1

Materiales Didácticos

Matemáticas

1.er CICLO

SECUNDARIA OBLIGATORIA

Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos

Primer Ciclo

Matemáticas

Autores:
José Colera Jiménez
Ignacio Gaztelu Albero

Coordinación:
Centro de Desarrollo Curricular

Ministerio de Educación y Ciencia

Coordinación de la edición:
CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR
DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Dirección General de Renovación Pedagógica
Centro de Desarrollo Curricular
Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N. I. P. O.: 176-94-043-X
I. S. B. N.: 84-369-2565-3
Depósito legal: M-37696-1994
Imprime: MARÍN ÁLVAREZ HNOS.

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos, para el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, es orientar al profesorado que empieza a impartir las nuevas enseñanzas en los centros que anticipan su implantación. Son materiales concebidos para facilitar la elaboración y el desarrollo de las programaciones correspondientes a las distintas áreas. Con su publicación y distribución, el Ministerio de Educación y Ciencia pretende proporcionar a los profesores y profesoras que van a impartir el primer ciclo de Educación Secundaria un instrumento que les ayude a desarrollar el nuevo currículo y a planificar su práctica docente. Para ello se ofrecen propuestas de programación y unidades didácticas que incluyen sugerencias, orientaciones y actividades que pueden ser aprovechadas de diversos modos por el profesorado, sea incorporándolas a sus propias programaciones, sea adaptándolas a las características de sus alumnos.

El desafío que para los centros educativos, y en concreto para el profesorado, supone anticipar la implantación de las nuevas enseñanzas merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo decidido por parte del Ministerio que, a través de la publicación de materiales didácticos y de otras actuaciones paralelas, pretende ayudar al profesorado a desarrollar su trabajo en mejores condiciones. El Ministerio valora muy positivamente el trabajo realizado por los autores de estos materiales, que se adapta a un esquema general propuesto por el Servicio de Educación Secundaria del Centro de Desarrollo Curricular, y han sido elaborados en estrecha colaboración con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría corresponde plenamente a las personas que los han diseñado, el Ministerio considera que son ejemplos válidos de programación y de unidades didácticas para las correspondientes áreas. No obstante, son los propios profesores a los que van dirigidos estos materiales los que tienen la última palabra acerca de su utilidad, en la medida en que les resulten una ayuda eficaz para desarrollar su trabajo.

En cualquier caso, conviene poner de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental, destinados a ser contrastados en la práctica, adaptados y completados. Es intención del Ministerio realizar un seguimiento sobre el grado de utilidad de este tipo de materiales, durante el período de implantación anticipada de la Educación

Secundaria, al objeto de incorporar en sucesivas publicaciones las sugerencias y propuestas del profesorado que imparte las nuevas enseñanzas.

Por otra parte, el carácter experimental de estos materiales se debe también a que van a ser utilizados con alumnos que proceden del sexto curso de la Educación General Básica, es decir, que se han incorporado al primer ciclo de Educación Secundaria sin haber cursado las enseñanzas de la nueva etapa de Educación Primaria. Se trata, por tanto, de materiales para un momento de transición y, en ese sentido, de mayor complejidad. Por todo ello, las sugerencias o contrapropuestas que los profesores realicen, a partir de su práctica docente, respecto a estos u otros materiales, serán de enorme utilidad para mejorar o completar futuras ediciones y para proporcionar, por tanto, unos materiales didácticos de mayor calidad a los centros y profesores que en cursos sucesivos se incorporen a la reforma educativa.

Índice

Introducción

Este trabajo puede considerarse una continuación de la *secuencia*[1] para la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria que elaboramos en cursos anteriores. En adelante nos referiremos a ella llamándola simplemente La Secuencia.

Allí se organizan, primeramente, los contenidos de la etapa en los dos ciclos 12-14 y 14-16 y, posteriormente, se analizan por separado los contenidos de los dos cursos del segundo ciclo. No se llegó más allá porque se pretendía que aquel documento fuera sólo una referencia que sirviera de ayuda para la programación, pero no que la sustituyera.

Este documento está destinado concretamente a los profesores que, adelantándose a la implantación general de la E. S. O., van a impartir su primer ciclo de forma anticipada.

La dificultad de la tarea que van a emprender hace recomendable aportarles ayudas mucho más próximas a su quehacer en el aula. Por eso, aquí entraremos no sólo a repasar los contenidos de los dos primeros cursos, sino también a organizarlos en unidades didácticas, que se describirán detalladamente y se acompañarán de actividades de aula y sugerencias metodológicas. Se trata, pues, respecto a La Secuencia, de un nuevo nivel de concreción.

Para diseñar esta línea de actuación en el aula se han seguido unos criterios, ya expuestos en La Secuencia, que pasamos ahora a recordarlos escuetamente; después analizaremos más a fondo algunos de ellos y veremos cómo se manifiestan en las decisiones que tomamos en esta programación.

1. COLERA, J., y NOMDEDÉU, R.: *Propuestas de Secuencia. Educación Secundaria Obligatoria. Matemáticas.* Propuesta A. Madrid: Escuela Española / M. E. C., 1993.

Criterios para la selección y secuencia de los contenidos

Criterios que atienden a la naturaleza de las matemáticas como disciplina (epistemológicos)

Necesidad de asentar la base

Este criterio será analizado más adelante, reflexionando sobre qué entendemos por básico y cómo hay opiniones muy distintas sobre lo que es básico.

La matemática como construcción teórica

Impecable desde un punto de vista lógico, su estudio proporciona buenos esquemas para el pensamiento formal y la capacidad deductiva. Intentaremos, más adelante, relativizar este punto de vista. Resulta una falacia suponer que un alto grado de abstracción y teorización proporciona rigor intelectual cuando, por el contrario, en la mayoría de los casos sólo lleva a actitudes de acatamiento ciego a algo que no se entiende ni, mucho menos, se comparte.

Criterios que atienden a las condiciones para que se produzca un aprendizaje significativo y satisfactorio (psicopedagógicos)

"Aprender haciendo"

Se aprende carpintería haciendo cajas, sillas, mesas...: haciendo cosas con la madera. Se aprenden matemáticas "haciendo matemáticas" o "haciendo con las matemáticas". Para aprender cualquier cosa es necesario practicar abundantísimamente. Y se constata que alguien sabe algo cuando es capaz de valerse de ello para actuar.

En consecuencia, en todas las unidades se plantea el aprendizaje tanto de procedimientos como de conceptos, propiedades y hechos específicos, mediante la realización de actividades variadas. Una buena parte de las cuales son de aplicación del contenido, objeto de aprendizaje, a contextos variados.

"Aprender yendo de lo global a lo específico"

Mejora notablemente la eficacia en el aprendizaje de un tema empezar adquiriendo una idea global, aunque sea sencilla e ingenua, de tipo práctico, es decir, aprendiendo a "hacer", a aplicar... Sólo cuando se tiene esta visión global, sencilla, a nivel de aplicación, tiene sentido tratar de forma más precisa todas o algunas de sus partes.

Más adelante entraremos más a fondo en este aspecto de **La Secuencia.**

"Aprendizaje en espiral"

Este criterio es consecuencia inmediata del anterior, pues si los conocimientos han de ser tratados primeramente en forma global para después ir haciendo tratamientos más específicos y elaborados, entonces habrá que reencontrarse una y otra vez con los mismos temas a lo largo de los diversos cursos.

Ya ha sido tratado en **La Secuencia,** y es fácil ver su puesta en práctica en esta programación, pues casi todos los temas que aparecen en el programa de primer curso ya han sido tratados en cursos anteriores, y algunos de ellos se vuelven a trabajar en el segundo curso con un desarrollo distinto.

Criterios relacionados con exigencias o costumbres de nuestra sociedad

Visión mítica de la matemática

Con mucha frecuencia, y en todos los niveles, se relaciona el grado de éxito o fracaso de los alumnos con sus resultados en matemáticas. Desde la sociedad, a las matemáticas se las respeta y valora, injustamente, por encima de las demás asignaturas.

Esto tiene para nosotros, profesores de matemáticas, ventajas obvias, pero también serios inconvenientes como, por ejemplo, el que se espere de nosotros que impartamos, o dejemos de impartir, contenidos de modos y en momentos concretos, lo cual puede ser nada conveniente para un buen proceso de enseñanza. Esto ocurre con el aprendizaje de ciertos algoritmos, como el de la raíz cuadrada; o con el rechazo a la utilización de la calculadora "porque impide pensar"... Cuando la presión ambiental sea muy fuerte, debemos sentirnos obligados a justificar por qué hacemos tal o cual cosa o, incluso, cuando no sea especialmente nocivo, hacer alguna concesión. Por ejemplo, tendría sentido enseñar, por este motivo, el algoritmo para calcular la raíz cuadrada por inútil que lo consideremos, pero jamás deberíamos renunciar a hacer un buen uso de la calculadora en el aula.

Necesidad de un conocimiento versátil

La máxima "cabezas bien hechas mejor que cabezas bien llenas", siempre vigente, es cada vez más necesario tenerla en cuenta, pues la actual demanda de trabajo, a cualquier nivel, exige mentes ágiles, versátiles, capaces de habituarse a condiciones cambiantes.

En la programación hay que enfatizar sobre contenidos de procedimiento de carácter general (poco específicos), propiciar la iniciativa y la creatividad del alumno con más empeño que la adquisición de conocimientos concretos y específicos.

Matizaciones a estos criterios impuestas por circunstancias del momento

Terminemos recordando que este documento está destinado a profesores que van a impartir anticipadamente los cursos 1.° y 2.° de la Secundaria Obligatoria con alumnos que en su mayor parte han estudiado sexto de E. G. B., es decir, que en su etapa anterior no han seguido un programa coherente con aquello que van a iniciar. Por tanto, algunos de los criterios que servían de base para **La Secuencia** y que se retoman aquí, se ven relativizados por esta realidad: los alumnos ya han tratado en la etapa anterior algunos contenidos y de una forma tal que, según alguno de estos criterios, debería dejarse para años posteriores, como, por ejemplo, la divisibilidad. ¿Qué sentido tendría empezar en primer curso tratando la divisibilidad de forma ingenua, como se propugna en **La Secuencia**, cuando ya la han estudiado de forma muy elaborada en sexto de E. G. B.?

Los criterios descritos quedan, pues, limitados por este hecho.

Análisis de algunos de los criterios seguidos

Estudiemos a continuación, con más detalle, algunos de los criterios seguidos, analizando su repercusión en la programación que presentamos.

Asentamiento de la base

Generalmente se acepta que la matemática es, quizá, la materia en la que más importa tener buena base para poder avanzar. La enorme importancia de este criterio, junto con el hecho de que haya versiones distintas (¡y aun contradictorias!) sobre qué se entiende por una buena base, nos obliga a extendernos en el análisis de este punto.

En **La Secuencia** dábamos por bueno en este contexto el aserto de que para que un edificio se mantuviera sólido era menester buenos cimientos, pero discrepábamos de la creencia de que fuera el edificio matemático el que se estuviera construyendo en las clases de matemáticas, sino la mente de una persona, por lo que los cimientos que sustentan ese edificio, más que de conocimientos matemáticos básicos, debería estar formado de aspectos psicológicos y motivacionales. Sin embargo, preferimos ahora cambiar la imagen: un edificio es algo inerte que, mientras está inconcluso, es un armatoste sin sentido. Nos gusta más comparar la formación de un alumno con un árbol, que siempre es armonioso. En él, cada crecimiento de la raíz (base, cimiento, fundamentación) va ligado con un desarrollo acorde de las ramas y hojas (relación con el exterior, aplicaciones, utilidad). Un árbol desde pequeño es un ser útil, armonioso, feliz. Un edificio sin acabar, aunque sea enorme, es un trasto inútil, estéril; posiblemente un estorbo.

Cuando hablemos de adquisición de una buena base nos referiremos, pues, a un desarrollo equilibrado: cada avance supone, además de incursión en nuevos conocimientos, afianzamiento de lo anterior establecimiento de relaciones, descubrimiento de nuevas aplicaciones o mejora de las que ya había, etc.

Este punto de vista nos lleva a comenzar el tratamiento de cada tema enraizándolo fuertemente con lo anterior, y procurando una razonable soltura en su aplicación antes de seguir construyendo.

¿En qué consiste lo básico? ¿Conocer y saber aplicar el algoritmo de la raíz cuadrada o saber discernir cuándo hay que localizar un número cuyo cuadrado es..., interpretar lo que significa y obtenerlo de forma más o menos aproximada mentalmente o con la calculadora? ¿Saber calcular el mínimo común múltiplo de dos números cualesquiera descomponiéndolos en factores primos y aplicando el algoritmo o asignar mentalmente el m.c.m. a números sencillos (por ejemplo: 12 y 15), sabiendo perfectamente lo que significa? ¿Conocer las áreas de las figuras planas y aplicarlas cuando se dan los datos necesarios o ser capaz de obtener el área de un triángulo dibujado en el papel?

Posiblemente la respuesta a cada interrogante sea que "ambas cosas". Sin embargo, ¿hay tiempo para todo? Y, aunque lo hubiera, ¿no es posible que los algoritmos potentes, prematuramente aprendidos, coarten la reflexión en el proceso impidiendo comprender los aspectos más sencillos y básicos del tema en cuestión?

Aspecto formal de la matemática

El profesor de matemáticas tiene, en general, una tendencia a enfatizar en exceso el aspecto teórico, formal, de lo que se está tratando. Debemos reprimirla o atemperarla, pues la formalización prematura es un serio inconveniente para el buen aprendizaje. La formalización carece de sentido cuando el alumno no tiene muy claro lo que está manejando (el **qué** y el **para qué**). Esto, sin embargo, no significa que haya que dejar todo aspecto formal para los últimos niveles de elaboración de la materia. Desde el comienzo del tratamiento de cualquier tema se puede requerir del alumno que defina, justifique, relacione, utilice una nomenclatura, una terminología correctas.

Todo ello a pequeñas dosis y siendo conscientes de que es un objetivo por sí mismo (es bueno que el alumno se acostumbre poco a poco al aspecto formal de la matemática) y no un paso previo ineludible a todo conocimiento.

En la programación puede apreciarse este criterio en cualquiera de las unidades: primero se conoce, mediante el uso y aplicación, el elemento que se está tratando, y después, acaso, entran en juego actividades más teóricas como definir, enunciar propiedades, describirlas con terminología adecuada, justificarlas...

Ir de lo global a lo específico

Obtener la superficie de una figura superponiendo una trama transparente cuadriculada, contando cuántos cuadraditos completos contiene y estimando, además, cuántos se completan con las fracciones que sobran es un método válido para figuras cualesquiera. En ese sentido, es un método "global". Puede ser un buena forma de empezar, pues aporta una idea clara de lo que es medir un área, del carácter aproximado de la medición, de la universalidad de figuras cuyas áreas podemos obtener, etc.

Por lo demás es un método ingenuo, primitivo, que dejará paso, más adelante, a procedimientos más elaborados.

En **La Secuencia** se atiende extensamente al valor didáctico de este criterio. Por eso no creemos necesario abundar más en ello. Sólo citaremos algunos ejemplos de cómo nos hacemos eco de él en la programación:

— En todo el primer curso sólo se calculan áreas "por reducción al rectángulo". En segundo curso se empiezan a utilizar las expresiones de las áreas de las distintas figuras.

— En el segundo curso los alumnos resuelven ecuaciones por primera vez. Pero lo hacen siguiendo un procedimiento ingenuo, válido para ecuaciones de cualquier tipo: buscar el valor de la **x**, tantear, aproximarse... Se deja para cursos posteriores el aprendizaje de procedimientos específicos para la resolución de ecuaciones de primero o de segundo grados.

— En el primer curso se trabaja la proporcionalidad mediante la resolución de problemas de este tipo que se presentan junto con otros tipos distintos, todos ellos con enunciados muy sencillos, pretendiendo que sean resueltos casi por sentido común. En el segundo curso se hace un estudio específico de la proporcionalidad.

Programación

Aspectos generales sobre la programación

Estructura de la programación

Cada curso consta de once unidades didácticas que se agrupan en bloques de contenidos afines.

Cada bloque contiene:

- Una introducción en la que se resaltan los aspectos más importantes del contenido y se justifica, a grandes rasgos, el enfoque pedagógico por el que se ha optado.
- La relación de unidades didácticas con una breve descripción de sus contenidos.
- Los objetivos comunes a las unidades.
- La metodología recomendada para su tratamiento.
- Los materiales necesarios.
- Los contenidos actitudinales para todo el bloque.
- Una descripción de cada Unidad didáctica con actividades que ejemplifican su posible desarrollo.

NOTA: En las unidades que forman bloque por sí solas, todos estos apartados se incluyen en la descripción de la Unidad. Además, en algunas unidades se incluyen algunos objetivos específicos para añadir a los comunes del bloque.

Organización de los bloques y unidades

Primer curso

Geometría

Unidad 1: Del espacio al plano.

Unidad 2: Los cuadriláteros.

Unidad 3: Los triángulos.

Unidad 4: Polígonos regulares y círculo.

Unidad 5: Uso sistemático de los útiles de dibujo.

Unidad 6: Rectas y planos en el espacio. Estudio de algunos cuerpos geométricos.

Aritmética

Unidad 7: Números y operaciones.

Unidad 8. Fracciones y divisibilidad.

Unidad 9: Resolución de problemas aritméticos.

Funciones

Unidad 10: Interpretación de gráficas.

Azar y probabilidad

Unidad 11: Aproximación experimental a las leyes del azar.

Segundo curso

Estadística

Unidad 1: Iniciación a los aspectos básicos del proceso estadístico.

Magnitudes

Unidad 2: Magnitudes: medida, estimación y cálculo.

Proporcionalidad y semejanza

Unidad 3: Introducción a la proporcionalidad.

Unidad 4: Porcentajes e índices.

Unidad 5: Semejanza de figuras.

Unidad 6: Interpretación de funciones. La función de proporcionalidad.

Aritmética y Álgebra

Unidad 7: Potencias y raíces.

Unidad 8: Resolución de ecuaciones por aproximaciones sucesivas.

Geometría

Unidad 9: Iniciación al razonamiento matemático a través de la demostración de propiedades geométricas.

Unidad 10: Teorema de Pitágoras.

Unidad 11: Figuras espaciales. Áreas y volúmenes.

Estructura de las unidades didácticas

Cada Unidad didáctica contiene:

- Una **introducción** que informa sobre los contenidos a tratar, los objetivos fundamentales, los aspectos metodológicos más destacables y otras sugerencias didácticas, pretendiendo dar al lector una idea global de la Unidad sin necesidad de una lectura completa de la misma.

- Los **conocimientos previos** que se consideran indispensables para abordar con éxito la Unidad.

- Los **objetivos específicos** de la Unidad (sólo cuando haya que añadir alguno a los expuestos al principio del bloque).

- Los **contenidos:** conceptos, procedimientos y actitudes (éstos cuando no aparecen al principio del bloque).

  Estos contenidos se enumeran siguiendo una cierta secuencia de aprendizaje de modo que cada concepto vaya acompañado de los procedimientos ligados a él.

- **Actividades de aprendizaje y/o evaluación.**

  Junto a cada contenido se han incluido algunas actividades de aula o algunos ejemplos para la evaluación, con el objeto de aclarar su enfoque.

- **Actividades complementarias.**

  Al final de cada Unidad se suele incluir un paquete de actividades "de otro tipo" cuya finalidad es orientar y ofrecer recursos al profesor en aspectos como:

  — Preparar actividades para esos alumnos "que terminan antes".

  — Programar actividades de transferencia: utilizar lo aprendido en otros contextos, relacionándolo con otros contenidos.

  — Programar actividades de ampliación.

  — Otras.

Códigos utilizados en las unidades didácticas

En la descripción de cada Unidad didáctica se observarán los siguientes códigos:

P— (Procedimiento)

C— (Concepto)

A— (Actitud)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) (actividad)

b) (actividad)

c) (actividad)

Si la posición de un procedimiento (o concepto) se ha sangrado respecto del precedente, quiere decir que depende, se deriva o está ligado a él. Ejemplo:

C— La fracción como parte de un todo.

  P— Cálculo de la cantidad parcial que corresponde a una fracción de una cantidad total.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

En un club deportivo hay 80 socios. Las 3/4 partes de ellos practican el fútbol. ¿Cuántos practican el fútbol?

Algunas consideraciones sobre la evaluación

La intención de cada actividad de evaluación es detectar la consecución, o no, de algún objetivo o contenido de los propuestos en la Unidad didáctica. No es, pues, la evaluación el hecho sancionador cuyo fin es la asignación de una nota, sino una sonda para revisar en algún aspecto el proceso de aprendizaje y que condicionará la actuación posterior hacia:

— Una ampliación o avance en los contenidos (si se han superado con claridad).

— Un refuerzo o insistencia sobre lo mismo (si quedan aspectos por afianzar).

— Una vuelta atrás y una reconsideración del camino a seguir (si se detectan lagunas previas o que el salto ha sido prematuro o excesivo).

Veamos algunos ejemplos:

P— Utilización del recorte y plegado de papel para hacer figuras y estudiar propiedades, simetrías, etc.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Mediante plegado y corte de una cuartilla con los bordes deteriorados, construir un cuadrado.

Esta actividad detecta la utilización de procedimientos manipulativos para aprender en geometría:

— Obtención de perpendiculares.

— Obtención de distancias iguales.

— Características geométricas del cuadrado.

— Otras.

P— Dar definiciones o propiedades, describir procesos, justificar propiedades.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Describir una figura de forma que el compañero pueda dibujarla con sólo leer la descripción.

Esta actividad detecta el nivel expresivo del alumno utilizando conceptos y recursos matemáticos.

P— Investigación de relaciones entre los elementos geométricos.

A— Constancia ante un problema, curiosidad por el descubrimiento de relaciones y propiedades.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

¿Cuántos triángulos puedes formar con seis palillos?

Esta actividad admite varias soluciones (en el plano o en el espacio). La más completa sería: cuatro triángulos cuando los palillos forman un tetraedro. Detecta el hábito de investigación, la actitud de búsqueda y perseverancia ante un problema, la capacidad de pensar en diferentes direcciones...

Primer curso

Geometría

Los distintos tipos de figuras geométricas son analizados de forma experimental por el alumno: observar, construir, plegar, superponer, cortar, comprobar, dibujar, medir...

Recorte y plegado de papel; utilización de regla, escuadra y compás; cortar con la cuchilla en figuras espaciales. Éstos son algunos de los procedimientos manipulativos por medio de los cuales el alumno conjetura o comprueba propiedades. Pero, además y muy importante, el uso de la imaginación que precede y sigue a las manipulaciones experimentales (¿Qué crees que resultará si cortamos?, ¿es posible conseguir un... mediante...?).

De este modo el alumno se reencuentra, de forma activa, con conceptos y propiedades ya conocidas, y descubre, aprende y relaciona con los anteriores otros conceptos, propiedades y procedimientos nuevos. La geometría adquiere así una significación dinámica y procedimental en la que todo está relacionado y, por tanto, cada elemento nuevo encuentra múltiples conexiones con lo anterior.

Se dedica una buena atención a la nomenclatura (la imprescindible, pero utilizada con corrección); a la memorización de los resultados básicos (conceptos, propiedades); al aspecto métrico (cálculo de distancias, áreas, volúmenes), y al uso sistemático y correcto de los útiles de dibujo e instrumentos de medida.

Objetivos

— Reconocer, describir, representar figuras geométricas planas y tridimensionales, identificando propiedades y relaciones dentro de cada una y entre unas y otras.

— Poseer una razonable intuición espacial que permita inferir relaciones geométricas entre figuras planas o espaciales.

— Desarrollar estrategias para la obtención de medidas directas, valiéndose de instrumentos e ir adquiriendo el hábito de estimar, a priori, la medida buscada.

— Desarrollar estrategias para la obtención indirecta de medidas, utilizando relaciones (fórmulas) u otros recursos (cálculo de áreas y volúmenes sencillos).

— Ser consciente de que se comete error al efectuar mediciones tanto directa como indirectamente.

— Adquirir destreza en las construcciones básicas con regla, compás, escuadra... y valerse de ella para hacer representaciones claras.

— Iniciarse en la indagación, reconocimiento de lo conocido en situaciones variadas, dar explicaciones razonables a las propiedades sabidas o conjeturadas, etc.

— Valerse de procedimientos manipulativos (recorte y plegado de papel, uso del espejo, piezas de mecano, etc., elaboración de figuras con plastilina u otros medios, seccionar con cuchilla figuras de plastilina o porexpán, etc.) para visualizar figuras y conjeturar propiedades.

— Mejorar la imaginación, la transferencia de conocimientos, el pensamiento lateral, la creatividad...

— Ir adquiriendo hábitos de trabajo en grupo.

Contenidos

Se desarrollan a lo largo de las siguientes unidades didácticas:

Unidad 1: Del espacio al plano. Unidad introductoria en la que se toma contacto de forma no sistemática con elementos geométricos planos y espaciales ya conocidos por el alumno.

Unidad 2: Cuadriláteros.

Unidad 3: Triángulos.

Unidad 4: Polígonos regulares y círculo.

En estas tres unidades se estudian sistemática y ordenadamente los contenidos correspondientes.

Unidad 5: Uso sistemático de los útiles de dibujo. Aunque en las unidades anteriores el alumno se ha valido de los instrumentos de dibujo, en ésta se relacionan con elementos geométricos básicos, analizando sus significados como fuente de reflexión en geometría.

Unidad 6: Rectas y planos en el espacio. Estudio de algunos cuerpos geométricos.

Cada una de las unidades se describe en las próximas páginas. En ellas se pormenorizan los contenidos referidos a conceptos y procedimientos.

Sin embargo, entendemos que los **contenidos referidos a actitudes** son similares para toda la actividad geométrica de este nivel. La exponemos a continuación:

— Afición a la búsqueda de propiedades geométricas y tendencia a justificarlas.

— Gusto por la limpieza y precisión en la representación y construcción de figuras geométricas.

— Hábito de recurrir a los instrumentos adecuados para cada tipo de medida y de expresar los resultados de las mediciones con la Unidad correspondiente.

Disposición a emplear procedimientos propios (aunque sean heterodoxos), sobre todo cuando se carece de otros.

— Apertura mental para aceptar como válidos, y valorar, caminos distintos al propio en la resolución de un problema.

— Hábito de resolver por uno mismo todo problema a cuya solución se haya llegado con ayuda externa.

Metodología

A este nivel, la actividad geométrica debe ser fundamentalmente experimental-especulativa. El alumno debe acercarse a la geometría mediante múltiples y variadas actividades de manipulación y dibujo.

El deseable trabajo en grupo, tanto para búsqueda de propiedades o de justificaciones como para construir figuras o debatir conclusiones, debería ir siempre precedido de períodos, más o menos largos, de reflexión o actuación individual (para poder aportar en el grupo hay que tener ideas y éstas han de ser maduradas a ritmo y con atención personales).

El trabajo de los alumnos, individual y en grupo, ha de ser dirigido y animado por el profesor. Las conclusiones colectivas de ese trabajo serán, necesariamente, ricas, pero asistemáticas. El profesor ha de esforzarse en, sin coartar la espontaneidad del trabajo de los alumnos, organizar las conclusiones y, periódicamente, sistematizarlas de modo que se cree un pequeño compendio teórico en el que se plasmen, de forma organizada, los resultados básicos y más relevantes que hayan ido surgiendo.

Material didáctico

— Hojas de papel para plegar, recortar, etc.

— Tijeras, cuchillas.

— Papel con distintos tramados (transparente, cuadriculado, punteado, triangular...).

— Útiles de dibujo.

— Instrumentos de medida.

— Figuras poligonales encajables.

— Cuerpos geométricos.

— Mecanos o palitroques, cuerdas, gomas...

— Recortables de papel.

— Geoplano.

— Porexpán (corcho blanco), plastilina...

Unidad 1: Del espacio al plano

Tiempo: Dos semanas.

El propósito fundamental de esta primera lección de geometría es activar los conocimientos previos del alumno, es decir, comenzar su trabajo en geometría sacando a flote sus conocimientos en situaciones en las que resulten útiles, activos. Y, por tanto, promover actitudes positivas hacia el estudio de la geometría.

Partiendo de alguna figura geométrica tridimensional conocida (octaedro, prisma, pirámide, cilindro...), el alumno reconocerá en ella elementos característicos y algunas relaciones entre ellos (segmentos, ángulos, polígonos variados, perpendicularidad, paralelismo, rectas que se cortan o que no se cortan).

El análisis directo de lo evidente (esto hay, esto veo) puede ir seguido de lo menos evidente (si cortáramos la figura de tal manera se formaría tal figura plana...) o, incluso, de la búsqueda de la manipulación que produce tal efecto ("¿Cómo habría que cortar este cilindro para obtener un rectángulo?" "¿Y si queremos que el rectángulo sea más alargado?" "¿Se puede conseguir un hexágono cortando este cubo?" "¿Y un pentágono?").

Además del reconocimiento (identificación) de figuras se procurará su descripción (en algún caso por escrito), su representación gráfica y la designación de sus elementos más característicos.

Este tipo de actividades puede enriquecerse con la búsqueda de los elementos geométricos que vayan apareciendo (rectángulos, círculos, perpendicularidades, etc.). Y, acaso, con la elaboración con cartulina, plastilina, etc., de alguno de los cuerpos geométricos que se manejen.

Conocimientos previos

Puesto que lo que se pretende con esta primera Unidad didáctica de geometría es sacar a flote los conocimientos elementales, algunos conceptos y relaciones, alguna terminología, e iniciarse en una forma de trabajar en geometría, no es necesario que, de entrada, el alumno recuerde correctamente casi nada de lo mucho que, con seguridad, ha estudiado de geometría hasta llegar aquí.

Contenidos

C— Algunos cuerpos geométricos, algunas figuras planas, algunos de sus elementos más característicos, relaciones entre ellos y la nomenclatura necesaria para describirlos.

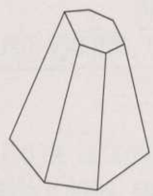
Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Se le da al alumno una pirámide hexagonal troncada y se le pide que señale polígonos, segmentos, ángulos, vértices, rectas que se corten, rectas paralelas, rectas que ni se corten ni sean paralelas...

P— Reconocimiento de figuras planas en los cuerpos geométricos, obtenida como resultado de manipulaciones con ellos.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Qué corte hay que dar en la figura para obtener un triángulo.



P— Elaboración de figuras tridimensionales de cartulina, plastilina, porexpán (corcho blanco) y utilización de las mismas con algún propósito concreto.

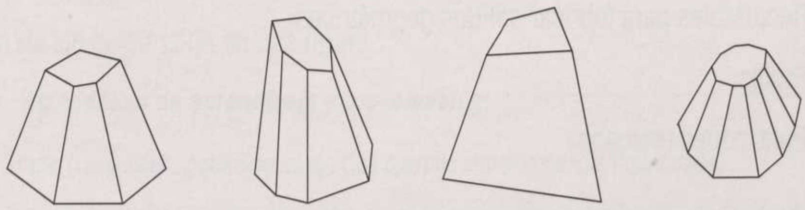
Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Construir un cubo de plastilina y darle un corte plano con el cual se consiga un hexágono.

P— Interpretación de algunas figuras tridimensionales representadas en perspectiva y representación sobre el papel de figuras espaciales.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Se le dan en un papel varias figuras dibujadas en perspectiva, sólo una de las cuales corresponde a la pirámide troncada que está manejando. El alumno debe decir cuál de ellas es su representación.



P— Elaboración de conjeturas sobre el resultado de ciertas manipulaciones con figuras (forma de la figura resultante, tamaño).

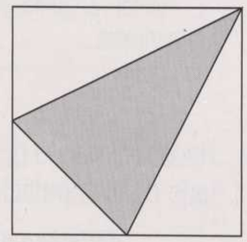
Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Si a un cubo le cortamos todos sus vértices, ¿cuántas caras tendría la figura resultante? ¿Qué tipos de polígonos son esas caras? Si una naranja la cortamos "al bies", es decir, mediante un plano inclinado respecto a su eje), ¿cómo se verá el corte? (se trata de intentar imaginar cómo se verían los gajos).

P— Descripción de figuras y de relaciones entre sus partes.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Describe esta figura de modo que un compañero tuyo pueda dibujarla leyendo tu descripción.



P— Participación activa en tareas de grupo.

Actividades complementarias

Además de las descritas:

- Adivina o averigua. Un alumno tiene una figura (plana o espacial) y la describe a varios otros, que deben llegar a dibujarla (o a ponerle nombre).
- Juego de preguntas. Similar al anterior, pero el que tiene la figura sólo puede responder *SÍ* o *NO* a las preguntas de los demás.
- Realizar con palitroques (aristas) alguna figura espacial y analizar sus posibles deformaciones.

Material didáctico

— Cuerpos geométricos de madera, de cartulina. Pueden ser especialmente útiles los de plástico transparente en cuyo interior hay secciones de plástico colorado.

— Poliedros de porexpán y cuchillas.

— Plastilina.

— Papel cuadriculado.

— Recortables para fabricar sólidos geométricos.

— Frutas.

— Palitroques (mecano).

Unidad 2: Los cuadriláteros

Tiempo: Dos semanas.

Se estudian sucesivamente los distintos tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramos, en general, y romboide, en particular; no paralelogramos, en general, y trapecios, en particular. En cada uno de ellos se analizan sus características fundamentales (cómo son los lados, cómo los ángulos, las diagonales), se buscan regularidades (ejes de simetría), nuevas relaciones, etc. Se presta una atención muy especial al cálculo del área de un rectángulo y de un cuadrado, de modo que el alumno vea con absoluta claridad que el procedimiento que utiliza (multiplicar las dos dimensiones) responde perfectamente a lo que quiere obtener. Y el área de cada una de las demás figuras la obtendrán partiéndola y recomponiendo un rectángulo.

Conocimientos previos

— Nombres y características más relevantes de los polígonos y elementos del plano.

— Nombres y características de algunas figuras tridimensionales.

— Relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

— Ángulos: recto, agudo, obtuso, iguales, medida en grados de algunos de ellos (90°, 45°, 180°).

— Alguna familiaridad con el uso de la regla, escuadra y compás.

— Medir con la regla graduada y con cinta métrica.

— Conocimientos mínimos del sistema métrico decimal.

Contenidos

C— Noción de cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Reconocer cada una de estas figuras, sabiendo decir por qué es tal.

b) Reconocer cada una de estas figuras en los objetos circundantes.

c) Enunciar o asignar propiedades de alguna de estas figuras.

d) Enunciar o asignar propiedades que caracterizan a alguna de estas figuras.

C— Noción de eje de simetría en una figura.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Trazar (reconocer, identificar) el eje (los ejes) de simetría de una figura dada.

b) Valerse de un espejo para comprobar si una recta es o no eje de simetría de una figura.

C— Comprensión muy clara de por qué el área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Razonar sobre un rectángulo de dimensiones enteras, a y b, partiéndolo en cuadrados, que su área es a·b unidades de superficie.

P— Cálculo del área de una figura rectangular, o compuesta por rectángulos, cuyas dimensiones se dan o han de ser obtenidas por el alumno, y expresión del resultado en dimensiones adecuadas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Hallar el área del tablero de una mesa.

b) Calcular cuánto vale embaldosar el suelo de la clase sabiendo que cuesta ...el m^2.

C y **P—** Comprensión de la permanencia del área de una figura mediante fraccionamiento de la misma y recomposición, y aplicación de esta técnica para calcular áreas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcular el área de un paralelogramo obteniendo el rectángulo equivalente (recortando o dibujando).

b) Lo mismo con otros cuadriláteros.

P— Cálculo del área de figuras mediante partición y recomposición en rectángulos.

P— Utilización del recorte y plegado de papel para hacer figuras, y estudiar propiedades, simetrías, etc.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Mediante plegado y corte, construir un cuadrado a partir de una cuartilla.

b) Ídem con una cuartilla con los bordes deteriorados.

c) Un cuadrilátero que tiene los lados contiguos iguales dos a dos se llama "deltoide". Construir uno y comprobar que tiene un eje de simetría.

d) Construir un rombo plegando y cortando una hoja de papel y justificar que sus diagonales se cortan en su punto medio.

P— Utilización de útiles de dibujo (regla, escuadra, compás) para representar figuras.

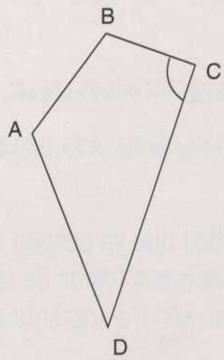
Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Dibujar un rectángulo de dimensiones dadas.

b) Dibujar un rombo dando la longitud de las diagonales (se le puede decir al alumno que recuerde que se cortan en su punto medio).

C— Conocimiento de los nombres de algunos elementos imprescindibles: los vértices se designan con letras mayúsculas, los segmentos mediante sus extremos, los ángulos...

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

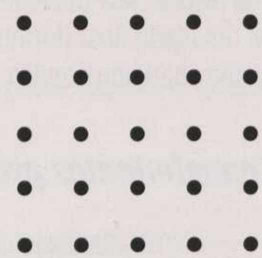


Nombrar el lado y el ángulo señalados. Dibujar una de las diagonales y nombrarla.

P— Resolución de problemas en los que se relacionen los contenidos específicos de esta Unidad con otros (previamente adquiridos o espontáneos), o que vayan "más allá" de lo que al alumno se le ha enseñado.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cuadrados puedes formar que tengan sus vértices en esta cuadrícula? ¿Y rectángulos?



b) Necesitamos saber la longitud de la diagonal de un campo de fútbol cuyas dimensiones conocemos: 104 m y 56 m. Para ello, dibuja uno igual, pero en pequeño: 104 mm, 56 mm, mide su diagonal en mm y di cuántos metros medirá la diagonal del campo de fútbol.

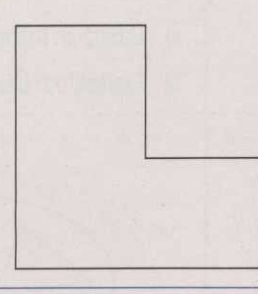
c) Dando cortes en un cubo, obtener distintos tipos de paralelogramos (para ello el alumno debe disponer de un cubo en el cual señalará qué corte produce cada figura).

d) ¿Es posible que un cuadrilátero tenga una diagonal fuera de la figura? Intenta encontrar uno que, además, tenga eje de simetría.

P— Dar definiciones o propiedades, describir procesos, justificar propiedades.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Describir esta figura de tal modo que un compañero pueda representarla con sólo leer tu descripción.



b) Explica por qué las diagonales de un rombo son ejes de simetría del mismo.

c) Justifica por qué todos los cuadriláteros tienen dos diagonales.

NOTA: Esta Unidad didáctica ha sido desarrollada minuciosamente como ejemplificación y aparece al final de este documento (véase página 145).

Unidad 3: TRIÁNGULOS

Tiempo: Dos semanas.

Siguiendo con el estudio de las figuras y relaciones en el plano, nos ocuparemos ahora de los triángulos y de su entorno geométrico.

En esta Unidad los alumnos volverán a usar los conceptos que ya poseen sobre triángulos, ligándolos mediante el descubrimiento de nuevas relaciones (valor de la suma de los ángulos, posibilidades de teselación, posibles simetrías, etc.) e incrementándolos con otros nuevos (mediana, mediatriz, bisectriz, etc.).

En cuanto a los contenidos referidos a procedimientos y a actitudes, se persiguen aquí los mismos objetivos que en la Unidad anterior (los cuadriláteros), que a la vez son los objetivos de la geometría en estos niveles: identificación y descripción de figuras, clasificación, análisis de elementos, observación de propiedades y relaciones, métodos de trabajo e investigación (utilización de diferentes técnicas de construcción, dibujo, composición y descomposición, etc.). En las actividades dedicadas al descubrimiento de propiedades y relaciones se persigue el desarrollo de la capacidad de estructurar el proceso de búsqueda y de razonar sus diferentes pasos y dificultades, más que la memorización y uso automático del resultado final (fórmula, propiedad, teorema), excepto en aquellos casos que por su frecuente aparición queden prendidos de forma natural en la memoria del alumno.

Conocimientos previos

— Elementos básicos de los triángulos: vértice, lado, ángulo...

— Medición de longitudes, con la regla graduada, y de ángulos con el círculo graduado.

— Utilización básica de los útiles de dibujo: regla, escuadra, compás.

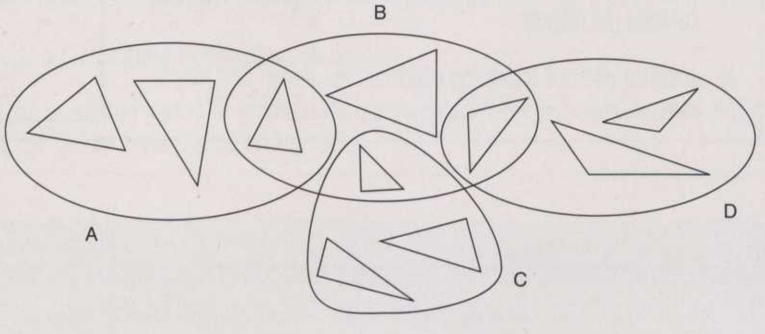
Contenidos

C— Nociones y nomenclatura: equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, rectángulo, obtusángulo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.

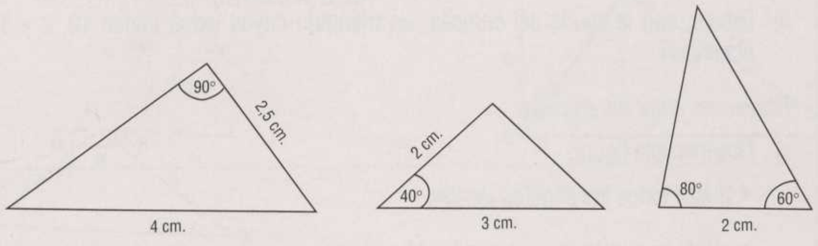
b) Expresa, con una sola palabra, una característica común a los triángulos que hay dentro de cada aro.



P— Descripción de figuras y sus elementos utilizando notaciones adecuadas (ejemplo: mayúsculas para los vértices y las minúsculas correspondientes para los lados opuestos).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Asigna la notación adecuada y describe los siguientes triángulos:



b) Construye un triángulo que cumpla estas condiciones: A = 90° a = 7 cm.

P— Identificación de los datos necesarios y/o suficientes para poder reconocer o diferenciar un triángulo (determinación de triángulos).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con tres varillas de mecano de 10, 8 y 6 cm?

¿Cuántos cuadriláteros diferentes se pueden construir con cuatro varillas de mecano de 10, 8, 7 y 6 cm?

b) En un triángulo los ángulos miden:

A = 20° B = 80° C = 80°

¿Tienes suficientes datos para dibujarlo?

Razona tu respuesta.

P— Construcción de triángulos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Construye un triángulo cuyos lados midan todos 8 cm.

b) Dibuja un triángulo con estos datos:

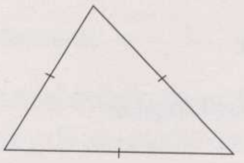
a = 10 cm B = 30° C = 60°

P— Investigación de hechos, relaciones y propiedades entre los elementos de un triángulo.

C— Rectas notables (medianas, bisectrices, mediatrices y alturas).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

Relaciones en las rectas notables:



a) Traza las medianas de este triángulo:

En la figura obtenida: busca segmentos que sean el doble de largos que otros. ¿Qué observas?

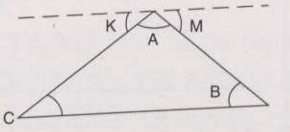
Enuncia una propiedad de las medianas.

Relaciones entre los lados:

b) Dibuja, con la ayuda del compás, un triángulo cuyos lados midan 10, 2 y 3 cm. ¿Qué observas?

Relaciones entre los ángulos:

c) Observa esta figura:

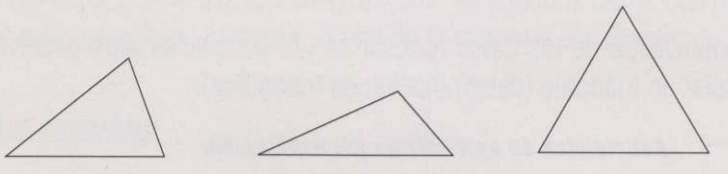


- Busca todos los ángulos iguales.
- ¿Cuál es el valor de la suma A + M + K?

Simetrías:

Relacionar triángulo equilátero con triángulo que posee tres ejes de simetría, isósceles con triángulo que posee un solo eje de simetría y escaleno con triángulo sin simetrías.

d) Calca y recorta estos triángulos.



Descubre, plegando el papel, los ejes de simetría de cada uno.

e) Investiga: ¿Puedes construir un triángulo que tenga solamente dos ejes de simetría? Expón por escrito tus conclusiones.

Otras:

f) ¿Es verdad que en un triángulo el menor lado está siempre frente al menor ángulo?

P— Investigación de relaciones entre triángulos y otras figuras.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

Composición y descomposición:

a) Dibuja y recorta un triángulo rectángulo.

Busca la manera de transformarlo en un rectángulo, mediante un solo corte, recolocando los trozos obtenidos.

Teselación:

b) Investiga: ¿Podrías cubrir el suelo de una habitación con un montón de baldosas iguales que tengan la forma de un triángulo cualquiera?

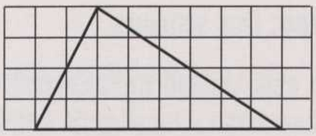
Inscripción:

a) Busca la forma de dibujar un triángulo equilátero que tenga los vértices sobre una circunferencia.

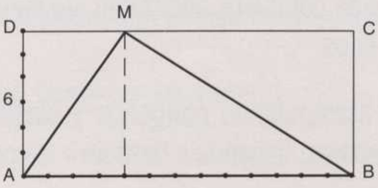
P— Obtención del área de un triángulo (basándose en la forma de obtener el área del rectángulo).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cuadritos hay dentro del triángulo? (Vale juntar trozos)



b) ¿Cuál es la superficie del rectángulo A, B, C, D? ¿Y la del triángulo A, B, M?

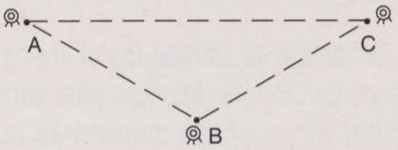


P— Resolución de problemas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

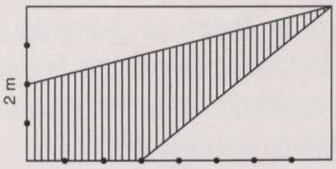
a) Tres arqueros, en un concurso de tiro, disparan sus flechas sobre las dianas A, B, C.

Si los tres disparan desde el mismo punto, aunque cada uno a su diana, ¿dónde deben colocarse para que ninguno lleve ventaja?



b) Une los puntos medios de los lados de un triángulo. ¿Cómo son los triángulos que obtienes?

c) ¿Cuánto costará la bandera si la tela blanca cuesta a 800 pts/m^2 y la tela rayada a 1.200 pts/m^2?

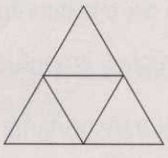


Actividades complementarias

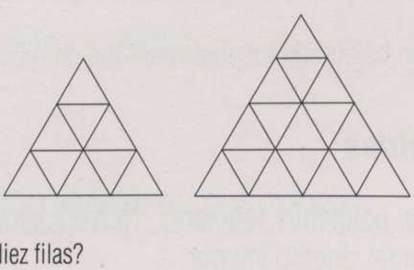
- ¿Cuántos triángulos determinan como máximo cuatro rectas? ¿Y cinco rectas? ¿Y...?
- Aquí hay cinco triángulos.

  ¿Los ves?

  ¿Cuántos hay aquí?



¿Y aquí?



¿Cuántos habrá si aumentamos la figura hasta diez filas?

- Construye cuatro triángulos, de un palillo de lado, utilizando siete palillos.

  ¿Te atreves a hacerlo con sólo seis? (Se puede).

Unidad 4: Polígonos regulares y círculo

Tiempo: Dos semanas.

En esta Unidad los alumnos retomarán sus conocimientos sobre polígonos regulares, los observarán y localizarán entre los objetos del entorno, reconocerán su funcionalidad en la vida cotidiana, analizarán algunas de sus propiedades y aprenderán a construir algunos de ellos.

Manipulando polígonos y clasificándolos se observarán los rasgos comunes de los regulares, llegando a descubrir las condiciones de regularidad.

En los intentos de análisis y de construcción se descubrirán sus características más significativas, sus relaciones internas (medida de ángulos, estudio de las diagonales, descomposición, simetrías, etc.) y sus relaciones externas con otras figuras (composición, inscripción, teselación, intersección, evolución al aumentar el número de lados desde el triángulo al círculo...).

Se descubrirá también, experimentalmente, la relación entre la longitud de la circunferencia y la del diámetro y entre la medida del radio y la superficie del círculo.

Al finalizar la Unidad los alumnos describirán con claridad cualquier polígono regular, conocerán distintas técnicas para construir triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. A partir del cuadrado construirán el octógono y a partir del hexágono el dodecágono. Obtendrán el pentágono a partir del ángulo central o por técnicas de plegado de papel. Calcularán el ángulo central y el ángulo interior en función del número de lados y obtendrán la superficie basándose en el área del triángulo y en mediciones directas de longitudes. También calcularán la longitud de la circunferencia y el área del círculo en función del radio. Y habrán mejorado en la adquisición de recursos propios y actitudes adecuadas para la investigación y el descubrimiento.

Conocimientos previos

—Algunos elementos geométricos básicos: segmento, recta, lado, ángulo, polígono, diagonal, círculo, radio...

—Unidades de medida de longitud, superficie y amplitud angular.

—Medición con la regla graduada y con el transportador de ángulos.

—Uso básico de los instrumentos de dibujo: regla, escuadra y compás.

Contenidos

C— Los polígonos regulares. Nomenclatura. Elementos: lado, radio, apotema, ángulo central, ángulo interior...

P— Identificación de los polígonos regulares (y de su funcionalidad) entre los objetos del entorno.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Ofrecer al alumno una colección de fichas o cartulinas con forma de distintos polígonos regulares. Elegir una y :

- Nombrarla.
- Señalar un ángulo central, un ángulo interior, un radio y un apotema.
- Nombrar alguna característica exclusiva de esa figura.

b) Localizar en el entorno un objeto que contenga un cuadrado, o un pentágono regular, o un hexágono regular, etc.

Localizar formas regulares creadas por la Naturaleza. Ejemplo: un panal de miel.

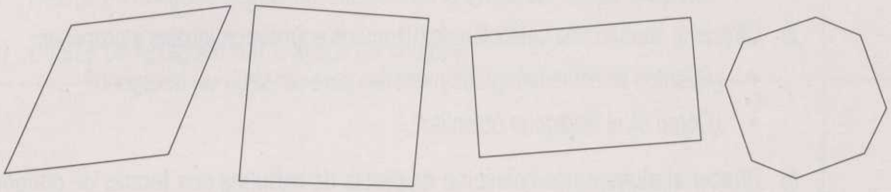
C— Condiciones de regularidad.

P— Diferenciación entre polígonos regulares y no regulares.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Un polígono tiene todos sus lados iguales y no es regular. ¿Qué puedes afirmar de ese polígono?

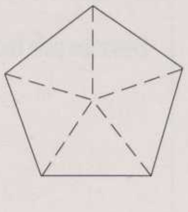
b) ¿Qué regularidades observas en estas figuras?



P— Investigación de relaciones entre los elementos de un polígono regular.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula el ángulo central de este pentágono y explica cómo lo has conseguido.



b) ¿Cuántas diagonales llegan a los vértices de un cuadrado?

¿Y a cada vértice de un pentágono?

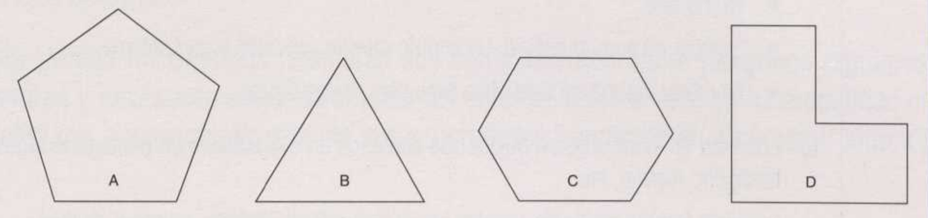
¿Y a cada vértice de un decágono?

¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado? ¿Y un pentágono? ¿Y un decágono?

P— Descubrimiento de simetrías mediante la utilización del espejo y de técnicas de plegado.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

¿Por dónde debes doblar cada figura para que las dos mitades coincidan?



¿Cuántos ejes de simetría tiene cada una?

P— Investigación de relaciones entre distintos polígonos regulares:

- Descomposición y recomposición.
- Investigación manipulativa de recubrimientos del plano y teselaciones.
- Identificación del círculo con el último de la serie de polígonos regulares ordenados según el número de lados.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Ofrecer al alumno una colección de triángulos equiláteros iguales y proponer:

- ¿Cuántos de estos triángulos necesitas para construir un hexágono?
- ¿Cómo es el hexágono obtenido?

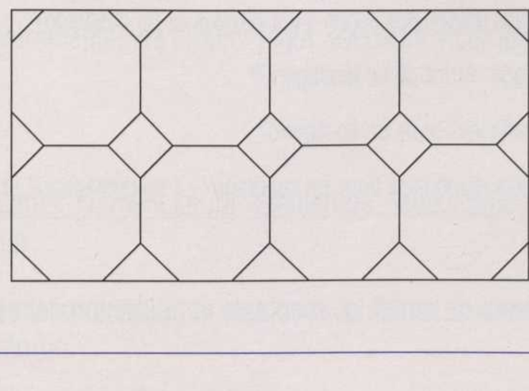
b) Ofrecer al alumno una colección de piezas de cartulina con formas de polígonos regulares (varios triángulos, varios cuadrados, varios pentágonos, hexágonos, octógonos…) y proponer:

- ¿Cuáles de estas figuras necesitarías para cubrir el suelo de una habitación? Busca varias soluciones.

P— Descripción de formas y figuras.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Describe este mosaico de modo que un compañero pueda reproducirlo leyendo tu descripción.



P— Elaboración de definiciones, descripción de procesos, justificación de propiedades...

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Define polígono regular.

b) Describe paso a paso el proceso a seguir para dibujar un dodecágono regular.

c) Justifica por qué un hexágono se puede dividir en seis triángulos equiláteros iguales.

P— Construcción de polígonos regulares:

- Utilización de técnicas de plegado.
- Utilización de instrumentos de dibujo.
- Utilización de las relaciones existentes entre los distintos polígonos regulares. Ejemplo: Obtener un dodecágono a partir de un hexágono, su circunferencia circunscrita y las mediatrices de los lados.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Construir un pentágono doblando una tira de papel.

b) Dibujar un polígono regular de x lados, con la ayuda del círculo graduado.

c) Dibujar un hexágono con la ayuda del compás.

P— Comparación de la longitud de la circunferencia y la del diámetro (mediciones sobre objetos reales).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Describe una experiencia para comprobar que la longitud de la circunferencia es un poco mayor que el triple del diámetro.

b) El diámetro de una circunferencia es 12 cm. ¿Cuánto mide aproximadamente la circunferencia?

P— Cálculo de la superficie de un polígono regular:

- Medición directa mediante cuadrícula transparente.
- Descomposición y recomposición en forma de rectángulo.
- Descomposición en triángulos y medición directa de la longitud de la base y la altura.
- Descubrimiento de la relación existente entre la superficie de un círculo y la del cuadrado de lado igual al radio (mediante medición directa).

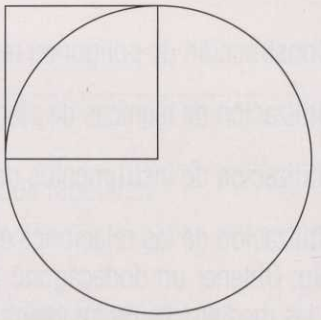
Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Ofrecer al alumno distintos polígonos regulares, sobre papel (en copias fungibles), y hacer propuestas como las siguientes:

- Elige uno de estos polígonos, mide sus dimensiones, pártelo en trozos, reconstruye con los trozos un rectángulo y calcula su superficie.
- Descompón en triángulos, mide y calcula el área de estos polígonos.
- Calcula el área de cada uno de estos polígonos (sin ninguna instrucción).

NOTA: Entre los polígonos habrá algunos con número par de lados y otros con número impar de lados.

b) ¿Qué relación existe entre la superficie de este círculo y la de este cuadrado?



P— Construcción y representación mental de formas espaciales cuyas caras sean polígonos regulares.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Con un juego de piezas poligonales encajables, construir:

- Un cuerpo cuyas caras sean triángulos equiláteros (cuadrados).
- Un cuerpo cuyas caras sean triángulos equiláteros y cuadrados.
- Un cuerpo cuyas caras sean polígonos regulares.

b) ¿Cómo cortarías un cubo para obtener una figura cuyas caras sean polígonos regulares?

P— Resolución de problemas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos triángulos determinan las diagonales y los lados de un cuadrado?

b) ¿Cuántas baldosas triangulares como ésta necesitas para cubrir el rectángulo?

(Presentar una baldosa triangular de lado 5 cm y un rectángulo de 10 centímetros de ancho y 20 cm de diagonal. Indicar, sobre las figuras, estas medidas.)

c) Una fuente circular de 5 m de radio está rodeada de un paseo de 3 m de ancho.

- ¿Cuántos metros de alambrada necesita el jardinero para vallar el paseo?
- ¿Cuánto cuesta cubrir de losas el paseo si sale a 800 pesetas el metro cuadrado?

Actividades complementarias

- ¿En cuántos trozos queda dividido el plano al prolongar los lados de un triángulo equilátero? ¿Y al prolongar los lados de un cuadrado? ¿Y al prolongar los de un...?

  ¿Cómo son esos trozos de plano? ¿Cuántos son abiertos?

- Dibuja dos hexágonos superpuestos parcialmente de forma que la zona común sea un rombo.

  Investiga otras formas de la zona común.

  Haz lo mismo utilizando otros polígonos regulares.

- Dibuja y recorta un cuadrado. Nombra sus vértices y su centro (A, B, C, D, O).

  Pínchalo con un alfiler en su centro sobre un folio.

  Cópialo sobre el folio.

  ¿Cuánto debes girarlo para que vuelva a coincidir consigo mismo? (para que A caiga sobre B).

  ¿Cuántas veces coincide sobre sí mismo hasta dar una vuelta completa?

Unidad 5: Uso sistemático de los útiles de dibujo

Tiempo: Dos semanas.

Los primeros conceptos de geometría se obtienen de la experiencia directa, de la manipulación y observación de formas, de medir la realidad, de construir, componer y descomponer figuras.

El siguiente paso, apoyado por el desarrollo de la capacidad de abstracción, consiste en representar la realidad, los elementos y los conceptos geométricos, y utilizar la representación como instrumento para facilitar la aproximación a nuevos conceptos y relaciones.

Por eso parece conveniente que los alumnos comiencen a usar sistemáticamente los instrumentos de dibujo, adquiriendo destrezas, procedimientos, hábitos y actitudes que potencien la representación como instrumento de investigación y aprendizaje de la geometría.

Los contenidos de la Unidad no se dirigen, por tanto, hacia la adquisición de técnicas de dibujo lineal, sino a que los alumnos sean capaces de utilizar los instrumentos de dibujo aplicando sus conocimientos geométricos, para expresar conceptos, leyes y procesos y para descubrir nuevas relaciones.

En todas las actividades el alumno dispondrá y hará libre uso de: regla graduada, escuadra, cartabón, compás y círculo graduado según la escala sexagesimal.

Conocimientos previos

— Conceptos básicos de geometría del plano y del espacio.

— Medición de longitudes (regla graduada) y de ángulos (círculo graduado).

— Uso básico de los instrumentos de dibujo: regla, escuadra, compás...

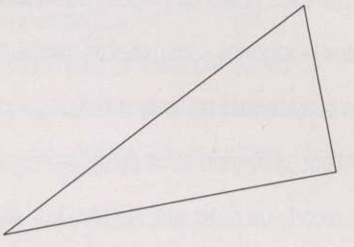
Contenidos

P— Medición y representación de distancias y ángulos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

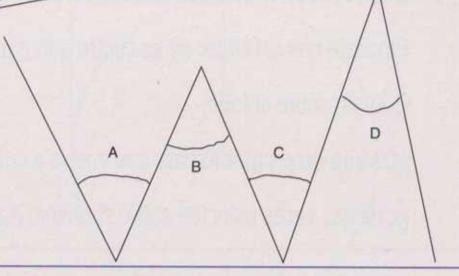
a) Calcula el área de este triángulo.

(Presentar un triángulo rectángulo.)



b) Dispones exclusivamente de un compás.

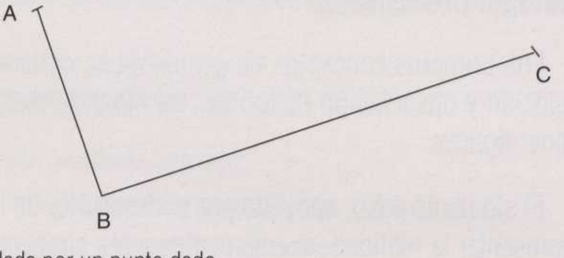
- ¿Cuál de estos ángulos es mayor?



P— Identificación y trazado de rectas paralelas y perpendiculares.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Éstos son dos de los lados de un rectángulo. Construye el rectángulo completo.



b) Trazar una paralela a una recta dada por un punto dado.

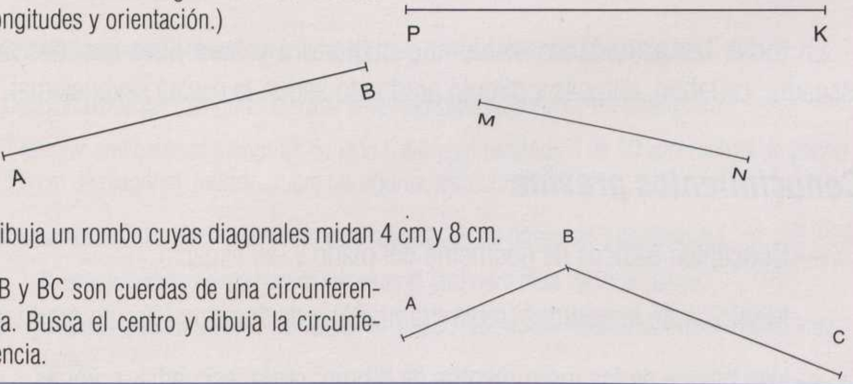
P— Construcción de la mediatriz de un segmento.

C— Mediatriz de un segmento.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

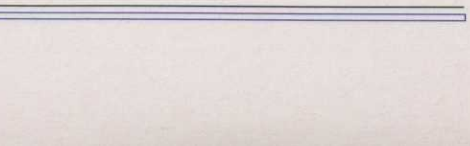
a) Trazar las mediatrices de estos segmentos.

(Presentar varios segmentos de diferentes longitudes y orientación.)



b) Dibuja un rombo cuyas diagonales midan 4 cm y 8 cm.

c) AB y BC son cuerdas de una circunferencia. Busca el centro y dibuja la circunferencia.



P— Construcción de la bisectriz de un ángulo.

C— Bisectriz de un ángulo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Traza la bisectriz de un ángulo, con la ayuda del compás.

b) Dibuja dos rectas que se corten.

Busca un punto que esté a la misma distancia de las dos rectas. Busca unos cuantos más. ¿Qué observas?

c) Utilizando solamente una regla y un compás, dibuja un ángulo de 45°, otro de 60°, otro de 30° y otro de 15°.

d) Dibuja un triángulo cualquiera. Traza las bisectrices de sus ángulos. ¿Qué observas?

C— Elementos de la circunferencia y el círculo: ángulo central, ángulo inscrito.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Dibuja, en un círculo, un ángulo central y uno inscrito que abarquen el mismo arco.

C— Tangencias e intersecciones.

P— Construcción y observación de relaciones.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Traza dos circunferencias tangentes externas y dos tangentes internas.

Mide la distancia entre sus centros. ¿Qué observas?

b) Traza tres circunferencias, de igual radio, tangentes entre sí.

c) Traza una recta tangente a una circunferencia y traza el radio que toca el punto de tangencia. ¿Qué ángulos se forman? ¿Ocurre siempre esto? Justifica tu respuesta.

P— Construcción de polígonos y figuras circulares.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

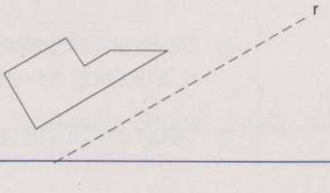
a) Construye un rombo utilizando la regla y la escuadra.

b) Dibuja tres círculos de forma que dividan al plano en 8 (7, 6, 5, 4) partes.

P— Construcción de figuras simétricas.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Dibuja una figura de forma que si doblas el papel por la recta señalada (r), coincida con la figura dada.



P— Comprobación y descubrimiento de regularidades entre los elementos de las figuras geométricas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Dibuja e investiga. ¿Qué puedes decir de la mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia?

b) En un círculo, traza un arco central y otro inscrito que abarquen el mismo arco.

— Mide ambos ángulos.

— Repite la experiencia varias veces.

— Escribe tus conclusiones.

P— Investigación de relaciones entre figuras geométricas (inscripción, intersección, teselación, composición y descomposición...).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Busca la forma de transformar un rombo en rectángulo añadiéndole el mínimo número de piezas.

b) Traza la circunferencia circunscrita a un rectángulo.

P— Descripción de procesos para la construcción de figuras o la justificación de propiedades.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

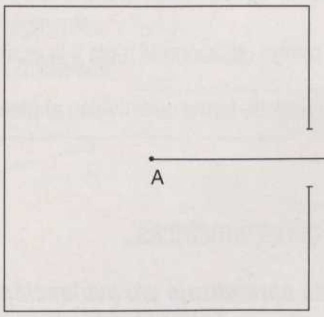
a) Explica los pasos que seguirías para dibujar un octógono regular, si dispones exclusivamente de un compás y una regla.

b) Dibuja un triángulo rectángulo que tenga el lado más largo doble que el más corto. Describe cómo lo has hecho.

P— Resolución de problemas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Una cabra (C) está atada a una estaca (A). El dueño se ha dejado la puerta del corral abierta. Colorea el sector de prado en el que la cabra se comerá la hierba.

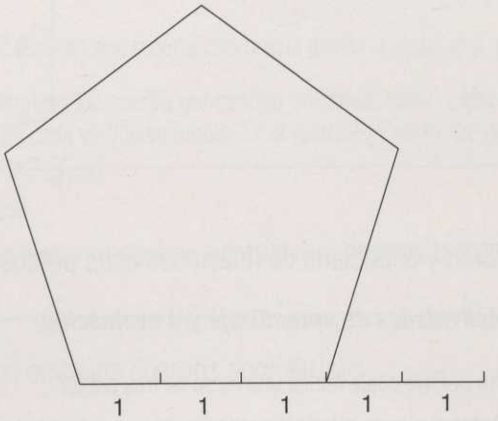


b) Dibuja una circunferencia de 4 cm de radio e inscribe en ella un rectángulo. ¿Cuánto medirá la diagonal del rectángulo?

c) Dibuja distintos desarrollos de un cubo.

d) Dibuja el desarrollo de una pirámide de base cuadrada.

e) Con la ayuda de este pentágono de 3 cm de lado, dibuja otro que tenga 5 cm de lado.



f) Busca un polígono que quede dividido en (11, 24...) trozos por sus diagonales.

Unidad 6: RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO. ESTUDIO DE ALGUNOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Tiempo: Dos semanas.

En la primera Unidad, "Unidad 1: Del espacio al plano", se observaron y manipularon algunas figuras espaciales, extrayendo de ellas las formas planas.

Después, en el resto de las unidades, se han analizado, construido y relacionado esas formas planas.

Ahora, en esta última Unidad de geometría, volveremos al espacio para retomar los cuerpos geométricos transfiriendo los recursos y herramientas adquiridos en las anteriores. Se volverán a analizar algunas figuras espaciales, se observarán las relaciones entre sus elementos, se descompondrán, desarrollarán y construirán, se medirá su superficie y se iniciará el estudio del volumen, por métodos directos e indirectos.

Además, en esta Unidad didáctica se tendrá en cuenta el desarrollo de la visión espacial como objetivo madurativo de gran importancia.

Conocimientos previos

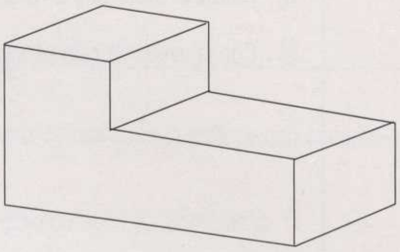
— Conocimientos básicos de geometría que, por elementales, suponemos adquiridos por la generalidad de los alumnos.

Contenidos

C— Nociones y nomenclatura básicas: punto, recta, plano, segmento, ángulo, arista, vértice, diagonal, cara, generatriz, base, altura, prisma, ortoedro, cilindro...

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Cuenta los vértices, aristas y caras de la figura.



P— Investigación y enunciado de relaciones entre puntos, rectas y planos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Por qué no cojea nunca una mesa de tres patas?

¿Cuántos planos diferentes pasan por tres puntos dados?

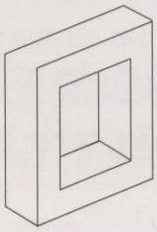
b) Cuatro rectas no son paralelas y pertenecen al mismo plano. ¿Cuántos puntos comunes tienen, como mínimo? ¿Y como máximo?

Dibuja modelos.

P— Descripción de figuras mediante sus elementos y las relaciones entre los mismos.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Describe esta figura.



P— Investigación de relaciones y regularidades entre los elementos de una figura espacial (con el auxilio de materiales manipulables: palitroques y nudos, piezas poligonales encajables, plastilina, porexpán, etc.).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Si a un cubo le das un corte que contenga dos diagonales, ¿qué polígono obtienes? Dibuja ese polígono para un cubo de arista 5 cm.

b) Dibuja un segmento de la misma longitud que la diagonal de un ortoedro de 3 x 6 x 5 cm.

c) Observa la figura: Se ha atravesado una caja de zapatos con una aguja de tricotar. ¿Cuánto debes girar la caja de zapatos para que vuelva a coincidir consigo misma?

¿Cuántas veces coincide consigo misma en una vuelta completa?

¿Cómo debería ser la caja para que coincida consigo misma cuatro veces en cada vuelta?

NOTA: En este tipo de actividades conviene que el alumno disponga de la caja y la aguja.

P— Utilización de diferentes técnicas y materiales para la construcción de cuerpos geométricos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué nombre recibe el espacio que recorre una puerta giratoria al dar una vuelta completa?

b) Investiga. ¿Puedes completar un cuerpo geométrico utilizando como caras triángulos equiláteros, de modo que en cada vértice se junten 3 triángulos? ¿Y de modo que en cada vértice se junten 4 triángulos? ¿Y...?

Justifica tus respuestas.

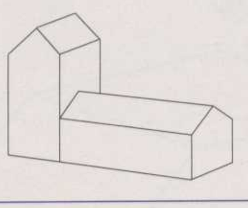
NOTA: Ayúdate con las piezas triangulares encajables, o pegando triángulos de cartulina con cinta adhesiva.

P— Observación de relaciones entre los cuerpos geométricos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cubos iguales necesitas para completar un cubo de arista doble? ¿Y triple?

b) Dibuja todos los prismas que necesitarías coger de un juego de construcciones para obtener esta figura.

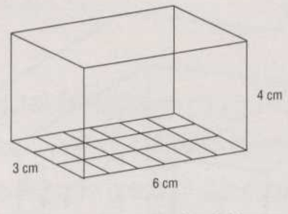


P— Cálculo del volumen de un prisma recto o de un cilindro. (Basándose en el número de unidades cúbicas que caben sobre la base y en el número de capas que se pueden apilar sobre las primeras.)

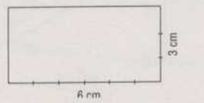
NOTA: Es de gran utilidad disponer de una colección de cubos de madera o plástico de 1 cm de arista.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cubitos de un centímetro de arista puedes colocar sobre el rectángulo A?



¿Cuántos cubitos necesitas para construir el bloque B?



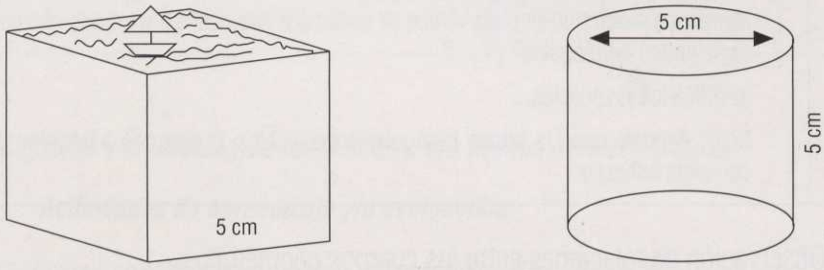
b) Calcula el volumen de un cilindro, sabiendo que el círculo de la base tiene una superficie de 20 cm^2 y que mide 5 cm de alto.

P— Resolución de problemas de aplicación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) El cubo está lleno de agua.

¿Cuántos litros quedan si se mete el cilindro dentro del cubo?

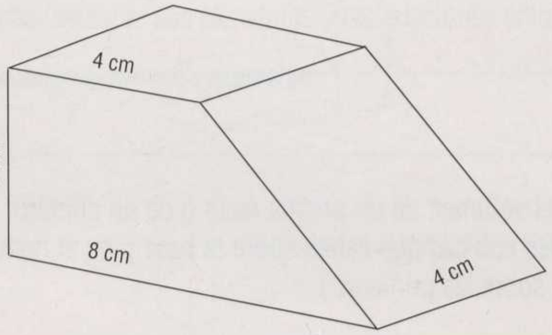


b) Construye un cubo de 5 cm de arista apilando cubitos de 1 cm de arista.

Coges una brocha y coloreas de rojo las seis caras del cubo grande.

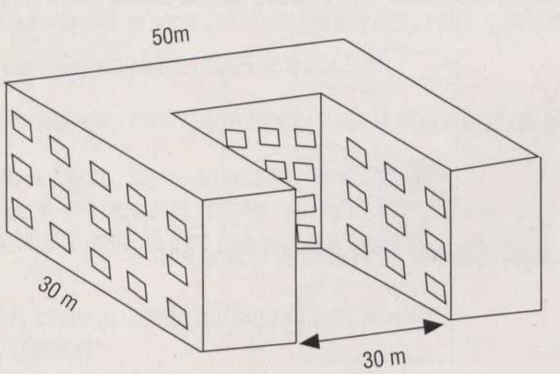
¿Cuántos cubitos han quedado coloreados por una cara? ¿Y por dos caras? ¿Y por tres caras? ¿Y por ninguna cara?

c) Calcula el volumen de esta figura:

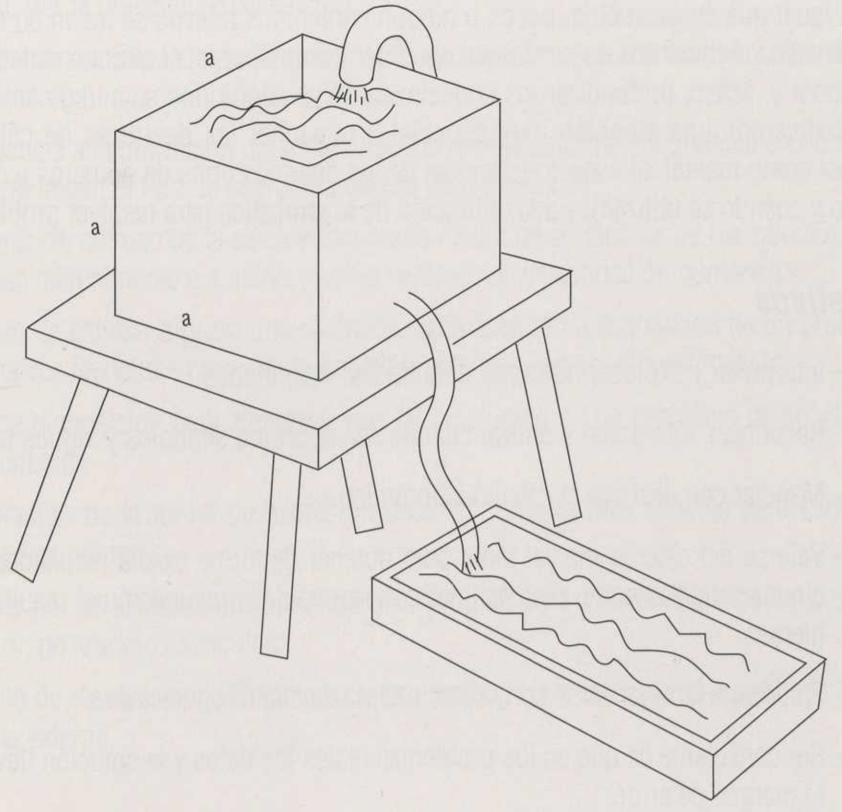


Actividades complementarias

- ¿Cuánto cuesta pintar este edificio si sale a 200 pesetas el metro cuadrado?



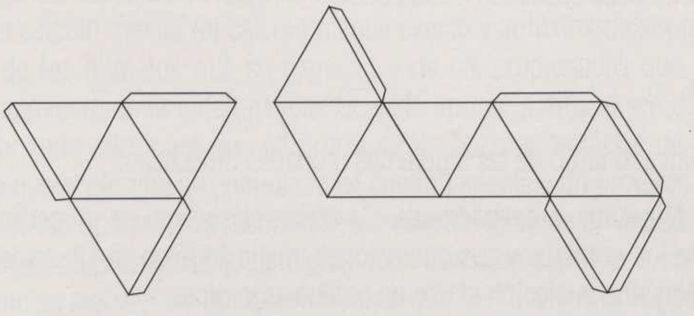
• Con este depósito de agua beben las vacas de una granja durante una semana.



¿Cuánto tiempo beberán con un depósito de arista doble? ¿Y con uno de arista triple?

• Actividad para grupo:

Fotocopiad ocho veces el desarrollo A y seis veces el B y montad las figuras.



Obtenéis dos colecciones de figuras diferentes.

Investigad qué figuras se pueden formar con las piezas disponibles.

(El objetivo es que los alumnos lleguen a descubrir que pueden construir un tetraedro o un octaedro de arista doble, o, lo que es lo mismo, que combinando octaedros y tetraedros se rellena el espacio.)

Aritmética

Al igual que en geometría, pocos o ningún contenidos nuevos se tratan en estos temas de aritmética. Estimamos que, más que aprender cosas nuevas, el alumno necesita afianzar, relacionar y, acaso, profundizar los conocimientos ya adquiridos en cursos anteriores. Por eso dedicamos una atención muy especial a remachar las destrezas de cálculo, tanto manual como mental, al aspecto funcional de los distintos tipos de números y operaciones (cómo y cuándo se utilizan), y a la utilización de la aritmética para resolver problemas.

Objetivos

— Interpretar y expresar números, cantidades, magnitudes...

— Reconocer, interpretar y utilizar cuando sea oportuno símbolos y signos numéricos.

— Manejar con destreza el cálculo algorítmico.

— Valerse del cálculo mental tanto para obtener de forma exacta resultados de operaciones sencillas como para estimar con razonable aproximación el resultado de problemas.

— Empezar a familiarizarse con la calculadora de cuatro operaciones.

— Ser consciente de que en los problemas reales los datos y la solución llevan un cierto margen de error.

— Asociar a situaciones problemáticas concretas las operaciones aritméticas que se requieren para su resolución.

— Familiarizarse con ciertos problemas tipo (compras y ventas, repartos, variaciones porcentuales, móviles, mezclas, etc.) y conocer sus estructuras asociando el tratamiento aritmético adecuado a cada clase.

Contenidos

Se desarrollan a lo largo de las siguientes unidades didácticas:

Unidad 7: Números y operaciones. Se revisa el sistema de numeración decimal, la funcionalidad de los números y sus operaciones, manejándolos en situaciones problemáticas concretas. Hay una iniciación al uso de potencias y raíces.

Unidad 8: Fracciones. Se hace una profunda incursión en el uso y significado de las fracciones. Aprovechando que tanto para simplificarlas como para reducirlas a común denominador se requiere el buen manejo de la divisibilidad, se hace un leve repaso de ésta en sus aspectos básicos.

Unidad 9: Resolución de problemas aritméticos. Se presentan problemas de todo tipo con objeto de que el alumno se familiarice con el proceso de traducir al lenguaje aritmético relaciones problemáticas variadas.

Estas unidades se describen en las próximas páginas, donde se pormenorizan los contenidos conceptuales y procedimentales. Sin embargo, entendemos que los contenidos

referidos a actitudes son los mismos para todo el bloque de aritmética. Los exponemos a continuación:

— Gusto por la precisión en el cálculo.

— Valoración positiva del hábito de memorizar relaciones numéricas sencillas de uso corriente (por ejemplo: 1/5 <—> 20%).

— Tendencia a la utilización del método adecuado (cálculo mental, manual o con calculadora) según el tipo de operación que se vaya a efectuar.

— Valoración del uso de la calculadora como medio de corrección de los cálculos efectuados mentalmente o a mano y como vehículo de investigación numérica.

— Hábito de estimar a priori una razonable aproximación a la solución de un problema y, una vez resuelto, contrastar la solución obtenida con aquella estimación.

— Buena disposición para atender a vías de resolución de un problema distintas de la ya conocida.

— Valoración de la forma de expresión decimal como la más sencilla para estimar y comparar números.

— Gusto por la elaboración de estrategias propias para la obtención del m.c.d. y el m.c.m. de números sencillos.

— Hábito de resolver por sí mismo todo problema a cuya solución se haya llegado con ayuda externa.

Metodología

El aprendizaje o el refuerzo de los mecanismos de cálculo (decimales, fraccionarios, potencias, etc.) es un objetivo importante, ciertamente. Pero no se debe olvidar que este aprendizaje es lento y requiere avances paulatinos. Para que se progrese con seguridad, el asentamiento de las capacidades algorítmicas debe ir acompañado (de forma inseparable) de destrezas de cálculo mental (el cálculo mental exacto y aproximado supone un profundo conocimiento de los números que se manejan y de las propiedades que se aplican), así como del conocimiento de la funcionalidad de cada tipo de números (en dónde y para qué se utilizan). Por todo ello, para que se produzca un buen aprendizaje de la aritmética es imprescindible que el alumno se enfrente, casi continuamente, con problemas con enunciado (en los cuales las operaciones responden a una estrategia que sirve para llegar a algo) y que resuelva muchos problemas y ejercicios con "números sencillos", con los cuales no sólo aplica cómo se realizan las operaciones, sino que "ve" una y otra vez por qué es así.

Ya a estos niveles resulta un excelente auxiliar didáctico la calculadora de cuatro operaciones (+, x, :, –,"+/–, un lugar de memoria y factor constante, con jerarquía de operaciones, es decir, que la secuencia 2 + 3 x 5 la interprete como 2 + 3 x 5 = 2 + 15 = 17 y no como (2 + 3) x 5 = 25).

— Para que los alumnos corrijan sus operaciones hechas (¡previamente!) a mano o mediante cálculo mental.

— Para que puedan completar tandas de problemas con "números sencillos" con tandas de problemas con números "no sencillos", estos últimos para ser resueltos con calculadora, sin miedo a que los alumnos se eternicen en los cálculos.

— Para "investigar" propiedades numéricas.

(¡Qué enorme mejora en los aprendizajes de los alumnos se produciría si los profesores de todos los niveles aprendieran a valerse de la calculadora como recurso didáctico!)

Unidad 7: Números y operaciones

Tiempo: Tres semanas.

En esta Unidad didáctica se revisará el sistema de numeración decimal removiendo los conocimientos preexistentes sobre su estructura, los órdenes de unidades y sus equivalencias, y reflexionando sobre el valor de las cifras en función del valor que ocupen a ambos lados de la coma decimal.

Para ello se propondrán actividades y situaciones que permitan fijar la atención de los alumnos en la variación que sufren las cifras, en la influencia de unas en otras al ser operadas, en el significado de "las llevadas" al aplicar los algoritmos, etc. También puede ser útil calcular en otros sistemas de numeración (unidades temporales, monetarias...) contrastando con el sistema decimal el comportamiento de los distintos órdenes de unidades.

En cualquier caso, y para toda la operativa trabajada en la Unidad, deben manejarse cantidades y situaciones muy sencillas en las que el alumno, poniendo atención en el significado de lo que hace, comprenda con facilidad los procesos operativos (sin previa explicación del profesor) y se ejercite en reflexionar sobre ellos, sin pretender que memorice reglas de actuación o que sistematice conclusiones muy elaboradas.

Se fijará la atención sobre la funcionalidad de los números asociándolos a magnitudes de uso habitual. Se insistirá en el significado de las operaciones manejándolas en situaciones con contexto, evaluando el error en el resultado de los problemas, decidiendo en la precisión del error tolerable en cada situación.

Además se reflexionará sobre el significado de las potencias y las raíces, asociándolas de forma espontánea a las situaciones oportunas. Se entrenará el descubrimiento de algunas reglas de cálculo con potencias, se aproximarán raíces de cualquier índice por tanteo y se utilizará el algoritmo de la raíz cuadrada.

Conocimientos previos

Los alumnos deberán poseer conocimientos básicos sobre el sistema de numeración decimal (estructura del sistema, órdenes de unidades enteras, papel de la coma, etc.) y el significado y los algoritmos relativos a las cuatro operaciones fundamentales.

Contenidos

C— El sistema de numeración decimal: órdenes de unidades. Equivalencias. Valor de posición de las cifras. Orden de los números.

P— Diferenciación del valor de las cifras según la posición que ocupan.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuál es el mayor número de cinco cifras todas diferentes? ¿Y el menor?

b) Escribe cuatro números menores de uno utilizando solamente ceros y unos.
Vuelve a hacerlo, pero de forma que los números tengan sólo dos cifras decimales.

P— Observación del comportamiento de las cifras de los números en las operaciones. Extracción de conclusiones. Comprensión del proceso operativo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Explica y completa este proceso:

64,5 ⟶	6D 4U 5d ⟶	6D 3U 15d
−2,8 ⟶	−2U 8d ⟶	−2U 8d
		6D 1U 7d

b) Expresa con una operación esta reflexión:

"Quiero repartir dos tartas entre cinco personas. Como no puedo, parto cada tarta en diez trozos. Ahora repartiré veinte décimas de tarta entre cinco personas. Tocan a cinco décimas cada persona."

P— Ordenación de los números. Representación en la recta numérica.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Busca un número mayor que 15 y menor que 16.

- Busca un número mayor que 1,5 y menor que 1,6.
- Busca un número mayor de 2,48 y menor de 2,49.

b) Representa en la recta numérica: 2,5 ; 0,25 ; 3,1.

P— Asociación de gamas de valores numéricos a magnitudes habituales.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

El número 36,7 podría asociarse a la temperatura normal de una persona sana.

Escribe la magnitud que podría asociarse a cada uno de estos números:
15.000.000; 43; 0,250; 3,4.

C— Significado de las operaciones aritméticas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Escribe un problema que se resuelva con una multiplicación y una resta.

b) Un pastelero ha fabricado 72 docenas de bombones.

Cada caja de cartón le cuesta 85 pesetas y tiene capacidad para dos docenas y media de bombones.

- ¿Cuánto se encarece la docena de bombones debido al envase?
- ¿Cuánto gastará en cajas para envasar sus bombones?

P— Estimación del error cometido o del error tolerable en cada situación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a)
- Haces tres bocadillos con un kilo de pan. ¿Cuánto pan se llevará aproximadamente cada bocadillo?
- Tres bandidos se reparten el botín del último robo: un kilo de oro en polvo. ¿Cuánto oro corresponde a cada uno?

b) Sin lápiz ni papel, da una cifra aproximada del producto: 385 x 512. ¿En cuánto crees que te estás equivocando como máximo? Compruébalo.

C— Potencias de exponente natural. Convencionalismos: notación y nomenclatura (base, exponente).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Escribe en forma de potencia:

3x3x3x3 bxbxbxb

b) Escribe cómo se leen estas expresiones:

$2^5 = 32$ a^8

P— Uso de las potencias: asociación espontánea de potencias a las situaciones adecuadas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) En un juego, cada vez que caiga tu ficha en casilla roja se multiplican por dos los puntos que tenías.

Partes con 15 puntos y pasas sucesivamente por siete casillas rojas. ¿Qué puntuación consigues?

Tu compañera ha comenzado con 13 puntos y al final tenía 208 puntos. ¿Por cuántas casillas rojas ha pasado?

b) Un banco promete que si depositas en él una cantidad de dinero y lo dejas un año seguido, te lo multiplican por 1,12.

Pones 400.000 pts y las retiras al cabo de cuatro años. ¿Cuánto dinero te dan?

P— Observación e indagación de regularidades y leyes de comportamiento en las operaciones con potencias de exponente natural.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula como en el ejemplo:

Ejemplo: $5^3 \times 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \ \times \ 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$

$3^4 \times 3^2$ $\quad 2^2 \times 2^5$ $\quad a^3 \times a^2$

¿Qué observas?

b) Simplifica:

$\dfrac{a^5}{a^2} \qquad \dfrac{(a^3\,b^5)^2}{a^5}$

Comprueba tus resultados, con ayuda de la calculadora, dando valores a las letras.

c) Introduce en tu calculadora esta secuencia:

$\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

Y vete anotando los resultados de la pantalla después de cada "=".

¿Qué observas?

C— Radicación. Significado de las raíces. Convencionalismos: notación y nomenclatura. Algoritmo de la raíz cuadrada.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula x en cada caso:

$2^x = 32 \qquad x^2 = 144 \qquad x^4 = 81$

b) ¿Qué número multiplicado por sí mismo da 3?

c) Calcula la raíz cuadrada de 1.874.

d) Calcula por tanteo la raíz cúbica de 15.

P— Asociación de las raíces a las situaciones adecuadas.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

El área de un cuadrado es 441 cm^2.

¿Cuál es, aproximadamente, la longitud de su lado?

P— Resolución de problemas de aplicación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Tres socios, al final del día, se reparten el dinero de la caja que contiene:

10 billetes de 1.000
14 monedas de 500
15 monedas de 100
23 duros

Explica cómo hacen el reparto y las monedas y billetes que se lleva cada uno.

b) Un colegio tiene cuatro pabellones, en cada pabellón hay cuatro pisos, en cada piso cuatro clases, en cada clase cuatro filas de mesas con seis alumnos o alumnas. ¿Cuál es la capacidad del centro?

c) Una pelota de goma, cada vez que bota, alcanza una altura igual a la del bote anterior multiplicada por 0,6.

Si se deja caer desde una altura de 2 m, ¿qué altura alcanzará después del cuarto bote?

d) ¿Qué número se aproxima más al valor de la raíz cuadrada de 5, el 2,23 o el 2,24? Razona tu respuesta.

e) Si digo que 23 : 3 es igual a 7,6 me estoy equivocando en:

menos de una unidad
menos de una décima
menos de una centésima
menos de una milésima

Actividades complementarias

- El volumen de un cubo es de 100 cm^2.

  ¿Cuál es su arista?

- Comprueba con la calculadora, pulsando el mínimo número de teclas, que la raíz sexta de 117.649 es siete.

- En cierta ciudad la mitad de los habitantes son chismosos y chismosas y la otra mitad discretos y discretas.

  La ciudad tiene muchos millones de habitantes.

  Cada vez que un chismoso o chismosa se entera de un secreto, tarda por término medio media hora en transmitirlo a otros seis ciudadanos.

  ¿Cuántas personas crees que pueden enterarse de un secreto a las cuatro horas de haber sido descubierto por casualidad por un ciudadano cualquiera?

  (Haz tus cálculos, da una solución y después critícala.)

- Un satélite de comunicaciones tarda en dar una vuelta completa a la Tierra 11 horas, 24 minutos y 32 segundos.

  ¿Cuánto tarda en dar cinco vueltas?

  Si el último paso sobre España se registró a las ocho y cuarenta y tres de la mañana, ¿a qué hora volverá a pasar?

- ¿Cuántos números diferentes se pueden formar utilizando todas o algunas de estas fichas?

  $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Unidad 8: Fracciones y divisibilidad

Tiempo: Cuatro semanas.

El buen uso de las fracciones, el saber valerse de ellas de forma oportuna y eficaz requiere, fundamentalmente, una familiaridad profunda con los aspectos más sencillos de su significado y el de sus operaciones. Por eso, en esta Unidad didáctica el objetivo fundamental es que el alumno revise por medio de ejercicios apropiados (problemas simples con enunciado) el significado de una fracción, su papel como operador y las operaciones con fracciones, que han de ser suficientemente sencillas como para que la complejidad operatoria no eclipse el significado de lo que realiza y por qué lo hace. Sólo cuando esto se ha conseguido tiene sentido entrar en un planteamiento más mecánico, válido para cualquier tipo de fracciones (y "no sencillas"). Por ello, después de un primer repaso, se procede a una revisión de la divisibilidad, sus conceptos y métodos básicos y más útiles, con vistas a aplicarlos en la simplificación, comparación, suma y resta de fracciones.

Conceptos previos

— Significado y algoritmos de las operaciones con números naturales.

— Cálculo mental con números sencillos.

Contenidos

C— La fracción como parte de un todo.

P— Cálculo de la cantidad parcial que corresponde a una fracción de una cantidad total.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué fracción es la mayor de cada pareja?

30/100 33/100 2/3 2/5 7/6 11/12

b) En un club deportivo hay 80 socios. Las 3/4 partes de ellos practican el fútbol.

¿Cuántos practican fútbol?

(En la resolución, ser consciente de cuántos son la cuarta parte y, por tanto, cuántos las tres cuartas... Se sugiere proponer sólo ejercicios en los que el total sea divisible por el denominador de la fracción.)

P— Cálculo de la fracción que corresponde a una cantidad parcial respecto de un total. (Procedimiento contrario al anterior.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué fracción de 80 es 60?

(Realiza esta actividad a continuación de la anterior; ten la que se ha obtenido 60 como 3/4 de 80, como comprobación. Es decir, 60/80 = 3/4)

b) De las 24 aves que hay en un corral, 18 son gallinas y el resto patos.

¿Qué fracción de los animales suponen las gallinas? ¿Y los patos?

C— La fracción como operador.

P— Cálculo de la fracción de un número. (Automatización de los procedimientos anteriores: multiplicar por el numerador y dividir por el denominador.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Los 3/4 de 80 son 60.

¿Qué operaciones debes hacer para calcularlo?

b) Completa:

"Para calcular la fracción de un número, se multiplica el número por el .... y se divide por el ....

c) Se cae una caja con 360 huevos y se rompen las dos terceras partes. ¿Cuántos huevos se han roto?

C— La fracción como cociente.

P— Identificación automática de fracciones sencillas, de uso corriente, con su valor en forma decimal y viceversa. (1/2 = 0,5 ; 1/4 = 0,25; etc.).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Expresa 3/4 con un número decimal.

b) ¿Qué fracción de 1 kg son 0,5 kg?

P— Identificación de una fracción con el cociente de dividir su numerador entre su denominador.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Expresa en forma decimal :

6/3; 34/17; 1/5; 3/5

b) Uno de los socios de un comercio posee los 3/5 del negocio.

Todos los días calcula lo que le corresponde de las ganancias. Pero a fuerza de repetir las operaciones se ha dado cuenta de que le basta multiplicar por cierto número, para hacerlo de una sola vez.

¿Qué número es ése?

P— Observación y descubrimiento de las variaciones que sufre el valor de una fracción cuando se multiplica o divide por un número el numerador, el denominador o ambos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué relación ves entre las fracciones de cada columna?

1/3 2/3
2/5 4/5
3/4 6/4

Exprésalas todas en forma decimal.

¿Qué observas?

b) Elige una fracción cualquiera y multiplica su denominador por un número. ¿La fracción aumenta o disminuye? Comprueba tus conclusiones con otros ejemplos.

c) Investiga. ¿Qué le ocurre a una fracción cuando la multiplicas arriba y abajo por el mismo número?

Razona tu respuesta.

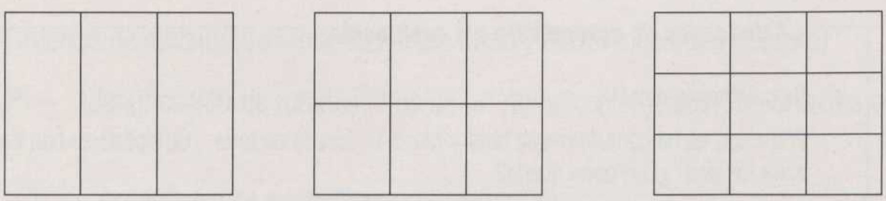
C— Fracciones equivalentes. Propiedad fundamental de las fracciones.

P— Elaboración de estrategias propias para la identificación de fracciones equivalentes.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

(En las propuestas se manejarán fracciones sencillas, susceptibles de ser representadas mental y gráficamente por los alumnos.)

a) Representa las fracciones 2/3, 4/6 y 3/9.



¿Qué observas?

b) Expresa estas fracciones en forma decimal:

2/3, 4/6, 3/9

¿Qué observas? Añade alguna fracción más a la colección.

P— Obtención de fracciones equivalentes a una dada. Utilización de la propiedad fundamental de las fracciones: $a/b = a \cdot n/b \cdot n$.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Escribe una fracción equivalente a 5/4, que tenga 8 por denominador.

b) Enuncia la propiedad fundamental de las fracciones y pon algún ejemplo en el que se compruebe dicha propiedad.

P— Transformación de un entero en fracción y viceversa.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cuartos de tarta hay en 3 tartas? Expresa el número 3 mediante una fracción que tenga 4 por denominador. Haz lo mismo pero con un cinco por denominador.

b) ¿Cuáles de estas fracciones equivalen a un número entero? 2/3, 6/3, 7/14, 5/4, 20/4, 12/6

P— Transformación de una fracción mayor que uno en la suma de un entero y una fracción menor que uno (y viceversa).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántas medias naranjas hay en tres naranjas y media? Calcula 3 + 1/2.

b) ¿Cuántas unidades completas hay en 10/3?

Descomponer 10/3 en la suma de un entero y una fracción.

C— Necesidad de reducir a común denominador para comparar, sumar o restar dos fracciones.

P— Reducción de dos (o más) fracciones a común denominador por métodos ingenuos y, por tanto, especialmente sencillos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula mentalmente:

Francisco se ha comido media tarta y María un cuarto de tarta. ¿Qué parte se han comido entre los dos? ¿Qué parte queda?

Expresa matemáticamente, por escrito, las operaciones que has hecho mentalmente.

b) Compara las fracciones 5/6 y 2/3.

¿Cuál es mayor?

(Guiar por el camino: fraccionar los tercios en sextos; así 2/3 se convierten en 4/6...)

c) Sumar 5/6 + 2/3   3 + 5/6 + 2/3

C— El denominador común a varias fracciones es un múltiplo de todos los denominadores originales.

P— Elección, por métodos intuitivos, del denominador común a varias fracciones. Desarrollo de estrategias personales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) • ¿Puedes elegir 12 como denominador común de estas fracciones?

2/60 3/4

• ¿Puedes elegir 15 como denominador común?

Razona tus respuestas.

b) Busca dos posibles denominadores comunes para estos valores: 1/2, 1/4, 1/6.

c) A la hora de transformar varias fracciones en otras de igual valor, y con el mismo denominador, ¿qué condición ha de cumplir el número que eliges como denominador común?

NOTA: Es en este momento cuando, al aparecer la divisibilidad, conviene repasar, recordar y completar los conocimientos necesarios para la operativa con fracciones.

C— Múltiplos y divisores.

P— Identificación y obtención de algunos múltiplos y divisores de un número.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Es 48 múltiplo de 8? ¿Por qué?

b) Si el número *a* es múltiplo del número *b*, ¿qué puedes afirmar de esos números?

c) Escribe los números del uno al cien y señala los múltiplos de 7.

¿Coinciden con alguna tabla de multiplicar?

¿Cómo harías para calcular varios múltiplos de un número *a*?

C— Criterios de divisibilidad (por dos, tres, cinco y diez, o cualquier número).

P— Identificación de los divisores de un número empleando los criterios de divisibilidad.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cómo averiguas si un número es múltiplo de tres?

b) ¿Cuáles de estos números son divisibles por 5?

23, 1.490, 345, 867, 1.000

P— Descomposición de un número en factores.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Descompón en factores primos los números:

24, 52, 41, 72, 2.310

b) Al descomponer en factores un número se ha obtenido: 2, 2, 5, 7.

¿Cuál era el número?

C— Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

P— Obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números por métodos artesanales.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Escribe los divisores de 30 y de 36. Selecciona los que sean comunes a ambos. ¿Cuál es el menor de ellos?

P— Automatización del cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos números. (Uso de las reglas.)

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Calcula el mínimo común múltiplo de 120 y 36.

P— Interpretación de la simplificación de fracciones como la división simultánea de sus dos términos por un divisor común, del proceso completo como división por el m. c. d. y de los términos de una fracción simplificada como "primos entre sí".

P— Aplicación del automatismo para el cálculo del m.c.m. a la reducción de fracciones a común denominador (suma, resta y comparación de fracciones).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Reduce a mínimo común denominador las fracciones:

5/12, 17/20, 7/15

b) Ordena de mayor a menor:

5/12, 17/20, 7/15

c) Calcula:

5/12 + 17/20 – 7/15

C— Producto de fracciones.

P— Identificación de una suma repetida de fracciones iguales con el producto de una fracción por un número.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4

Expresa esa operación como un producto.

b) Transforma en suma de sumandos iguales la expresión: 5 x 2/3

P— Automatización del producto de un entero por una fracción.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cómo se multiplica un entero por una fracción?

b) Calcula:

3 x 2/5 2 x 3/2 3/4 x 5 2 x 4/5 x 3

P— Identificación de situaciones de producto de fracciones con otras similares de producto de naturales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) • En una jarra llena hay 2 litros de agua.
¿Cuánta agua hay en 3 jarras?

• En una jarra llena hay 3/4 de litro de agua.
¿Cuánta agua hay en 2/5 de jarra?

P— Automatización del cálculo del producto de fracciones.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

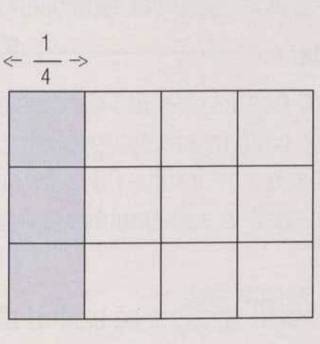
a) ¿Cómo se multiplican dos fracciones?

b) Calcula:

1/2 x 3/5 3/4 x 8/9 1/2 x 1/2 x 1/2

P— Cálculo (y automatización) del valor de una fracción de fracción.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:



a) Observa esta figura.

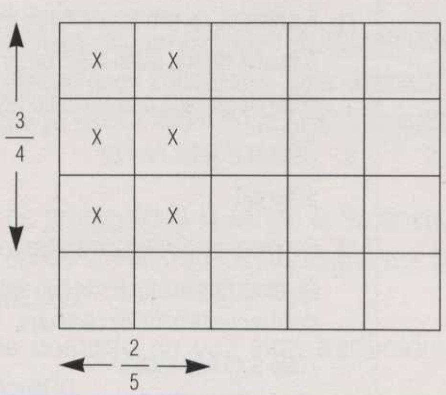
¿Qué fracción se ha representado en la zona sombreada?

Raya las dos terceras partes de la zona sombreada.

¿Qué fracción del total se ha rayado?

b) En este gráfico se han representado los 3/4 de 2/5, y, como ves, se ha obtenido de resultado 6/20.

¿Qué operaciones debes hacer con los términos de 3/4 y de 2/5 para obtener 6/20?



P— Identificación del concepto de "Fracción de una fracción" con el producto de dos fracciones.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Calcula el producto 3/4 x 5/6.

Calcula 3/4 de 5/6.

¿Qué observas?

C— Inverso de un número.

P— Identificación de los conceptos "dividir entre a" y "multiplicar por el inverso de a".

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula:

$$\left.\begin{array}{ll} 8:2 & 8 \times 1/2 \\ 12:3 & 12 \times 1/3 \\ 20:4 & 20 \times 1/4 \end{array}\right\}$$ ¿Qué observas?

b) ¿Qué obtienes al multiplicar un número por su inverso?

C— Cociente de fracciones.

P— Automatización del cálculo del cociente de dos fracciones.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cómo se dividen dos fracciones?

b) Calcula:

3/7 : 2/3 5 : 3/4 5/3 : 2 1/2 / 3/4

P— Resolución de problemas de aplicación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) En una clase hay 24 alumnos/as.
Los tres quintos de la clase son chicas.
Dos tercios de las chicas juegan a baloncesto.
¿Cuántas chicas juegan a baloncesto?

b) A primeros de año los pantanos estaban a 5/8 de su capacidad.
A finales de año están a 3/7 de su capacidad.
¿Han aumentado o disminuido las reservas de agua?

c) Calcula el valor de x en:
5/4 = x/1

d) En un examen de 10 preguntas has contestado cuatro completamente bien y una completamente mal.
De otras dos preguntas te han valorado la mitad, y de las tres restantes sólo te han valorado una cuarta parte de cada una.
¿Qué nota has sacado?

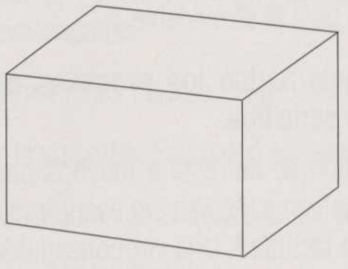
Actividades complementarias

- Cuántas fracciones de diferente valor se pueden formar con los números 1, 2, 3, 6?
- Se han presentado 40 chicas a las pruebas de selección para formar parte del equipo infantil de un club de voleibol.

  En la primera prueba se ha eliminado al 25% de las candidatas.

  ¿Qué fracción de candidatas ha quedado eliminada?

  ¿Cuántas chicas quedan después de la primera prueba?
- ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenar un cuarto de este depósito?



- Una pelota alcanza en su primer bote una altura de 80 centímetros.

  En el siguiente bote alcanza 60 centímetros.

  En el siguiente, 45 centímetros.

  ¿Qué altura crees que alcanzará, aproximadamente, en el siguiente?

Unidad 9: Resolución de problemas aritméticos

Tiempo: Tres semanas.

Resolver problemas aritméticos (es decir, comprender el enunciado y elaborar estrategias para relacionar los datos con la incógnita) es tarea que requiere mucho tiempo (años) de práctica.

Las relaciones aritméticas son mucho más fáciles de concebir de forma intuitiva que revestidas de lenguaje matemático. (Cualquier pequeño entiende espontáneamente que un coche que va a 60 kilómetros por hora durante tres horas recorre 180 km, pero le es mucho menos evidente que el espacio recorrido se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo.)

En esta Unidad se pretende llevar a cabo un entrenamiento en el campo de la resolución de problemas, empleando como herramientas las operaciones aritméticas, para favorecer el desarrollo de ciertos procedimientos y actitudes que ya deben haber empezado a arraigar a estas edades.

Analizando el proceso teórico de resolución de problemas a la luz de la experiencia directa en el aula, se descubren algunas barreras donde suelen tropezar los alumnos y que marcan los objetivos a largo plazo de la Unidad, que son:

- **Interiorizar el problema. Ser capaz de contarlo en voz alta, traducido al propio lenguaje, antes de intentar resolverlo.**

Estamos acostumbrados a oír: "No sé hacerlo"; y cuando pedimos: "Cuéntame el problema", nos damos cuenta de que en realidad aún no se ha asimilado el enunciado.

- Poner en funcionamiento los propios recursos mentales (estrategias, procedimientos...) ante una situación problemática.

  Es necesario que el alumno aprenda a iniciar sus procesos de búsqueda, rompiendo la inercia que le lleva a decir: "No sé hacerlo".

  Aquí es fundamental la labor del profesor: si la mente no se pone en marcha sola (ha de estar entrenada), habrá que darle al principio pequeños empujones, entendiendo que cuanto más leve sea el empujón, más rico será el camino recorrido. El profesor dosificará, pues, con sumo cuidado, sus sugerencias y preguntas, resistiendo la tentación de adelantar lo que para él es evidente.

- Traducir a lenguaje matemático los procesos mentales empleados para resolver los problemas sencillos.

  Es necesario que el alumno se enfrente a muchos problemas con los datos muy sencillos, que puedan resolverse incluso sin escribir nada, en los que lo importante es que "la idea" surja con facilidad. Una vez conseguida esta idea, en cada caso se le pedirá que escriba las fases de su proceso mental, traduciéndolas a lenguaje aritmético.

Con el fin de tener referencias a la hora de seleccionar el material adecuado para este entrenamiento, hemos elegido unos cuantos tipos de problemas que garantizan, durante su resolución, la riqueza de procesos y relaciones:

(*móviles, *repartos proporcionales, *mezclas y aleaciones, *interés bancario, aumentos y disminuciones porcentuales, *abastos, producción y consumo, *geometría: perímetros, áreas..., *otros)

Entendiendo que no se pretenden enseñar las rutinas específicas que conducen a la solución de cada uno de los tipos, "ha de ser el alumno el que descubra el método, aunque una vez conseguido lo olvide", sino sembrar y desarrollar una serie de procedimientos, hábitos y actitudes que mejoren la capacidad de enfrentamiento a los problemas aritméticos.

En todo caso, hemos de tener en cuenta que el hecho de que un alumno resuelva un problema con datos sencillos no quiere decir que haya asimilado definitivamente todos sus procesos y relaciones; más bien será necesario afirmar ese logro con más problemas sencillos antes de dar paso a los problemas con datos complicados.

De todo lo anterior se deduce que los contenidos de la Unidad serán fundamentalmente procedimentales y actitudinales y que estarán incluidos todos ellos en la enseñanza "a largo plazo".

Conocimientos previos

— Operaciones con números.

- Significado.
- Cálculo exacto.
- Cálculo mental y aproximado.

Contenidos

P— Traducción del enunciado del problema al lenguaje propio.

P— Traducción a lenguaje aritmético de los procesos mentales por los cuales se resuelven los problemas sencillos.

P— Proposición de nuevos problemas similares a algún problema conocido:

a) Para profundizar en la familiarización con este tipo de enunciados.

b) Como estrategia de resolución de un problema más complicado.

A— Hábito de no comenzar la resolución de un problema hasta no haber reelaborado el enunciado en el propio lenguaje.

A— Tendencia a hacer estimaciones iniciales, *a grosso modo*, de la solución esperada.

A— Hábito de comprobar la solución. Estimar si es razonable.

A— Hábito de presentar la solución en el contexto del enunciado.

A— Tenacidad y constancia ante la dificultad.

A— Valoración de los procesos e intentos como métodos de aprendizaje, independientemente de que se consiga o no la solución.

Problemas de muestra

MÓVILES:

1. Un peatón camina a una velocidad de 5 km por hora.
   ¿Cuánto tarda aproximadamente en recorrer 21 km?
   ¿Cuánto tarda exactamente?
2. Un peatón camina a una velocidad de 4 km/h.
   Otro peatón camina a la velocidad de 6 km/h.
   Si salen a la vez y caminan en la misma dirección, ¿cuánto tardarán en distanciarse 8 kilómetros?
3. Un ciclista A, que avanza a 20 km/h, lleva una ventaja de 15 km a otro ciclista B. ¿Qué velocidad debe llevar B para alcanzar a A en hora y media?
4. Un camión sale de Sevilla, hacia Barcelona, con una velocidad de 60 km/h.
   Dos horas después sale en su persecución un coche a una velocidad de 100 km/h.
   ¿Cuánto tarda en alcanzarle?
5. Un coche sale, de A hacia B, a las 8 de la mañana, con una velocidad de 100 km/h.
   A esa misma hora, sale una motocicleta, de B hacia A, con una velocidad de 50 km/h.

   300 km

   A ———————————————— B

   100 km/h ⟶ ⟵ 50 km/h

   ¿Cuánto tardan en encontrarse?

REPARTOS:

1. Lucía y Antonio montaron el año pasado un negocio.

   Lucía aportó dos millones de pesetas y Antonio tres millones.

   Este mes reparten 500.000 pts de beneficios.

   ¿Cuánto corresponde a cada uno?

2. Los jugadores de un equipo de baloncesto deben repartirse una prima de 100.000 pts por haber ganado un partido.

   Previamente habían acordado repartir el dinero en relación a los puntos conseguidos, es decir, a más puntos, más dinero. Las puntuaciones obtenidas por cada jugador han sido:

   A = 40 B = 20 C = 20 D = 0 E = 0

   Calcula mentalmente cuánto corresponde a cada uno.

   Explica el proceso y las operaciones por escrito.

3. En un negocio, el socio A posee los dos tercios de las acciones y el socio B el resto.

   Al repartir los beneficios de un día, a B le han correspondido 10.000 pts. ¿Cuáles han sido los beneficios del día?

4. Un padre ha repartido 5.000 pts entre sus hijos de forma que cuanto más edad tienen, más dinero reciben.

   El mayor ha recibido 3.000 pesetas, el mediano 2.000 y el pequeño 1.000.

   El pequeño tiene cinco años. ¿Cuál es la edad de los otros dos?

5. Tres socios compran, por 10 millones, un lote de parcelas en una urbanización.

   El primero se queda con 5 parcelas, el segundo con 3 y el tercero con 2.

   ¿Cuánto debe pagar cada uno?

MEZCLAS Y ALEACIONES:

1. Dos buenos hermanos deciden repartir, a partes iguales, sus capitales. Uno tiene 1.000 pesetas y el otro 3.000 ptas.

   ¿Con cuánto queda cada uno al final?

2. Se mezclan 50 kg de café de 500 pts/kg con 50 kg de café de 1.000 pts/kg.

   ¿A qué precio sale la mezcla?

3. Un comerciante mezcla 4 kg de café de baja calidad (500 pts/kg) con 1 kg de un café superior (1.000 pts/kg).

   ¿A qué precio debe poner el kilo de la mezcla?

4. Se mezclan 3 kg de alubias de 100 pts/kg con 1 kg de alubias de 200 pts/kg. ¿A cuánto sale la mezcla?

5. Se ha mezclado cierta cantidad de alubias de 100 pts/kg con 10 kg de alubias de 400 pts/kg, resultando una mezcla de 200 pts/kg.

   ¿Qué cantidad de alubias de la primera clase entró en la mezcla?

6. Un ganadero poco escrupuloso, al ver bajar sus ventas, decide rebajar el precio de la leche sin perder dinero.

   Para ello, por cada nueve litros de leche añade un litro de agua.

   Si el precio original de la leche era de 100 pesetas el litro, ¿ a cuánto venderá ahora la mezcla?

7. La ley de una aleación de oro y cobre es 0,25.

   ¿Cuánto oro hay en un lingote de aleación de 4 kg?

   (Nota: Se llama ley de una aleación al cociente de dividir el peso de metal precioso entre el peso total.)

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES. INTERÉS BANCARIO:

1. En una población el 40% de los ciudadanos tienen menos de 25 años.

   Hay 4.000 ciudadanos menores de 25 años.

   ¿Cuántos habitantes tiene la ciudad?

2. Juan se ha comprado un abrigo que costaba 10.000 pts, pero le han hecho una rebaja del 20%. ¿Cuánto ha pagado por el abrigo?

3. En una tienda de deportes las camisetas, rebajadas un 20%, salen por 800 pts. ¿Cuál era el precio original sin rebajar?

4. Leticia coloca su dinero en el banco al 8% anual.

   Si ha colocado 100.000 pesetas, ¿cuánto dinero tendrá dentro de un año? ¿Y dentro de seis meses?

5. ¿Qué interés producen 100.000 pts, al 8% , en dos años?

6. ¿Qué capital, colocado al 5%, produce 5.000 pts en un año?

7. ¿Cuánto produce un millón, al 10%, en tres años?

8. ¿Durante cuánto tiempo hay que colocar 100.000 pts al 5% para que se produzcan 20.000 pts de interés?

9. Calcula el 25% de 400.

10. El 25% de un número es 50. ¿Cuál es el número?

11. He comprado por 300 pts una camiseta rebajada el 25%. ¿Cuánto costaba la camiseta?

12. Antes, la entrada del cine costaba 200 pts, pero ha subido un 10%. ¿Cuánto cuesta ahora?

ABASTECIMIENTO Y CONSUMO:

1. Una máquina, trabajando 8 horas diarias, tarda 4 días en hacer un trabajo.

   ¿Cuánto tardarían en hacerlo dos máquinas trabajando 16 horas diarias?

2. Un automóvil gasta 5 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos litros gastará en 400 km?

3. Un grifo llena un depósito de 20 litros en 4 horas.

   ¿Qué parte del depósito habrá llenado en una hora?

   ¿Cuántos litros hay en esa parte?

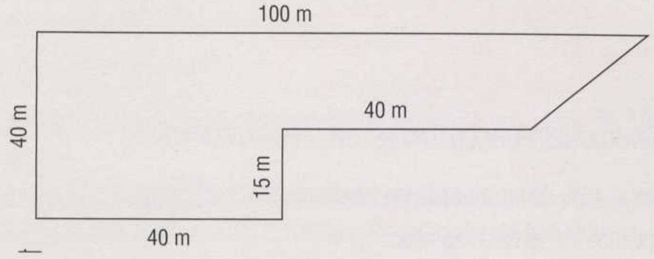
4. Tres grifos iguales, abiertos a la vez, llenan un depósito en 6 horas.

   ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito si se abre sólo uno de los grifos?

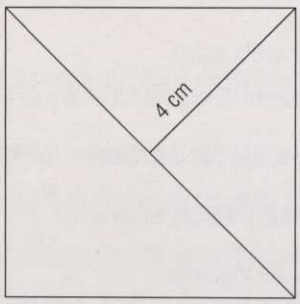
5. Dos obreros tardan 6 días en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacer el trabajo cuatro obreros?

GEOMETRÍA: PERÍMETROS Y ÁREAS:

1. Calcula el perímetro y el área de esta figura:



2. El perímetro de un rectángulo es 10 metros y su altura mide 2 m. ¿Cuál es la longitud de la base?
3. La base de un triángulo mide 2 m y su área 3 m^2. ¿Cuál es la altura?
4. Calcula el área de este cuadrado:



5. En el plano de una casa construida a escala 1/100, la fachada mide 8 cm.

   ¿Cuánto mide la fachada en la realidad?

OTROS:

1. Con 23.000 pts se han comprado 5 balones de cuero y 3 de goma. Cada balón de cuero es cuatro veces más caro que uno de goma.

   ¿Cuánto cuesta un balón de goma?

2. En un supermercado apilan los botes en forma de pirámide de base cuadrada y de manera que cada bote se apoya en otros cuatro del piso inferior.

   Cada lado de la base tiene seis botes.

   ¿Cuántas unidades forman la pirámide?

3. En un restaurante ofrecen, en el menú del día, 3 variedades de primer plato, 4 de segundo y 2 de postre.

   Entendiendo que una comida consta de un primero, un segundo y un postre, ¿cuántas elecciones diferentes se pueden hacer dentro del menú del día?

Actividades que se sugieren para el tratamiento de los problemas

- **Sin el auxilio del texto original, una vez leído, reenunciar el problema en el propio lenguaje.**

  "Guarda el libro y cuéntale el problema a tu compañero, con tus propias palabras.

  Si no eres capaz, vuelve a leerlo, guarda el libro y empieza otra vez..."

- **Antes de resolver el problema, aventurar una aproximación a la solución, estimar los límites de valores entre los que puede estar comprendida..., etc.**

  Ej.: En el problema n.° 3 de móviles:

  ¿Puede ser 20 h la solución?

  Aventura, a ojo, una posible solución.

- **Calcular mentalmente la solución.**

  Este punto es fundamental. No se trata de que los alumnos identifiquen las operaciones que llevan de los datos a la solución, sino de que, mentalmente, por aproximaciones sucesivas, lleguen con convicción al resultado.

  Ej.: Resolver mentalmente el problema n.° 4 de "interés bancario".

- **Hacer un gráfico para ordenar y facilitar la comprensión de los datos.**

  Ej.: El problema n.° 4 de móviles.

- **Escribir las operaciones que se han realizado mentalmente, en el orden que se han realizado.**

- **Inventar problemas:**

  a) Similares a uno conocido:

  Ej.: Escribe el enunciado de un problema de reparto de beneficios en el que tres socios participen con 1, 4 y 5 partes, respectivamente, en las 10 partes de un negocio.

  b) Más fácil que uno dado, para facilitar su resolución.

  c) Que se resuelvan con una secuencia de operaciones dada.

  Ej.: Escribe el enunciado de un problema que se resuelva con estas operaciones:

  $1 + 4 + 5 = 10$
  $250.000 : 10 = 25.000$
  $25.000 \times 1 = 25.000$
  $25.000 \times 4 = 100.000$
  $25.000 \times 5 = 125.000$

  d) Que surjan de una situación del entorno.

  e) Que se ajusten a unos datos o a una solución prefijados, etc.

  f) ....

- **Comprobar y discutir las soluciones de los problemas.**

  Ej.: En el problema n.° 4 de "interés bancario", un alumno ha dado la solución 500.000 pts. ¿Te parece razonable?

- **Plantear nuevas preguntas.**

  Ej.: En el problema n.° 2 de "aumentos y disminuciones porcentuales":

  ¿Cuánto costaría el abrigo si en vez de disminuir su precio hubiera aumentado?

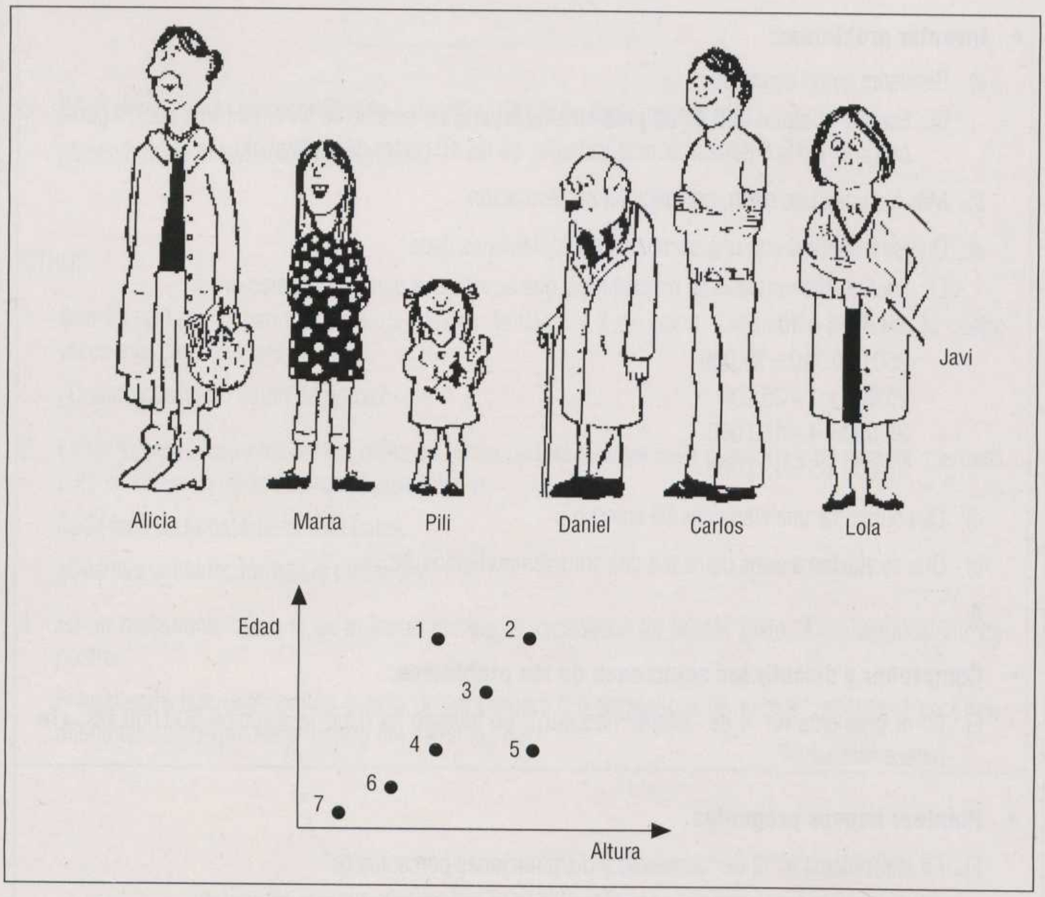
Unidad 10: Interpretación de gráficas

Tiempo: Tres semanas.

Las gráficas, tanto de funciones como de estadísticas, tienen una enorme fuerza expresiva. Una buena elección de ejemplares de uno y otro tipo y un adecuado tratamiento metodológico propician un aprendizaje satisfactorio del lenguaje de las gráficas. Para ello, en este primer curso procederemos a un análisis solamente cualitativo de las fluctuaciones de las gráficas, dejando para el segundo curso el estudio cuantitativo.

El enfoque que aquí se da es notablemente distinto del que normalmente se sigue en el estudio de las funciones. Por ello, para facilitar su interpretación por parte de los profesores que no estén acostumbrados a esta forma de proceder, antes de hacer la descripción de sus objetivos, contenidos y metodología, expondremos varias "actividades tipo" que sirvan de referencia para entrar en el tema.

Actividad 1. Interpretación de puntos



(Tomada del libro *El lenguaje de las funciones y las gráficas* del Shell Centre for Mathematical Education. Traducido y adaptado por Félix Alayo y publicado en coedición por el Centro de Publicaciones del M. E. C. y el Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.)

Se pretende con ello que el alumno se familiarice con los ejes cartesianos, cómo se recorren en sentido creciente, cómo se interpretan los puntos.

Actividad 2. Interpretación y comparación de gráficas

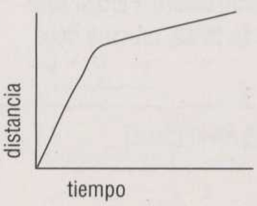
Muchos niños de Losser van al colegio en Enschede.

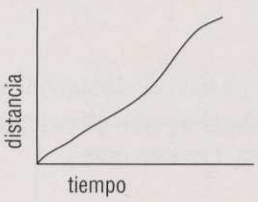
Suelen ir en bicicleta.

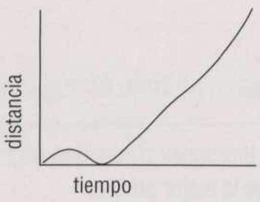
La primera clase empieza a las ocho y cuarto, lo cual significa que la mayor parte de los alumnos ya salen de casa a las siete y media. Porque llegar tarde...

La distancia de Losser al colegio es de (casi) 10km.

Las cuatro gráficas que vienen a continuación muestran cómo las cosas son distintas para Fernando, Herminia, Maruja y Yolanda cuando van al colegio.







YOLANDA

Yo siempre salgo con calma.

Porque, yo me digo, a esas horas de la mañana no te puedes precipitar... Ya en el camino empiezo a pedalear más de presa, porque no me gusta llegar tarde.

FERNANDO

Esta mañana con la motocicleta al cole «guay del Paraguay».

Bien rápido. Pero por el camino: Ploff, ploff. ¡Sin gasolina! Yo, ¡hasta la coronilla! Motocicleta de la mano y andando el resto. Llegué por los pelos...

HRMINIA

Acababa de salir de casa, cuando me di cuenta que hoy tenemos gimnasia.

Y me había olvidado el chandal y las zapatillas. Qué tonta ¿verdad? Otra vez a casa para buscarlos. Después tuve que pedalear muy deprisa para llegar a tiempo.

MARUJA

1. *¿A quién corresponde cada gráfica?*
2. *Imagínate lo que puede haber dicho Maruja?*

(Tomada del libro *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*, de OW y OC (antiguo IOWO), traducido y adaptado por el grupo GAUSS, publicado por el IUCE de la Universidad de Salamanca.)

La comparación de unas gráficas con otras ayuda a la interpretación de las peculiaridades de cada una.

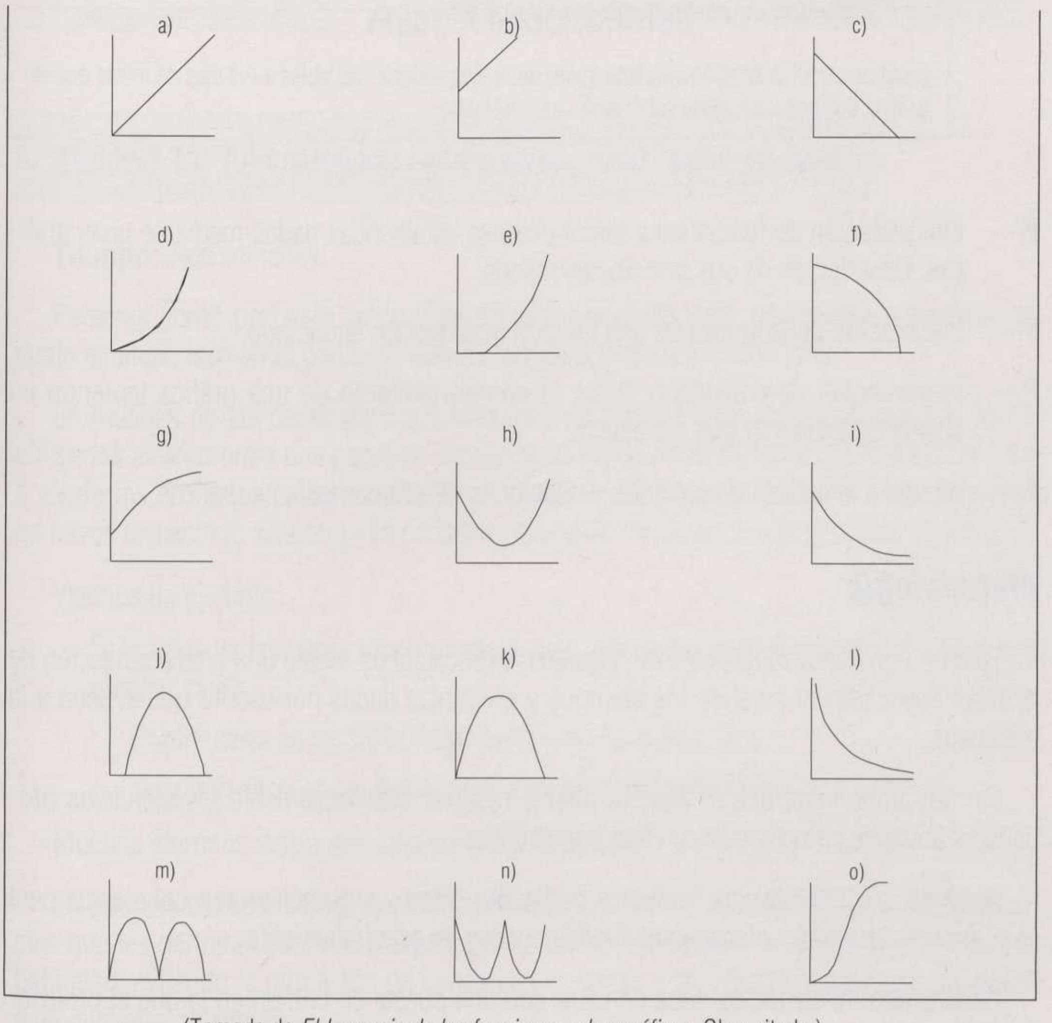
Actividad 3. Asociación enunciado-gráfica

Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las diez situaciones descritas abajo. (Algunas gráficas pueden ajustarse a más de una situación.) Copia la gráfica, pon nombres a los ejes y explica tu elección, indicando todas las suposiciones que hagas. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión.

1. «Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.»
2. «Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero detesto la leche templada!.»
3. «Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.»
4. «Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron, y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.»
5. «Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.»

En las siguientes situaciones tienes que decidir tú lo que pasa. Explícalo claramente por escrito y elige la mejor gráfica.

6. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de patatas de su peso?
7. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?
8. ¿Cómo depende la duración de una carrera de su longitud?
9. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?
10. ¿Cómo varía la velocidad de una pelota cuando bota?



(Tomada de *El lenguaje de las funciones y las gráficas.* Obra citada.)

La búsqueda de cuál es la gráfica que mejor se amolda a cada enunciado es un magnífico ejercicio de interpretación de funciones.

Objetivos

— Interpretar gráficas relativas a diversas funciones, sabiendo extraer información cualitativa sobre sus fluctuaciones.

— Representar funciones que respondan a fenómenos descritos por enunciados.

— Iniciarse en la terminología básica de las funciones. Interesarse por las gráficas que aparecen fuera de clase (periódicos, televisión, libros de otras asignaturas, etc.).

Contenidos

C— Las gráficas de las funciones como representación de un fenómeno. Relación gráfica-enunciado.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Dada una gráfica sencilla dibujada sobre unos ejes, asignar variables a los ejes de modo que la gráfica designe, con cierta coherencia, un fenómeno.

P— Interpretación de funciones y distribuciones estadísticas dadas mediante unas gráficas. Descripción de sus principales rasgos.

P— Elaboración de la gráfica de una función dada por un enunciado.

P— Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.

A— Afición a interpretar fenómenos y relaciones descritas mediante gráficas.

Metodología

Este tipo de aprendizajes casi no requieren explicaciones. Basta una buena colección de gráficas adecuadas al nivel de los alumnos y preguntas dadas por escrito que ayuden a la búsqueda.

Es muy importante que el alumno intente resolver individualmente los ejercicios propuestos antes de comentarlos con sus compañeros.

Aprender a interpretar las versiones dadas por otros y argumentar con coherencia para comunicar las propias son aspectos fundamentales de este tratamiento.

Cada grupo de ejercicios debe concluir con una puesta en común en la que el profesor ayuda a ver lo positivo de las diversas interpretaciones, y con la repetición, ahora individualmente, de los ejercicios ya realizados.

En todo este tratamiento se pone el énfasis en los aprendizajes procedimentales. El único contenido conceptual digno de señalarse es la adquisición de la idea de que las gráficas describen fenómenos y que éstos pueden ser descritos mediante gráficas.

Material didáctico

No se requiere ningún material didáctico especial salvo, acaso, papel cuadriculado y bolígrafos de distintos colores.

No obstante, para algunos tratamientos colectivos puede ser útil representar gráficas sobre paneles de corcho o geoplanos, valiéndose de cintas de colores. O la utilización de transparencias en las que diversos alumnos representan su versión de un mismo fenómeno, procediendo después a su comparación, con retroproyector, superponiéndolas. Para ello es necesario que cada uno utilice un rotulador de un color diferente y que, previamente, se hayan señalado ejes iguales con las mismas unidades.

Unidad 11: Aproximación experimental a las leyes del azar

Tiempo: Tres semanas.

Palabras como probable, imposible, seguro, frecuente, etc., pertenecen a nuestro lenguaje habitual, formando parte de nuestro bagaje de conceptos intuitivos.

En muchas de las decisiones que tomamos en nuestro quehacer cotidiano nos vemos obligados a elegir entre una gama de opciones en las que intervienen componentes inciertos o aleatorios. En estos casos intentamos la mejor opción apoyándonos en esos conceptos intuitivos respecto lo aleatorio y lo probable, formados en base a nuestra experiencia pasada.

Veamos un ejemplo:

> Si tiramos varias veces una moneda al aire, ¿en qué caso hay mayor probabilidad de obtener cara?
>
> *Primer caso:* en las dos tiradas anteriores ha salido cara.
>
> *Segundo caso:* en las dos tiradas anteriores ha salido cruz.

Muchos alumnos responden que en el segundo caso.

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas vivencien una serie de experiencias que les permitan empezar a organizar los conceptos básicos relativos al azar y la probabilidad, evitando la formación de conceptos erróneos y facilitando la toma de decisiones ante opciones aleatorias.

Conocimientos previos

— Son tan elementales, que los damos por supuestos en todos los alumnos.

Objetivos

— Conocer algunos conceptos básicos relativos al azar y la probabilidad: suceso, tipos de sucesos (imposible, seguro, probable), frecuencia absoluta, frecuencia relativa, probabilidad teórica.

— Identificar los sucesos elementales de una experiencia aleatoria y distinguir si son de igual o diferente probabilidad.

— Realizar experiencias de tipo aleatorio.

— Adquirir experimentalmente la idea de la ley de los grandes números o de la estabilidad de la frecuencia relativa.

— Calcular la probabilidad teórica de un suceso aleatorio en casos muy sencillos, aplicando la ley de Laplace.

— Poseer algunos recursos y procedimientos para simulación fiable de situaciones aleatorias.

Materiales

— Dados de 4, 6, 8, 12, 20 caras numeradas.

— Dados de caras coloreadas (2, 3, 4 o más colores).

— Barajas.

— Pirindolas.

— Ruletas.

— Colecciones de bolas de distintos colores y recipientes para extracciones.

— Tablas de números aleatorios.

— Bombo de lotería y distintas colecciones de bolas (numeradas, de colores, otras).

Contenidos

La mayor parte de los contenidos de esta Unidad están ligados a un proceso secuenciado que se recorrerá completo en la mayoría de las actividades.

Por eso se han elegido dos experiencias que darán la base a las ejemplificaciones.

Al final se ofrece una colección de actividades diferentes sobre las que experimentar el proceso.

EXPERIENCIA N.° 1

- Se presenta a los alumnos una caja en la que hay bolas blancas, negras y rojas. (El profesor ha elegido cuidadosamente el número de bolas de cada color, pero los alumnos no lo conocen.)
- La clase se dividirá en cinco grupos.
- El experimento consiste en extraer una bola de la caja con los ojos tapados, observar el color y volver a meterla en la caja.
- Cada grupo realiza 20 extracciones y anota, en una tabla, los resultados.

EXPERIENCIA N.° 2

- Tirar dos dados y sumar los puntos obtenidos.

C— El acontecimiento aleatorio. Suceso. Tipos de sucesos:

- Suceso seguro, suceso probable y suceso imposible.
- Sucesos elementales de igual o diferente probabilidad.

P— Identificación de los sucesos pertenecientes a un experimento o acontecimiento de tipo aleatorio.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuáles de estos sucesos se pueden dar en la EXPERIENCIA N.° 1?:

- Salir una bola blanca.
- Salir una bola que no sea roja.
- Salir dos bolas negras.
- Salir una bola blanca o negra.

b) Escribe todos los sucesos elementales posibles de la EXPERIENCIA N.° 2.

P— Diferenciación de sucesos.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

EXPERIENCIA N.° 2

De entre estos sucesos, di cuáles son seguros, cuáles probables y cuáles son imposibles:

- Sacar un número par de puntos.
- Sacar más de 12.
- Sacar menos de 13.
- Sacar menos de 7.
- Sacar 10.

C— Frecuencia absoluta y relativa.

P— Realización de experiencias de tipo aleatorio:

- Toma de datos. Construcción de tablas.
- Recuento de datos. Obtención de la frecuencia absoluta.
- Cálculo de la frecuencia relativa.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) EXPERIENCIA N.° 1

Cada grupo realiza 20 extracciones y completa la tabla:

SUCESO	Para ir anotando	F. absol (n)	F. relat. (n/20)
Sale blanca			
Sale negra			
Sale roja			

TOTAL

- Calcula las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos:
  - — Salir blanca o negra.
  - — No salir ni blanca ni negra.

b) EXPERIENCIA N.° 2

Tira 30 veces los dados y anota los resultados.

- ¿Cuál ha sido la frecuencia absoluta del suceso: "salir 8? Calcula también su frecuencia relativa.
- ¿Cuáles son las frecuencias absoluta y relativa del suceso imposible y del suceso seguro?

P— Formulación y comprobación de conjeturas sobre experimentos aleatorios sencillos.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

EXPERIENCIA N.° 1

A la vista de la tabla anterior, qué porcentaje de bolas de cada color te parece que hay?

(Ahora pueden intercambiarse las tablas los distintos grupos, discutir sus estimaciones sobre el número de bolas, modificar sus conclusiones, etc.)

C— Ley de los grandes números o de la estabilidad de la frecuencia relativa (adquirida por la vía experimental).

P— Estimación de la probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa extraída de un número suficiente de experiencias.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

EXPERIENCIA N.° 1

a) A la vista de los resultados de tu tabla, ¿cuál crees que es la probabilidad de que salga una bola blanca?

b) Actividad de gran grupo: se ponen en común los resultados de todos los grupos, sumando las frecuencias absolutas de cada suceso elemental y volviendo a calcular las frecuencias relativas (ahora sobre las 100 experiencias realizadas en total por los cinco grupos).

Hacer nuevas estimaciones sobre la probabilidad de distintos sucesos.

EXPERIENCIA N.° 2

c) Realizar otras 20 veces por grupo la experiencia y repetir el proceso para observar la evolución de las frecuencias relativas (ahora sobre 200 experimentos).

C— Ley de Laplace o de la probabilidad teórica.

P— Obtención del número de casos posibles ante un experimento y del número de casos favorables a un suceso.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

EXPERIENCIA N.° 2

¿Cuál es el número de casos posibles?

¿De cuántas formas diferentes se puede obtener 8?

P— Cálculo de la probabilidad teórica en casos sencillos. Comparación con las estimaciones surgidas del campo experimental.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) EXPERIENCIA N.° 1

(Se cuentan las bolas que había en la caja. Supongamos que la experiencia se preparó con 10 blancas, 20 negras y 30 rojas.)

¿Cuál es la probabilidad teórica de cada uno de estos sucesos?:

- Sacar una bola blanca
- Sacar una bola blanca o negra.
- Sacar una bola roja.

¿Se acerca la probabilidad teórica a tus estimaciones a partir de la frecuencia relativa?

b) EXPERIENCIA N.° 2

Observando los resultados de 30 tiradas, ¿dirías que la probabilidad de obtener "12" es la misma que la de obtener 8?

Calcula la probabilidad teórica en cada caso y compárala con la frecuencia relativa.

P— Simulación de situaciones aleatorias mediante la realización de experiencias asequibles, con sucesos equiprobables a los que se pretende estudiar.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

EXPERIENCIA N.° 1

Para que cada grupo pueda aumentar el número de experimentos sin necesidad de utilizar la caja y el juego de bolas:

Simulación: tirar un dado.

Equivalencia de sucesos:

- Sale 6 = bola blanca.
- Sale 5 o 4 = bola negra.
- Sale 3 o 2 o 1 = bola roja.

(Comprobar que las probabilidades de los sucesos sustitutorios coinciden.)

Actividades complementarias

- Tirar un dado (con 4, 6, 8, 12, 20 caras).
- Tirar dos monedas. (Sucesos: sacar dos caras, sacar al menos una cara, sacar sólo una cara...)
- Tirar una chincheta y observar la posición en que queda. (Sucesos elementales: queda con el pincho hacia arriba, queda tumbada.)
- Tirar un palillo al suelo y que toque, o no, la unión de dos baldosas.
- Simular, con el lanzamiento de monedas (por ejemplo), las probabilidades sobre el sexo de los tres hijos que ha planificado tener un matrimonio.
- Juegos de ruleta, lotería...

Algunos problemas sobre probabilidad

a) Un matrimónio piensa tener dos hijos.

Les gustaría tener "la parejita".

¿Cuál es la posibilidad de que se vean cumplidos sus deseos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ganes a la ruleta si juegas:

A un solo número **Al rojo** **A los impares**

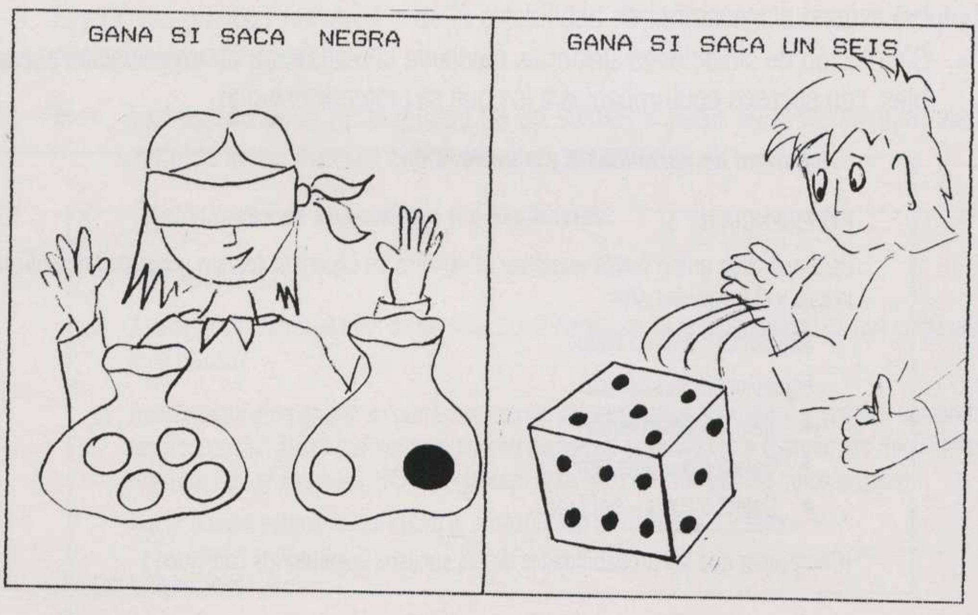
(Se presentará al alumno un cartón del juego de ruleta.)

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un rey al sacar una carta cualquiera de la baraja española? ¿Y de que salga una figura?

e) Seis invitados se sientan, al azar, alrededor de una mesa redonda.

¿Qué probabilidad tiene Macarena de que le toque al lado del pesado de Rodolfo?

f) Realiza un número suficiente de veces estas experiencias y, a la vista de los resultados, contesta: ¿Cuál de los dos tiene más posibilidades de ganar?



Segundo curso

Estadística

Unidad 1: Iniciación a los aspectos básicos del proceso estadístico

Tiempo: Tres semanas.

El alumno tiene, de cursos anteriores, ciertas referencias anecdóticas sobre tablas o gráficas estadísticas e, incluso, ha participado en algún proceso de recogida y organización de datos. En este curso puede tomar contacto con el tratamiento estadístico de forma sistemática, aunque sencilla, en dos sentidos:

— Mediante la recogida de datos relativos a su propio colectivo y su posterior tratamiento, agrupando, clasificando, contando, representando; comparando, incluso, con los resultados de otras clases. Se trata, así, de familiarizar al alumno con las distintas fases del proceso estadístico.

— Mediante el estudio de algunas tablas y gráficas estadísticas de las que, fundamentalmente, se atenderá a la interpretación de la información que contienen. Anecdóticamente se calculará la media o se identificará la moda de alguna de las variables que aparezcan.

Objetivos

— Conocer las distintas fases del proceso estadístico y ser consciente de las dificultades que conlleva cada uno de los pasos del proceso.

— Interpretar y extraer conclusiones del estudio de tablas y gráficas estadísticas.

Conocimientos previos

Manejo elemental de las proporciones y de los porcentajes.

Contenidos

C— Noción del proceso estadístico: diseño de la experiencia, toma de datos, clasificación, tabulación, representación gráfica...

P— Estudio e interpretación de sencillas tablas y gráficas de todo tipo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

En un centro escolar se practican los siguientes deportes: fútbol, baloncesto, balonmano, gimnasia, atletismo y ajedrez.

Se ha hecho una encuesta entre todos los alumnos de Bachillerato en la que se les pregunta: "¿Cuál de estos deportes practicas con más frecuencia?"

Los resultados se presentan en esta tabla:

	1.er curso		2.° curso		3.er curso	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
F	12	0	13	0	8	0
Bc	10	10	9	10	6	14
Bm	3	4	5	2	0	2
G	2	1	1	2	0	2
At	9	5	8	5	8	7
Aj	4	1	4	2	4	0
Ninguno	20	19	10	19	4	10

— ¿Qué significa el n.° 12 de la primera casilla?

— La suma de la primera columna es 12 + 10 + 3 + 2 + 9 + 4 + 20 = 60. ¿Qué significa?

— Efectúa la suma de la segunda columna. ¿Qué significa?

— ¿Sabrías decir cuántos alumnos, chicos y chicas, hay en primer curso?

— ¿Cuántos de ellos no practican ningún deporte? ¿Qué porcentaje son del total de alumnos de primero?

Para hacer algo parecido con los demás deportes y en los demás cursos conviene "abrir" la tabla para poder incluir sumas parciales tal como hacemos a continuación. Completa esta tabla.

	1.er curso			2.° curso			3.er curso			Totales		
	♂	♀	TOTAL	♂	♀	TOTAL	♂	♀	TOTAL	♂	♀	TOTAL
F	12	0	12	13	0		8	0				
Bc	10	10		9	10		6	14				
Bm	3	4	7	5	2		0	2				
G	2	1		1	2		0	2				
At	9	5		8	5		8	7				
Aj	4	1	5	4	2	6	4	0	4			
Ninguno	20	19	39	10	19	29	4	10	14	34	48	82
	60	40	100	50	40	90	30	35	65	140	1,15	255

— ¿Cuántos alumnos hay en total? Observa que puedes obtenerlo por dos caminos distintos.

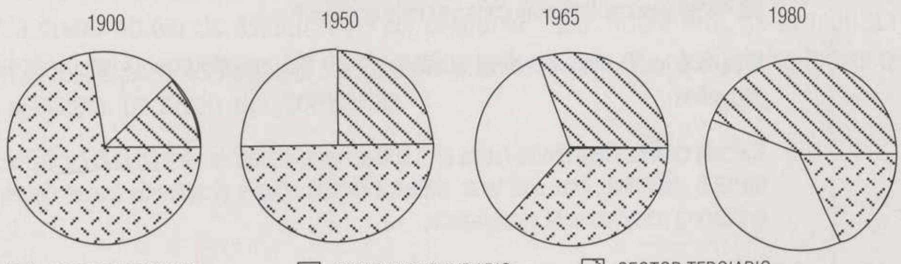
— ¿Qué proporción de chicos y chicas hay en cada curso?

— ¿Cuál es el porcentaje de ajedrecistas en cada curso?

— ¿Cómo evoluciona la abstención en el deporte al subir de curso?

* * *

EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN ACTIVA EN ESPAÑA



La población activa (población trabajadora) de un país se reparte en tres sectores: **primario** (agricultura, ganadería, pesca...), **secundario** (industria, construcción...) y **terciario** (funcionariado, enseñanza, comercio...). La proporción de trabajadores en cada sector varía con el desarrollo del país.

Según este gráfico, ¿cómo crees que ha evolucionado el mundo del trabajo en España en esos ochenta años?

* * *

REPARTO DE LA POBLACIÓN ESPAÑOLA

TABLA 1

MUNICIPIOS \ AÑOS	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Hasta 5.000 hab.	51%	48%	44%	40%	36%	34%	29%
De 5.001 a 20.000	28%	30%	30%	29%	28%	26%	25%
20.001 a 100.000	12%	12%	16%	16%	22%	16%	18%
Más de 100.000	9%	10%	10%	15%	14%	24%	28%

TABLA 2

N.° de habitantes (millones)	18,6	19,9	21,3	23,6	25,9	28,0	30,4

El 51% que aparece en la primera casilla de la tabla I significa que en 1900 el 51% de los españoles vivía en municipios de hasta 5.000 habitantes.

➡ *a*) La suma de los números de la primera columna es:

$$51 + 28 + 12 + 9 = 100.$$

¿Era de esperar este resultado? Suma las demás columnas y explica a qué se deben los resultados obtenidos.

b) ¿Podemos decir que en 1900 más de la mitad de los españoles vivía en municipios de menos de 5.001 habitantes?

c) Mira la tabla 2. ¿Qué significa el 18,6 de la primera casilla? ¿Es lógico que los números de las sucesivas casillas sean cada vez más grandes?

d) Mira la primera fila y di cómo ha evolucionado la proporción de españoles en municipios pequeños.

e) Calcula cuántos españoles había en 1900 en municipios de hasta 5.000 habitantes (el 51% de 18,6 millones). Haz otro tanto para los demás años y observarás que el número total se encuentra relativamente estabilizado.

f) Calcula el número de españoles que vivía en municipios de más de 100.000 habitantes en cada uno de estos años y observa el espectacular aumento que se ha ido produciendo.

C— Reconocimiento de la variable objeto de estudio y de la población sobre la que se realiza la estadística.

P— Cálculo de la media de una colección de medidas e interpretación de su significado.

P— Identificación de la moda en una distribución estadística.

A— Gusto y valoración del lenguaje estadístico como medio para representar e informar sobre acontecimientos de su entorno.

A— Valoración del trabajo en equipo como forma eficaz de realizar tareas de tipo estadístico.

Metodología

El contenido "noción del proceso estadístico..." figura como concepto, mas no como procedimiento. Esto significa que se considera suficiente que el alumnado adquiera una idea de cuáles son los pasos del proceso estadístico y cuál es su significado, pero no que adquiera destreza en realizarlo. Bastará, pues, que realice una experiencia completa: diseño, toma de datos, organización de los mismos, elaboración de tablas, representaciones gráficas y, acaso, cálculo de algunas medias y modas. Puede ser muy interesante realizar esta experiencia a comienzos de curso, tomando como población el conjunto de los propios alumnos de la clase y, como variables, características relevantes en su mundo escolar-familiar. El proceso puede alargarse varias semanas y simultanearse con el tratamiento de otras unidades didácticas. La experiencia queda muy enriquecida si se realiza en dos clases distintas y, después, se comparan los resultados.

Para el estudio e interpretación de tablas y gráficas estadísticas pueden tenerse en cuenta las siguientes sugerencias didácticas:

— Se trata de un contenido eminentemente de procedimiento. Para que el alumno adquiera destreza en la interpretación de tablas y gráficas no necesita largas explicaciones ni reflexiones teóricas, sino, simplemente, que se le aporten "buenas tablas o gráficas" y se le realicen "buenas preguntas".

— Hay una gama muy amplia de tablas y gráficas interesantes desde un punto de vista didáctico. En los ejemplos que proponemos más arriba, el primero es una tabla relativa a sus aficiones. Es inventada, pero tiene la ventaja de que resulta muy sencilla y de que sugiere la elaboración de otra con los datos reales de la clase en cuestión.

— Las tablas y gráficas sobre las que el alumno trabaja deben ser razonablemente sencillas en este nivel. Sin embargo, lo que puede hacer especialmente adecuada una tabla como objeto de estudio son las preguntas que, sobre ella, se le realizan al alumno. Una buena secuencia de preguntas puede hacer muy asequibles tablas que, en principio, parezcan algo complejas.

Unidad 2: Magnitudes: medida, estimación y cálculo

Tiempo: Tres semanas.

En esta Unidad se persigue un doble objetivo: por un lado se avanza en el estudio de las unidades de medida de las magnitudes fundamentales (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa y tiempo). Por otro, se aprovechan los cálculos y problemas con cantidades de esas magnitudes para repasar y afianzar las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales y para reflexionar sobre la estructura de sistemas de medida distintos del decimal (unidades de tiempo o de medida de ángulos).

En el trabajo con el Sistema Métrico Decimal no se pretende una revisión exhaustiva de todas las unidades, ni la automatización del uso de las equivalencias o del paso de complejo a incomplejo, sino que los alumnos sean capaces de operar con seguridad y resolver problemas en las unidades de uso habitual. También deben conocer la estructura del sistema y poder, en caso de necesidad, deducir las relaciones entre las unidades menos usadas (Ejemplo: traducir 3 dam a cm, sabiendo que 1 dam = 10 m y que 1 m = 100 cm).

Una unidad de medida no debe ser un ente abstracto que sólo se usa en clase, sino que el alumno ha de tener una imagen mental de ella, basada en múltiples experiencias que la conviertan en una herramienta útil para expresar y cuantificar las magnitudes y objetos del entorno.

Por eso se pondrá especial atención en la estimación, "a ojo", de cantidades de distintas magnitudes, así como en la elección de la unidad adecuada y en la valoración del error tolerable en cada situación.

Se estudiará expresamente la hectárea, asociándola a un cuadrado de 100 m de lado, y se resolverán problemas en los que intervengan otras unidades agrarias de uso local (fanegas, robadas...) con el objeto de que se reconozcan como tales, aunque sin pretender memorizar sus equivalencias.

Para apreciar cantidades de superficies irregulares se establecerán comparaciones y equivalencias con cuadrados de lado conocido. (Ejemplo: la superficie de España, unos 500.000 km^2, equivale a la de un cuadrado de 700 km de lado.)

De la misma manera, para apreciar volúmenes se compararán con los de cubos de arista conocida. (Ejemplo: el agua retenida por cierta presa, unos 30 millones de m^3, llenaría un cubo de 300 m de arista.)

También es conveniente que se resuelvan problemas en los que intervengan simultáneamente varias magnitudes y unidades, en los que haya que hacer aproximaciones, estimaciones y operaciones de cálculo mental y escrito, para que los alumnos establezcan relaciones significativas entre ellas y mejoren su utilidad práctica. (Ejemplo: calcular el tiempo que tardará en llenarse un pantano de un km^3 que recibe agua de un arroyo del que se conoce el caudal. Relacionar el espacio y el tiempo utilizando unidades como el año luz, etc.).

Conocimientos previos

— Algunas unidades y sus equivalencias:

Longitud: km, m, dm, cm, mm

Masa: kg, g, 1/2 kg, 1/4 kg

Capacidad: l, 1/2 l, 1/4 l, cl

Superficie: m^2

Volumen: m^3

Tiempo: h, min, s

Unidades de medida de ángulos: grado (°), minuto ('), segundo (").

— La estructura básica del Sistema Métrico Decimal: las unidades de longitud, peso y capacidad van de diez en diez, las de superficie de cien en cien y las de volumen de mil en mil.

— Los números naturales, fraccionarios y decimales.

— Multiplicación y división por la Unidad seguida de ceros.

Objetivos

— Conocer la estructura completa del Sistema Métrico Decimal:

- Utilizar con soltura las unidades de uso habitual y sus equivalencias.
- Deducir, cuando se haga necesario, las equivalencias de las unidades menos habituales.

— Reconocer las unidades agrarias:

- Utilizar con soltura la hectárea, identificándola con un cuadrado de 100 m de lado.
- Reconocer algunas unidades tradicionales de uso local.

— Estimar la medida de una determinada cantidad de una magnitud, eligiendo la unidad apropiada.

— Determinar el error tolerable en cada situación de medida.

— Establecer relaciones significativas entre las distintas magnitudes y utilizarlas en la resolución de problemas.

— Afianzar las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.

Contenidos

C— El Sistema Métrico Decimal.

P— Utilización automática de las equivalencias entre las unidades habituales y deducción de las equivalencias entre las unidades menos usadas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Expresa en metros y en cm tu altura.

b) Un dam^2 es un cuadrado de 10 m de lado. ¿Cuántos metros cuadrados caben dentro de un dam^2? ¿Y cuántos cm^2?

c) ¿Cuántos rollos de malla de alambre de 20 m cada uno se necesitan para aislar los márgenes de un tramo de autopista de 35 km?

d) Escribe, ordenadas de mayor a menor, todas las unidades de capacidad que conozcas.

P— Estimación de medidas. Utilización de la Unidad adecuada. Apreciación del error tolerable en cada situación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Asocia a cada objeto su capacidad:

Botijo	50 millones de m^3
Camión cisterna	1/3 de litro
Bote de refresco	5 litros
Frasco de perfume	8 m^3
Pantano	30 cl

b) Estima, "a ojo", el peso de cada uno de estos objetos:
Libro de matemáticas, silla en la que estás sentado, un toro de lidia, una canica de cristal, un alfiler, un folio, el agua contenida en un camión cisterna de 8 m^3 de capacidad, el planeta Tierra.

Después, pesa, calcula o busca la información necesaria para comprobar tus soluciones.

c) Describe una situación de medida de peso en la que no podría permitirse un error de 2 g y otra en la que no tendría importancia equivocarse en 10 kilos.

P— Utilización de técnicas de cálculo aproximado para la medida de magnitudes.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula el peso de un alfiler.

Ayuda: puedes pesar la caja entera, contar y...

b) Calcula la capacidad, en litros, de la bañera de tu casa. (No es necesario llenarla litro a litro.)

C— Medidas agrarias. La hectárea.

P— Establecimiento de equivalencias con otras unidades de superficie. Identificación de la hectárea con un cuadrado de 100 m de lado.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Una hectárea equivale a un cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuántos metros cuadrados tiene una hectárea?

b) Un agricultor tiene un campo rectangular de 300 m de largo por 200 m de ancho. ¿Cuál es la superficie del campo en hectáreas?

c) Cierto campo de fútbol mide 112,4 m de largo por 86,72 m de ancho. ¿Es mayor o menor de una hectárea? Expresa, en ha y en m^2, su superficie.

P— Reconocimiento de otras unidades agrarias de uso regional.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Cuáles de estas unidades sirven para medir superficies?

voltio-cm^2-miriámetro-fanega-robada-metro-decibelio-maravedí-celemín-pinta-dólar-yarda

b) Una fanega, en Castilla, equivale a 6.459,6 m^2.
¿Cuántas fanegas tiene un campo de 4,5 ha?

P— Identificación de superficies irregulares, por yuxtaposición, con cuadrados de superficie "aproximadamente" equivalente.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Un agricultor posee tres huertas de 1.983 m^2, 1.445 m^2 y 3.015 m^2, respectivamente. Si las juntara en una única finca en forma de cuadrado, ¿cuánto mediría el lado?

b) La superficie de España, unos 500.000 km^2, equivale a un cuadrado de lado…

C— Unidades de volumen (mm^3, cm^3, dm^3, m^3, dam^3, hm^3, km^3).

P— Establecimiento de equivalencias entre el metro cúbico, sus divisores y sus múltiplos.

(El alumno será capaz de descubrir las equivalencias, pero no se pretende que las memorice ni mecanice su uso.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos bloques de hormigón de 1 m^3 se necesitan para rellenar un hueco en forma de cubo de 10 m de arista?

b) ¿Cuántos metros cúbicos de agua hay en un pantano cuando está lleno, sabiendo que su capacidad es de un kilómetro cúbico?

c) Expresa, en dm^3, 0,34 m^3.

P— Identificación de relaciones entre las unidades de volumen y capacidad.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

- ¿Qué unidad cúbica equivale al litro?
- ¿Cuántos litros caben en un m^3?
- Expresa 45,56 litros en cm^3.
- ¿Cuántos ml hay en 1 cm^3 ?

P— Identificación de volúmenes y capacidades de los objetos con cubos de "aproximadamente" el mismo volumen.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

El consumo semanal de agua de cierta población, 128.000 m^3, equivale aproximadamente a un cubo de arista ....

P— Resolución de problemas que relacionen las diferentes magnitudes y unidades.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Una tubería arroja un caudal de 3,25 litros por segundo.

¿Cuánto tardará en llenar un piscina de 50 m de larga por 25 m de ancha y con una profundidad media de 1,70 m?

b) ¿Cuánto mide la arista de un depósito cúbico que tiene una capacidad de 15.625 litros?

c) Cierta estrella está a 100 años luz de la Tierra. Si explotara y desapareciera, ¿cuánto tiempo tardaríamos en dejar de verla en el cielo?

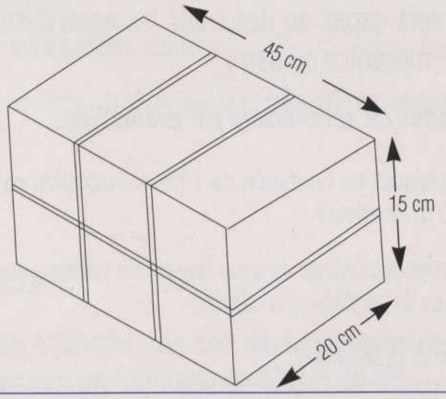
d) ¿Cuántos rollos de alambre de 150 m se necesitan para cercar, con una valla de cuatro hilos, una finca cuadrada de 4 ha de superficie?

e) Una habitación mide 4,38 m de ancha, 6,23 m de larga y 2,80 m de alta.

- ¿Cuántas baldosas de 20 cm por 20 cm se necesitan para cubrir el suelo?
- ¿Cuánto costará pintarla si entre material y mano de obra sale a 300 pts el m^2?

f) Una fábrica empaqueta sus productos en cajas, utilizando, en cada una, tres tiras de flejes como se ve en la figura.

Si empaqueta 3 cajas al minuto, y trabaja en dos turnos diarios de 8 horas, ¿cuántos km de fleje de sujeción gasta al año?



Actividades complementarias

- Una lavadora tiene una capacidad de 5 litros.
- En cierta familia suelen realizar, por término medio, tres coladas a la semana, con la lavadora al 85% de su capacidad.
- ¿Qué volumen ocuparía, si se juntara en un solo montón, la ropa sucia de todo un año?
- ¿Cuántos dados de 2 cm de arista caben en un cubo de 6 cm de arista?
- Calcula, aproximadamente, la superficie de la piel de una persona de 1,17 m de estatura.
- Las ruedas de un coche tienen un diámetro de 50 cm. ¿Cuántas vueltas darán aproximadamente en un viaje de 100 km?

Proporcionalidad y semejanza

El estudio de la proporcionalidad, bajo diversos aspectos, es quizá el contenido protagonista de este curso. Por eso hemos optado por agrupar, en un bloque común, todas las unidades didácticas en las que se trata.

— **Visión aritmética:** repercusiones numéricas y reglas prácticas de actuación, con múltiples y variadas aplicaciones.

— **Visión geométrica:** estudio de la semejanza entre figuras planas y espaciales.

— **Visión funcional:** la función lineal como expresión común a todos los problemas de proporcionalidad.

El objetivo común de este bloque es, pues, establecer relaciones significativas entre los distintos puntos de vista desde los que se puede presentar la proporcionalidad de magnitudes. Objetivos más específicos de cada tratamiento se exponen en la Unidad didáctica correspondiente.

Contenidos

Se desarrollarán a lo largo de las siguientes unidades didácticas:

Unidad 3. INTRODUCCIÓN A LA PROPORCIONALIDAD. Donde se trata, por primera vez, de forma sistemática.

Unidad 4. PORCENTAJE E ÍNDICES. Aplicación de la proporcionalidad y tema de extraordinario interés práctico.

Unidad 5. SEMEJANZA DE FIGURAS. Donde la proporcionalidad se lleva al ámbito de las figuras geométricas.

Unidad 6. INTERPRETACIÓN DE FUNCIONES. LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD. Las distintas situaciones donde aparece o se aplica la proporcionalidad se ven reflejadas en funciones representadas por rectas. Con este nuevo punto de vista se engloba y culmina todo el estudio de la proporcionalidad.

Unidad 3: INTRODUCCIÓN A LA PROPORCIONALIDAD

Tiempo: Tres semanas.

En esta Unidad se trata por primera vez de forma sistemática la proporcionalidad.

Consideramos necesario que, previamente al aprendizaje de métodos algorítmicos o al uso de rutinas específicas para resolver ciertos tipos de situaciones, el alumno se haya enfrentado a una amplia gama de problemas aritméticos sencillos, con magnitudes proporcionales y no proporcionales, con los que haya desarrollado sus propias ideas, estrategias y relaciones. Así, los métodos y procesos que brinda la teoría se aceptarán como algo ya prácticamente comprendido, sin saltos sobre el vacío, y como recursos "para economizar esfuerzo" y para abordar situaciones más complejas en el tipo o cantidad de los datos.

Atendiendo a este criterio, se reserva un espacio, al principio, para este trabajo previo a la proporcionalidad, cuya extensión dependerá de la historia y circunstancias del grupo de alumnos (en el primer curso se desarrolló una unidad completa, la Unidad 9, en este sentido).

Los contenidos propios de la Unidad comienzan con la identificación de las magnitudes proporcionales, sus tipos y las relaciones que existen entre sus valores correspondientes, para llegar al concepto de proporción (igualdad de dos razones) y al de coeficiente de proporcionalidad (cantidad constante que se obtiene al dividir una pareja de valores correspondientes).

El siguiente paso será comprender y aplicar el método de reducción a la unidad para calcular valores desconocidos entre magnitudes proporcionales, y automatizar el uso de la regla de tres.

Por último, se propondrán problemas en los que lo aprendido aparezca bajo diferentes aspectos y se relacione con diferentes conceptos (repartos, porcentajes, descuentos, mezclas, interés bancario, escalas...).

Conocimientos previos

— Números enteros, fraccionarios y decimales. Operaciones.

— Los que implica el tratamiento previo, no sistemático, de diversos tipos de problemas aritméticos sencillos.

Objetivos

— Comprender los conceptos de:

- Magnitudes directa e inversamente proporcionales
- Razón y proporción
- Coeficiente de proporcionalidad

— Calcular el término desconocido en una proporción.

— Aplicar el método de reducción a la Unidad y la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad.

Contenidos

P— Utilización de estrategias de elaboración personal para la resolución de problemas aritméticos sencillos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Juan ha recibido 1.500 pts por trabajar tres horas repartiendo propaganda. ¿Cuánto recibirá Berta, que ha trabajado cinco horas?

b) Un comerciante fija el precio de sus artículos de forma que la relación entre el precio de almacén y el precio de venta al público sea de tres a cinco.

- ¿A cuánto pone un artículo que cuesta 300 pts en el almacén?
- ¿Cuánto costaba en almacén un artículo que se vende al público a 1.000 pts?

c) ¿Qué relación observas entre estas series de números?

Completa los números que faltan.

3	12	15	21	30	54	70	—
4	16	20	28	40	—	—	120

C— Magnitudes proporcionales.

P— Identificación de magnitudes proporcionales y no proporcionales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Razona si son proporcionales o no estos pares de magnitudes:

- El CONSUMO de agua y la HORA del día a la que se mida.
- El CONSUMO de gasolina de un coche y la DISTANCIA recorrida.
- La EDAD de una persona y el número de VECES que va al médico.
- El número de VACAS de una granja y la cantidad de PIENSO que consumen.

b) ¿Qué condiciones deben cumplir dos magnitudes para ser proporcionales?

P— Diferenciación de magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Describe la relación que hay entre estos pares de magnitudes:

- El PESO de las naranjas que compras en el mercado y el PRECIO que pagas.
- La VELOCIDAD de un automóvil y el TIEMPO que tarda en hacer un recorrido.
- La VELOCIDAD de un automóvil y el ESPACIO que recorre en una hora.
- El CAUDAL de una tubería y el TIEMPO que tarda en llenar una piscina.

b) Describe una pareja de magnitudes directamente proporcionales y otra de magnitudes inversamente proporcionales.

P— Construcción e interpretación de tablas de valores correspondientes a magnitudes proporcionales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Completa esta tabla que relaciona el precio de las naranjas con el dinero que cuestan.

Kg comprados	2	5	3,5		1,5
Pts pagadas		400		1.200	

b) Observa estas tablas de valores correspondientes a dos pares de magnitudes:

Magnitud A	2	5	10	11	15
Magnitud B	5	12,5	25	27,5	37,5

Magnitud M	2	5	10	11	15
Magnitud N	6	5	12	22	10

¿Alguno de estos pares de magnitudes son proporcionales?

P— Expresión matemática de las relaciones de proporcionalidad.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) El kilo de naranjas está a 80 pts.

Si "k" es el número de kilos de naranjas comprados y "p" el precio, en pesetas, pagado por esos kilos, ¿cuál de estas expresiones refleja la relación peso-precio?

- 80 = a + b
- b = 80 + a
- b = 80 x a
- 80 = a / b

b) La expresión D = 20 / O relaciona el número de obreros (O) que realizan un trabajo y el número de días (D) que tardan en realizarlo. Atendiendo a esa relación, completa la siguiente tabla:

OBREROS (O)	1	4	8	10	20
DÍAS (D)					

¿Qué tipo de proporcionalidad presentan estas magnitudes?

C— Razones y proporciones.

P— Comparación de razones. Identificación de razones equivalentes.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Busca pares de razones iguales en este conjunto:

2/3 1/5 6/9 7/9 2/10 20/100

b) Escribe cinco razones que tengan el mismo valor que 1/3.

c) ¿Qué condición han de cumplir las razones a/b y c/d para ser equivalentes?

d) Escribe dos razones que formen proporción.

e) Escribe una razón que forme proporción con la razón 1/3.

P— Descubrimiento y comprobación de las relaciones existentes entre pares de razones correspondientes a dos magnitudes proporcionales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Observa esta tabla de valores correspondientes entre las magnitudes PESO en gramos de cierto alimento y su VALOR ENERGÉTICO en kilocalorías.

GRAMO	100	150	200	500	1.000
KILOCALORÍAS	50	75	100	250	500

- Forma, con los valores de la tabla, series de razones equivalentes.
- ¿Es cierta la expresión: 100/150 = 50/75?

  ¿Se trata de una proporción?

b) Observa esta tabla que relaciona el número de OBREROS con los DÍAS que han de trabajar para completar cierto encargo:

OBREROS (O)	1	4	5	10	20
DÍAS (D)	20	5	4	2	1

¿Puedes formar proporciones con dos de sus pares de valores correspondientes?

Ayuda: comprueba esta expresión

$$1/4 = 5/20$$

c) Escribe, en fila, una serie de números y debajo de cada uno coloca su triple (o su mitad, o...).

Ej.:	3	12	20	22	18	4
	9	36	60	66	54	12

- Construye proporciones con esos números.
- ¿Son proporcionales las dos series?
- Experimenta con otras series diferentes.

P— Cálculo del término desconocido de una proporción. Regla de tres.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula el valor desconocido en cada caso:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x} \qquad \frac{2}{3} = \frac{5}{x} \qquad \frac{a}{7} = \frac{3}{21}$$

$$\frac{5}{m} = \frac{15}{18}$$

b) Cinco es a cuatro como diez es a .....

P— Resolución de problemas de proporcionalidad por métodos específicos (reducción a la unidad, regla de tres).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Siete kilos de naranjas han costado 560 pesetas.

¿Cuánto costará un kilo?

¿Cuánto costarán cuatro kilos?

b) Un granjero tiene pienso para dar de comer a sus tres vacas durante seis días.

¿Cuánto le duraría el pienso si sólo tuviera una vaca?

¿Cuánto le duraría si tuviera nueve vacas?

c) Para obtener cierto color de pintura, un operario debe mezclar tres partes de rojo puro con ocho de amarillo y dos de negro.

¿Cuántos litros de pintura amarilla y cuántos de negra se combinarán con 21 litros de pintura roja?

C— Coeficiente de proporcionalidad.

P— Cálculo de la razón (o coeficiente de proporcionalidad) entre dos magnitudes proporcionales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Observa estas dos series de números proporcionales:

4	5	8	16	26	40
6	7,5	12	24	39	60

¿Cuál es el coeficiente de proporcionalidad entre ambas?

b) Cuál es el coeficiente de proporcionalidad entre las magnitudes PRECIO y PESO según los valores de esta tabla?

Kg comprados	2	5	3,5	15	1,5
Pts pagadas	160	400	280	1.200	120

P— Cálculo de valores, a partir del coeficiente de proporcionalidad.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Escribe dos series de números proporcionales de forma que el coeficiente de proporcionalidad entre ambas sea de 2,7.

b) Dos socios, al montar un negocio, han invertido dos y tres millones, respectivamente.

- ¿Cuál será la relación entre las cantidades recibidas por cada uno a la hora de repartir los beneficios?
- ¿Cuánto corresponderá al primero si el segundo ha cobrado 528.000 pts?

c) La razón entre el sueldo de una familia y el gasto en alimentación es, por término medio, de 3,1.

¿Cuánto gana una familia que ha gastado 67.500 pts en alimentación?

¿Cuánto gasta en alimentación una familia que tiene unos ingresos de 225.000 pts?

¿Cuál sería la relación entre el gasto en alimentación y el sueldo total?

P— Resolución de problemas aritméticos (repartos, porcentajes, descuentos, mezclas, interés bancario...).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Para que un gramo de aceite eleve un grado centígrado su temperatura se necesitan 0,4 calorías.

¿Cuántas calorías se necesitan para que calentar medio kilo de aceite desde 16° C a 70° C?

b) El área de un círculo es de 72 cm^2.

¿Cuál es el área de un sector circular que abarca 30°?

c) Tres obreros tardan 12 días en hacer un trabajo.

¿Cuánto tardarían cuatro obreros en hacer ese mismo trabajo?

d) Tres obreros, trabajando 8 horas diarias, tardan 12 días en hacer un trabajo.

¿Cuánto tardarían 4 obreros trabajando 6 horas diarias?

e) Se mezclan 5 hl de vino de 230 pts/l con 3 hl de vino de calidad superior de 400 pts/l.
¿A qué precio sale la mezcla?

f) Tres operarios reciben 72.000 pts como pago de un trabajo realizado.
Si el primero dedicó 3 h al proyecto, el segundo 4 h y el tercero 5 h, ¿qué parte corresponde a cada uno?

g) Un grifo llena un depósito en 4 h.
Otro grifo llena ese mismo depósito en 2 h.
¿Cuánto tiempo tardarían en llenarlo actuando juntos?

h) 100 pts, en el banco durante un año, producen 8 pts de interés.
¿Qué interés producirán 300.000 pts durante cuatro meses?

i) Calcula el 12% de 40.000 pts.

j) Un jersey costaba 8.500 pts antes de las rebajas.
Ahora cuesta un 15% menos.
¿Cuál es el precio actual?

Unidad 4: PORCENTAJES E ÍNDICES

Tiempo: Dos semanas.

La proporcionalidad es uno de los apartados de las matemáticas de más clara y frecuente aplicación en la actividad cotidiana. Por eso, además del estudio sistemático de sus conceptos y procesos, conviene dedicar una Unidad didáctica a alguna de sus aplicaciones (cálculo de porcentajes) y a ciertas rutinas y algoritmos muy usados y que suponen una gran economía en los cálculos (uso de los índices o coeficientes de ampliación o reducción).

Ej.: El vendedor, para calcular el precio de un objeto rebajado el 15%, multiplica por 0,85.

En la presente Unidad se pretende que los alumnos y alumnas adquieran soltura en este tipo de situaciones.

Lógicamente, no se pretende que memoricen un montón de "recetas" aplicables a los distintos tipos de problemas, sino que, resolviendo muchos problemas sencillos y reflexionando sobre los algoritmos utilizados, descubran los métodos más rápidos y eficaces para llegar a la solución.

El proceso que se propone sigue estos pasos:

- *Primer paso:*

Resolución de muchos problemas similares y sencillos, de un tipo determinado.

Ej.: Un jersey cuesta 6.500 pts sin I.V.A. ¿Cuánto pagarás al comprarlo, si ese impuesto supone un recargo del 15%?

- *Segundo paso:*

Reflexión sobre el algoritmo seguido en todos ellos:

$$\text{Aumento} = \frac{\text{Pr. inic. x tanto por ciento}}{100}\ ; \quad \text{Pr. finl.} = \text{Pr. inic.} + \text{aumento}$$

- *Tercer paso:*

Aplicación del proceso a otros problemas similares. Ahora el alumno aplica el esquema anterior. No lo tiene que pensar cada vez porque ya lo ha hecho muchas veces en el paso precedente. No obstante, es bueno que más adelante, de vez en cuando, vuelva a repetir el razonamiento.

- *Cuarto paso:*

Reflexión sobre el esquema utilizado para mejorar el algoritmo.

Aquí se razonará que las operaciones efectuadas son equivalentes a estas otras:

Un artículo sube el 15% ⟶ Pr. finl. = Pr. inic. x 1,15

Multiplicar por 1,15 equivale a tomar la cantidad completa (1) más quince centésimas de la cantidad (0,15).

- *Quinto paso:*

Aplicación reiterada del método (multiplicar por el índice adecuado) hasta que quede automatizado (automatizado y comprendido).

- *Sexto paso:*

Aplicación del método a la inversa.

El esquema tiene la ventaja adicional de que se puede aplicar a la inversa con toda sencillez.

Ej.: ¿Qué precio marcaba la etiqueta (sin I. V. A.), si has pagado 7.475?

Pr. inic. = Pr. finl. : 1,15 ⟶ Pr. inic.= 7.475 : 1,15 = 6.500

Es importante elegir con cuidado el primer tipo de problema a trabajar (hemos puesto como ejemplo los problemas de recargo, pero podría empezarse con otro tipo de situaciones). En este primer recorrido de descubrimiento los pasos han de ser lentos y seguros, afianzando bien cada etapa.

Una vez conseguido esto, se seguirá el mismo proceso para otras clases de situaciones (descuentos, cálculo de la cantidad total conociendo la parte resultante o la cantidad descontada, etc.), pero ahora el camino será cada vez mas fácil y rápido, pues ya se pisa sobre terreno conocido.

Conocimientos previos

— Números decimales y fraccionarios. Operaciones.

— Magnitudes proporcionales.

— Utilización de la regla de tres.

Objetivos

— Resolver con soltura las distintas situaciones de cálculo con porcentajes.

— Utilizar los índices o coeficientes para el cálculo con porcentajes.

Contenidos

C— Tanto por ciento.

P— Cálculo mental de porcentajes sencillos:

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) • ¿Cuál es el 17% de 100?

• ¿Cuál es el 50% de 500? ¿Y de 850? ¿Y de 42?

• Calcula el 25% de estas cantidades:

600 4.444 128 80 7 1 0,4

b) Un paquete de galletas vale 100 pts.
Sube el 35%. ¿Cuál es su nuevo valor?

c) Una calculadora que valía 3.000 pts baja el 25%. ¿Cuánto cuesta ahora?

P— Cálculo de porcentajes mediante la utilización de la regla de tres. (Resolución reiterada de problemas similares, de un tipo determinado.)

Posibles tipos:

- Cálculo del tanto por ciento de una cantidad.
- Cálculo de la cantidad que resulta de aumentar o disminuir, en un porcentaje, una cantidad inicial.
- Cálculo de la cantidad inicial, sabiendo la cantidad resultante de un descuento o un aumento.
- Cálculo del porcentaje aumentado o disminuido.

En estos primeros problemas, el alumno aplicará la regla de tres sobre dos magnitudes fijas:

Ej.: Las fresas, que estaban a 300 pts/kg, han subido un 16%. ¿A cuánto están ahora?

TOTAL	*PORCENTAJE*
100	16
300	X

$$X = \frac{300 \times 16}{100}$$

P— Reflexión sobre el algoritmo seguido en el procedimiento anterior y mecanización del proceso (reiteración y razonamiento).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Un alumno cuya estatura era de 168 cm el año pasado ha crecido un 6%. ¿Cuál es su estatura actual?

- Explica, paso a paso, cómo has resuelto el problema.
- Escribe, indicadas, sin calcular el resultado, todas las operaciones que has realizado para resolverlo.

b) Aplica el mismo método que en el problema anterior para resolver el siguiente:

La cantidad de agua almacenada en los pantanos de la provincia, al final del verano, era de 396 millones de metros cúbicos. Si las lluvias de otoño han aumentado las reservas en un 10%, ¿cuál es la cantidad actual de agua almacenada?

c) Qué número se obtiene al aumentar el número 163.700 en un 3%?

P— Mejora del algoritmo. Búsqueda de métodos más rápidos y cómodos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Explica y razona las actuaciones seguidas para resolver el siguiente problema:

- El precio de un artículo, que costaba 800 pts, ha subido un 22%. ¿Cuánto cuesta ahora?

PR. INICIAL	*PR. FINAL*
100	122
800	X

$$X = \frac{800 \times 122}{100}$$

El precio actual es de 976 pts.

b) El precio de las fresas era de 300 pts/kg, pero han subido un 15%. ¿A cuánto están ahora?

- Resuelve el problema por el algoritmo conocido:

$$15\% \text{ de } 300 \longrightarrow \frac{300 \times 15}{100} = 45$$

Pr. final = 300 + 45 = 345 pts/kg.

- Multiplica 300 por 1,15. ¿Qué obtienes?
- ¿Por qué crees que se obtienen los mismos resultados?
- ¿Por qué número crees que habría que multiplicar si las fresas hubieran subido el 18%?

c) Resuelve por el camino más rápido:

- ¿A cuánto se pone la barra de pan, que costaba 50 pts, después de una subida del 12%?
- Aumenta en un 35% el número 48.720.

d) Al subir un 12% el precio de un artículo ha quedado en 8.950 pts.

¿Cuál era el precio antes de la subida?

P— Resolución de problemas de aplicación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) En cierto almacén se anuncian rebajas de un 30% en todos los artículos.

En qué precio quedarán:

- Una camisa de 3.400 pts.
- Un frasco de colonia que costaba 5250 pts.
- Un paquete de pañuelos de 75 pts.

(Nota: los precios de los artículos rebajados se aproximan a la unidad superior más próxima.)

b) Se estima que en cierta comarca el granizo ha destruido el 33% de la cosecha de cereales. Se han recolectado 23.000 Tm. ¿Cuál hubiera sido la cantidad recolectada si no hubiera habido tormentas?

c) Un artículo ha sido rebajado el 35% y ahora cuesta 12.025 pts. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?

d) Un artículo que costaba 18.500 pts ha sido rebajado a 12.025. ¿Cuál ha sido el porcentaje rebajado?

Actividades complementarias

- En una clase, las notas de un examen han sido:

5	3,5	8	2	1	4,5	7	6,7	3	6
4	7	8	5	1,5	6	5,5	3	7	7
5	4	5	6	3	4,7	4,5	7	7,9	1

El profesor se da cuenta de que el examen ha resultado demasiado difícil, y decide subir proporcionalmente todas las notas para que haya cinco suspensos menos.

¿Por qué coeficiente debe multiplicarlas?

- Busca el factor que transforma cada cantidad de arriba en la correspondiente de abajo

8	6	9	12	15
6	4,5	6,75	9	3,75

- La subida del índice del precio de los alimentos en el mes de abril ha sido de cinco centésimas, y en el mes de mayo de seis centésimas. En junio se ha estabilizado.

Si una familia gastó aproximadamente 80.000 pts mensuales en alimentos, durante el primer trimestre del año, ¿cuánto habrá gastado aproximadamente en junio?

- Un trabajador cobra un sueldo de 145.000 pts/mes más 1.200 pts por hora extraordinaria.

Las horas extraordinarias nocturnas tienen una bonificación del 20%.

Este mes, además del sueldo, tiene 28 horas extraordinarias, 10 de las cuales son nocturnas.

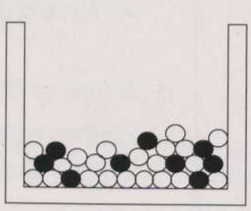
¿A cuánto ascenderá su nómina?

- Calcula el tanto por ciento de "unos" y de "doses" que hay en esta colección de cifras:

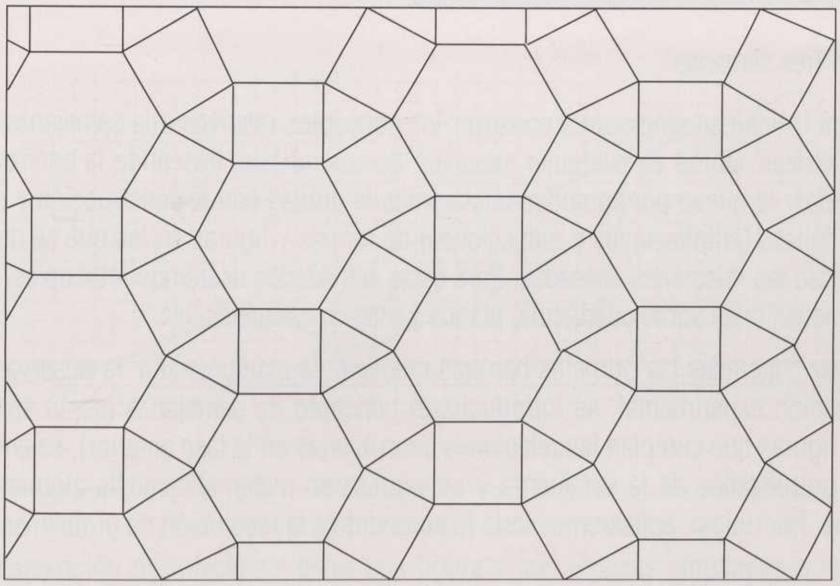
122221222212222122221222212222122221222... etc.

- Metes la mano en la caja, sin mirar, y sacas una bola. Ganas si sale negra.

¿Cuál es el porcentaje de posibilidades que tienes de ganar?



- ¿Qué porcentaje de baldosas de cada tipo hay en este mosaico?



Unidad 5: Semejanza de figuras

Tiempo: Tres semanas.

En esta Unidad se empiezan a construir los conceptos relativos a la semejanza de figuras geométricas. Como en cualquier situación de aprendizaje, buscando la conexión entre lo conocido y lo nuevo por aprender, iniciaremos la unidad con la construcción y observación de réplicas (ampliaciones y reducciones) de formas y figuras en las que se descubran con facilidad las relaciones deseadas. Para estas actividades usaremos fotocopias, fotografías, reproducciones sobre cuadrícula, planos y mapas, maquetas, etc.

Una vez superadas las primeras barreras mediante la manipulación, la observación y la comprobación experimental, se introducirá el concepto de semejanza (serán semejantes aquellas figuras que cumplan las relaciones descubiertas en la fase anterior), se enunciarán algunas propiedades de la semejanza y se expresarán matemáticamente algunas de sus relaciones. Por último, aplicaremos todo lo aprendido a la resolución de problemas.

Conocimientos previos

— Figuras planas y espaciales. Elementos.

— Longitud, superficie y volumen. Algunas unidades de medida.

— Magnitudes proporcionales. Regla de tres. Coeficiente de proporcionalidad.

Objetivos

— Reconocer figuras semejantes por medio de las relaciones entre sus elementos.

— Identificar la razón de semejanza entre dos figuras.

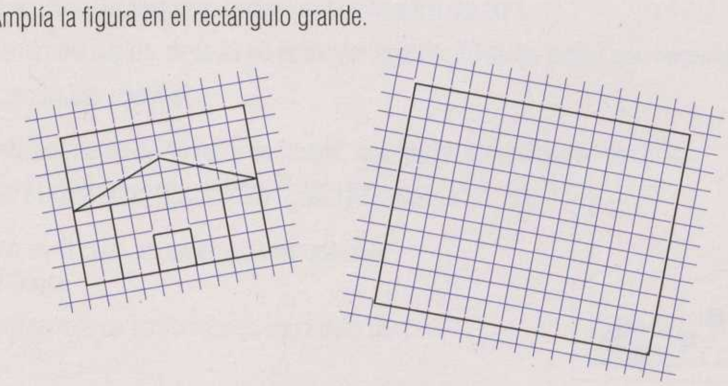
— Utilizar los conceptos y relaciones relativos a la semejanza para resolver problemas.

Contenidos

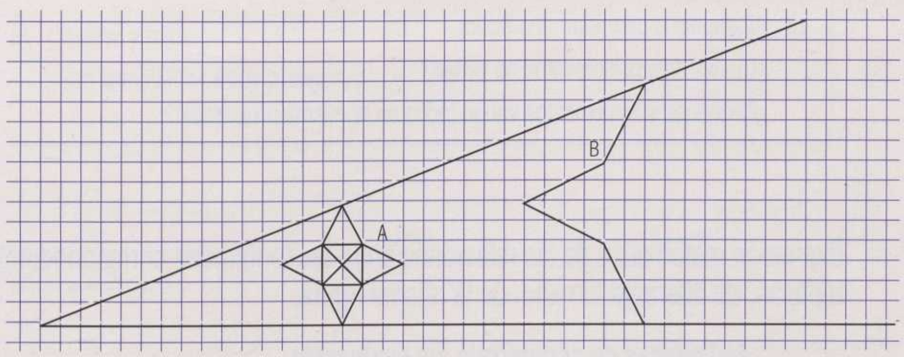
P— Construcción de ampliaciones y reducciones mediante el uso de la cuadrícula u otras técnicas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Amplía la figura en el rectángulo grande.



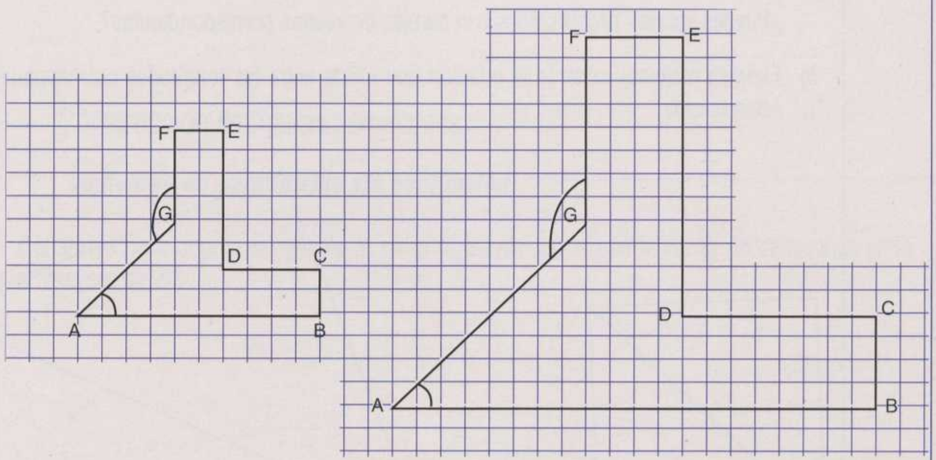
b) Completa la ampliación de la figura A.



P— Observación de relaciones entre una figura y sus réplicas ampliadas o reducidas (distancias, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, etc.).

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Compara estas dos reproducciones, a distinto tamaño, de la misma figura:



- ¿Cuántos cuadritos abarca la distancia AB en cada figura?
- ¿Guarda la misma relación el resto de las distancias correspondientes de ambas figuras?
- Mide el ángulo A y el ángulo G en ambas figuras. ¿Qué observas?
- ¿Ocurre lo mismo con el resto de los ángulos?

b) Reproducir, a diferentes tamaños, varias figuras con ayuda de la fotocopiadora.

- Medir y comparar longitudes
- Medir y comparar ángulos.

➡ *c*) Tomar una fotografía de un par de alumnos de la clase (de cuerpo entero).

Medir a uno de ellos y, con ayuda de la fotografía, calcular la altura del otro. (Después, comprobar la veracidad del dato.)

d) Al ampliar o disminuir una figura.

¿Cuáles de sus elementos no varían?

¿Cuales de sus elementos varían todos en la misma proporción?

P— Expresión matemática de las relaciones entre las longitudes correspondientes de dos réplicas, de diferente tamaño, de la misma figura.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Observa las dos reproducciones de la actividad *a*) del procedimiento anterior.

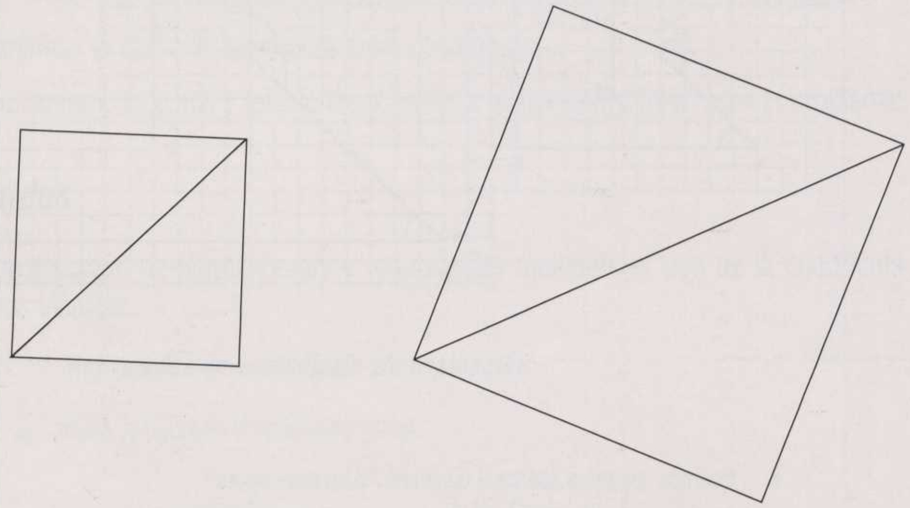
Cuenta los cuadritos que abarca cada lado y completa la tabla:

	AB	BC	CD	DE	EF	FG
Figura pequeña	10					
Figura grande	20					

¿Observas alguna relación entre las dos colecciones de valores?

¿Puedes escribir proporciones con parejas de valores correspondientes?

b) Expresa matemáticamente la relación que existe entre las longitudes correspondientes de estas figuras:



C— Figuras semejantes. Razón de semejanza.

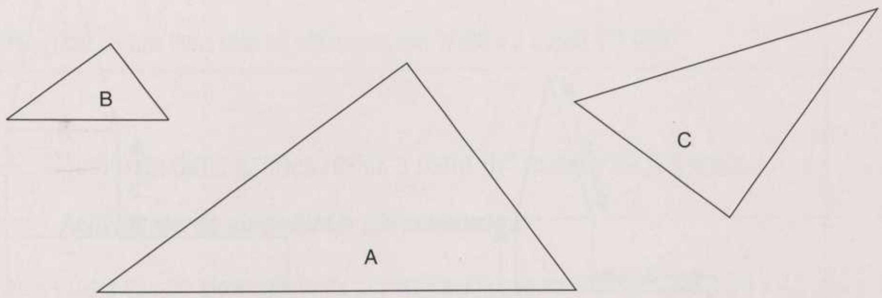
P— Comprobación y reconocimiento de propiedades y relaciones entre las figuras semejantes.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué relación guardan las longitudes correspondientes de dos figuras semejantes? ¿Y los ángulos correspondientes?

b) Observa y mide.

¿Son semejantes estos triángulos?

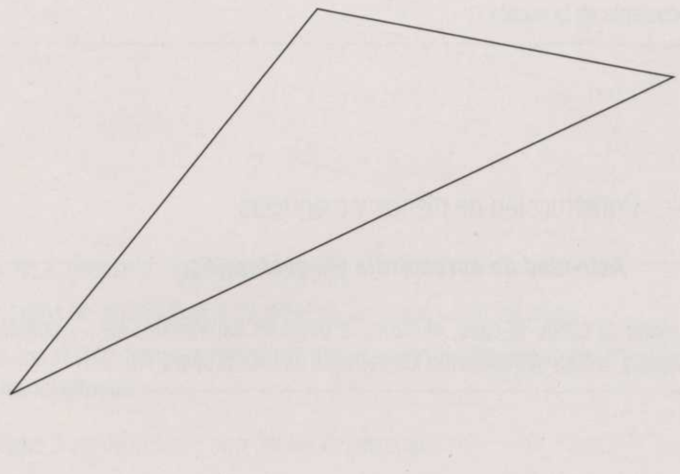


¿Cuál es la razón de semejanza entre A y B? ¿Y entre B y C? ¿Y entre A y C?

P— Construcción de figuras semejantes.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

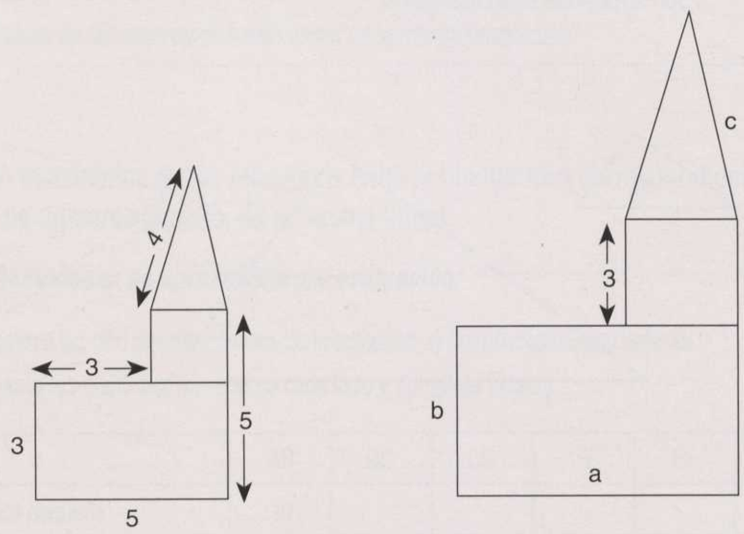
Construye un triángulo semejante al de la figura de forma que la razón de semejanza entre ambos sea de 2/3.



P— Cálculo de las dimensiones de una figura semejante a una dada.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula *a*, *b* y *c*, teniendo en cuenta que las figuras son semejantes.



b) El lado de un rombo mide 7 m, y su diagonal menor, 4 m. ¿Cuánto medirá la diagonal menor de un rombo semejante al anterior, de lado 12 m?

C— Planos y escalas.

P— Comprobación de relaciones entre el plano y la realidad.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Conseguir un plano del colegio, de la clase, de la localidad, etc.

Medir distancias correspondientes sobre la realidad y sobre el plano y comprobar que su cociente es la escala.

P— Construcción de planos y maquetas.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Medir la clase, la casa, el patio, la pista de baloncesto, etc., y construir representaciones a escala 1/100, identificando las ventajas de esta proporción.

P— Identificación de la escala conveniente para cada representación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Asocia la escala con el objeto o superficie a representar:

• Plano de un pueblo	1/2.000
• Plano de un piso	1/50
• Representación de un tornillo	1/50.000
• Plano de España	1/1
• Plano para un recorrido de bicicleta de montaña	1/1.000.000

b) ¿Qué ventaja tiene usar un plano a escala 1/100 o a escala 1/1.000?

P— Cálculo de dimensiones reales a partir del plano y de la escala.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuáles son las dimensiones de una habitación que en el plano mide 3 cm x 4,5 cm, si la escala es 1/100?

b) En un plano a escala 1/500, la distancia entre dos puntos A y B es de 17 cm.
¿Cuál es la distancia real entre esos puntos?

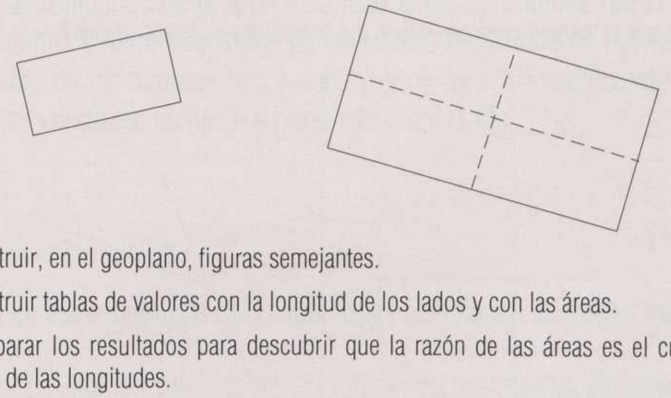
c) Efectuar este tipo de cálculos utilizando planos de la localidad, la comarca, etc., manejando espacios del entorno de los alumnos.

C— Relación entre las áreas y entre los volúmenes de figuras semejantes.

P— Observación y búsqueda de relaciones de área y volumen entre figuras semejantes.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Observa estos dos rectángulos semejantes:
¿Cuál es la razón de semejanza?
Calcula la superficie de cada uno. ¿Guardan las superficies la misma relación que las longitudes de los lados?



b) Construir, en el geoplano, figuras semejantes.
Construir tablas de valores con la longitud de los lados y con las áreas.
Comparar los resultados para descubrir que la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de las longitudes.

c) Un cubo tiene 3 cm de arista, y otro tiene 6 cm de arista.
¿Cuál es el volumen de cada uno?
¿Guardan los volúmenes la misma relación que los lados?

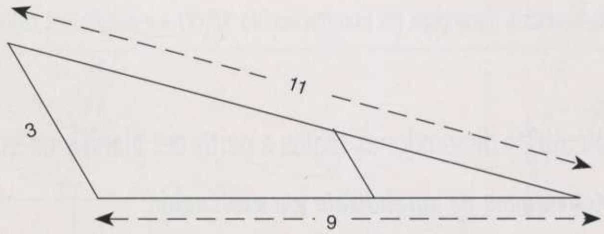
P— Aplicación de las relaciones de semejanza en la resolución de problemas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

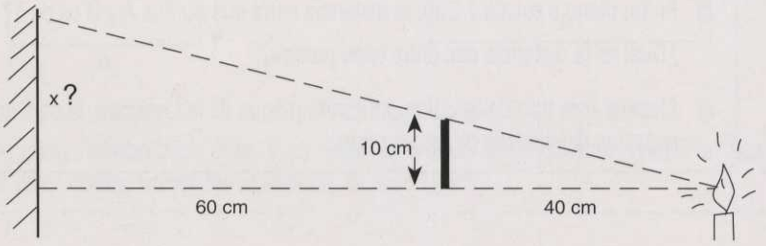
a) ¿A qué escala se ha representado un campo si una distancia real de 600 m se ha reducido en el dibujo a 12 cm?

b) Demuestra que dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.

c) Calcula *x* e *y*.



d) ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta A sobre la pared?

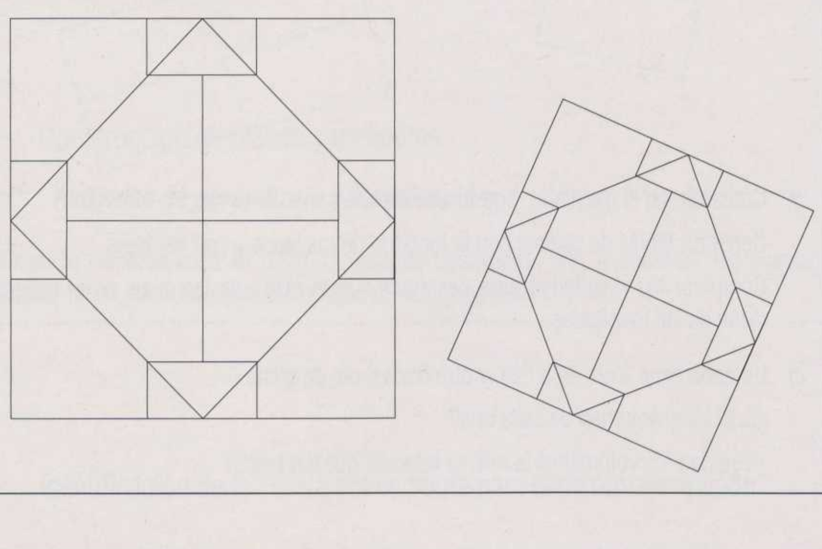


Actividades complementarias

- ¿Qué figuras geométricas son siempre semejantes, sea cual sea su tamaño?
- Un bidón de aceite cuesta 4.000 pts y pesa 9,32 kg.

  ¿Cuál será el precio y el peso de otro bidón cuyas dimensiones sean dobles de las del anterior, es decir, doble de ancho, de alto y de largo?
- Se ha fotocopiado la figura A, dándole a la máquina la orden de reducir al 75%, y se ha obtenido la figura B.

  ¿Qué es lo que la máquina reduce al 75%, las longitudes o las superficies?



Unidad 6: Interpretación de funciones. La función de proporcionalidad

Tiempo: Tres semanas.

En esta Unidad se atienden dos frentes: primeramente se prosigue con la interpretación de gráficas que se había comenzado en primer curso, elevando ligeramente la complejidad de gráficas y enunciados y, sobre todo, atendiendo ahora a las variaciones cuantitativas.

En segundo lugar, se procede a estudiar específicamente las funciones $y = ax$ $y = ax + b$, que reflejan distintas situaciones de proporcionalidad estudiadas en los temas anteriores.

Objetivos

— Interpretar gráficas relativas a diversos fenómenos, extraer información cualitativa y cuantitativa sobre el fenómeno descrito y, cuando se pueda, hacer predicciones sobre su posible evolución.

— Representar funciones que respondan a fenómenos descritos por enunciados o tablas de valores; o mediante su expresión analítica en el caso de funciones lineales.

— A partir de la representación gráfica de una función, obtener numéricamente la pauta de crecimiento medio correspondiente a un intervalo de la variable independiente, e interpretarlo dentro del significado de la función estudiada.

— Asociar la pendiente de una recta con su pauta de crecimiento, y reconocerla tanto en la expresión analítica (como coeficiente de la *x* al depejar la *y*) como en la gráfica.

— Reconocer las funciones de proporcionalidad antes aprendidas (en la semejanza de figuras, aumentos y disminuaciones porcentuales, recorridos de móviles a velocidad constante, etc.) en las expresiones $y = ax$ o $Vy = ax + b$ identificando en cada caso cuáles son las variables, cuáles los parámetros *a* y *b*, etc.

Contenidos

Profundización de los contenidos sobre funciones estudiados en primer curso:

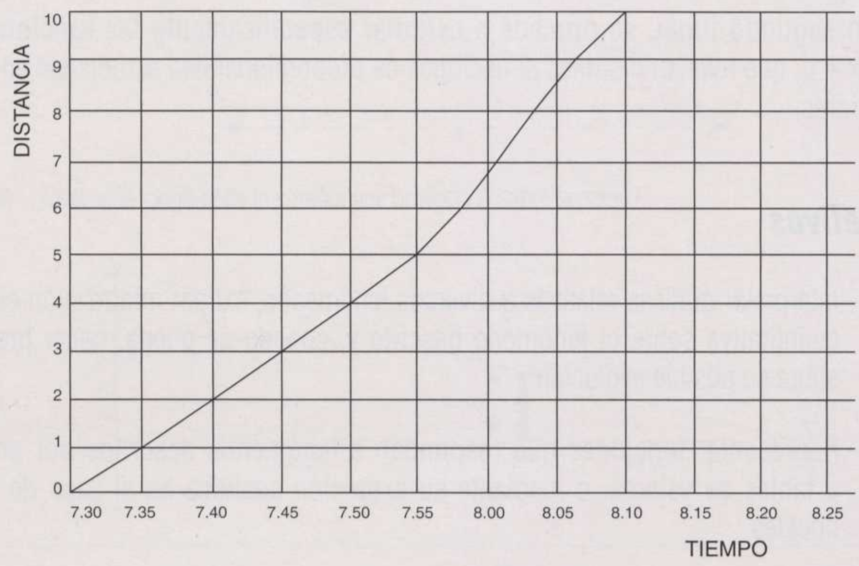
C— Noción clara de que las gráficas de las funciones representan fenómenos mediante la relación entre sus dos variables.

P— Interpretación de funciones dadas mediante gráficas y descripción de sus principales rasgos. Estudio cuantitativo de las variaciones.

Actividad:

Con esta actividad se puede completar la *Actividad 2,* de la Unidad 10 de primer curso (pág. 73), del siguiente modo:

He aquí otra vez la gráfica de Yolanda, pero esta vez con más precisión. Además se ha indicado la distancia y el tiempo en los ejes.



Usa la gráfica para contestar a las siguientes preguntas.

Hazlo primero tú solo. Es decir, cada uno por sí mismo. Si todos habéis terminado, podéis comentar las respuestas.

3. *¿Cuántos km había recorrido Yolanda a las 7,45?*

   Uno de los puntos de la gráfica está más señalado. ¿Qué significa ese punto? ¿Cuántos minutos tardó Yolanda en la primera mitad del trayecto? ¿Cuántos km pedaleó entre las ocho menos cuarto y las ocho?

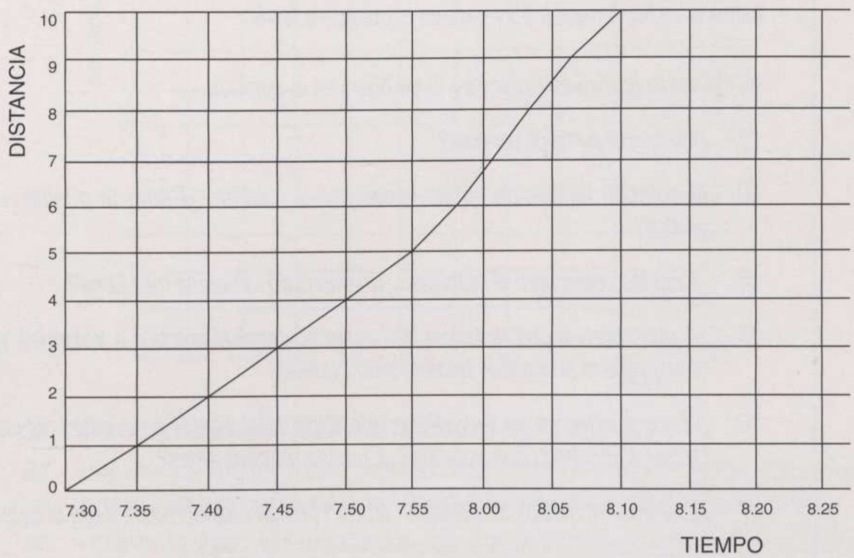
4. *¿Cómo se puede saber que Yolanda ha ido a la misma velocidad en los primeros 20 minutos (de 7.30 a 7.50)?*

5. *Si Yolanda hubiera seguido con la misma velocidad, ¿habría llegado a tiempo al colegio? ¿Cuántos minutos de adelanto o atraso?*

   ¿Cómo habéis encontrado las respuestas?

6. *¿Entre qué horas —aproximadamente— fue mayor la velocidad de Yolanda?*
   ¿Cómo lo podéis saber?
   Intentad calcular a qué velocidad pedaleaba Yolanda en esos momentos.

De nuevo la gráfica de Yolanda.



7. *Sandra sale al mismo tiempo que Yolanda de Losser. Después de 20 minutos va exactamente un kilómetro detrás de Yolanda y llega cinco minutos después que ella al colegio.*

   ¿Cómo podéis estar seguros de que Sandra no siempre ha pedaleado a la misma velocidad?

   Dibuja la gráfica de Sandra en la misma cuadrícula.

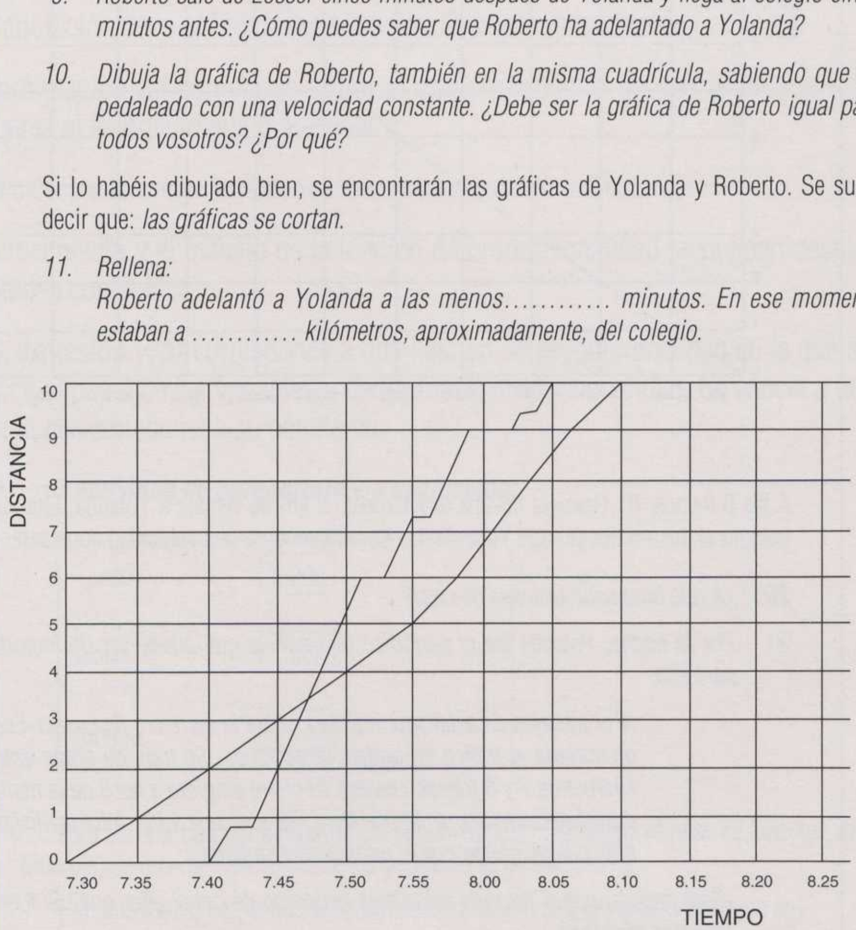
8. *Todos habéis dibujado una gráfica de Sandra. ¿Son todas iguales? ¿Debe ser así? ¿Qué debe ser igual en todas las gráficas?*

9. *Roberto sale de Losser cinco minutos después de Yolanda y llega al colegio cinco minutos antes. ¿Cómo puedes saber que Roberto ha adelantado a Yolanda?*

10. *Dibuja la gráfica de Roberto, también en la misma cuadrícula, sabiendo que ha pedaleado con una velocidad constante. ¿Debe ser la gráfica de Roberto igual para todos vosotros? ¿Por qué?*

Si lo habéis dibujado bien, se encontrarán las gráficas de Yolanda y Roberto. Se suele decir que: *las gráficas se cortan.*

11. *Rellena:*
    Roberto adelantó a Yolanda a las menos............ minutos. En ese momento estaban a .... kilómetros, aproximadamente, del colegio.



Alicia va al colegio en autobús. El médico le ha prohibido ir en bici. Siempre coge el autobús de las 8 menos 25 y para en el colegio a las 8.

Arriba ves la gráfica de Yolanda y la de Alicia en el autobús.

12. *¿Iba hoy el autobús puntual?*

13. *El autobús ha parado varias veces por el camino. ¿Cómo lo puedes ver en la gráfica?*

14. *¿Cuántas veces paró el autobús? ¿Cuánto duró la parada más larga?*

15. *¿A qué hora y a qué distancia de Losser adelantó el autobús a Yolanda? Y, ¿cómo habría sido si el autobús hubiera sido puntual?*

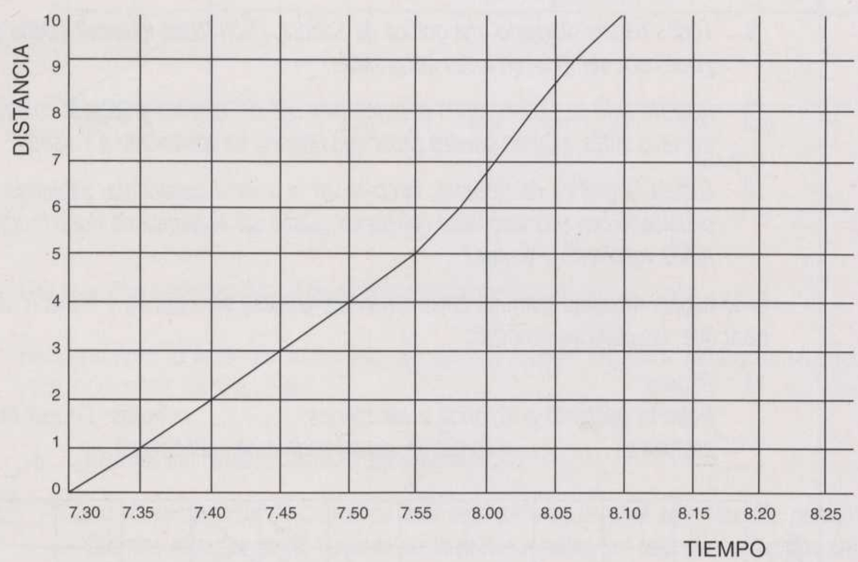
16. *¿Cómo puedes ver en las gráficas que Alicia estaba antes en la mitad del camino de Losser a Enschede que Yolanda? ¿Cuántos minutos antes?*

17. *¿Cuántos kilómetros le quedaban aún a Yolanda cuando Alicia llegó al cole?*

18. *¿A qué hora —aproximadamente— fue cuando Alicia llevaba mayor ventaja?*

19. *Explica la razón de por qué ha tenido que haber un momento en el cual la ventaja de Alicia era exactamente de un kilómetro.*

Otra vez la gráfica de Yolanda.



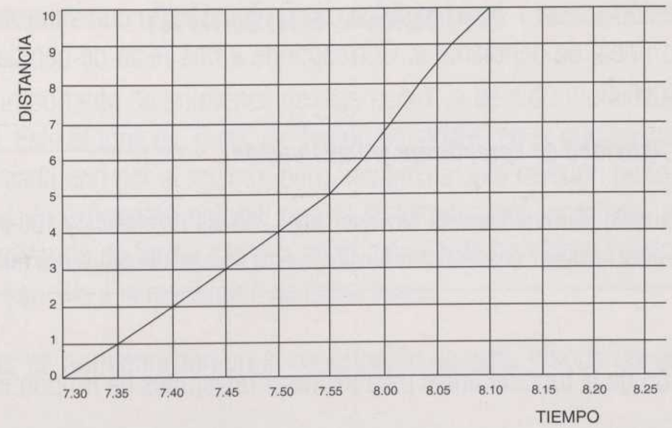
A las 8 menos 10, Graciela llevaba exactamente 2 km de ventaja a Yolanda. Ella llegó al colegio al mismo tiempo que Yolanda. Ha llevado siempre una velocidad constante.

20. *¿A qué hora salió Graciela de casa?*

21. *Por la noche, Yolanda lee el periódico una noticia que puede ser de importancia para ella:*

> *"Por trabajos de asfaltado, mañana estará la carretera de Losser-Enschede cortada al tráfico en ambas direcciones. Se trata de obras entre los kilómetros 7 y 8 (desde Losser). El cierre empieza a las 8 de la mañana y durará aproximadamente una hora. Se aconseja a los automovilistas y al tráfico lento contar con el retraso consiguiente."*

¿Será necesario que Yolanda salga más temprano de casa? ¿Por qué? Si fuera así, ¿cuántos minutos?



22. *Calcula con qué velocidad media ha ido Yolanda de casa al cole.*
23. *Imagínate que Yolanda hubiera pedaleado todo el camino con esa velocidad media. ¿Qué aspecto tendría su gráfica entonces? Dibuja esa gráfica en la cuadrícula de esta página.*
24. *«Catalina ha dejado aquí su gabardina», dijo una día la madre de Yolanda. «¿Se la quieres acercar mañana en en momento? Pero tiene que ser antes de las 7.35, porque después se va a trabajar.» Catalina vive en la carretera de Losser a Enschede, a 3 km. de Losser. «De acuerdo —dice Yolanda—, pero entonces tengo que salir antes. ¿Me despiertas a tiempo?» ¿Cuántos minutos antes que de costumbre tiene que salir de casa? Describe con precisión cómo habéis encontrado la respuesta.*

Tomada del libro *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*, de OW y OC (antiguo IOWO). Traducido y adaptado por el grupo GAUSS, publicado por el IUCE de la Universidad de Salamanca.

P— Elaboración de la gráfica de una función dada por un enunciado.

P— Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.

A— Afición a interpretar fenómenos descritos mediante gráficas.

El conocimiento y el manejo de la función de proporcionalidad se pueden desglosar en los siguientes contenidos.

C— La expresión *y=ax* corresponde a una función de proporcionalidad en la que se reconoce el papel de las variables y del factor de proporcionalidad. Se asocia a una recta en la que se reconoce su pendiente.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

peso	2,200
coste	308
precio	140

Esto es una báscula digital de un supermercado, marcando el peso (2,200 kg), el coste (308 pts) de una mercancía (azúcar) cuyo precio es de 140 pts/kg.

Pon una función en la que se relacione el coste (en pts) al variar el peso (en kg).

C— La expresión $y = ax + b$ se reconoce como una función con valor inicial b y con crecimiento lineal de pendiente a. Corresponde a una recta de pendiente a y ordenada en el origen b.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Para alquilar una bicicleta hay que pagar 200 pts de entrada y 100 pts por cada hora. Representa mediante una gráfica la función que da el coste del alquiler en función del tiempo.

P— Utilización de la función lineal para expresar relaciones de proporcionalidad.

P— Obtención inmediata de la ecuación de una recta representada sobre papel cuadriculado.

P— Representación inmediata de una recta dada mediante su ecuación $y = ax + b$.

Metodología

En lo correspondiente a la construcción de gráficas a partir de enunciados e interpretación de funciones dadas por su gráfica, la metodología sugerida es similar a la que señalábamos en la Unidad 10 de primer curso.

El estudio de la función lineal propicia un reencuentro con todas las situaciones de proporcionalidad que el alumno ha trabajado en temas anteriores y que ahora podrá interpretar, valiéndose del lenguaje de las funciones, y visualizar mediante gráficas, sobre las que se aprecia el papel del factor de proporcionalidad o de la razón de semejanza.

Con el uso del papel cuadriculado se trata de conseguir que el alumno adquiera una idea clarísima de lo que significa la pendiente de una recta y que la obtenga a partir de funciones dadas mediante su representación.

Material didáctico

Ninguno en especial.

La parte más importante de aritmética de este curso ya ha sido incluida en el bloque de proporcionalidad. Este bloque es, pues, un "cajón de sastre" en el que se incluyen contenidos, importantes cada uno por sí mismo, pero inconexos: una revisión de lo que el alumno sabe de potencias de exponente natural, con la sistematización oportuna, y un avance de las raíces, profundizando de forma expresa en el manejo de las raíces cuadrada y cúbica, y una introducción sencilla a la resolución de ecuaciones.

Los **objetivos** se pormenorizan en la descripción de cada una de las unidades didácticas.

Contenidos

Se desarrollarán a lo largo de las siguientes unidades didácticas:

Unidad 7: Potencias y raíces. Se revisan las potencias de exponente natural, se sistematiza su uso, y se estudian las raíces cuadradas y cúbicas.

Unidad 8: Resolución de ecuaciones por aproximaciones sucesivas. Sin entrar en el aprendizaje de procedimientos específicos para resolver ecuaciones de 1.er o 2.° grado, con el simple concurso de su sentido común, de su conocimiento de las operaciones aritméticas y de una calculadora, se lleva al alumno a resolver, de forma exacta o aproximada, ecuaciones de diversa complejidad.

Unidad 7: Potencias y raíces

Tiempo: Dos semanas.

En esta Unidad se avanza en el manejo de las potencias y raíces como instrumentos de expresión y cálculo. También se practican el uso del lenguaje simbólico (algebraico) y la simplificación de expresiones, tanto aritméticas como algebraicas.

El proceso de aprendizaje de las propiedades y algoritmos de las potencias y raíces seguirá los siguientes pasos:

- *Primer paso:*

Resolución de situaciones mediante el uso de los conocimientos previos, relativos a la operativa con números.

Ejemplo: $a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$

- *Segundo paso:*

Observación de regularidades. Elaboración, comprobación y, en su caso, demostración de conjeturas.

Ejemplo: ¿Se suman los índices?

• *Tercer paso:*

Enunciado de leyes. Generalización de algoritmos.

Ejemplo: "Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes."

El cálculo rápido, aplicando la propiedad, debe llegar mediante la reiteración de los dos primeros pasos. No importa si, en un determinado momento, se olvida la regla; habiendo afianzado el proceso anterior, se redescubrirá sin dificultad.

Conocimientos previos

— Operaciones (producto y cociente) de números naturales, decimales y fraccionarios.

— Aproximaciones y estimaciones en los cálculos con números.

Objetivos

— Adquirir las destrezas básicas en el cálculo con potencias:

- Potencias de números mayores y menores que uno. Potencias de diez.
- Producto y cociente de potencias de la misma base.
- Potencia de una potencia.

— Consolidar el concepto de raíz (de distintos índices).

— Calcular raíces por aproximaciones sucesivas a las unidades, a las décimas, a las centésimas...

— Conocer la relación entre el concepto de potencia y el de raíz.

Contenidos

C— Potencias de exponente natural. Significado. Convenciones: notación y nomenclatura.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula:

- Ocho a la dos.
- Dos a la octava.
- Cien al cuadrado.
- Siete al cubo.

b) • ¿Qué número elevado a la quinta potencia da 243?

• ¿A qué potencia hay que elevar 5 para obtener un número mayor de 1.000?

c) Calcula el valor de una potencia de base cuatro y exponente tres.

P— Uso de las potencias.

- Expresión de productos reiterados de factores iguales.
- Asociación espontánea de potencias a las situaciones adecuadas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Expresa en forma de potencia: 8 x 8 x 8 x 8 x 8 x 8.

Expresa en forma de producto: a^4.

b) Cierta célula se reproduce por bipartición, dando lugar a dos células hijas idénticas que a su vez se vuelven a reproducir de la misma manera.

¿Cuántas unidades celulares tendrá la colonia cuando el proceso se haya repetido *n* veces?

P— Indagación de regularidades y leyes de comportamiento en el cálculo con potencias.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

Pueden proponerse indagaciones sobre: potencias de números mayores y menores que uno, potencias de diez, productos y cocientes de potencias, potencias de potencias, potencia de una fracción, ¿qué sentido podría atribuirse a a^0?

a) Calcula $(0,1)^2$; $(0,1)^3$; $(0,1)^4$

Calcula $(1/10)^2$; $(1/10)^3$; $(1/10)^4$

Escribe de tres formas diferentes: una millonésima

b) Observa...

$a^4 \cdot a^3 = a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}a \cdot a{\cdot}a{\cdot}a = a^7$

Y calcula:

$a^2 \cdot a^3$; $a^6 \cdot a^4$; $a^5 \cdot a$

¿Podrías dar, sin cálculos intermedios, el resultado de $a^5 \cdot a^3$? Compruébalo.

¿Cuál es el resultado de multiplicar dos potencias de la misma base?

c) Calcula $(3/4)^3$ $(1/2)^5$ $(2/5)^2$

¿Cómo se eleva una fracción a una potencia?

P— Cálculo rápido de potencias. Automatización de las reglas para el cálculo y simplificación de expresiones:

- Producto y cociente de potencias de la misma base.
- Potencia de una potencia.
- Potencia de una fracción.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula $8^6 : 8^4$

b) Simplifica: $\dfrac{a^3 \cdot a^5}{a^6}$

C— Raíces. Significado. Convenciones: nomenclatura y notación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Escribe cómo se leen estas expresiones:

$\sqrt{144} = 12$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[5]{100.000} = 10$

b) Si la raíz cuadrada del número *a* es el número *b*, ¿qué hay que hacer a *b* para obtener *a*?

P— Cálculo mental y aproximado en el entorno de las raíces.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula: $\sqrt{400}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[4]{81}$

b) Entre qué números enteros está comprendida la raíz cuadrada de 30?

P— Identificación de relaciones entre potencias y raíces.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Traduce a potencia las siguientes expresiones:

$\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[3]{1.331} = 11$

b) Calcula:

$(\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $\sqrt{5^2}$ $\qquad$ $(\sqrt[3]{2})^6$

c) Comprueba que la raíz de una fracción es igual a la raíz del numerador partido por la del denominador.

P— Cálculo, por aproximaciones sucesivas, de raíces.

(Estas actividades se realizarán tanteando con el producto. Puede utilizarse para ello la calculadora de cuatro operaciones, sin usar la tecla de la raíz cuadrada.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Aproxima hasta las centésimas, por tanteo, las raíces cuadradas de dos, de tres y de cinco.

b) Calcula, por tanteo, la raíz cúbica de 5, con una cifra decimal.

P— Uso de la calculadora de cuatro operaciones para calcular potencias y aproximar raíces. (Uso del factor constante.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué potencia obtienes si pulsas, en tu calculadora las teclas:

3 x = = = =

b) Calcula, pulsando el mínimo número de teclas, $(1,5)^8$

P— Resolución de problemas y ejercicios de aplicación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Un millar son diez centenas, una centena son diez decenas... y una centésima son diez milésimas.

¿Cuántas milésimas hay en un millar?

b) ¿Cuál de estas expresiones refleja el número de cm^2 que hay en un km^2?

10^5 $\qquad$ $(10^2)^5$ $\qquad$ $(10x10)^3$ $\qquad$ 10^6

c) Una población tiene 8 barrios. Un barrio, 8 calles; una calle, 8 manzanas; una manzana, 8 portales que dan acceso a edificios de 8 plantas con 8 viviendas en cada planta.

¿Si cada vivienda está habitada, por término medio, por cuatro personas, ¿cuál el número de habitantes?

d) Una fotocopiadora reduce, como máximo, a los 3/4 del tamaño inicial.

¿Cuál es la máxima reducción que se puede conseguir haciendo tres copias?

e) Reduce al máximo esta expresión:

$$\sqrt{\frac{a^5 \cdot b^2}{a^3 \cdot (b^2)^3}}$$

Actividades complementarias

- Cuentan que Fernán González, Conde de Castilla al servicio del Rey de León, pidió a su señor, como pago por sus servicios, tantos granos de trigo como se obtuvieran colocando un grano en el primer cuadro del tablero de ajedrez, dos en el segundo, cuatro en el tercero, etc., doblando el número de cuadro en cuadro hasta llegar al último del tablero.

  Expresa con una potencia los granos correspondientes al último cuadro.

  ¿Crees que el rey pudo pagar?

  Cuentan que el rey, en un principio, accedió, y después, al comprobar la imposibilidad de pagar su deuda, tuvo que dar la independencia a Castilla.

- Calcula 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, ... etc.

  ¿Crees que hay alguna potencia de 7 que termine en la cifra 5?

  ¿En qué cifra termina 7^8?

  ¿En qué cifra termina 7^{369}?

- María y Pedro meten cada uno 500.000 pts en el banco al 12% durante 4 años.

  A María le dan al final de cada año sus intereses.

  A Pedro, por el contrario, le multiplican al final de cada año su capital por 1,12.

  ¿Qué intereses ha conseguido cada uno en los cuatro años?

  ¿Por qué María ha conseguido menos intereses?

- Una fotocopiadora reduce, como máximo, al 60% del tamaño inicial.

  ¿Cuál es la máxima reducción que se puede conseguir con cuatro fotocopias?

- Si una célula se reproduce por bipartición cada veinte minutos, ¿cuánto tiempo tarda una colonia inicial de 5 células en superar los mil individuos?

Unidad 8: Resolución de ecuaciones por aproximaciones sucesivas

Tiempo: Dos semanas.

En esta Unidad, la primera dedicada al estudio de las ecuaciones, se pretende que los alumnos y alumnas experimenten un primer contacto con casos sencillos, afrontándolos desde los conocimientos que ya poseen sobre los números y las operaciones, para que desarrollen recursos y estrategias propias de resolución.

Así que el objetivo no es que adquieran toda la cadena de técnicas habituales para despejar la incógnita en una ecuación de primer o segundo grado, sino que averigüen el valor de la **x**, apoyándose en el significado de las operaciones (cuando sea posible) o tanteando y razonando la evolución de su tanteo, hasta que, por ensayo-error, lleguen a una solución tan aproximada como se desee. Por eso deberán proponerse ejercicios en los que se aprecie con facilidad una cierta monotonía en la variación del valor de los términos, cuando varía la incógnita.

Será necesario, por consiguiente, disponer de una buena colección secuenciada de ecuaciones destinadas a este fin.

Otro objetivo de la Unidad es que los alumnos vayan habituándose a interpretar y a usar el lenguaje algebraico, y descubran su utilidad para la resolución de problemas.

Conocimientos previos

— Operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios.

— Comparación de números. Cálculo estimativo y aproximado.

Objetivos

— Conocer y usar los conceptos: incógnita, expresión algebraica, ecuación, solución.

— Comprobar si un valor es solución de una ecuación.

— Descubrir recursos y estrategias propias para resolver ecuaciones de forma exacta o aproximada.

Contenidos

C— Expresión algebraica, incógnita, ecuación, solución.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula el valor de cada expresión algebraica para el valor indicado en cada caso:

- $2x + 5$ para $x = 3$
- $\dfrac{50}{x^2 - 6}$ para $x = 4$
- $\sqrt{12x + 4}$ para $x = 5$

b) Escribe una ecuación que tenga “z” por incógnita y 4 por solución.

c) Define: solución de una ecuación.

d) ¿Cuál es el valor de la expresión $3x^2 - 3x$ para $x = 5$?
¿Cuál es la solución de la ecuación $3x^2 - 3x = 60$?

P— Comprobación de si un valor es, o no, solución de una ecuación.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Es 15 solución de la ecuación $3x - 8 = 7 + 2x$?

b) ¿Cuáles de estos valores son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$?

$x = 1;\ x = 2;\ x = 3;\ x = 4;\ x = 5$

P— Desarrollo de estrategias propias para la resolución de ecuaciones:

- Despejando la incógnita, en casos muy sencillos en los que la forma de despejar se deriva directamente del significado de las operaciones.
- Por ensayo-error, mejorando razonadamente cada ensayo respecto del precedente.

(Incluimos una colección secuenciada de algunas ecuaciones, como muestra, entendiendo que cualquier propuesta inicial ha de ser modificada sobre la marcha y gestionada en función de las características y logros del grupo de alumnos.)

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

$x + 4 = 7$

$x + 3{,}85 = 9{,}23$

$x - 3 = 20$

$x - 5 = 14{,}43$

$10 - x = 3$

$2/3 + x = 3/5$

$3x = 15$

$3x + 1 = 16$

$2x + 5 = 18$

$3x - 4 = 11$

$8{,}25x - 543{,}15 = 190$

$6x = 24$

$6x = 28$

$2{,}3x = 5{,}21$

$\frac{x}{4} = 5$

$\frac{x}{1{,}2} = 6{,}5$

$\frac{20}{x} = 5$

$\frac{6{,}8}{x} = 4{,}9$

$3x + x = 28$

$25 - 3x = 10$

$30 - 4x = 20$

$x - 7 = 0$

$2x - 7 = x$

$2x - 11 = x$

$x^2 = 25$

$x^2 + 15 = 40$

$x^2 = 20$

$x^2 + 5 = 16$

$x^2 + 3x = 79$

$(x + 5)^2 = 49$

$(x + 5)^2 = 150$

$x^2 + 25 = 10x$

$\frac{x^2}{5} + x = 200$

$\sqrt{x} = 800$

$\sqrt{x} + x = 153$

$x^3 = 27$

$x^3 = 50$

$x^3 + 5 = 50$

$x^3 + 3x = 24$

$x^3 + 2x^2 = 190$

$x^5 = 0{,}00001$

$x^3 = 0{,}027$

$x^3 + 4 = 4{,}027$

$x^4 + 5 = 5{,}0016$

$x^3 = \frac{8}{125}$

P— Traducción a lenguaje algebraico de situaciones, expresiones y relaciones susceptibles de ser cuantificadas numéricamente.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Expresa en lenguaje algebraico:

- El doble de un número x.
- El número entero siguiente a x.
- El anterior a x.
- Dos números consecutivos.
- Tres números consecutivos.
- La suma de dos números consecutivos.
- Una cantidad cinco unidades mayor que el doble de un número x.
- La suma de un número y su cuadrado.
- Un número par.
- Un número impar.
- Dos números pares consecutivos.
- El inverso de un número.
- El doble del cuadrado de un número.
- El cuadrado del doble de un número.
- El 12% de una cantidad x.
- La edad de Juan hace cinco años, siendo x la edad actual.
- La mitad de la edad de Juan, hace cinco años.
- El área de un cuadrado, de base x, cuya altura es doble de la base.

P— Resolución de problemas.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Plantea una ecuación que resuelva cada uno de estos problemas:

- Si al triple de un número le sumas 4 unidades obtienes 19. Calcula el número.
- La suma de tres números consecutivos es 87. Calcula esos números.
- La edad de Juan, dentro de 12 años, será el triple de su edad actual.
  ¿Cuántos años tiene ahora?
- Un rectángulo tiene la base doble que la altura.
  Su superficie es de 72 cm^2.
  Calcula las dimensiones del rectángulo.

Actividades complementarias

- ¿Qué se necesita para que el producto de dos números sea cero?

  Observa esta ecuación y trata de encontrar sus dos soluciones:

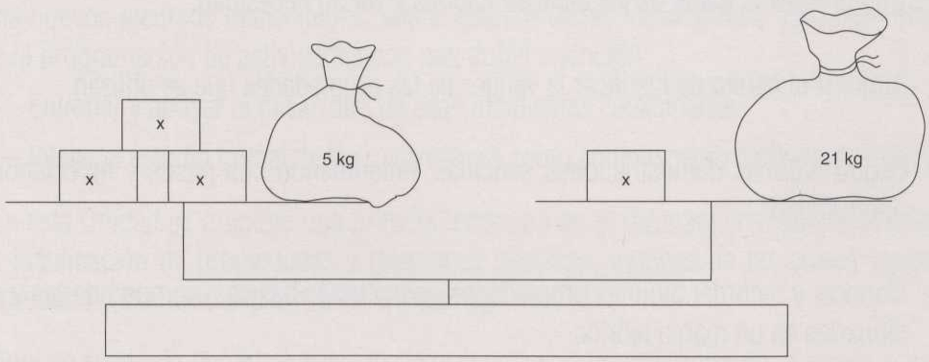
  $(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$

- En un garaje, entre motocicletas y coches, hay 190 ruedas. El número de coches es nueve veces el de motos.

  ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?

- Investiga:
  - ¿Varía la solución de una ecuación si se suma una misma cantidad a cada miembro?
  - ¿Y si se resta a cada miembro la misma cantidad?
  - ¿Y si se multiplica cada miembro por el mismo número?
  - ¿Y si se divide?

- Todas las cajas pesan lo mismo. ¿Pero cuánto?



Geometría

La actividad geométrica ya ocupó una buena parte del primer curso y también de éste con el tratamiento de la semejanza. Se completa ahora, revisando propiedades conocidas que serán abordadas de modo más formal, más deductivo; conociendo una nueva herramienta: el teorema de Pitágoras, y completando el estudio de las figuras espaciales.

Objetivos

— Comprender la estructura de un teorema, distinguiendo las hipótesis de la tesis.

— Reconocer y comprobar la validez de un teorema.

— Comprender el papel de las demostraciones y ver su necesidad.

— Adquirir el hábito de justificar la validez de las propiedades que se utilizan.

— Seguir algunas demostraciones sencillas, entendiendo sus pasos y apreciando su oportunidad.

— Conocer y recordar algunas propiedades geométricas básicas, comprenderlas y relacionarlas en un marco teórico.

— Desarrollar estrategias para la obtención indirecta de medidas utilizando fórmulas (Teorema de Pitágoras, áreas, volúmenes) o cualesquiera otros recursos.

— Ser consciente de que se comete error en las medidas, tanto cuando se llega a ellas de forma directa como indirecta.

Contenidos

Se desarrollan a lo largo de las siguientes unidades didácticas:

Unidad 9: Iniciación al razonamiento matemático a través de la demostración de propiedades geométricas. Se hace una primera incursión en actividades de razonamiento formal.

Unidad 10: Teorema de Pitágoras. Se traba conocimiento con el teorema y se extraen consecuencias prácticas para obtener un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

Unidad 11: Figuras espaciales. Áreas y volúmenes. Se construyen a partir de su desarrollo los cuerpos geométricos más familiares, se obtienen sus áreas y volúmenes y se analizan sus propiedades.

Unidad 9: INICIACIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

Tiempo: Dos semanas.

Hasta ahora los alumnos y alumnas han aprendido geometría con el apoyo de la observación, la manipulación y la representación, analizando las formas geométricas y midiendo y relacionando sus elementos.

El estudio de las propiedades geométricas ha sido puramente experimental (descubrimiento o comprobación), ya sea sobre modelos materiales o sobre representaciones planas.

Ahora, a los trece-catorce años, la reciente aparición de la capacidad de abstracción aporta nuevos recursos intelectuales para el estudio de las matemáticas. Esto hace aconsejable la programación de actividades con una doble intención:

— Entrenar y apoyar el desarrollo de esas incipientes capacidades.

— Iniciar el estudio formal de las matemáticas como complemento de la visión intuitiva.

En esta Unidad se propone una primera incursión en el razonamiento abstracto mediante la justificación de propiedades y relaciones sencillas, muchas de las cuales ya se han comprobado y asumido experimental e intuitivamente.

Aquí se pretende que el alumno realice un esfuerzo en el terreno de la lógica para que vaya dando sus primeros pasos en la demostración y en la construcción de la teoría matemática.

De cara a esos objetivos se propondrán actividades de estos tipos:

— Demostración de propiedades conocidas.

— Búsqueda del lugar geométrico que cumple unas condiciones dadas:

1. Dibujar varios puntos que cumplan cierta condición.
2. Dibujar la línea (como conjetura, a la vista de los puntos).
3. Demostrar que, efectivamente, esa línea responde al lugar geométrico demandado.

— Búsqueda de las condiciones que debe cumplir un punto para pertenecer a un lugar geométrico dado (definición y justificación).

Las demostraciones se apoyarán en conceptos y principios geométricos de fácil reconocimiento y justificación, como la igualdad de ángulos opuestos por el vértice, o de los formados por líneas paralelas, o los criterios de igualdad de triángulos (justificables por el hecho de que el triángulo es figura rígida y puede quedar definido por tres de sus elementos).

En la sistematización final podrían subrayarse a los alumnos, para ser recordados, tanto los principios y criterios básicos descubiertos y utilizados como los lugares geométricos trabajados, o al menos los más importantes (de modo que, en adelante, la bisectriz de un ángulo sea tanto la recta que lo divide en dos partes iguales como el conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo).

Conocimientos previos

— Punto, segmento, recta, plano, ángulo.

— Relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

— Mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo.

— Igualdad de segmentos y ángulos.

— Distancia de un punto a una recta.

— Figuras planas (polígonos, circunferencias, círculos...), sus elementos (lados, ángulos, diagonales...) y algunas de sus relaciones (suma de los ángulos de un triángulo, ángulo central de un polígono regular en función del número de lados...).

— Figuras espaciales (prisma, cilindro, esfera...).

Objetivos

— Iniciar a los alumnos en el razonamiento abstracto: demostrar propiedades sencillas y razonar soluciones o resultados apoyándose en conceptos y principios básicos de fácil reconocimiento y justificación.

— Diferenciar entre demostración y comprobación.

— Reconocer el conjunto de puntos que cumplen unas determinadas condiciones.

— Definir formas y figuras por sus propiedades características.

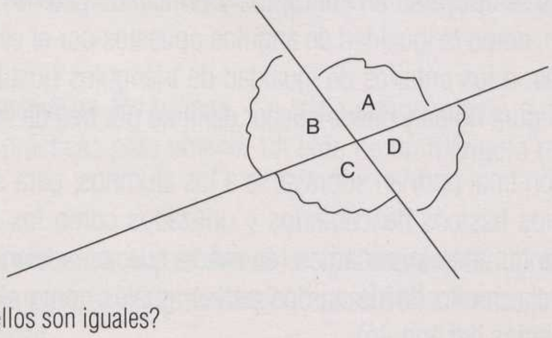
Contenidos

C—
- Ángulos de lados paralelos. Relaciones de igualdad.
- Ángulos determinados por una recta que corta a un sistema de rectas paralelas: alternos internos, alternos externos, correspondientes y opuestos por el vértice. Relaciones de igualdad.

P— Construcción e identificación de ángulos de lados paralelos. Reconocimiento de sus relaciones de igualdad.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Estos cuatro ángulos tienen sus lados paralelos:

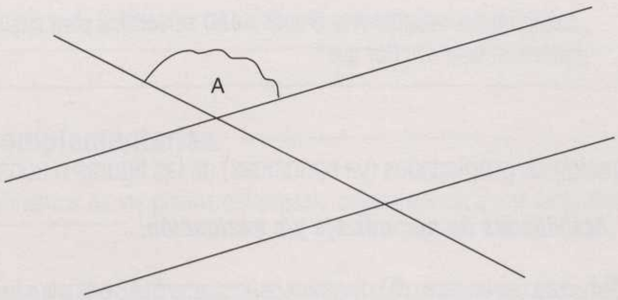


¿Cuáles de ellos son iguales?

P— Identificación de las relaciones de igualdad entre los ángulos determinados por una recta que corta a un sistema de paralelas y utilización del vocabulario adecuado para expresar dichos ángulos.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Observa esta figura.



- Colorea de rojo un par de alternos internos y de azul un par de alternos externos.
- Escribe el conjunto de todos los ángulos iguales al ángulo A.

C— Criterios de igualdad de triángulos.

P— Reconocimiento de los casos de igualdad de triángulos. Identificación de los elementos necesarios para definir un triángulo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué puedes decir de dos triángulos que tengan, ambos, dos lados de 7 cm y 9 cm y el ángulo comprendido de 30°?

b) Dibuja todos los triángulos que cumplan estas condiciones:

A = 5 cm B = 40° C = 90°

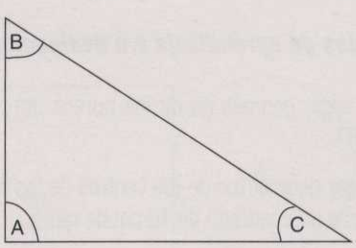
P— Memorización de los criterios de igualdad de triángulos.

P— Diferenciación entre comprobación y demostración matemática.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

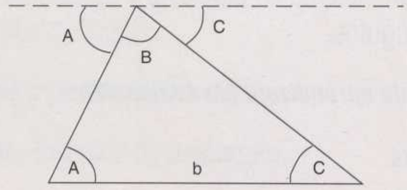
La suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados.

- Mide y suma los ángulos de este triángulo.



¿Puedes afirmar, como consecuencia de esta experiencia, que obtendrías el mismo resultado para cualquier triángulo?

- Observa esta figura.



¿Crees que la relación A + B + C = 180 se verifica para cualquier triángulo, siendo *r* paralela al lado *b*? ¿Por qué?

P— Demostración de propiedades (ya conocidas) de las figuras o construcciones geométricas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Demuestra que un punto de la mediatriz de un segmento AB está a la misma distancia de A que de B.

b) Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio (o que dividen al paralelogramo en cuatro triángulos iguales dos a dos).

C— Lugar geométrico.

P— Representación del conjunto de puntos que cumplen unas determinadas condiciones.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Dados dos puntos A y B:

- Dibuja un punto que esté a la misma distancia de A que de B.
- Dibuja otros cuatro puntos que cumplan la misma condición.
- ¿Cuál es el conjunto de puntos que cumplen la condición de estar a la misma distancia de A que de B? Justifica tu respuesta.

b) Dibuja varias circunferencias, de 2 cm de radio, tangentes interiores a un cuadrado de 10 cm de lado.

- Señala en rojo sus centros.
- Dibuja la figura que forman los centros de todas las circunferencias que cumplen las condiciones de arriba.
- Justifica la solución encontrada.

P— Identificación de "lugar geométrico" con "conjunto de puntos que cumplen cierta condición".

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a A coincide con su distancia a B?

b) Dibuja el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, de 2 cm de radio, tangentes interiores a un cuadrado de 10 cm de radio.

c) Dibuja el lugar geométrico de los puntos que están a 3 cm del punto O.

d) Dibuja el lugar geométrico de los puntos que están a 3 cm de la recta *r*.

P— Identificación de las propiedades características de un conjunto de puntos.

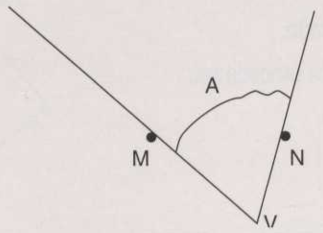
Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Completa:

- La circunferencia es el conjunto de puntos que…
- La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que…
- Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo cumplen la condición de…

Actividades complementarias

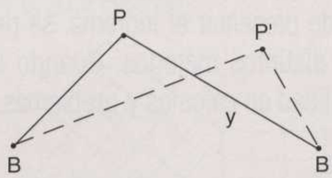
- ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia a una recta dada (r) es menor o igual de 3 cm?
- Suponte que apoyas un alambre, doblado según un ángulo (A), sobre dos clavos MN, como indica la figura. Dibuja las distintas posiciones que podría ocupar el vértice (V) del ángulo.



- Clava, sobre un corcho, dos alfileres (A y B) a la distancia de 8 cm.

  Ata en los alfileres cada uno de los extremos de un cordel de 10 cm de largo.

  Apoyando un lápiz sobre el cordel, para que quede tirante, dibuja varios puntos (P) sobre el corcho.



¿Cuánto vale la suma $x + y$ para cualquier punto P?

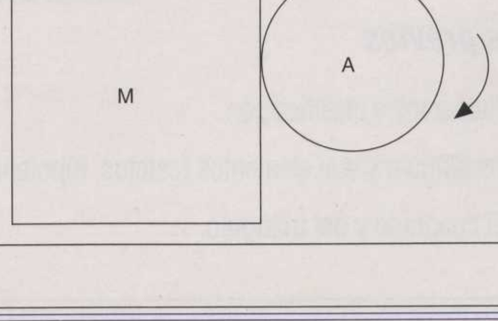
¿Qué línea obtendrías si dibujaras todos los puntos P posibles?

¿Cómo definirías esa línea?

- ¿Cuál es el lugar geométrico de todas las circunferencias, de cualquier radio, interiores a un cuadrado y tangentes al menos a uno de sus lados?
- Piensa que una rueda A gira alrededor de un cuadrado M, apoyándose siempre sobre él.

  Dibuja la línea que recorre su centro.

  ¿Cómo definirías la línea que has dibujado?



Unidad 10: Teorema de Pitágoras

Tiempo: Dos semanas.

El teorema de Pitágoras es un recurso de gran utilidad para la resolución de problemas de geometría, por lo que conviene que se aprenda de forma significativa, se interiorice desde distintos puntos de vista y se establezcan desde él todos los lazos posibles con otros conceptos geométricos.

El teorema de Pitágoras relaciona las áreas de tres cuadrados y como tal ha de plantearse inicialmente, y manejarse después durante el tiempo suficiente, para que los alumnos no pierdan de vista esta relación.

La siguiente anécdota puede reeditarse con alumnos de catorce-quince años en casi cualquier clase:

Problema:

Calcula el área del tercer cuadrado.

Una buena parte de los alumnos procede así:

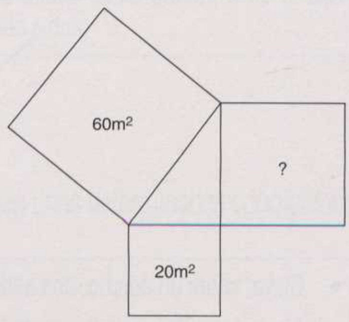
$a = \sqrt{60} = 7,7$

$b = \sqrt{20} = 4,4$

$a^2 = b^2 + c^2$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7,7^2 - 4,4^2} = \sqrt{39,93} = 6,3$

$\text{área} = l^2 = 6 \cdot 3^2 = 39,69\ m^2$)



En esta Unidad, después de presentar el teorema, se propone que los alumnos lo comprueben y experimenten por distintos métodos. Cuando la relación esté asumida, resulte familiar y se utilice con naturalidad en cálculos y problemas se procederá a su demostración.

Así pues, la secuencia será:

- Presentación del teorema como relación entre las áreas de tres cuadrados.
- Comprobación por diferentes métodos: manipulativos, métricos, gráficos, numéricos...
- Enunciado del teorema como relación numérica entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
- Ejercicios y problemas de aplicación.
- Demostración del teorema.
- Problemas de transferencia.

Conocimientos previos

— Triángulos: elementos y clasificación.

— El triángulo rectángulo y sus elementos (catetos, hipotenusa, ángulos...).

— Superficie del cuadrado y del triángulo.

Objetivos

— Interiorizar el teorema de Pitágoras como relación entre las áreas de tres cuadrados y como relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

— Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

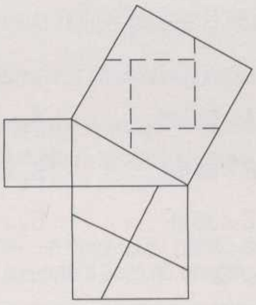
Contenidos

C— El teorema de Pitágoras como relación entre las áreas de tres cuadrados. Enunciado y expresión matemática.

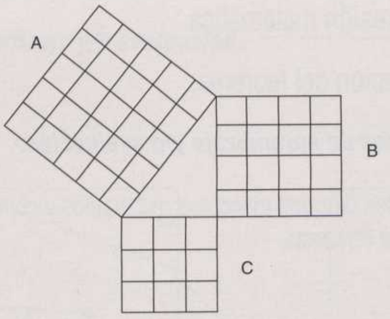
P— Comprobación del teorema.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calca, recorta y comprueba que el cuadrado A se cubre totalmente con las piezas del B y con el C.



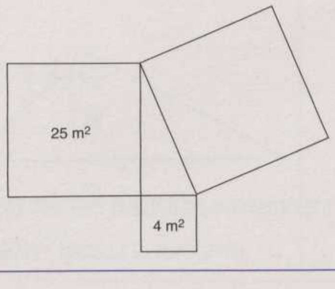
b) Cuál es la superficie de cada cuadrado? Suma las superficies B y C. ¿Qué observas?



P— Aplicación del teorema.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

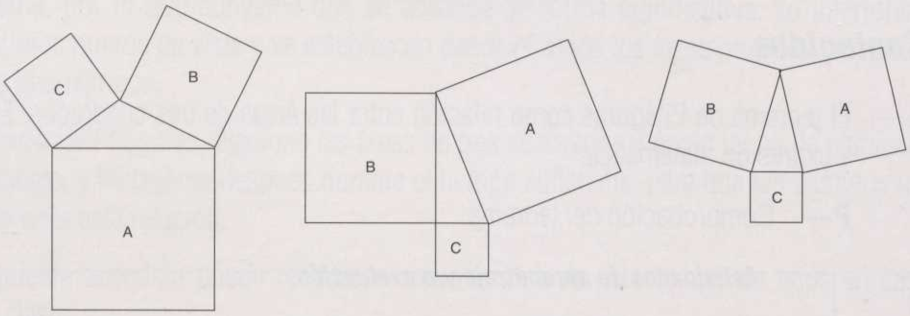
¿Cuál es el área del tercer cuadrado?



P— Descubrimiento de relaciones entre las superficies de los cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Mide los lados y calcula el área de los cuadrados A, B y C en cada caso. ¿Qué observas?



(En el aula las figuras presentadas serán mucho mayores.)

b) Las superficies de los cuadrados construidos sobre los lados de varios triángulos son:

$A = 120\ m^2$	$A_1 = 100\ m^2$	$A_2 = 91\ m^2$
$B = 64\ m^2$	$B_1 = 64\ m^2$	$B_2 = 64\ m^2$
$C = 36\ m^2$	$C_1 = 36\ m^2$	$C_3 = 36\ m^2$

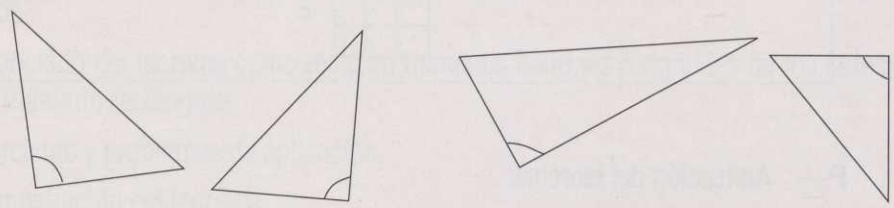
¿Alguno de esos triángulos son rectángulos? ¿Y acutángulos?

C— Teorema de Pitágoras como relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Enunciado y expresión matemática.

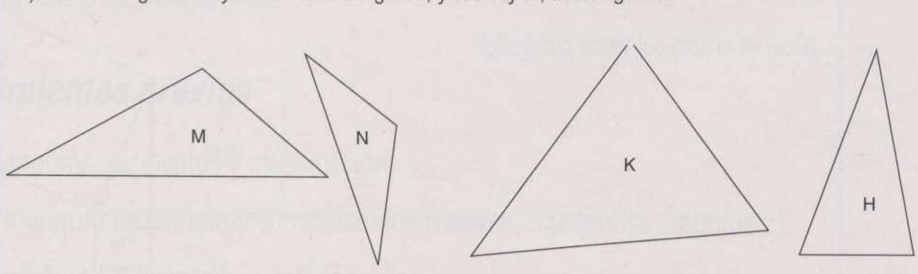
P— Comprobación del teorema.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Mide los lados de estos triángulos rectángulos y comprueba que se cumple en todos ellos el teorema de Pitágoras.



b) Los triángulos M y N son obtusángulos, y los K y H, acutángulos.



Mide sus lados. ¿Se cumple en ellos el teorema de Pitágoras? ¿Qué diferencia observas entre unos y otros?

c) Los siguientes datos corresponden a los lados de varios triángulos:

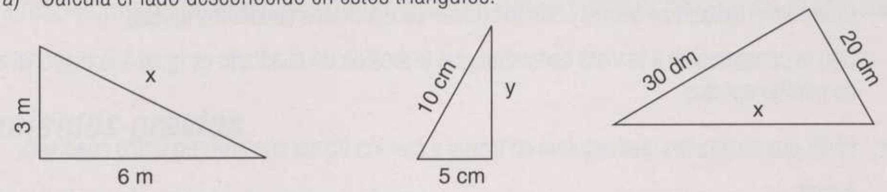
- a = 8 cm b = 5 cm c = 4 cm
- a = 30 m b = 24 m c = 18 m
- a = 15 dm b = 15 dm c = 15 dm

¿Alguno de ellos es rectángulo? ¿Y obtusángulo?

P— Aplicación del teorema.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula el lado desconocido en estos triángulos:



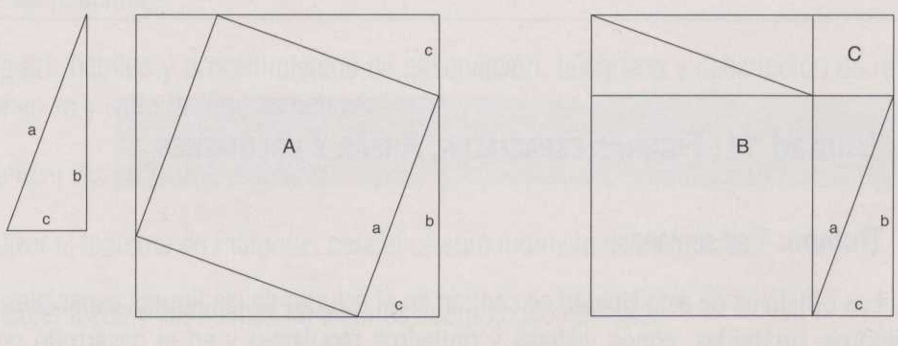
b) Una escalera de 3 m de larga está apoyada en una pared vertical de forma que su pie se encuentra a un metro de distancia de la pared. ¿Qué altura alcanza el punto más alto de la escalera?

c) ¿Cuál es la distancia máxima que se puede recorrer, en línea recta, dentro de un campo de fútbol de 90 m de largo por 52 de ancho?

P— Demostración del teorema de Pitágoras.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Observa estas figuras:



¿Qué relación ves entre la superficie del cuadrado A y las de B y C?

¿Cuál es el lado de A? ¿Y el de B? ¿Y el de C?

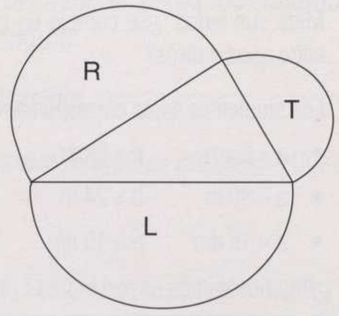
Expresa matemáticamente la relación encontrada.

¿Crees que se puede hacer una construcción similar a ésta con tres cuadrados cualesquiera?

¿Qué relación deben cumplir los lados de los tres cuadrados? Razona tu respuesta.

Actividades complementarias

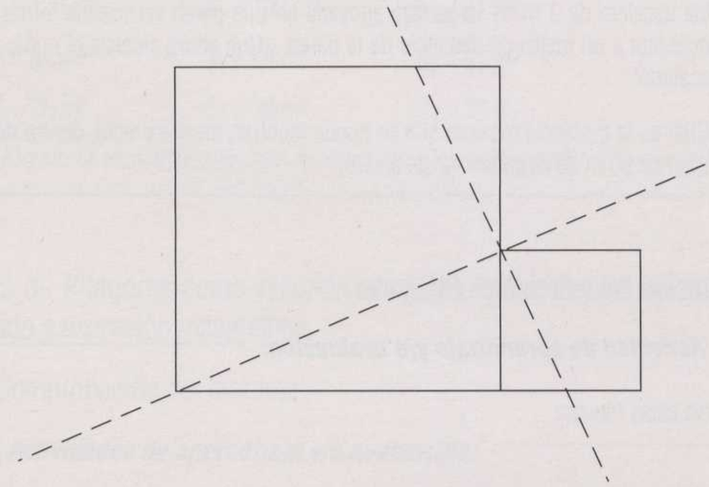
- Investiga: ¿Qué relación hay entre las superficies de los semicírculos L, R y T?



- Calcula el área de:
  - Un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide 10 m y uno de los catetos 4 m.
  - Un triángulo equilátero de lado 5 cm.
  - Un hexágono regular de 5 cm de lado.
- Calcula la longitud de la diagonal de un cubo de 10 cm de arista.
- Cortar un cuadrado en trozos y con los trozos construir dos cuadrados iguales.

  Con la construcción a la vista demostrar que el área de un cuadrado es igual a la diagonal al cuadrado partido por dos.
- Partir dos cuadrados cualesquiera en trozos y con los trozos construir un único cuadrado.

  Ayuda:



Unidad 11: Figuras espaciales. Áreas y volúmenes

Tiempo: Tres semanas.

Los objetivos de esta Unidad se centran en el estudio de las figuras espaciales (prismas, cilindros, pirámides, conos, esferas y poliedros regulares) y en el desarrollo de procedimientos de análisis e investigación de sus elementos y relaciones.

Se propondrán actividades de construcción y manipulación, para lo que se deberá disponer de diversos materiales que faciliten la observación y el estudio experimental (piezas encajables, varillas y nudos, cartulinas, corcho blanco, materiales de modelado...).

Además de las actividades prácticas, se abordarán otras más teóricas de razonamiento o de demostración para apoyar el desarrollo del pensamiento abstracto. (Entendemos que en este terreno se están dando los primeros pasos, y las demostraciones de los alumnos adolecerán todavía de grandes dosis de ingenuidad.)

Para el cálculo de volúmenes se consideran suficientes dos reglas básicas:

- Prismas y cilindros: Sup. base x altura.
- Pirámides y conos: Un tercio de lo anterior.

La primera se trabajó en el curso pasado, aunque será conveniente recordar los procesos seguidos. La segunda se comprobará experimentalmente (mediante trasiego de líquidos o por composición y descomposición de figuras), quedando su demostración para niveles superiores, igual que las fórmulas para calcular la superficie y el volumen de la esfera.

Conviene también que los alumnos tomen conciencia de la utilidad del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas, como método indirecto para el cálculo de longitudes.

Conocimientos previos

— Cálculo de la superficie de figuras planas.

— Uso de las principales unidades de superficie y volumen del Sistema Métrico Decimal.

— Teorema de Pitágoras.

— Volumen del ortoedro.

Objetivos

— Conocer los principales elementos de las figuras espaciales y comprender algunas de sus relaciones.

— Adquirir hábitos y procedimientos de observación, búsqueda y descripción de relaciones en y entre las figuras geométricas.

— Conocer los poliedros regulares.

— Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo indirecto de distancias.

— Calcular áreas y volúmenes de algunos cuerpos geométricos.

Contenidos

C— Las figuras espaciales (cubo, ortoedro, prisma, cilindro, pirámide, cono, esfera).

Elementos básicos de las figuras espaciales: vértice, arista, cara, cara lateral, base, altura, radio...

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Define: cara lateral de un prisma.

b) Si subes hasta el vértice de una pirámide hueca y dejas caer verticalmente una piedra, ¿qué nombre recibe la distancia que recorre la piedra hasta chocar con el suelo?

c) ¿A qué se va pareciendo una pirámide a medida que va aumentando el número de sus caras laterales?

d) Dibuja todas las huellas diferentes que puede dejar una pirámide pentagonal si la apoyas sobre un bloque de plastilina.

C— Poliedros. Los poliedros regulares.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Qué condiciones debe reunir una figura espacial para que se la considere poliedro?

¿Y para que sea regular?

b) Entre una colección de cuerpos geométricos, seleccionar los que sean poliedros regulares.

c) Nombrar todos los poliedros regulares.

C— Planos de simetría y ejes de giro.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Define eje de giro.

b) Busca, dibuja o construye una figura que posea un solo plano de simetría.

c) ¿Qué obtienes si cortas una figura por un plano de simetría?

P— Observación, búsqueda y enunciado de relaciones entre los elementos de las figuras geométricas espaciales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántas aristas se juntan en cada vértice de un prisma?

b) ¿Qué cuerpo rueda por igual en todas direcciones? ¿Cuál rueda solamente en una dirección?

c) Atraviesa un cubo de cartulina con una aguja y un hilo, por el centro de dos caras opuestas.

(Haz algunos nudos para que no se desplace el cubo.)

Con el hilo tirante, ¿cuánto has de girar el cubo para que vuelva a coincidir con la posición inicial? ¿Cuántos giros diferentes puedes hacer para lograr el mismo efecto? ¿Es el hilo un eje de giro?

Atraviesa ahora el hilo por dos vértices opuestos. ¿Qué observas?

d) Completa esta tabla:

	Cubo	Pirámide cuadrada	Pirámide hexagonal	Tetraedro	Prisma pentag.
Caras					
Aristas					
Vértices					

Comprueba que en todas las figuras se verifica la relación: Caras + Vértices = Aristas + 2.

e) Demuestra que sólo se puede construir un poliedro regular cuyas caras sean cuadrados.

P— Descripción y reconocimiento de figuras mediante sus elementos y las relaciones entre los mismos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Conoces alguna figura geométrica encerrada entre dos superficies, una plana y otra curva? Intenta encontrar más de una solución.

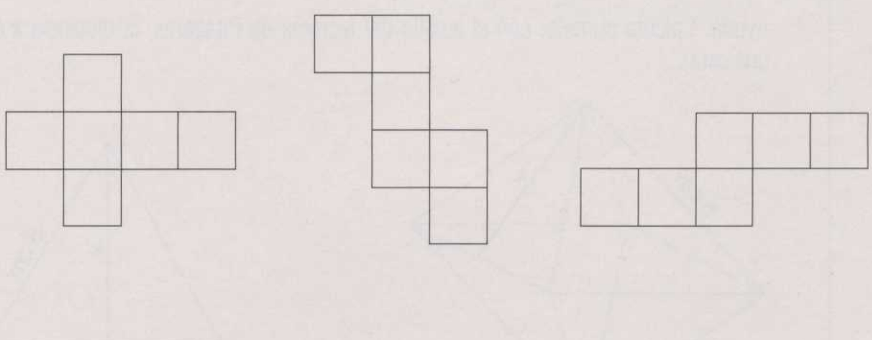
b) Define tetraedro.

c) Juega con tu compañero: Tú dices las características de un cuerpo espacial y él lo dibuja. Luego, al revés.

P— Construcción de cuerpos geométricos mediante la utilización de diferentes técnicas y materiales.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuáles de estos desarrollos corresponden a un cubo?



b) Construye, con palillos y bolitas de plastilina, el esqueleto de un octaedro.

P— Observación y búsqueda de relaciones entre los diferentes cuerpos geométricos.

Actividades de aprendizqje y/o evaluación:

a) Une los puntos medios de las caras de un cubo. ¿Qué obtienes? (Si buscas la forma de construir la figura te resultará más fácil.)

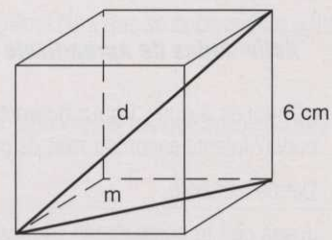
b) ¿En qué puntos toca a un cubo su esfera inscrita? ¿Y su esfera circunscrita?

P— Cálculo de longitudes mediante la utilización del teorema de Pitágoras.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Observa la figura:

- Calcula *m*.
- Calcula *d*.



b) Calcula la altura de un cono, sabiendo que su altura es de 8 cm y el radio de la base 6 m.

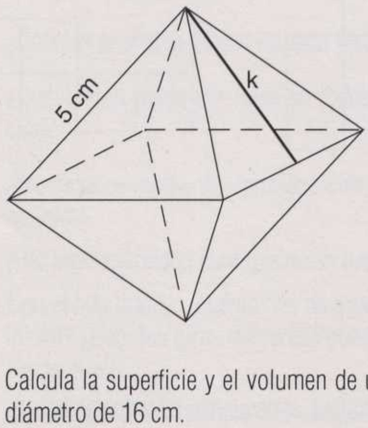
P— Cálculo de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos.

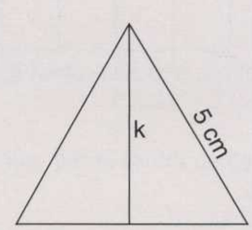
Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcula la superficie de un cubo de 4 cm de arista.

b) Calcula la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.

Ayuda: Calcula primero, con el auxilio del teorema de Pitágoras, la distancia *k* (altura de una cara).





c) Calcula la superficie y el volumen de un cilindro de 25 cm de altura y cuya base tiene un diámetro de 16 cm.

Actividades complementarias

- ¿Cuánto cartón necesitas para construir una caja de 12 cm de ancha por 20 cm de larga y por 8 cm de alta, contando con que se desperdicia en solapas y recortes el 20% de la superficie del cartón?
- El radio de la esfera inscrita en un cubo mide 5 cm.

  Calcula la longitud del radio de la esfera circunscrita.
- ¿Cuántos cubitos de 1 cm x 1 cm x 1 cm necesitas añadir a un cubo de 10 cm de arista para transformarlo en otro mayor de 11 cm de arista?
- Calcula la superficie y el volumen de una moneda de 100 pts.
- Un ciempiés está situado sobre uno de los vértices de un cubo.

  En el vértice opuesto está su comida.

  ¿Cuál es el camino más corto que debe recorrer el ciempiés para alcanzar su alimento? (Describe o dibuja tu solución.)
- ¿Por dónde se ha de cortar un octaedro para obtener dos mitades iguales?

  Cuando tengas la solución, dibuja el desarrollo de cada mitad, para un octaedro de 6 cm de arista, y construye ambas piezas.
- Dispones de 27 cubitos de 1 cm de arista.

  Busca la manera de, pegándolos de tres en tres, construir nueve piezas iguales con las que se pueda formar un cubo de 3 cm de arista.

  ¿Cuántas soluciones encuentras?

  (El alumno dispondrá de 27 cubitos encajables de plástico, o de madera y pegamento.)
- Realización de puzzles espaciales (Ej.: el Soma).

Desarrollo de la Unidad 2 de primer curso

Los cuadriláteros

Unidad 2: Los cuadriláteros

La geometría es un bloque especialmente adecuado para promover actividades de aprendizaje de tipo experimental en las que la manipulación va acompañada de especulación (elaboración de conjeturas), medición, comprobación, demostración, aplicación... Esto la hace muy apta para comenzar el curso y, así, familiarizar a los alumnos con un modelo de aprendizaje activo. Por ello, esta Unidad didáctica, la segunda de Geometría, puede verse a **principios del primer curso**.

Su duración se estima de unas **dos semanas**. Por su significado, estructura y tratamiento forma bloque con las dos siguientes ("Triángulos" y "Polígonos regulares y círculo"). En cada una de ellas se pretende que el alumno repase y sistematice una serie de conocimientos que ya posee (conceptos, nomenclatura, algunas relaciones) y profundice en ellos.

Se intenta recalcar su carácter funcional (para qué sirve, dónde y cómo se utiliza cada conocimiento antiguo y nuevo) proponiendo aplicaciones y estableciendo múltiples relaciones entre los diversos elementos.

Objetivos didácticos

Además de los objetivos amplios señalados para toda la geometría, en esta Unidad didáctica se pretenden los siguientes objetivos:

- Conocer los conceptos básicos para el estudio de los cuadriláteros.
- Establecer relaciones significativas entre los distintos conceptos y procedimientos aprendidos o repasados en esta Unidad.
- Valerse del plegado del papel y de los útiles del dibujo lineal para estudiar o comprobar propiedades de los cuadriláteros.
- Valerse de buenas representaciones gráficas, de descripciones verbales y una mínima nomenclatura para enunciar o señalar propiedades geométricas.
- Mejorar las técnicas de medición con regla graduada y con cinta métrica e ir adquiriendo el hábito de expresar las mediciones en las unidades adecuadas.

Conocimientos previos

— Nombres y características más relevantes de los polígonos y elementos del plano.

— Nombres y características de algunas figuras tridimensionales.

— Relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

— Ángulos: recto, agudo, obtuso, iguales, medida en grados de algunos de ellos (90°, 45°, 180°).

— Alguna familiaridad con el uso de la regla, escuadra y compás.

— Medir con la regla graduada y con cinta métrica.

— Conocimientos mínimos del Sistema Métrico Decimal.

Contenidos

C— Noción de cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Reconocer cada una de estas figuras sabiendo decir por qué son tales.

b) Reconocer cada una de estas figuras en los objetos circundantes.

c) Enunciar o asignar propiedades de alguna de estas figuras.

d) Enunciar o asignar propiedades que caracterizan a alguna de estas figuras.

C— Noción de eje de simetría en una figura.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Trazar (reconocer, identificar) el eje (los ejes) de simetría de una figura dada.

b) Valerse de un espejo para comprobar si una recta es o no eje de simetría de una figura.

C— Comprensión muy clara de por qué el área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

Razonar sobre un rectángulo de dimensiones enteras, *a* y *b*, partiéndolo en cuadrados, que su área es $a \cdot b$ unidades de superficie.

P— Cálculo del área de una figura rectangular, o compuesta por rectángulos, cuyas dimensiones se dan o han de ser obtenidas por el alumno, y expresión del resultado en dimensiones adecuadas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Hallar el área del tablero de una mesa.

b) Calcular cuánto vale embaldosar el suelo de la clase sabiendo que cuesta ... el m^2.

C y **P**— Comprensión de la permanencia del área de una figura mediante fraccionamiento de la misma y recomposición, y aplicación de ésta técnica para calcular áreas.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Calcular el área de un paralelogramo obteniendo el rectángulo equivalente (recortando o dibujando).

b) Lo mismo con otros cuadriláteros.

P— Cálculo del área de figuras mediante partición y recomposición en rectángulos.

P— Utilización del recorte y plegado de papel para hacer figuras, y estudiar propiedades, simetrías, etc.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Mediante plegado y corte, construir un cuadrado a partir de una cuartilla.

b) *Idem* con una cuartilla con los bordes deteriorados.

c) Un cuadrilátero que tiene los lados contiguos iguales dos a dos se llama "deltoide". Construir uno y comprobar que tiene un eje de simetría.

d) Construir un rombo plegando y cortando una hoja de papel y justificar que sus diagonales se cortan en su punto medio.

P— Utilización de los útiles de dibujo (regla, escuadra, compás) para representar figuras.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

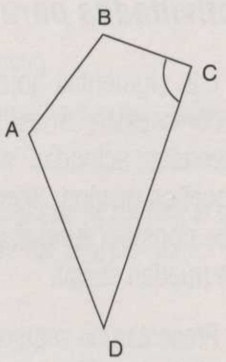
a) Dibujar un rectángulo de dimensiones dadas.

b) Dibujar un rombo dando la longitud de las diagonales (se le puede decir al alumno que recuerde que se cortan en su punto medio).

C— Conocimiento de los nombres de algunos elementos imprescindibles: los vértices se designan con letras mayúsculas, los segmentos mediante sus extremos, los ángulos..., etc.

Actividad de aprendizaje y/o evaluación:

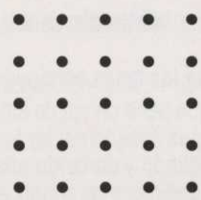
Nombrar el lado y el ángulo señalados. Dibujar una de las diagonales y nombrarla.



P— Resolución de problemas en los que se relacionen los contenidos específicos de esta Unidad con otros (previamente adquiridos o espontáneos), o que vayan "más allá" de lo que al alumno se le ha enseñado.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) ¿Cuántos cuadrados puedes formar que tengan sus vértices en esta cuadrícula? ¿Y rectángulos?



b) Necesitamos saber la longitud de la diagonal de un campo de fútbol cuyas dimensiones conocemos: 104 m y 56 m. Para ello, dibuja uno igual, pero en pequeño: 104 mm, 56 mm, mide su diagonal en mm y dl cuántos metros medirá la diagonal del campo de fútbol.

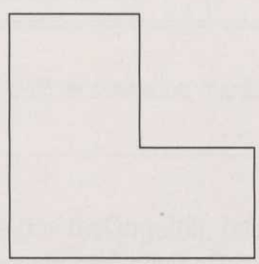
c) Dando cortes en un cubo, obtener distintos tipos de paralelogramos (para ello el alumno debe disponer de un cubo en el cual señalará qué corte produce cada figura).

d) ¿Es posible que un cuadrilátero tenga una diagonal fuera de la figura? Intenta encontrar uno que, además, tenga eje de simetría.

P— Dar definiciones o propiedades, describir procesos, justificar propiedades.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación:

a) Describir esta figura de tal modo que un compañero pueda representarla con sólo leer tu descripción.



b) Explica por qué las diagonales de un rombo son ejes de simetría del mismo.

c) Justifica por qué todos los cuadriláteros tienen dos diagonales.

Actividades para el alumno

Las siguientes hojas están concebidas para que puedan ser entregadas a los alumnos tal como están. Si así fuera, sería conveniente utilizar la metodología para la que han sido diseñadas: actividad individual por parte del alumno, seguida de intercambios de ideas en pequeños grupos, primero, y en toda la clase, después. La tarea del profesor, entendemos, debe consistir fundamentalmente en animar el trabajo de los alumnos y atender las dudas que puedan surgir.

Presentamos seguidamente las hojas para el alumno y, a continuación, añadimos unas frases para el profesor en las que le comentamos el propósito con el que ha sido concebido cada apartado, algunas sugerencias metodológicas y algunas posibles actividades adicionales.

Cuadriláteros

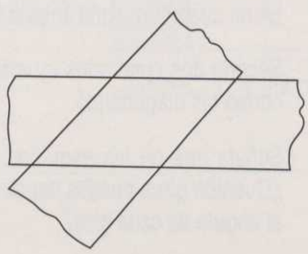
1. Introducción

Posiblemente el rectángulo sea la figura geométrica que más se ve en el mundo civilizado: cuadernos, libros, mesas, ventanas, fachadas de edificios... Con seguridad tú puedes añadir muchas más a esta lista.

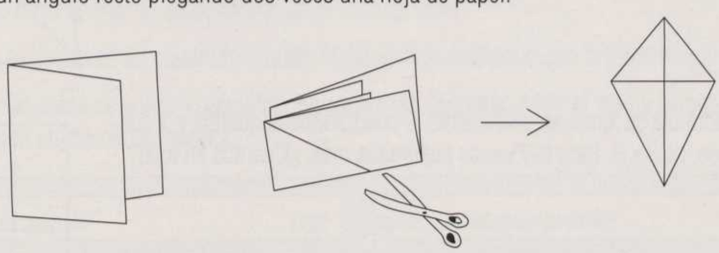
Hay otras muchas figuras con formas de cuadrilátero. Vamos a estudiarlos: sus tipos, las peculiaridades de cada uno...

2. Recuerda haciendo

- *Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados. Los rectángulos son cuadriláteros con los cuatro ángulos rectos.*
  - — Fabrica, con una tira de papel, varios rectángulos.
  - — Dibuja, usando regla y escuadra, un rectángulo cuyos lados midan 5 cm y 3 cm.
- *Los cuadrados son rectángulos con los cuatro lados iguales.*
  - — Haz, con una tira de papel, un cuadrado.
  - — Dibuja, usando regla y escuadra, un cuadrado de 4 cm de lado.
- *Los rombos son cuadriláteros con los cuatro lados iguales.*
  - — Toma una tira de papel. Pártela en dos y coloca una de las mitades cruzando la otra. La parte común de ambas es un rombo. Compruébalo.



  - — Haz un ángulo recto plegando dos veces una hoja de papel.



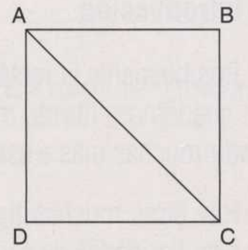
  - — Corta la esquina con unas tijeras y extiende el trozo resultante. Es un rombo.
  - — Dibuja un rombo usando regla y compás. Comprueba con regla y escuadra que cada lado es paralelo al de enfrente.
- *Los cuadrados, rectángulos y rombos son paralelogramos, pues en ellos cada lado es paralelo al de enfrente. Pero hay paralelogramos que no son rectángulos, pues no tienen los ángulos rectos, ni rombos, pues no tienen los cuatro lados iguales. Se les llama romboides.*
  - — Construye un romboide con dos tiras de papel de distinto ancho.
  - — Dibuja un cuadrilátero no paralelogramo.

3. Estudio del cuadrado

- *Regularidades*

Dibuja un cuadrado y nombra sus vértices A, B, C, D, como en la figura adjunta. Comprueba que sus lados son iguales. Exprésalo simbólicamente:

AB = BC = ...



Comprueba que sus ángulos son rectos. Exprésalo simbólicamente:

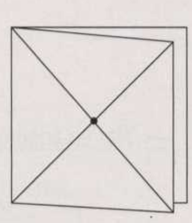
A = B = ...

Una de sus diagonales es AC. Designa la otra.

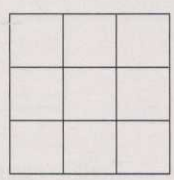
Recorta un cuadrado de papel. Pliégalo por una de sus diagonales. ¿Coinciden las dos mitades? Podemos decir que esa diagonal es un eje de simetría. ¿Y la otra? Hay más ejes de simetría. Averigua cuáles son, dibújalos en el cuadrado y nómbralos con nuevas letras.

Actividades y ejercicios:

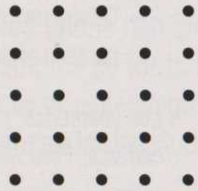
- Con una tira de papel, plegando adecuadamente, **construye** un cuadrado.
- **Define** cuadrado de la forma más exacta que puedas.
- ¿Qué propiedades tienen las dos diagonales de un cuadrado? ¿Qué ángulo forman? ¿Dónde se cortan? **Enuncia** por escrito esas relaciones.
- Con un espejo, vuelve a reconocer todos los ejes de simetría de un cuadrado.
- En un cuadrado, ¿qué ángulo forman las diagonales con los lados?
- Recorta dos cuadrados iguales, sitúalos uno sobre otro y pínchalos por su centro (punto en que se cortan las diagonales).
- Señala una de las esquinas. Haz girar el de encima sobre el de abajo. ¿Cuántos giros puedes dar de modo que vuelvan a coincidir? ¿Cuánto mide el ángulo de cada giro?



- En esta cuadrícula se aprecian, claramente, 9 cuadraditos pequeños y 1 cuadrado grande, de 3 x 3. Pero hay varios cuadrados más. ¿Cuántos en total?

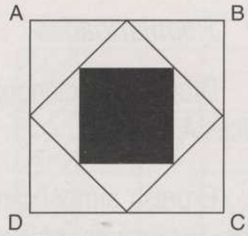


- Si en vez de señalar las líneas sólo indicamos los vértices, además de los 14 que encontraste en el ejercicio anterior, aparecen varios nuevos. ¿Cuántos más?



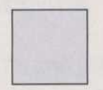
- Con las piezas del TANGRAM, usándolas todas o sólo algunas, se pueden construir varios cuadrados. **Localiza** todos los que puedas y **descríbelos**.

- **Describe** con tanto detalle como sea necesario cómo se obtiene la figura negra, de modo que quien lea tu descripción pueda hacer la figura sin verte.

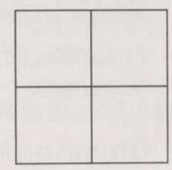


- *Área del cuadrado*

Como sabes, un cuadrado de 1 cm de lado se llama cm^2 (centímetro cuadrado) y se toma como unidad de superficie.

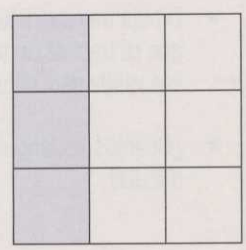


Un cuadrado de 2 cm de lado tiene 4 cm^2. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado de 3 cm de lado?



Es muy fácil saber el área de un cuadrado conociendo su lado, l, pues en cada columna hay l cuadrados de 1 cm^2. Y hay l columnas. Habrá, pues, un total $l \cdot l$ cm^2.

Por tanto, el área del cuadrado es $A = l \cdot l = l^2$



3 veces 3 cm^2 = 9 cm^2

Actividades y ejercicios:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 15 cm de lado?
- Calcula en mm^2 el área de un cuadrado de 27 mm de lado.
- Dibuja en tu cuaderno un cuadrado grande. Halla su área midiendo con la regla lo que necesites.
- Se te dan las áreas de varios cuadrados. En cada caso di cuánto mide el lado y asigna, mediante una flecha, a qué objeto real pertenece:

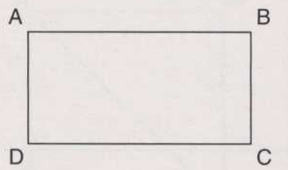
Área del cuadrado	*Lado*	*Objeto real al que pertenece*
16 cm^2		Cada cuadradito de una hoja de papel cuadriculado
225 cm^2		Una casilla de un tablero de ajedrez de mesa
36 mm^2		El solar de una urbanización
100 dam^2		Un azulejo de un cuarto de baño

- Una habitación cuadrada tiene una superficie de 25 m^2. Hemos de embaldosarla con losetas cuadradas de 20 cm de lado (se llaman losetas 20 x 20). ¿Cuántas losetas se necesitan?

4. Estudio del rectángulo

- *Regularidades*

Dibuja un rectángulo que no sea cuadrado. Nombra sus vértices A, B, C, D.



Expresa simbólicamente que sus lados opuestos son iguales. Expresa simbólicamente cómo son sus ángulos. Traza sus diagonales. Nómbralas. Expresa que son iguales.

Actividades y ejercicios:

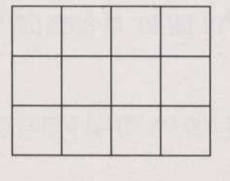
- Recorta un rectángulo como el anterior. Comprueba, mediante pliegues, si sus diagonales son ejes de simetría. Aunque las diagonales no lo sean, los rectángulos no cuadrados tienen algunos ejes de simetría. Localízalos.

  Ayudándote de los dos ejes de simetría, justifica que las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio.

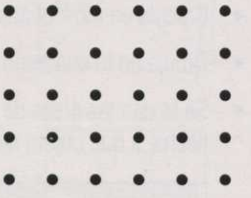
- Dibuja un cuadrilátero con las dos diagonales iguales y que no sea rectángulo.

- Dibuja un cuadrilátero con las dos diagonales iguales que se corten en su punto medio. Comprueba que se trata de un rectángulo. Enuncia una propiedad que caracterice a los rectángulos (es decir, que sea válida para ellos y sólo para ellos).

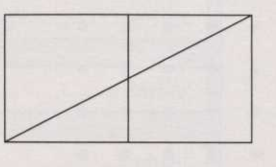
- ¿Cuántos rectángulos no cuadrados encuentras en esta cuadrícula?



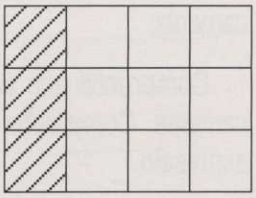
- Además de los anteriores, ¿cuántos rectángulos no cuadrados tienen sus vértices en esta cuadrícula?



- Describe la figura adjunta con tanto detalle como sea necesario para que pueda representarla alguien que sólo la conozca mediante tu descripción.



- *Área del rectángulo*



Las longitudes de los lados de un rectángulo se llaman dimensiones del rectángulo.

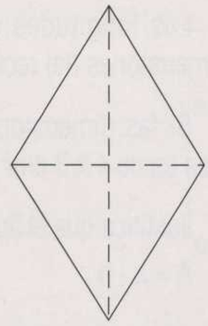
Si las dimensiones de un rectángulo son 4 cm y 3 cm, su área es de 4×3 cm^2 = 12 cm^2.

Justifica que el área de un rectángulo de dimensiones *a* y *b* es $A = a \cdot b$

Actividades y ejercicios:

- ¿Cuál es el área de esta hoja de papel?
- Averigua las dimensiones de un campo de fútbol, del "área grande" y del "área pequeña", y calcula la superficie de cada uno de esos rectángulos (aprovecha la ocasión para enterarte —si no lo sabes— para qué sirven las dos "áreas" —grande y pequeña— antes mencionadas).
- ¿Cuánto costaría poner cristales aislantes ("cristales dobles") a todas las ventanas de tu aula? (Averigua, previamente, cuánto vale 1 m^2 de cristal aislante).

5. Estudio del rombo



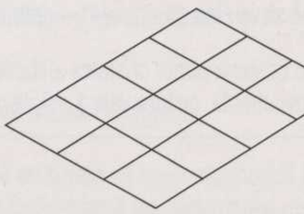
Dibuja un rombo, nombra sus vértices y exprésalo simbólicamente.

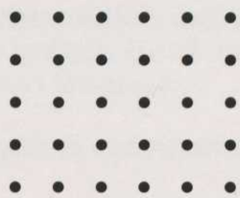
Comprueba que sus lados son iguales y exprésalo simbólicamente. Comprueba que sus ángulos opuestos son iguales y exprésalo.

Nombra sus diagonales. Observa que son perpendiculares y que se cortan en sus puntos medios.

Actividades y ejercicios:

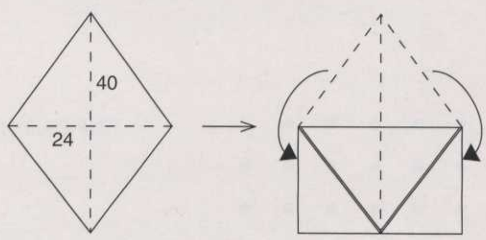
- Construye, recortándolo, un rombo como el anterior. Comprueba que sus diagonales son ejes de simetría. Teniendo en cuenta que las diagonales son ejes de simetría, justifica que son perpendiculares y que se cortan en sus puntos medios.
- ¿Cuántos rombos puedes contar en esta cuadrícula oblicua? Enuméralos según su tamaño.





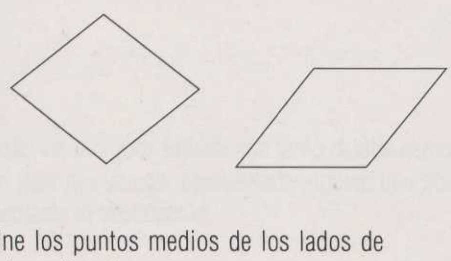
- ¿Cuántos rombos no cuadrados podrían situarse con sus vértices en esta trama?
- Dibuja un cuadrilátero con las dos diagonales perpendiculares, pero que no sea rombo.
- Justifica la validez de este método para calcular el área de un rombo.

  Área del rombo = Área del rectángulo = 20 x 12 = 240 cm^2.



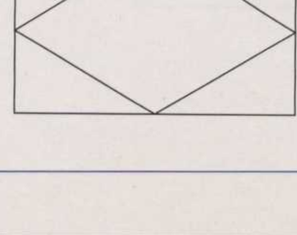
- Siguiendo el método anterior, calcula las áreas de estos rombos.

  Para ello tendrás que medir sus diagonales.



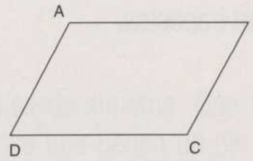
- Une los puntos medios de los lados de este rectángulo.

  Comprueba que se obtiene un rombo. ¿Qué relación hay entre las áreas del rombo y del rectángulo inicial? Averígualo.



6. Estudio de los paralelogramos

Dibuja un paralelogramo como el de la figura y nombra sus vértices A, B, C, D.

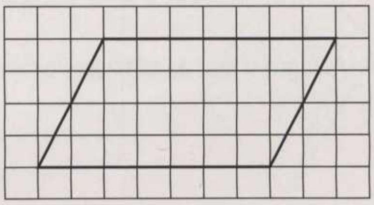


Comprueba que sus lados opuestos son iguales y exprésalo simbólicamente. Haz lo mismo con sus ángulos.

Traza sus diagonales. Nómbralas. Comprueba que se cortan en su punto medio.

Actividades y ejercicios:

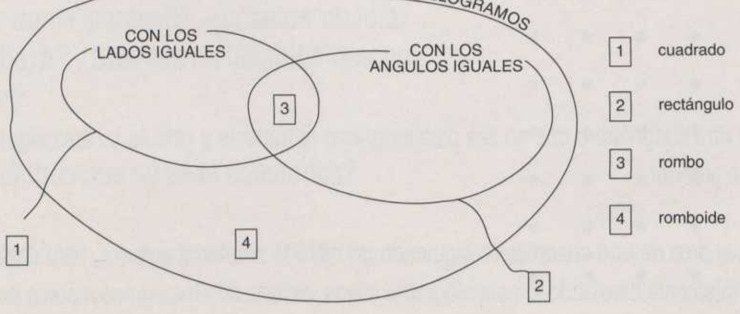
- Los paralelogramos que no son rectángulos ni rombos se llaman romboides. ¿Cómo han de ser las diagonales de un paralelogramo para que sea romboide?
- Con una tira de papel recorta paralelogramos de distintos tipos. Ponles nombres y estudia, en cada uno de ellos, las peculiaridades de sus lados, ángulos y diagonales.
- ¿Calcula el área de este paralelogramo descomponiendo y recomponiendo un rectángulo.



- Traza flechas asociando propiedades que tienen, con seguridad, las figuras de la izquierda.

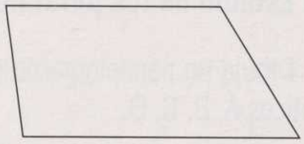
	Cuatro lados iguales
Cuadrado	Cuatro ángulos rectos
Rectángulo (no cuadrado)	Ángulos iguales dos a dos
Rombo (no cuadrado)	Diagonales perpendiculares
Romboide	Diagonales que se cortan en su punto medio
Paralelogramo	Diagonales no perpendiculares
Cuadrilátero	Cuatro ejes de simetría
	Dos ejes de simetría

- En el siguiente diagrama, asocia los nombres de las figuras que debe haber en cada parte.



7. Cuadriláteros no paralelogramos

Los cuadriláteros con sólo dos lados paralelos se llaman trapecios.



Actividades y ejercicios:

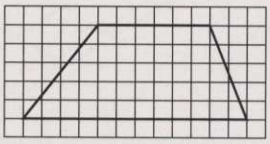
- Dibuja varios trapecios sobre papel cuadriculado.

- Recorta varios trapecios a partir de una tira de papel.

- Construye un trapecio con dos ángulos rectos. Se llama trapecio rectángulo.

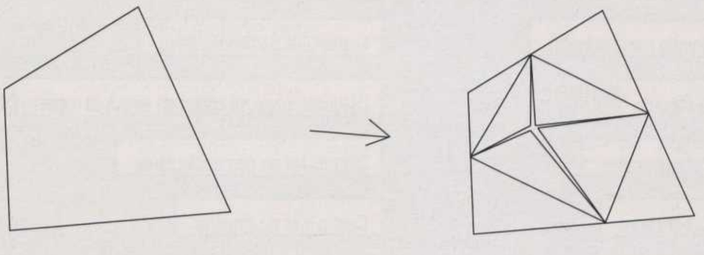
- Construye un trapecio con un eje de simetría. Se llama trapecio isósceles. Describe cómo son sus lados. ¿Tienen alguna peculiaridad sus diagonales?

- Averigua el área de este trapecio expresada en número de cuadraditos.



- Dibuja otros trapecios sobre papel cuadriculado. En cada caso calcula su área partiendo y recomponiendo un rectángulo.

- Recorta un cuadrilátero como el de la figura. Pliégalo como se indica y obtendrás un paralelogramo. Calcula su área y deduce así el área del cuadrilátero inicial.



- Recorta otro cuadrilátero que no sea paralelogramo ni trapecio y calcula su área siguiendo el procedimiento anterior.

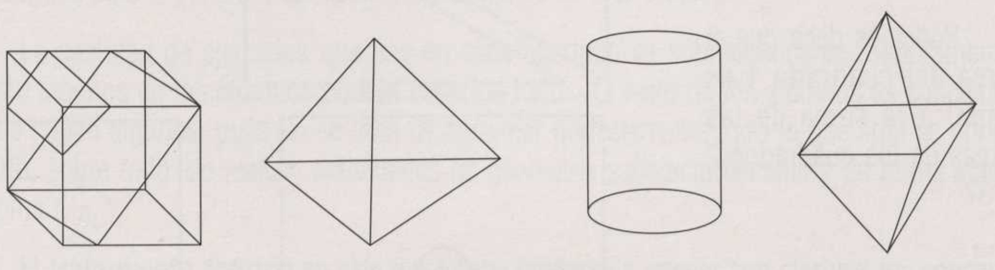
- Calcula el área de otro cuadrilátero siguiendo un método similar al anterior, pero sin recortar ni plegar: simplemente dibujando el paralelogramo cuyos vértices son los puntos medios de los lados.

Investiga

(A) Ejes de simetría

Has visto que los cuadrados, rectángulos y rombos tienen ejes de simetría. Que los romboides no los tienen. Pero hay cuadriláteros no paralelogramos que tienen un eje de simetría. Investiga cuáles son. Para tu búsqueda puedes valerte de un espejo. Cuando ya los tengas, haz un inventario de los distintos tipos de cuadriláteros que conozcas y clasifícalos según tengan 4, 2, 1 o ningún eje de simetría.

(B) Cortando sólidos geométricos

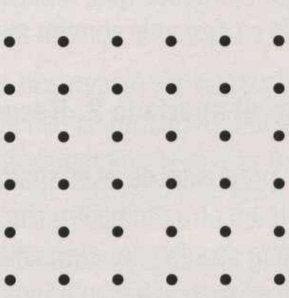


Si cortáramos estas figuras por medio de planos se podrían obtener cuadriláteros de distintos tipos. Estudia las distintas posibilidades y di qué tipo de cuadrilátero se consigue en cada caso. Para tu investigación puedes seguir el siguiente proceso:

1. Hazlo razonando directamente sobre las figuras representadas.
2. Comprueba tus conclusiones sobre sólidos geométricos de plástico o de cartulina sobre los que imagines los cortes planos. Descubre nuevas posibilidades.
3. Si puedes fabricarte algunas de estas figuras con porexpán (corcho blanco) puedes mejorar tus posibilidades de estudio cortando realmente la figura.

(C) Sobre el geoplano

Sobre esta trama punteada, ¿cuántos cuadrados puedes dibujar? ¿Cuántos rectángulos que no sean cuadrados?



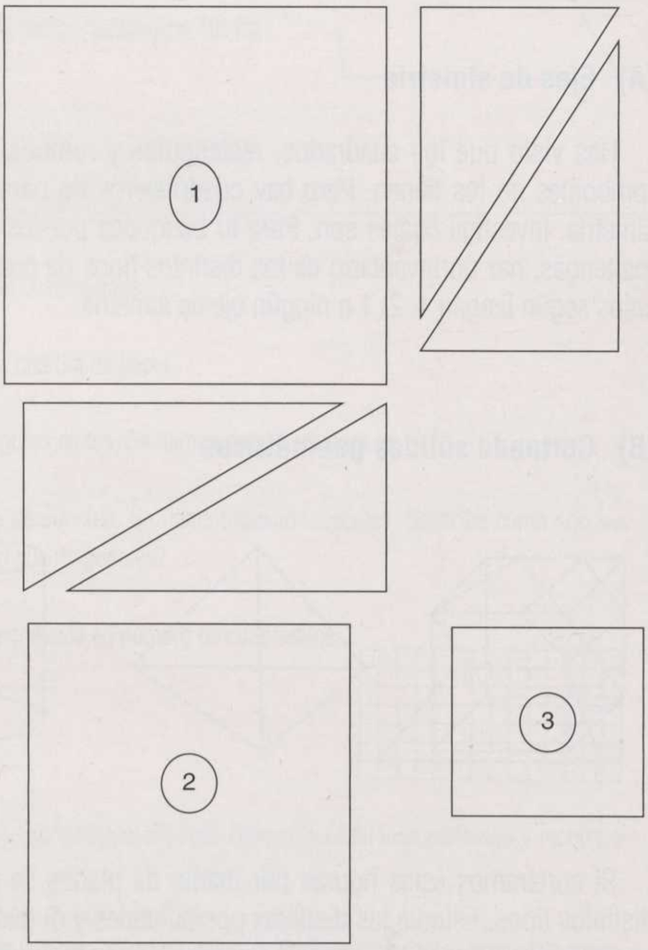
¿Cuántos rombos que no sean cuadrados?

¿Y romboides?

¿Y trapecios?

(D) Equivalencia de áreas

Recortar figuras de cartulina idénticas a éstas.



Con el cuadrado 1 y los cuatro triángulos construye un único cuadrado.

Con los cuadrados 2 y 3 y los cuatro triángulos construye un cuadrado igual que el anterior.

¿Podemos decir que el área del cuadrado 1 es igual a la suma de las áreas de los cuadrados 2 y 3?

¿Qué tienen que ver los cuadrados 1, 2 y 3 con los lados del triángulo que aparece repetido?

Comentarios para el profesor

Sobre el apartado 1. Introducción

Es una actividad concebida para ser comentada por toda la clase, pero cada alumno debe leer individualmente el párrafo previamente, tarea que puede llevarle uno o dos minutos.

En la participación en gran grupo se dan ejemplos de rectángulos en el mundo cotidiano: piscinas, campos de deporte…

Puede ser adecuado que el profesor pregunte: "¿Qué sabéis de los cuadriláteros?" y recoger opiniones que, indudablemente, serán desordenadas y, algunas de ellas, incorrectas. No es deseable corregir ahora ni, mucho menos, completar y sistematizar.

Sobre el apartado 2. Recuerda haciendo

El propósito de este apartado es no sólo recordar conocimientos que el alumno ya estudió en otro momento, sino también motivar, pues el reecuentro se hará en un contexto diferente y, además, siguiendo unos pasos presumiblemente muy distintos de los que siguió en momentos anteriores. Actividad individual. Puesta en común en grupos de dos a cuatro alumnos.

Sobre los apartados 3. Estudio del cuadrado; 4. Estudio del rectángulo; 5. Estudio del rombo; 6. Estudio de los paralelogramos, y 7. Cuadriláteros no paralelogramos

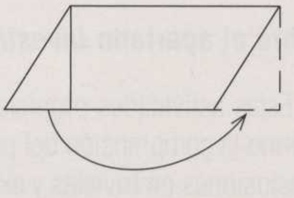
Los contenidos sobre conceptos que se tratan en esta lección son mínimos y prácticamente todos ya son conocidos por los alumnos; se pone mucho más énfasis en aspectos de procedimiento: comprobación de si una figura es o no simétrica respecto a un eje y consecuencias de esa simetría; búsqueda de ejes de simetría; cálculo de áreas por descomposición y recomposición en rectángulos; descripción de procesos y definiciones; utilización adecuada de la nomenclatura; reconocimiento de propiedades de las figuras e identificación de una figura a partir de sus propiedades; representación mediante el dibujo; utilización del recorte y plegado del papel para conjeturar, comprobar, demostrar...

Se dedica una atención muy especial al estudio de simetrías y al cálculo de áreas por equivalencia con rectángulos, pues ambos son procedimientos que consideramos muy fecundos para la posterior aplicación comprensiva de la geometría.

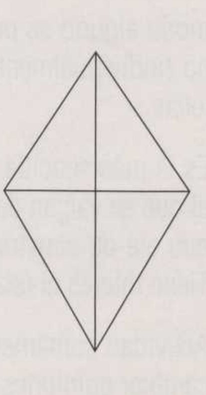
La cantidad de ejercicios que hay en cada apartado es sobreabundante. Seguramente sólo algunos de los alumnos podrán hacerlos todos. El resto de los alumnos es suficiente que hagan algunos, pues no se trata de aprender perfectamente todo lo que aquí se pone, sino, sobre todo, de realizar actividades de geometría satisfactoriamente y de forma autónoma.

El **tratamiento teórico** en este nivel debe limitarse a retener con claridad los conceptos básicos, algunas propiedades fundamentales y algunos procedimientos utilizados.

(Por ejemplo, los paralelogramos tienen los lados paralelos dos a dos [definición]; sus diagonales se cortan en su punto medio [propiedad]; para calcular el área de un paralelogramo podemos recortar un triángulo de uno de los lados y añadirlo en el otro, formando así un rectángulo equivalente [procedimiento].)



Saber justificar algunas propiedades con los argumentos lógicos propios de este nivel. (Por ejemplo, si las diagonales de un cuadrilátero son ejes de simetría, el cuadrilátero es un rombo, pues por ser la diagonal vertical eje de simetría, cada lado de la izquierda es igual al correspondiente de la derecha, y por ser eje de simetría, la diagonal horizontal, cada lado de arriba es igual al correspondiente de abajo; por tanto, son los cuatro lados iguales. Este argumento puede ser dado por el alumno señalando sobre la figura.)



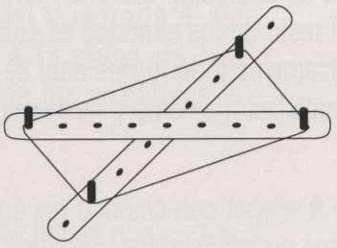
Enunciar nuevas propiedades como consecuencia de la observación y búsqueda de relaciones, siendo conscientes de que sólo son conjeturas que han de probarse. (Por ejemplo, los cuatro triángulos en que las diagonales parten al paralelogramo tienen la misma área.)

Esta tarea de reflexión teórica puede ser culminada muy eficazmente con una puesta a punto final por parte del profesor, con aportaciones de los alumnos, en la que se sistematizan los resultados más importantes a los que se ha llegado al terminar cada parte.

En la descripción de los contenidos del tema, cabe observar que la actividad (de aprendizaje o de evaluación) "definir un cuadrado" no aparece dentro del apartado "Conceptos básicos", uno de los cuales en el de "cuadrado", sino en el apartado "Definir". La razón es que un alumno puede tener muy claro el concepto (lo cual lo demuestra reconociendo propiedades, identificando cuadrados, distinguiendo cuadrado de lo que no lo es) y, sin embargo, no ser capaz de dar una buena definición. Esto requiere una destreza adicional, que hay que cultivar. Por eso "definir" aparece como "Contenidos".

Actividades adicionales:

- "Tengo dibujado un cuadrilátero". Por medio de preguntas de respuesta SÍ o NO relativas a lados, ángulos, diagonales, ejes de simetría..., ha de averiguarse cuál es. Cuantas menos preguntas, mejor.
- Utilización del geoplano para representar, con palillos y gomas cuadriláteros diversos.
- Utilización de varillas de mecano, o tablillas similares:



Girando una de las piezas se obtienen distintos cuadriláteros, todos ellos paralelogramos (¿por qué?)

Sobre el apartado *Investiga*

Estas actividades propician verdaderas investigaciones, pues todas ellas requieren del alumno la comprensión del problema, elaboración de una estrategia para afrontarlo, llegar a conclusiones no triviales y exponerlas.

En modo alguno se pretende que todos los alumnos las vean todas. Bastante sería que cada uno (individualmente o en grupo) trabajen en alguna. Comentemos brevemente cada una de ellas.

A) Es la más sencilla. Puede realizarse en poco tiempo. Cabe sugerirles a los alumnos el que se valgan de palillos y un espejo para hacer la búsqueda exhaustiva de figuras con eje de simetría. O bien, dando cortes sobre un papel con uno o dos pliegues. Tiene interés el relacionar ambos puntos de vista.

B) Actividad sumamente entretenida y rica en posibilidades. Muy adecuada para intercambiar opiniones entre los distintos grupos que hayan trabajado en ella.

Es especialmente interesante el cuadrado que se obtiene al partir el tetraedro en dos piezas iguales. ¿Se animará algún alumno a construir con cartulina (o porexpán) las dos piezas que se forman y presentarlas como rompezabezas para, uniéndolas, formar un tetraedro?

C) Más que el número de soluciones importa las estrategias de búsqueda. La cantidad de posibilidades, en algunos casos, es tan grande, que cabe considerar esta actividad como un problema abierto.

Materiales didácticos sugeridos

— Papel, papel cuadriculado.

— Útiles de dibujo: regla (graduada), escuadra, compás.

— Tijeras.

— Piezas de mecano (o similar), gomas.

— Geoplano.

— Espejo.

— Tangram.

— Cuerpos geométricos de madera, cartulina, plástico transparente y porexpán o algunos de ellos.

Bibliografía

Bibliografía

- ALFONSO, F., y otros. *Aportaciones al debate de las Matemáticas en los 90.* Valencia: Mestral, 1987. (Conclusiones del Simposio de Valencia, marzo, 1985. *Las Matemáticas en los 90.*)
- ALSINA, C.; BURGUES, C., y FORTUNY, J. M. *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis, 1988. Col. Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, n.° 11.
- ALSINA, C.; PÉREZ, R., y RUIZ, C. *Simetría dinámica.* Col. Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, n.° 13. Madrid: Síntesis, 1988.
- COCKROFT. *Las Matemáticas sí cuentan (Informe Cockroft).* Madrid: M. E. C., 1985.
- COLE, M. "La zona del desarrollo próximo: donde cultura y conocimiento se generan mutuamente". Revista *Infancia y Aprendizaje, 27 y 28,* 1984.
- COLERA, J., y NOMDÉDEU, R. "Propuesta A". En *Propuestas de Secuencia de Educación Secundaria Obligatoria. Matemáticas.* Madrid: Escuela Española / M. E. C., 1993.
- COLL, C. *Psicología y curriculum.* Barcelona: Laia, 1987.
- COLL, C., y otros. *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes.* Madrid: Santillana, 1992.
- GRUPO DECA. *Didáctica de la resolución de problemas.* Burgos: CEP de Burgos, 1990.
- DELVAL, J. *Crecer y pensar. La construcción del conocimiento en la escuela.* Barcelona: Laia, 1983.
- FERNÁNDEZ, M., y otros. *Circulando por el círculo.* Madrid: Síntesis, 1983. Col. Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, 18.
- FERNÁNDEZ, S., *et al.* "La resolución de problemas". *Sigma. Revista de Matemáticas, 10.* Bilbao: Servicio General de Publicaciones del Gobierno Vasco.
- FIELKER, D. *Usando la calculadora con niños de 10 años.* Valencia: Generalitat Valenciana, 1986.

3836

- FISHER, R., y VINCE, A. *Investigando las Matemáticas* (vols. 1, 2, 3 y 4). Madrid: Akal, 1990.
- INTERNATIONAL COMMISSION MATHEMATICAL INSTRACTION. *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90.* Valencia: Mestral, 1986 (I.C.M.E., VI. Kuwait, 1986).
- LANGE, J., y otros. *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria* (capítulo 1). Salamanca: ICE de la Universidad de Salamanca, 1989.
- NATIONAL CONCILIUM OF TEACHERS MATHEMATIC. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: S.A.E.M. "Thales", 1991.
- NORTES, A. *Encuestas y precios.* Madrid: Síntesis, 1987. Col. Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, n.° 28.
- NOVAK, J. A. *Teoría y práctica de la educación.* Madrid: Alianza Universidad, 1982.
- NOVAK, J. A., y GOWIN, D. B. *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca, 1988.
- REIGELUTH, CH. M., y STEIN, F. S. "The Elaboration Theory of Instruction". En Ch. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional design: theories and models. An overview of their curren status* (pp. 335-381). New Jersey: Hillsdale, 1893.
- REIGELUTH, Ch. M. "Lesson blueprints based on the Elaboration Theory of Instruction". En Ch. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional Theories and Models* (pp. 245-288). New Jersey: Hillsdale, 1897.
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION. *El lenguaje de funciones y gráficas.* Madrid: Universidad del País Vasco / M. E. C., 1990.
- VV. AA. *Guía de uso de los materiales de Matemáticas. Primer ciclo. Profesorado.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Para comenzar ... y números. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Números. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Álgebra. Gráficas. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Álgebra. Gráficas. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Geometría. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Geometría. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Probabilidad y estadística. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.
- VV. AA. *Probabilidad y estadística. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

AUTOR COLERA JIMENEZ, J. y GAZTELU ALBERO, J.

TITULO MATERIALES DIDACTICOS. MATEMATICAS. 1er CICLO.

~~SECUNDARIA OBLIGATORIA.~~

ORIGEN-TITULO

EDITORIAL DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA. CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR. MEC.

COLECCION SECUNDARIA OBLIGATORIA

LUGAR MADRID

AÑO 1994

FUENTE

VOLUMEN 1

NUMERO

PAGINAS 168

CONTENIDO PROGRAMACION/ UNIDADES DIDACTICAS/

UBICACION SALA/FORMACION/ ADAPTACIONES/ EQUIPOS/ MINORIAS/ PUBLICACIONES/ EQUIPO DIRECTIVO

SIGNATURA I02-AH40

FECHA-ENTRADA 9503

[illegible], R. y [illegible], A. *Investigando las Matemáticas* (vols. 1, 2, 3 y 4). Madrid: Akal, 1990.

[illegible] Comisión Internacional [illegible]. *Las Matemáticas en Primaria y Secun[illegible] los 90*. Valencia: Mestral, 1986 (I.C.M.I., Kuwait, 1986).

[illegible], J. y otros. *Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria* (capítulo 1). Salamanca: [illegible] de la Universidad de Salamanca, 1988.

[illegible] Sociedad de Profesores Matemáticos. *Materiales curriculares y de evaluación para la educación [illegible]*. Sevilla: S.A.E.M. "Thales", 1991.

Nortes, A. *Encuestas y precios*. Madrid: Síntesis, 1987. Col. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, n.° 28.

Novak, J. A. *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza Universidad, 1982.

[illegible]

Reigeluth, Ch. M. y Stein, F. S. "The Elaboration Theory of Instruction". En Ch. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional Design Theories and Models: [illegible] status* (pp. 335-381). New Jersey: Hillsdale, 1983.

Reigeluth, Ch. M. "Lesson Blueprints Based on the Elaboration Theory of Instruction". En Ch. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional Theories and Models* (pp. 245-288). New Jersey: Hillsdale, 1987.

[illegible] Matemáticas [illegible]. *El lenguaje de funciones y gráficas*. Madrid: Universidad del País Vasco / M. E. C., 1989.

VV. AA. *Guía de uso de los materiales de Matemáticas. Primer ciclo. Profesorado*. Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Para comenzar... y números. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Números. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Álgebra. Gráficos. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Álgebra. Gráficos. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Geometría. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Geometría. Segundo curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Probabilidad y Estadística. Primer curso E. S. O.* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

VV. AA. *Probabilidad y Estadística. Segundo curso [illegible]* Valencia: Generalitat Valenciana / M. E. C., 1993.

Dirección General de Renovación Pedagógica

Centro de Desarrollo Curricular