimos que hagan algo que no habían pensado antes. (Bajo estas circunstancias, no pueden seguir satisfechos con las soluciones que han ofrecido).

Manera de calificar

El calificar en clases numerosas es siempre difícil, ya que no llegamos a conocer al alumno tan biem como en clases pequeñas. Este tipo de curso, en el que los alumnos se sienten siempre inseguros respecto a sus capacidades, les produce bastante ansiedad. Hay dos maneras de reducir dicha ansiedad, en una se permite a los alumnos acumular puntos por los deberes «rutinarios», y en otra se utiliza una escala móvil que recompense los progresos realizados, y que aparecen reflejados en la buena nota conseguida en el examen final.

En clases numerosas, a menudo existen grandes diferencias en las capacidades de los alumnos. Se deberán encomendar tareas que ofrezcan diferentes niveles de dificultad. A los alumnos se les dará libertad de elección, y se premiará a aquéllos que no se limiten a hacer el mínimo requerido.

Por ejemplo:

Tarea X: Resuelve los problemas del 1 al 5 y elige por lo menos otros cinco de los del 6 hasta el 15. Se darán puntos extra a los que presenten más de 10 soluciones, más de una solución o por aquellas soluciones excepcionalmente buenas.

Las calificaciones deben reflejar las prioridades del curso. Un sistema rápido es calificar los problemas de 0 a 4 puntos. Un alumno obtiene 1 punto si usa el método heurístico razonablemente, 2 puntos si da una solución que tiene algún fundamento aunque sea incorrecta), 3 puntos si se acerca a la respuesta correcta, y 4 puntos si da la solución correcta (quizá con ajustes por los errores aritméticos) (*).

Evaluar lo que un alumno ha aprendido se convierte con clases numerosas en algo muy difícil. Mientras que los exámenes que se mandan para hacer en casa son ideales para clases pequeñas y es aconsejable su uso, uno duda a la hora de mandarlos en cursos con mucho alumnado. Butts sugiere que se hagan comprobaciones frecuentes en clase, realizando una prueba aproximadamente cada cinco clases.

Sus exámenes se hacen normalmente dejando consultar los apuntes, de 60-75 minutos de duración y contienen cuatro problemas: (1) un problema parecido a uno que se haya discutido en clase (en realidad un ejercicio, para garantizar una puntuación «mínima» en el examen) (2) un problema del tipo «emplea el método heurístico X para solucionar el problema Y», (3) y (4) problemas originales que no se hayan visto antes. Utiliza dos fórmulas para reducir la ansiedad. Primero, los exámenes son calificados basándose en un sistema de puntuación ponderado. Lo que mejor ha hecho un alumno se califica sobre una base de 40 puntos, lo que ha hecho un poco peor vale 30 puntos, lo que está peor aún que lo anterior vale 20 puntos en total y lo peor de todo un máximo de 10 puntos. Un alumno que resuelve, por ejemplo, dos problemas y medio recibe por consiguiente una puntuación de 40 + 30 + 1/2 (20) = 80. Tom también «vende» (contra puntos) pistas durante los exámenes; por un problema resuelto totalmente gracias a una pista valorada

(*) En general, el evaluar los esfuerzos de los alumnos en estas circunstancias está plagado de dificultades. Para más detalles y amplia discusión sobre el tema, véase mi «Measures of problem solving performance and of problem solving instruction» en *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 13, n.º 1, págs. 31-49). Enero 1982.

en 1/3 de los puntos que vale el problema, un alumno recibe las 2/3 partes de los puntos para ese problema, etc. (*).

El enseñar a resolver problemas es difícil, mucho más si la clase es numerosa, pero como Tom Butts dice: «Quizá no llegues a todos los alumnos, pero la satisfacción que te dan aquellos a los que llegas te compensará por los otros».

4. DISCUSION DE ALGUNOS PROBLEMAS «TIPICOS»

Los tipos de problemas que discutimos en clase y las conclusiones que se derivan de ellos varían a lo largo del curso. Una vez más, la analogía de aprender a practicar un deporte nos sirve para explicar cómo avanzamos. A principios del semestre, los alumnos apenas dominan las técnicas de resolución de problemas que aprenderán durante el curso. Se les enseña y se les dan clases prácticas en técnicas básicas tales como buscar razonamientos inductivos, estudiar casos especiales, utilizar problemas parecidos que hemos visto anteriormente, generalizar, concretizar, etc., de la misma manera que (por ejemplo) un principiante en el tenis recibe entrenamiento y practica la manera de ser y la manera de lanzar directos y reveses. Una vez que se han dominado las técnicas básicas, se pueden emplear en una gama de situaciones cada vez más amplia. Los problemas que resolvemos se hacen más difíciles y cuestan más tiempo; ya no se trata de problemas de «entrenamiento», sino de buenas y sólidas matemáticas. La cuestión para los alumnos es que ahora deben elegir las técnicas apropiadas para vencer el problema, y saberlo hacer de manera eficaz. Las discusiones en clase van cambiando también, dándose mayor énfasis a las cuestiones de planteamiento, evaluándolas según avanzamos. A continuación se señalan algunos problemas representativos.

A. PROBLEMAS PARA ILUSTRAR UN PUNTO CONCRETO

De vez en cuando me gusta asegurarme de que les queda muy claro a los alumnos algún tema en concreto. En este sentido existe un pequeño grupo de problemas que, a mi juicio, está casi garantizado que surtirán efecto. Con un uso adecuado, pueden ser muy eficaces.

Por ejemplo, es importante convencer a los alumnos, al comienzo del semestre, de que realmente tienes algo que enseñarles. El tipo de clase es poco común y debe explicarse. Quizá eres el primer profesor que han tenido que ha intentado «centrarse en el proceso de resolución de problemas». Hasta ahora, los alumnos han marchado muy bien académicamente, sin preocuparse nunca de tales cosas. ¿Por qué van a hacerlo ahora de repente, sobre

(*) A la larga, desde luego, estas fórmulas no cambian en nada el lugar que, por notas recibidas, ocupa el alumno en la clase. Puede que otros profesores prefieran utilizar un sistema «directo» de puntuación, explicándoles a los alumnos que en cuestiones de resolución de problemas una puntuación del 50% puede estar muy bien. Hay que tener en cuenta dos cosas aquí. (1) Las clases numerosas tienden a ser del tipo de «enseñanza masificada» y lo que se espera de ellas debe adaptarse a esto. (2) Ya que mucho de lo que se rinde matemáticamente depende de la confianza que el alumno tenga en poder resolver los problemas, no hace daño infundir algo de confianza, incluso si a veces se hace esto de un modo un poco artificial.

todo en un curso que trata de temas elementales, les coloca en situaciones difíciles y en el que a menudo se sienten incómodos? Para tratar esta cuestión, el bloque de problemas que les pongo los primeros días de clase normalmente incluye algunos como los que aparecen a continuación:

4.1. ¿Cuál es la suma de los números:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

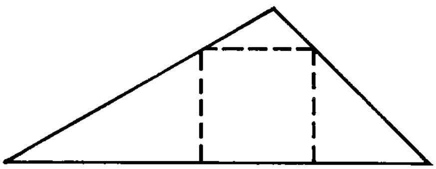
4.2. ¿Para qué valor de «a» el sistema de ecuaciones

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

tiene 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 soluciones?

4.3. Mira el triángulo de la derecha. ¿Puedes inscribir un cuadrado en el triángulo? Es decir, ¿puedes construir un cuadrado que tenga la propiedad de que sus cuatro vértices toquen los lados del triángulo?



4.4. Si A, B, C y D se encuentran entre los valores 0 y 1, demuestra que:

$$(1 - A)(1 - B)(1 - C)(1 - D) > 1\text{-}A\text{-}B\text{-}C\text{-}D.$$

La experiencia me demuestra que los alumnos normalmente pasarán sus buenos veinte minutos con cada problema, sin conseguir resolverlos, y si encuentran alguna respuesta, normalmente será deformada y chapucera. Por ejemplo, el problema 1 se puede identificar como el de la conocida «serie abreviada», en la cual se anulan los términos adyacentes cuando $\frac{1}{i \cdot (i+1)}$ se expresa como $(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1})$. Es muy improbable que aquellos alumnos que no lo hayan visto antes encuentren la solución. Algunos alumnos admiten que es como «sacarse un as de la manga», y que nunca lo conseguirán por sí solos (*). En el problema (2), los alumnos normalmente se lanzan a la solución algebraica. El no perder de vista las múltiples soluciones es bastante difícil, y pocos alumnos son capaces de hallar la solución, si es que alguno lo

(*) Si la clase es de alumnos de tercero o del último año, este problema les resulta demasiado conocido como para usarlo. Sin embargo, un problema del tipo: ¿Cuántos subconjuntos que contienen un número par de elementos hay en un conjunto que contiene 87 objetos? Ejerce un efecto parecido en los alumnos, sobre todo en aquéllos que se lanzan a complicadas demostraciones de combinatoria.

consigue. Tanto el problema 3 como el 4 puede resolverse de diferentes maneras. Después de que el problema 4 apareciera en un artículo en *Mensual*, recibí media docena de soluciones no isomorfas de los lectores; pero la actitud de mis alumnos ante el problema (aún los de tercero y último curso que habían cogido la especialidad de matemáticas en Berkeley) se puede predecir con anterioridad: multiplican la expresión de la izquierda, pasan todos los términos a este lado y entonces laboriosamente intentan demostrar que la mezcla de símbolos es positiva.

Doy tiempo a los alumnos para que trabajen el problema (normalmente en pequeños grupos) y entonces les indico algunas «estrategias» generales para problemas matemáticos que deberían conocer». Las sugerencias dadas para estos problemas serían:

1. Si hay un «parámetro entero» n, en el enunciado del problema, calcula unos pocos casos especiales para n = 1, 2, 3, 4 y 5. Quizá haya un modelo que resulte evidente. Si es así, puedes verificarlo por inducción.
2. ¡Dibuja un diagrama, siempre que sea posible!
3. Si el problema tal como está planteado es demasiado difícil, elimina una de las condiciones y la exigencia del problema original se reduce, a la vez que te aseguras que el problema que estás considerando es de la misma naturaleza. Ahora, para el nuevo problema, deberá haber más de una solución. Examina las soluciones del problema más fácil y comprueba si la solución al problema original está entre ellas.
4. Si hay un gran número de variables en un problema, todas (las cuales) tienen el mismo papel, estudia el problema análogo de sólo una o dos variables. A partir de ahí, puede que construyas una solución.

Con estas pistas, los alumnos normalmente pueden encontrar la solución a los problemas 1 y 2 en unos cuantos minutos. Los problemas 3 y 4 les suele llevar un poco más de tiempo y es útil discutirlos toda la clase junta, pero los cuatro problemas producen el mismo efecto. Las indicaciones para poderlos resolver parecen perfectamente naturales y lógicas. Este es el tipo de cosas en las que los alumnos deberían haber pensado, pero no lo hicieron. Los alumnos salen de la clase convencidos de que aprenderán algunas técnicas útiles durante el curso.

Otros problemas son apropiados para resaltar ciertas «moralejas» a medida que el alumno va mejorando, por ejemplo, en seguida aprende a valorar la sugerencia hecha anteriormente en el punto 1. A esas alturas del semestre, el siguiente problema viene muy bien.

4.5. En un torneo de ajedrez eliminatorio, los contrincantes forman parejas al azar y juegan una partida. Los que pierden quedan eliminados del torneo, pero los ganadores continúan. Si empezamos con 32 jugadores, tendremos 16 ganadores, por lo tanto 16 pasarán a la siguiente vuelta. Si hay un número impar de jugadores en una vuelta, una persona no jugará, pero pasa a la siguiente vuelta. Con 15 jugadores, uno avanza al siguiente «round», aunque no haya jugado, y los 7 ganadores también pasan.

En general, si hay N jugadores:

Si N es par, entonces se juegan N/2 partidas y pasan N/2 jugadores a la siguiente vuelta.

Si N es impar, $1 + \frac{(N-1)}{2}$ ó $\frac{N+1}{2}$ jugadores pasan a la siguiente vuelta, después que se han jugado $\frac{N-1}{2}$ partidas.

Si N personas comienzan el torneo, ¿cuántas partidas hay que celebrar para saber quién es el vencedor?

La gran mayoría de alumnos sucumben a su aprendizaje e impetuosamente se lanzan a poner en práctica la estrategia de «parámetro entero». Después que han calculado los casos especiales para N = 2, 3, 4, 5, 6 y 7 el modelo aparece *demasiado* obvio: si N personas empiezan el torneo y si una persona es eliminada en cada juego, habrá N − 1 perdedores y por consiguiente ¡N − 1 partidas jugadas! Moraleja: asegúrate que has entendido enteramente el problema antes de lanzarte a dar la solución, y no te pongas a hacer cálculos complicados, a menos que estés seguro de que no hay otras posibilidades más fáciles.

Otro problema con un «objetivo concreto» tiene que ver con el papel que las demostraciones juegan en matemáticas. Existen, naturalmente, muchas maneras de hallar la solución del problema 4.6; la que menos gusta es la más rigurosa.

4.6. Hallar la suma de la «serie geométrica»

$$S = 1/2 + 1/4 + 1/8 \ldots + 1/2^n \ldots$$

Si los alumnos están dispuestos a reconocer que tales series son convergentes normalmente encuentran convincente el siguiente razonamiento:

«Obsérvese que, multiplicando cada término por 2, tenemos

$$\begin{aligned} 2S &= 1 + \underbrace{1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots}_{S} \\ &= 1 + S \end{aligned}$$

por lo que S = 1, como suponíamos

Una vez que han admitido este tipo de razonamiento, normalmente piensan que el razonamiento «epsilon-delta» que les imponemos es innecesario. ¿Por qué hacer todo ese trabajo cuando ya se tiene un razonamiento convincente? Encuentro el siguiente problema 4.7 muy provechoso:

4.7. Hallar la suma de las series

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + \ldots$$

Siguiendo un razonamiento parecido al que se da anteriormente tenemos

$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n + \ldots = T - 1,$$

por lo que $T = -1$. ¿Queda con esto demostrado?

(*Fallacies in Mathematics* por Maxwell es una excelente fuente de tales razonamientos. Para cursos más avanzados es útil *Counterexamples in Analysis* de Gelbaum y Olmsted).

B. Problemas que necesitan de la «preparación» del alumno

Debe adiestrarse a un alumno para que examine casos especiales, o para que sepa cómo hacer uso de problemas más fáciles relacionados o para que use alguna otra estrategia de resolución de problemas, con el mismo cuidado y con las mismas clases prácticas que son necesarias al adiestrarle para que use (por ejemplo) la fórmula cuadrática o la integración por partes. Normalmente, encuentro la serie de ideas que se dan a continuación de lo más útil para enseñar cualquier técnica en concreto:

i. introducir la técnica que se quiere que aprendan con un problema particularmente interesante
ii. dedicar una gran cantidad de tiempo durante la próxima semana a practicarlo (digamos 1/3 de los problemas de clase).
iii. repartir otros problemas, que se puedan solucionar con la misma técnica, de vez en cuando al azar a lo largo del semestre.

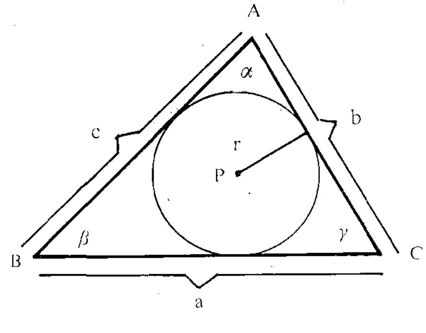
C. Discusión en la clase de un problema difícil

En esta sección intentaré transmitir cómo fue la discusión que tuvo lugar en la clase para resolver el siguiente problema:

4.8. Dados dos segmentos de longitud a y r, respectivamente y un ángulo de medida α. Construir un triángulo que tenga las siguientes propiedades:

i. un lado del triángulo tiene longitud a
ii. el radio del círculo inscrito del triángulo es r
iii. la medida del ángulo opuesto al lado a es igual a α.

Vamos a representar el triángulo pedido, T, como en la figura 4.1, para tener una referencia fácil a mano. Las partes que están marcadas más fuerte representan las tres cantidades dadas, a partir de las cuales vamos a construir T.



El triángulo T

–figura 4.1–

La clase conocía las construcciones «básicas» de regla y compás. Además (como habían resuelto un problema que usaba esto) conocían la construcción del lugar geométrico del vértice A (variable) de una medida fija α que está opuesta al lado fijo a. El procedimiento «normal» para tales problemas es intentar construir el triángulo pedido directamente. Se comienza con la parte dada de T, y entonces se intenta hallar –por medio de la intersección de dos lugares geométricos– un punto que unívocamente determine el triángulo. La clase estaba asimismo al corriente de que quizá podría hacerse de otra manera (construyendo un triángulo similar a T, y entonces irlo haciendo mayor o menor por una construcción de proporcionalidad) y que no debíamos perder esto de vista. A continuación se da la versión resumida de la discusión en la clase, que nos ocupó sus buenos cuarenta minutos. Mi reconstrucción de la discusión está basada en la versión ampliada de los apuntes que dos alumnos tomaron en clase (*).

Planteamiento: ¿comenzaremos con

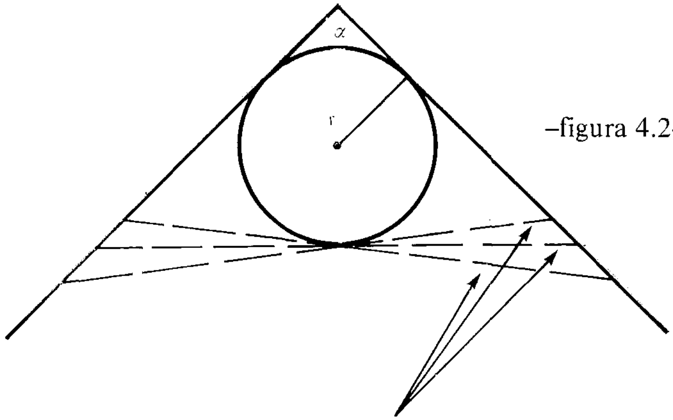
(a) el círculo inscrito
(b) el lado a, o
(c) el ángulo α del vértice A?

El punto (a) está descartado. Si comenzamos con el círculo, ¿dónde ponemos el lado a? ¿cómo relacionamos el lado con el vértice A? No merece la pena seguir. El punto (b) es más lógico. Si empezamos con el lado a, podemos (i) construir un lugar geométrico para el vértice A, y (ii) un lugar geométrico para el centro del círculo P. Pero ¿cómo se relacionan los dos? No está claro. Quizá merezca la pena seguir por aquí, pero veamos el punto (c). Si comenzamos con el ángulo α, parece que podemos inscribir el círculo. ¿Se puede hallar la solución partiendo de aquí? Quizá sí, quizá no, pero merece la pena intentarlo (*).

(*) La clase avanza muy rápido y el tomar apuntes durante la clase se ha demostrado que a menudo distrae al alumno. He encontrado muy útil el siguiente procedimiento. Cada día, se nombran dos alumnos para que tomen los apuntes. La clase se graba, y estos alumnos usan la grabación para redactar por escrito la descripción «oficial» de lo que pasó en la clase. Mi ayudante o yo revisamos los apuntes, se mecanografían y los distribuimos a toda la clase. Los otros alumnos se ven libres de la responsabilidad de tomar apuntes aquel día, y acaban con unos mucho más extensos de los que tendrían de otra manera. Los juegos de apuntes se califican y cuentan como trabajos.

(*) El «planteamiento» del que damos un resumen en la página anterior nos llevó cinco minutos de discusión en la clase. Yo desempeñé el papel de moderador, haciendo preguntas como: «Muy bien, ¿qué opciones tenemos? ¿Hay otras? ¿Cuáles os parecen que funcionarían? Ya veo, es entre (b) y (c). ¿Con cuál empezamos a trabajar? Los alumnos comentaron sobre cuál de los dos enfoques era el mejor y decidieron intentar el (c) «durante un rato». Si no funcionaba, examinarían el (b) de nuevo.

Comenzamos con el ángulo α, encontramos fácilmente el punto P, y terminamos con el dilema de la figura 4.2:



–figura 4.2–

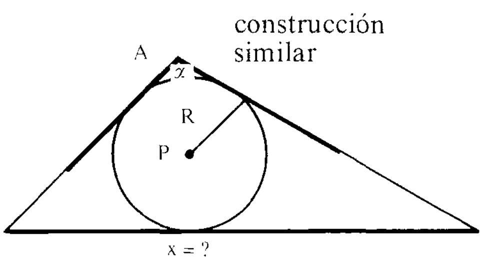
Pregunta:

¿Cuál de éstos es el lado a?

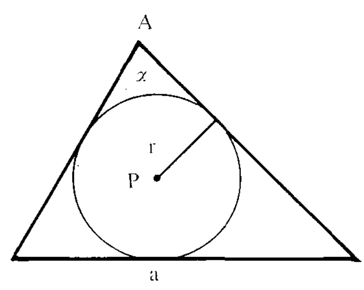
Sabemos la longitud de a y sabemos que a debe ser tangente al círculo.

Tenemos dos informaciones sobre el lado a, pero no la manera de unirlas.

Esto parece descorazonador. No obstante, quizá podamos conseguir algo mediante una construcción similar. Merece la pena intentar esto por unos momentos. Dibujamos una tangente cualquiera en la parte de abajo del círculo, con la esperanza de que pudiéramos posteriormente hacerlo mayor o menor (figura 4.3). Esto no condujo a nada y nos quedamos atascados.



Podemos conseguir esta figura; podemos inscribir un círculo de cualquier radio dado, R.



Esta es la figura que queremos.

Si los dos triángulos son similares

$$\frac{X}{R} = \frac{a}{r}$$

–figura 4.3–

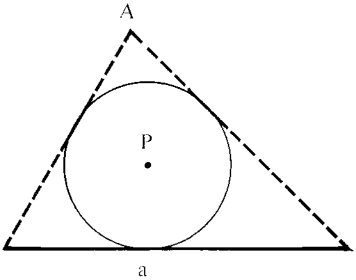
Estos no nos lleva a ninguna parte

Resolución: ¿Seguimos esta línea un poco más, o damos marcha atrás y consideramos otra alternativa?

Dado que parecía realmente que habíamos llegado a un punto muerto, decidimos examinar el (b) de nuevo. ¿Qué pasaba si empezábamos la construcción por el lado a?

1. Sabíamos que podíamos construir el lugar geométrico de los puntos que tienen un ángulo fijo opuesto a a (un lugar geométrico para el vértice A).
2. Sabíamos que teníamos un lugar geométrico para el punto P.

Necesitábamos una tercera información sobre el triángulo. Si pudiéramos encontrar otor lugar geométrico para el vértice A, eso terminaría totalmente la construcción. Otro lugar geométrico para el punto P nos permitiría construir el círculo inscrito, y eso serviría, también: construiríamos las tangentes al círculo que pasan por los extremos de A (figura 4.4).



Dado el lado a y el círculo inscrito (en su sitio) completar el triángulo.

–figura 4.4–

Aquí tenemos las opciones:

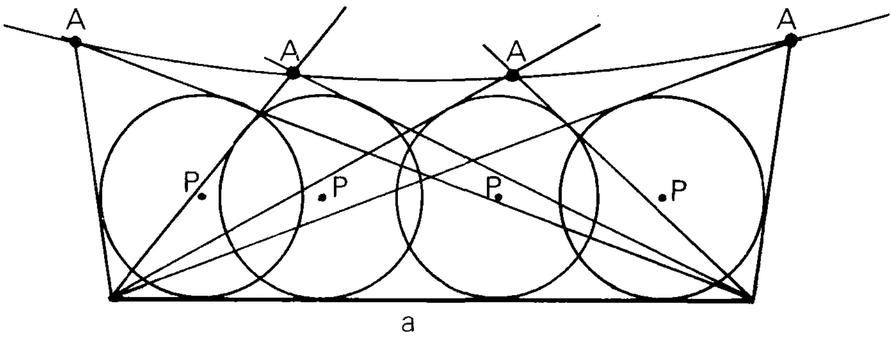
1. Determinar el lugar geométrico del vértice A, dados el lado a y el círculo inscrito (variable) de radio fijo r.
2. Determinar el lugar geométrico del centro del círculo inscrito, dado el lado a y el vértice A (variable) que forman un ángulo α opuesto a a.

¿Cuál de las dos deberíamos seguir?

Sugerencias: Nos encontramos aquí en terrenos movedizos y no tenemos base para emitir un buen juicio. Quizá ha llegado la hora de hacer algunos bocetos aproximativos. El resultado del trabajo empírico puede sugerirnos el seguir una alternativa u otra. Quizá incluso nos sugiera una hipótesis. Intentamos las opciones I y II respectivamente, en las figuras 4.5 y 4.6.

Opcion I

El lugar geométrico del vértice A, dado el lado fijo a y el círculo inscrito (variable) de radio r.

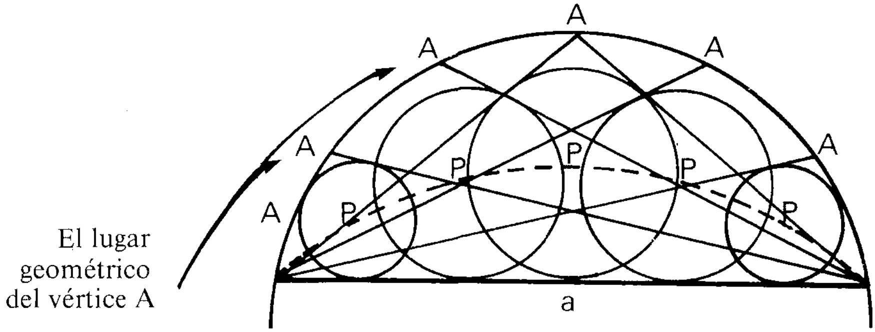


Este lugar geométrico no parece sugerirnos nada...

–figura 4.5–

Opción II

El lugar geométrico de los centros de los círculos inscritos, P, dado el lado a y el vértice A (variable) que forma un ángulo opuesto a a.



El lugar geométrico es simétrico, pasa a través de los extremos de a,... ¿podría ser el arco de un círculo?

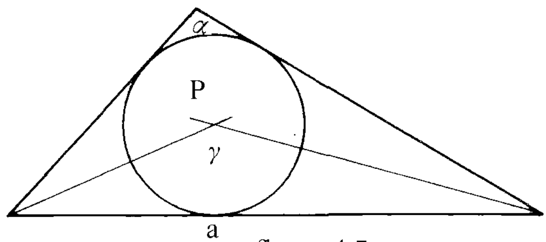
–figura 4.6–

La opción I parece que no nos lleva a ninguna parte, pero la opción II quizá nos diga algo: el boceto sugiere que el lugar geométrico de P (dado el punto variable A) puede ser un círculo que tiene el lado a como una cuerda. (Si no estamos seguros de esta suposición, podemos hacer un dibujo más preciso. No vayamos a desmerecer las exploraciones empíricas).

Subproblema: Demostrar que el lugar geométrico de P, siendo fijos a y la variable A, es un círculo que tiene a como cuerda.

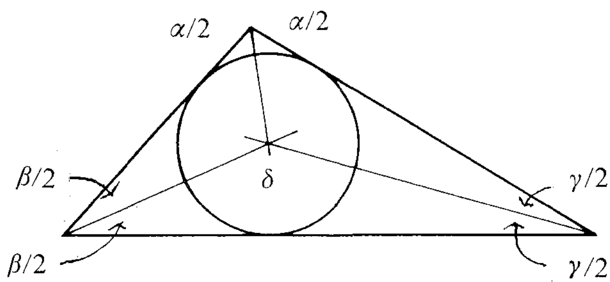
Pregunta: ¿Cómo demostramos tales cosas? ¿Qué sabemos de círculos y cuerdas? En este contexto, sabemos que el conjunto de puntos que tienen un ángulo fijo opuesto a un segmento dado (cuerda) es un círculo.

Nuevo planteamiento del subproblema: Demostrar que, dado a y α, el punto F forma un ángulo fijo opuesto al lado a. Nuevo replanteamiento: en la figura 4.7 ¿podemos demostrar que el ángulo δ es solamente una función de α?



–figura 4.7–

Sub-subproblema: Hallar una fórmula para δ en términos de α. Sabíamos que el punto P cae en la intersección de los tres ángulos bisectores de T, y esto nos llevó al razonamiento de la figura 4.8.



del triángulo inferior $\delta + \beta/2 + \gamma/2 = 180°$,

ó $\quad 2\,\delta + \beta + \gamma = 360°$

del triángulo T, $\quad \alpha + \beta + \gamma = 180°$

Así $\gamma = 90° + \alpha/2$
La relación entre δ y α.

–figura 4.8–

Esto resolvió el problema. Sabíamos que el centro del círculo inscrito podría obtenerse como la intersección de

(i) el círculo que forma un ángulo $\delta = 90 + \alpha/2$ con la cuerda a, y
(ii) la línea paralela a a a una distancia r.

Una vez que habíamos inscrito el círculo, podíamos terminar la construcción como indicaba la figura 4.4.

Breve resumen de la discusión

Como se indica anteriormente, conseguir la solución de este problema llevó a la clase alrededor de 40 minutos. Podría haberlo explicado por completo en diez minutos. ¿Está realmente justificado dedicar todo ese tiempo a un problema, con intentos fallidos, retrocesos, callejones sin salida, decisiones estratégicas importantes, subproblemas, etc.? Creo que sí, aunque no estoy, desde luego, dispuesto a recomendar que se resuelvan *todos* los problemas de esta manera. Hay veces en las que no tenemos que hacer otro cosa que presentar la información, mientras que los alumnos han de dominar procedimientos rutinarios, y debemos pedirles (por muchas buenas razones) que aprendan y descubran las técnicas ellos solos. Sin lugar a dudas, nuestra función más importante como profesores es adiestrar a los alumnos a aprender y a pensar por ellos mismos. Creo que esta manera de solucionar los problemas en la clase sirve de catalizador para este tipo de aprendizaje.

Al resolver el problema 4.8, la clase hizo un descubrimiento totalmente inesperado: el lugar geométrico de los centros de los círculos inscritos, en las condiciones dadas (ángulo fijo a y vértice A variable de medida α opuesto a a) es un círculo con el lado a como cuerda. La necesidad nos llevó a este descubrimiento; el trabajo empírico nos lo sugirió. En pocas palabras, los alumnos *vivían las matemáticas* aquel día en la clase. La experiencia por la que pasaron, al descubrir aquel resultado (menor) es similar a la experiencia que nosotros tenemos al ocuparnos de auténticas matemáticas. Les permitió ver las matemáticas como una disciplina viva, en la cual los descubrimientos son posibles y se puede disfrutar con ellos.

¿Y qué pasa con los intentos fallidos, retrocesos, callejones sin salida, etc.? El hecho es que el trabajar las matemáticas implica todo esto. El trabajar las matemáticas con éxito implica vencer todas estas dificultades: saber cuándo hay que «explorar», saber elegir el camino más adecuado, seguirle la pista para ver si da frutos, pero también saber dejarlo a tiempo, etc. Los alumnos que conocen todo esto están más dispuestos a intentar lo desconocido, a la hora de trabajar ellos mismos las matemáticas. Discusiones como la detallada anteriormente les facilitan los medios de ver cómo se puede conseguir esto de manera eficiente y juiciosa.

Los matemáticos están para resolver; precisamente esto es lo que les da emoción a las matemáticas. El introducirles en lo que es la resolución de problemas, se lo debemos a aquéllos que serán los matemáticos del futuro, a aquéllos que utilizarán esta materia, y a aquéllos que desean desarrollar su «intuición» matemática. Espero y confío que mediante el método de la resolución de problemas –a través de los planes de estudio y por medio de diversas asignaturas sobre problemas– conseguiremos transmitir a nuestros alumnos la emoción y belleza que encierra la ciencia de las matemáticas. En la medida en que adiestremos a nuestros alumnos a pensar independientemente y a *utilizar* los conocimientos de que disponen, habremos desarrollado con éxito nuestra tarea como profesores.

BIBLIOGRAFIA

Aspects of secondary education. Report of the HMI secondary survey, London: Her majesty's stationery office, 1980.

Change in mathematics education since the late 1950's. Ideas and realizations. Two special issues of Educational Studies in Mathematics, may 1978 and august 1978.

DESCARTES, R.: *Rules for the direction of the mind. In R. Descartes. Philosophical Essays* (Laurence Lafleur, trans.). Indianapolis: Bobbs-Merrill, 1980.

GLAESER, G.: A review of F. K. Lester and J. Garofalo (Eds.): *Mathematical problem solving: Issues in Research. Educational studies in Mathematics, 14,* may 1983, 213-215.

LESH, R.; LANDAU, M. and HAMILTON, E.: Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In Richard Lesh and Marsha Landau (Eds.). *Adquisition of mathematics concepts and processes,* New York: Academic Press, 1983.

Mathematics counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the chairmanship of COCKCROFT, W. H. London: Her majesty's stationery office, 1962.

National Council of Supervisors of Mathematics. Position paper on basic mathematical skills. *Arithmetic Teacher, 25,* october 1977, 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics. *An Agenda for Action Washington,* DC: 1980.

POLYA, G.: *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G.: *Mathematical Discovery,* New York: Wiley, 1981.

POLYA, G.: *Mathematics and Plausible Reasoning (2 Vols.).* Princeton: Princeton University Press, 1954.

Recommendations for a general mathematical sciences program. Committee on the undergraduate program in mathematics. Mathematical Association of America (1529 Eighteenth Street NW., Washington, DC: 20036, USA), 1983.

SCHOENFELD, A. H.: *Problem in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotathe bibliography.* Mathematical Association of America (1529 Eighteenth Street NW., Washington, DC: 20036, USA), 1983.

SCHOENFELD, A. H.: *Mathematical Problem Solving,* New York: Academic Press, in press.

Mesa redonda: «El profesor como agente de su propia renovación»

Participan:

Rubi CORBERO (Grupo Zero de Barcelona)
Joaquín JIMENEZ (Grupo Periódica Pura)
Amador MARTIN (Sociedad Canaria «Isaac Newton»)
Luis PUIG (Grupo Cero de Valencia)
Javier SALES (Grupo «Puig Adam»)

EL PROFESOR COMO AGENTE DE SU PROPIA RENOVACION. EL GRUPO DE TRABAJO

Grupo Zero

Empezaremos planteando unos cuantos puntos que nos ayuden a situar respecto a nuestra formación y a la problemática que comporta.

Formación

- La formación recibida es para dedicarse a la investigación, no a la docencia.

¿Qué matemáticas nos enseñaron y qué imagen nos transmitieron?

- No hemos salido nunca del sistema educativo. Vivimos en un mundo cerrado que se reproduce a sí mismo.

Problemática que comporta

- Desconocimiento de la realidad social, cultural, psicológica de los alumnos.
- Desconocimiento del aparato escolar global, de sus objetivos, su función, sus implicaciones...;
- Desconocimiento del mundo en que vivimos, mundo de la técnica, de la empresa, de las finanzas, de la burocracia, de relaciones sociales complejas y conflictivas,... no sólo en cuanto funcionamiento sino también en cuanto a valores.

Autoformación

- ¿Autorenovación? No hay mucho que renovar, casi todo está por hacer.
- Es necesaria. Si queremos conseguir resultados positivos de nuestro trabajo y no encasillarnos y caer en una rutina monótona y desesperanzadora.
- Es voluntarista. Cumplir con la jornada laboral que nos corresponde es cumplir responsablemente nuestro compromiso con la sociedad.

Necesidad del grupo

Frente a estas dos características contradictorias de la autoformación nuestra respuesta ha sido el grupo de trabajo.

Por un lado, es difícil plantearse cualquier tipo de renovación cuando se trabaja en solitario, y el trabajo es mucho y complicado. Dada la falta de formación inicial, cuesta hallar el camino a seguir, y en caso de hallarlo no siempre se tiene el valor y la seguridad en uno mismo necesarios para seguirlo en medio de un ambiente poco favorable. Por ejemplo, todos sufrimos en mayor o menor grado la enfermedad de los programas; ¿qué será de nuestros alumnos si no les recitamos todos los temas? Y suponiendo que no lo hagamos, ¿quién nos garantiza que no tendremos problemas?

Cuanto a la dificultad del trabajo, el grupo proporciona la ayuda necesaria para ir adelante. Las dudas, los miedos, las inseguridades, desaparecen, o disminuyen, cuando compruebas que son comunes a todos. Las ideas y experiencias de unos sirven también para los otros. Nadie tiene la receta mágica que nos solucionara los problemas de golpe. Todos juntos somos los protagonistas directos del trabajo: la renovación de nuestras clases y nuestra propia formación, con lo que eso comporta de confianza y seguridad en lo que estamos haciendo.

Por otro lado, tenemos muy presente que este trabajo es voluntarista. Como no queremos, ni podemos, medir el grado de dedicación, cada uno aporta lo que puede y eso no marca ningún tipo de diferencia entre los miembros del grupo. Creemos que esta característica ha contribuido muy especialmente a la estabilidad del grupo y a su larga supervivencia.

El Grup Zero

El grupo nació a raíz de «l'Escola d'Estiu» del año 1975 en que los compañeros de Valencia nos explicaron sus ideas y métodos de trabajo en clase con los alumnos.

Las ideas que nos aglutinaron no fueron cuestiones teóricas, sino el trabajo en una alternativa viable que fuese respuesta a los problemas concretos con que nos encontramos cada día en clase.

Las líneas básicas de esta alternativa son, primero, presentar a nuestros alumnos las matemáticas como ciencia completa con los procesos de primeras abstracciones, tanteos, ensayos, búsqueda de leyes generales, en el terreno de la práctica; con sus conceptos y teorías después, en los que el rigor y la deducción juegan el papel principal, y finalmente, con las aplicaciones más o menos complejas que estas teorías puedan tener.

En segundo lugar, creemos que hemos de enseñar a nuestros alumnos unas matemáticas enraizadas en su entorno, que le sirvan para conocerlo mejor, analizarlo, criticarlo, buscarle alternativas. En este segundo aspecto es donde podemos incidir en la motivación de los alumnos (y en la nuestra propia), en cuanto a exigir su esfuerzo por conocer el mundo y la cultura que le rodea.

Siguiendo estas dos líneas hemos preparado un material que cubre el programa de casi los tres cursos de BUP, si bien no siguiendo estrictamente el orden, ni la forma, del programa oficial.

Actualmente estamos trabajando en acabar este material, en la preparación de temas interdisciplinares con la colaboración de los profesores de otras materias de nuestros centros y en cuestiones de programación del ciclo 14-16 años.

Valoración del trabajo realizado

Nuestro trabajo está encaminado a solucionar los problemas cotidianos que se nos presentan en clase. No trabajamos teorías educativas, sino que experimentamos un material concreto, basado en una metodología concreta, que vamos discutiendo, probando, reestructurando... y en todo caso las ideas teóricas se van explicitando a posteriori.

Los resultados que obtenemos, si bien distan bastante de ser satisfactorios, nos animan a seguir adelante. Hay que tener presente que los objetivos que nos proponemos son de formación integral de nuestros alumnos.

No hemos hecho una evaluación «científica» de nuestra forma de trabajar porque no hemos hallado un método que sirva para valorar *todos* nuestros objetivos. Una evaluación científica se puede hacer aislando un aspecto muy concreto del aprendizaje o de la enseñanza y es interesante que se haga, pero se dejan de lado los restantes aspectos.

Además, la discusión entre los miembros del grupo sobre los resultados de cada tema, nos ha parecido evaluación suficiente para nuestros objetivos. No pretendemos convencer a nadie de la bondad de nuestro material o metodología, queremos, conjuntamente, como grupo, solucionar el problema de la clase de cada día, con unos alumnos y unos profesores determinados. No creemos que haya un método bueno para todos y en todo lugar.

En estos momentos nos planteamos la necesidad de nuevos caminos que rompan de verdad con el aislamiento de las distintas asignaturas. Hemos de salir de las clases cerradas y creemos que un primer paso es el trabajo interdisciplinar. Eso nos coloca de nuevo frente a la necesidad, más apremiante si cabe, de reciclaje, de formación permanente del profesorado y de reestructuración de los programas desde un punto de vista global de los objetivos de formación de los alumnos, y no como meros cambios en las listas de contenidos de cada materia.

Formación Permanente

Si la formación permanente no ha de ser voluntarista, «debe ser una actividad orgánica, relamente permanente e insertada dentro de un proyecto educativo más amplio *», en continua renovación. Así, la formación permanente sería la impulsora del cambio de los proyectos educativos y estos exigirían nuevos planteamientos a la formación permanente.

En estos momentos en que se habla de reforma, la formación permanente se puede entender como el reciclaje necesario para llevarla a cabo, pero hay que tener presente que tiene finalidad en sí misma y que debe ser el lugar donde se busquen las respuestas a los problemas que la enseñanza continuamente va planteando.

En la estructuración de la formación permanente «se deben tener en cuenta una serie de condicionantes específicos: limitaciones de tiempo, necesidad de soluciones de aplicación inmediata para los problemas cotidianos de la enseñanza, resistencia natural a toda innovación metodológica, criterios formados dentro de una determinada concepción pedagógica y epistemológica...

No parecen adecuados los «cursos de trabajo» destinados únicamente a mejorar la formación matemática o a informar sobre teorías pedagógicas o psicológicas generales. Más interesantes y útiles pueden resultar cursos de matemáticas más elementales, desarrollados con una metodología no tradicional, que muestren una visión diferente de lo que son las matemáticas y el modo de enseñarlas».

Otras actividades interesantes podrían ser:

- trabajo en grupos reducidos sobre temas que se trabajarán en clase
- facilitar el acceso a la lectura y a la discusión de textos sobre la enseñanza de las matemáticas
- organizar y facilitar el intercambio de las experiencias de los diferentes grupos de trabajo. Coordinar los resultados y extenderlos.

PARTICIPACION DEL GRUPO A LA MESA REDONDA DEL DIA 28 DE MAYO-1984

Grupo Periódica Pura

1. El título de esta mesa redonda, parece indicar que esta vez se quieren evitar errores pasados.

Por una parte, la *participación activa del profesorado*, que en gran medida ha quedado marginado en muchas ocasiones. Por otra, el carácter amplio que observamos en la palabra «renovación», que no debe entenderse limitada a la capacitación para impartir contenidos más modernos.

Para empezar, creemos que no se puede hablar de renovación en forma parcial.

2. Se debe promover un *planteamiento pedagógico global.*

La motivación de una renovación no debe ser estrictamente matemática, sino global.

* PASCUAL LLORENTE: «La formación del profesorado», Cuadernos de Pedagogía, n.º 88, abril 1982.

En nuestro grupo, en concreto, los profesores hemos hablado tanto de situaciones de clase, de los niños y su problemática, como de Matemáticas. Y ese aspecto no lo hemos querido olvidar jamás.

3. Así, una renovación auténtica de Matemáticas, no debería anular lo que debe ser el interés primordial: el niño y su problemática, el grupo-clase.

- Observemos que, cuando se introdujo la reforma de la enseñanza de las Matemáticas con la Matemática moderna, se redujo lo que podía haber sido una renovación, a un dictamen, desde arriba, basado fundamentalmente en los contenidos. Ahora, podemos caer en un error parecido si, mediante dictamen se quiere acentuar una metodología determinada o se *mitifican* unos instrumentos didácticos determinados. Lo cual haría pensar que la reforma, la renovación necesaria, se reduce «a su» conocimiento y ya está. Ese es el caso de lo que puede ocurrir con el ordenador. (Renovación = aprendizaje de la informática como contenido. No debe ser así).
- Observemos también cómo, hablando en términos generales, una renovación especializada puede hacer perder el objetivo real educativo. Y, es que cuando se quieren concretar unos objetivos generales que parecen claros, a las distintas materias, estamos demasiado acostumbrados a ver cómo se diluyen esos objetivos y se sigue un método –a todas luces– tradicional. Véase por ejemplo el desfase en «Programas Renovados» entre orientaciones y contenidos.
- Debemos, pues, poner mayor énfasis –sobretodo en EGB– en el conocimiento del niño, para que ello guíe hacia una mejor didáctica, *no basada en la adquisición formal de unos contenidos.*
- Pensamos que debe promoverse un proceso de debate. Lo cual implica la realización de experiencias diversas. Promover una riqueza de líneas que no implique uniformidad. En suma, disponer de medios para desarrollar esas líneas, el intercambio y la confrontación entre las mismas.
- Este debate, además, no debería ser «copiado», trasplantado, importado sin más, como se hizo con la Matemática moderna. Debemos incorporar los elementos que sean necesarios de las experiencias extranjeras, pero en ese debate, debe dejarse sentir la voz del maestro –en el caso de la EGB– al que muy a menudo se deja como sujeto pasivo en el rciclaje y en la confección de líneas generales (programas nuevos...).
  Se debe ser coherente en cada materia con el objetivo amplio de la EGB de dar unos conocimientos básicos para todos.

Concretamente, en relación con la formación permanente del profesorado, apuntaríamos algunas pistas:

A) **Diversificar las líneas de investigación en torno a la enseñanza de las matemáticas:** potenciando equipos en cada una de ellas, y creando forums de discusión: Matemáticas y psicología, Matemáticas y Pedagogía, Atención a nuevos contenidos (ampliación de la formación propia del maestro), Didáctica concreta (materiales, dinámica de trabajo), Interrelación con otras materias, Programas, Dificultades en el aprendizaje (discalculias...). Abrir, en suma, nuevos campos.

B) **Nuevos criterios para la formación inicial del profesorado:** prioridad de la didáctica y auténtico estímulo a la investigación como método.

No nos extenderemos en ese punto, ya que se ha convocado otra mesa redonda sobre ese tema, pero sí queríamos hacer constar la necesidad de:

- dar un nivel más sólido, culturalmente hablando,
- más amplio,
- no necesariamente más alto matemáticamente hablando,
- el objetivo principal es enseñar a enseñar.

C) **Se debe ofrecer un reciclaje real y efectivo.** Lo cual implica:

- No descalificar al profesor, dándole recetas, instrucciones concretas, etc., sino potenciar sus propios recursos (imaginación, creatividad, etc.).
- Eliminar las barreras, debidas al distinto status entre el licenciado y el maestro (formalmente en la EGB no existen).
- Diferenciar claramente los ciclos en cuanto a la psicología del niño, pero también por la situación distinta del maestro que da todas las materias en unos ciclos y puede especializarse en otros.
  Al primero la globalización le corresponde plenamente, en cambio al segundo se le plantea la necesidad de coordinación e interdisciplinariedad.
- Tender a la humanización de las matemáticas. Para ello introduciremos elementos histórico-culturales y descubriremos las matemáticas que hay en el entorno, las matemáticas de los oficios, los juegos, etc.

Organizativamente, vemos necesidades a distinto nivel:

a) Un reciclaje actual, casi de supervivencia, que exige:

- Auténtica ayuda por parte del especialista.
- Un tiempo amplio –quizás 2 o 3 años– para que se puedan observar los resultados.
- en el horario escolar (experiencia Sta. Coloma, Cornellá, etc.)
- con la colaboración de las instituciones (locales o autonómicas)
- previendo la continuidad de las experiencias iniciadas
- reciclando todo el centro escolar a través de los maestros participantes
- coordinado con la formación inicial
- organizado territorialmente por poblaciones o zonas
- estimulando y motivando al maestro para conseguir su participación voluntaria en una fase más avanzada.

b) Reciclaje de mantenimiento.

A través de cursos, de verano e invierno, en los que, de una forma cíclica debería participar todo el profesorado.

Seminarios, grupos de trabajo, con posibilidades reales de que su trabajo tenga proyección.

D) En la situación actual, las experiencias de renovación tienen grandes dificultades por cuanto en las escuelas los equipos no son estables, los departamentos son poco funcionales, etc.

El maestro se ve en la necesidad de apoyarse de manera casi exclusiva en el libro de texto y el programa.

Por eso pensamos que *una pieza importante en la renovación son los nuevos programas:* orientaciones didácticas y contenidos que se integren con la metodología.

Deben ponerse en práctica tanto los contenidos como los métodos, especialmente en los libros de texto, por lo que se debe controlar efectivamente la metodología, tanto en el libro del alumno como especialmente en las guías didácticas.

E) Para una participación del profesorado en la renovación es preciso:

- Motivar grupos que investiguen, proporcionándoles medios.
- Coordinar esos grupos.
- Potenciar los medios de intercambio: mesas redondas, centros de recursos, documentación, bibliotecas especializadas, premios a la investigación, etc.
  Ayudar al mantenimiento y difusión de las publicaciones en didáctica que existen actualmente en España.

En resumen, señalamos como fundamental la ayuda económica institucional y la participación activa del maestro, integrado en la elaboración de programas, como animador de reciclajes y llevando a la práctica experiencias de renovación en la escuela.

IDEAS QUE PERMITAN PERFILAR MODELOS SOBRE FORMACION DEL PROFESORADO EN EL AREA MATEMATICA

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton

1. De carácter eminentemente académico:
   - Cursillos a profesores que estén trabajando en un nivel, ciclo, etapa determinadas.
   - Conferencias sobre temas específicos incluyendo metodología y material ad-hoc.

2. De carácter activo y socializado:
   - Equipos de Trabajo.
   - Grupos de discusión.
   - Seminarios.

   Deberá haber siempre intercambio de ideas.

3. De observación y experiencia directa:
   - Observación in situ de profesores.
   - Intercambio de experiencias.
   - Potenciar encuentros de Equipos de Trabajo a nivel regional y nacional.
   - Potenciar toda experiencia.

- Posibilitar a profesores con experiencia demostrada en temas específicos para su intervención en la Didáctica de las Matemáticas en las E. U. de Formación del Profesorado de EGB.

4. Publicaciones.
   - Mantener pequeñas comunicaciones a nivel informativo.
   - Publicar métodos de enseñanza e indicar el material apropiado por temas y algoritmos concretos.
   - Publicar un Boletín informativo respecto a: Bibliografía, Material y su manejo referido a temas muy concretos.

Para finalizar diremos que es imprescindible siempre un diagnóstico inicial y tener muy en cuenta las variables de incidencia.

Ensayos para un aprendizaje con objetivos a largo plazo

María Elisa CARRILLO *

Mi propósito es exponer las líneas generales de un proyecto de currículum para alumnos de 12 a 16 años que el Grupo Cero de Valencia viene perfilando desde hace algún tiempo.

No ha de suponerse una completa objetividad en cuanto aquí diga, incluso puede que ni siquiera sea deseable esa objetividad. ¿Por qué? Pues porque un currículum incluye la globalidad de la experiencia matemática del alumno durante el período para el que el currículum se define; incluye lo que se enseña y cómo se enseña; incluye programa, pero también el modo de presentarlo en clase, las situaciones que lo acompañan y desarrollan, un estudio de los métodos más apropiados para cada una de las categorías de actividades que tienen lugar en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el modo de dar respuesta a las distintas capacidades y disposiciones de la sociedad en su conjunto. Y no creemos que nadie esté, por el momento, en condiciones de convencer a todos los demás de que determinados programas y métodos son los que reúnen las condiciones óptimas para la comprensión de un mundo dinámico y flexible y para la actuación en él. Durante mucho tiempo todavía seguirá habiendo discusión acerca de qué es lo esencial en la enseñanza y en el aprendizaje. Mientras tal cosa ocurra, somos de la opinión de que es preciso favorecer la emergencia de curricula rivales que reclamen atención (y seguimiento) para luego poder decidir acerca de sus cualidades y, si fuese el caso, recibir prioridad.

Cabe, pues, disculpar tal vez afirmaciones que, pareciendo dogmáticas si fuesen encaminadas a imponerlas a todos los profesores y todos los alumnos, no quieren más que expresar un punto de vista que deseamos someter a discusión y si se tercia –¿por qué no?– a polémica.

* Grupo Cero de Valencia.

Algunos datos

Gran número de alumnos de 12 a 16 años se ven urgidos en la actualidad a seguir unos programas cuyo contenido, por una parte, es demasiado amplio y difícil, y por otra descuida el desarrollo de importantes capacidades que los alumnos tienen y que son de más provecho que la mayoría de las cosas que están obligados a aprender.

A su vez, muchos profesores se sienten igualmente obligados a cubrir todo el programa aun cuando saben que algunos de sus temas son conceptualmente demasiado difíciles para una parte de los alumnos. Conscientes de ello, los profesores tienden a proponer exámenes que incurren en un círculo vicioso, ya que para hacerlos accesibles a los alumnos menos preparados proponen preguntas rutinarias sobre temas que, sin embargo, escapan a su comprensión.

Esto conduce a un tipo de enseñanza que, en lugar de favorecer el entendimiento, se reduce a la práctica monótona y poco estimulante de ejercicios destinados a responder a las preguntas de los exámenes. De este modo, en las circunstancias actuales la enseñanza de las matemáticas en esta etapa está dirigida a los alumnos de «dorada mediocridad», dejando de lado no sólo al 40 ó 50 por ciento de alumnos de más bajo rendimiento, sino también al 5 ó 10 por ciento de alumnos que pudiendo tener un rendimiento muy alto en matemáticas no reciben el impulso necesario, lo que es sin duda un auténtico despilfarro social.

¿Se consiguen, con todo, buenos resultados en ese escueto terreno al que queda reducida la actividad matemática de los alumnos? Todos sabemos que no. Variados tests de carácter «elemental» realizados en países diversos muestran tan enormes lagunas en la comprensión y puesta en práctica de rutinas y técnicas que hacen ineludible la búsqueda de comportamientos menos ineficaces. Vamos a dar cuenta de algunos de esos tests llevados a cabo durante el curso 1983-84 con alumnos de 7.º y 8.º de EGB y 1.º y 2.º de BUP. Muchas de las preguntas formuladas son idénticas a las hechas en otros lados y los resultados no son aquí peores que allí.

Bien entendido que solamente quedan reseñados los resultados y alguna explicación relativa a ellos. Muchas más son las pruebas que hay que hacer y con una mayor variedad de alumnos que la que ha estado dentro de nuestras posibilidades.

TEST NUMERICO

Alumnos: 7.º EGB, 8.º EGB, 1.º BUP

1. Coloca estos decimales por orden de menor a mayor. El más pequeño primero.

   0,3   0,1   0,7   06

2. ¿Cuántas veces es 0,1 más grande que 0,01?
3. ¿Qué número es 10 veces 0,5?

4. Pon estos decimales por orden de menor a mayor. El más pequeño primero.

   0,07   0,23   0,1

5. El número que es uno menos que 2010 es:
6. Escribe en cifras cuatrocientos mil setenta y tres
7. 6231   El 2 significa 2 cientos

   623100   El 2 significa 2

RESULTADOS (en %)

	7.° EGB (40 alumnos)			8.° EGB (61 alumnos)			1.° BUP (115 alumnos)		
	Bien	Mal	No cont.	Bien	Mal	No cont.	Bien	Mal	No cont.
1	52	48		65	35		63	37	
2	48	42	10	56	39	5	76,5	21	2,5
3	42,5	40	17,5	42,5	54,5	3	74	24	2
4	15	85		34,5	64	1,5	59	41	
5	90	5	5	92	3	5	100		
6	55	40	5	83,5	16,5		95,5	4,5	
7	27,5	65	7,5	64	31	5	75	21	4

Comentarios

- Si las preguntas podían parecer de antemano demasiado fáciles para alumnos de estas edades, los resultados hacen ver que no es así. Insistimos en que resultados similares se obtienen en las mismas pruebas realizadas en otros lugares.
- El porcentaje de aciertos crece en líneas generales al avanzar los cursos. Hay que recordar, no obstante, que el paso de 8.° de EGB a 1.° de BUP no es meramente el paso de un año, sino que numerosos alumnos en la edad de paso de 8.° a 1.° no pasan de hecho, porque la enseñanza es sólo obligatoria en EGB y no en BUP. Quizás, pues, las diferencias entre 8.° y 1.° están sobrevaloradas.
- La comparación entre las respuestas a las preguntas 1 y 4 es interesante y da que pensar.
- El porcentaje de alumnos que no contestan es notablemente inferior en BUP que en EGB.

TEST DE FRACCIONES Alumnos: 7.º EGB, 8.º EGB, 1.º BUP

1. Escribe el número que va en la caja

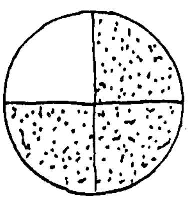
$$\frac{4}{10}=\frac{\square}{5}\,;\ \frac{6}{15}=\frac{\square}{5}\,;\ \frac{7}{\square}=\frac{21}{24}$$

2. $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$ =

3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

4. $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=$

5.



Raya 1/6 de la parte punteada de este disco.
¿Qué fracción del disco total has rayado?

RESULTADOS (en %)

	7.º EGB (40 alumnos)			8.º EGB (61 alumnos)			1.º BUP (195 alumnos)		
	Bien	Mal	No cont.	Bien	Mal	No cont.	Bien	Mal	No cont.
1	40	52,5	7,5	75,5	23	2,5	91	8	1
2	22,5	40	37,5	13	56	31	27	55,5	17,5
3	7,5	47,5	45	46	39	15	73	22,5	4,5
4	2,5	50	47,5	35	53	12	65	29,5	5,5
5	32,5	50	17,5	42,5	41	16,5	47	51	2

Comentarios

- Los cuatro comentarios hechos a propósito del test numérico se mantienen aquí.
- Pero hay además uno particularmente importante. Es el que deriva de la comparación de las preguntas 2 y 5.

Ambas preguntas son equivalentes, pero salta a la vista que para el preguntado distan mucho de ser idénticas. Por un lado el porcentaje de aciertos pasa de 22,5 a 32,5 en 7.º, de 13 a 42,5 en 8.º y de 27 a 47 en 1.º. Por otro lado, el porcentaje de alumnos que no contesta pasa de 37,5 a 17,5 en 7.º, de 31 a 16,5 en 8.º y de 17,5 a 2 en 1.º

Lo que parece desprenderse de ello es que la parte de la cabeza en la que muchos alumnos albergan el buen sentido está completamente separada de la parte en que se alberga su recuerdo de cómo se hacen operaciones; hay una separación entre *calcular* y *tener sentido común.*

TEST ALGEBRAICO Alumnos: 1.º y 2.º de BUP

A. Simplifica

1) $\frac{46}{4}$ 2) $\frac{a^2}{a}$ 3) $\frac{3x^2}{x}$

4) $\frac{a}{a^2}$ 5) $\frac{5x}{x}$ 6) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$

B. Halla x

1) $\frac{4}{x} = 3$

2) $\frac{30}{x} = 5$

3) $\frac{14}{x + 2} = 2$

4) $\frac{1}{2} x = \frac{3}{2}$

5) $1 - x = -\frac{5}{2}$

6) $1 - x = \frac{5}{3}$

RESULTADOS (en %)

A

	1.° BUP (32 alumnos) Bien				2.° BUP (66 alumnos) Bien			
1	90,5				98,5			
2	56,5				91			
3	37,5				80			
4	31				57			
5	50				86			
6	a+b 6,5	$(a+b)^2/a+b$ 22	a+2ab+b 19	otras 52,5	a+b 19,5	$(a+b)^2/a+b$ 15	a+2ab+b 39,5	otras 26

B

	1.° BUP (32 + 39 = 71 alumnos) Bien	2.° BUP (66 alumnos) Bien
1	60,5	53
2	71	91
3	49	82
4	62	81
5	49,5	65
6	38	48

Comentarios

A

- Que la índole de la tarea, simplificar, ha sido generalmente entendida lo muestran el 90,5 y 98,5 de aciertos en el primer ejercicio. Por ello son significtivos los bajos resultados obtenidos por los alumnos de 1.° en los restantes cinco ejercicios de carácter abstracto o literal.
- Al comparar el ejercicio 2 con el 4 se ve que son considerados como estructuralmente distintos por gran cantidad de alumnos, como lo muestra que se baje de 56,5 a 31 y de 91 a 57, respectivamente.

- Dejando aparte el 6, resulta que para ambos cursos el ejercicio más difícil es precisamente el 4.
- Mención especial merece el ejercicio 6 por varias razones:

i) 22 de 28,5 en 1.º y 15 de 34,5 en 2.º se limitan a escribir $\frac{(a+b)^2}{a+b}$ cuando en el ejercicio 2 se tenía la misma estructura y los resultados fueron mucho mejores; lo que confirma las dificultades que ofrece la «percepción» algebraica aun en situaciones elementales.

ii) La respuesta, absolutamente incongruente desde un punto de vista algebraico, $a + 2ab + b$, es sin embargo «psicológicamente» atractiva, como lo atestiguan el 19 y 39,5 de respuestas. Aún más, ese 39,5 proviene de 2.º curso.

iii) Por lo demás, hay una clara maduración algebraica con el paso de 1.º a 2.º

B

- La diferencia entre solución no entera sigue creando problemas aun pasada ya la EGB, como lo confirman las preguntas 1 y 2 que dan de 60,5 a 71 en 1.º y de 53 a 91 en 2.º
- Análoga consideración cabe hacer entre números positivos y negativos, que es lo que revelan las preguntas 5 y 6 con el paso de 49,5 a 38 en 1.º y de 65 a 48 en 2.º. En el 5, x es positivo; en el 6, x es negativo.
- Si se quiere uno mostrar pesimista basta con que subraye que 62% en 1.º y 52% en 2.º hacen mal el 6, es decir, $1 - x = \frac{5}{3}$.
- Lo que es más importante en todo este bloque de preguntas es que siendo todas ellas especialmente indicadas para hacer los cálculos «en la cabeza», la tendencia general es a hacer los cálculos «en el papel». En algunas entrevistas personas con alumnos se ha constatado que la palabra «ecuación» está asociada a «trucos algebraicos». Pero es ahí donde fallan.

TEST DE OPERACIONES FORMALES

Alumnos: 7.º, 8.º EGB, 1.º, 2.º BUP

1. $p + r + s = p + r + t$
   a: es siempre verdad
   b: nunca es verdad
   c: es verdad algunas veces, cuando...
2. $m + n + 2k = m + n + 4k$
   a: es siempre verdad
   b: nunca es verdad
   c: es verdad algunas veces, cuando...
3. ¿Qué es mayor, 2x ó 2 + x? Explica
4. ¿Qué puedes decir acerca de c si $c + d = 10$ y $c < d$?
5. Si $r = s + t$ y $r + s + t = 30$, $r =$

RESULTADOS (en %)

	7.º y 8.º EGB (139 alumnos)		1.º y 2.º BUP (344 alumnos)	
1	Bien: 37		Bien: 60	
2	Bien: 17		Bien: 26	
3	Comprensión total: Respuesta: «Depende del valor de x» 0	Comprensión parcial: Excluyen el 0 y el 1 ó el 1 y el 2: 2	Comprensión total: 17	Comprensión parcial: 16
4	Respuesta «c < 5» 0	Respuesta 1, 2, 3, 4 ó 0, 1, 2, 3, 4 ó c < 4 14	Respuesta «c < 5» 21	Respuesta 1, 2, 3, 4 ó 0, 1, 2, 3, 4 ó c ≤ 4 26
5	Bien: 10		Bien: 45	

Comentarios

Si los resultados de este test se confirman una vez realizado con una muestra de alumnos significativamente fiable, habrá varias consecuencias de importancia para la enseñanza. Son muchas las cosas que pueden derivarse ya, sin embargo, sin mucho margen para el error:

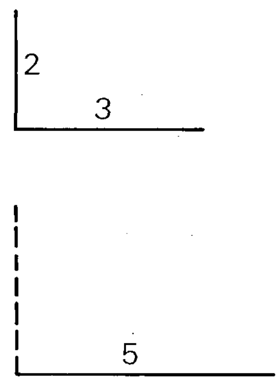
- Las preguntas formuladas permanecen fuera del alcance del alumno medio de EGB. Sin ánimo de provocar polémica acerca de las teorías de Piaget sobre las etapas de desarrollo, parece que una de las razones de este fracaso (¿es esta la palabra adecuada?) ha de encontrarse en que la etapa formal media se sitúa en los 13-14 años y la etapa formal tardía en los 15-16.
- Insistimos en no considerar esa como la única razón, pero dentro del bloque 1.º-2.º de BUP los resultados obtenidos por los alumnos de 1.º han sido significativamente inferiores a los obtenidos por los de 2.º
- Como lo muestran las respuestas a la pregunta 2, el número cero es un invitado al que pocos prestan atención.
- La pregunta 5 es simplemente *prematura* para casi todos los alumnos de EGB. Lo que eso representa es digno de tenerse en cuenta para prevenir a propósito de una enseñanza formalizada y algebraizada en exceso desde edades demasiado tempranas.
- Pese a todo el esfuerzo que se hace por ampliar paso a paso el campo de los números, de naturales a enteros a racionales a reales, las respuestas a las preguntas 3 y 4 llaman la atención sobre un hecho que sería equivocado infravalorar, esto es, que cuando a un alumno de EGB se le propone que considere un número o varios números su pensamiento se centra –de manera exclusiva, dicen los datos extraídos de este test– en los números naturales. Ninguno de los 139 alumnos de esta etapa consultados ha tenido presente que podía tratarse de números racionales, ni aun enteros.

Una observación similar, aunque relativamente atemperada, puede hacerse sobre 1.º y 2.º de BUP.

- Por preocupante que sea el punto anterior, hay algo que puede que lo sea aún más. En la pregunta 3 se pide que se dé una explicación a la respuesta que uno proponga. Pues bien, de entre los alumnos de 1.º y 2.º de BUP consultados, el 43% escriben «es mayor 2x porque al multiplicar por 2 da mayor que al sumar 2».

TEST DE SEMEJANZA　　　Alumnos: 7.º y 8.º de EGB, 1.º y 2.º de BUP

¿Cuánto debe medir la línea que falta si el dibujo de abajo ha de ser de la misma forma pero de mayor tamaño que el de arriba?



RESULTADOS (en %)

7.º y 8.º de EGB (61 alumnos)	1.º BUP (71 alumnos)	2.º BUP (66 alumnos)
Bien	Bien	Bien
9	48	22

Comentarios

- La aparente sencillez del test contrasta con la pobreza de los resultados. No deja de chocar que los alumnos de 1.º hayan quedado mejor que los de 2.º. Todos los tests realizados en este capítulo lo han sido con un número pequeño de alumnos; pero en esta en particular parece muy conveniente una muestra bastante más amplia para poder sacar alguna conclusión definitiva.
- No obstante, hay aspectos que dejan poca duda acerca de lo engañoso que sería no prestar atención aun a estos resultados provisionales. Consideremos algunos:

i) La realización con éxito supone considerar $\frac{3}{2} = \frac{5}{x}$ y después pasar a hallar x. Ahora bien, si se mira el ejercicio B.1 del test algebraico, en el que dado $\frac{4}{x} = 3$ se pide hallar x, y se observan los resultados obtenidos en 1.º y 2.º cursos, estos son 60,5 y 53.

ii) Por otro lado parece que debe considerarse como hecho notable que la semejanza de forma no esté en correspondencia «intuitiva» con la proporcionalidad numérica, ya que nada menos que un 60% de los alumnos de 2.º y un 42% de los de 1.º han dado como respuesta el número 4, considerando a sin duda que la cadencia 3 → 2 en la figura pequeña debe tener en la grande la correspondiente cadencia 5 → 4.

iii) La pregunta objeto del test parece que sobrepasa la capacidad de la enorme mayoría de los alumnos de EGB.

De ser esto así –y ésta es otra de las razones para realizar este test con numerosos alumnos de 11 a 14 años– supondría una llamada de atención hacia una ponderación cuidadosa de las posibilidades de aprendizaje de la semejanza y la proporcionalidad.

Creo, no obstante, que sería un grave error tomar estos resultados como justificación de que los alumnos deben dedicar todo su tiempo a reaprender todo esto que no saben, a aprender mejor «lo básico». La propuesta que nuestro proyecto contiene es muy distinta, porque altera el concepto de lo básico y busca procedimientos más acordes con los intereses del alumno y de la sociedad ahora y en el futuro, y más eficaces que los que tan pobres resultados han dado en el pasado.

Buscar alternativas

Edward de Bono («De Bono's Thinking Course», p. 30: Ed. B. B. C.) nos sitúa muy bien en el asunto: «Hace algún tiempo que tenía que tomar muy temprano un vuelo de Los Angeles a Toronto, de modo que puse el despertador de la habitación del hotel a las 4,30. Era uno de esos despertadores que acompañan a un aparato de radio. A las 4,30 sonó la alarma. Respetuoso con mis vecinos y teniendo en cuenta la hora tan temprana apreté el botón «snooze» que concede unos pocos minutos más de sueño. No sirvió de nada. Apreté la tecla «off». No sirvió de nada. Puse la alarma a radio en lugar de a despertador. No sirvió de nada. Quité el enchufe de la red. No sirvió de nada. Puse una almohada encima del reloj. No sirvió de nada. En tal punto no parecía haber más que dos opciones: o llamar a recepción y preguntar cómo callar el reloj o arrojarlo en un cubo de agua. Fue en ese momento –y por azar– cuando me di cuenta de que el ruido no procedía del reloj radio en absoluto, sino de un despertador que suelo llevar conmigo, que había puesto a esa hora y del que me había olvidado».

«La moraleja de esta historia –sigue de Bono– es que en ningún momento me paré a considerar si había una fuente alternativa del ruido. Me parecía tan obvio que debía de ser el reloj radio que no busqué otros motivos. La dificultad no estaba en hallar una alternativa, sino en *buscar* una.»

Alternativas para evitar el progresivo rechazo de las matemáticas que lleva a tantos alumnos a una constante disminución de la confianza en sí mismos. *Cualquiera que sea su competencia y cualquiera que sea el nivel de sus* *conocimientos, no debe aceptarse que los alumnos experimenten un fracaso continuo en matemáticas.*

Y alternativas para evitar a toda costa que aquellos alumnos que puedan seguir con éxito las tareas básicas pierdan interés y entusiasmo al no verse estimulados con trabajos e investigaciones que les permitan alcanzar el conocimiento y la comprensión matemáticas acordes con sus reales posibilidades.

Buscar alternativas no consiste en perfeccionar y analizar los instrumentos de visión, sino en cambiar el emplazamiento del punto de vista para ver de otra manera los tres objetos centrales –el alumno, las matemáticas que va a aprender, los métodos de enseñanza– y las relaciones entre ellos. Desde el emplazamiento en el que nosotros estamos las cosas se ven así:

Las Matemáticas

La cantidad de matemáticas que una persona necesita para vivir en «el mundo real» es muy pequeña. Aparte una familiaridad imprescindible con los números, las formas del espacio y cierta capacidad para clasificar, ordenar y codificar, ningún tema de matemáticas es importante por sí mismo en la enseñanza. Su importancia radica en su capacidad potencial para desarrollar en los individuos la facultad de dar sentido al mundo en el que están y a la vida que viven y la flexibilidad necesaria para evaluar una situación y reorganizarla con toda la profundidad que sea precisa.

Como profesores, se supone que hemos aceptado la obligación de transmitir de manera tan efectiva como nos sea posible aquella parte de las matemáticas que sea más digna de ser transmitida. El problema está en seleccionar de entre la enorme amplitud del conocimiento los aspectos que sean más generales, más multivalentes, más perspectivos.

Más que el conocimiento específico de determinados conceptos y técnicas, lo que puede servir para vida a un joven estudiante son ciertas capacidades básicas que se consolidan mediante la *actividad* matemática. A saber, generalizar, abstraer, hacer hipótesis y someterlas a prueba, explorar, tomar decisiones, expresarse con precisión, comunicar con claridad las propias ideas, proponer ideas nuevas, hacer frente a situaciones problemáticas con la confianza de que pueden ser comprendidas y, en su caso, resueltas.

Todo alumno al terminar sus estudios medios debería haber tenido la experiencia propia de lo que las matemáticas son, tanto si después va a estudiar más matemáticas como si, cosa que ocurrirá en la mayoría de los casos, va a dedicarse a otras actividades. Y esa experiencia no está condicionada por la complejidad de los conceptos; dos o tres ocasiones en las que, aun con técnicas y conceptos sencillos, actúe como matemático, se haga preguntas, explore, investigue, tome decisiones y comunique con claridad el resultado de todo ello son probablemente suficientes para que aprecie en qué consisten esencialmente las matemáticas.

El alumno. Hay una leyenda que persiste en hacer creer que a los adolescentes no les interesa nada que no sea su propio mundo, a menudo tan hermético. No compartimos opinión tan pesimista que probablemente tiene sus raíces en algo que sí es cierto: que al adolescente no le interesan las mismas cosas que al profesor como adulto le interesan. Así, la interpretación de una factura de la luz o del teléfono, las reperscusiones históricas de la polémica Newton-Leibniz, el atractivo de un riguroso tratamiento deductivo, la conexión a toda costa con la «realidad» (sin tener en cuenta que la realidad es muchas veces excesivamente trivial y otras excesivamente compleja para las matemáticas de esta etapa), pueden ser interesantes para el profesor, pero no serlo para la gran mayoría de los alumnos. De modo que la mejor de las intenciones puede ir acompañada inconscientemente de una imposición del punto de vista del profesor sobre el punto de vista del alumno que esté muy próxima al adoctrinamiento.

Toda experiencia educativa debería involucrar un proceso creador que tenga lugar a la vez en la actividad de los alumnos y en la de los profesores. Cada uno en la medida de sus posibilidades y de sus conocimientos. Eso sólo puede darse en *zonas de encuentro matemático* en las que tanto el profesor como el alumno hallen un interés común. Por fortuna para nosotros, pocas materias, por no decir ninguna, ofrecen tan variadas ocasiones para ello. Imaginación, estética, desafío a la inteligencia, autonomía, libertad de iniciativa, experimentación, juego, sensibilidad lógica, se combinan en las matemáticas de manera posiblemente única en la historia de la evolución humana.

Dado que la mayoría de los alumnos van a usar pocas Matemáticas (con mayúscula) a lo largo de sus vidas y dado que también una mayoría sufren las matemáticas escolares como un fracaso, debería ser un objetivo prioritario el que los alumnos disfruten con las matemáticas. Son tantas las matemáticas y están en tantos sitios que no hay ninguna persona que no sea sensible a ellas en una u otra de sus manifestaciones. Lo que se precisa es buscar para cada alumno qué partes de las matemáticas son susceptibles de proporcionarle esa satisfacción a la que tiene derecho.

En suma, *el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas ha de estar más en el alumno que en la materia.*

Aprender y enseñar. Hay capacidades de las que podemos disponer en un momento dado y hay también ~~capacidades~~ que todos poseemos, pero que no somos articuladamente conscientes de ello. Es esencial para el profesor reconocer qué capacidades tiene disponibles cada alumno y qué otras necesitan ser activadas.

Aprender tiene que ver con *construir*, es decir, dotar de significado; y enseñar tiene que ver con *activar* funcionamientos, activar capacidades.

En cada problema, situación o conceptos nuevos el profesor debe localizar las puertas de entrada, los senderos para cada estudiante, las dificultades específicas, los caminos estériles. Nada mejor para eso que adentrarse uno mismo en el problema y analizar los propios procesos de resolución. Cuando el profesor reconoce el largo tiempo que lleva hacerse cargo de una situación nueva y lo incierto del camino que se emprende, sabrá esperar, sabrá dejar que el alumno se tome su tiempo ante un problema, sabrá contener su tendencia a intervenir demasiado a menudo.

Son muchas las investigaciones que confirman que los métodos de más éxito para lograr una enseñanza efectiva y significativa emplean este «conflicto cognoscitivo» en lugar de la acumulación de técnicas, algoritmos y conceptos empaquetados ya para su uso. En la primera de las tres fases que pueden distinguirse en este método, el profesor elige un problema por el que el alumno pueda caminar, *pero no sin dificultad,* y prevé en lo posible los obstáculos, contradicciones o bloqueos que el alumno pueda encontrar con su procedimiento. En la segunda fase, el profesor presenta ese problema y el alumno emplea su procedimiento natural. En la tercera, el profesor está atento para descubrir el procedimiento empleado y los obstáculos que han aparecido e intervenir en el momento oportuno, sugiriendo el alumno un nuevo procedimiento que le permita franquear el obstáculo o emprender nuevas vías.

En este método se comprende que sea esencial el diseño cuidadoso de situaciones que incluyan problemas que faciliten una *discusión* que permita poner en evidencia los errores conceptuales para que puedan ser corregidos por el alumno.

De seguir este método de conflicto cognoscitivo, la labor de mayor importancia que ha de cumplir el profesor es muy probablemente la de decidir cuándo y cómo debe intervenir durante el transcurso de la actividad matemática de los alumnos. Y en ello reside a nuestro juicio una de las áreas de la educación matemática que reclama más atención en el presente y en un futuro previsiblemente largo.

A largo plazo

El hecho de desplazar de la materia al alumno el centro de gravedad en la enseñanza de las matemáticas significa activar de manera expresa el desarrollo de *actitudes personales* como éstas:

- Confianza en sí mismo, con la consiguiente disposición para aceptar responsabilidades. Confianza en que el pensamiento da resultado.
- Capacidad de disfrutar pensando, incluso cuando no se consigan resultados completamente satisfactorios.
- Capacidad para tomar decisiones.
- Interés por el trabajo que se hace. Capacidad para apreciar los propios progresos.
- Flexibilidad para tratar las situaciones. Para darse cuenta de que cualquier tratamiento no es sino uno entre muchos, en la mayoría de los cuales ni siquiera ha pensado.
- Paciencia y perseverancia en la búsqueda de la solución a un problema.
- Disposición y habilidad para cooperar con otros.
- Autonomía intelectual frente a la información y organización provenientes de personas y organismos que están fuera del control de uno.

Estas cosas ¿qué tienen que ver con las matemáticas? Naturalmente, no se pretende ninguna exclusiva, pero la contribución de las matemáticas puede ser aquí muy grande. ¿Y cómo se evalúan? No con una nota, desde luego; y no a corto plazo.

Tampoco puede buscarse a corto plazo algo con lo que muchos profesores se darían por satisfechos; más que saber tal o cual concepto, tal o cual algoritmo, uno preferiría que los alumnos tuviesen un *sentido de la apreciación de las matemáticas en:*

- La regularidad, la cadencia y la sorpresa del número.
- El atractivo y la sugerencia de las formas geométricas y plásticas.
- La belleza y la elegancia de muchas de sus demostraciones.
- La manera sistemática a la vez que imaginativa con la que afrontan los problemas.
- La conexión histórica de las matemáticas con las otras ciencias y con la tecnología.
- La simetría, la regularidad y la ordenación presentes tanto en el interior de las matemáticas como en el mundo exterior al que a menudo se refieren.
- La relación de las matemáticas y la vida. Entendiendo este último término en un sentido mucho más amplio que lo que suele llamarse vida cotidiana en su carácter más pragmático. Incluye, por ejemplo, ciertas zonas de la literatura y el arte; y se da por sobreentendido que la imaginación es una de las formas de la realidad.

Si el currículum da más importancia a estar familiarizado con la generalización y la analogía como estrategias de resolución de problemas que al conocimiento de la suma de los términos de una sucesión geométrica o del teorema del coseno, eso supone un notable cambio de perspectiva que hace ver las cosas también a largo plazo. En efecto, el que el currículum contenga una sección dedicada al aprendizaje de la estrategia de generalización no implica en absoluto que haya de tratarse en clase como un tema para dar en cuatro o seis semanas en tal curso específico. Muy al contrario, las estrategias generales requieren un aprendizaje a largo plazo y su práctica debe extenderse a todo el período que cubre el currículum. Es el profesor quien debe decidir qué problema, qué situación es la adecuada para sus alumnos, y quién debe meditar el momento de proponer este tipo de trabajo y la discusión que desea realizar posteriormente.

De aquí derivan también claras implicaciones relativas al modo como los alumnos esperan ver evaluado su trabajo. En efecto, si el profesor ha dispuesto que el trabajo a desarrollar durante tres semanas sea el de realizar investigaciones o resolver problemas para la comprensión de que el uso sistemático de la analogía amplía la capacidad inicial para afrontar situaciones nuevas, tiene poco sentido que al final de ese período proponga un examen de estructura tradicional en el que la memoria desempeñe un papel importante. Los alumnos se verán defraudados, y –lo que es peor– serán reacios en el futuro a un tipo de trabajo sobre el que se les dice que se espera de ellos el desarrollo de determinadas capacidades que han de adquirirse sin prisas y del que, sin embargo, son juzgados por el éxito o el fracaso inmediatos.

A un cambio grande en los objetivos a evaluar corresponde un cambio grande en el modo de evaluarlos. Si uno de los objetivos es fomentar en los alumnos de cualquier edad el gusto por los números, sus propiedades y las relaciones existentes entre ellos, hay que reconocer que esa no es cosa que se consiga por lo general en unos cuantos días, no es un objetivo operativo cuyo cumplimiento deba ser medido mediante un examen ad hoc. El profesor debe ser perfectamente consciente de ello y de que para fomentar una afición no hay mejor evaluación que la del apoyo y el estímulo, y el alumno debe saber igualmente que se va a valorar más la afición que el éxito. Lugar habrá también, por supuesto, en el que sea conveniente valorar más la maestría que la voluntad.

Contenidos: cuatro categorías

El reconocimiento de que estos cuatro elementos:

- Hechos
- Algoritmos y técnicas
- Estructuras conceptuales
- Estrategias generales

involucran distintos aspectos de la enseñanza y requieren atención separada planea sobre la mayor parte de la investigación sobre enseñanza. Bell, Costello y Kuchemann lo resaltan en su «Research on Learning and Teaching» y afirman que el desarrollo de una enseñanza que incluyese los cuatro aspectos representaría un importante avance. En un principio, lo más sobresaliente de ese avance no serían los problemas que resuelve, sino los problemas que plantea, porque son del tipo más saludable para la enseñanza: ¿qué procedimiento utilizar en esta situación? ¿este método que es bueno para enseñar esto será también bueno para enseñar aquello? ¿cómo me conviene organizar hoy la clase si lo que vamos a discutir es la importancia de hacerse un plan cuando se va a resolver un problema? ¿es mejor trabajo individual o trabajo en pequeños grupos para un mejor aprendizaje del trazado de gráficas? ¿cuáles son las cosas que quiero que descubran por sí mismos y sobre cuáles otras debo dar información para el aprendizaje del concepto de semejanza?

Unos cuantos ejemplos de cada una de las cuatro categorías creo que bastarán para hacer evidente que se aprenden de diferente forma y han de enseñarse de diferente forma.

Hechos. Son piezas de información esencialmente inconexas o arbitrarias: la pendiente de una recta es el cociente entre segmento vertical y segmento horizontal, y no al revés; una división de polinomios «acaba» cuando llegamos a uno cuyo grado es menor que el grado del divisor; π es el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro; un número natural mayor que 1 es primo cuando tiene dos y sólo dos divisores.

Aunque no pueden recibir apoyo directo de una estructura conceptual eso no significa que no haya que hacer cuanto sea posible porque no estén aislados. Su aprendizaje será más significativo si se hace que ganen al menos alguna «justificación» en el interior del aprendizaje de algoritmos, durante el desarrollo de una estructura conceptual o como pieza de conocimiento necesaria en el estudio de una situación o la resolución de un problema.

De todas maneras, la memoria es quien lleva la carga principal en el aprendizaje de hechos; de ahí que haya que tener en cuenta lo que las investigaciones relativas a los mecanismos de la memoria puedan indicarnos.

Algoritmos. Informalmente hablando, un algoritmo es una colección finita y precisa de instrucciones que, cuando se ejecutan en el orden especificado, producen el resultado correcto deseado: para hallar el centro de una circunferencia que pasa por tres puntos dados, se empieza trazando las cuerdas...; para ordenar de menor a mayor 0,07, 0,23, $0,\acute{1}$, se empieza comparándolos de dos en dos,...; para construir una espiral cuadrada,...; para hallar las raices de una ecuación de 2.º grado completando un cuadrado empiezo...; el funcionamiento de un semáforo se reduce a...; para saber cuál es el ángulo agudo que tiene como seno 0,3, lo primero que debo hacer es...

Los rasgos esenciales de un algoritmo son: i) que hay principalmente acciones o transformaciones en lugar de piezas de conocimiento, ii) que su tipo de conexión es el de una cadena. No hay que ocultar que con frecuencia los eslabones de esa cadena son, en mayor o menor grado, arbitrarios. Pero que tampoco es infrecuente, ni mucho menos, que el aprendizaje de un algoritmo o una técnica se consiga mejor mediante la corrección de errores y la discusión de contradicciones que desplazándose a lo largo de un camino libre de obstáculos.

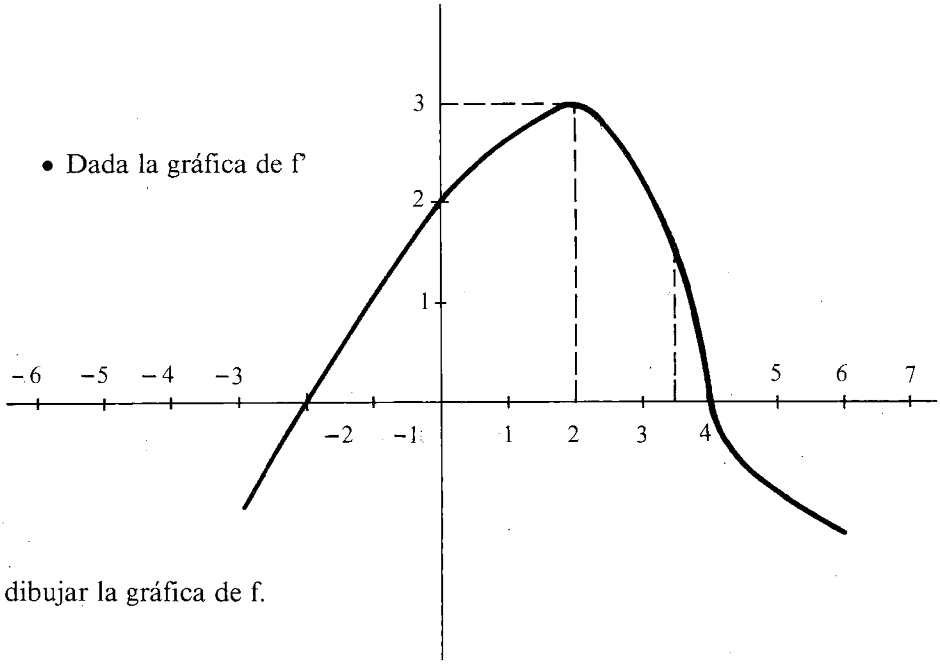
El aprendizaje de un algoritmo debe ser, pues, efectivo. Esto es, debe llevar al dominio del algoritmo a través de la práctica y la repetición que sean necesarias. Pero eso no significa que el método de conflicto cognoscitivo deba ser un ausente perpetuo en ese aprendizaje. Muchos algoritmos pueden aprenderse de manera más estable sin van acompañados de una reflexión «externa» a ellos.

Estructuras conceptuales. Son redes en las que conceptos, relaciones y algoritmos están estrechamente conectados. Esta conexión estructural produce una estabilidad en la memoria, de modo que cuando un elemento se desvanece puede ser recuperado de manera relativamente fácil; y un nuevo elemento que se añada hace el todo más estable que antes.

Ejemplos: La comprensión de que la gráfica de la función seno es periódica se produce a través de una red de conceptos, relaciones y técnicas.

- Es una estructura conceptual lo que proporciona el reconocimiento de que un diagrama cartesiano es inapropiado para representar la composición de funciones.
- Comprender que 0,49 = 0,5, entraña una conexión conceptual de los conceptos de infinito, expresión decimal y razonamiento indirecto que va más allá del mero seguimiento de una colección de instrucciones.
- Otro tanto ocurre con el conocimiento de que cuando un número es mayor que cero y menor que uno, sus potencias son tanto más pequeñas cuanto mayor es el exponente, lo cual sitúa la gráfica de la función $y = 0,3^x$ dentro de una estructura conceptual; cosa que no pasa cuando tal gráfica se dibuja «punto a punto».
- Lo que puede empezar siendo un algoritmo, obtener por pruebas sucesivas con la calculadora las raíces de una ecuación de segundo grado, abre el camino de una estructura conceptual en la que las ecuaciones no polinómicas se ven con una perspectiva más clara y confiada.

- Dada la gráfica de f'



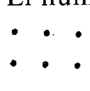
dibujar la gráfica de f.

- $3^{1/2} = \sqrt{3}$; porque $a^{1/2} \times a^{1/2} = a^{1/2 + 1/2} = a$; luego $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
  Huelga decir que no tiene, sin embargo, mucho sentido, intentar clasificar con rigidez bajo tal o cual categoría una faceta determinada de conocimiento. En efecto, $3^{1/2} = \sqrt{3}$ puede ser para un individuo un hecho, es decir, una pieza de información arbitraria y desconectada, y para otro individuo formar parte de una estructura conceptual, como acabamos de señalar. Calcular las raíces de una ecuación de segundo grado puede ser una tarea recordada por algunos como un hecho, realizada por otros como un elemento de una estructura conceptual interconexa.
- No actúan sobre los datos de la situación dada, sino sobre la propia actividad de la persona. Son programas que operan sobre otros programas.
  Guían la elección que una persona hace de qué algoritmos y técnicas usar y qué conceptos y estructuras poner sobre el tablero en el curso de la resolución de un problema o de una investigación. Favorece la capacidad de tratar un problema con la confianza de que la exploración y el ensayo pueden conducir a una solución e incluyen el reconocimiento de que una vez obtenido un resultado es preciso someterlo a prueba revisando los argumentos y procedimientos empleados.

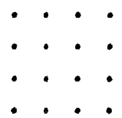
Ejemplos:

- Enfrentado al problema de hallar

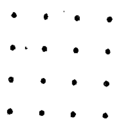
  a) El número de triángulos que tienen sus vértices en la trama



b) El número de triángulos que tienen sus vértices en la trama



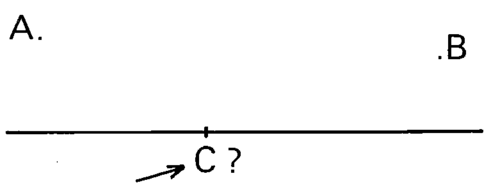
c) El número de cuadriláteros que tienen sus vértices en



El estudiante debe estar atento no solamente a encontrar esos números sino a buscar un procedimiento fiable por el que sepa que no cuenta de más ni de menos y a preguntarse si el procedimiento empleado en un caso es extensible a los otros. Probablemente necesite asimismo tomar la decisión de precisar lo que es un cuadrilátero.

- Una vez resuelto el problema «Averiguar cuál es el número de preguntas máximo que son suficientes para acertar con seguridad un símbolo de un total de 16 símbolos», y propuesto el nuevo problema «determinar el número máximo de pesadas en una balanza de dos platos, que habrá que realizar para saber cuál es la única bola que pesa un poquito menos que las otras de un total de 16", el estudiante tiene como tarea esencial descubrir lo que ambos problemas tienen de semejante y lo que tienen de diferente.
- Ante el siguiente problema:

«Hay dos pueblos A y B y se quiere poner una gasolinera C en la carretera general, de manera que el recorrido ACB sea el mínimo posible.
¿En qué punto de la carretera ha de ponerse la gasolinera?».



El estudiante puede elegir, o bien el método de ensayo y error (tomar diversos puntos en la carretera y hacer medidas), o bien hacer hipótesis acerca de, digamos un par de puntos en la carretera que le parezcan «intuitivamente» los indicados; o bien comenzar preguntándose si ha resuelto algún problema similar; o bien buscar un método analógico –espejos o rayos de luz–, etc.

En lo que hace a la enseñanza de estructuras y estrategias, es esencial, desde nuestro punto de vista, optar por un aprendizaje en el que los problemas y las investigaciones tengan un papel central y en el que el método del conflicto cognoscitivo pueda desplegar sus mejores virtudes.

Problemas. Investigaciones

Un problema es una situación que implica un objetivo o propósito que hay que conseguir, hay obstáculos para alcanzar este propósito, y requiere deliberación, ya, que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo. La situación es habitualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema.

Un problema:

- Representa un desafío a las capacidades deseables en un matemático.
- No deja bloqueado de entrada a quien lo ha de resolver, es decir, la persona que lo acepta reconoce que el problema está a la altura de sus posibilidades.
- Tiene interés por sí mismo, independientemente de que esté relacionado con otras disciplinas o con la vida cotidiana o de que tenga alguna dificultad práctica.
- Estimula en quien lo resuelve el deseo de proponerlo a su vez a otras personas.
- No es un problema «de trampa».

La resolución de problemas es un proceso, no un procedimiento paso a paso o una respuesta que hay que encontrar; es un viaje no un destino. Y aunque a una mirada poco atenta puede parecer que esta actividad es generalmente caótica o, como poco, desordenada, lo cierto es que por lo que se ve en los buenos resolvedores de problemas y por los análisis que muchos de ellos han hecho de sus propios procesos, es innegable que hay «un método en su locura».

Una confirmación práctica de que, hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito está en que hay ciertas etapas, cadencias y técnicas cuyo reconocimiento consciente y su puesta en práctica por el solucionador del problema es generalmente admitido que proporciona, si no una garantía, al menos una confianza en que no está uno carente por completo de herramientas.

Siempre que se acepte que el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo y que no se adquiere de la noche a la mañana, el profesor puede servir de mucha ayuda en la consolidación del uso sistemático de tales herramientas.

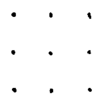
Ciertas técnicas suelen servir de ayuda:

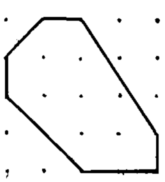
- Construir tablas y buscar patrones o tendencias.
- Codificar algebraica, o numéricamente los datos o situaciones del problema.
- Resolver primeramente un problema análogo más sencillo.
- Hacer un dibujo o diagrama para ilustrar el problema o parte de él.
- Explorar distintas vías, no limitarse a un solo camino.
- Saber dejar «dormir» un problema, y, complementariamente, saber «agarrarse» a un problema y no soltarlo. Y saber cuándo es conveniente hacer una u otra de las dos cosas.

Lo esencial de una *investigación* es que el alumno ha de hacerse *preguntas* que determinarán el camino que va a seguir en su trabajo y ha de tomar *decisiones* que configuran las posibilidades que esas preguntas abran.

No son, en cambio, factores necesarios en una investigación el que tenga una especial dificultad intrínseca, ni que sea de larga duración, ni que haya de ser emprendida individualmente, ni, sobre todo, que deba carecer del asesoramiento del profesor.

Algo que empieza siendo un problema puede terminar adquiriendo el carácter de una investigación. En el ejemplo de problema tratado anteriormente. ¿Cuántos triángulos hay que tengan sus vértices en la trama





... Si además de lo ya considerado se pregunta ¿hay cuadriláteros con cinco vértices? ¿puede haber dos lados en una línea recta separados por un vértice? ¿cuentas sólo los cuadriláteros convexos o también los cóncavos? El alumno ha de tomar decisiones sobre todo ello y puede luego plantearse más preguntas. ¿Cuántos pentágonos hay en una trama 5 × 5? ¿y en una trama de 4 × 4? Un polígono puede tener 3, 4, 5, 6, 7 lados en una trama 5 × 5, pero también podemos encontrar otros polígonos con más lados. ¿Cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en ese trama? ¿Y en otras tramas, 6 × 6, n × n?

Pero también ocurre que algo que se propone como una investigación sea transformado por algunos o muchos alumnos en una pregunta única de carácter cerrado. Es lo que ocurriría si ante la siguiente propuesta «tienes un trozo de cuerda de 36 cm. para hacer un polígono. Investiga posibilidades», si ante esta pregunta decimos, un alumno se limitase a considerar polígonos regulares o aún equiláteros.

Esta es una de las razones que hacen difícil la perfecta clasificación problema-investigación. Por eso quizás sería preferible hacer una clasificación menos imperativa y pasar del «*ha de* hacerse preguntas y *ha de* tomar decisiones» al «cuando un alumno se hace preguntas y toma decisiones está en el terreno de una investigación?

Si se toma esta vía más pragmática y flexible, el profesor tiene que elegir situaciones en las que prevea que es probable que el alumno tenga «necesidad» de hacerse preguntas y tomar decisiones. Y entonces hay una tarea que el profesor debe realizar, si cabe hacerse preguntas porque la situación sea abierta o ambigua ha de *animar* a que el alumno adquiera el gusto por hacerse preguntas y tome la situación en sus propias manos y guste de la responsabilidad de decidir.

Quizás a lo largo de este trabajo aparezcan demasiados interrogantes, pero, el aprendizaje de las matemáticas mejora significativamente si se cambian sustantivos por verbos, es decir, si se reemplazan, por ejemplo, conceptos por concebir, definiciones por definir, generalizaciones por generalizar, simbolizaciones por simbolizar. Si se cambia, en una palabra, la recepción por la acción.

«Sólo la ardiente curiosidad es creativa, ella nos lleva directamente al corazón mismo de lo desconocido...».

(Alexandre Grothendieck. Ver Bouvier, pág. 133).

Valencia, septiembre 1984.

Siete estrategias para plantear problemas en Geometría

David S. Fielker *

Uno de los aspectos más curiosos de las Matemáticas, es el ritmo tan rápido de cambio de las ideas. Después de haber presentado el título de esta ponencia, *mis* propias ideas han cambiado, y ya no estoy seguro de que haya exactamente siete estrategias para resolver problemas en geometría. Quizás solamente haya seis; puede que haya diez.

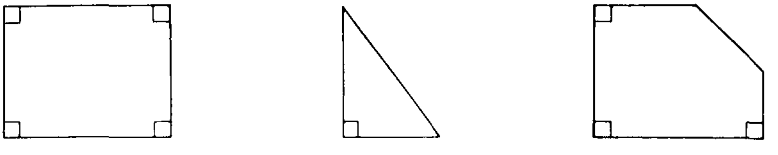
De cualquier forma, hay dos maneras de estructurar lo que voy a decir. Podría desarrollar una tras otra todas las estrategias, ilustrando cada una con problemas. Creo que prefiero la estructura alternativa, y discutiré varios problemas, cada uno de los cuales ilustra varias estrategias o puede ser entendido utilizando varias estrategias a la vez. ¡El problema a resolver por *Vds.* es identificar las estrategias!

Algunos conferenciantes anteriores han sugerido que no se ha enseñado geometría en las escuelas durante los últimos 20 años. Me inclino a creerlo, y pienso que ya es hora de que volvamos a enseñar geometría. No obstante, deberíamos sacar provecho de este lapso de 20 años y reconsiderar lo que estamos haciendo.

Me gustaría comenzar planteando un problema que Vds. deberán tratar de resolver durante aproximadamente 20 minutos antes de que continuemos. Es bastante evidente que un cuadrilátero puede tener a lo sumo cuatro ángulos rectos; un triángulo uno y un pentágono tres.

(Figura 1)

n → ?



4 → 4 3 → 1 5 → 3

* Centro de Matemáticas «Abbey Wood», Londres.

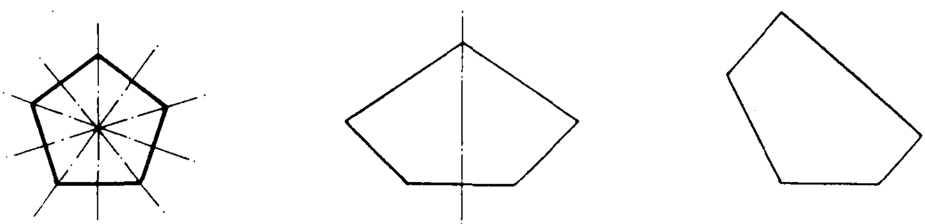
Dado n, el número de lados de un polígono, ¿puede Vd. determinar el número máximo de ángulos rectos?

(En este momento, se dio a los participantes 20 minutos para trabajar en el problema. Se sugiere al lector que haga lo mismo antes de continuar).

Este problema tiene varias características interesantes.

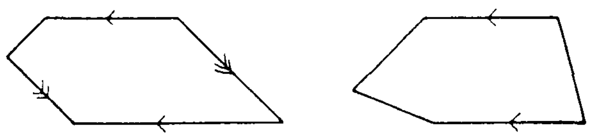
(i) Es *accesible.* Solamente requiere entender los ángulos rectos y los polígonos, ¿cuánta geometría está fuera del alcance de los estudiantes porque emplea ideas demasiado difíciles?

(ii) Este problema es *interesante.* Todos han querido resolverlo. Puede que sea porque no se refiere sólo a triángulos y cuadriláteros y sus propiedades. Una actividad muy socorrida era la de clasificarlos, pero las clasificaciones eran un tanto endebles, y eran por lo general expuestas por el profesor en lugar de que los alumnos las explorasen. ¿Por qué no clasificar los pentágonos? No tenemos una clasificación utilizable de inmediato para ellos. Esta carencia nos sugiere a nosotros y a nuestros alumnos trabajar con mayor amplitud de miras. ¿Cuáles son las consecuencias de clasificar pentágonos según la simetría,



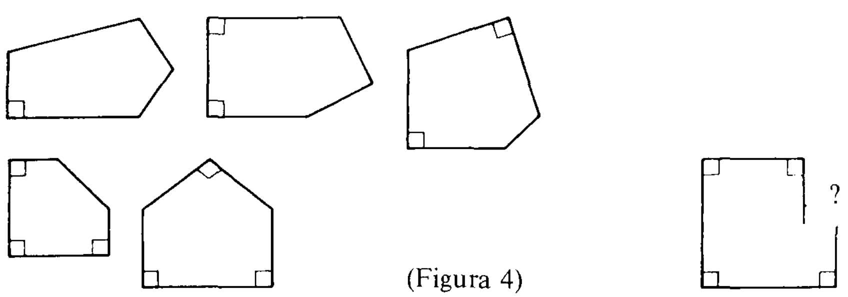
(Figura 2)

los lados paralelos,



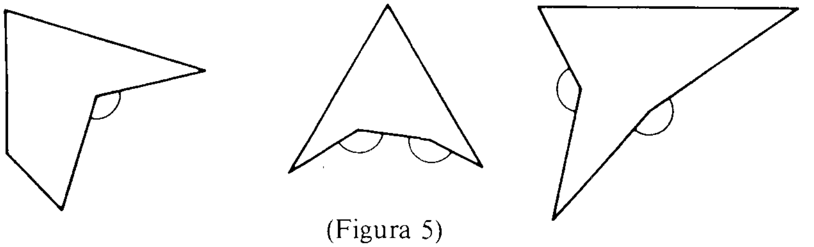
(Figura 3)

el número de ángulos rectos



(Figura 4)

el número de ángulos obtusos?



(Figura 5)

(iii) Este problema es también interesante porque es difícil, y es difícil porque no hay un método obvio de solución; es decir, no hay ningún algoritmo de aplicación inmediata. Por lo tanto estamos *realmente* ante un problema. Una de las dificultades que se presentan generalmente con los llamados problemas en Matemáticas es que no se trata de problemas para los estudiantes puesto que el profesor da el método de solución. Además una característica peculiar de la geometría ha sido a menudo la total ausencia de problemas.

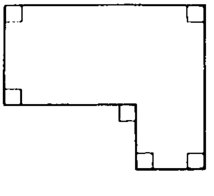
(El tema de esta conferencia podría ser: cómo crear problemas geométricos interesantes que sean accesibles a todos los niños).

(iv) Este problema es también interesante porque es *práctico.* Los niños necesitan dibujar diagramas en geometría. Los profesores trabajando en este problema comprueban que ellos también necesitan dibujar. Incluso si alguien obtiene una solución teórica, ésta deberá ser puesta en práctica. Puede que usted haya podido probar que un polígono de 24 lados puede tener 17 ángulos rectos, pero ¿lo puede dibujar?

(v) Una característica de este problema, al menos en la forma en que yo lo presenté, era que estaba *mal-definido.* Cuando la gente me hace preguntas, yo no contesto. (¡Cuando me preguntan en español, simulo no entender!). Así que Vds. tienen que tomar sus propias decisiones acerca de lo que es el problema, y luego examinar las consecuencias de esas decisiones.

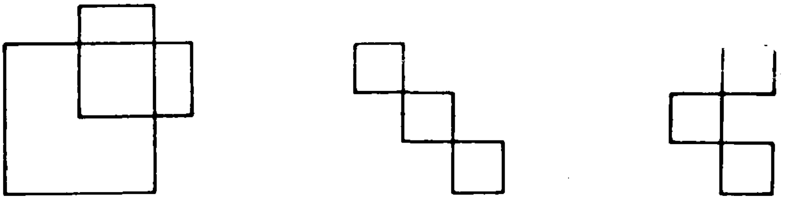
Por ejemplo, la pregunta que se me hace más frecuentemente es, «¿El polígono tiene que ser convexo?». Yo no soy la persona que debe contestar a eso. Deben de explorar las consecuencias de la convexidad, que son que cualquier polígono de al menos 5 lados solamente puede tener 3 ángulos rectos. Vd. puede decidir entonces que esto es trivial o aburrido y decidir en su lugar investigar el problema más interesante de los polígonos no convexos.

Puede que entonces decida que los ángulos rectos «externos» son permisibles.



(Figura 6)

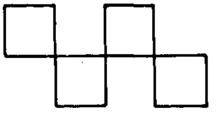
o polígono «cruzados»



(Figura 7)

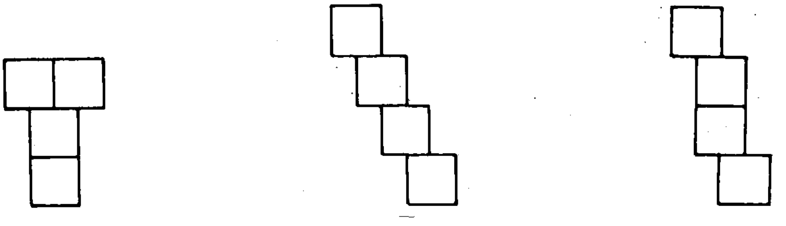
o polígonos tridimensinales, o polígonos dibujados en la superficie de una esfera.

A muchos problemas se les hace aburridos y estériles, cuando el profesor impone restricciones. Un ejemplo clásico es el tipo de problemas «Polyomino», es decir ¿cuántas formas diferentes se pueden construir con 4 cuadrados? Generalmente el profesor impone restricciones del tipo de: todos los cuadrados deben unirse mediante lados enteros, y las reflexiones y las rotaciones son equivalentes. Si se quitan las restricciones la situación se convierte en mucho más rica. He explorado con niños muy jóvenes las posibilidades de cuadrados unidos a los vértices



(Figura 8)

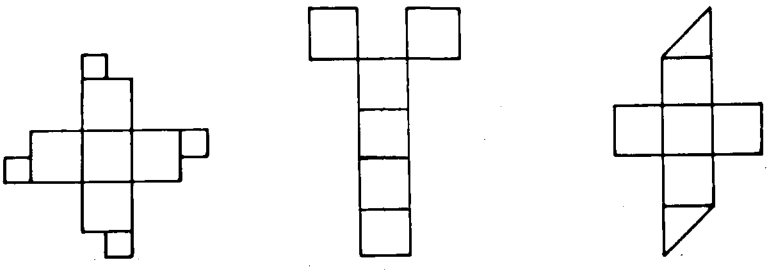
o en el punto medio de los lados,



(Figura 9)

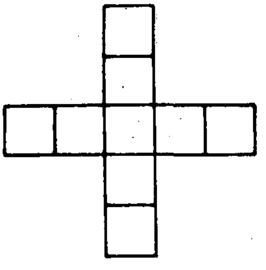
o he participado en discusiones acaloradas acerca de si las reflexiones y rotaciones son «lo mismo».

Generalmente, las preguntas del tipo de «cuántos» son buenas, siempre y cuando se planteen con amplitud suficiente para efectuar decisiones sobre lo que se está contando en realidad. Por ejemplo, ¿cuántas redes existen para un cubo? Es posible que pensemos que conocemos la respuesta, pero la última vez que se lo pregunté a una clase de niños de 11 años, me encontré con varias sorpresas



(Figura 10)

y una niña insistió que esta solución era válida porque los cuadrados «se solapan en la parte de arriba».



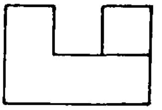
(Figura 11)

Geoff Giles de la Universidad de Stirling en Escocia, ha preparado problemas del tipo de: ¿cuántas formas simétricas diferentes puedes hacer con estos trozos? Es una lástima que insista en que la geometría de este problema ha de ser invariante respecto a las reflexiones, y al preguntar acerca del número de posibilidades existentes, nos encontramos por lo general con un número reducido. Para mí es más interesante presentar estos tres pedazos,

(Figura 12)

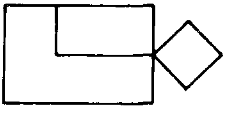
que dan lugar a un número relativamente grande de posibilidades, junto con preguntas del tipo de:

¿se permiten rotaciones?
¿han de usarse los tres trozos conjuntamente?



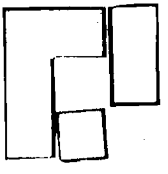
(Figura 13)

¿se pueden juntar en las esquinas?



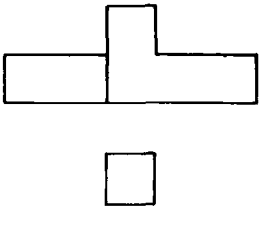
(Figura 14)

¿se permiten agujeros?



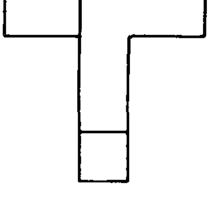
(Figura 15)

¿pueden estar los trozos separados?



(Figura 16)

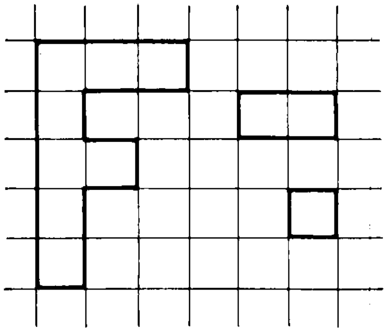
¿se pueden solapar los pedazos?



(Figura 17)

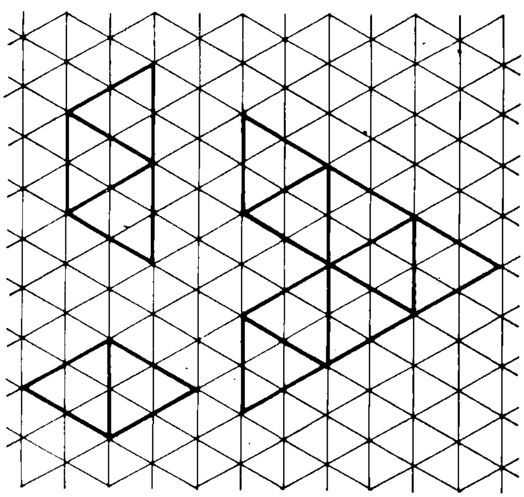
El profesor no contesta estas preguntas. Los estudiantes deben decidir lo que se permitirá, y deben dilucidar si sus decisiones dan lugar a problemas interesantes. Dado que las decisiones son suyas, pueden cambiarlas si así lo desean.

Siempre he animado a mis estudiantes a que piensen nuevos problemas. El problema anterior puede ser generalizado fácilmente inspeccionando las características del problema y luego cambiándolas. No tenemos por qué usar estas tres formas, podemos usar otras diferentes.



(Figura 18)

Podemos basarnos en formas triangulares en vez de en cuadrados.



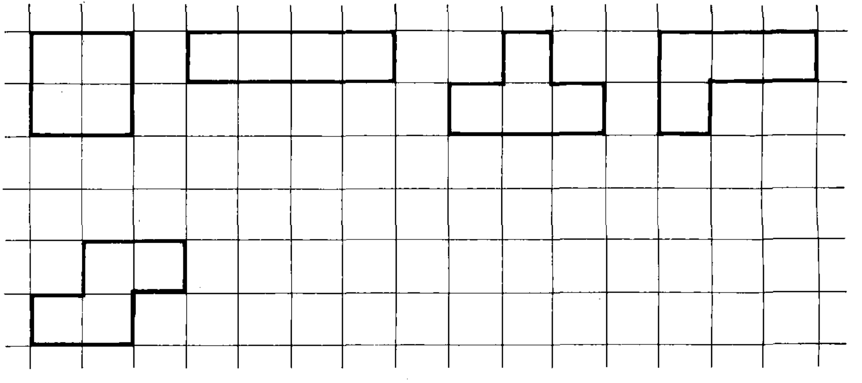
(Figura 19)

Podemos trabajar en tres dimensiones, utilizando formas generadas por cubos.

También podemos invertir el problema. Por ejemplo, ¿puedes crear tres trozos que se combinarán para producir una figura simétrica únicamente de tres formas?

El invertir el razonamiento de esta forma ayuda a plantear nuevos problemas. Por ejemplo, a menudo damos a los estudiantes formas y les pedimos encontrar perímetros. En su lugar les podemos dar perímetros y pedirles que busquen las formas. Esta pregunta es también del tipo de «cuántos». Además requiere el tomar decisiones. Por ejemplo una vez pregunté a chicos de 15 años si podían encontrar formas cuyo perímetro fuese de 24 cm. El problema es demasiado amplio a no ser que alguien elija algunas restricciones. Unos solamente consideraron triángulos. Otros triángulos isósceles, y encontraron algunas relaciones interesantes entre variables tales como la base y la altura. Otros solamente consideraron polígonos regulares, dando lugar a otras relaciones interesantes. Otros consideraron solamente triángulos con lados cuyas dimensiones fueron números enteros, lo que da un número finito de posibilidades y está pidiendo a gritos una generalización a un número real para el perímetro.

En concreto, una decisión puede ser el dibujar las formas en papel cuadriculado. 24 es demasiado grande para empezar; supongamos que el perímetro es 10.



(Figura 20)

¡Esas son todas las formas con un perímetro de 10? ¿Cómo podéis proceder sistemáticamente? ¿Cómo sabéis cuándo las tenéis todas? ¿Cuántas formas hay con perímetros menor de 10 o mayor de 10? Nótese como se puede generar este problema, no generalizando el problema anterior sino considerando un caso particular. No iba a decir nada de las teselaciones, principalmente porque hay tanto que decir que podría fácilmente pasarme una semana hablando sobre este aspecto de la geometría tan atractivo y fructífero. ¡Fue entonces cuando me acordé que estaba en el país de la Alhambra! Así que me decidí a incluir unas cuantas ideas.

Hace algunos años estaba trabajando con unos chicos de 15 años que querían ver las teselaciones que podían hacer a partir de polígonos regulares con todos los vértices congruentes; es decir estaban investigando las teselaciones semi-regulares. Yo lo sabía pero ellos no; se lo podía haber dicho a ellos pero no lo hice. Lo que es realmente interesante fue su enfoque ante el problema y su ulterior desarrollo.

Empezaron dibujando al azar algunas teselaciones que ya conocían, y luego decidieron que para lograr un enfoque más sistemático necesitarían conocer los ángulos de los polígonos regulares. Construyeron un método general para hacerlo y llegaron a la fórmula:

$$\text{ángulo de un polígono de n lados} = 180^\circ - 360^\circ/n,$$

y elaboraron una tabla, omitiendo aquéllos que ellos no estimaron necesarios

LADOS	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20
ANGULO	60	90	108	120	135	140	144	150	156	160	162

Luego empezaron a ver de forma sistemática qué combinaciones de ángulos sumarían en total 360°. Había que comprobar cada posibilidad mediante un dibujo. El caso

$$2 \times 60^\circ \text{ y } 2 \times 120^\circ$$

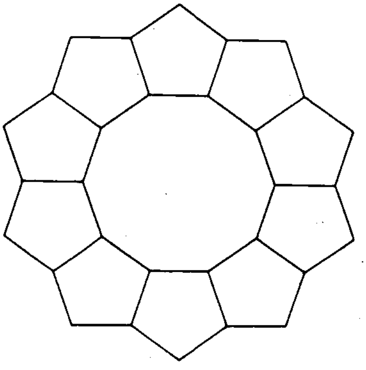
por ejemplo tenía dos versiones según que los triángulos estuviesen juntos o separados por hexágonos, y la primera versión no verificaba la regla de los vértices congruentes. Más aún, combinaciones tales como

$$108 + 108 + 144$$

y

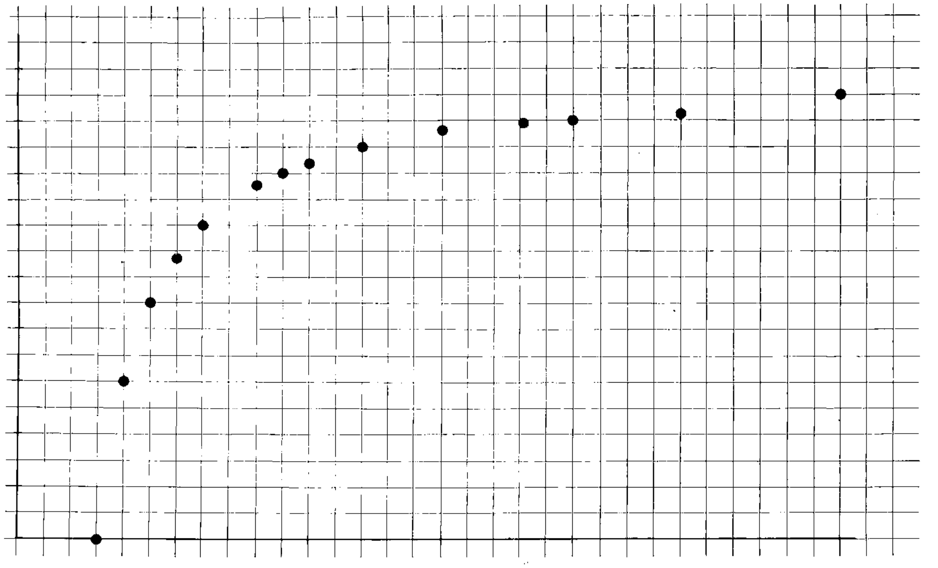
$$60 + 144 + 156$$

no podían extenderse en el plano. (La primera de estas dos es un caso especial de polígonos de n lados rodeando un polígono de 2n lados, pero no nos detuvimos a explorar esta situación en esta ocasión).



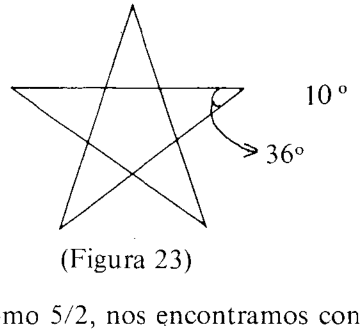
(Figura 21)

Encontraron al fin todas las teselaciones semirregulares, y en cierto momento decidieron dibujar un gráfico de la relación entre el número de lados y el ángulo de un polígono.



(Figura 22)

Era una curva interesante. Alguien sugirió unir los puntos. Otros a objeciones, porque solamente teníamos números enteros como valores para las dimensiones de los lados y los puntos de en medio no tendrían ningún sentido, pero decidimos que un polígono de dos lados tendría un ángulo de 0° y colocamos ese punto en la curva. Pregunté si era posible un polígono regular de 2 1/2 lados. Si existiese tendría un ángulo de 40°. Cotejamos con la fórmula y encontramos que un polígono regular de 2 1/2 lados tendría un ángulo de 36°. Decidimos dibujarlo, ¡y comprobamos que podíamos!



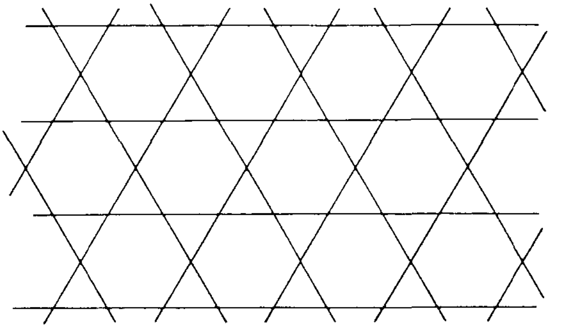
(Figura 23)

Si reescribimos 2 1/2 como 5/2, nos encontramos con una situación más comprensible. Examinamos «polígonos regulares de 7/2 y 7/3 lados, etc., y de esta forma decidimos que 8/2, que era un octógono «cruzado», no era lo mismo que 4/1, que era un cuadrado, pero que debido a que las fracciones eran equivalentes tenían los mismos ángulos.

Volvimos al gráfico y estuvimos a punto de decidir que podíamos trazar la curva uniendo los puntos. Pero alguien se puso, porque aunque habíamos encontrado un sentido para los puntos racionales, todavía no habíamos interpretado los puntos irracionales. Decidí que ya nos habíamos alejado durante suficiente tiempo del programa, ¡y dejamos el tema!

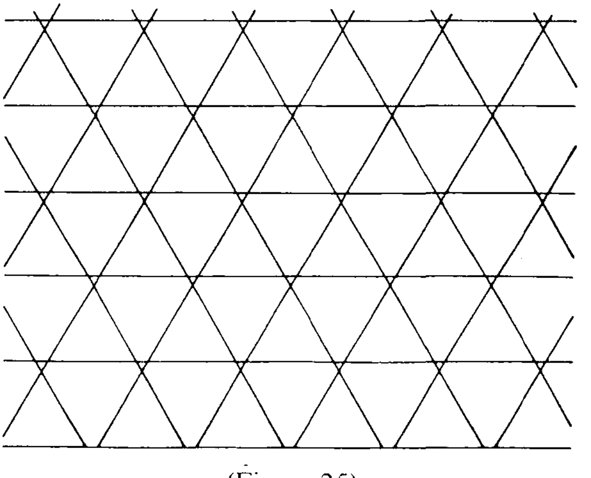
La anécdota anterior es instructiva acerca de las muchas posibilidades existentes cuando a los estudiantes se les permite hacer sus propias preguntas a un profesor con una mente abierta. También ilustra el hecho de que hay métodos sistemáticos de explorar las teselaciones además del de poner juntas distintas formas.

Al analizar una teselación es particularmente útil ver de qué está compuesta, y luego trabajar con las distintas variables que uno percibe. Considérese uno de los teselados que encontraron mis estudiantes.



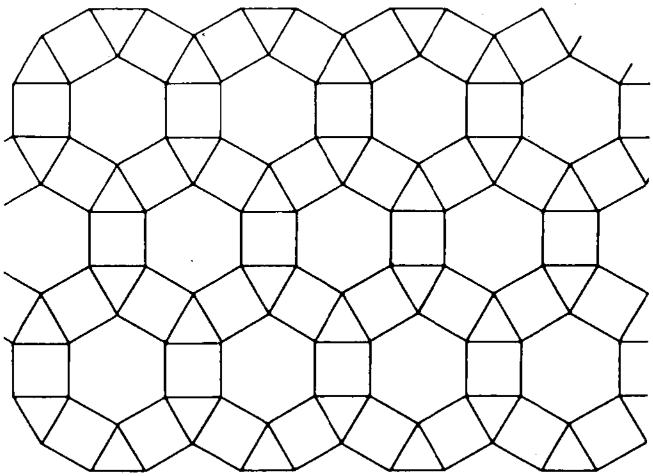
(Figura 24)

(i) En lugar de mirar a los triángulos y hexágonos, se le puede examinar como tres conjuntos de líneas paralelas. Estas se pueden dibujar en tres hojas de papel vegetal y explorar otras maneras de ponerlas juntas.



(Figura 25)

(ii) Cada hexágono está rodeado por triángulos. ¿Hay algún teselado en el cual cada hexágono está rodeado por cuadrados?

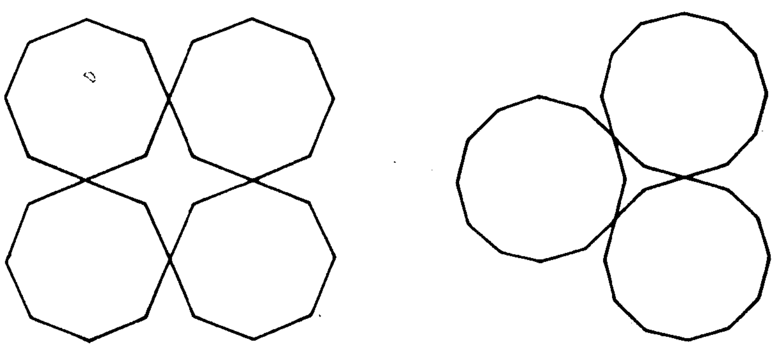


(Figura 26)

Alternativamente, cada triángulo está rodeado por hexágonos.

¿Podría estar cada triángulo rodeado por cuadrados? ¿O cada cuadrado estar rodeado por triángulos, o por hexágonos, o por dos de cada?

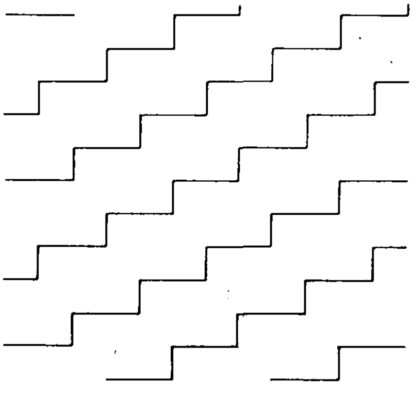
(iii) Los hexágonos (o los triángulos) se unen por los vértices, dejando huecos triangulares (o hexagonales). ¿Podemos usar otros polígonos regulares juntándose por los vértices, y qué tipo de huecos dejan?



(Figura 27)

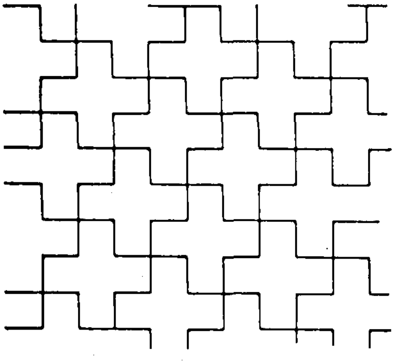
El teselado de los octógonos y las estrellas de cuatro puntos que vimos anteriormente nos puede servir para empezar. Se le puede ver como dos conjuntos de líneas «paralelas» en zig-zag, y éstas se pueden dibujar en dos hojas vegetales y variar sus posiciones relativas para producir otros teselados.

Se puede generalizar este tema. Tómese dos conjuntos cualesquiera de rectas en zig-zag,



(Figura 28)

rótese unos 90° y superimpóngase de diferentes maneras. Las rectas en zig-zag pueden ser descritas por un par de números, haciendo posible una exploración sistemática. Los resultados pueden ser a la vez sorprendentes y atractivos, pero la variedad se aprecia mejor con un proyector de transparencias que leyendo estas páginas tan estáticas.



(Figura 28a)

Proyecto para la Enseñanza de las Matemáticas (The School Mathematics Project) (SMP)

John Hersee *

I. ORIGENES Y METODOLOGIA DEL SMP

1. Antecedentes y orígenes

En 1978 el «Department of Education and Science - DES», Departamento de Educación y Ciencia creó el Comité de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas en los centros escolares de Inglaterra y Gales. El informe surgido de esta investigación «Mathematics Counts» (conocido como el Informe Cockcroft, ya que Cockcroft era el nombre del Presidente del Comité) fue bien acogido por el actual gobierno. Aunque contenía un gran número de recomendaciones sobre que debería enseñarse y cómo debería enseñarse, el informe no hacía referencia alguna a un Plan de Estudios Nacional de Matemáticas y, al igual que en el pasado, permitía a los Centros Escolares disponer de amplia libertad para decidir sobre qué matemáticas enseñar.

Fue esta libertad de opción la que hizo posible que se fundara el SMP en 1961.

Existía la opinión muy generalizada de que los programas escolares estaban anticuados y durante una conferencia que tuvo lugar ese año en la Universidad de Southampton, surgieron un gran número de cambios. Como resultado, ocho centros escolares acordaron colaborar en la elaboración de un nuevo curso de matemáticas para alumnos aventajados (los mejores 25%) comprendidos en edades entre 11 y 18 años. Dicho curso incluiría nuevos libros de texto, un nuevo programa y exámenes apropiados para alumnos entre 16 y 18 años. Desde el primer momento se reconoció que los cambios radicales previstos serían imposibles de realizar sin:

– Exámenes apropiados para los alumnos.

* Director ejecutivo del S.M.R.

- Libros de texto cuidadosamente preparados que surgiesen de las experiencias llevadas a cabo en una amplia gama de centros.

2. Las principales series de textos elaborados por el SMP son las siguientes:

Fechas	Series	Edad de los alumnos	Capacidad de los alumnos	Formato
1977-82	SMP 7-13	7-13	todos	fichas
1965-69	SMP Books 1-5	11-16	25% más capacitados	libros
1981-83	New Books 3, 4, 5	13-16	25% más capacitados	libros
1968-72	SMP Books A-H	11-16	60-70% más capacitados	libros
1972-74	SMP Books X, Y, Z	14-16	25% más capacitados	libros
1973-74	SMP Cards I & II	11-13	60-70% más capacitados	fichas
1967-68	SMP Advanced Maths.	16-18	10% más capacitados	libros
1967-78	Revised Advanced Maths.	16-18	10% más capacitados	libros
1970-71	Further Maths. 1-5	16-18	10% más capacitados	libros
1983	SMP 11-16	11-16	85% más capacitados	diversos

3. Objetivo

Los objetivos generales del SMP pueden resumirse como sigue:

- el contenido matemático del curso deberá reflejar la naturaleza y usos actuales de las matemáticas,
- debe haber unidad en los conceptos matemáticos básicos del curso,
- los métodos de enseñanza deberán incorporar lo mejor de las técnicas de enseñanza actuales,
- el alumno debe tomar parte activa en el aprendizaje,
- las matemáticas deben verse como algo útil y deben presentarse y estudiarse dentro de un contexto,
- cada curso debe ser completo y útil en sí mismo, además de establecer las bases para posteriores estudios y equipar al alumno con importantes técnicas para el trabajo y la vida diaria.

4. Metodología

Todo el material elaborado por el SMP se ha caracterizado por los siguientes tres aspectos:

a) **Los autores de los textos trabajan en equipo.** Un equipo de autores ha elaborado todos los libros y materiales de enseñanza. De esta manera, se ha dispuesto de una gran variedad de experiencias y conocimientos. Después de un intercambio de opiniones se elabora el primer borrador; gradualmente se van ampliando detalles hasta que finalmente se redactan los capítulos del primer borrador. El equipo examina dichos capítulos y posteriormente los revisa, hasta que se obtiene una versión adecuada para su uso en los centros piloto.

b) **Los autores son profesores.** Con escasas excepciones los autores han sido profesores de gran experiencia que seguían impartiendo sus clases a la vez que participaban en la redacción de los textos. A algunos autores y redactores fue necesario eximirlos de sus deberes docentes durante un tiempo, a fin de que el trabajo pudiera terminarse dentro del plazo.

c) **Puesta a prueba de los borradores.** Cada libro aparece en forma de borrador y se utiliza en las escuelas piloto. La versión que finalmente se publica es una revisión del borrador incorporando las mejoras sugeridas por los profesores de los centros piloto.

El SMP ha organizado cursos de perfeccionamiento del profesorado con objeto de explicar los contenidos y el enfoque dado a cada nivel. La Secretaría del SMP proporciona continuo apoyo y aconseja a aquellos profesores que usan sus textos.

II. DOS EJEMPLOS DE LOS TRABAJOS MAS RECIENTES DEL SMP

En esta sesión presentaré dos ejemplos de trabajos recientes realizados por el SMP. He elegido estos dos ejemplos, porque cada uno de ellos introduce una serie de cuestiones que tienen relación con el propósito de este Simposio.

1. **Introducción.** En Inglaterra no existe un plan de estudios a nivel nacional fijado por el gobierno central. Por lo tanto, un organismo para el desarrollo de los planes de estudio como el SMP puede preparar cursos en los que el contenido (o el programa) difiera substancialmente de los cursos existentes.

Las dos series del SMP que se van a presentar son:

(i) **SMP New Books 3 (partes 1 y 2), 4 (partes 1 y 2) y 5.** Estos libros están preparados para alumnos entre 13 y 16 años, que forman parte del grupo de los 25% mejores.

(ii) **SMP 11-16.** Esta serie consta de materiales de enseñanza para alumnos entre 11 y 16 años que se hallen entre los 85% más capacitados. Hay que advertir que ambas series incluyen libros que pueden usarse para los alumnos más capacitados con edades entre 13 y 16; no obstante el contenido y el estilo de las dos series son distintos.

2. **SMP New Books 3, 4 y 5** (para alumnos bien capacitados para las matemáticas en edades entre 13 y 16 años).

2.1. Estos libros sustituyen a los «Books 3, 4 y 5» anteriores y que fueron algunos de los primeros libros que elaboró el SMP. Hay que recalcar el hecho de que estos nuevos libros no son simplemente ediciones revisadas de los anteriores. En su mayor parte el material se ha vuelto a redactar y se ha puesto al día. Por eso, dichos libros presentan una serie de características que guardan relación con este Simposio.

(i) La necesidades de que el material docente sea revisado después de que se haya utilizado por algún tiempo en las escuelas.

Este es un tema en el que quiero hacer hincapié. Cuando hayan elaborado Vds. un nuevo plan de estudios para España, será muy importante considerarlo como una primera versión y tomar las medidas pertinentes para poder proseguir con la tarea de su posterior revisión y desarrollo.

(ii) Los tipos de cambios necesarios.

(iii) La influencia de la calculadora electrónica tanto en el contenido como en el enfoque.

2.2. Los primitivos SMP Books 3, 4 y 5 se publicaron solamente después de que las versiones en borrador se sometieran a prueba en las escuelas piloto. Sin embargo, varios años de uso en un número de centros mucho mayor, mostró que hacía falta que se revisaran. Eran necesarias algunas modificaciones debido a los cambios ocurridos en las escuelas al haber pasado cierto tiempo. Algunos de los objetivos de los autores podían no haber quedado claramente expresados o se habían ido deformando; con otros, se había comprobado que eran demasiado difíciles para poderlos poner en práctica con éxito.

Por consiguiente se hizo necesario rehacerlos para:

- cambiar el énfasis dado a unos contenidos por otros y clarificar los objetivos,
- suprimir el material poco práctico o inadecuado,
- reflejar cambios habidos en los centros, especialmente en los planes de estudio de las escuelas primarias.
- incluir un mayor número de ejercicios para el alumnado,
- incorporar el uso de la calculadora electrónica.

El enfoque docente en que los primeros libros se basaron –exigiéndole al alumno un papel más activo en el descubrimiento y desarrollo de las matemáticas– no es fácil de transmitir mediante la letra impresa, ni de llevarlo a la práctica en el aula. Los profesores que no habían apreciado los objetivos fundamentales transformaban demasiado fácilmente en algo rutinario lo que se pretendía que fuera un método de investigación. Al rehacer el material confiábamos reforzar nuestros propósitos iniciales.

En el caso de la geometría, es evidente que, al rechazar la geometría formal de Euclides, el curso SMP no proporcionaba a los alumnos el conocimiento de ciertas leyes geométricas útiles y básicas. Al rehacer los textos hemos restablecido algo de este material perdido. Tradicionalmente, la geometría euclídea ha sido la parte donde se presentaban las ideas de comprobación. Aunque pongamos en duda la eficacia de los instrumentos tradicionales para enseñar cómo se realizan las comprobaciones, no hay duda de que los libros del SMP originarios no daban una idea clara de cómo llevar a cabo dichas comprobaciones y así, en los nuevos textos, se ha propuesto introducir esta temática de manera más consciente.

Por otra parte, un objetivo de los autores que escribieron los libros primitivos era el presentar las matemáticas como una materia unificada; y una de las ideas culminantes que servía de base para esto iba a ser la idea de grupo. Ahora bien, solamente al analizar las experiencias habidas en los centros piloto se hizo evidente que este objetivo no sería posible alcanzarlo. Al rehacer los textos fue preciso evaluar las implicaciones de este hecho e introducir los cambios y supresiones apropiados.

En la década de los 60, las escuelas primarias impartían un plan de estudios de matemáticas, más reducido y, como consecuencia de esto, los alumnos entraban en los centros de segunda enseñanza con un conocimiento de la aritmética más uniforme y afianzado. Se daba por supuesto que esto le quedaría asentado al alumno. Se suponía igualmente que los nuevos conocimientos y técnicas se aprenderían más fácilmente y con mucha menos repetición que lo acostumbrado, debido al diferente enfoque aplicado en clase. La experiencia ha demostrado que la repetición *sí es* necesaria y esto implica que los nuevos libros deben incluir muchos más ejercicios para el alumno.

2.3. La influencia de la calculadora electrónica en estos libros se ve reflejada de muchas maneras:

(i) en un enfoque más numérico en algunos temas, incluyendo mayor uso de métodos investigativos y de «ensayo»,

(ii) en los cambios en el tratamiento del álgebra,

(iii) en que se presta una mayor atención a los temas de precisión y fiabilidad de datos, especialmente en los casos en los que éstos son el resultado de medidas,

(iv) en que se da diferente tratamiento a los porcentajes y a la inclusión de cuestiones afines, que son difíciles sin calculadora,

(v) en la inclusión de trabajos que se refieren a procesos iterativos, incluyendo soluciones iterativas de ecuaciones.

Aquí tenemos unos ejemplos:

Para **raíces cuadradas** las tablas son cosa del pasado. Normalmente basta con apretar la tecla de la calculadora para obtener el resultado requerido, pero para enseñar el **concepto** de raíz cuadrada y como importante conocimiento de apoyo para comprobar el resultado obtenido con la calculadora podemos llevar a cabo el siguiente experimento. Supongamos que hablamos de la $\sqrt{8}$; quizá de hallar el lado de un cuadrado de área 8 unidades cuadradas.

Tenemos

$$2^2 = 4, \quad 3^2 = 9$$
$$=> 2 < \sqrt{8} < 3$$

Entonces podemos «interpolar»: $2{,}5^2 = 6.25$

$= > 2{,}5 < \sqrt{8} <$ y así sucesivamente.

La formulación algebraica se contempla de forma diferente. Cualquiera que sea el dominio en la manipulación algebraica, por ej. para obtener

$$v = \frac{uf}{u - f} \text{ a partir de } \frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

para hallar v si u = 3 y f = 5 procederemos como sigue:

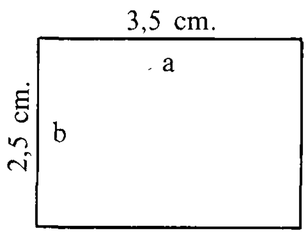
$$\frac{1}{v} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \quad = > \frac{1}{v} = 0{,}2 - 0{,}3$$

$$= -0{,}13$$

$$\underline{= > v = -7{,}5}$$

Debido a que utilizamos la calculadora los recíprocos no ofrecen dificultad y, por supuesto, el cálculo no es más difícil si u = 3,7 y f = 5,3.

Las medidas son la base de muchas aplicaciones de las matemáticas y la calculadora nos permite considerar la fiabilidad de las medidas y los resultados calculados a partir de ellas. Por ejemplo si se dice que un rectángulo mide 3,5 cm. por 2,5 cm., podemos suponer que las verdaderas longitudes están dentro de los intervalos:



$$3{,}45 \leqslant a < 3{,}55$$
$$2{,}45 \leqslant b < 2{,}55$$
$$= > 8{,}4525 \leqslant A < 9{,}0525$$

Debido a que $2{,}5 \times 3{,}5 = 8{,}75$ esto nos plantea algunos problemas al dar la respuesta, pero el caso es que estos problemas se pueden plantear y discutir.

El **Interés compuesto** (algo con lo que nos encontramos todos los días) ha sido posible tratarlo en las escuelas debido al cambio de método al pasar de la suma a la multiplicación.

de 100% + 7% a $\times$ 1,07

Así £5,32 con el 7% de interés se calcula así: £5,32$\times$ 1,07 y fácilmente con una calculadora, el interés compuesto de 6 años es £5,32 $\times$ $1{,}07^6$:

El **Método iterativo** puede usarse de muy diferentes formas, pero especialmente en la resolución de ecuaciones. Un método consiste en utilizar un gráfico para encontrar una raíz aproximada y entonces mejorar la precisión por búsqueda decimal. Otro método es como sigue:

$$\text{Si } t_{n+1} = \frac{1}{t_n} + \; t_1 = 1, \text{ entonces } t_2 = 2,\ t_3 = 1{,}5,$$

$$t_4 = 1{,}666\ 6667,\ t_5 = 1{,}6,\ t_6 = 1{,}625, \ldots\ t_{13} = 1{,}6180258\ldots,\ t_n \rightarrow 1{,}618\ldots$$

$$\text{en el límite } t_{n+1} \approx t_n \text{ una solución de } x = \frac{1}{x} + 1, \text{ ó } x^2 - x - 1 = 0$$

3. **SMP 11-16** (para la mayoría de los alumnos de edades entre 11 y 16 años).

3.1. Esta es la serie del SMP más reciente y la tarea más extensa emprendida por el proyecto hasta ahora. Hasta la fecha, solamente se ha publicado el material para los dos primeros años; el resto está en forma de borrador y se está utilizando en las escuelas piloto.

3.2. SMP 11-16 incorpora un gran número de características que reflejan puntos de vista comúnmente aceptados en Inglaterra. En concreto se basan en la teoría de que, entre los alumnos de cualquier edad, existe un amplio abanico de niveles, que los alumnos progresan a diferente ritmo y que no todos tienen la misma capacidad. En consecuencia, se requiere un «plan de estudios escalonado» y, a la edad de 16 años, existirán variaciones significativas respecto a la materia que los diferentes alumnos dominan.

3.3. Los autores de esta serie son todos ellos experimentados profesores. Su propia experiencia en el aula y los resultados de la investigación docente (tales como las conclusiones del «Concepts in Secondary Mathematics and Science research programme») (Proyecto de Investigación sobre Conceptos en Matemáticas y Ciencias a nivel de enseñanza secundaria) han influido en la elaboración del curso. Cuatro aspectos fundamentalmes forman la base del material educativo.

(i) La preocupación por las dificultades que los alumnos tienen en el aprendizaje; la creencia de que estas dificultades aumentan si se pasa de lo concreto a lo abstracto demasiado rápidamente, y con un programa de estudios excesivamente amplio.

(ii) Las matemáticas deben presentarse dentro de un contexto concreto haciendo ver su importancia y utilidad.

(iii) La motivación de los alumnos es de enorme importancia. Atractivo deben ver la utilidad de lo que estudian, y encontrar el contexto y la presentación.

(iv) A los alumnos se les deben presentar estímulos adecuados, para que todos –incluyendo los más capacitados– desarrollen su capacidad al máximo.

Consecuencia de esta inquietud por lo expuesto más arriba, es el gran uso que se hace de las ilustraciones para presentar los contextos y el contenido.

3.4. La estructura del curso queda explicada en el diagrama adjunto.

El material para los años 1 y 2 se presenta en folletos de 8 y 16 páginas. Al final de estos dos años, los alumnos habrán alcanzado diferentes niveles y el curso entonces se subdivide en tres partes, conocidas como Curso-Y, Curso-B, y Curso-G, cada uno de los cuales presupone un punto de partida diferente para el trabajo del tercer año. El material para los años 1 y 2 está organizado en cuatro «Niveles». El Curso-Y presupone que se han completado los cuatro niveles; el Curso-B que se han completado tres niveles y el Curso-B dos.

El material para los años 3, 4 y 5 se presenta en forma de libros, pero incluso en este caso, se han utilizado muchas más ilustraciones de lo acostumbrado hasta ahora.

3.5. Debido a que el SMP 11-16 difiere de otros cursos, hay que diseñar nuevos exámenes para evaluar el rendimiento de los alumnos. Actualmente se está preparando una variada gama de modelos de exámenes que reflejan las diferencias y similitudes entre los Cursos-Y, B y G.

3.6. **Separación de los alumnos en grupos por niveles.** Los alumnos alcanzarán diferentes niveles al finalizar el segundo año, según los conocimientos adquiridos a la edad de 11 años y del ritmo al que trabajan los textos de los folletos.

En los folletos 3, 4 y 5 la diferencia se manifiesta en los Cursos Y, B y G. Se da por sentado que a los alumnos se les colocará en la clase con otros que hayan alcanzado niveles similares.

Se facilita material complementario a los alumnos más capacitados por medio de los niveles 2e, 3e y 4e, en los años 1 y 2, y posteriormente con los libros YE1 y LE2. Los libros BE1, BE2 y BE3 proporcionan material complementario a los alumnos más capacitados que sigan el Curso-B, y sirven de nexo de unión entre los Cursos Y y B.

3.7. **Estructura matemática.** El contenido se agrupa en cinco apartados:

El número, Algebra, Gráficos, Espacial, Estadísticas.

Estos apartados no están rígidamente separados, hay evidentes nexos de unión entre ellos. Cada tema sirve de marco para organizar la preparacioín y elaboración del contenido de los materiales para el curso. Asimismo, ayuda a los profesores a impartir el curso en los centros escolares, sobre todo en los dos primeros años.

En los dos primeros años los textos de los folletos, dentro de cualquier nivel, generalmente son independientes unos de otros, pero cada Nivel –después del Nivel 1–presupone los conocimientos de todo el Nivel anterior. Los libros de cada uno de los tres cursos para los años 3, 4 y 5 forman una serie.

3.8. **Fechas de publicación.** Los Niveles 1, 2, 3 y 4 se han publicado ya.

Los libros para los años 3, 4 y 5 se encuentran en forma de borrador para su utilización en los centros piloto; los últimos libros están ahora en la imprenta.

El primer grupo de alumnos de los centros piloto completará el curso –a la edad de 16 años– en 1985.

3.9. SMP 11-16: Algebra

1. *Contenido y cambios*

   (i) No se hace hincapié en la estructura algebraica. Esto era una característica de anteriores cursos SMP; se esperaba que ayudaría a unificar el tema, pero no ha sido así y se necesita más tiempo que el que dedicaban los anteriores cursos del SMP para más álgebra del tipo convencional.

   (ii) El álgebra del tipo convencional en el **Curso Y** es similar en contenido a los New Books, 3, 4 y 5 (aunque presentado de diferente manera).

El **Curso B** no incluye algunos temas, principalmente ecuaciones iterativas, cuadráticas y cúbicas y otros temas se introducen más avanzado el curso que lo acostumbrado hasta ahora.

El **Curso G** incluye muy poca álgebra, exceptuando el uso de fórmulas sencillas, con la calculadora.

2. *Aspectos esenciales y normas*

   (i) Antes de pasar a lo abstracto, hay que asegurarse de que se ha facilitado amplia experiencia práctica y concreta.

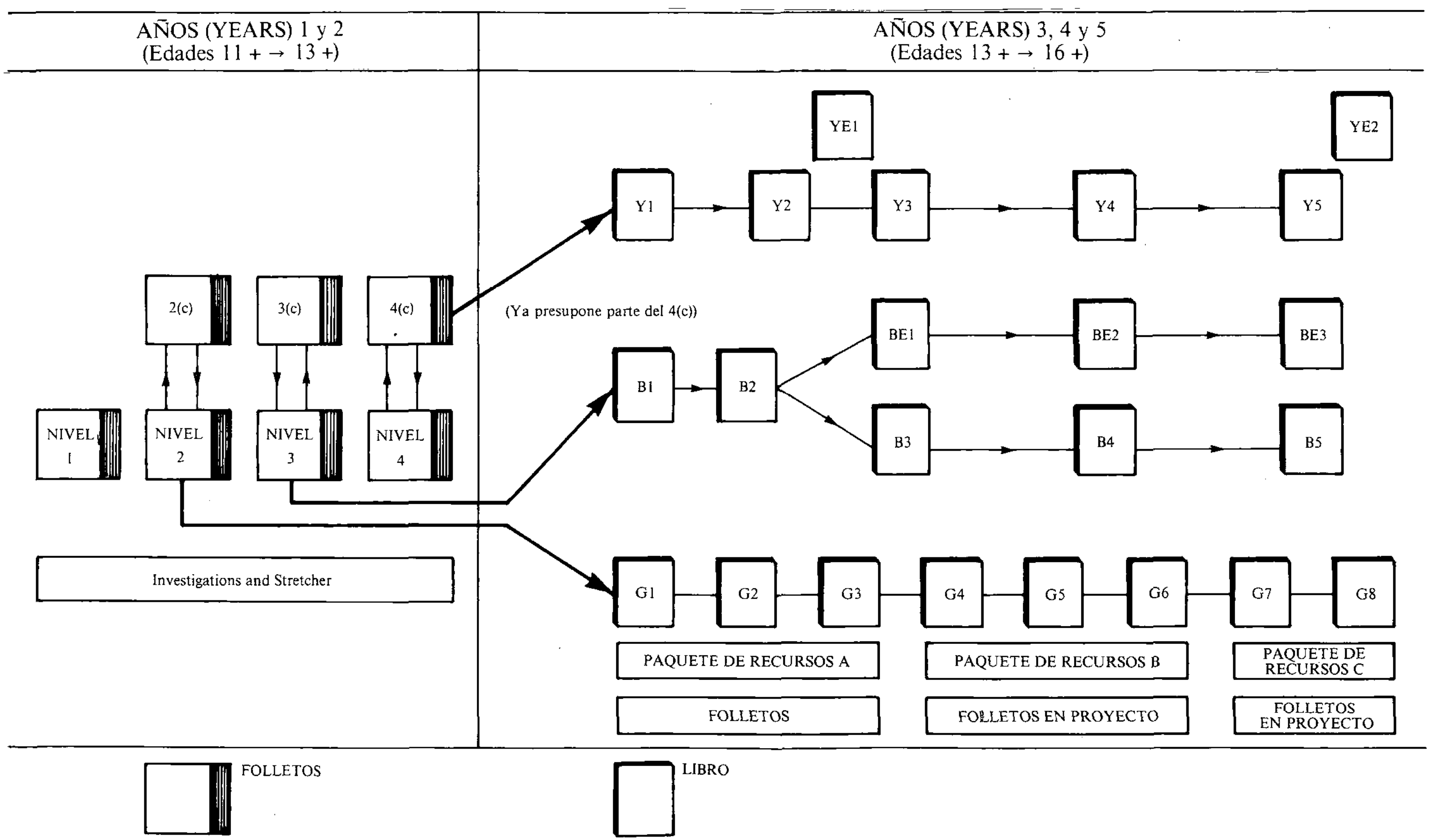
   (ii) Presentar la materia dentro de un contexto –derivar el álgebra del contexto e igualmente hay que hacer uso del contexto para motivar– en todos los niveles, siempre que sea posible.

   (iii) Las investigaciones sugieren que el cocnepto de «variable» es decisivo pero difícil. Las maneras tradicionales en que este concepto se ha presentado no son satisfactorias dada la importancia del tema.

   (iv) No se sigan enfoques que, al principio, parecen tener éxito, pero posteriormente producen confusión y más dificultad.

   (v) Debido a que el concepto de «variable» es difícil de introducir con una variable, deben usarse al principio dos variables.

S.M.P. 11-16 Estructura general de la versión en proyecto



Fundamentos del contenido del Curso G (SMP 11-16)

Lo que sigue debe leerse teniendo en cuenta los siguientes comentarios:

1. Siempre que sea posible, la metodología y las técnicas del programa se verán dentro de un contexto. Esto significa que los alumnos deberán entresacar de una situación «ruidosa» la información numérica u otra información.
2. Ciertas técnicas aparecen a lo largo de todo el programa. En concreto, la aproximación y la estimación se aplican en casi todas las secciones.
3. Siempre que es posible, se hace hincapié en resolver los problemas fáciles, «mentalmente».
4. A lo largo de todo el curso se anima a los alumnos a trabajar por sí mismos. Siempre que es posible se incluyen ejercicios libres, trabajo de investigación y discusiones orales, adecuados a la capacidad del alumno.
5. Excepto cuando se indica lo contrario, siempre se puede usar la calculadora. En realidad, la calculadora se aprovecha a lo largo del curso.

Los Números

- El uso diario de los números incluyendo números negativos (por ejemplo, «¿Cuál es el aumento de la temperatura de – 3 grados C a 10 grados C?».
- Medidas y Pesas incluyendo el uso de números enteros y decimales.
- Entender el valor del lugar que ocupa cada número.
- Reconocer y utilizar el modelo numérico.
- Redondear de manera apropiada al contexto, incluyendo el redondeo del resultado de la calculadora.
- Aplicar métodos informales de operar aritméticamente.

  por ejemplo, $1{,}50 \times 4 = (1{,}50 \times 2) \times 2$
  ó $1{,}50 \times 4 = (1{,}00 \times 4) + (50\text{p} \times 4)$

- Elegir la operación aritmética correcta que se debe aplicar en una situación dada.
- Sin usar la calculadora

  Sumar dentro del contexto del dinero, y con decimales de hasta 2 cifras.
  Restar
  Multiplicar por, 2, 3... 9, 10 números enteros y dinero.
  Dividir

  (Siempre que sea posible se animará a los alumnos a que hagan las operaciones mentalmente).

- Utilizar tablas.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir utilizando la calculadora incluyendo el saber apreciar la importancia del orden de las operaciones.

- Porcentajes

  Valorar el uso diario de los porcentajes.
  Conocer el % equivalente de 1/4, 1/2, 2/4, 1/10, 1/100 y que 33 1/3% es 1/3...
  Convertir el % en decimales y viceversa.
  Calcular (ejemplo) el 35% de 850 utilizando la calculadora.
  Aumentar o disminuir un número en un % dado (incluyendo dinero).
  Saber expresar una cantidad como porcentaje de otra.
  Gráficos de sectores porcentuales utilizando una escala de gráficos de sectores.

- Aplicar la proporcionalidad a problemas tales como calcular las cantidades para 6 partiendo de una receta para 4, el valor para cálculos de dinero, trazado de escalas sencillas, etc.
- Valorar de manera informal y sencilla proporciones directas e inversas.
- Conocer los decimales equivalentes de 1/4, 1/2, 3/4, 1/10, 1/100 y que 1/3 es más de 0,3.
- Convertir con la calculadora fracciones en decimales y en porcentajes.
- Hallar con la calculadora una fracción de una cantidad.
- Sumar o restar fracciones con denominadores 2, 4, 8 ó 16 en el contexto de pulgadas.
- Conocer y poder usar las relaciones entre

  mm., cm., m. y kms.
  g., kg. y toneladas
  ml. y l.
  cm. cúbicos y l.

- Conocer las unidades

  pulgadas, pies y millas
  onzas y libras
  pintas y galones

- Conocer el equivalente métrico de éstas, e intuir el tamaño de cada unidad.
- Conocer las unidades derivadas, incluyendo

  cm. cuadrados, m. cuadrados, pies cuadrados
  cm. cúbicos, metros cúblicos, pies cúbicos
  entendiendo cm^2, cm^3, etc.

- Las horas incluyendo

  Usar relojes de 12 y 24 horas (analógicos y digitales)
  Horarios (autobuses, trenes, etc.)
  Hallar el intervalo entre dos tiempos dados
  Dado el comienzo y la duración saber calcular la hora de llegada y viceversa.

- Relaciones simples, por ejemplo: libras por hora, millas por galón, peniques por kilo.
- Resolver problemas sencillos de tiempo, distancia y velocidad.
- Leer contadores, esferas, cuadrantes y escalas de varios tipos.

Algebra

- Substituir en una fórmula expresada en palabras, abreviaciones o letras.

Espacial

- Reconocer y saber nombrar figuras planas sencillas: triángulos (incluidos los equiláteros), cuadrados, rectángulos y hexágonos.
- Conocer el significado de la diagonal, del perímetro, etc.
- Calcular áreas rectangulares y áreas rectangulares compuestas.
- Hallar el área de figuras no-rectangulares «contando cuadrados».
- Volumen de un bloque rectangular.
- Medida de ángulos en grados.
- Conocer el significado de paralelo, perpendicular, horizontal y vertical.
- Circulo - conocer los términos centro, radio, diámetro, circunferencia, semi-círculo, π. Usar circunferencias de más de 3 × diámetro.
- Usar e interpretar mapas, incluyendo 8 puntos del compás.
- Poder seguir y dar direcciones de callejeros.
- Usar planos sencillos y elevaciones.
- Dibujar planos sencillos sobre cuadrícula cuadrada.
- Interpretar vistas y dibujos de objetos tridimensionales.
- Ampliaciones y reducciones sencillas.
- Valorar la simetría de modelos, especialmente la reflexión.
- Reconocer y nombrar sólidos sencillos: cubo, esfera, cilindro, cono.
- Saber seguir instrucciones dadas de forma visual; construir modelos tridimensionales y sólidos.
- Gráficos y tablas.
- Leer las tablas de dos entradas - diagramas de millas, tarifas telefónicas, etc.
- Interpretación gráfica.
- Estadísticas.
- Tabular e interpretar datos: frecuencia, agrupamiento.
- Término medio - introducción informal a los diferentes significados del concepto; cálculos sencillos de media y mediana (no se emplean los términos técnicos).
- Concepto de probabilidad.

SMP 11-16: Breve descripción del contenido matemático del borrador, series B, BE e Y

Solamente se han enumerado a continuación los apartados más importantes y en un lenguaje puramente matemático, sin hacer referencia al contexto en el que aparecen en los libros. El hecho de que el programa B esté englobado en el BE, etc. no implica que la «presentación» de los apartados sea la misma en las diferentes series.

Borrador Serie B

- Números enteros y decimales; redondeando.
- Porcentajes.
- Proporción simple; división proporcional.

- Método unitario.
- Fracciones simples de cantidades; fracciones → decimales, porcentajes.
- Tasas constantes y medias.
- Estimación (numérica y gráfica).
- Usos de los números negativos (por ejemplo, como temperaturas y como coordenadas), sin operación entre ellos.
- Fórmulas simples: sustitución dentro de las fórmulas, substitución que conduce a la ecuación que se va a resolver.
- Gráficas: interpretación, trazado de gráficas a partir de datos y de fórmulas simples.
- Figuras planas: perímetros, área (contando cuadrados), área del rectángulo y del triángulo (por cálculo).
- Círculo: circunferencia y área.
- Medida de ángulos: relación entre ángulos (ángulos alrededor de un punto, sobre una línea, ángulos de un triángulo).
- Trazado de escalas.
- Mapas: cuadrícula de referencia, contornos y orientaciones.
- Simetría: reflexión, rotación (en dos planos solamente) y simetría de traslación (recorridos).
- Ampliación y reducción de dibujos, etc.
- Sólidos: esquemas, redes.
- Volumen: cubo y prisma, interpretar dibujos, esquemas, coordenadas.
- Gráficos de frecuencia: agrupamiento de datos.
- Sumario de datos: media y escala.
- Probabilidades: frecuencia relativa, casos simples y teoría de probabilidades.
- Diagrama de flujo: siguiendo las instrucciones, cajas de decisión.
- Organización y selección: listado sistemático de posibilidades.
- Investigaciones.

Borrador Serie BE

Incluye lo reseñado más arriba, junto con lo siguiente

- Formato índice normalizado.
- Operaciones con números fraccionarios y negativos.
- Raíces cuadradas.
- Construcción de fórmulas a partir de descripciones escritas.
- Fórmulas recompuestas.
- Manipulación algebraica (agrupamiento de términos, paréntesis).
- Ecuaciones simultáneas.
- Gráficos de ecuaciones.
- Búsqueda decimal.
- Proporcionalidad (directa e inversa).
- Pendiente: formas de intersección de la pendiente de la ecuación de la curva: curva de mejor ajuste.
- Efecto de la ampliación sobre el área y el volumen.
- Teorema de Pitágoras.
- Trigonometría (tangente, seno y coseno; triángulos, rectángulos).
- Lugares geométricos.
- Vectores.
- Representaciones (simetría, rotación, traslación; no algebraica).

- Diagramas de dispersión.
- Problemas de planificación (por ejemplo, tabla de tiempos).
- Muestreo: muestreo aleatorio a partir de grandes bases de datos (trabajos prácticos, no teóricos).
- Investigaciones.

Borrador Serie Y

Incluye lo reseñado anteriormente, junto con lo siguiente

- Efectos de errores y redondeo en los cálculos.
- Crecimiento y decrecimiento exponenciales (incluyendo el uso de índices negativos).
- Secuencias.
- Solución de ecuaciones por iteracción.
- Fracciones algebraicas simples.
- Otros tipos de proporcionalidad.
- Funciones: letras para funciones, funciones compuestas, funciones inversas.
- Funciones cuadráticas: solución de ecuaciones cuadráticas por factores.
- Desigualdades.
- Propiedades de los ángulos de un circo.
- Perspectiva.
- Latitud y longitud: introducción a la proyección de mapas.
- Aplicación de la trigonometría y del teorema de Pitágoras a problemas tridimensionales.
- Gráficas periódicas: gráficas de las funciones seno y coseno.
- Geometría de vectores simples.
- Matrices: matrices de 2 × 2 para describir representaciones, multiplicación de matrices. Aplicación de matrices: inversa de una matriz.
- Areas ocultas de un gráfico.
- Frecuencia acumulada, percentiles, medias.
- Probabilidad: sucesos independientes, diagramas de árboles.
- Optimización, incluyendo ejemplos sencillos de programación lineal.
- Investigaciones.

2 de marzo de 1984

Un proyecto para la enseñanza de las Matemáticas entre los 11 y los 14 años

Paolo Boero *

INTRODUCCION

Este informe tiene como finalidad presentar el proyecto de enseñanza integrada de las Matemáticas y de las otras ciencias, elaborado entre 1975 y 1980 por el grupo de investigación y experimentación didáctica dirigido por mí y actualmente experimentado de forma controlada en más de 120 clases de la Enseñanza Media de la zona de Génova.

El proyecto nació en un momento de grandes transformaciones y de intenso debate sobre la enseñanza obligatoria en Italia: en el apartado 1 intentaré delinear brevemente algunas de las características de tales transformaciones y de dicho debate en relación con las características asumidas por el proyecto.

En el terreno pedagógico el proyecto se caracteriza por la decisión de ofrecer a los alumnos un itinerario orgánico de crecimiento cultural vinculado a la reflexión sobre los grandes temas de la realidad de hoy a fin de favorecer su responsable inserción en la sociedad. De ello se hablará en el apartado 2.

Por lo que respecta a los aspectos culturales, el proyecto presenta las disciplinas (las Matemáticas y las demás ciencias) como instrumentos de conocimiento y de organización, del conocimiento sobre la naturaleza, las relaciones entre los hombres y los mecanismos productivos. Hacia el final del trienio también es importante el aspecto de las Matemáticas (y de las demás ciencias) como objeto de conocimiento, contemplados en su devenir histórico. En el apartado 3 se hacen reflexiones y se exponen ejemplos de este planteamiento del proyecto.

En el terreno didáctico el proyecto desarrolla el aprendizaje como interacción entre los estímulos culturales del enseñante, las informaciones y las

* Instituto de Matemáticas, Universidad de Génova.

sistematizaciones del saber sucesivamente propuestas por él y los modos de pensar y las conceptualidades sucesivamente desarrolladas por los alumnos. En el apartado 4 se exponen algunas consideraciones al respecto. El informe de Anna Maria Rossi Artiaco contempla de forma más profunda y exhaustiva los aspectos didácticos y los problemas de la realización del proyecto en la clase.

El apartado 5 está dedicado a los problemas actualmente objeto de estudio y de reflexión en el grupo sobre la evolución futura del trabajo de investigación, a las transformaciones necesarias en el planteamiento del proyecto por lo que se refiere a las nuevas exigencias de formación que emergen en la sociedad y a las modalidades de desarrollo de las investigaciones.

Evidentemente, el informe no puede ofrecer un cuadro completo de la articulación del proyecto (se trata de un proyecto que cubre todas las horas lectivas de la cátedra de Ciencias Matemáticas, Químicas, Físicas y Naturales para la Enseñanza Media: más de 200 horas anuales y más de 600 en el trienio). Las personas interesadas pueden solicitar al Instituto de Matemáticas de la Universidad de Génova copia del Informe Técnico «Hombre-naturaleza, hombre-sociedad, hombre-producción» (Rapporto Técnico «uomo-natura, uomo-societá, uomo-produzione»), que contiene todos los materiales de trabajo utilizados por los profesores en clase, las guías para el trabajo en clase y otra documentación sobre las investigaciones del grupo.

1. El contexto en que se elaboró el proyecto

La reforma de 1962 establecía que el cumplimiento de la enseñanza obligatoria entre los 11 y los 14 años debía hacerse en una escuela igual para todos, superando la división entre «escuela media» (destinada a los muchachos que luego habrían de seguir sus estudios) y «escuela de orientación profesional» (para los chicos que interrumpieran sus estudios a los 14 años). La «escuela media única» salida de la reforma de 1962 tenía, sin embargo, muchos defectos, en particular:

- en su interior volvía a proponer (con la decisión opcional entre el que estudiaban «Latín» y el que estudiaba «Aplicaciones Técnicas» en el último año) una diferenciación basada en la elección de los estudios sucesivos
- el compromiso entre los programas de la vieja «escuela media» de élite y la vieja «escuela de orientación profesional» había reducido el vigor y la validez formativa de las viejas asignaturas de la «escuela media» sin reforzar adecuadamente la educación técnica y científica (en particular, las disciplinas científico-experimentales eran un apéndice de la enseñanza de las Matemáticas y su enseñanza contemplaba preferentemente las «observaciones científicas»)
- la mentalidad de los profesores de Matemáticas y de Letras (Italiano, Historia, Geografía) seguía siendo en muchos casos la de la vieja «escuela media», elitista y a menudo clasista
- la elaboración de libros de texto y de propuestas de actuación concreta de los programas de 1972 marchaba muy lentamente; de hecho seguían

adoptándose los libros de texto de la vieja escuela media, adaptados a los nuevos programas y a la nueva clientela, con la eliminación de los capítulos más «difíciles».

A partir de 1968 en Italia se desarrollaba (en relación con un fenómeno más amplio que en esos años también afectaba a otros muchos países del mundo) un fuerte movimiento de contestación del carácter selectivo y discriminatorio y del planteamiento clasista de la enseñanza obligatoria (en particular la escuela media). Todo ello era discutido por los enseñantes más abiertos (pero también por otros protagonistas de las luchas de aquellos años: comunidades católicas de base, organizaciones y movimientos de trabajadores, movimiento estudiantil...), en particular:

- la selectividad de la enseñanza, que siempre actuaba en perjuicio de los alumnos de extracción sociocultural más modesta
- las características de la cultura impartida por la escuela: separada de los problemas reales de nuestro tiempo, inspirada en valores rechazados por una parte cada vez más amplia de la población y cada vez más retrasada respecto a las exigencias de orientación para integrarse en la realidad productiva y cultural del país
- el rol del enseñante, «vestal de la clase media» y portador de mentalidades y valores pequeño burgueses
- los mecanismos autoritarios de control del trabajo de los enseñantes, que en muchos casos desalentaban la innovación y la experimentación en favor del más obtuso conformismo.

El enorme éxito en Italia por el libro *Lettera a una professoressa (Carta a una profesora),* elaborado en el ámbito de una experiencia de instrucción popular alternativa dirigida por Don Lorenzo Milani (un párroco de la zona de Florencia sensible a los problemas de emancipación cultural de las capas más humildes y atento a las indicaciones y aperturas del Concilio Vaticano II) es buena prueba de cuán fuertemente se sentía la exigencia de un cambio profundo de las características de la enseñanza en la escuela obligatoria.

A diferencia de otros países del mundo, el movimiento de contestación en el campo de la enseñanza (y también a escala social y en las fábricas) no se agotaba en una explosión violenta y breve: podemos decir que al menos hasta 1976 se dieron en la escuela, en la Universidad, en los barrios de las grandes ciudades y en los lugares de trabajo iniciativas de lucha y de elaboración alternativa que influyeron profundamente en leyes, contratos de trabajo y modos de vivir y de actuar en aquellos años y en los sucesivos.

En particular, en diversas universidades (la de Génova con nuestro grupo pero también –y con mayor resonancia nacional– la de Roma con Lucio Lombardo Radice y sus contactos con profesores como Emma Castelnovo y Lina Mancini Proia y otras universidades) la contestación llevada a cabo por algunos docentes y por el movimiento estudiantil contra el carácter discriminatorio, socialmente improductivo o negativo y autoritario del trabajo académico enlazaba (en el terreno específico de la formación de los nuevos enseñantes) con la contestación al carácter selectivo, discriminador y clasista de la enseñanza, en la escuela. Nacían, así, grupos mixtos de profesores de Enseñanza Media y de docentes y estudiantes universitarios, se llevaban a cabo las primeras experiencias de formación del profesorado a través de la práctica didáctica en clases, en las que se trataba de renovar la enseñanza y se intentaba elaborar alternativas, concretas y practicables en clase, al viejo tipo de enseñanza. En efecto, muchos éramos conscientes de que la destrucción de los viejos modelos de enseñanza «selectivos» y «clasistas», aun siendo necesaria, sin embargo, representaba un gran riesgo: hacer la escuela más fácil pero del todo inútil en lo que respecta a la emancipación cultural de las clases sociales más bajas. Así pues, era necesario que la contestación a la enseñanza clasista y selectiva fuera acompañada de la construcción de nuevos modelos de enseñanza, susceptibles de ser aplicados por todos los enseñantes dispuestos a trabajar en el crecimiento cultural de todos los alumnos culturalmente cualificados y, por tanto, capaces de emanciparse culturalmente.

En este marco, en 1974 se formaba el «Grupo de Investigación sobre la Didáctica de las Matemáticas y la formación científica en la escuela obligatoria» en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Génova, y se hacían los primeros intentos de elaboración y experimentación de itinerarios didácticos alternativos. En los dos primeros años se llevaron a cabo, en las clases sobre todo, investigaciones sobre temas de actualidad (la enseñanza, la contaminación...) o sobre temas científicos (la flotación...), tratando de proporcionar a los alumnos un método de trabajo y de inculcarles una sensibilidad ante los problemas científicos y sociales. Se trataba de planteamientos entonces muy difundidos en Italia entre los que intentaban cambiar la enseñanza; el grupo aún no tenía una identidad propia ni una experiencia suficientemente meditada ni profunda y, por tanto, necesariamente tenía que partir del nivel de elaboración presente en el país.

Durante dos años el grupo llevó a cabo una dura crítica de los enfoques adoptados, fundada en la reflexión crítica sobre el trabajo en clase y sobre el análisis de los fundamentos teóricos del «método de la investigación» y de los objetivos «metodológicos» de la enseñanza. En efecto, el trabajo en clase no producía mucho, los padres estaban descontentos, el grupo no se expandía (a pesar de que eran muchos los profesores dispuestos a buscar nuevas vías a la enseñanza). Además, el conocimiento de las orientaciones más recientes de la investigación epistemológica ponía en tela de juicio la existencia misma del objetivo para el que se trabajaba en clase, es decir, el «método científico», además de discutir también la oportunidad del «hacer investigación» en clase en relación con la especificidad del trabajo escolar.

Estas consideraciones han estado, y están, constantemente presentes en el grupo cuando se trata de elegir qué temas, y en qué orden a lo largo de los tres años, utilizar para construir Matemáticas y construir conocimiento del mundo.

En algunos casos hemos seguido las indicaciones de la Historia de la Cultura; por ejemplo, en lo que se refiere a la Geometría como «primera representación del mundo físico» (definición contenida en los programas actualmente vigentes), hemos considerado útil reconstruir en clase el entramado existente en la antigüedad entre construcción de los conceptos geométricos y construcción de nuestra visión del mundo por lo que se refiere a la Astronomía, los problemas de orientación, la representación cartográfica y así sucesivamente. En particular, el concepto de ángulo se construye a través del análisis de los movimientos de las sombras y de la posición del sol en el cielo (con una referencia explícita a la Astronomía y al sistema de numeración de los babilonios en lo que concierne al origen del sistema sexagesimal de medida de los ángulos). Hemos actuado de modo análogo en lo que concierne a la estadística (relacionando la construcción de los conceptos estadísticos con el análisis de datos demográficos y sociales, como en los siglos XVII y XVIII en Inglaterra y en los Países Bajos) o a las funciones (relación con la Física).

En cambio, en otros casos hemos preferido entrelazar la construcción de los conceptos matemáticos con ámbitos temáticos que no corresponden al origen histórico de los propios conceptos. Por ejemplo, por lo que respecta a la probabilidad hemos preferido introducirla a través del estudio de la Genética (enlace establecido históricamente en la segunda mitad del siglo pasado) en lugar de hacerlo a través de problemas de juegos de azar (como en el siglo XVII). En efecto, las investigaciones históricas más recientes sobre los orígenes del cálculo de probabilidades en la Europa del siglo XVII, si por un lado confirman el importante papel «ocasionalmente» desempeñado por el juego de azar para sugerir problemas y modelos para el cálculo de probabilidades, por otro ponen de relieve que personalidades como Pascal y Huighens estaban impulsadas por motivaciones mucho más profundas que la simple curiosidad por problemas matemáticos que nacían en el juego de azar. No es fácil hablar exhaustivamente de tales motivaciones a muchachos de la enseñanza media (en efecto, se refieren a un conocimiento de la Europa que se hallaba en el umbral de la Ilustración y el desarrollo del capitalismo que los muchachos no tienen: voluntad de someter a investigación racional el «azar», previsión económica en situación de incertidumbre...); por este motivo preferimos evitar dar (a través del juego de azar) una imagen distorsionada del real proceso histórico que llevó al desarrollo del cálculo de probabilidades.

La definición de los tres ámbitos de problemáticas elegidas para los tres años de la escuela media («hombre-naturaleza», para el I curso; «hombre-sociedad», para el II curso y «hombre-producción», para el III curso) indica el otro criterio utilizado para la elección de los temas extramatemáticos a través de los cuales construir conceptos e instrumentos matemáticos: proporcionar a los alumnos cuadros de referencia para orientarlos en la comprensión de lo real (entendido en su más amplia acepción). Evidentemente, este objetivo no se puede alcanzar a través exclusivamente de las materias científicas, y por este motivo el grupo favoreció una integración de profesores de Italiano, Historia y Geografía, que elaboraron un proyecto paralelo al de Ciencias con planes de trabajo sobre «hombre y naturaleza», «hombre y sociedad» y «hombre y producción».

A partir de 1980, en el terreno de verificación del proyecto de Ciencias, se desarrolló una profunda reflexión sobre *qué contenidos matemáticos* fuese posible enseñar, efectivamente, a través del contacto cognoscitivo con temáticas referidas a la naturaleza, la sociedad y la producción. El análisis de los resultados de aprendizaje en las clases en que se experimentaba el proyecto permitió formular algunas hipótesis, basándose en las cuales tuvieron lugar ulteriores actividades de elaboración de itinerarios didácticos o de revisión de los itinerarios existentes.

En síntesis, puede decirse que muchos contenidos matemáticos importantes pueden ser efectivamente aprendidos por los alumnos como instrumentos de conocimiento y de organización del conocimiento a través de itinerarios didácticos que tengan por objeto la investigación sobre aspectos importantes de la realidad. Sin embargo, para algunos de estos contenidos es necesario un momento de reflexión y de sistematización interna sucesivo al uso cognoscitivo en las temáticas extramatemáticas, si se quiere que los muchachos lleguen a una segura identificación y a una más inmediata transferibilidad de los conceptos a otros ámbitos de investigación.

En cambio, para otros contenidos (como las fracciones, el cálculo algebraico, las ecuaciones) el trabajo de investigación sobre temas extramatemáticos puede servir sólo para adquirir los elementos de partida para un trabajo de profundización, que creemos que debe desarrollarse con una «lógica interna» a las Matemáticas. Dicho en otros términos: los significados de las fracciones o del uso de las letras pueden ser asimilados por los alumnos en contextos reales; en cambio, creemos que el trabajo sobre los desarrollos sintácticos (reglas del cálculo con las letras y las fracciones, reflexiones sobre las notaciones y los formalismos, etc.) debe realizarse considerando estos capítulos de las Matemáticas como «objetos de conocimiento».

La reflexión histórica sobre el desarrollo de las Matemáticas justifica estas diferencias: las Matemáticas han sido –y siguen siéndolo–, por un lado, elaboración de métodos, lenguajes y contenidos para el conocimiento de la realidad extramatemática, y, por otro (y en relación dialéctica con el primer aspecto), trabajo sobre los «objetos matemáticos» según una «lógica» propia de las disciplinas matemáticas (demostrar, inducir, generalizar, etc.). A nivel didáctico esto se ha traducido en diversas hipótesis de trabajo, elaboradas y experimentada en paralelo por el grupo:

- la línea del «cálculo en la Historia»: los muchachos recorren (con ejercicios técnicos y reflexiones específicas) el desarrollo histórico de los formalismos y de los conocimientos, dándose cuenta del hecho de que las matemáticas, tal como hoy las entendemos, son el producto de un largo proceso de precisión de la naturaleza de los objetos matemáticos, de evolución del rigor demostrativo y de diversificación y especialización del formalismo. En particular, y de acuerdo con esta línea, abordamos en clase los números racionales (desde la representación fraccionaria hasta la representación decimal con sus correspondientes reglas operativas y propiedades), la jerarquía de las operaciones y de los paréntesis en el cálculo algebraico, el teorema de Pitágoras (aspectos aritméticos, métricos y geométricos),
- la línea del trabajo interno, basado en la comparación entre las distintas aplicaciones de un mismo concepto en ámbitos distintos: de acuerdo con esta línea desarrollamos el capítulo «ecuaciones y funciones»
- la línea de la comparación entre modos posibles de introducir y desarrollar determinados contenidos en la práctica didáctica corriente en la enseñanza: así tratamos los números relativos.

El conocimiento del trabajo que Emma Castelnovo llevaba a cabo en sus clases animaba al grupo a revalorizar el valor cultural y cognoscitivo de las Matemáticas. Por otra parte, la realidad del país, que a mediados de la década de los 70 se encaminaba a completar la más grande y más rápida transformación de su historia (millones de personas habían pasado en pocos años del

Sur al Norte, del campo a la ciudad, de la agricultura a la industria y a los servicios) y las transformaciones legislativas en marcha en la enseñanza a partir de 1974 planteaban al grupo nuevas responsabilidades ante la enseñanza. Ya no se trataba de trabajar para pocas clases ni de llevar adelante una experiencia puntera pero sin repercusiones sobre el resto de la enseñanza. En el momento en que la nueva ordenación de la enseñanza en 1974 legitimaba la experimentación didáctica como derecho de los enseñantes y preveía la puesta al día como un deber de todos los enseñantes, se abrían posibilidades nuevas de un trabajo más amplio en la escuela para renovar la enseñanza. En 1976 comienza un proceso más amplio de transformación de la escuela obligatoria, en particular de la escuela media: la escuela media se hace efectivamente «única» (desaparece la opción entre el Latín, que queda abolido, y la Educación Técnica) y se refuerza la enseñanza científica y técnica (globalmente, unas nueve horas a la semana, aproximadamente una tercera parte del horario). Los nuevos programas se elaboran entre 1977 y 1978 y entran en vigor en 1979. Por lo que se refiere a las Matemáticas, que son enseñadas por el profesor de «Ciencias Matemáticas, Químicas, Físicas y Naturales», se prevén nuevos contenidos respecto a programas anteriores (como elementos de estadística y probabilidades, las transformaciones geométricas, el uso razonado de las calculadoras de bolsillo); particular énfasis se pone en el valor cognoscitivo y operativo de los instrumentos matemáticos y se sugieren muchos contactos con la enseñanza de las restantes disciplinas científicas, de la Geografía y de la Educación Técnica.

Así pues, entre 1976 y 1980 el grupo se halla empeñado en un importante trabajo de elaboración y de experimentación de un «proyecto» que debía:

- adecuarse a la educación científica de una población escolar heterogénea, a menudo carente de un bagaje sociocultural estable y homogéneo (sobre todo en los barrios de las grandes ciudades poblados por emigrantes del Sur)
- construir un elemento de verificación para la discusión sobre el texto de los nuevos programas de Matemáticas y Ciencias Experimentales y, luego (una vez aprobados los programas), un modelo de aplicación de los propios programas
- constituir un instrumento de trabajo y un estímulo para las actividades de perfeccionamiento y de experimentación de los profesores.

El «gancho» del proyecto en los profesores es inmediato: se pasa de cuatro profesores comprometidos con el grupo a unos cuarenta en el espacio de cuatro años; los materiales didácticos del proyecto (fichas de trabajo guiado, lecturas) se difunden en millares de copias a través del Instituto de Matemáticas y de Asociaciones de Profesores.

Por tanto, podemos decir que el proyecto actual deriva tanto de una autocrítica interna sobre las experiencias procedentes, como de una comparación con otros enfoques de la enseñanza de las Matemáticas, con una finalización consciente del trabajo en la plena puesta en práctica de las reformas de la enseñanza obligatoria a lo largo de la década de los 70.

2. El proyecto: aspectos pedagógicos

El proyecto asume como objeto principal contribuir (en el terreno científico) a la construcción de una identidad cultural en los alumnos en función de su inserción en la sociedad de hoy, dando por descontada la carencia de una cultura científica difundida en el país, como también la extremada heterogeneidad de los alumnos en el campo de las motivaciones para el aprendizaje y en el de los conocimientos.

Los intereses y las curiosidades de los alumnos son un punto de partida, pero también un terreno en el que actuar para crear nuevos intereses y nuevas curiosidades: en la estructuración de los planes de trabajo anuales se tienen en cuenta algunas características presentes en el promedio de los alumnos (el interés por la naturaleza a los 11 años, el brote de la problemática sexual a los 12 años, los problemas de «orientación» para la continuación de los estudios o para la elección de trabajo a los 13 años), pero también se intenta promover intereses de conocimiento hacia problemáticas (como la económica) que sería difícil que brotaran «espontáneamente».

De este modo, el enseñante de Ciencias no renuncia a desempeñar un rol educativo global, y ejerce ese rol orientando los intereses de los alumnos hacia temas que puedan facilitar la comprensión de los mecanismos de la sociedad en que están a punto de integrarse. En la práctica del trabajo de experimentación del proyecto hemos comprobado que esta responsabilización global de los profesores en el terreno educativo es vivida positivamente por los enseñantes, que tienen ante sí muchachos que se hallan en un momento muy delicado de su desarrollo y que a través del proyecto consiguen «dialogar» con ellos y ganarse su confianza.

En efecto, en la escuela italiana, tradicionalmente es el profesor de Letras (Italiano, Historia, Geografía) el que asume el papel de «educador», el que habla a sus alumnos de sus problemas y de su futuro... Ello molesta frecuentemente a los demás profesores, que se sienten marginados en un papel «técnico», y que si quieren «dialogar» con los alumnos sobre los problemas importantes de la vida deben hacerlo quitando tiempo a las horas de Matemáticas o a las horas del idioma extranjero...

El proyecto permite que los profesores de Matemáticas y Ciencias también intervengan en el terreno educativo sin quitar tiempo a las Matemáticas ni a las Ciencias, reequilibra los roles formativos de los profesores de las asignaturas principales e incluye las Matemáticas y las Ciencias en el cuadro de las materias que contribuyen a formar la cultura y la personalidad de los alumnos.

Por lo que se refiere a las Matemáticas, su valor de «lenguaje para el conocimiento», de «instrumento de interpretación de los fenómenos» y de «instrumento de previsión» viene enaltecido por esta función educativa. *A través de las Matemáticas,* los muchachos comprenden (a un nivel elemental) los mecanismos de la transmisión hereditaria de los caracteres, aprenden a analizar datos que se refieren a la evolución de la sociedad en nuestro país, se dan cuenta de la existencia de leyes económicas de las que dependen muchas transformaciones pasadas y presentes de los modos de producir. La «visión del mundo» que los muchachos se van formando así poco a poco *tam-*

bién es una visión de tipo científico-cuantitativo, y la imagen de las Matemáticas deja de ser la de una ciencia ajena a los problemas del mundo, abstrusa y hecha para los pocos que llegan a comprenderla...

3. **El proyecto: aspectos culturales**

La asunción de un rol formativo para las Matemáticas entre los 11 y los 14 años está estrechamente relacionada (como ya adelanté en el apartado anterior) con una visión de las Matemáticas como lenguaje, como instrumento de interpretación de la realidad y como instrumento de previsión. Las Matemáticas, en la historia de la cultura humana, no son sólo esto (y al final de este apartado volveremos sobre la cuestión), pero es indudable que los aspectos de las Matemáticas vinculados al conocimiento de la realidad extramatemática siempre fueron, y aún lo son, muy relevantes para determinar lo que son las Matemáticas y su evolución histórica.

En efecto, las Matemáticas son parte importante de la constitución y de la transformación de nuestra visión del mundo a lo largo de la Historia y de nuestro modo de hacer a nivel económico, tecnológico y social: desde el cálculo económico de los babilonios hasta la programación económica de nuestros días, o (en otro ámbito) desde las leyes de la estática de Arquímedes a nuestro conocimiento de las leyes del movimiento de los cuerpos, se mide al mismo tiempo el progreso de nuestro conocimiento del mundo y de nuestra capacidad de actuación sobre los fenómenos y el progreso de nuestros conocimientos matemáticos.

4. **El proyecto: aspectos didácticos**

Sobre la base del análisis de la marcha del trabajo de experimentación en las clases, que tiene su comprobación en la lectura de muchas obras recientes acerca de la Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas, nos fuimos orientando cada vez más hacia estrategias didácticas basadas en la interacción, tanto individual como colectiva, con los alumnos. En nuestro planteamiento actual del trabajo en clase los alumnos no son ni potencialidades cognoscitivas que hay que desarrollar según «fases de aprendizaje» que se sucederían en orden rígido e igual para todos, ni receptores en los que desarrollar el aprendizaje como capacidad de respuesta preestablecida a estímulos previstos, sino individualidades en crecimiento que poco a poco forman y modifican representaciones mentales, modos de razonar y modos de mirar la realidad en interacción con el ambiente académico y extraacadémico.

En efecto, hemos visto que, junto a las cosas enseñadas por la escuela, persisten, en los modos de razonar y de representarse lo real por parte de los alumnos, marcadas influencias del ambiente de procedencia, restos de aprendizajes académicos precedentes y huellas de elaboraciones o reelaboraciones autónomas de mensajes académicos y extraacadémicos... Esto afecta a los campos más diversos, desde las Matemáticas hasta la Biología pasando por la Astronomía, y dentro de las Matemáticas afecta tanto al modo de pensar las Matemáticas como a la actitud ante los problemas matemáticos y al contenido mismo de los conocimientos matemáticos, con estereotipos que, a menudo, representan grandes obstáculos para la construcción de una correcta conceptualización.

También hemos comprobado que en la misma clase pueden darse (en relación con las experiencias académicas y extraacadémicas realizadas) modos de razonar y conceptualizaciones que anticipan o invierten los comportamientos «medios» de los niños de esa edad; la variedad de las culturas y de las experiencias extraacadémicas que se dan en una misma clase por efecto de las transformaciones sociales que se han producido en el país (sobre todo, en los ambientes formados por emigrantes de otras zonas de Italia) ofrece ocasiones de observación y de cotejo muy interesantes. Por ejemplo, hemos comprobado que a los diez años el dominio del número, de las operaciones, de los procedimientos y del significado de las medidas decimales y de los conceptos geométricos resulta muy diversificado en todos los sentidos, con predominio, en ciertos casos, de capacidades creativas bien estructuradas, acompañadas de grandes dificultades de verbalización; y, en cambio, en otros casos con prevalencia de capacidades verbales y de razonamiento interno sin verificaciones operativas. El proyecto debe hacer frente a esta variedad de situaciones y de punto de partida que se dan en cada una de las clases en el conjunto de las clases que lo experimenta, y esto representa una dificultad real de dirección del trabajo en clase, que se intenta suplir con una mayor sensibilidad de los profesores hacia la observación de los procesos de aprendizaje y hacia actividades individualizadas de recuperación.

En este sentido, el instrumento de las *fichas de trabajo guiado* (utilizadas en clase para construir conocimientos, para favorecer la comparación con las representaciones mentales y para verificar el aprendizaje) ha demostrado en la práctica ser muy útil, ya que permite al profesor seguir con particular atención a los niños con mayores dificultades de aprendizaje y, además, garantiza un «feed-back» inmediato (aunque no se pueden desdeñar los peligros de un trabajo realizado fundamentalmente con fichas: poco espacio para los razonamientos de los niños cuando resuelven automáticamente problemas, poco espacio para momentos de síntesis global del trabajo desarrollado sobre una determinada unidad didáctica, etc.). La postura actual del grupo, por lo que respecta a la dirección del proyecto en clase, puede resumirse del modo siguiente:

- las fichas de trabajo guiado constituyen el eje maestro de la línea cultural del proyecto y de la construcción de los conceptos (en cuanto representan una referencia meditada tanto para los profesores como para los alumnos)
- junto al trabajo con fichas puede desarrollarse una actividad de recuperación individualizada (usando las fichas y siguiendo personalmente su desarrollo o proponiendo actividades alternativas al grupo de niños con dificultad)
- los momentos de tabajo con fichas deben completarse con discusiones, síntesis guiadas por el profesor y trabajo individual de los alumnos en la resolución de problemas abiertos (con elaboración y descripción completa del itinerario resolutivo)
- la unidad del grupo clase (por lo que respecta a la comprensión del tema tratado, y, en general, la línea cultural del trabajo) debe ser perió-

dicamente reconstruida, bien a través de discusiones y de síntesis (a que nos referimos en el punto anterior), bien a través de la comparación de los trabajos escritos, la formulación de los textos colectivos sobre el trabajo desarrollado y el proyecto y realización de tablas resumidas.

5. El proyecto: problemas de investigación y perspectivas de evolución

Actualmente, los temas de investigación del grupo tratan, de un lado, la adecuación de las temáticas abordadas en clase a los cambios que se producen en la sociedad (en particular, los cambios relacionados con la llamada «revolución electrónica»: informática, telemática, robótica...), y, de otro, el afinamiento de la dirección en clase del proyecto (lo que implica grandes problemas de investigación sobre los procesos de aprendizaje de las Matemáticas y de las demás disciplinas científicas y sobre las interacciones profesor-alumno-grupo de clase). La elección de estos temas y de los modos de desarrollarlos (en particular, el papel de los profesores y del trabajo en clase en la determinación de la evolución del proyecto) ha coincidido con un momento de grandes tensiones y de sucesivas divisiones en el interior del grupo.

La postura de los profesores (que querían seguir siendo protagonistas de las opciones de orientación del trabajo en clase, incluso cuando estas opciones llegaban a plantear complejos problemas de investigación que exigían una especialización y profundizaciones que no estaban al alcance del tiempo que un profesor puede dedicar a la investigación, al mismo tiempo que a la enseñanza), chocó con la exigencia de una parte de los universitarios, que consideraba prioritario el afinamiento de las líneas culturales del trabajo y su adecuación a través de una reflexión «especializada», llevada a nivel ideológico y cultural y no mezclada con las sugerencias y la arbitrariedad de las señales procedentes del trabajo en clase. En cambio, una parte de los universitarios consideraba prioritarios la adecuación de los contenidos culturales e ideológicos del proyecto a las nuevas realidades sociales (revolución electrónica, nuevos sistemas de valores emergentes de la crisis de la sociedad industrial, necesidades expresadas por las nuevas generaciones...) y a los niveles de la elaboración cultural de hoy, pero proponía que esta adecuación se hiciera tomando como punto de referencia importante precisamente el trabajo en clase, «interrogando» la realidad de los alumnos, proponiendo opciones y modificaciones parciales del proyecto incluso alternativas entre sí, apenas esbozadas y no completamente definidas, y verificando su marcha en la clase...

Progresivamente, la postura de los profesores (preocupados sobre todo por el funcionamiento del proyecto en clase, por la capacidad del proyecto de hacerse cargo de las exigencias formativas de los alumnos y por su misma función de enseñantes, que siguen siendo tales, a pesar de lo cual quieren seguir manteniendo un papel de decisión en el grupo) fue acercándose a la segunda postura de los universitarios. Se produjo así una ruptura en el grupo de los universitarios (limitada, por lo demás, al proyecto de Ciencias para la Enseñanza Secundaria; en los demás sectores de actividad, como el proyecto para la Enseñanza Primaria de los 6 a los 10 años, o el proyecto de Italiano, Historia y Geografía, la colaboración de todos los universitarios continúa) y la definición de un plan cuatrienal 1984-1988 centrado en los siguientes puntos de investigación:

- adecuación del proyecto al cambio de las necesidades formativas a través del análisis de cómo tales necesidades se manifiestan en el trabajo en clase y en la sociedad, realizado en segmentos experimentales incluso alternativos que se integrarán poco a poco en el proyecto y que se comprobarán en clase y que paulatinamente serán perfeccionados
- desarrollo de investigaciones sobre los procesos de aprendizaje y sobre el funcionamiento del trabajo en clase, vinculadas por una parte, con las investigaciones que se llevan a cabo en el extranjero (particularmente en Francia) y, por otra, con el afinamiento de las capacidades de observación de los fenómenos didácticos por parte de los profesores y, en consecuencia, con la reflexión colectiva profundizada sobre lo que ocurre en clase y, en general, sobre la verificación del proyecto
- desarrollo de la reflexión cultural y didáctica sobre las Matemáticas como «objeto cultural» y como «instrumento de organización del conocimiento», centrada en los problemas que se plantean en la mediación didáctica (véanse conclusiones del punto 3), pero también sobre los aspectos de tipo histórico directamente relacionados con ella.

En consecuencia, han tenido gran importancia las «reuniones sobre el trabajo en clase», en las que se hace no sólo un reconocimiento de las necesidades formativas, sino también la discusión de la marcha en clase de las unidades didácticas del proyecto (tanto de las más variadas –y entonces la discusión tiende a la profundización de los problemas de aprendizaje– como de los segmentos nuevos, en los que se intenta valorar la productividad de los temas, las orientaciones que hay que dar para la producción de los materiales didácticos, etc.). Junto a las reuniones sobre el «trabajo en clase» funcionan unos grupos «especializados mixtos, formados por universitarios y profesores que trabajan sobre los problemas que surgen en las reuniones sobre el trabajo en clase y que proporcionan elementos para profundizar en ellas; los temas son «aprendizaje de las matemáticas», «comprobación del proyecto, «individuo-sociedad», «nuevas tecnologías», «currículum biológico-naturalista» y «currículum matemático».

Los problemas de la gestión del proyecto en la clase: «El papel del enseñante»

Ana María Rossi Artiaco *

I. INTRODUCCION

En mi exposición trataré sencillamente algunos aspectos metodológicos de la realización en clase del proyecto genovés y, seguidamente, partiendo de algunas fichas de trabajo que nuestro grupo propone a los muchachos, ejemplificaré por vía inductiva la relación entre la habilidad de tipo aritmético y geométrico y los bloques temáticos en los que están insertos. Para clarificar mejor nuestro modo de trabajar es necesario hacer una observación previa.

Los programas italianos para la escuela media recomiendan a los enseñantes, desde el punto de vista metodológico, prestar atención a los procesos de aprendizaje, es decir, observar la modalidad cognitiva y afectiva que caracteriza el aprendizaje de cada alumno; también recomiendan valorar la experiencia extraescolar y los conocimientos que los muchachos poseen con anterioridad; y además invitan a los enseñantes a relacionar los contenidos tratados en la escuela con la realidad del mundo exterior.

Para comprender qué significan en concreto estas recomendaciones pondré dos ejemplos.

Primer ejemplo

En un primer curso de media este año un profesor ha propuesto resolver el siguiente problema:

«He comprado tres Kgs. de miel y 5 Kgs. de patatas pagando 720 y 250 liras por kilo, respectivamente. Además he comprado 4 limones y he gastado en total 3.780 liras.

¿Cuánto cuesta un limón?»

* Instituto de la Matemática de Génova.

Muchos niños han contestado de la siguiente forma:

720 liras × 3 = 2.160 liras precio de la miel.
250 liras × 5 = 1.250 liras precio de las patatas.
3.780 liras : 4 = 495 liras precio de un limón.

El juicio del profesor ha sido: ¡falta de capacidad lógica!

En este caso el profesor no ha intentado, mínimamente, comprender por qué razones los niños han resuelto de este modo el problema planteado. Prestar atención a los procesos de aprendizaje significa en cambio hacer hipótesis sobre el comportamiento cognitivo de los niños para intentar interactuar con ellos.

En el ejemplo dado, el profesor ni siquiera ha pensado en la posibilidad de que el problema planteado tuviera algún defecto de comunicación lingüística; ni tiene en cuenta el esfuerzo hecho por los alumnos que les ha permitido identificar de vez en cuando la operación correcta aunque después se les presente la dificultad para realizar correctamente la secuencia de las operaciones, ni se valora que el problema necesita que se construya en los alumnos el hábito de razonar sobre la sensatez del resultado (el precio de un limón resulta desproporcionado respecto al precio real); en fin no ha tomado en consideración la hipótesis de que entre los niños que no han solucionado el problema pudiesen estar los que no se han querido esmerar a fondo a pesar de estar dotado de «capacidad lógica».

Segundo ejemplo

Problema planteado para solucionar en un segundo curso de media:

«Un trapecio cuya altura es 117 cm., es equivalente a los 9/4 de un rombo cuyas diagonales son iguales a los 8/3 y 8/9 de la altura del trapecio.

Calcular el área del rombo, el área del trapecio y las bases del trapecio, sabiendo que una base es triple de la otra.»

Problemas de este tipo crean marginaciones escolares de los muchachos que no están perfectamente interesados porque, además de no estar relacionados con ningún aspecto de la realidad, no interactúa (conecta) con ninguna experiencia cognitiva vivida por los propios muchachos fuera de la escuela.

Veamos ahora cómo tratamos de superar esta dificultad dentro de nuestro proyecto.

2. LAS FICHAS DE TRABAJO

El 60% de la actividad en clase se dedica al trabajo con fichas. Dentro de una misma ficha están previstos distintos niveles de dificultad. En el primer curso se usan fichas con muchos dibujos para evitar que la dificultad lingüística no encubra la habilidad lógica de otro tipo. Estas fichas pueden desarrollar distintas funciones, por ejemplo:

- explorar los modos de pensar de los niños e introducir nuevos contenidos

- proponer ejercicios de consolidación técnica
- proponer un aprendizaje guiado de los contenidos y la habilidad técnica con ellos relacionada
- proponer la aplicación de la habilidad técnica en contextos diferentes de los que ha sido aprendida.

El trabajo con fichas presenta dos grandes ventajas:

- permite una enseñanza individualizada
- aumenta el papel activo de los muchachos. En efecto, el profesor puede observar mucho a los alumnos y explicar indivualmente, en vez de hablar siempre desde la cátedra.

Observar a los muchachos mientras trabajan es importante para comprender qué dificultades encuentran, para verificar si existe la habilidad propedéutica de los conocimientos propuestos, para explicitar, mediante el diálogo profesor-alumno en el momento oportuno, sus modos de razonar.

A veces el profesor se encuentra con la sorpresa de que tras operaciones absurdas existen modos de razonar correctos, que los niños no saben expresar formalmente en términos matemáticos (ejemplo: ¿Cuántas semanas hay en un mes? Respuesta: ¡7 + 7 + 7 + 7 = 4!).

Los alumnos corrigen y conservan todas las fichas en carpetas individuales. La corrección puede ser: individual, colectiva, autocorrectiva, etc., de acuerdo con la importancia y el contenido de las fichas.

Frecuentemente, al finalizar una unidad didáctica, los niños hacen una reducción en la que repasan a grandes rasgos las etapas del trabajo realizado, expresándolo en términos discursivos o matemáticos y añadiendo sus impresiones y consideraciones.

3. LA HABILIDAD ARITMETICA EN EL PROYECTO: LAS CUATRO OPERACIONES EN EL PRIMER CURSO DE MEDIA (Prima media)

Veamos ahora cómo se afronta la habilidad aritmética de las cuatro operaciones en el proyecto mediante algunos ejemplos de fichas de trabajo.

Ejemplo de ficha de trabajo:

«En 1980 el precio de venta de un Kg. de azúcar comprendía:

452 liras para el cultivo de la remolacha.
250 liras para la elaboración industrial.
8 liras para el transporte.
7 liras para los impuestos.

¿A qué precio se vende un Kg. de azúcar?

- Indica la parte que influye más en la determinación del precio de 1 Kg. de azúcar.
- De un quintal de remolacha se sacan 12 Kgs. de azúcar. ¿Cuántos Kgs. de remolacha se necesitan para producir un Kg. de azúcar?

- ¿Cuánto obtiene un cultivador de remolacha por la venta de dicho producto?»

Un muchacho toma para merendar un pan con jamón York. El pan pesa 100 gr. y el jamón 50 gr. ¿Cuántas calorías proporciona al muchacho esta merienda?

Consultando el cuadro que tienes, calcula cuántas calorías proporciona la siguiente cena:

Pasteles rellenos	azúcar	150 gr.
	carne	70 gr.
	pan rallado	50 gr.
	huevos	1 gr.
	aceite	20 gr.

Organiza tus cálculos en una expresión.

En el folleto de instrucciones sobre «uso y dosis» de la aspirina se lee:

Niños:

- de 3 a 6 años, medio comprimido cada vez, hasta un máximo de tres veces al día.
- de 6 a 12 años, 1 comprimido cada vez, hasta un máximo de tres veces al día.

¿Cuántos gramos de aspirina puede tomar como máximo un niño de 4 años en un día? ¿Y uno de 11 años?

Por los ejemplos expuestos se puede comenzar a intuir el *papel activo* que puede tener el muchacho con ejercicios que le piden confrontaciones, valoraciones, construcción de expresiones, consulta de tablas mejor que sólo ejecución técnica.

Se percibe también la posibilidad de abrir con ello un *coloquio* y una discusión sobre la manera de «representarse el mundo» por ejemplo sus informes económicos, las dietas alimenticias, el papel de la medicina, etc.

A nuestro entender todo esto no es suficiente aún, es necesario también proporcionar a los alumnos cuadros de conocimientos complejos que aumenten su capacidad de representarse el mundo, y por este motivo la ficha de trabajo sobre el precio del azúcar está inserta en la problemática económica del primer año que comprende:

- análisis y discusión de los precios
- indicadores de la formación de los precios
- gráficos de la producción - transformación - distribución de los productos alimenticios.

  Problemática que puede ser ampliada a nivel histórico y retomada a diferentes niveles de dificultad en los años sucesivos, mientras el cuadro de referencia para el cálculo de las calorías es *la educación alimenticia y sanitaria* bajo los aspectos biológicos, tecnológicos, sociales y económicos.

4. ALGUNA HABILIDAD GEOMETRICA EN EL PROYECTO: PRIMERO DE MEDIA

Nuestro grupo da mucha importancia al conocimiento operativo de la geometría, es decir, al conocimiento que implica: reconocer, verificar, construir, trazar, esquematizar situaciones reales en términos geométricos, utilizar las abstracciones geométricas para investigar sus fenómenos.

Nos hemos servido de los rayos del sol para construir alguna habilidad geométrica elemental de modo operativo siguiendo el itinerario didáctico siguiente:

Partiendo de las observaciones cualitativas de las sombras (la sombra cambia de dirección con el paso del tiempo, se acorta o se alarga...), se pasa a las observaciones cuantitativas con el uso del meridiano que se ha hecho construir a los muchachos.

El concepto de ángulo está asociado a la rotación de la sombra y se refuerza con otro tipo de rotaciones (partes del cuerpo, las agujas del reloj, las puertas, etc.); los muchachos aprenden a medir las rotaciones en fracciones de giro (un cuarto de giro, un giro y medio, etc.), y después con el goniómetro.

La noción de «recta» se hace concreta referida a los rayos del sol y a su visualización, es necesario sin embargo no oponer simplificaciones geométricas de los fenómenos físicos a representaciones mentales de los muchachos en las que aquéllos mismos fenómenos están presentes en toda su complejidad, como demuestra la siguiente discusión mantenida en un primer curso sobre la cuestión planteada por el profesor «Dibuja los rayos del sol».

Después de un primer momento de silencio comienzan las preguntas, las consideraciones, las solicitudes de explicaciones por parte de los alumnos del tipo:

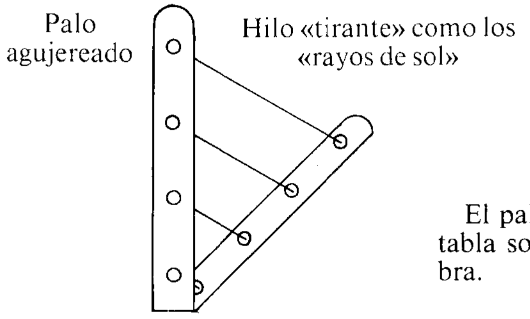
- «Yo no los veo»
- «No sé dibujar la luz»
- «¿Cómo se dibuja el calor?»
- «¿Qué grosor tiene un rayo de sol?»
- «Los rayos del sol existen cuando atraviesan los agujeros, si no son como el agua del mar»
- Cuando utilizo el espejo para reflejarlos los rayos del sol, existen».

Como se puede observar, por parte de los muchachos, es correcta la percepción de los rayos del sol como luz, calor o dirección. Es necesario no destruirla sino clarificar que se puede *aislar* el aspecto geométrico (dirección de los rayos) para construir un modelo que nos permita reflejar fenómenos tales como las sombras, las estaciones, los movimientos de la tierra, etc...

También la noción de rectas paralelas puede tener un fuerte apoyo físico en los rayos del sol. Normalmente, los niños invitados a dibujar un haz de rayos, dibujan un cono de rayos que corresponde a la imagen mental de un haz que, partiendo del mismo punto en el espacio (el sol), cambia a medida que se acerca a la tierra.

Se pueden idear experiencias y observaciones de la realidad que hagan que este modelo falle.

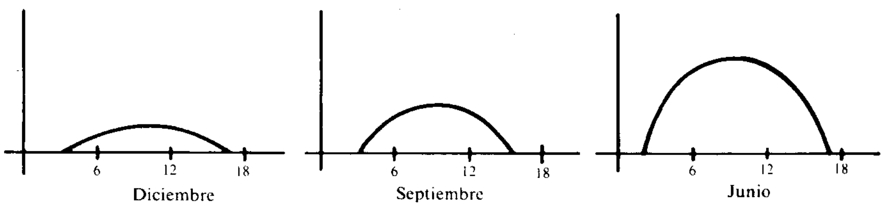
Una experiencia convincente hecha en clase ha sido la siguiente:



El palo perforado está sujeto a una tabla sobre la cual proyecta su sombra.

Los niños son invitados a discutir (¿Qué casos representan las cuerdas?). Se puede repetir la experiencia usando la luz artificial de una pila (En este caso su primitivo modelo mental encuentra confirmación) empiezan a intuir el papel que juega la distancia entre la fuente luminosa y la superficie sobre la que se proyecta la sombra.

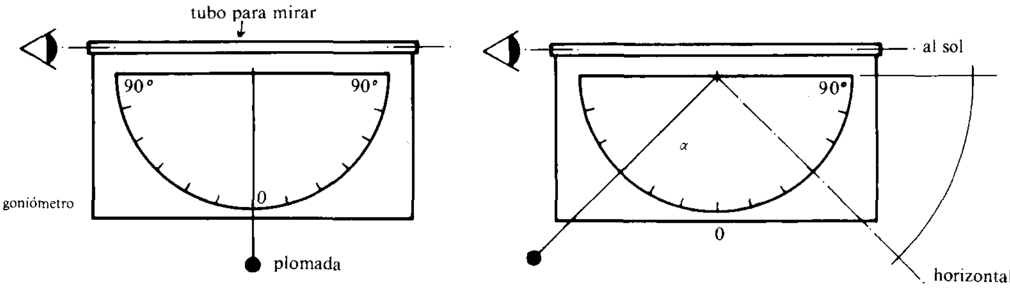
En el trabajo expuesto encontramos también concretada la noción de triángulo, de triángulos semejantes..., se pueden trazar gráficos que representen la altura del sol en el horizonte medida en grados, a diferentes horas del día; se pueden comparar gráficos de este tipo en diversos períodos del año.



DIBUJO 1

El razonamiento se extiende naturalmente a la rotación terrestre (diferentes alturas del sol durante el día) y a la traslación (diferentes alturas del sol durante el año).

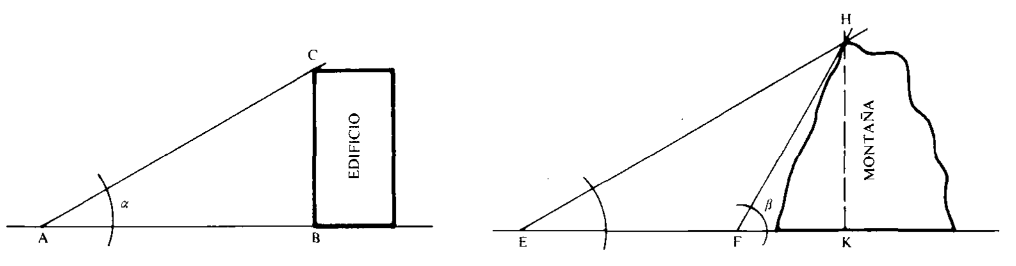
Se puede construir un instrumento para medir la altura del sol sobre el horizonte (mirando el sol a través de una película puesta en la parte anterior de un tubo hueco): el goniómetro vertical.



DIBUJO 2

Otros posibles usos del goniómetro vertical:

- Altura del edificio (Fig. 3): si medimos AB y el ángulo, se obtiene BC;
- Altura de la montaña (Fig. 4): E, F, K, H puntos situados en un plano vertical; se mide la distancia EF y los ángulos y se obtiene la altura HK (y la distancia FK).



DIBUJO 3

Relacionar los ángulos con el movimiento de rotación de la tierra (¿Cuánto gira la tierra en una hora? ¿Y en un minuto? ¿Qué camino ha recorrido un punto del ecuador?, etc.) sirve también para comprender la razón de los submúltiplos del grado.

Tradicionalmente, los niños están habituados al uso del goniómetro, pero también están sometidos brutalmente a ejercicios del tipo:

75° 35' 40" +
20° 42' 35" =   o bien 112° 45' 55" : 5 =

etc.

¿Qué representaciones mentales pueden tener de 1/60 de grado o de 1/3.600 de grado si no llegan a verlas en el goniómetro, no saben cuándo son válidas, no se les muestra cómo se pueden medir?

Los niños, sometidos muchas veces a tratamientos de este género, no pueden preguntar más, ¡aprenden a no pensar!

Aprender a moverse sobre la superficie de la tierra, hallar las coordenadas de un punto, puede evitar la impresión que tiene el sistema de medida sexagesimal adoptado para los ángulos de ser «inútilmente complicado» (además de hacer captar las analogías entre el sistema de medida del tiempo y el de medida de los ángulos).

Sobre la superficie de la tierra, los arcos de circunferencia correspondientes a los ángulos de algún «primero» o «segundo» corresponden a la longitud concreta e imaginable: la latitud y la longitud son las medidas que se podrían leer en los gigantescos goniómetros relativos al globo terrestre.

El trabajo se puede ampliar con profundizaciones en la materia e históricas (coordenadas geográficas y navegación en mar abierto, modos de medir la latitud y la longitud, tecnología de ayer y de hoy).

El conocimiento, las nociones, la habilidad ejemplificada forman parte de la unidad didáctica «medida del tiempo» que aborda históricamente a través de varias etapas la interrelación entre los fenómenos astronómicos y la actividad humana (agricultura, orientación, navegación).

5. LAS SUPERFICIES Y EL CALCULO DE LAS AREAS

Cuando llegan a la escuela media los muchachos ya se han enfrentado a este problema en la escuela elemental, saben que existen polígonos, algunos muy importantes como el triángulo, otros muy «difíciles» como el trapecio, sabe también que para calcular el área se usan fórmulas: la dificultad mayor consiste en acordarse cuándo en una fórmula aparece la división por dos.

En la escuela media, con una enseñanza tradicional se ofrecen de nuevo los mismos contenidos con dos dificultades más: el cálculo con fracciones. Como por ejemplo: medir una longitud desconocida, y el uso de la fórmula inversa.

En nuestro trabajo, nos proponemos en cambio:

- Construir un modo de razonar desligado de estereotipos fijos.
- Partir de la relación directa área-extensión.
- Construir y usar fórmulas unidas al aprendizaje de los primeros rudimentos del cálculo literal.
- Relacionar el cálculo de las áreas con problemas reales.

Las primeras superficies que proponemos a los muchachos son de tipo irregular sobre papel cuadriculado. Deben intentar calcular el área basándose en los conocimientos precedentes: observando a los chicos en esta fase del trabajo se puede tomar nota de su espíritu de iniciativa, de su modo de pensar, y la forma en que usa las nociones que ya posee.

Por ejemplo, algunos alumnos deforman el contorno de la figura hasta obtener una conocida y después aplican una fórmula, otros cuentan espontáneamente los cuadrados, otros intentan descomponer la figura dada en polígonos conocidos. La disensión o comparación de estos métodos facilita a los enseñantes el momento apropiado para introducir el método de la triangulación.

Finalmente un contorno curvilíneo se presta a consideraciones sobre las aproximaciones y los errores.

Dichas habilidades se pueden consolidar y ampliar con fichas de trabajo que traten el cálculo del precio de apartamentos de los que se da el plano a escala, para comparar proyectos de edificios en áreas de construcción sometidas a normas como por ejemplo un determinado coeficiente de edificabilidad. De hecho el problema del cálculo de las áreas está inserto en la temática económica relacionada con el sector de la construcción y sus transformaciones en los últimos 60 años.

Mesa redonda: «Formación inicial del Profesorado en Matemáticas»

Participan:

J. ARRIETA (Facultad de Pedagogía de Oviedo)
M.ª Antonia CANALS (E.U. de Formación del Profesorado de Gerona)
Jesús HERNANDEZ (Universidad Autónoma de Madrid)
Alejandro FERNANDEZ LAJUSTICIA (E.U. de Formación del Profesorado de Valencia)
Luis MARQUEZ (E.U. de Formación del Profesorado de Badajoz)
José Manuel YABAR (E.U. de Formación del Profesorado de Sant Cugat)

ESCUELA DE FORMACION DEL PROFESORADO DE E.G.B. DE GERONA

M.ª Antonia CANALS

1. Asignaturas de Matemáticas

Matemática general, en primer curso, común a todas las especialidades.

En esta asignatura, además de suplir algunos déficits con que llegan los alumnos, se pretende resituarlos respecto a lo que es la enseñanza de la Matemática, y dotarles de unos contenidos básicos en algunos aspectos, así como de los instrumentos (técnicas) necesarios.

Didáctica de la Matemática en Preescolar - 2.º curso de esta especialidad.

Dar una idea del proceso mental del niño de 2 a 7 años, respecto a la adquisición de las nociones de número y de espacio, con una Didáctica adecuada para el futuro maestro de Preescolar y de Ciclo Inicial.

Matemática de 2.º curso - especialidad de Ciencias.

Actualmente dedicamos este curso a la didáctica de la Matemática en los ciclos I y Medio de E.G.B., en todos los bloques temáticos (Lógica, Cálculo, Medidas y Geometría), y de acuerdo con las programaciones oficiales del M.E.C. Creemos que es una asignatura básica para el futuro maestro: El objetivo no es sólo darle unos recursos, sino cambiar su mentalidad respecto a la enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria, posibilitándole para afrontar este aspecto importante de la educación infantil, en una forma adaptada a las distintas etapas evolutivas de la inteligencia del niño, y, al mismo tiempo con creatividad y en una actitud positiva.

Creemos que esta materia, debería impartirse también a los alumnos de las otras especialidades, puesto que su título los capacita para ser maestros en E.G.B., 1.ª etapa, pero el actual plan de estudios no nos lo permite.

Matemática de 3.º curso - especialidad de Ciencias.

Contenido: Los temas de Matemáticas que permiten una adecuada comprensión de los de 2.ª Etapa de E.G.B. Resolución de problemas por distintos métodos. Estudio de distintos niveles de dificultad de un mismo tema o concepto. Análisis de programas oficiales y libros de texto.

Se pretende motivar las ideas básicas y consolidar contenidos, a partir de problemas, y llegar a saber programar un tema.

2. Nos quejamos siempre, y no sin razón, de que los alumnos nos llegan mal preparados del Bachillerato. Concretamente, apreciamos déficits notables en algunas técnicas básicas de Cálculo. Estos déficits en mi opinión, son difíciles de arreglar porque significan que se perdió la edad «adecuada» para unas determinadas adquisiciones. Toda alfabetización o recuperación de adultos es muy lenta... Asimismo se aprecia no ya el déficit, sino el *vacío* de la Geometría, incluso la más elemental.

Pero, por encima de todo ello, queremos hacer constar, que aquello que nos parece más grave de todo (por tanto más urgente de subsanar) es la falta, en muchos alumnos, de capacidad de síntesis, de capacidad de encontrar una jerarquización de las ideas, de distinguir lo esencial de lo secundario..., capacidad en fin de afrontar con orden mental y espíritu claro unos nuevos conocimientos no exclusivamente teóricos.

3. Las «Matemáticas modernas» en realidad nadie sabe en qué consisten exactamente. Creo que hoy existe una manera, si se quiere «moderna» (pero que ya va siendo clásica) de enfocar la enseñanza de las Matemáticas, tanto en los aspectos de Conjuntos y Relaciones (a veces llamados Lógica), como en el Cálculo y en la Geometría. Esta nueva manera, por un lado, pone el acento en las operaciones, en el sentido amplio de la palabra (relaciones, operadores, transformaciones geométricas...), y esto le permite hallar una profunda coherencia entre todos los aspectos antes citados. Por otro lado, intenta enlazar todos los temas de la Matemática con la realidad, y así es como realza los problemas e integra la Estadística. Si esto es la «Matemática moderna» (y para mí lo es), desde luego está presente e impregna toda la Didáctica que yo doy o pueda dar. Además de los elementos citados, para mí lo más importante de la Didáctica de la Matemática, es descubrir, y luego no perder de vista, que el primer objetivo de la Matemática en la escuela no es dar unos conocimientos o enseñar una técnica, sino preparar la experimentación, plantear unos interrogantes, y abrir unos caminos, para favorecer todos los procesos mentales de los alumnos. A mi modo de ver, esto no se llama «Matemática moderna», sino que se llama el principio más elemental de Pedagogía Activa, aplicado a la Matemática.

Creo que nuestro principal objetivo de cara a los alumnos de nuestra Escuela, debería ser capacitarlos para afrontar la enseñanza de la Matemática en la E.G.B., con esta visión.

4. En general, en el departamento, no somos partidarios de separar Contenidos y Didáctica, sino que, por el contrario, creemos que ambas cosas van íntimamente ligadas, y así deben presentarse a los alumnos. A menudo la Didáctica es para nuestros alumnos una fuerte motivación para profundizar los contenidos.

Intentamos luchar contra la mentalidad demasiado propagada de que la Didáctica en sí misma supone un nivel inferior.

Creemos que el maestro debe tener una base de contenidos claros, clarísimos, pero esto no supone toda clase de contenidos matemáticos, sino específicamente los que se relacionan con los temas que el deberá abordar en la escuela, a parte de todos aquéllos de cultura básica (un nivel de COU, que ya deberían tener adquirido). Resumiendo:

En una Didáctica seria tratamos de incluir el repaso, o si es necesario la presentación de los contenidos teóricos que se refieren a cada uno de los temas que se abordan. Muchas veces serán contenidos Matemáticos, otras veces serán de Psicología, y procuramos añadir también, algo de Historia de la Matemática.

Por otro lado cuando se trata de una asignatura de contenidos, como en el 1.º curso por ejemplo, creemos que en una Escuela de Formación de maestros, todos los contenidos deben abordarse con una actitud didáctica. Algunos de nosotros trabaja con el ideal de llegar a establecer un paralelismo de objetivos: objetivos en la Escuela Normal, y objetivos en la Escuela de E.G.B., en cada materia.

Personalmente debo confesar que me queda mucho camino por recorrer en el esfuerzo de formular seriamente los Contenidos que se encuentran detrás de cada uno de los aspectos tratados en la Didáctica, y creo que ello constituye un trabajo urgente a realizar en nuestras Escuelas.

5. Se procura que los alumnos trabajen en grupos, y en este sentido, tienen ya adquirido un buen hábito. Presentan a lo largo de curso algunos trabajos prácticos: recensión de algún libro, pequeño intento de investigación, resultado de alguna práctica en la Escuela Aneja... Todos estos trabajos son controlados, corregidos y comentados.

También se dedican varias clases durante el año, al menos una vez cada 15 días, a la preparación, por grupos, de ejercicios a realizar con los alumnos de E.G.B.

Durante el período de prácticas de 2.º y 3.º curso, se intenta que los alumnos puedan experimentar algo de lo aprendido y preparado en clase. Sin embargo, el que puedan o no experimentar en Matemática depende de factores muy diversos, entre ellos, de la Escuela a donde vayan a realizar las Prácticas, y del Profesor-tutor (un profesor de la Normal) que les corresponda. Cada uno de nosotros somos tutores de un pequeño grupo (10 ó 12) de alumnos de cada curso, y no es difícil prever la práctica de nuestra materia que podrán realizar todos los demás, es decir, aquéllos que no pasan por nuestra tutoría.

Este año, hemos hecho un gran esfuerzo por coordinar nuestra materia con las Prácticas de los alumnos, pero aún estamos muy lejos de conseguirlo.

Como actividades realizadas en el interior de la Escuela, citaré alguna conferencia sobre temas de Matemática (Historia de la Matemática, entretenimientos educativos, problemas...), una visita al Museo de la Ciencia de Barcelona: una exposición de trabajos realizados en clase, de los alumnos de 3.º, y la participación con abundancia de material de Matemáticas, en las jornadas de Preescolar, para los de esta especialidad (las jornadas se celebran cada 2 años). Estas últimas actividades, permiten compartir con otros grupos de alumnos, e incluso con muchos maestros en activo, de la ciudad, que acuden a la Escuela para visitarlas, y al mismo tiempo despiertan una sensibilización respecto al tema.

6. Algún profesor del Departamento imparte cursos para formación permanente de maestros, durante todo el año, en la Escuela (por cuenta del I.C.E.). Los alumnos lo saben, tienen la puerta abierta, y alguna vez acuden por propio interés. Todos conocen ya desde ahora el «movimiento de maestros» local, y están al corriente de sus actividades.

Jesús HERNANDEZ *

Quiero, en primer lugar, agradecer a los organizadores de este simposio su invitación, invitación que me hubiera complacido aún más de ser otra sus condiciones. Un cuarto de hora puede ser suficiente para enunciar una lista de mandamientos que dé cuenta de una doctrina, o para transmitir concisamente informaciones concretas, pero no es demasiado para intentar llevar a cabo con un poco de calma y sosiego lo que hubiera deseado hacer: reflejar el punto de vista de un matemático profesional, profesor universitario, sobre la formación del profesorado de los demás niveles, señalando, de manera más o menos imprecisa, la forma en que su experiencia personal y gremial le aconseja incidir en este terreno. El género literario –o retórico– a que me fuerzan las limitaciones de tiempo, a medio camino entre el telegrama y el aforismo, no es el más indicado para ello.

La finalidad que acabo de exponer puede reformularse, cambiando ligeramente. Hoy, cerca ya de su fin, este simposio parece haberse decantado sin lugar a dudas en el sentido de que lo bueno es preferible, y de lejos, a lo malo, las actitudes sensatas a las irreflexivas, y el sabio equilibrio al desquiciamiento gratuito. Aquí se pretende defender algo mucho menos evidente, o al menos mucho más difícilmente aceptado: que el aumento, no tanto cuantitativo como *cualitativo,* de los conocimientos matemáticos del profesorado no sólo es menos dañino de lo que algunos sostienen, sino que puede, incluso, tener aspectos positivos. En lo que sigue se procurará, entre otras cosas, explicar el significado de *«cualitativo»* en la frase anterior.

Puede ser ahora oportuno alejarse en apariencia, y por un momento, de aquello que nos interesa de modo inmediato para resumir, con la brutalidad que impone la falta de tiempo, algunas tendencias visibles de la reciente filosofía de las matemáticas: una razón para hacerlo puede ser la afirmación de René Thom de que *«tanto si nos gusta como si no, toda pedagogía matemática, por muy incoherente que sea, se basa en una filosofía de las matemáti-*

* Universidad Autónoma de Madrid.

cas. La tendencia modernista se apoya fundamentalmente en la concepción formalista de las matemáticas». Estas tendencias, manifestadas sobre todo en los últimos diez o quince años, se caracterizan por una conciencia cada vez mayor de lo estéril de los esfuerzos de las escuelas clásicas (logicistas, formalistas, intuicionistas) para proporcionar fundamentos sólidos a las matemáticas, un aprecio creciente de los aspectos históricos, y un acercamiento al trabajo *efectivo* de los matemáticos.

Tal actitud no es, desde luego, propia de las matemáticas; se sabe que después del Círculo de Viena y de «La lógica de la investigación científica» de Popper (1934), ha surgido un grupo de filósofos de la ciencia que, pese a sus desacuerdos sobre casi todo, parece compartir al menos una visión de la ciencia en la que en cierto modo la lógica formal ha sido desplazada por la historia y las consideraciones gremiales, y en la que se pone seriamente en cuestión la consabida distinción positivista entre «contexto de descubrimiento» y «contexto de justificación», distinción que puede traducirse groseramente a las matemáticas en términos de *intuición* y *rigor*. El surgimiento de esta tendencia puede fijarse convencionalmente en 1962, con la publicación de «La estructura de las revoluciones científicas», de T. S. Kuhn. Ahora bien, los ejemplos estudiados y desmenuzados por estos filósofos (Hanson, Fayerabend, Toulmin, etc.) proceden sobre todo de la física, o de la química, mientras que dejan de lado las matemáticas. La excepción es Lakatos, en cuyo inteligentísimo y discutible «Pruebas y refutaciones» (1976) se ataca dura y brillantemente lo que él llama escuela formalista, entendida en el sentido de «aquella escuela de la filosofía matemática que tiende a identificar las matemáticas con su abstracción axiomática formal».

En lo que al trabajo de los matemáticos se refiere, creo que puede afirmarse hoy que la intuición es un valor de nuevo «en alza», y en especial la intuición geométrica, empleando esta palabra en un sentido muy amplio; además, los argumentos heurísticos son cada vez más usados y mejor aceptados. Por otra parte, el fracaso de las escuelas de filosofía de las matemáticas antes citada a la hora de demostrar la no contradicción de las matemáticas, junto con resultados como el famoso teorema de incompletitud de Gödel o la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo, han contribuido a modificar, relativizándola considerablemente, la noción de rigor matemático, y hoy se acepta cada vez mejor lo que puede llamarse concepción sociológica de la demostración: en palabras de Thon, *«una demostración es considerada como rigurosa si los mejores especialistas no tienen nada que oponer».*

Me apresuro a añadir que tales opiniones no tienen un origen –o una base– única ni siquiera predominantemente filosófica; incluso, en cierto sentido, es todo lo contrario. No es posible, claro está, decir casi nada aquí de la evolución de esta noción de rigor a lo largo de la historia; digamos rápidamente que dicha evolución en el último siglo estuvo estrechamente ligada al proceso que se ha dado en llamar de «aritmetización del análisis», que puede decirse va desde Gauss, Abel y, sobre todo Cauchy y Bolzano, pasando por Dirichlet, Riemann, Weierstrass y otros, hasta Dedekind, Peano y la teoría de conjuntos de Cantor. Pero no es ésta la única línea a seguir, también están las geometrías no euclídeas de Gauss, Bolyai, Lobatchewski y Riemann, el nacimiento del álgebra abstracta, los primeros brotes de lo que sería la tipología combinatoria, etc.

Hacia finales de siglo suele decirse que surgió la llamada «crisis de fundamentos», originada, al menos en parte, por la aparición de las paradojas de la teoría de conjuntos, y a la que coadyuvaron, en forma diversa, ciertos ejemplos que pusieron en duda la fe que podía depositarse en la intuición, tales como los de funciones continuas en un intervalo sin derivada en ninguno de sus puntos de Bolzano y Weierstrass, o la curva de Peano, que pasa por todos y cada uno de los puntos de un cuadrado, «llenándolo» por completo. Ante ellos, Poincaré se pregunta: *«¿Cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto?»*. Así pues, en los últimos años del pasado siglo, se hizo apremiante la necesidad de asentar las matemáticas sobre base sólidas y definitivas, eliminando todo posible recurso a la intuición, y no sólo en geometría, sino también en todos los demás campos, incluyendo la recién nacida teoría de conjuntos. Como sabemos, la axiomatización de la geometría fue realizada de modo magistral por Hilbert en sus *Fundamentos de la Geometría,* mientras que la de la teoría de conjuntos hubo de esperar hasta 1908, con Zermelo, el mismo que cuatro años antes introdujera el *axioma de elección* dando lugar a las polémicas conocidas.

Este empleo de la axiomática es una característica básica de la matemática contemporánea, y hoy parece estar claro que ha cumplido satisfactoriamente la misión, digamos preventiva, que se le había encomendado, manteniendo a raya, aunque no suprimiendo de raíz, las paradojas de la teoría de conjuntos. Es evidente, por otra parte, su contribución a la claridad en la exposición de resultados y teorías matemáticas; es más discutible, pero no vamos a entrar aquí en eso, su papel dentro de la creación matemática. La culminación de este método se alcanza en nuestro siglo con la publicación de los *Elementos de matemáticas,* de Bourbaki, en los que intenta mostrar la profunda unidad de una ciencia que no era para ellos a principio de siglo sino una colección de disciplinas diversas, aunque muy ligadas. La axiomática permite sistematizar las relaciones entre las distintas teorías matemáticas, utilizando la noción de *estructura;* ahora bien, conviene señalar que este Bourbaki a quien se culpa a veces directamente de la introducción de la «matemática moderna» en la enseñanza no universitaria, insiste en que el aspecto formalista del método axiomático es precisamente el menos interesante. Bourbaki compara el método axiomático con un proceso de taylorización, con una cadena de montaje, cuyas herramientas son las estructuras, pero insiste –y esto se olvida demasiado frecuentemente– en que la intuición interviene, y de manera esencial, en su trabajo.

Pero con esto no se cierran las consideraciones problemáticas sobre estas ideas de rigor e intuición. La actividad matemática contemporánea más reciente nos proporciona otras fuentes de perplejidad en cuanto al grado de confianza que puedan merecernos las demostraciones matemáticas. Una de ellas es el empleo de computadores en ellas, tal ha sido el caso del famoso *problema de los cuatro colores,* resuelto después de largos años de lucha por estos métodos. Otra es la longitud considerable de algunas demostraciones: la de un teorema Feit Thompson de la teoría de grupos finitos ocupa unas 300 páginas, y un especialista de esta misma teoría, Gorenstein, decía hace poco que el teorema fundamental de clasificación de los grupos finitos ocupará unas 5.000 páginas, el 80% de las cuales ya están publicadas o elaboradas.

Llegados aquí, es posible que aun los más pacientes de mis auditores se pregunten por la relación de lo que han oído hasta ahora –pedanterías de matemático– con la formación de los profesores de E.G.B., B.U.P. y C.O.U. y otras siglas. Buena parte de la respuesta, sin embargo, puede leerse en filigrana sobre las líneas anteriores. Tal formación debe suponer, en primer lugar, un dominio *técnico* apreciable de la materia considerada, en nuestro caso las matemáticas, y no quiero ofender a nadie al descubrir el viejo Mediterráneo de que tal dominio no puede ser sustituido por otros conocimientos; en particular, ninguna acumulación de doctrinas y recetas didácticas y pedagógicas puede salvar el escollo; es más, su injerto en una ignorancia cultivada puede dar lugar a una mezcla peligrosa, no ya por su posible estallido, sino por su mera existencia. En cuanto a la precisión de este nivel *cuantitativo* técnico, creo –en una primera aproximación sin duda discutible– que un profesor del actual B.U.P. deben ser licenciado en Matemáticas (o quizá en Físicas) y que este mismo nivel, o al menos tres años de facultad, deben pedirse a los de 5.º a 8.º de E.G.B., pudiéndose rebajar algo esta exigencia en los de 1.º a 4.º

En el párrafo anterior se da una respuesta rápida y sin precisiones a la cuestión de la *cantidad* de conocimientos deseable en los profesores. En éste se intentará decir algo acerca de su *cualidad.* Las consideraciones hechas antes, por veloces y superficiales que puedan ser –y lo son– indican pese a todo la dirección de la respuesta. El profesor, de cualquier nivel, debe sacar todo el partido posible de las intuiciones a su alcance; ahora bien, no sólo son las intuiciones matemáticas algo que varía, y mucho, de unas personas a otras, sino que también, para una misma persona, son algo que se desarrolla en función de los conocimientos que adquiere y la forma como lo hace: de ahí que el estudio de nuevas ramas de la matemática, o de las conocidas desde un nuevo punto de vista, pueda ser muy útil. Hay, además, una por así decir «intuición gremial» o colectiva, que en general se transmite mucho más de palabra que por escrito, y que forma parte, incluso esencial, del oficio de matemático: el aprendizaje y cultivo, en la medida de lo posible, de tales intuiciones, es muy recomendable. La intuición tiene, claro está, sus fallos, y la famosa «demostración» de que todos los triángulos son isósceles muestra que no hay que ir muy lejos para encontrarlos, pero eso no justifica en modo alguno su eliminación o su relegación a un lugar secundario.

Sucede con el rigor algo muy parecido a lo que decíamos de la intuición; ninguno de ellos es un absoluto intemporal desligado de la historia de las matemáticas, y hoy día, somos más y mejor conscientes de ello que nunca, ese es el contrapunto de la «pérdida de la certeza» que sirve de título al último libro de M. Kline. No hay razones para que el profesor de matemáticas, esté donde éste, sea ajeno a este hecho: el problema con el rigor en este dominio no es sólo (no es tanto) el de su *falta* –el profesor que da cualquier cosa por buena si viene en el libro– o el de su exceso pedante fuera de lugar, como el de la ausencia de la conciencia de él o, dicho de un modo un poco más preciso, la incapacidad de calibrar el grado de rigor que se está empleando y su adecuación mayor o menor a la situación correspondiente. Esta capacidad de medida supone un conocimiento de la escala correspondiente, y ese conocimiento sólo puede proceder de la capacidad matemática del interesado: en ese sentido se hablaba antes de mejorar *cualitativamente* las matemáticas enseñadas. Así pues, será recomendable todo aquello que contribuya a relativizar esta noción de rigor y a distinguir sus diferentes niveles y la forma de saltar de unos a otros: en este sentido, una enseñanza bien orientada de la historia de las matemáticas podría ser una ayuda importante, casi indispensable.

Que hayamos hablado de rigor e intuición en dos párrafos distintos no es sino comodidad y deseo de simplificar la exposición. Un profesor debe entender *localmente* la demostración de un teorema, es decir debe ser capaz de justificar cada paso de la demostración, pero debe también hacerlo *globalmente,* es decir, debe captar la intuición (o intuiciones) más o menos ocultas, la «línea general», la «idea» de la demostración. De modo análogo, debería tener, además de un conocimiento preciso de cada resultado de una teoría, una idea más o menos correcta de su puesto dentro de ella, de si es fundamental o accesorio, de cuáles serían las consecuencias de dar una versión más débil o más fuerte del mismo resultado, etc., actividades todas éstas que tienen más que ver con la intuición que con el rigor, pero que al mismo tiempo han de ser llevadas a cabo con rigor... De hecho, intuición y rigor van juntos, y, precisamente en esa proximidad conflictiva radica la tensión subyacente a toda la matemática: intentar acabar, de un modo u otro, con ella intentar «suprimir la contradicción» mediante una «síntesis superadora», para usar una jerga conocida, sería inútil: lo único que podemos hacer es intentar, de la mejor manera posible, aprender a convivir con ella.

José Manuel YABAR

Comunicación que presenta la Escuela de Formación del Profesorado de E.G.B. «San Cugat» de la Universidad Autónoma de Barcelona.

1. Plan de estudios

Entendemos que la Escuela de Formación de maestros es ante todo una escuela profesional y su objetivo no es únicamente proporcionar un bagaje cultural sino formar profesionales de la enseñanza. Teniendo en cuenta este punto de partida, que comporta claramente la potenciación de unos objetivos, y de acuerdo con las especialidades que se imparten en la escuela hemos estructurado los distintos cursos de matemáticas y de didáctica que forman nuestro currículum con las siguientes asignaturas:

- Matemáticas comunes (3 horas/semana) en primer curso.
- Matemáticas y su didáctica (3 horas/semana) en 3.º de la especialidad de Preescolar.
- Matemáticas y su didáctica (3 horas/semana) en 2.º y 3.º de la especialidad de Primera etapa-preescolar.
- Matemáticas y su didáctica (5 horas/semana) en 2.º y en 3.º de la especialidad de Ciencias.

Dentro de este contexto la enseñanza de las matemáticas en la escuela de maestros parte de unos condicionantes que no nos podemos olvidar:

- La estructura de la carrera de magisterio
- los alumnos de la escuela de magisterio.

Por todo ello los objetivos básicos que creemos hemos de potenciar son:

- proporcionar una cultura matemática básica y resituar al alumno frente a las matemáticas
- potenciar una reflexión teórica sobre los contenidos que se imparten a la E.G.B.
- conocer la programación de las matemáticas en la E.G.B. teniendo claro:

  * objetivos generales y objetivos concretos de cada tema
  * los procesos globales de construcción de las matemáticas en el niño, el desarrollo cognitivo y la capacidad de construcción, deducción y abstracción de cada edad.
  * los procesos concretos en el desarrollo de los conceptos, de los mecanismos operaciones con sus grados de dificultad.
  * los recursos didácticos y recursos heurísticos válidos para cada edad y para cada construcción matemática
  * el aspecto heurístico del razonamiento matemático como medio para facilitar la intuición, el descubrimiento y la invención de soluciones a situaciones problemáticas
  * la evolución histórica de los conceptos fundamentales de las matemáticas y en su caso su aplicación didáctica.

Todos estos objetivos quedan repartidos de forma explícita en los cursos de la carrera de la siguiente forma:

- las matemáticas de primer curso, que son comunes para todos los alumnos de la escuela, tienen un carácter instrumental y no didáctico. Los objetivos básicos de este curso son proporcionar al alumno una cultura matemática básica y resituarlo frente a las matemáticas. Se trata de convencer al futuro maestro que la actividad central de las matemáticas es la resolución de problemas y de que bastan una serie de conceptos fundamentales bien asimilados, una capacidad para utilizar un conjunto de variados métodos y sobre todo un uso inteligente de la intuición y del razonamiento para desarrollar con éxito esta actividad científica
- las «Matemáticas y su didáctica» de las especialidades son las que se dedican de forma especial y dentro de su nivel, fundamentalmente, a reflexionar teóricamente sobre los contenidos de dichos niveles así como a potenciar el conjunto de objetivos metodológicos y didácticos que son necesarios para poder impartir esta asignatura.

Un planteamiento basado nada más en principios generales tiene el peligro de entender significados diferentes y a veces diametralmente opuestos. Es por esto que, a la vez que analizamos una pregunta de los puntos propuestos, intentaremos dar un mayor sentido a lo antes expuesto. Para ello expondré la metodología utilizada para el trabajo de la geometría.

Si queremos resumir el espíritu de lo que a continuación expondremos, lo podríamos concretar en la siguiente frase: «QUEREMOS CONSTRUIR LA GEOMETRIA». Freudental dijo en las III JAEM que «no se debe enseñar geometría en todos los niveles sino más bien, en cada nivel del desarrollo cognoscitivo, escolar o no, hay una geometría que se aprende por sí misma siempre que se dé la oportunidad para desplegarse y que es un componente esencial de este desarrollo».

Construir la geometría significa partir del estudio de elementos concretos que realizamos con material, que manipulamos, que descomponemos, que clasificamos y a partir de este estudio potenciamos:

- una capacidad creadora de nuevos materiales y nuevas actividades o proyectos
- un análisis de las dificultades de comprensión de los diferentes conceptos y la forma escalonada de trabajarlos
- una aplicación de métodos renovados o nuevas tecnologías: actividades de laboratorio (estudio escalonado de diferentes posibilidades de un mismo hecho), utilización de materiales muy diversificados, utilización del retroproyector, y este año hemos realizado una experiencia de trabajo de la geometría a partir del lenguaje LOGO: el micromundo de la tortuga.

Este planteamiento nos ha llevado a elaborar un material, todavía en período de preparación, en el cual tomando como tema los polígonos los hemos dividido en los siguientes apartados:

1. **Actividades:** A partir de la construcción del material conveniente (tiras articuladas, geoplano), se realizan un conjunto de actividades sobre el tema que crean las condiciones de reflexión, generalización, estudio de procesos de aprendizaje y de dificultades de comprensión, de clasificación, de descubrimiento de nuevos conceptos... dando posteriormente y al acabar este proceso una visión general del tema.

2. **Ejercicios:** Conjunto de ejercicios sobre dibujo geométrico o sobre planteamientos numéricos que tienen una función de reflexión sobre lo trabajado manipulativamente y que lo completa y consolida.

3. **Cuestiones:** Conjunto de preguntas que engloban los principales contenidos del tema que se han tenido que asimilar y que sirven de autoevaluación del nivel asumido.

Dentro de una metodología de la didáctica de las matemáticas hay un componente que en la escuela le estamos dando una máxima importancia y que no se realiza de manera directa dentro del aula y que es la interacción prácticas-didáctica.

Una didáctica solamente teórica no da suficientes elementos para que los alumnos de nuestros centros de Magisterio sean capaces de colaborar en la renovación de la escuela. Es fundamental que vean su aplicación práctica para que se convenzan de las posibilidades reales de llevar a cabo esta renovación y de que sean conscientes de los problemas que entraña. Por ello desde el año 1975/76 se inició en la escuela una experiencia con alumnos de tercer curso de varias especialidades, en especial de Ciencias, en la cual los alumnos de la normal participan a lo largo del curso en las clases que el profesor de didáctica imparte a una clase de niños, bien de la escuela Aneja o bien de otros centros que han acogido la experiencia. Los alumnos preparan con él las unidades didácticas y le ayudan a la realización, ocupándose cada uno de ellos de un pequeño grupo de niños. Al final de cada sesión, los alumnos de la Normal y el profesor analizan el trabajo realizado y preparan la próxima sesión, desde sus objetivos y metodología hasta el material necesario.

El seguimiento de estas clases supone:

- la preparación conjunta de los temas por parte del profesor de didáctica y de los alumnos que asisten a la escuela de E.G.B. Se preparan y se discuten los conceptos que pueden asimilar los niños, a través de qué contenidos se trabajarán y cuáles serán las técnicas que deberán aprender. Se reflexiona también sobre los hábitos y actitudes que los niños deben adquirir
- la estancia en la escuela de E.G.B. siguiendo las clases de su especialidad. Dentro de cada clase se forman grupos de 4 a 6 niños y a cada grupo se le asigna un alumno de la Escuela de Magisterio, con el objeto que nuestros alumnos analicen las características propias del proceso de aprendizaje, contrasten y comprueben los aciertos y las dificultades que presentan, en el momento de su ejecución, los temas preparados teóricamente.

Con este fin el profesor o maestro introduce el tema a estudiar, plantea los interrogantes a resolver y en definitiva ofrece un modelo didáctico

- la realización de un seminario con el grupo alumnos de Magisterio para analizar, valorar y sacar conclusiones sobre la ejecución y dinámica de cada una de las clases
- la elaboración por parte de los alumnos de una memoria de la experiencia realizada.

En el curso 1983/84 la especialidad de Primera Etapa ha realizado una experiencia distinta pero con los mismos objetivos que la anterior. Un día a la semana los alumnos de tercer curso se trasladan a la Escuela de E.G.B. para responsabilizarse de una clase, en substitución del maestro-tutor que asiste a unos cursos de reciclaje organizados por la Generalitat de Catalunya. Las sesiones que realizarán los alumnos se preparan y analizan con los profesores de didáctica y de pedagogía de la especialidad.

Departamento de Matemáticas, Escola de Mestres San Cugat de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Didáctica y adquisición de la noción de volumen

Gérard VERGNAUD *

El concepto de volumen ilustra de manera particularmente clara los problemas teóricos y metodológicos que tiene planteados la investigación en didáctica. Este concepto tiene, en efecto, diferentes propiedades cuya comprensión progresiva cubre un largo período del desarrollo del niño y del adolescente: mientras ciertas propiedades se captan ya a la edad de 5 ó 6 años, sin requerir, por lo demás, una enseñanza sistemática, otras plantean aún grandes dificultades en la mayoría de los alumnos de 15 años a pesar de la enseñanza que han recibido.

Entre estos dos momentos del desarrollo de los conocimientos se sitúan numerosos procesos en los que intervienen, entremezcladas entre sí, representaciones y operaciones geométricas, físicas y aritméticas. Las diferentes etapas de la conservación del volumen *(Piaget, 1941)* constituyen jalones interesantes de este desarrollo, pero distan mucho de agotar el análisis. Las etapas descritas en los estudios que vienen a continuación no lo agotan tampoco, ni mucho menos. En primer lugar al número. En segundo lugar, porque se centran en un período limitado del desarrollo: clase de quinto (12-13 años) para la experiencia didáctica y el análisis de los manuales, primer ciclo del segundo grado (11 a 15 años) para las entrevistas individuales. Finalmente, porque los lazos que mantiene el volumen con otros conceptos (proporción, superficie, estructuras numéricas y algebraicas) no se abordan sino marginalmente, aunque desempeñan un papel importante.

Dicho esto, hay que hacer una selección, ya que no podemos entrar en el estudio experimental de un campo casi virgen abarcando demasiados problemas a la vez. La elección de la aritmetización como tema de estudio viene dictada en parte por el período de escolaridad estudiado, en parte por el interés más general prestado a las «estructuras multiplicativas» por el equipo responsable de esta investigación.

* Centro Nacional de Investigaciones Científicas de París.

Los autores de manuales interpretan las mayoría de las veces la inclusión del volumen en el programa de quinto curso como una invitación a enseñar las fórmulas clásicas del cálculo del volumen, del paralelepípedo rectángulo, de los prismas, de las pirámides, de la esfera. Ahora bien, la aritmetización del volumen rebasa ampliamente esta cuestión de las fórmulas, hacia arriba y hacia abajo: en primer lugar, hacia arriba, porque el volumen es una magnitud física mensurable que, como tal, soporta relaciones y operaciones que no dependen de sus relaciones algebraicas con las longitudes y las superficies; a continuación, hacia abajo, porque las fórmulas de cálculo implican (y suponen al mismo tiempo) algunas propiedades que los alumnos no asocian necesariamente con la utilización de las fórmulas: tal es el caso principalmente de las propiedades trilineales del volumen.

El volumen es un ejemplo interesante de «producto de medidas», a propósito del cual han puesto de manifiesto varios estudios anteriores sobre «las estructuras multiplicativas», que se trataba de una estructura relacional compleja, más compleja, en cualquier caso, que el «isomorfismo de medidas». En efecto, en el conjunto de los problemas corrientes de tipo multiplicativo, analizamos dos estructuras relacionales distintas:

- la de la proporción simple en la que dos variables son interdependientes linealmente: cantidades de mercancías y sus precios, tiempos y distancias recorridos a velocidad constante, bienes repartidos equitativamente entre personas, superficies cultivables y cosechas, volúmenes de una materia homogénea y masas correspondientes, etc.
- la de la proporción múltiple en la que una variable depende linealmente de otras variables independientes entre sí. Se pueden distinguir dos casos: el del producto de medidas, en el que la magnitud física dependiente puede analizarse dimensionalmente como el producto de las otras magnitudes (área, volumen, trabajo...) y el de la proporción múltiple ordinaria, en el que semejante análisis dimensional estaría conceptualmente fuera de lugar: el consumo de pan en función del tiempo y del número de personas, por ejemplo, no podría considerarse como el producto de un tiempo por un número de personas, aun cuando sea proporcional a uno y otro.

Investigaciones anteriores (Vergnaud y otros, 1978: Vergnaud y otros, 1979; Rouchier, 1980; Vergnaud, 1980) han demostrado que, en los problemas de proporción simple, los alumnos utilizaban con mayor soltura las propiedades de isomorfismo de la función lineal,

$$f(x + x') = f(x) + (x')$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$$

que las propiedades asociadas a la existencia de un factor de proporcionalidad constante entre dos variables.

$$f(x) = ax$$

$$x = \frac{1}{a} f(x)$$

De ahí el empleo de la expresión «isomorfismo de medidas» para designar la estructura relacional implicada en los problemas de proporción simple, por contraste con la expresión «producto de medidas» que designa las relaciones de tipo área, volumen o trabajo, y con la expresión «proporción múltiple», que designa los demás casos de dependencia no-lineal.

Estas distinciones podrían parecer triviales o inútiles si algunos defectos patentes de la enseñanza elemental y de la enseñanza de los colegios no dependiera de un desconocimiento de las mismas. Por ejemplo, muy a menudo todavía se introduce la multiplicación en el segundo curso de la clase elemental, mediante el producto cartesiano, que pone en juego una relación entre tres variables y una función bilineal a pesar de que no se han abordado en absoluto la proporción simple y la función lineal. Otro ejemplo: a menudo, al final de la enseñanza elemental y al principio del primer ciclo del segundo grado, se trata la función lineal centrando el análisis en el coeficiente de proporcionalidad entre dos sucesiones proporcionales sin utilizar jamás las propiedades del isomorfismo, que, de hecho, entienden y utilizan mejor los alumnos.

Como los estudios aquí agrupados se refieren exclusivamente al volumen, no desarrollaremos más estas observaciones y remitimos al lector a las anteriores publicaciones del equipo. Aquí nos limitaremos a unas cuantas tesis e hipótesis relativas al volumen.

1. Como «producto de medidas», el volumen es un concepto multiplicativo de elevado riesgo: es decir, que las dificultades de apropiación de este concepto por parte de los alumnos son frecuentes, importantes y duraderas. En efecto, mientras la multiplicación, en el caso del isomorfismo de medidas, se apoya con toda naturalidad en el carácter aditivo de magnitudes de igual naturaleza,

$$f(nx) = f(x + x + \ldots + x) = f(x) + f(x) + \ldots + f(x) = nf(x).$$

El modelo aditivo puede constituir, en el caso del volumen, un obstáculo para la comprensión de la fórmula y para el análisis de su significado. Esta eventualidad es tanto más probable cuanto que ciertas representaciones «perimétricas» del volumen (el volumen es el contorno, las aristas) pueden venir a reforzar una aritmética aditiva errónea de las magnitudes en juego (ver más adelante «Representación del volumen y aritmetización: entrevistas individuales con alumnos de 11 a 15 años»).

Es de esperar, pues, que se encuentren dificultades en la aplicación de las fórmulas y en la solución de algunos problemas.

2. Las propiedades ligadas al trilinealismo, que apenas se analizan en los manuales, son, de todas formas, conceptualmente difíciles. Merecen un estudio profundo, a la vez en el plano de la evaluación de los conocimientos y en el plano didáctico, pues son esenciales para la comprensión del concepto del volumen.

3. Antes de analizarlo como el producto de tres longitudes o como el producto de una superficie por una longitud, el volumen es en primer lugar una magnitud física directamente mensurable que se presta a comparaciones, a medidas, evaluaciones y aproximaciones, a inferencias cualitati-

vas por unión y complementación (ver más adelante «Una experiencia didáctica sobre el concepto de volumen en quinto curso»), y a sumas y restas. Estos aspectos merecen que se los aborde no sólo en la enseñanza elemental, sino igualmente en el nivel de los colegios, pues siguen siendo fundamentales y constituyen una base necesaria para las construcciones matemáticas ulteriores.

METODOLOGIA

En los estudios que siguen, hemos decidido recurrir a varios métodos. Como todos los investigadores de la didáctica no admiten necesariamente esta metodología, recordaremos brevemente sus características principales y sus ventajas complementarias.

1. Las entrevistas individuales

Se trata de un método clásico en psicología que ha precisado y desarrollado Jean Piaget de forma sistemática para el análisis de las concepciones y de los procedimientos de los niños. Este método, que supone un plan de entrevista elaborado, permite también al experimentador adaptar el curso de la entrevista a las respuestas y comportamientos del sujeto. Le permite sobre todo hacer preguntas suplementarias en función del desarrollo de la entrevista y comentar y contradecir ciertas respuestas del sujeto para obligarlo a aclarar y afinar sus respuestas y razonamientos. Le permite igualmente ajustar el tiempo de la entrevista a cada individuo y registrar índices de comportamiento variados (gestos, dibujos, exclamaciones, vacilaciones...) que aclaran las palabras y los comportamientos del sujeto. Desde este punto de vista, es más rico que el método de los cuestionarios escritos que se pasan colectivamente, a los que, durante mucho tiempo, se han limitado ciertas investigaciones de didáctica.

Sin embargo, no hay que considerar que la forma de llevar la entrevista depende pura y simplemente de la espontaneidad. Antes al contrario, para que se desarrolle de manera comparable de un sujeto a otro, la entrevista debe obedecer a un plan estructurado. El conjunto y el orden de las preguntas abordadas, su formulación, la descripción del material que se pone a disposición del alumno, el tipo de estímulo empleado para «desbloquear» una situación, o el tipo de observación y de contradicción autorizado para obligar al sujeto a afinar su respuesta, en la medida de lo posible, deben estar determinados de antemano, sin lo cual la variedad de los desarrollos posibles haría imposible cualquier comparación.

Otra constricción de la construcción del plan de entrevista es no hacer preguntas demasiado difíciles a quienes fallan y preguntas demasiado fáciles a quienes aciertan, en defecto de lo cual, unos y otros perderían totalmente el interés por las preguntas formuladas. Una solución posible es limitar el cuestionario a unas cuantas preguntas de igual nivel adaptadas a la población de alumnos seleccionados para su estudio. Otra solución consiste en organizar una ramificación de preguntas en forma de árbol que permite hacer preguntas más fáciles a los sujetos que fallan en un ítem, y preguntas más difíciles a los sujetos que aciertan. Esta es la solución con que nos hemos quedado en el experimento descrito más adelante. Esta técnica presenta el inconveniente de desembocar en efectivos de sujetos diferentes para los diferentes items, pero este inconveniente queda ampliamente compensado por la extensión y la variedad de las informaciones reunidas. Como se tarda muchísimo tiempo en realizar las entrevistas y hacer su recuento después, no es una cuestión académica tratar de encontrar un compromiso entre las exigencias de la comparación entre sujetos y la extensión de las preguntas abordadas. El medio habitual utilizado para verificar la validez de las observaciones recogidas es entresacar modelos de respuesta para el conjunto de los items. Si estos modelos hacen aparecer una jerarquía correcta entre items, la técnica de la ramificación en forma de árbol es aceptable. Si la jerarquía no está clara, es que la técnica de las ramificaciones llega a resultados poco interpretables. Ya veremos que la experiencia descrita más adelante desemboca a la vez en una correcta jerarquía para ciertos items y en cierta indecisión para otros. Requiere, pues, prolongaciones.

2. **Las experiencias planificadas escritas**

A veces se buscan efectos de una gran precisión, que dependen de varias variables (estructura relacional, valores numéricos, contexto de referencia, formulación del enunciado, etc.). Entonces, resulta prácticamente imposible prever entrevistas individuales para estudiar el efecto de todas estas variables y, a menos que se renuncie a estudiarlas, es menester recurrir a hacerlo colectivamente pues, en ese caso, son necesarias muestras grandes. Un plan de experiencia sistemática que tenga por objetivo estudiar o controlar los efectos de varias variables desemboca en un número de grupos y subgrupos de sujetos que crece de manera exponencial en relación con el número de variables. Lo que quiere decir que, incluso en el caso de las experiencias planificadas escritas realizadas colectivamente, hay que seleccionar dentro de lo que se decide estudiar y controlar. Por ejemplo, los efectos de orden entre items, que pueden crear desviaciones importantes en los resultados, darían como resultado, si se quisiera controlarlos siempre, la multiplicación abusiva de los subgrupos de sujetos. Lo único que es posible, pues, es limitar estos controles a los casos que aparecen como más importantes para la interpretación.

El conjunto de los estudios descritos aquí no comporta ninguna experiencia de este tipo. El lector podría estar autorizado para considerar que lo recusamos. No hay tal, y nos conformaremos con citar dos investigaciones anteriores:

- en la primera (Vergnaud y otros, 1978) hemos comparado la dificultad relativa de varias clases de problemas de tipo multiplicativo, entre los que se encuentra el cálculo del volumen
- en la segunda (Vergnaud y otros, 1979; Vergnaud, 1980), hemos estudiado la dificultad relativa de los problema de tipo «regla de tres» y la disponibilidad relativa de los procedimientos de tratamiento, variando sistemáticamente los valores númericos.

Creemos que tales experiencias son necesarias en el estudio de la adquisición del concepto de volumen, aunque no sea más que para apreciar los efectos específicos de los valores numéricos (decimales, por ejemplo) y de los sistemas de unidades.

3. Las experiencias didácticas en clase

Los dos métodos precedentes no implican una reflexión didáctica propiamente dicha. Iluminan al didacta, pero no podrían sustituir al método didáctico por excelencia: *La construcción de situaciones didácticas finalizadas y la experimentación de estas situaciones en clase.*

En efecto, la reflexión teórica en didáctica comporta, de manera esencial, y en ello ha insistido Guy Brousseau con la mayor fuerza y clarividencia, el análisis de las relaciones entre los saberes y las destrezas que hay que construir y las situaciones en que se encuentran los alumnos. Es menester que el saber sea funcional para apropiárselo, y la historia de las ciencias pone de manifiesto la estrecha relación entre los conceptos nuevos, los procedimientos nuevos y los problemas que hay que resolver. Por problemas que hay que resolver no hay que entender sólo los problemas prácticos (físicos, tecnológicos o comerciales, por ejemplo) sino también los problemas teóricos (es decir, los problemas de interpretación de los hechos, de elaboración de modelos coherentes, de síntesis de teorías locales, etc.).

El nivel escolar en que experimentamos se presta sin duda mejor a la elaboración de problemas prácticos (hemos seleccionado principalmente problemas de comparación, de medida y de predicción), pero se abordan igualmente algunos problemas teóricos importantes (noción de variable, de independencia, de dependencia lineal, de análisis dimensional).

Partir de situaciones-problema es también situarse dentro del movimiento pedagógico de los métodos activos, pero debe quedar claro para el lector, tras las observaciones que acabamos de hacer, que el interés de los métodos activos no acaba, a nuestro parecer, con la utilización de situaciones concretas, sino que depende mucho más de la relación entre problema que hay que resolver, conceptualización y procedimientos.

En lo que al volumen se refiere, es muy importante asegurar el enlace entre los dos conceptos distintos que puede formarse el alumno:

- por una parte, el volumen es una magnitud física unidimensional que se presta a comparaciones, medidas, estimaciones, sumas y diferencias, etc... en distintas situaciones de la vida cotidiana
- por otra parte, el volumen es una magnitud tridimensional que supone a la vez un análisis físico-geométrico del espacio y una aplicación de este análisis en lo numérico y lo dimensional.

Estos dos conceptos y su enlace es lo que hemos intentado que profundizaran los alumnos de quinto curso. El adoquinado es el medio habitualmente empleado para pasr de uno a otro, pero veremos que no responde más que a una pequeña parte de los problemas planteados por la aritmetización del volumen.

¿Qué preocupaciones hay que tomar para hacer de la experimentación didáctica en clase una experimentación propiamente científica? Se pueden adelantar varios criterios:

- la claridad de los objetivos apuntados y de los efectos esperados
- la fiabilidad de las observaciones efectuadas
- el carácter repetible de los hechos didácticos interesantes.

Aclarar cuanto sea posible los objetivos apuntados y los efectos esperados es un criterio raras veces satisfecho por las propuestas didácticas que hacen habitualmente los profesores, incluso cuando las situaciones y los análisis que proponen son del mayor interés. Esta explicación supone, en efecto, que nos interroguemos no sólo sobre el saber en sí sino sobre la relación de los alumnos con el saber y con los problemas a que ese saber se refiere. Esta aclaración se manifiesta necesaria, por una parte, para evaluar si se han alcanzado los objetivos apuntados y, por otra, para pasar del estadio de la receta que hay que imitar al de la técnica argumentada y validada.

La fiabilidad de las observaciones es un criterio sobre el que apenas hay que insistir. No obstante, en cuanto nos empeñamos en satisfacer este criterio, nos percatamos de que el registro y la relación de los comportamientos y acontecimientos que se producen en clase pueden llevarnos muy lejos. Es fácil perderse en la superabundancia de elementos. El investigador debe, pues, seleccionar observaciones significativas en relación con las preguntas que se hace a sí mismo. Sólo son hechos didácticos los que se pueden articular con unos objetivos apuntados y unos efectos esperados. Sin embargo, también hay que estar atento a los hechos no esperados, que dan testimonio de dificultades y de procesos cuya hipótesis en general no se había hecho, o que parecían poco decisivos, siendo así que, al observarlos, se revelan esenciales. No es el menor mérito de la experimentación en clase revelar tales hechos. El valor de una problemática se mide tanto por su capacidad de hacer surgir fenómenos nuevos e interesantes cuanto por su capacidad de prever lo que va a ocurrir.

El carácter repetible de los hechos didácticos es un criterio aparentemente muy empírico. Y lo es, por otra parte, en cierto modo, puesto que, efectivamente, hay que haber visto repetirse conductas, errores, dificultades y efectos didácticos para concederles un estatuto que no sea anecdótico. Pero no es sólo empírico, pues la apuesta científica que cubre consiste en saber si es posible describir los desarrollos posibles de una serie de lecciones de manera tal que se puedan detectar e interpretar ciertas regularidades y en que el profesor disponga así de medios para comprender y dominar el proceso de que es responsable. Ello no quiere decir, por supuesto, que todo vaya a ocurrir de idéntica manera de una clase a otra. ¡Todo el mundo sabe que tal cosa está excluida! Pero el objetivo que hay que alcanzar es el de que el conjunto de las conductas posibles, trátese de las conductas individuales o de las de grupo, quede bien identificado y, como tal, pueda preverlo el profesor. Las regularidades observadas en psicología para conductas individuales y de grupo permiten considerar como un objeto accesible el poner de manifiesto regularidades en cuanto al desarrollo de una clase sobre un conjunto de situaciones-problema y en un campo conceptual bien definidos.

Asociadas a la aclaración de los objetivos y de los efectos esperados, estas regularidades constituyen el fundamento empírico de la didáctica como ciencia experimental. La epistemología de las matemáticas, en sus aspectos teóricos, socio-históricos y psicológicos, es su fundamento teórico.

4. El análisis de los manuales y de los procedimientos de los profesores

Los procedimientos de los profesores son interesantes por más de una razón. Podemos estudiarlos desde el punto de vista de los conceptos pedagógicos que encarnan (papel del profesor, actividad del alumno, elitismo, distribución del turno de palabra) y desde el punto de vista de los conceptos que reflejan su relación con el saber en sí en sus aspectos prácticos y teóricos. El estudio de los procedimientos de los profesores es largo y costoso, y requiere múltiples precauciones metodológicas y deontológicas. No hemos podido emprender tal estudio, que sería, sin embargo, interesantísimo: los procedimientos de enseñanza del volumen son variados y reflejan, por ejemplo, conceptos muy diferentes en cuanto al espacio del volumen en matemáticas y en cuanto a las propiedades que se juzgan importantes.

El análisis de los manuales sólo nos proporciona una visión limitada y esquemática de los procedimientos de los profesores, aun cuando los manuales son bastante representativos de las concepciones más extendidas: muchos profesores se inspiran en los manuales, y los autores de manuales, a su vez, se inspiran en los procedimientos más corrientes. Pero existen diferencias importantes entre los procedimientos de los profesores y los manuales: por ejemplo, mientras que los manuales de cuarto y de tercero no contienen capítulo alguno y casi ninguna alusión al concepto de volumen, algunos profesores vuelven de bastante buen grado a este concepto después del quinto curso (*).

El análisis de los manuales no es por ello menos indispensable. Tal y como es, por otra parte, permite desentrañar las concepciones más corrientes de los profesores y la forma en que se plasman en la enseñanza los objetos del matemático. En el análisis de los manuales recogido más adelante (**), no nos interesamos por un estudio sistemático de la plasmación tal como la aborda Yves Chevallard, sino sólo por la selección de los aspectos del volumen abordados en la clase y los ejercicios, y por la manera de tratar estos aspectos. Ello implica la construcción de unos cuadros de análisis que se refieren necesariamente a preguntas e hipótesis previas. Vale más, en ese caso, intentar aclarar esas preguntas e hipótesis, que son tan decisivas para la dirección de la investigación como pueden serlo las preguntas, objetivos e hipótesis previas a la experimentación didáctica en clase. Eso es lo que hemos intentado hacer.

5. La necesidad de disponer de una variedad de métodos

A los métodos que acabamos de describir, se pueden añadir todavía otros varios: las encuestas sobre grandes muestras de alumnos y profesores, los es-

(*) Los cursos que componen la enseñanza secundaria en Francia son, en este orden, sexto, quinto, cuarto, tercero, segundo, primero y terminal (Nota de la traductora).

(**) Desgraciadamente, este estudio no puede figurar en este número; se publicará más adelante.

tudios clínicos de casos, los estudios epistemológico-históricos. Requieren mucho tiempo y algunos de ellos, como el enfoque histórico, son especialidades profesionales por sí solos. No hemos podido utilizarlos.

El punto sobre el que quisiéramos insistir, a manera de conclusión de estas breves observaciones metodológicas, es la necesidad de recurrir, para estudiar este objeto complejo que es «la enseñanza y la adquisición de conocimientos», a una diversidad de métodos, complementarios entre sí. Ya hemos indicado que las experiencias planificadas para realizar por escrito permitían el empleo de planes de experiencia bastante complejos, que supondrían un costo prohibitivo con entrevistas individuales. Inversamente, éstas permiten examinar mayor variedad de preguntas a la vez, con mayor precisión. Estos dos métodos permiten, por su parte, elaborar, con mayor conocimiento de causa, una secuencia didáctica experimental y, en particular, definir mejor las hipótesis en relación con las cuales ha de dirigirse la observación. Inversamente, la experimentación didáctica, y sólo ella, permite acercarse a ese objeto complejo que es el desarrollo en clase de una lección o de una serie de lecciones sobre saberes y situaciones determinadas. Revela, a su vez, hechos para cuyo estudio detallado es posible construir después experiencias mediante entrevistas individuales o mediante experiencias planificadas. Conformémonos con dos ilustraciones de esta interacción entre métodos:

- los procedimientos de cálculo observados en las entrevistas individuales y en una experiencia anterior (Vergnaud y otros, 1979) son los que nos han llevado a proponer varias situaciones didácticas, por ejemplo el problema del arquitecto
- las observaciones llevadas a cabo sobre la comparación de volúmenes macizos entre sí y sobre la comparación de volúmenes huecos y de volúmenes macizos han puesto de manifiesto tales dificultades y tal variedad de enfoques que justifican plenamente un nuevo estudio mediante entrevistas individuales.

El análisis de los manuales, en fin, en la medida en que permite percibir las lagunas y los límites de los conceptos que presiden la enseñanza del volumen, permite ver mejor sobre qué puntos es interesante insistir en las propuestas didácticas y en la experimentación en clase.

Esta complementariedad de los métodos es la que nos ha llevado a presentar en un mismo número de la revista «Recherche en Didactique des Mathématiques» los distintos estudios que vienen a continuación.

PROBLEMATICA

Tras estas breves observaciones metodológicas, sobre las que eventualmente volveremos a lo largo de los estudios que siguen, es indispensable concretar un poco más la problemática con que hemos abordado este programa de investigación.

1. El volumen como magnitud unidimensional

Cómo ya hemos dicho más arriba, el volumen es, en primer lugar, una magnitud físico-geométrica que da lugar a comparaciones, estimaciones, operaciones de medición y aproximaciones en varias situaciones de la vida cotidiana del niño. La capacidad de los recipientes culinarios es objeto de observaciones y de actividades organizadas a edades relativamente precoces y, si bien es más difícil contar el número de tazas que se pueden llenar con el contenido de una tetera dada que contar el número de platos necesarios para poner la mesa, se puede, sin embargo, considerar que es algo accesible para la mayoría de los niños a partir de la edad de seis o siete años. Del mismo modo, es relativamente fácil comparar mediante transvase la capacidad de dos recipientes para saber cuál es mayor.

Ello no significa que los problemas de conservación queden por eso solucionados, y sabido es que la conservación del volumen de las bolitas de arcilla sumergidas no la adquieren los niños hasta unos cuantos años después que la conservación de la cantidad de materia e incluso que la del peso.

Ello tampoco significa que estas operaciones y conservaciones se puedan transponer a unos volúmenes cualesquiera, por ejemplo, a los volúmenes macizos o a los grandes volúmenes.

Existen situaciones-problema que sólo implican el aspecto unidimensional del volumen y que no requieren el conocimiento de las fórmulas. El volumen es, en efecto, una medida de los objetos para la cual existen ciertos procedimientos directos de comparación, de estimación y de cálculo. Descubrir

- que el recipiente A es 3 veces mayor que el recipiente B
- o que el recipiente C contiene por sí solo tanto como el recipiente A y el recipiente B juntos
- o incluso que el recipiente D es 2 veces y 1/2 mayor que el recipiente B, más «un poquito».

es una actividad que sólo compromete el aspecto unidimensional del volumen, como magnitud física. Permite, sin embargo, operaciones aritméticas interesantes; y la medida de los volúmenes puede, por ejemplo, diferenciarse de la medida directa de las masas (sabido es que esta diferenciación no es tan evidente para los niños), y servir luego para el cálculo y para la comparación de las masas específicas, sin que en ningún momento se vean implicados el aspecto tridimensional del volumen y la utilización de las fórmulas.

Es esencial que este aspecto unidimensional sea objeto de un estudio y de una reflexión organizados. El adoquinado del paralelepípedo rectángulo, utilizado para enlazar el aspecto unidimensional y el aspecto tridimensional, minimiza de hecho el primero en beneficio del segundo y no utiliza ni la medida directa de los volúmenes en comparación concreta ni otras cuestiones que, sin embargo, se plantean ya en este concepto del volumen como magnitud unidimensional, la elección de las unidades por ejemplo. Por ejemplo, ¿cae por su propio peso que se pueden comparar entre sí y medir con la misma unidad un volumen macizo y un volumen hueco, un sólido y un líquido, un pequeño y un gran volumen? ¿Cae por su propio peso que el número que expresa el volumen es inversamente proporcional a la magnitud de la unidad elegida? Son éstas preguntas que merecen la atención de los profesores y de los investigadores en didáctica, pues bien se ve que una respuesta negativa a algunas de estas preguntas compromete inevitablemente la apropiación por parte de los alumnos de los conocimientos más complejos por los que nos interesamos habitualmente.

2. El volumen como magnitud tridimensional

El volumen es un «producto de medidas». Como tal, pone en juego, tal y como se ve claramente en el caso del paralelepípedo rectángulo, la proporcionalidad de una magnitud en relación con otras cuantas magnitudes. Es muy importante clarificar esta cuestión ante los alumnos pues es decisivo para (por ejemplo, la superficie de la base y la altura en el caso del prisma). Por eso hemos experimentado la utilización de una representación simbólica, el cuadro cruzado de doble dependencia, que nos parece apropiado para percibir la percepción y la comprensión de esta estructura. Por eso igualmente hemos construido para las entrevistas individuales preguntas que tratan principalmente de las propiedades del trilinealismo. Por eso también hemos buscado sistemáticamente en los manuales el espacio que ocupan estas propiedades, en la lección y en los ejercicios.

Evidentemente, el enfoque tridimensional es el que permite dar el sentido más completo a las fórmulas y analizar del modo más profundo los problemas planteados por la aritmetización propia del concepto del volumen. Pero ello no debe llevar a minimizar la aritmetización propia del enfoque unidimensional ni a escamotear el problema de la coordinación de ambos enfoques. Por ello hemos construido situaciones didácticas en las que los mismos podían buscar y utilizar las propiedades de dependencia lineal del volumen en relación con otras magnitudes.

3. La coordinación

La transición y la coordinación entre la representación unidimensional y la representación tridimensional del volumen se hace habitualmente por medio del adoquinado del paralelepípedo rectángulo con adoquines rectos. Pero esta transición puede prepararse de diversas maneras, y algunas propuestas didácticas siguen siendo oscuras en cuanto a la cuestión de saber qué propiedades implican. Por ejemplo, algunos manuales se conforman con presentar la fórmula al lado del dibujo de un paralelepípedo adoquinado (a veces, incluso sin dibujo); existen otros procedimientos en los que el paralelepípedo está descompuesto en capas sucesivas, en renglones y columnas, sin que se analice de otra manera la relación entre esta descomposición aditiva del volumen en volúmenes menores y la descomposición multiplicativa del volumen en función de las tres longitudes características del paralelepípedo.

Ahora bien, en la experiencia didáctica veremos que esta coordinación suscita dificultades importantes en algunos alumnos de quinto, dificultades que sólo podemos ver y entender si nos planteamos efectivamente el problema de la coordinación de las representaciones unidimensional y tridimensional del volumen.

Para terminar esta introducción, no es superfluo recordar unas cuantas orientaciones esenciales del equipo que ha dirigido este programa de investigación.

El enfoque operatorio y psicogenético del conocimiento, es decir, el enfoque que considera que el conocimiento se desarrolla en el tiempo en una interacción adaptativa del sujeto con situaciones que aún no domina, hace desempeñar un papel decisivo a las situaciones-problema y a la actividad del sujeto. Las situaciones-problema son la fuente del saber, en la medida en que en estas situaciones es en las que el sujeto se ve conducido más funcionalmente a elaborar, con sus compañeros sociales (el profesor, los padres, los demás alumnos) los conocimientos prácticos y teóricos que le permiten dominarlas. Son también el criterio, en la medida en que un sujeto que se supone que ha de recibirlo, no se apropia necesariamente un saber transmitido, y en que la prueba de las situaciones-problema permite precisamente evaluar esa apropiación.

Hay un tiempo largo de la psicogénesis, que los psicólogos conocen muy bien, que se mide en años y permite establecer jerarquías dentro de la complejidad de los problemas y de los conceptos matemáticos. Hay también un tiempo corto de la psicogénesis, peor estudiado que el primero y, sin embargo, esencial en didáctica, que atañe a la evolución de los conceptos y de los procedimientos de un sujeto o de un grupo de sujetos frente a una situación nueva. Se observa entonces una evolución más o menos rápida de los procedimientos empleados, así como de los bloqueos más o menos duraderos.

La investigación en didáctica debe tener en cuenta estos dos aspectos complementarios. Sin un conocimiento claro del tiempo largo de la adquisición de los conocimientos, el docente puede caer en errores graves. Sin un conocimiento práctico y teórico del tiempo corto de la adquisición de los conocimientos en situación, se expone a verse singularmente desprovisto para proponer a los alumnos situaciones susceptibles de hacer evolucionar sus conceptos.

Un análisis decisivo para estos dos aspectos complementarios es el de las tareas a las que se ven confrontados los alumnos en tal o cual situación, en tal o cual problema. Por análisis de las tareas que hay que entender el análisis de las operaciones necesarias para el tratamiento de la situación y para la solución del problema planteado. Estas operaciones pueden ser materiales (hacer tal acción), perceptivas (tener en cuenta tal aspecto), sociales (actuar en reciprocidad o cooperar con alguien), etc..., implican operaciones de pensamiento que están necesariamente ligadas a las características conceptuales de la situación. El análisis de estas operaciones de pensamiento, que representa el análisis propiamente cognitivo de la tarea, forma el núcleo del análisis de la tarea. Sin él es imposible comprender la organización de las restantes operaciones: elección de los datos, organización y programación de la acción, recurso a algoritmos o procedimientos parciales (subtareas). Este análisis cognitivo de la tarea se apoya, por supuesto, en el conocimiento profundo de los conceptos matemáticos que están en juego, pero no se reduce a eso, ya que el análisis de la tarea puede llevar a aventajar tal aspecto físico-matemático y no tal otro, en función de su fecundidad para dar cuenta de las conductas efectivamente observadas.

Lejos de oponerse entre sí, la teoría de las situaciones didácticas, la teoría de la complejidad psicogenética y la teoría del análisis de la tarea se manifiestan complementarias entre sí, y, a veces, indisociables.

En los estudios que siguen, hemos intentado, no efectuar en cada caso un análisis detallado de la situación, de la tarea y de la complejidad, puesto que eso también supondría que las situaciones propuestas hubieran sido objeto ya de numerosas investigaciones, sino sólo aclarar lo mejor posible las características de la situación, los objetivos apuntados, las hipótesis efectuadas y las conductas observadas. Así, pensamos poder pasar, a medio plazo, de la exploración de un terreno casi virgen a una descripción y un análisis fiable de los hechos didácticos y psicológicos más significativos. Algunos de estos hechos se manifiestan relativamente bien establecidos, otros lo están menos, algunas observaciones no pueden pretender en modo alguno el estatuto de hechos. Hay, pues, que acoger estos estudios como una primera aproximación, que arroja ya algunos resultados, pero no ciertamente como un modelo acabado de investigación en didáctica.

«Representación y aritmetización de la noción de volumen. Entrevistas individuales realizadas con alumnos de 11 a 15 años».

Graciela RIGO *

Los diferentes aspectos de la noción de volumen abordados en esta investigación no pretenden agotar la problemática de esta noción.

Nuestro objetivo ha sido obtener una imagen diferenciada y significativa de los conocimientos de los alumnos de 11 a 15 años. Esta imagen, nos permitirá elaborar un cierto número de hipótesis para orientarnos en la construcción de situaciones didácticas sobre la noción de volumen.

I. Construcción de la experiencia

La investigación está centrada sobre la aritmetización del concepto de volumen y particularmente sobre las propiedades trilineales del mismo.

La serie de items propuestos a los alumnos se refieren a los siguientes aspectos: inicialmente se piden dos cálculos directos de volúmenes paralelepípedos cuyas dimensiones lineales no son dadas y que el alumno debe estimar o medir,

- un volumen pequeño exterior al sujeto (caja de cartón simulando un acuario),
- un gran volumen en el cual el sujeto se encuentra (habitación en la cual entrevistamos al niño).

A continuación abordamos los aspectos trilineales propiamente dichos,

- establecer una razón entre dos volúmenes (acuarios) conociendo la razón existente entre los largos, los anchos y las alturas,

* Universidad René Descartes de París.

NOTA: G. Vergnaud y A. Rouchier son co-autores de la presente investigación publicada en francés con el título «Représentation du volume et arithmétisation» Entretiens individuels avec des élèves du premier cycle (11 à 15 ans).

- determinar el número de cubos necesarios para agrandar un objeto con forma de L,
- conociendo los diámetros de dos esferas de distinto tamaño decir cuántas esferas pequeñas hacen un volumen equivalente al de la esfera mayor.

La última pregunta se refiere a la operación inversa:

- *encontrar una dimensión lineal de un paralelepípedo rectángulo cuando se dan como datos el volumen y las dos otras dimensiones.*

A continuación presentaremos los diferentes items.

Item 1_1: **Volumen del acuario**

Material: el sujeto dispone de un modelo de tamaño natural (largo 39 cm., alto 17 cm., ancho 20 cm.) fabricado con cartón y de un centímetro.

Consigna: «¿Puedes decirme qué cantidad de agua puede contener este acuario cuando está completamente lleno?».

Item 1_2: **Volumen de la habitación**

Material: la habitación en la cual entrevistamos al sujeto.

Consigna: «¿Puedes darme una estimación del volumen de esta habitación?».

Item 1_3:

Consigna: «¿Puedes decirme qué es el volumen?». Si el alumno tiene dificultades: «¿Cómo le explicarías a un amigo lo que es el volumen?».

Item 1_4: **Cálculo del número de cubos (legos) necesarios para construir un paralelepípedo de 4 × 3× 2:**

Material: un centenar de cubos encajables de 1 cm. de arista.

Consigna: «¿Cuántos cubos necesitas para construir una caja completamente llena (como una caja llena de trozos de azúcar) que tenga 3 cubos de ancho, 4 de largo y 2 de alto?».

Item 2_1: **Razón entre el acuario pequeño y el grande**

Consigna: «El señor Dupont tiene un acuario pequeño en la cocina y un gran acuario en el salón. El acuario del salón es 2 veces más largo, 3 veces más ancho y 2 veces más profundo que el de la cocina. ¿Cuántas veces mayor es el acuario de la sala que el de la cocina?».

Item 2_2: **Razón entre dos esferas**

Material: esferas de madera

- varias esferas de 2 cm. de diámetro,
- 1 gran esfera de 4 cm. de diámetro.

Una balanza de dos brazos.

Consigna: «Mira estas 2 esferas. Si mido el diámetro de cada una (mostrar el ancho, la altura...) la grande mide 4 cm. y la pequeña mide 2 cm. La grande es pues 2 veces más ancha que la pequeña. ¿Cuántas veces cabe el volumen de la pequeña en el de la grande? ¿Y el peso?

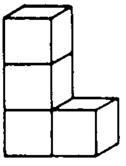
Una vez que hemos obtenido la respuesta verificamos en la balanza G = 8 P.

¿Por qué la grande pesa 8 veces más que la pequeña?».

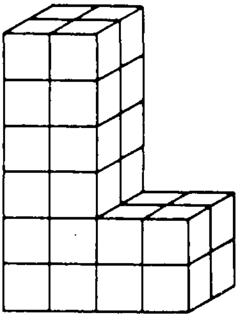
Item 2_3: **Cálculo del número de cubos necesarios (legos) para agrandar una pequeña L**

Material:

- una pequeña L fabricada con 4 cubos encajables de 1 cm. de arista que el niño puede observar,



- una L grande de la misma forma fabricada con 32 cubos del mismo material (las dimensiones lineales son el duplo de las de la L pequeña).



Consigna: «He aquí una L fabricada con legos (pequeña L de 4 cubos). Para fabricar ésta, más grande (que mostramos y escondemos rápidamente) la hice dos veces más larga, dos veces más ancha y dos veces más gruesa que la pequeña. ¿Cuántos cubos hay en la L grande?».

Item 3: **División**

Consigna: «El volumen de un bloque paralelepípedo (como una caja de azúcar) es de 60 legos. El bloque tiene 3 legos de ancho y 4 de alto. ¿Cuántos tiene de alto?».

En casi todos los items presentamos objetos para evitar al máximo equívocos o una interpretación errónea de la consigna verbal.

El cuadro I describe en forma sucinta el orden de presentación de los distintos items. La presentación de un nuevo item depende del éxito o del fracaso al item precedente. Así el item 1_4 se presentó solamente a los alumnos que habían fracasado al determinar el volumen del acuario y el de la habitación. Pensamos que el material presentado en 1_4 (legos) sería una representación que ayudaría a los alumnos que habían fracasado.

El orden de presentación de los items 2_1, 2_2 y 2_3 (cuyas soluciones exigen componer las razones entre dos volúmenes) se basa en el nivel de dificultad que encontramos en un estudio realizado anteriormente sobre la complejidad de estas tareas.

Las entrevistas fueron realizadas individualmente y grabadas en su totalidad. Un observador tomaba nota del desarrollo de la entrevista y de los hechos que se consideraban importantes.

Los alumnos pueden elegir el procedimiento de solución que desean emplear. En caso de duda o error los sujetos no reciben ni estímulo ni correcciones del experimentador.

La muestra es de 80 alumnos, 20 alumnos por cada clase (10 niñas y 10 varones):

clase de $6^{\text{ème}}$ (de 11 a 12 años).
clase de $5^{\text{ème}}$ (de 12 a 13 años)
clase de $4^{\text{ème}}$ (de 13 a 14 años)
clase de $3^{\text{ème}}$ (de 14 a 15 años).

En Francia los alumnos de 6ème y 5ème pertenecen a una población no seleccionada. Ya en la 4ème hay alumnos que han pasado a otro tipo de enseñanza.

Los alumnos que pasaron esta experiencia fueron elegidos en función de los siguientes criterios: tener un rendimiento medio en la clase de matemáticas y venir voluntariamente a la prueba.

II. Exitos y fracasos: patterns de respuestas

El cuadro II resume los resultados obtenidos por los alumnos de las diferentes clases. Los patterns (A, B, C,...) han sido ordenados desde el fracaso a todos los items (A) hasta el éxito completo de la prueba (P).

Los fracasos a la totalidad de la prueba son numerosos sobre todo en la clase de 6ème; pero los encontramos aun en la clase de $4^{\text{ème}}$ y de $3^{\text{ème}}$.

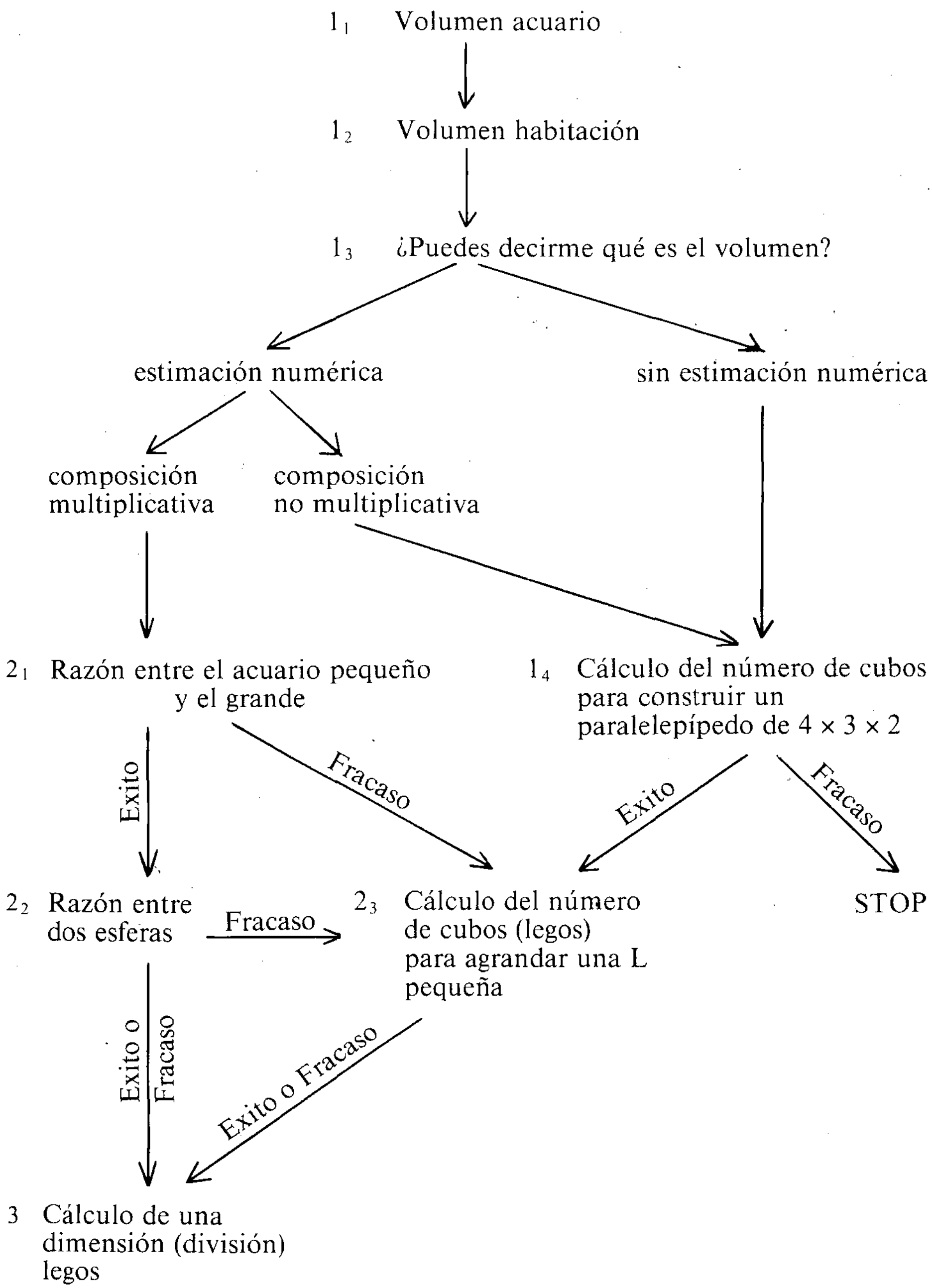
Señalemos igualmente que un número considerable de alumnos fracasa en los dos primeros items (1_1 y 1_2) pero al mismo tiempo logran dar respuestas correctas en el item 1_4 (cálculo del número de cubos necesarios de un paralelepípedo) y a veces en el item 3 (división). Son estos mismos sujetos los que fracasan en los items posteriores.

Notemos finalmente:

- la dificultad notoria del item de los dos acuarios (2_1) que sólo es resuelto correctamente por más de la mitad de sujetos en la clase de $3^{\text{ème}}$.

CUADRO I

Orden de presentación de los diferentes items



CUADRO II

Resultados obtenidos por los alumnos de las diferentes clases

Volumen acuario	Volumen habitación	Legos 4 × 3 × 2 ×	razón 2 acuarios	razón 2 esferas	L	división	Clase 6ème 11-12 años			Clase 5ème 12-13 años			Clase 4ème 13-14 años			Clase 3ème 14-15 años			
							V	H	T	V	H	T	V	H	T	V	H	T	
–	–	–	–	–	–	–	5	8	13	–	2	2	1	2	3	0	1	1	19
–	–	+			–	–	4	2	6				0	2	2	0	1	1	9
–	–		–		–	–				0	1	1							1
–	+		–		–	–							0	2	2				2
–	–	+			–	+				3	2	5	2	1	3	0	3	3	11
–	–	+		–	+	+										1	0	1	1
–	–	+		+	+	–							0	1	1				1
+	+		–		–	–				1	2	3							3
+	+		–		–	+				2	1	3	0	2	2	4	2	6	11
+	+		–	–	+	–				1	0	1	0	0	1				2
+	+		+	–	–	–							1	0	1				1
+	+		–	–	+	+				1	0	1	2	0	2				3
+	+		+	–	–	+	1	0	1	2	2	4	1	0	1	4	0	4	10
	+		+	–	+	+							1	0	1	0	1	1	2
–	+		+	+		+							1	0	1				1
+	+		+	+		+										1	2	3	3
							10	10	20	10	10	20	10	10	20	10	10	20	80 = N

el signo + indica el éxito al item.
el signo – indica el fracaso al item.

- la extrema dificultad del item de la L agrandada y del item de la esfera que son, como era de esperar, los items más complejos.

Estos resultados nos permiten afirmar que el concepto de volumen no lo dominan los alumnos del primer ciclo de la enseñanza secundaria. Agreguemos que en Francia el volumen es objeto de una enseñanza sistemática en la clase de 5ème y luego desaparece de los programas de 4ème y de 3ème.

El cuadro III que:

- el cálculo directo del volumen y la división son de una dificultad comparable, aunque el segundo es un poco más difícil que el primero,
- cuando el alumno no dispone de la fórmula para el cálculo directo, ésta puede ser «reactivada» al recurrir al modelo geométrico de la construcción (item I_4).

III. Análisis de procedimientos y de las respuestas

Llamamos «procedimiento» al conjunto de pasos que el alumno utiliza al seleccionar, interpretar, tratar los datos del problema para llegar a una solución. Analizaremos tanto los éxitos como los fracasos, puesto que las soluciones algorítmicas son precedidas de soluciones menos generales y menos elaboradas, que a su vez son precedidas de procedimientos erróneos cuyo análisis es importante realizar.

III a. Cálculo directo del volumen. Procedimientos utilizados en el cálculo del volumen del acuario 1_1 y de la habitación (1_2).

Hemos distinguido cinco categorías. Estas categorías las determinamos en función de los cálculos efectuados o explicitados por los sujetos y según otras indicaciones (dibujos por ejemplo) que nos permitieron decidir cuáles eran los aspectos utilizados por los alumnos.

1–) los procedimientos de tipo volumen,
2–) los procedimientos de tipo «perímetro»,
3–) los procedimientos de tipo «superficie»,
4–) los procedimientos de tipo «mixto»,
5–) otros procedimientos.

1–) tipo **volumen:** el cálculo consiste en multiplicar las tres dimensiones. La multiplicación pueden ser realizada de distintas maneras:

(largo × ancho) × alto
(largo × alto) × ancho
(ancho × alto) × largo

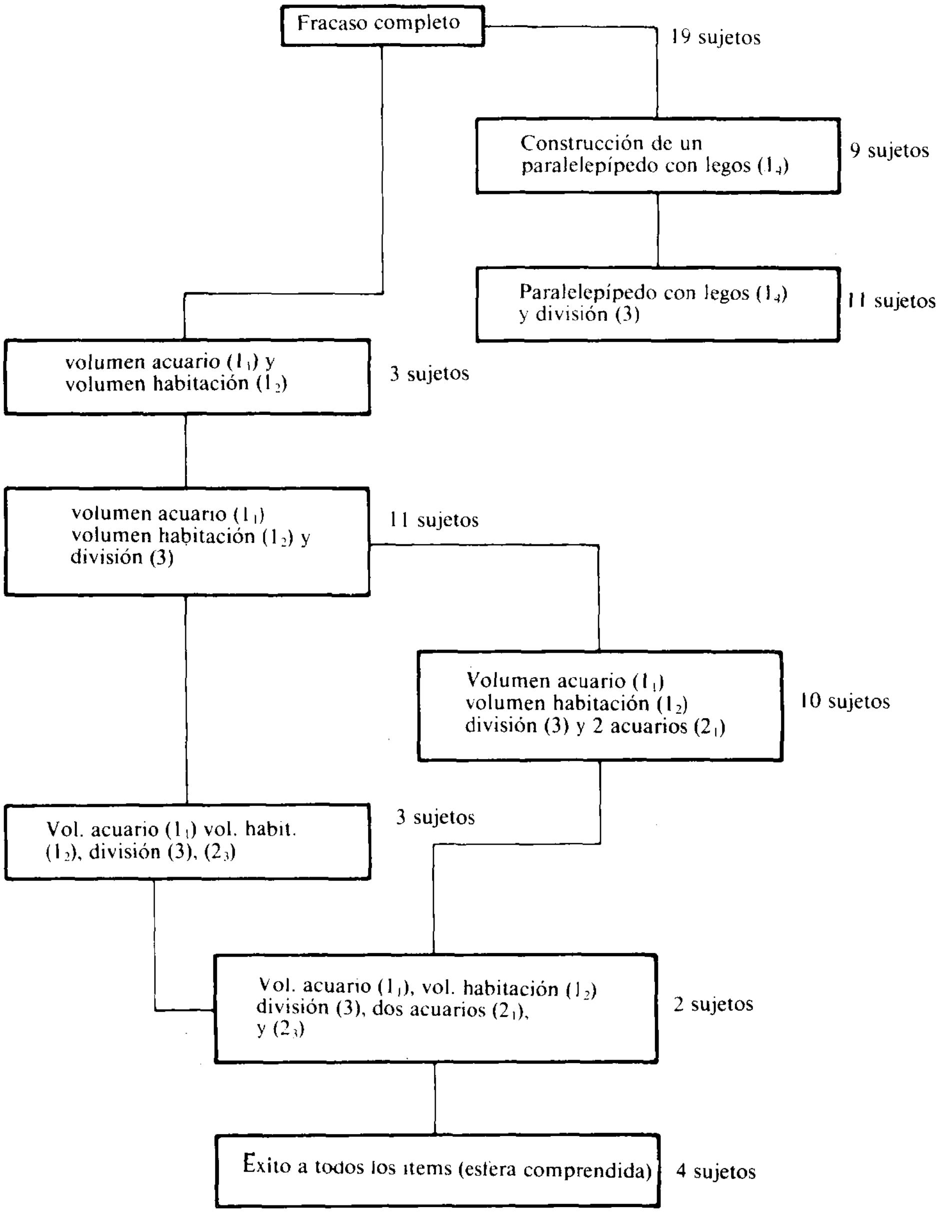
Nicolas (3ème; acuario)

Mediré el ancho... 20 cm., de largo... 40 cm. y la profundidad... 17 cm. Después multiplico estas medidas entre ellas. Encuentro 12.200.
¿Qué es 12.200? (1)
Son 12,2 litros.

(1) Lo subrayado corresponde a las intervenciones del experimentador.

CUADRO III

Organización jerárquica de los patterns más frecuentes



2–) tipo **«perímetro»**: el cálculo efectuado hace intervenir un modelo aditivo. El alumno toma solamente en cuenta de una manera total o parcial, las aristas del sólido.

Hemos encontrado:

- perímetro de la base o perímetro de una lateral,
- mitad del perímetro,
- perímetro + 1 alto o 2 altos o 4 altos.

Antonio (6ème; acuario)

Mide el alto 18 cm., el largo 40 cm. (que denomina ancho) y realiza el cálculo siguiente:

$$18 + 40 = 58$$
$$58 \times 2 = 116 \text{ cm.}$$

Esto da 1,16 metros, lo cual hace 1,16 litros.
¿Los litros corresponden a los metros?
Si, 1,16 litros es lo que hay que poner de agua para llenar este acuario.

(El cálculo de Antonio consiste en realizar el perímetro de la base).

3–) tipo **«superficie»**: el cálculo efectuado hace intervenir productos de dos dimensiones (largo × ancho) o (ancho × alto) o (largo × alto). A veces el alumno adiciona las áreas obtenidas.

Véronique (4ème; habitación)

Estimar... el largo y el alto. El largo podría ser de 6 m... el ancho (mira la altura) el ancho puede ser 4 m. (esta vez mira efectivamente el ancho), ahora multiplico 6 × 4 = 24 metros, pero... también está el alto... tiene 5 m.

Entonces tendrías 6 m., 4 m. y 5 m...

Tengo 24 pero está el techo y el piso... 24 × 2 = 48. Ahora la pared 5 × 4 = 20, lo que da 40 m. para las dos paredes.

Entonces, 48 + 40 = 88 metros.

4–) tipo **«mixto»**: los cálculos hacen intervenir las propiedades de la superficie (multiplicaciones) y del perímetro (adiciones).

Cristel (6ème; acuario)

Mido el largo... igual a 40 cm., el ancho... 21 cm. y finalmente el alto... 16 cm.

Multiplico largo por ancho lo cual da 840 más el alto, y el resultado lo divido por 2.

... Hay que poner 428 decilitros.

¿Con qué unidad habías medido? ¡En centímetros!

¿Cómo pasaste de cm. a dl.?

¡Si pongo litros sería demasiado!

5–) otras conductas:

- los alumnos hacen una estimación de dimensiones elementales sin lograr componerlas

Nathalie (4ème; acuario)

Mide 40 cm. de largo, 21 cm. de ancho y nos dice: ¡No sé qué hacer!

- confunden la masa con el volumen,
- fijan arbitrariamente una cantidad «x» de litros, agregando: «... porque el acuario de casa es parecido a éste» o «... me imagino que voy echando botellas de un litro...»
- miden la altura del recipiente y consideran que esta medida corresponde al volumen.

Los dos últimos procedimientos sólo aparecen en el item acuario.,

CUADRO IV

Procedimientos para calcular el volumen (items I_1 y I_2)

Item I_1

Volumen acuario

Clase / Procedim.	6ème	5ème	4ème	3ème	T
Tipo volumen	1	12	8	14	35
Fracaso	0	0	1	0	1
Tipo perímetro	5	0	2	0	7
Tipo superficie	3	4	5	2	14
Tipo mixto	3	1	0	1	5
Otros	8	3	4	3	18
Sin respuesta	0	0	0	0	0
T	20	20	20	20	80

Item I_2

Volumen habitación

Clase / Procedim.	6ème	5ème	4ème	3ème	T
Tipo volumen	1	12	11	14	38
Fracaso	0	2	0	0	2
Tipo perímetro	11	1	1	0	13
Tipo superficie	4	2	3	2	11
Tipo mixto	3	0	0	1	4
Otros	1	1	2	3	7
Sin respuesta	0	2	3	0	5
T	20	20	20	20	80

En el cuadro IV vemos la repartición por clase de las diferentes categorías de procedimientos utilizados para calcular el volumen del acuario y el de la habitación.

Observamos que los procedimientos de tipo «volumen» son utilizados en ambos items casi con la misma frecuencia (38/80 en la habitación 35/80 en el item acuario). Sólo a partir de la clase de 5ème son mayoritarias las respuestas correctas, no se constata ninguna progresión ni en la clase de 4ème ni en la de 3ème.

Recordemos que el volumen es parte integrante del programa de la clase de 5ème.

Los procedimientos de tipo «perímetro» son mayoritarios en la clase de 6ème y desaparecen en la clase de 3ème.

Los procedimientos de tipo «superficie» son utilizados desde la 6ème hasta la 3ème.

Los «otros» procedimientos, más numerosos en el cálculo del acuario que en el de la habitación, aún persisten en la clase de 3ème.

Cualquiera que sea el procedimiento utilizado, su empleo exige, casi siempre, un esfuerzo sostenido del alumno. Estos cálculos (a veces producto del azar, cuando el alumno «se pierde») reflejan una representación del volumen que vale la pena analizar y que no debemos desechar sencillamente porque es errónea.

Hicimos un cuadro comparando los procedimientos utilizados por un mismo alumno en el item acuario y en el item habitación. Allí vemos que 57 sujetos (más de la mitad de nuestra muestra) se encuentra en la diagonal del cuadro, lo que indica una cierta estabilidad de los razonamientos utilizados por los alumnos. Sobre 57 sujetos, 36 utilizan exactamente el mismo procedimiento en los dos items, mientras que los 21 restantes, a pesar de un cambio de procedimiento (por ejemplo (largo × alto) × ancho en el item acuario, emplea (largo × ancho) × alto en el item habitación), utilizan otro de la misma categoría.

Item I_4: Cálculo del número de cubos (legos) necesarios para construir un paralelepípedo (3 × 4 × 2)

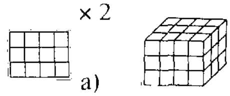
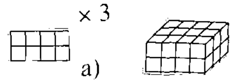
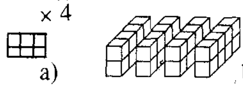
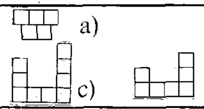
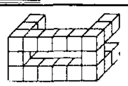
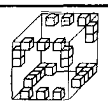
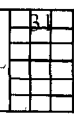
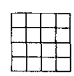
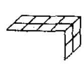
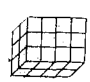
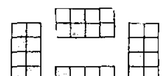
Este item fue presentado a 41 sujetos que se reparten de la manera siguiente:

Clase	6ème	5ème	4ème	3ème	T
Exitos	6	5	6	5	22
Fracasos	13	2	3	1	19
Total	19	7	9	6	41

No olvidemos que se trata de alumnos que habían fracasado a los items precedentes del acuario y de la habitación.

CUADRO V

Conductas observadas en el cálculo del número de cubos necesarios para construir un paralelepípedo de $4 \times 3 \times 2$ (1_4)

Cálculo			6ème	5ème	4ème	3ème	T
Tipo volumen 1a (L × an) × alto superf. × alto	× 2  a) b)	a) b)	4	2 1	5	4	15 1
1b. (L × alto) × an.	× 3  a) b)	a) b)	1	1	 1		2 1
1c. (an. × alto) × L	× 4  a) b)	a) b)	 1	1		1	2 1
Tipo perímetro 2a. (L + an.) × 2				1			1
1/2 perímetro 2b. L + alto L + an. + alto	 a) c) b)	a) b) c)	1 5 1				1 5 1
2c. 2L + 2 an. + 4 alto			1			1	2
de todas las aristras 2d. 4 L + 4 an. + 4 altos			1		1		2
Tipo superficie 3a.	4L  a)  b)	a) b)	1 1				1 1
Mitad de la superficie 3b. lateral × an;) + (al. × an.)					1		1
Superficie total 3e. 12 + 12 = 24 6 + 6 = 12 8 + 8 = 16 52				1			1
Superficie lateral total organizada en torno al perímetro de la base 3f.			1		1		2
Tipo mixto 4a superf. + 1 alto	 surface + 1 hauteur (2 légos)		1				1
		T	19	7	9	6	41
		Exitos	6	5	6	5	
		Fracasos	13	2	3	1	

El material presentado (cubos legos) facilita la representación del volumen solicitado, y a ciertos alumnos los lleva a reconstituir el procedimiento correcto. Sin embargo no parece ayudar a aquéllos que aún no tienen el concepto de volumen como producto de tres dimensiones. El manejo del material a veces muestra de manera clarísima, las dificultades que encuentra el alumno en la apropiación del concepto de volumen.

Si examinamos cada una de las clases comprobamos que en la clase de 5ème más de la mitad de los sujetos utilizan un procedimiento correcto, pero son en realidad los alumnos de la clase de 3ème, los que mejor aprovechan la situación presentada.

Solamente un tercio de los alumnos de la clase de 6ème logran utilizar correctamente el material para resolver el problema.

El cuadro V presenta un cierto número de informaciones interesantes sobre las representaciones de los alumnos (dibujos o construcciones).

Exitos:

El procedimiento más utilizado es (como ya lo habíamos observado) (largo × ancho) × alto.

Un factor decisivo para lograr el éxito parece ser el de reconstituir una de las caras del bloque (preferentemente la base) a la cual se le aplica un operador tercera dimensión (la altura por ejemplo).

Fracasos:

Los procedimientos 2b y sus variantes 2ba, 2bc y 2bc, nos permiten observar las dos dificultades que encuentran los alumnos en la representación del volumen, a saber:

- la ocupación del espacio,
- la coordinación multiplicativa de las tres dimensiones.

En el procedimiento 2ba, dos dimensiones (3 y 2) aparecen yuxtapuestas en forma no-ortogonal.

En el procedimiento 2bc los alumnos tienen en cuenta las tres dimensiones pero estas dimensiones están representadas en el mismo plano, dos de ellas son ortogonales a la tercera, pero paralelas entre sí. Además la composición utilizada es de tipo aditivo: el cubo de las dos extremidades pertenece exclusivamente al largo, el ancho está representado por tres cubos suplementarios y la altura también por dos cubos suplementarios.

En el procedimiento 2bb (semejante a 2bc en cuanto a las relaciones de ortogonalidad), el cubo del extremo pertenece a dos dimensiones, lo cual es signo de un comienzo de composición multiplicativa. Recordemos que cuando se genera el espacio de un volumen con tres dimensiones ortogonales materializadas en cubos, el cubo de la extremidad pertenece a las tres dimensiones.

Los procedimientos 2c y 2d, que son representaciones perimétricas del volumen, nos ilustran claramente la no ocupación del espacio interior y la representación aditiva de las dimensiones. Es así que en 2c, el largo tiene 6 cubos pues a los 4 cubos que poseía inicialmente, el alumno le ha super-

CUADRO VI

Definiciones sobre el volumen (item 1_3)

	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
Es el lugar ocupado por...	–	–	1	1	2
Es el espacio ocupado por...	–	–	2	2	4
Es el largo × ancho × alto	–	–	1	–	1
Son las tres dimensiones en las cuales uno puede desplazarse, moverse...	–	–	1	1	2
El interior de algo...	1	3	5	2	11
Es la cantidad que puede contener una cosa (ej. citados: botella, habitación, caja)	1	4	1	2	8
El contenido de un objeto	1	2	2	2	7
Lo que contiene	–	2	–	1	3
Una cantidad de (ej. citados: lápices, hojas (sólidos), aire, agua (líquidos)	3	3	–	1	7
Es llenar (de agua, de cubos, de cajas)	1	2	–	–	3
Es el peso	1	–	1	–	2
Es una masa que está en el aire	–	1	1	2	4
Es el área (señala con un gesto la superficie) que hay aquí dentro	1	–	–	1	2
Es el conjunto de toda la habitación	–	–	2	–	2
Es la superficie	2	–	–	1	3
El total de m² de una habitación	1	–	–	–	1
Todo el largo de la habitación	1	–	–	–	1
El contorno	2	1	–	1	4
Cuánto la habitación totaliza (contorno)	2	–	–	–	2
Todos los lados: largo, ancho, alto	1	–	1	–	2
Todas las dimensiones de una habitación	–	1	1	–	2
Otros	1	–	1	–	2
Sin respuesta	1	1	–	3	5
T	20	20	20	20	80

puesto en una de las extremidades un cubo de más para tener en cuenta el ancho, para la altura (y siguiendo un razonamiento idéntico) el alumno ha superpuesto dos cubos en cada extremidad.

Observemos además que algunas de las representaciones que los alumnos realizan con el material o con dibujos, son ejemplos de procedimientos de tipo «superficie» y «mixtos». Este hecho nos demuestra que los cálculos realizados por los alumnos en los procedimientos de tipo «perímetro», «superficie» y «mixtos» no son el producto de simples combinaciones aleatorias de datos, sino que reflejan una representación no operatoria del volumen.

Item 1_4: **¿Puedes decirme qué es el volumen?**

Observamos que:

- hay una gran diversidad de definiciones,
- volvemos a encontrar las tres grandes categorías ya vistas de representaciones: tipo «volumen», tipo «superficie», y tipo «perímetro».

III b. Composición de razones

Item 2_1: **Razón entre el acuerdo pequeño y el grande**

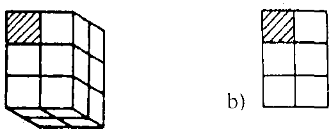
Este item fue presentado a 39 sujetos que se reparten de la manera siguiente:

Clase	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
Exitos	1	4	4	8	17
Fracasos	0	9	7	6	22
Total	1	13	11	14	39

Solamente 17 sujetos responden correctamente. Si dejamos de lado la clase de $6^{ème}$ donde hay un solo sujeto, vemos que los alumnos de $5^{ème}$ y de $4^{ème}$ obtienen resultados parecidos: casi un tercio de sujetos responden correctamente. Sólo en clase de $3^{ème}$ los éxitos sobrepasan el 50%.

CUADRO VII

Conductas utilizadas en la comparación de los dos acuarios (item 2_1)

Conductas \ Clase	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
Exito 1 Producto de las tres razones $2 \times 3 \times 2 = 12$	1	2	3	4	10
Exito 2 Utilización del acuario pequeño como patrón para llenar el gran acuario	–	–	–	2	2
 d) b) a) b)	–	–	1	1	2
Exito 3 Atribución de medidas hipotéticas al acuario pequeño, cálculo de las dimensiones del grande, establecimiento de la razón pedida.	–	2	–	1	3
Fracaso 1 Procedimiento idéntico a E 1 pero al finalizar la división arbitraria por 2	–	1	–	–	1
Fracaso 2 Procedimiento idéntico a E 3 pero con razonamiento incompleto o con errores	–	–	1	1	2
Fracaso 3 **Tipo aditivo:** $2 + 3 + 2$	–	5	4	–	9
Fracaso 4 **Tipo mixto:** $(2 + 3) \times 2$	–	–	–	1	1
Fracaso 5 **Ramón media** (entre 2 y 3) «un poco más del doble pues el gran acurio es 3 veces más ancho»	–	1	1	1	3
Razón modal (2) «es 2 veces más grande»	–	–	–	1	1
Fracaso 6 Repite los datos de la consigna	–	–	–	2	2
Fracaso 7 «No se puede saber, es necesario conocer cuánto mide el acuario de la cocina»	–	2	1	–	3
Sin respuesta	–	–	–	–	–
T	1	13	11	14	39
Exito	1	4	4	8	17
Fracaso	0	9	7	6	22

Análisis y distribución de procedimientos

Exitos:

Examinaremos los tres procedimientos que pueden conducir al éxito:

1) multiplicación de las tres razones $2 \times 3 \times 2 = 12$ veces más grande.
2) representación explícita del gran acuario utilizando como patrón el acuario pequeño
3) atribución de medidas hipotéticas al largo, ancho y alto del acuario pequeño; multiplicación de cada una de esas tres dimensiones por las razones 2, 3 y 2; cálculo del volumen de los dos recipientes; establecimiento de la razón solicitada a partir de la división del volumen del gran acuario por el volumen del pequeño.

En general el primer procedimiento es el más frecuente.

Fracasos:

Describiremos solamente los procedimientos más significativos:

- sumar las tres razones dadas $2 + 3 + 2 = 7$ veces más grande
- utilizar la razón 2 (de los largos y de las alturas):
  «El acuario grande es dos veces más grande que el pequeño».
- efectuar una media aproximada:
  «Es dos veces y medio más grande pues es tres veces más ancho».
- repetir los datos del problema:
  «El gran acuario es dos veces más largo, tres veces más ancho y dos veces más profundo que el de la cocina».
- afirmar que la solución del problema es imposible pues no disponen de las medidas del acuario pequeño:
  «No se puede saber pues necesitaría conocer cuánto mide el pequeño».

Para concluir sobre este item diremos que la composición multiplicativa de las razones no se domina aún a la edad de 14 años ni aún en el caso del paralelepípedo.

Item 2_2: **Razón entre el volumen de dos esferas**

Este item fue presentado a 24 sujetos que se reparten de la siguiente manera:

Clase	6ème	5ème	4ème	3ème	T
Exitos	0	0	2	3	5
Fracasos	1	6	6	6	19
Total	1	6	8	9	24

Como lo hemos visto se trata de una pregunta difícil. Cinco sujetos solamente logran resolver el problema. Las respuestas correctas aparecen a partir de la clase de 4ème.

CUADRO VIII

Conductas observadas en el item de las dos esferas (item 2_2)

Conductas / Clase	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
Exito 1 **Tipo volumen.** Respuesta: 8 (metáfora de llenar la gran esfera con las pequeñas)	–	–	2	3	5
Fracaso 1 **Tipo largo** (Razón entre las circunferencias) largo de la grande / largo de la pequeña $\frac{D}{d} = 2$ veces más grande	–	1	–	–	1
Fracaso 2 **Tipo superficie** (Razón entre las áreas de los círculos) área de la grande / área de la pequeña $\frac{R^2}{r^2} = 4$ veces más grande	–	–	–	2	2
Fracaso 3 **Repetir la razón del diámetro** «Es dos veces más grande puesto que el diámetro de la gran esfera es 2 veces más grande»	–	3	4	–	7
Fracaso 4 D grande × d pequeña = 8	1	–	–	–	1
Fracaso 5 **Productos aberrantes** grande / pequeña $\frac{D \times R}{d \times r} = 4$ veces más grande; grande / pequeña $\frac{D^2}{r^2} = 4$ veces más grande	–	–	–	1	1
Fracaso 6 **Predicciones sin cálculo**					
4 veces más grande	–	–	2	–	2
5 veces más grande	–	1	–	–	1
6 veces más grande	–	1	–	1	2
Sin respuesta	–	–	–	–	–
T	1	6	8	9	24
Exitos	–	–2	3	5	

Exitos:

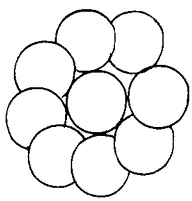
Hemos encontrado un solo procedimiento correcto que consiste en representarse la cantidad de esferas pequeñas que pueden caber en la gran esfera. Si bien es cierto que se trata de un procedimiento que sólo puede ser metafórico, no deja de ser fecundo.

Veamos cómo los alumnos se expresan:

Verónique (3ème)

... serán 4. ¡No!... más bien 8!;
¿Por qué 8? Dos pequeñas para el alto, 2 para el ancho, lo cual hace 4, agrego una de un costado, aun otra del otro lado y otras dos más que no serán enteras... Caben 8 pequeñas esferas en la grande.

He aquí el dibujo que ella realizó durante la explicación:



Fracasos:

Una vez más encontramos los procedimientos de tipo «perímetro» y de tipo «superficie». Observamos igualmente que algunos alumnos de la clase de 3ème multiplican el radio por el diámetro o el diámetro por el diámetro.

El procedimiento más frecuente consiste en afirmar que «la gran esfera es dos veces más grande que la pequeña, pues su diámetro es dos veces mayor». Esta respuesta revela una vez más la imposibilidad en la que se encuentran la mayoría de los alumnos, de representarse el carácter trilineal del volumen de la esfera.

Recordemos que en el item 2_2 después de haber comparado el volumen de las dos esferas, solicitamos una comparación de los pesos entre las dos esferas. («¿Cuántas esferas hay que colocar sobre el otro platillo de la balanza para poder equilibrar el peso de la gran esfera?»).

De los 24 sujetos interrogados, 22 dan exactamente la misma respuesta: dicho de otra manera, si un alumno afirma que el volumen de la gran esfera es 4 veces más grande que el de la pequeña, nos dirá que el peso de la grande es 4 veces mayor que el peso de la pequeña.

Una vez dada la respuesta proponíamos al alumno verificarla en una balanza. El hecho más notorio fue el asombro de los alumnos cuando descubrían que era necesario colocar 8 pequeñas esferas para equilibrar el peso de la grande.

Item 2_3: **Cálculo del número de cubos necesarios para construir un objeto en forma de L, 2 veces más largo, 2 veces más ancho y 2 veces más profundo que una L compuesta de cuatro cubos.**

Este item fue presentado a 57 sujetos que se reparten de la siguiente manera:

Clase	$6^{\text{ème}}$	$5^{\text{ème}}$	$4^{\text{ème}}$	$3^{\text{ème}}$	T
Exitos	0	2	5	2	9
Fracasos	7	16	11	14	48
Total	7	18	16	16	57

Los éxitos comienzan a partir de la clase de $5^{\text{ème}}$, aumentan en la clase de $4^{\text{ème}}$ y disminuyen en la $3^{\text{ème}}$. Esta caída probablemente se debe a un efecto de muestreo (4 alumnos de $3^{\text{ème}}$ resolvieron correctamente el item de la esfera y en consecuencia no pasaron el item de la L).

La diversidad de procedimientos que hemos encontrado en este item muestra las dificultades encontradas por los adolescentes para resolverlo.

Exitos:

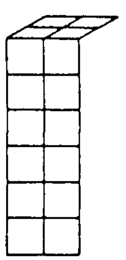
Observamos tres procedimientos posibles:

1) en el primero, se trata de un razonamiento numérico: los alumnos multiplican los 4 cubos de la pequeña L por las transformaciones indicadas en la consigna (doble de alto, doble de largo, doble de ancho), lo cual conduce a multiplicar los 4 cubos por 8.

Los dos procedimientos que describiremos a continuación son construcciones progresivas de los elementos del sólido que se busca.

2) en el segundo procedimiento los adolescentes reconstituyen primeramente el volumen de la parte más larga de la L y después el volumen de la más corta, finalmente adicionan ambos volúmenes.

Dibuja:

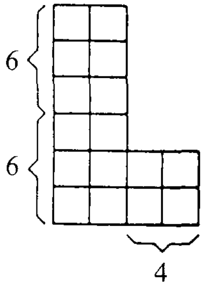


Guillaume ($5^{\text{ème}}$)

En la parte más larga encuentro esto... lo cual da... (cuenta los cubos de su dibujo)... 24 cubitos, ... más 8 para la más corta..., en total hace 32 legos.

3) en el tercer procedimiento los alumnos razonan en primer término sobre la primera capa del sólido; así determinan el número de cubos de la parte más larga, después el de la más corta y adicionan las dos partes. La capa (superficie) así obtenida es multiplicada por la profundidad del sólido y de esta manera obtienen el volumen solicitado.

Dibuja y cuenta los cubos:



Stéphane (4ème)

Pienso que hay 16 cubos hasta este momento, antes de duplicarla.
Como las dos caras son simétricas, multiplico por 2 y obtengo 32.

Este último procedimiento ha sido el más utilizado por los alumnos, lo cual confirma los resultados ya encontrados en los otros items.

Fracasos:

Con respecto a los fracasos diremos solamente que pueden explicarse a partir de los procedimientos de éxito. En efecto, la mayoría de las respuestas erróneas indican que los adolescentes tratan de utilizar uno de los tres procedimientos correctos pero lo hacen de manera incompleta. Por ejemplo hemos encontrado entre las soluciones erróneas, que los alumnos que tratan de utilizar el procedimiento N.° 2, logran determinar correctamente el volumen de la parte más larga pero fracasan al establecer la parte corta de la L. Otro error consiste en determinar correctamente el volumen de la corta pero fracasan al establecer el de la larga.

Otro error que encontramos consiste en establecer correctamente la capa «superficie» pero no determinan la profundidad del sólido.

Estos procedimientos erróneos nos muestran que el modelo de los cubos yuxtapuestos permite a los alumnos aplicar la razón 2 a más de una dimensión y a veces a las tres dimensiones en una u otra parte de la L. Podemos pues considerar que el hecho de poder realizar una descomposición en dos paralelepípedos y el hecho de disponer de las medidas de cada una de las partes es de gran ayuda para los alumnos. A pesar de lo dicho hay alumnos que no logran resolver el problema, debido a la complejidad del cálculo que hay que realizar y a la fragilidad del modelo trilineal.

III c. **Cálculo de la operación inversa**

Item 3: **División**

Este item fue presentado a 61 sujetos que se reparten de la siguiente manera:

Clase	$6^{\text{ème}}$	$5^{\text{ème}}$	$4^{\text{ème}}$	$3^{\text{ème}}$	T
Exitos	1	13	10	18	42
Fracasos	6	5	7	1	19
Total	7	18	17	19	61

Los resultados muestran una diferencia entre las clases de $6^{\text{ème}}$ y de $5^{\text{ème}}$. En la clase de $3^{\text{ème}}$ casi todos los alumnos resuelven el problema.

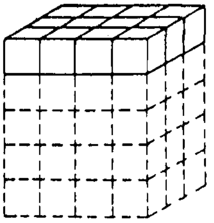
Exitos:

1) El primer procedimiento corresponde a la resolución por ecuación.

Claire ($3^{\text{ème}}$)
El largo es igual a 5. **¿Cómo...?**
Planteo una ecuación
$60 = \text{largo} \times 4 \times 3$
$60 = \text{largo} \times 12$
$\frac{60}{12} = 5$... que es el largo

Los procedimientos 2, 3 y 4 comienzan todos por el cálculo de una de las caras del paralelepípedo y a continuación se utiliza una de las siguientes posibilidades:

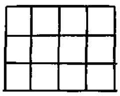
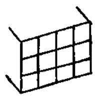
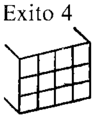
2) dividir el número total de cubos dados por la superficie calculada previamente.
3) adicionar «x» veces la superficie hasta encontrar el número de cubos dados en la consigna.



Philippe ($5^{\text{ème}}$)
Dibuja completamente el bloque y dice:
1 placa tiene 12 cubos,
2 placas tienen 24 cubos,
3 placas tienen 36 cubos,
4 placas tienen 48 cubos,
5 placas tienen 60 cubos,
¡el ancho tiene pues 5 cubos!

CUADRO IX

Conductas observadas a la división (item 3)

Conducta / Clase		$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
Exito 1	**Ecuación** $x \times 3 \times 4 = 60$ $x \times 4 = \frac{60}{3}$ $x = \frac{20}{4}$ $x = 5$	–	2	–	3	5
Exito 2 división 	Reconstitución de una capa, y $3 \times 4 = 12$ $60 : 12 = 5$	1	6	5	6	18
Exito 3 	Razonamiento, idéntico a E 2 pero con iteración de la capa $\underbrace{12 + \ldots + 12}_{5 \text{ veces}} =$	–	2	1	1	4
Exito 4 	Razonamiento idéntico a E 2 y búsqueda del operator multiplicativo. $3 \times 4 = 12$ $12 \xrightarrow{X5} 60$	–	3	4	8	15
Fracaso 1	**Ecuación con errores** $x \times 3 \times 4 = 60$ $x = \frac{60}{4} \times 3 \quad x = 45$	–	–	1	–	1
Fracaso 2	División por una de las dimensiones $60 : 4 = 15$	–	–	1	–	1
Fracaso 3	**Tipo perímetro o mixto**					
	largo + alto	–	1	–	–	1
	60 – (mitad del perím. + 1 alto)	–	–	1	–	1
	60 : (mitad del perím.)	–	–	1	–	1
	60 : (mitad del perím. + 4 altos)	–	–	1	–	1
Fracaso 4	**Tipo superficie**					
	(60 – 2 veces superficie) : 2	3	–	–	–	3
	(60 – 1 vez superficie) : 2	–	1	–	–	1
	60 – 1 vez superficie	1	2	1	–	4
Fracaso 5	Otros	1	1	1	1	–
	Sin respuesta		1	–	–	1

	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	T
T	7	18	17	19	61
Exitos	1	13	10	18	42
Fracasos	6	5	7	1	19

4) relacionar la superficie al número total de cubos empleando un operador multiplicativo.

Richard ($5^{ème}$)

Primero calculo la superficie 4 × 3 = 12, de 12 para llegar a 60 hay que multiplicar por 5. El largo es de 5 cubos.

Vemos que el procedimiento 2) implica el manejo de la operación inversa y se aplica como tal a cualquier valor dado, mientras que los procedimientos 3) y 4) (que se apoyan en la adición y en la multiplicación) sólo son utilizables con números que el alumno maneja con facilidad. En esta prueba las cifras utilizadas permitieron la aparición de dichos procedimientos.

Observamos que los procedimientos mayoritarios son el 2) y el 4), ambos implican la descomposición del volumen en capas sucesivas.

Fracasos:

– Procedimientos de tipo «superficie»

En la mayoría de los casos los adolescentes sustraen al número total de cubos el resultado de una o dos superficies previamente calculadas.

Isabelle ($5^{ème}$)
Se necesitan 48 cubos para el largo.
¿Cómo...?
Hago una placa 3 × 4 = 12.
Y ahora hago 60 – 12 = 48.

– Procedimientos de tipo «perímetro» o «mixto»

Nos limitaremos a describir dos procedimientos que muestran una cierta tentativa de manejo de las operaciones inversas. Estos procedimientos consisten a sustraer o dividir al número total de cubos, la mitad de un perímetro.

Veronique ($4^{ème}$)
Multiplico los 4 cubos de la altura por los 4 lados: 4 × 4 = 16.
El largo es 3 pero como hay 2 largos... 3 × 2 = 6.
Ahora sumo 16 + 6 = 22, después divido 60 : 22 (resuelve la operación y se da cuenta que queda un resto) (Duda durante un tiempo). **¿Cuántos cubos hay en el largo?** ... No sé... **¿No puedes encontrar otra manera de resolverlo?** No.

– Los procedimientos parciales

Se trata de procedimientos que podrían llevar al éxito si se continuara el razonamiento; pero lo que en realidad ocurre es que el alumno se detiene a mitad de camino.

Nathalie ($4^{ème}$)
(Repite la consigna)
Podría dividir 60 por el ancho.
Obtengo 15, sí,... sí, hace 15 cubos de largo para cada capa.

Conclusión

En primer lugar podemos constatar que la adquisición del concepto de volumen no puede ser aprehendida limitándose a un solo tipo de criterio: el de la utilización de la fórmula. Consideramos que este criterio debe ser amplificado y diversificado lo que nos ha permitido observar una organización jerarquizada del concepto de volumen.

El criterio más exigente que hemos utilizado para la adquisición de este concepto, el de la comparación de volúmenes entre dos esferas, sólo lo cumple una pequeña fracción de alumnos de la clase de 3ème.

Un criterio menos exigente, el de la comparación de dos paralelepípedos, aún excluye a muchos alumnos de 4ème y de 3ème. Agreguemos a esto los resultados obtenidos en la prueba de la L, los cuales muestran que el producto de razones entre dimensiones lineales no puede ser fácilmente transpuesto a ciertas formas complejas, a pesar que estas formas puedan ser descompuestas en paralelepípedos.

Solamente las pruebas consagradas al cálculo directo del volumen paralelepípedo y al de la operación inversa (a pesar de un ligero retraso con respecto a las primeras) son resueltas correctamente a partir de la clase de 5ème. Cabe pues, profundizar la noción de volumen en las clases subsiguientes, y esto no lo incluyen los actuales programas de enseñanza en Francia.

Los criterios que hemos utilizado no agotan la variedad de aspectos del concepto de volumen que sería interesante considerar. El hecho que los alumnos de 6ème fracasan casi sin excepción, no significa que debemos renunciar a introducir ciertos aspectos de la noción de volumen en la escuela primaria. El item I_4 (cálculo del número de cubos necesarios para fabricar un bloque de $4 \times 3 \times 2$) permite a ciertos alumnos de la clase de 6ème (y también en otras clases) encontrar o reconstituir un procedimiento correcto. Por otra parte la dificultad que presenta un concepto, no es razón suficiente para postponer su tratamiento. En nuestra opinión, lo esencial es no caer en la ilusión de pensar que un concepto complejo puede ser tratado de una vez y para siempre en un determinado nivel de enseñanza. Es necesario ir profundizándolo según las capacidades que va desarrollando el alumno para la adquisición de nuevos aspectos de la noción.

BIBLIOGRAPHIE

BODIN, A.: *Mise au point d'un questionnaire. Observations - Entretiens de binômes et d'inviduals,* I.R.E.M. de Besaçon.

OSBORN, A.: «The Mathematical and Psychological Foundations of Measure» in *Number and Measure: Papers from a Research Workshop.* Edited by Richard A. Lesh.

PIAGET, J., et INHELDER, B.: *Le développement des quantités physiques chez l'enfant.* Neucrâtel: Celachaux et Niestlé, 3ème édition, 1941, 344 p.

PIAGET, J., INHELDER B., etc. EZEMINSKA, A.: *La geometria spontanée de l'enfant,* París: P.U.F., 1973, 2ème éditions, 491 p.

VERGNAUD, G., et coll.: «Quelle connaissance les enfants de sixième ont-ils des «structures multiplicatives». Un sondage», *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mthématiques,* N.° 313, avril 1971.

VERGNAUD, G., ROUCHIER, A., RICCO G., et coll: *Acquisition des «structures multiplicatives» dans la premier cycle du second degré,* R.D. N.° 2 I.R.E.M. d'Orléans et Centre d'Etude des Processus Cognitifs et du Langage, mars 1979.

Didáctica de la medida del volumen en el segundo curso de la Escuela Secundaria

André Rouchier *

El lugar de esta intervención no es arbitrario. Existe, en efecto, un conjunto de relaciones entre las cuestiones de orden didáctico y los problemas y enfoques desarrollados a lo largo de las dos exposiciones anteriores. La transposición de estas relaciones en un orden de exposición de las problemáticas y de los resultados conduce la mayoría de las veces a situar la presentación de las cuestiones de orden didáctico a continuación de las demas.

1. DEL PROBLEMA A LA SITUACION DIDACTICA

1.1. La importancia del problema en la enseñanza de las matemáticas

Nadie que consulte el programa de estas jornadas podrá dejar de constatar que se ha hecho mención ampliamente de la noción de problema. El problema es un objeto que conocen muy bien los profesores de matemáticas, y me atreveré a decir que también los alumnos. Es para todos un instrumento de trabajo cotidiano. Más fundamentalmente aún, es a la vez el motor y el criterio de la adquisición de los conocimientos. Todos conocemos en particular el papel principal que desempeña la elección de problemas para poner de manifiesto los conceptos que ha construido el alumno en un momento dado de su evolución psicogenética y en relación con un objeto de conocimiento determinado. La exposición precedente es una ilustración perfecta de la fecundidad de este enfoque. Pero tal vez ha sido en la enseñanza donde se ha prestado mayor atención al problema a lo largo de estos últimos años:

- investigaciones sobre los procesos llevados a cabo en la resolución de problemas
- desarrollo de propuestas pedagógicas centradas en torno a la resolución de problemas.

* Universidad de Orlenas.

En numerosos países, la práctica de una enseñanza clásica, de tipo esencialmente magistral, ha disminuido ampliamente a favor de una enseñanza en la que se deja mayor iniciativa al alumno.

1.2. Ampliación del concepto del problema

De todas maneras, la simple presentación de un problema en una situación escolar no es suficiente. No basta, en la mayoría de los casos, con construir y dar oralmente o por escrito un enunciado, para que éste a pesar de las marcas semánticas clásicas (presencia de preguntas), se transforme en problema. En otros casos, por el contrario, una actividad que reviste características diferentes, un juego por ejemplo, puede representar, a través de las tareas en ella subyacentes y las respuestas que su elaboración provoca, una auténtica situación de resolución de problemas. Sabemos, en fin, desde hace mucho, que no todos los problemas son de igual naturaleza; formular una hipótesis, probar una hipótesis, intentar establecer el carácter de verdad de esta hipótesis, proponer una fórmula, aplicar una fórmula, elaborar un código de designación de objetos y/o de operaciones, representan una diferenciación importante, en términos del tipo de respuesta que hay que dar. Esta diferenciación es clásica, ha sido ampliamente estudiada y analizada a lo largo de los años 1960-70 a través del desarrollo y la utilización de objetivos pedagógicos.

Hay otra diferenciación igualmente importante cuyo estudio es más reciente. Para situarla correctamente, podemos partir del ejemplo siguiente:

La mejor manera de juzgar la utilidad de un código de designación de objetos y/o de operaciones es en una situación en la que ese código desempeñe un carácter funcional, es decir, una situación de comunicación. De la misma manera, la elaboración de una hipótesis y su comprobación son los productos de un tipo de situación particular en la que se va a jugar a un juego, al juego de la verdad. Dicho de otra manera, los problemas y sobre todo las respuestas a ellos asociadas, en su complejidad cognitiva y funcional, están en estrecha relación con las situaciones en las que los alumnos se encuentran con ellos. Esta dependencia, importante para cualquier resolución de problemas, lo es aún más en la enseñanza.

¿Cuál es, en efecto, el propósito de la enseñanza? Es esencialmente enseñar, hacer adquirir conocimientos al alumno, provocar una evolución de sus conceptos en relación con la noción que forma el objeto del aprendizaje. Una situación didáctica es, pues, una situación organizada con una finalidad de enseñanza, es decir, con un objetivo de apropiación y de saber. Esta situación reúne a cierto número de actores: uno o varios alumnos, uno (o varios) problema(s) que pueden ser presentados y/o representados de formas sumamente diferentes, un profesor, cuyas relaciones caracterizan la situación.

En la situación, en las relaciones entre

- lo que se pide (en términos de producción de los alumnos)
- lo que se permite,
- la forma en que se van a diferenciar las respuestas lícitas de las erróneas,
- el modo en que se van a tratar estas últimas...

van a evolucionar los conceptos de los alumnos, van a decidirse las características del aprendizaje y, por lo tanto, del saber adquirido y/o construido.

1.3. El problema en la situación didáctica

Las situaciones de enseñanza son situaciones didácticas, todo método de estudio y de análisis de estas últimas podrá, en cierto modo, resular provechoso para la enseñanza. Este «cierto modo» no siempre está muy claro, pues hay con frecuencia una distancia bastante grande entre las situaciones didácticas realizadas en un trabajo de investigación y la práctica de la clase. Vamos a intentar concretar este punto.

Estudiar una situación didáctica es determinar, con ayuda de indicios recogidos en el transcurso de una observación de esta situación, de qué forma ciertas características de su organización: elección de los problemas, naturaleza de las consignas, tratamiento de las producciones de los alumnos, intervenciones del profesor, reajuste de las cooperaciones y/o rivalidades... han contribuido a favorecer las manifestaciones de saber, respecto del contenido estudiado. Ello pasa por el análisis de las producciones de los alumnos, ya sea en términos de resultados, ya sea en términos de procedimientos, ya sea en términos de intercambios entre los alumnos entre sí y/o entre el profesor y los alumnos. Es posible así reconstruir la *tarea del alumno,* que puede ser confrontada con la *tarea del profesor.* En esta relación, en esta distancia, se vuelven a manifestar los elementos que tienen una influencia decisiva en la naturaleza de los aprendizajes realizados.

Intentar construir una teoría de las situaciones didácticas en matemáticas es intentar determinar invariantes de situaciones que puedan intervenir tanto en el plano del análisis como en el plano de la concepción de las situaciones. La construcción de las situaciones didácticas nos interesa desde dos puntos de vista: como investigación y como ingeniería. Vamos a verlo más de cerca.

1.4. La situación didáctica como medio de investigación

La elaboración de los medios teóricos de comprensión y de acción en el terreno didáctico se efectúa como en las actividades científicas clásicas. Dentro de un marco problemático determinado del que estamos dando aquí algunos elementos, pero que es aún ampliamente susceptible de evolución, nos vemos obligados a formular hipótesis. Por ejemplo, actualmente se estudia el papel y el lugar de una situación de comunicación en la elaboración de un discurso de prueba; es el trabajo de N. Balacheff. La hipótesis aquí, articulada con una problemática de la situación, consiste en atribuir un papel motor, en la evolución de los conceptos del alumno, a las constricciones de la formulación: expresarse, hacerse entender, y a las del diálogo entre iguales: hacer valer el propio punto de vista, desarrollar una argumentación, etc... Poner a prueba estas hipótesis pasará, la mayor parte de las veces, por la construcción de una o varias situaciones didácticas que hay que realizar bien en una clase o bien con un grupo reducido de alumnos, para conseguir las informaciones necesarias.

La metodología que estamos describiendo aquí a grandes rasgos permite desarrollar técnicas para concebir situaciones didácticas. Estas técnicas se van a apoyar en cierto número de elementos entre los que se pueden citar:

análisis del problema de la enseñanza, lugar del contenido que hay que enseñar desde el punto de vista epistemológico y desde el punto de vista cognitivo, elección de los problemas en función de lo que se sabe de los conceptos de los alumnos, de las características de los objetos que hay que producir (formulaciones, resultados, métodos, definición, etc...), de las modalidades propias para favorecer esta producción, etc... A esto es a lo que hemos llamado más arriba la ingeniería didáctica y es también un medio importante de formación para los docentes.

Para concluir este capítulo, organizado en torno a la noción central de situación, hemos de señalar que, afortunadamente, no es éste el único objeto que nos interesa. En efecto, los aprendizajes en la escuela están organizados durante un intervalo de tiempo bastante largo, dependen de aprendizajes anteriores y preparan otros. No hay, pues, que razonar solamente en términos de situación, sino en términos de sucesión organizada de situaciones, es decir, de proceso didáctico. Aquí no entraremos en este tema.

II. SITUACION DE LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN

2.1. El volumen y su aritmetización son nociones muy antiguas

La noción de volumen es una antiquísima compañera, a la vez en el plano de las teorías y en el de las prácticas, del saber humano. La cuestión de su aritmetización, es decir, la consecución de medios para calcular el sitio ocupado o la capacidad de objetos cualesquiera ha quedado, en parte, resulta desde hace mucho. Sabido es que las primeras técnicas del cálculo infinitesimal las propuso y utilizó Arquímedes en el estudio del problema de la cuadratura del círculo, y que fue Kepler el primero que dio la fórmula exacta del volumen de la esfera. Pero hacía ya muchísimo tiempo que los sólidos usuales: cubo, paralelepípedo, pirámide, no tenían ya secretos para los geómetras.

2.3. La enseñanza del volumen antes

Disponemos de pocos elementos relativos a las prácticas «matemáticas» cotidianas, las que son necesarias para la gestión de los intercambios económicos. Se puede atestiguar que las unidades de volumen, igual que las unidades de superficie y las de longitud, eventualmente organizadas en sistema, existen desde hace mucho. Resumiendo, el volumen (bajo su aspecto de aritmetización) es un objeto de saber cuya teoría, en lo que se refiere a la medida, está acabada a finales del siglo XIX. La importancia práctica de la aritmetización del volumen es de hecho un objeto de enseñanza muy antiguo; organizado en torno a dos componentes importantes: un sistema de unidades y un conjunto de fórmulas usuales. En la enseñanza primaria francesa clásica, es decir, anterior a la reforma de los años 60, los números que intervenían en problemas en los que se especificaba la unidad en la que se trabajaba, se denominaban números concretos, por oposición a los otros números, aquéllos cuyas propiedades se estudiaban por sí mismos, los números abstractos. Ni que decir tiene que el volumen entraba en el dominio de lo concreto.

2.3. La enseñanza del volumen en la «reforma» de los años sesenta

La aritmetización del volumen no es uno de los temas que ha sido objeto de mayor evolución a lo largo de los últimos veinte años. Se ha trabajado mucho en las medidas de las longitudes, en la medida de las áreas; se han elaborado propuestas interesantes y originales para su enseñanza. En lo tocante al volumen, por el contrario, los cambios son bastante superficiales. ¿No era tal vez necesario hacerlos? Si nos remitimos al sondeo que hemos efectuado, es cierto que podemos estimar que los conceptos de muchos alumnos que han llegado al final de la escolaridad obligatoria son excesivamente rudimentarios y que hay cierto número de dificultades, unas de naturaleza conceptual y otras de naturaleza cognitiva, de las que la enseñanza no hace caso.

2.4. Las instancias de definición del volumen como objeto de enseñanza

Los modelos de los alumnos, si bien reflejan las dificultades con que éstos han tropezado, mantienen también una estrecha relación con los conceptos del volumen que están presentes en la enseñanza. No vamos a hacer un estudio detallado; para ello sería necesario interrogar detalladamente a tres instancias que contribuyen a su elaboración.

- el conjunto de los textos oficiales, programas, comentarios que organizan la enseñanza del volumen a lo largo del período escolar del alumno;
- los manuales que a través de las lecciones y los problemas que proponen contribuyen a la delimitación del volumen como objeto de enseñanza;
- los profesores, que tendrán que hacer las últimas elecciones y cuya libertad parece bastante grande, cuando sus condiciones de ejercicio están bastante ampliamente delimitadas por las dos instancias anteriores.

En resumen, el volumen y su medida son unas cuantas lecciones del final del segundo curso de la enseñanza secundaria, sin que se haya previsto u organizado ninguna continuación en los otros dos cursos. El objeto de estas lecciones es aprender unas cuantas fórmulas, sin insistir excesivamente en los sistemas de unidades, que son del campo de la física.

En los manuales no se encuentra prácticamente mención alguna del interés y del papel que pueden desempeñar en ciertos problemas las composiciones de razón. A fortiori, no se verá aparecer ninguna ocasión de trabajar en la diferenciación superficie-volumen que hemos visto que sigue siendo aún ampliamente problemática para muchos alumnos.

Es un concepto muy pobre que explica parcialmente los resultados que hemos encontrado (*).

(*) Este análisis se basa en datos sacados de la situación francesa, no prejuzga en nada lo que ocurre en otros países. No dudamos de que el problema es lo bastante interesante e importante para que lo estudien otros.

III. PRESENTACION GENERAL DE LA SECUENCIA EXPERIMENTAL

3.1. Lugar de la secuencia en la experimentación

El estado de hecho que hemos descrito (demasiado deprisa) en el capítulo anterior no se corrige sólo con ayuda de la (buena) voluntad de unas cuantas personas. Experimentar una secuencia didáctica en clase no es una acción espectacular destinada a impresionar a los docentes o a quienes deciden en materia de educación. Es, en primer lugar, una respuesta en términos de posibilidad: ¿es posible elaborar una sucesión de lecciones y, por lo tanto, de situaciones con características lo bastante próximas a las actividades clásicas de la clase, pero que permitan también poner en práctica cierto concepto del volumen (objeto de saber para el profesor y para el alumno) y su aprendizaje (objeto de enseñanza)?

Para construir secuencias, lecciones y situaciones hay que intentar relacionar varios análisis: el (de naturaleza epistemológica) del objeto como producto (teórico) elaborado con un fin de proporcionar respuestas a problemas, el de la evolución de las producciones esperadas de los alumnos, producciones que van a ser testigos de la construcción de los elementos intelectuales necesarios, el de la determinación de las situaciones en las que los alumnos se verán obligados a encontrarse y a tratar los problemas para elaborar sus respuestas.

No siempre se logran realizar todas las condiciones deseadas. Por eso es necesario a veces repetir el trabajo en varias clases durante varios cursos. También nos podemos ver obligados a dejar preguntas abiertas, por ejemplo en el campo de las situaciones, que no son siempre totalmente satisfactorias, o en la articulación con ciertos aprendizajes anteriores y/o posteriores que corresponden al mismo contenido. Sólo podemos desear que el necesario desarrollo de las investigaciones sobre la enseñanza favorezca el proceso de volver sobre los temas que es el único que permite las profundizaciones fecundas y significativas.

En el caso del trabajo que estamos describiendo aquí, la secuencia didáctica se ha realizado la primera vez en dos clases de 5.º (segundo curso del colegio, alumnos de 12-13 años) y la segunda vez el año siguiente en dos clases del mismo nivel. Se han introducido cierto número de variantes entre ambas sesiones.

3.2. Descripción de la secuencia didáctica

La progresión seguida comprende cuatro partes que vamos a describir brevemente:

Primera parte: Del orden al número. Comprende tres lecciones que consisten en pasar de problemas de seriación de volúmenes por comparaciones a situaciones de medición con ayuda de unidades convencionales. Como toda medida, de los volúmenes realiza una aplicación de cierto conjunto sobre la recta numérica. A este respecto puede pretenderse que haya una fórmula de unidimensionalidad de volumen que dé su sentido a las operaciones de suma de medidas así como a las operaciones de producto por un escalar, hallar el doble, el triple, la mitad, 10 veces más, etc...

Segunda parte: De un concepto unidimensional a un concepto tridimensional del volumen. Tras una aritmetización directa en la que se hacen intervenir comparaciones entre volúmenes, se va a construir una forma de cálculo del volumen a partir de los elementos lineales que caracterizan a un sólido. El sólido elegido es un paralelepípedo rectángulo para el cual se invita a los alumnos a proponer una fórmula de cálculo. A continuación, se utiliza esta fórmula para estudiar las relaciones entre una relación de homotetismo y la relación correspondiente de las medidas. Es posible estudiar las correspondencias entre unidades de un mismo sistema. Esta fase se acaba con una comprobación de las relaciones entre las magnitudes de volumen, las magnitudes de superficie, las longitudes en un problema llamado problema del arquitecto.

Tercera parte: El volumen del prisma recto y la representación del bilineísmo mediante un cuadro cruzado de doble dependencia. Se va a afianzar más profundamente el concepto de la composición de las superficies y de las longitudes en la determinación de una medida de volumen. Dando por supuesto que los alumnos tiene un modelo implícito correcto de la proporcionalidad del volumen en relación con la altura y en relación con la superficie en el caso del prisma recto, se les pide que utilicen ese modelo en comparaciones de volúmenes de prismas de igual altura y base rectangular. Se realiza entonces una propuesta relativa a la fórmula que permite calcular el volumen del prisma recto, y se compara esta fórmula con la del volumen del paralelepípedo rectángulo. $V = S \times h$ representa una relación entre tres magnitudes V, S y h; representa también una relación entre variaciones de estas magnitudes, en particular de las variaciones en términos de relaciones $\lambda_V = \lambda_S \times \lambda_h$ (*). Existe una combinatoria muy rica de problemas que hacen intervenir las magnitudes y/o las relaciones. Se puede trabajar sobre una parte de esta combinatoria con ayuda de un cuadro de doble entrada, del tipo de la tabla de Pitágoras.

3.3. La secuencia didáctica en una problemática científica del volumen

La secuencia que acabamos de describir representa una serie de ocho lecciones. Estas no cubren la totalidad del programa de 5.º curso, pero la duración correspondiente es superior a la que se dedica a este tema en la mayoría de las clases.

Antes de examinar en el capítulo siguiente algunas situaciones particulares en términos de producción de los alumnos y de análisis didácticos, podemos entresacar unas cuantas observaciones de orden general a propósito de la secuencia detallada más arriba. Supone una tentativa de situar el volumen y sobre todo el problema de su medida dentro de una perspectiva pluriconceptual. Se hacen intervenir ampliamente las relaciones del volumen con

(*) λ_h representa la relación entre dos valores de altura, λ_S una relación entre dos valores de superficie, λ_V la relación compuesta.

otros conceptos: magnitudes espaciales, proporciones y linealidad, funciones con varias variables, dependencia e independencia, dimensionalidad, etc...

Este situar o relacionar no es artificial. Por una parte, representa un análisis de estas relaciones. Por otra, está destinado a crear las condiciones para que los problemas que los alumnos tengan que resolver, las respuestas que tengan que dar, se sitúen en el centro mismo de estas relaciones. Habíamos hablado más arriba de posibilidad, se la ve realizarse en esta progresión. Hay una tentativa de construcción efectiva de la medida del volumen como un instrumento intelectual provisto de sus reglas de uso. Para resolver problemas: comparaciones, predicciones, decisiones, variaciones, etc...

3.4. Algunos problemas

No presentamos esta secuencia como un modelo, sino como un instrumento de trabajo destinado a abrir la discusión. Esta discusión podría referirse a varios temas.

Por ejemplo, ¿es necesario dedicar a la medida del volumen una serie de lecciones tan detalladas? Los resultados presentados por Graciella Ricco hacen pensar que no es algo completamente inútil.

Podríamos preguntarnos también por los medios propios para favorecer la psicogénesis de la noción de volumen. ¿No va a plantear problemas la manipulación de las fórmulas cuando se vaya a trabajar con objetos de tamaño importante? En efectos, si no nos asombramos con el enunciado del volumen de un acuario, el de una piscina nos sorprende mucho más. Es un fenómeno muy conocido por todos que los alumnos que aplican perfectamente una fórmula cuando los números son «modestos» tropiezan con dificultades a veces considerables cuando aumenta su tamaño. No hay una respuesta sencilla, única para este problema, sino más bien soluciones diferentes según los contenidos. En efecto, para una superficie un gran tamaño no es lo mismo que para un volumen, aun cuando haya problemas en los que el volumen se convierte en superficie. ¡Pensemos simplemente en volcar un vaso de agua encima de una mesa!

De hecho, la medida del volumen como noción psicomatemática se construye durante varios años y no encuentra su expresión acabada más que en enunciados que adoptan la forma: un volumen es homogéneo con el cubo de una longitud. Actualmente estamos trabajando en una serie de situaciones en clase de 2.° de los liceos (*) cuyo propósito es conducir a la identificación y a la formulación de esta propiedad.

Finalmente, se nos puede criticar por no relacionar en absoluto la medida con las propiedades geométricas del volumen. Se trata de una elección deliberada, dentro del marco de esta investigación, ¡pero no es una elección de doctrina! Hay, en efecto, una geometría de las fórmulas, presente por lo demás en la tercera parte dedicada al prisma recto, que habría que profundizar. Interviene de manera más activa en el trabajo iniciado, citado más arriba, en el estudio de un sólido particular, un cubo truncado por un plano que pasa por tres de sus vértices.

(*) Quinto curso de la enseñanza secundaria (15-17 años) correspondiente al primer curso del segundo ciclo secundario.

IV. ANALISIS DE ALGUNAS SITUACIONES PROBLEMATICAS

4.1. Vamos a sacar de la secuencia didáctica algunos elementos que hacen intervenir evoluciones significativas en el concepto del volumen, al menos en el nivel de la aritmetización. La construcción de una situación didáctica para la observación, a lo largo de una investigación, es una tarea bastante difícil. En efecto, si la situación es puramente experimental, es decir, si hace intervenir un pequeño número de temas, con un dispositivo totalmente controlado por el experimentador, no es necesario prestar una atención particular a su disposición dentro de una secuencia de enseñanza. No es útil insistir en las dificultades particulares de la experimentación en clase, ni en la riqueza de los materiales recogidos. Intentaremos solamente poner de manifiesto los indicios que puedan parecer significativos.

4.2. **Paso al plano numérico mediante medida directa (Segunda lección)**

Después de la lección de seriación mediante comparación directa, las dos lecciones siguientes consisten en provocar el paso al plano numérico (*).

Disponemos de cuatro recipientes A, B, C, D así como de objetos «llenos» realizados con un ensamblaje de cubos pequeños de plástico. Además, hay dos unidades en forma de vasos pequeños de plástico, u_1 y u_2 tales que $2u_1 = 3u_2$; los cubos de plástico desempeñarán también el papel de unidades (u_4), definidas por $18u_4 = u_1$.

Unos grupos recibirán u_1, otros grupos u_2.

Se pueden hacer varios tipos de problemas; nosotros hemos hecho dos:

- Medidas directas de los recipientes A, B, C, D, puesta en común y construcción de un cuadro a partir del cual es posible hacer toda clase de preguntas:
  - Relaciones entre las dos series de números.
  - Medida con u_C de un recipiente conocido como u_1.
  - Introducción de una tercera medida $[2u_1 = 5u_3]$.
- Medida provocada por un problema de comparación a través de los dos problemas siguientes:
  - Comparar un recipiente que contuviera tanta agua como A y D con un recipiente que contuviera tanta como B y C.
  - A partir de los dos recipientes C y D medidos en el marco del problema anterior y de un ensamblaje I de 36 cubos, prever si la inmersión de I en el mayor recipiente en el cual se ha vertido el menor hará que se nivele o se desborde el agua. Dicho de otra manera, ¿C + I = D?

Se ve cuál es el interés del segundo conjunto de problemas, se sitúa a un nivel puramente didáctico puesto que permite plantear la problemática de la medida en una situación, es decir, en una situación en que tiene sentido,

(*) En la primera lección algunos alumnos habían propuesto medir para comparar. Es posible que la seriación y ciertas tareas de medida directa dependan de un curso anterior. No teníamos medios para realizar un estudio relativo a varios niveles.

pues tiene un carácter de necesidad en relación con las dos tareas propuestas. Estos problemas no son triviales.

- Para el primer problema, es necesario imponer algunas constricciones para que los alumnos no trasvasen directamente A y D en B y C.
- Para el segundo problema, hay que determinar el equivalente en med. u_1 (*) de un sólido lleno, ¡operación que no es trivial!

Como en los ejercicios de matemáticas, en los que se proporcionan todos los datos para la resolución, sin que haya demasiados, el proporcionar un recipiente de pequeño tamaño junto con los otros es una invitación a utilizarlo, una invitación a la medida por lo tanto; ¡por el contrario, el hecho de que los objetos sólidos propuestos sean ensamblajes de objetos más elementales no es una invitación a enumerarlos!

4.3. Volumen del paralelepípedo y comparación de relaciones

Tras haber realizado un adoquinado regular del paralelepípedo con ayuda de bloques de igual forma, se enuncian las características del cubo como «instrumento» de medida (unidad). Se enuncia una fórmula que da cuenta de la capacidad de la caja y que, por lo tanto, permite efectuar las comparaciones en que estaban basadas las actividades anteriores.

Sabemos que esta fórmula «realiza» la relación, en forma de composición multiplicativa, entre las dimensiones efectivas del objeto paralelepípedo rectángulo. Es una fórmula del volumen, por consiguiente tiene las características generales de una forma trilineal que resume la ecuación a las dimensiones $V = [L]^3$.

En el plano de los problemas, la composición multiplicativa interviene a la vez en el cálculo directo del volumen en función de las dimensiones y en el cálculo de una de las dimensiones a partir del conocimiento de la medida del volumen y de las otras dimensiones. Estos dos tipos de preguntas pueden resumirse mediante las siguientes escrituras algebraicas:

$$\text{a)}\quad x = l_1 \times l_2 \times l_3$$

$$\text{b)}\quad v = x \times l_2 \times l_3$$

Esta composición se refiere en este caso a las magnitudes; puede referirse también a relaciones en el marco de problemas resumidos mediante las dos fórmulas siguientes:

$$\text{c)}\quad \nu = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

$$\text{d)}\quad \mu_v = \nu \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

Los problemas del tipo d) no son exactamente del mismo nivel de dificultad que los problemas del tipo c). Sin prejuzgar los resultados de los trabajos

(*) med. u_i (i = 1, 2, 3, 4) designa la medida efectuada con ayuda de la unidad u_i.

que estamos llevando a cabo sobre esta cuestión, podemos estimar que hay entre los cuatro tipos de problemas una jerarquía del siguiente tipo:

d / c / b / a

del más difícil al más fácil.

Clásicamente, la enseñanza toma nota de esta jerarquía. Un análisis bastante exhaustivo de manuales de 1.er ciclo francés muestra que los problemas de tipo a) son muy ampliamente mayoritarios, los de tipo b) bastante escasas, los de tipo c) y los de tipo d) totalmente inexistentes.

Ello no es totalmente neutro. Pensamos que la conceptualización de la aritmetización del volumen concierne al conocimiento de las fórmulas, de su uso y de lo que representan. A través de los problemas de tipo c) o d) se construye lo que habitualmente se llama el «sentido» de la fórmula, por lo menos el marco general de su utilización heurística. En esta diferencia es donde residen los elementos de la distinción fundamental que establecen algunos entre la educación matemática y la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué soluciones se pueden pensar en el plano didáctico? Ciertamente, no afectan sólo al nivel que hemos estudiado. Por ejemplo, estamos experimentando actualmente una versión particular de los problemas de tipo c) en el nivel de 2.º curso (*).

Examinemos una versión sencilla del problema c).

Los alumnos reciben cierto número (24) de cubos ensamblables y se les invita a construir un paralelepípedo rectángulo con lados 2, 3, 4. Se les propone entonces el siguiente problema: Vais a pedir el número de cubos que necesitéis para construir un paralelepípedo rectángulo cuyos lados sean dos veces más largos que los lados del primer paralelepípedo.

El modelo típico de la correspondencia entre la relación de homotecia y la relación de las medidas, en este momento de la progresión es mayoritariamente el de la identidad: es, pues, y así lo esperamos, la respuesta mayoritaria, la que debe expresarse y la que se trata de hacer ver como errónea.

En este caso, se puede hacer ver que es errónea recurriendo a la fórmula o recurriendo a un adoquinado real o hipótetico del segundo paralelepípedo tomando el primero como unidad o, mediante la realización del volumen deseado con los cubos proporcionados por el profesor.

Los alumnos que lo logran proponen las dos primeras soluciones, que normalmente no son consideradas por los que proponen multiplicar el número de cubos por 2, que son una gran mayoría.

En esta situación, se invita al alumno a cotejar su propuesta con la «realidad». ¡Se le da el número de cubos que pide! La mayoría de las veces pide más para realizar el paralelepípedo deseado. Entonces, es posible poner en juego las explicaciones que son tanto justificaciones como predicciones (para quienes habían proporcionado el resultado correcto). El profesor pregunta entonces el número de cubos necesarios para la construcción de un paralelepípedo cuyas dimensiones sean tres veces las del paralelepípedo inicial. Res-

(*) Ver supra.

puestas y justificaciones son mucho más numerosas que en el caso del primer problema.

¡Pero la cosa no acaba ahí! No basta con proponer la relación 5 para ver que muchos alumnos que en la etapa anterior habían calculado sin problemas 3 × 3 × 3, dan marcha atrás y proponen 25 porque 125 «es muchísimo», «no es posible». ¿Qué queda por hacer? ¡Hay que calcular! Todo el mundo está de acuerdo, el cálculo directo se convierte aquí en un método de control. ¡No crean que acaba ahí la cosa. Todavía hay vacilaciones con la relación 10 y el producto 10 × 10 × 10!

¡He aquí unos cuantos indicios de las dificultades en la construcción y la conceptualización de las relaciones entre las unidades compuestas!

CONCLUSION

Los hemos invitado a efectuar un recorrido rápido por un itinerario complejo en el que han intervenido varios factores:

- La determinación de los conceptos y modelos de los alumnos en cuanto a un objeto de conocimiento abordado a lo largo de la enseñanza. Estos modelos no son totalmente espontáneos, son producidos, en parte, a partir de un concepto de la enseñanza del volumen.
- El lugar y la imagen de la aritmetización del volumen en la enseñanza. Nos parece que, desde el momento en que se estudia lo que ataña a la didáctica efectiva de una noción ¡ésta es una dimensión difícil de silenciar! Esto es todo lo que trae consigo el paso de la medida del volumen como objeto matemático-físico al propio proyecto de la enseñanza.
- El situar la medida del volumen como un medio teórico y práctico de resolver problemas.

Ustedes han podido comprobar que, sobre este tema, relativamente marginal en la enseñanza actual, era posible desarrollar una problemática rigurosa y fecunda, que provoca otras investigaciones, es cierto, pero que permite un trabajo profundo de los propios profesores. Es una vía posible para el estudio y el trabajo en el sentido de que una mejora de la enseñanza de las matemáticas. Creemos que hay que darle toda la importancia que tiene.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
Servicio de Publicaciones