J. García Rua
J. M. Martínez Sánchez

matemática básica elemental

MATEMATICA BASICA ELEMENTAL

J. García Rua
J. M. Martínez Sánchez

matemática básica elemental

SERVICIO DE PUBLICACIONES DEL MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
1977

EDITA: SERVICIO DE PUBLICACIONES DEL MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
PORTADA: LUIS F. DEL VALLE
IMPRIME: RUFINO GARCIA BLANCO - AVDA. PEDRO DIEZ, 3 - MADRID-19
ISBN: 84-369-0216-5
DEPOSITO LEGAL: M 24.064 - 1977
PRINTED IN SPAIN.

SUMARIO

Página

NOTA DIDÁCTICA
A
MODO DE PRÓLOGO

Este libro, pretendemos sea una exposición sistemática de las materias comprendidas en el cuestionario de Educación Básica, para que el profesor pueda hacer uso de su contenido en la medida que crea conveniente.

En su desarrollo se ha seguido la *orientación moderna*, la nueva *estructuración*, pero sin olvidar lo clásico, pues como un autor francés dice: «*Reformar no es anular lo clásico para introducir lo moderno, sino conservar aquello que sea bueno, agregando las nuevas ideas necesarias*».

No es, pues, un libro de texto, sino un libro pensado para ayudar a la labor preparatoria del profesor, cuyo contenido puede consultar, sin estar enfocado precisamente en una determinada vertiente de su exposición hacia el alumno, ni mucho menos ser su dosificador, ya que todo esto varía según las condiciones del tema, del grado, del alumno y hasta de la situación, siendo el profesor en último término, quien debe decidir según estas condiciones.

Al alumno hay que presentarle los conocimientos, ofreciéndole situaciones prácticas, e intuitivas, para que conciba la idea, que después la razón y la lógica han de ir completando en su mente, y siempre conducido por la labor del profesor.

No se debe lanzar a los alumnos programas extensos, ni intentar transmitir todos los conocimientos que posee el profesor, pues no se trata de dar una conferencia, sino de enseñar, y esto exije reflexión para proporcionar la dosis conveniente en calidad y cantidad.

No hay que olvidar que, en muchas ocasiones, es conveniente acompañar a la explicación la imagen, tan recomendado por expertos profesores de distintos países, como Tardy, Durand y otros, bien en películas apropiadas o en específicas colecciones de diapositivas, que con su visión consiguen completar en la mente del escolar, las ideas vertidas por el profesor en la exposición del correspondiente tema.

Cuántas de las demostraciones de las relaciones y propiedades de las operaciones, por ejemplo, no son precisas para que el alumno las aprenda y algunas ni las conozca; pero, sin embargo, conviene irles acostumbrando con algunas de ellas, a escuchar y a realizar en determinados casos, las demostraciones lógicas que le pueden ir preparando para razonamientos posteriores, y esquematizar de su contenido lo que él considere apropiado para exponer o transmitir al alumno.

Por eso, al redactar este texto, hemos tenido presente estas ideas al desarrollar los distintos capítulos.

El primer capítulo, de tipo introductorio, expone unas ideas generales sobre la Matemática, y el Lenguaje Matemático.

En el segundo, se ha tratado el estudio de conjuntos y relaciones, con arreglo a las nuevas estructuras, insistiendo en todas las propiedades características.

En el tercero, al ocuparnos de los sistemas de numeración, nos hemos detenido en el binario, por ser de gran utilidad, dado el empleo que de él se hace en cálculo automático, álgebra de Boole, lógica simbólica, etc.

En el cuarto, no sólo se ha hablado de la divisibilidad en N, sino que, al tratar de la noción de retículo, se incluye la divisibilidad en general, la cual debe conocer el profesor de este grado de enseñanza.

Lo mismo ocurre con el capítulo V, en el que además de tratar las operaciones de un modo general, no por eso deja de tratarse el estudio de números racionales y decimales que en la práctica son de uso corriente.

En el capítulo VI se estudia el concepto de medida con sus aplicaciones, dando idea de la aproximación y error en la medida.

Los elementos geométricos en el plano son tratados en el capítulo VII con el concepto de igualdad de figuras.

En el capítulo VIII se introduce la noción de movimiento, que consideramos indispensable para la expresión de las transformaciones, y con nociones sobre el espacio y estudio de algunos cuerpos geométricos en el capítulo IX, finaliza el programa.

Cada capítulo, excepto el primero, incluye tres temas; y al final del libro figura un apéndice sobre el sistema métrico decimal, con los valores legales y prácticos de las unidades más usuales.

Creemos que al profesor hay que dejarle libertad dentro de los cauces normales marcados en el programa, para que utilice los conocimientos que crea debe explicar según la situación y el momento.

Por esta razón se ofrece en el texto el material necesario para que el profesor elija lo que crea conveniente en cada caso.

Con estas directrices está desarrollado el contenido del texto, y nuestro deseo sería haber acertado a contribuir con nuestro trabajo a facilitar la labor preparatoria de aquel profesorado de E.G.B., que desee intensificar u orientar la exposición en clase, para su debida labor docente.

CAPITULO I

INTRODUCCION

1. LA MATEMATICA

La Matemática, prescindiendo de la época primitiva en la que los conocimientos alcanzados no formaban cuerpo de doctrina, es considerada como ciencia a partir del siglo VI (a.J.), siendo Thales de Mileto el primer matemático de la historia.

Entre las distintas figuras que destacan en esta época, están: Pitágoras de Samos; Zenón de Elea, digno de mencionar por ser el que inició el rigor lógico en la matemática; Platón, en Atenas y Euclides, en Alejandría, entre otros, todos los cuales contribuyeron a propulsar los conocimientos de la Geometría.

Las traducciones del griego y del árabe, siglos después, elevaron el caudal científico, y en la época medieval destacaron, entre otros, Vieta como iniciador del Algebra; Neper, Cardano, Tartaglia y Desargues, que dieron paso a la edad moderna donde la matemática comenzó a adquirir su esplendor.

Ya en los siglos XVII y XVIII, Newton, Leibnitz, Euler, Gauss y Cauchy, en el Análisis, y Descartes, Staut en la Geometría, entre otras grandes figuras, inmortalizaron sus nombres con el desarrollo de esta ciencia.

En el siglo XIX, Hilbert con su axiomática, Cantor creador de la teoría de conjuntos, y, finalmente, Boole con su lógica simbólica, marcaron la iniciación del nivel alcanzado por la matemática actualmente y su estudio es fundamental para la estructuración moderna de la matemática, y para las aplicaciones prácticas de la misma.

La nueva estructuración de esta ciencia constituye la Matemática Moderna.

La Matemática, que partió del punto y el número como conceptos abstractos, hoy se desarrolla a base del rigor lógico en su estudio.

Este rigor lógico, estructura la presentación de la Matemática como el conjunto de proposiciones ciertas que se obtienen, aplicando las leyes de la lógica, a partir de unos primeros principios que se admiten como verdaderos. Esta tendencia que informa hoy la mayor parte de la Matemática recibe el nombre de formalista, pero no hay que olvidar, sin embargo, que en el desarrollo de la Matemática, como en toda ciencia, juega un papel importante la intuición y la clarividencia de verdades, pero, tanto una como otra, deben someterse al rigor del razonamiento para que pueda incorporarse al conjunto de verdades matemáticas universalmente aceptadas.

Es necesario distinguir entre el quehacer matemático y la presentación de los resultados; obviamente las dudas, titubeos y errores cometidos y desechados que aparecen en el primero no figuran en el segundo, necesitando éste para mayor claridad, rigor y concisión, una presentación formalizada, y así es como, en general, aparecen los resultados en este texto. Pero el profesor conoce, sin embargo, que de cara al alumno la presentación formalizada no es la mejor forma de atraer su interés, por eso en el texto se dan ejemplos y aclaraciones, que concretando las ideas permiten al profesor encontrar situaciones que despierten la curiosidad del alumno permitiendo poner de manifiesto la necesidad de aglutinar todos los casos particulares en una teoría general, así como de presentar ésta de manera que la certeza de las distintas proposiciones sean garantizadas por la vía del rigor lógico.

2. EL LENGUAJE MATEMATICO

La expresión oral y gráfica en el mutuo entendimiento de la humanidad, se manifiesta desde los tiempos primitivos en la más variada forma que puede imaginarse.

Desde el empleo de los dedos de las manos, que utilizaban las razas primitivas, hasta las distintas hojas de los árboles, los guijarros en los ábacos y las bolas del Suam-pan *de los chinos, fueron todos elementos empleados por los distintos pueblos y razas para la expresión oral de los números, que necesitaban utilizar como medio vital para contar y medir.*

Más expresiva y variada ha sido la numeración escrita, manifestada en trazos de distinta forma en la corteza de los árboles, en las piedras, bien en tablillas de arcilla, como en Mesopotamia o ya en los papiros, como en Egipto.

Los signos empleados son bien distintos, desde trazos más o menos rectos empleados por los indios, egipcios y babilonios, y conservados incluso hasta los romanos, hasta los empleados por los chinos, que, en general, difieren por completo de aquéllos.

Entre los papiros, conviene señalar los de la colección Rhin, a la que pertenece el papiro de Ahmes, en el que se exponen algunos problemas de Aritmética y Geometría, y en el que se aprecian unos trazos verticales con una especie de elipses superpuestas para indicar las unidades fraccionarias.

Los egipcios utilizaban también en sus papiros el trazo recto combinado con otro en forma de herradura, así como en Mesopotamia empleaban en sus tablas de multiplicar el signo $\vee$ *en forma de cuña.*

En la misma Grecia, los signos cambian según la época, y así, por ejemplo, el millar que era representado por un rombo en su primera época, en tiempos de Thales se representaba por una X mayúscula, y, posteriormente, utilizando las letras del alfabeto griego, escribían el millar con la letra α*, en la forma siguiente:* $1000 = ,\bar{\alpha}$.

Basta con estos ejemplos para darse cuenta de las múltiples formas representativas de los números en las distintas civilizaciones.

A partir de aquí, el número de signos y expresiones orales fue estando en relación con el crecimiento de la ciencia, y ya en el siglo XVI aparece el empleo de los signos corrientes en las operaciones fundamentales, iniciados por los indúes y modificadas después.

En relación con el avance de la ciencia Matemática en los siglos posteriores, el número de signos empleados para las distintas materias creció hasta hoy día que, con los del grupo Bourbaki en la llamada Matemática Moderna, constituyen un verdadero código, comunes unos y diferentes otros en los distintos países.

Este conjunto de signos orales y escritos empleados en la Matemática para expresar conceptos, relaciones e ideas, junto con sus reglas operativas, es lo que constituye el lenguaje matemático.

El lenguaje matemático tiene la ventaja de poder expresar, en forma simbólica y abstracta, no sólo los entes matemáticos, sino las relaciones entre ellos; en este sentido es el vehículo adecuado para escribir la lógica formal, describir las leyes de la naturaleza y expresar relaciones cuantitativas entre fenómenos observables, actividad común a todo quehacer científico.

Es necesario, pues, para el hombre actual dominar este lenguaje que le permita utilizar las técnicas matemáticas, mucho más hoy día en que la complejidad de las actividades humanas piden la simplificación y sintetización de una gran masa de información, sin perder por ello claridad y precisión.

Dentro del lenguaje matemático consideramos también las representaciones dinámicas como los grafos y diagramas, así como los lenguajes de programación, si bien estas últimas no tendrán cabida en este texto.

CAPITULO II

TEMA 1. CONJUNTOS. OPERACIONES. PRODUCTO CARTESIANO

1. Conjuntos

La noción de conjunto la consideramos idea primitiva; no daremos, por tanto, una definición explícita de la misma, sino que precisaremos el concepto de un modo intuitivo mediante ejemplos y consideraciones generales.

El criterio que permite afirmar cuándo los objetos se consideran formando un conjunto, puede presentarse bajo formas diversas, bien porque los objetos sean de la misma naturaleza; ejemplos: los dedos de la mano, las ovejas de un rebaño, los árboles de un bosque, etcétera; bien porque gocen de la misma propiedad: los alumnos *rubios* de un centro de enseñanza, los números naturales que escritos en base diez *terminan en tres*, la colección de sellos y monedas de un *cierto* filatélico y nunismático... En general, este criterio viene dado cuando los objetos que se consideran, y sólo ellos, tienen una característica en común.

A la agrupación de los objetos, considerada como entidad única, le damos el nombre de CONJUNTO. Cada uno de los objetos que agrupados constituyen el conjunto reciben el nombre de ELEMENTO del conjunto considerado. La cualidad que en común poseen los elementos de un conjunto, y sólo ellos, la denominaremos PROPIEDAD CARACTERISTICA de dicho conjunto.

Ejemplos: Conjunto de los puntos del plano que *equidistan de otro punto fijo;* conjunto de polígonos planos de *cinco lados;* conjunto de los números *primos.*

Se suelen utilizar las letras mayúsculas $A, B, C \ldots$, para indicar conjuntos; las minúsculas $a, b, c \ldots$, para indicar cualesquiera de los elementos determinados de un conjunto; las últimas letras del alfabeto x, y, z suelen utilizarse para representar uno cualquiera de los elementos indeterminados de un conjunto, aun cuando pueden sustituirse por cualquier otra con el mismo fin.

El símbolo $\in$

De los elementos que constituyen un conjunto se dice que pertenecen a él y se indica con el símbolo $\in$. Esta conexión entre el elemento a y el conjunto A, se escribe:

$$a \in A$$

y se lee «a pertenece al conjunto A», que es sinónimo de «el objeto a es un elemento constituyente del conjunto A». La negación de la pertenencia se indica con el símbolo $\notin$, que leemos «a no pertenece al conjunto A» y análogamente al caso anterior se escribe:

$$a \notin A$$

Conjuntos finitos

Se dice que un conjunto es *finito,* si por grande que sea el número de sus elementos se pueden contar. En caso contrario, diremos que el conjunto es *infinito.*

Ejemplos de conjuntos *finitos* son: conjunto de los libros de la Biblioteca Nacional, conjunto de los habitantes de una nación, etc. Ejemplos de conjuntos *infinitos* son: conjunto de las rectas del plano, conjunto de los números pares, etc.

Definición de conjuntos

Sólo se consideran conjuntos BIEN DEFINIDOS aquellos en los que, dado el conjunto y un objeto cualesquiera, podamos decir de manera inequívoca si el objeto pertenece o no al conjunto considerado. En este sentido, por ejemplo, *no estaría bien definido* el conjunto constituido por «todas las personas que resulten premiadas en el sorteo de la Lotería de Navidad antes de verificarse el mismo».

Vemos, pues, que un conjunto o colección de objetos queda establecido como tal cuando conocemos todos los elementos que constituyen la colección, o bien si conocida la propiedad característica que cumplen los elementos del conjunto, y sólo ellos, podamos saber de manera inequívoca si un objeto cualquiera cumple o no dicha propiedad.

El primer caso sólo se puede aplicar a conjuntos con un número finito de elementos o conjuntos finitos y se dice que el conjunto está definido por COMPRENSION; el segundo caso permite definir todo tipo de conjuntos, finitos o no, y se dice que el conjunto está definido por EXTENSION.

Ejemplos de estos conjuntos definidos por *comprensión* y *extensión*, son, respectivamente, los siguientes: Conjunto constituido por «pulgar, índice, medio, anular, meñique» y conjunto constituido por «los dedos de la mano», o bien: conjuntos constituidos por las provincias de «Alava, Guipúzcoa y Vizcaya» y conjunto constituido por «las provincias vascongadas».

En general, si el conjunto C está constituido por los elementos m, n, p, se suele indicar dicho conjunto encerrando los elementos entre llaves así:

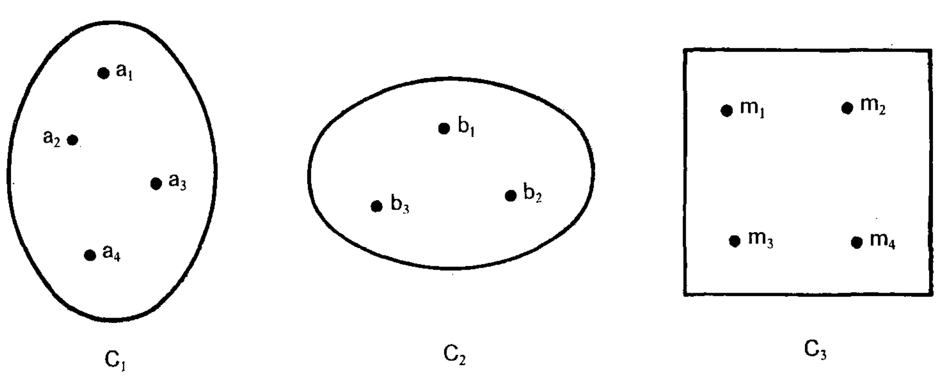
$$C=\{m, n, p\}$$

Cuando el conjunto está constituido por todos los objetos x, cualesquiera que ellos sean que verifican la propiedad P, se suele representar dicho conjunto del modo siguiente:

$$C=\{x/P(x)\}$$

Conviene distinguir entre el conjunto constituido por un solo elemento $\{u\}$, que es un conjunto unitario y el propio objeto u.

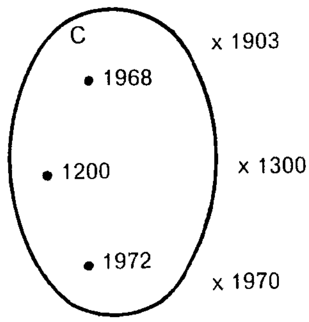
En ocasiones es cómodo representa conjuntos mediante regiones del plano delimitadas por una línea cerrada, conviniendo que los puntos interiores a la línea, todos o algunos señalados, sean los elementos del conjunto. (Diagrama de Venn-Euler. En las figuras se han representado algunos ejemplos).

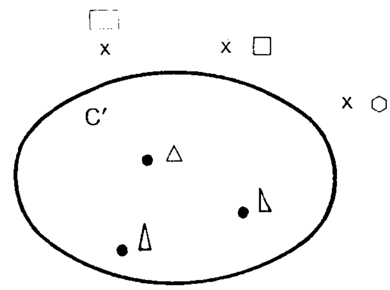


C_1 C_2 C_3

$C_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $C_2=\{b_1, b_2, b_3\}$; $C_3=\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

Ejemplos de su empleo:





C' = {Conjunto de triángulos}   C = {Conjunto de años bisiestos}

1968 ∈ C	1903 ∉ C	△ ∈ C'	⬚ ∉ C'
1200 ∈ C	1300 ∉ C	◺ ∈ C'	□ ∉ C'
1972 ∈ C	1970 ∉ C	△ ∈ C'	○ ∉ C'

2. Implicación

Si un conjunto A tiene una cierta propiedad respecto a otro segundo conjunto B, para determinados valores de sus elementos y éstos a su vez tienen la misma propiedad respecto a un tercero C, para los mismos valores, decimos que A tiene dicha propiedad respecto a C.

A esta relación se llama *implicación* y se expresa con el signo $\Rightarrow$

$$\begin{matrix} \text{Si} & A<B \\ \text{y} & B<C \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow A<C$$

Ejemplo:

A = {Los alumnos de una clase X obtienen sobresaliente}

B = {Todos los alumnos sobresalientes, tienen premio}

implica:

C = {Todos los alumnos de X tienen premio}

3. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Notación: $A=B$. Es decir, si cualquiera que sea el elemento $x \in A$ podemos afirmar que $x \in B$ y, recíprocamente, si para todo elemento $z \in B$ necesariamente se deduce que $z \in A$.

Ejemplos:

El conjunto A de «los días de la semana» y el conjunto B cuyos elementos son: «lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo», así como el conjunto A' de «los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo» y el conjunto B' de «los puntos de la bisectriz del mismo». Es decir, $A=B$ y $A'=B'$.

La igualdad de conjuntos posee las siguientes propiedades:

1. REFLEXIVA. Todo conjunto es igual a sí mismo. Notación: $A=A$.

2. SIMÉTRICA. Si el conjunto A es igual al conjunto B, entonces el conjunto B es igual al conjunto A; en símbolos: si $A=B$, entonces $B=A$.

3. Transitiva. Si un conjunto A es igual a un conjunto B, y éste a su vez es igual a un tercer conjunto C, entonces el conjunto A y el C son iguales, es decir:

$$A=B \quad \text{y} \quad B=C \;\Rightarrow\; A=C$$

Ejemplos:

1.º Sea $A=\{$Puntos de la recta $x=y\}$ y $B=\{$Puntos de la bisectriz del primer cuadrante$\}$, de donde $A=B$.

Sea $C=\{$Puntos de la recta perpendicular, en el origen de coordenadas, a la recta $y+x=0\}$, de donde $B=C$;

$$A=B \;,,\; B=C \;,,\; \text{luego } A=C$$

2.º Sea $A=\{$Angulos rectos$\}$, $B=\{$Angulos de 90º$\}$, por tanto, $A=B$

Sea $C=\{$Angulos correspondientes a un cuadrante$\}$, entonces $B=C$

por consiguiente $A=B \;,,\; B=C \;,,\;$ luego $A=C$

3.º

$A=\{$Alumnos de una clase que se llaman Jaime$\}$

$B=\{$Alumnos de esa clase que se llaman Santiago$\}$

Todo alumno que se llame Jaime, se llama también Santiago y recíprocamente, luego

$$A=B$$

4.º

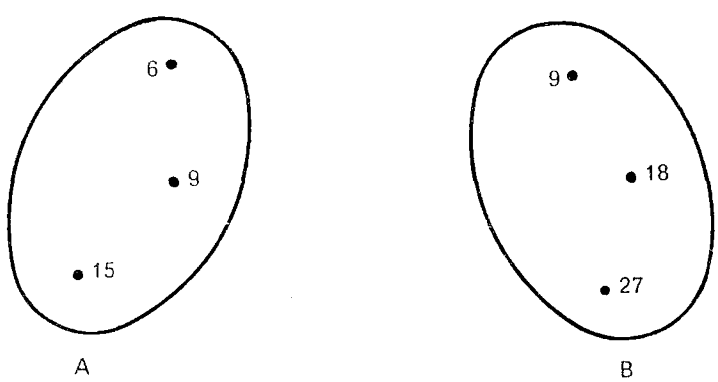
$A=\{$Triángulos isósceles$\}$

$B=\{$Triángulos con eje de simetría$\}$

Como todos los triángulos isósceles tiene eje de simetría, y recíprocamente todo triángulo con eje de simetría es isósceles, resulta

$$A=B$$

5.º



$A=\{$Múltiplos de 3$\}=\{x/x=3\}$

$B=\{$Múltiplos de 9$\}=\{x/x=9\}$

$$15\notin B \;,,\; 6\notin B$$

luego

$$A\neq B$$

4. Inclusión. Subconjunto

En el caso de que todos los elementos de un conjunto A sean elementos de otro conjunto B, y en éste existan elementos que no sean de A, diremos que «A es una parte de B», que «A es un subconjunto de B» o que «A está contenida en B», y se expresa $A \subsetneq B$.

Si considerabos a B como una parte de sí misma, entonces pondremos $A \subseteq B$, de manera que el símbolo $\subseteq$ se utiliza para indicar la relación de inclusión entre conjuntos.

De B se dice que contiene al conjunto A, o que incluye al conjunto A y se indica $B \supseteq A$. Si A no es un subconjunto de B escribiremos $A \not\subseteq B$.

Ejemplos:

1.º

$A = \{\text{Vocales}\}$ $B = \{\text{Todas las letras del alfabeto}\}$

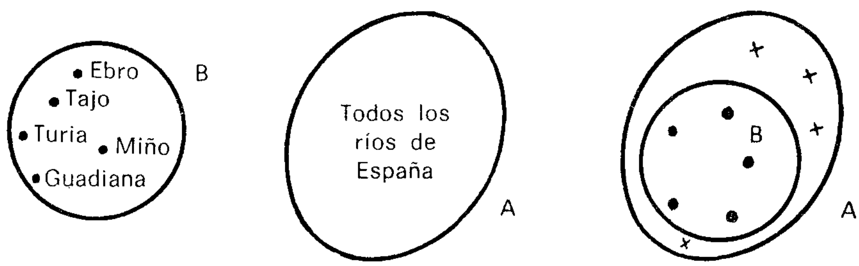
$A' = \{\text{Plantas}\}$ $B' = \{\text{Todos los seres vivientes}\}$

$A'' = \{\text{Alicantinos}\}$ $B'' = \{\text{Todos los españoles}\}$

En cada uno de ellos podremos escribir

$$A \subset B \;\;,,\;\; A' \subset B' \;\;,,\;\; A'' \subset B''$$

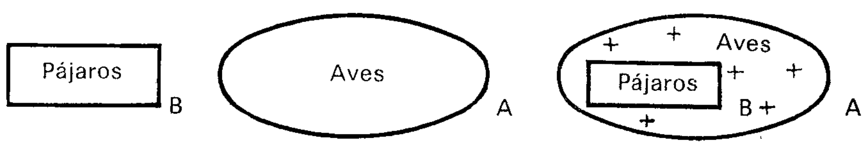
2.º



B = { Ebro, Tajo, Miño, Turia, Guadiana } A = { Conjunto de los ríos de España }

$B \subset A$

3.º



B = { Conjunto de los pájaros } A = { Conjunto de las aves }

$B \subset A$

La relación de inclusión entre conjuntos goza de las siguientes propiedades:

1. Reflexiva. Todo conjunto está incluido en sí mismo; notación $A \subset A$.

2. Antisimétrica. Si el conjunto A está incluido en el conjunto B, y el conjunto B también está incluido en A, entonces los conjuntos A y B son iguales. Se indica más brevemente así:

$$A \subset B \text{ y } B \subset A, \text{ implica } A = B$$

3. TRANSITIVA. Si A está incluido en B y B es una parte de un tercer conjunto C, entonces A es un subconjunto de C; simbólicamente: $A \subset B$ y $B \subset C$ implica $A \subset C$.

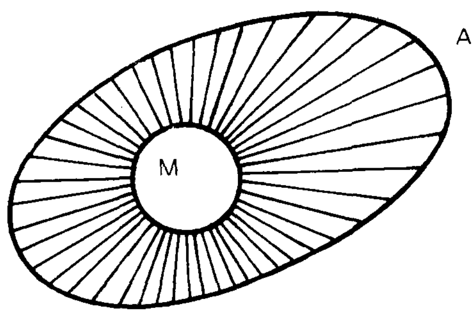
Convenimos en lo sucesivo que todos los conjuntos que manejamos son subconjuntos de otro fijo, que llamaremos «conjunto universal» (o referencial) de la teoría; este conjunto se supone bien definito para cada caso.

NOTA: Para representar las operaciones lógicas «o», «y», «no», «si... entonces», «sí y sólo si» y las frases «para alguno» y «para todo» se suelen utilizar respectivamente los símbolos:

$$\vee \quad \wedge \quad \neg \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \exists \quad \forall$$

5. Conjunto complementario

Sea M un subconjunto de A. Entendemos por conjunto complementario de M en A, al conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a M. Notación: $A-M$ ó $C_A M = \{x/ \in A, x \notin M\}$



$C_A M = A - M$ (Parte rayada en el dibujo)

Ejemplos:

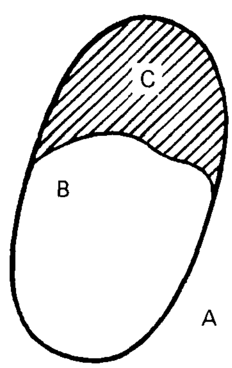
Ejemplo 1.°:

A = { Habitantes de Extremadura }

B = { Habitantes de Badajoz } .

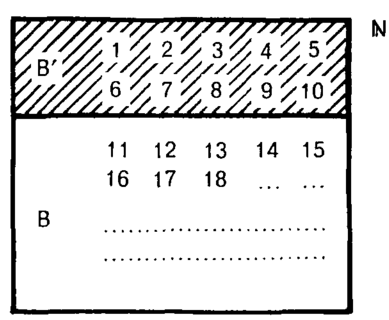
C = { Habitantes de Cáceres }

$C = C_A B = A - B$



Ejemplo 2.°:

N = { Conjunto de los números naturales }
$B = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ n > 10 \}$



$B' = C_N B = \{ X \in \mathbb{N} \ / \ X \leqslant 10 \}$

Convendremos en considerar como conjunto el caso especial $A - A = \{x / x \in A, x \notin A\}$. Conjunto, cuya propiedad característica es contradictoria, por tanto ningún objeto del universo la verifica, y el conjunto definido por la misma carece de elementos. Dicho conjunto recibe el nombre de vacío y se representa por ∅, pudiendo suponerse incluido en cualquier otro conjunto. Ejemplos:

∅ = {Capitales marítimas de la región leonesa}
∅ = {Ovetenses que no sean asturianos}
∅ = {Cuadrados cuyos lados sean distintos dos a dos}
∅ = {Minerales vivos}
∅ = {Los números primos divisibles por tres}

En virtud de la definición, el complementario de M respecto a otro, posee las siguientes propiedades:

1. El complementario, respecto a A, del complementario de M respecto a A, es el propio conjunto M. Simbólicamente esto se expresa diciendo:

$$C_A(C_A M) = M$$

2. El complementario del vacío respecto a A, es A. Escribiremos lo anterior así:

$$C_A \emptyset = A$$

3. El complementario de A respecto a A, es el vacío

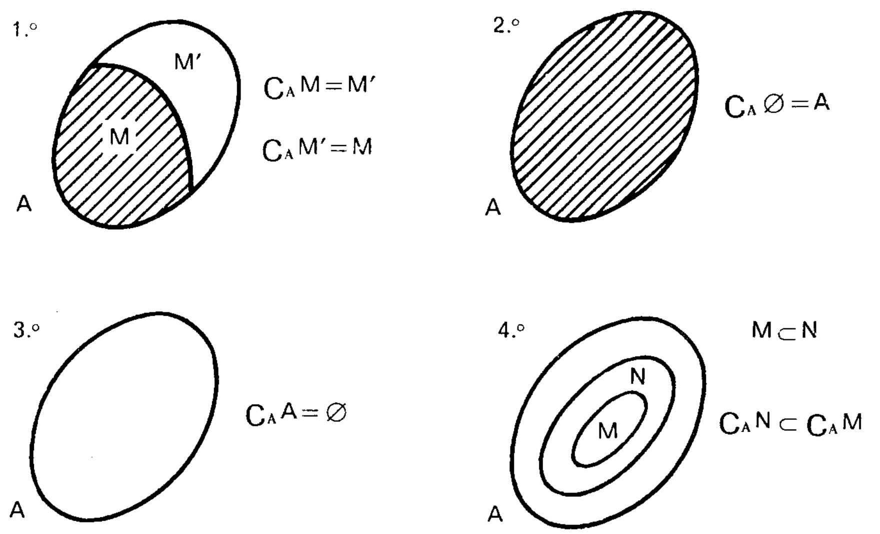
$$C_A A = \emptyset$$

Como ejercicio, el lector puede demostrar la siguiente propiedad de la que, a continuación, se dan algunos ejemplos aclaratorios.

4. Si M es un subconjunto de N y éste a su vez lo es de A, entonces el complementario de N en A, está contenido en el complementario de M respecto de A, lo que simbólicamente expresamos:

$$M \subset N \subset A \Rightarrow C_A N \subset C_A M \subset A$$

Ejemplos:



6. Operaciones con conjuntos: Unión e intersección

«Dado un conjunto X, consideremos el conjunto $P(X)$ cuyos elementos son los subconjuntos de X; también consideramos como tales el vacío $\emptyset$ y el propio X, de manera que $A \in P(X)$ sí y sólo si $A \subset X$. Con las partes de un conjunto se pueden realizar operaciones cuyo resultado sea otra parte del conjunto dado.

Supondremos en lo que sigue que todos los conjuntos que manejamos son subconjuntos de un cierto *conjunto universal* U no explícitamente definido».

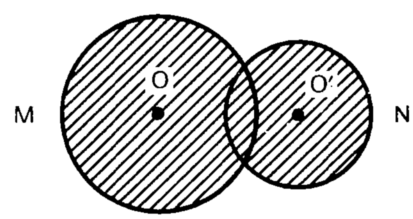
UNION de dos conjuntos M y N es el conjunto que resulta al considerar agrupados ambos; es decir, todos los elementos de M con todos los de N; por consiguiente, x será un elemento de la unión de M con N, si pertenece a M o pertenece a N, sin excluir el caso en que simultáneamente pertenezca a los dos.

Si la operación la representamos por $\cup$, lo anterior se puede escribir simbólicamente así:

$$M \cup N = \{x/x \in M \quad \text{ó} \quad x \in N\}$$

Ejemplo:

M = { Conjunto de puntos del círculo O }
N = { Conjunto de puntos del círculo O′ }



M ∪ N = { Conjunto de puntos de la zona sombreada }

INTERSECCION de dos conjuntos M y N es otro conjunto formado por todos los elementos que simultáneamente pertenecen a M y a N, es decir, los elementos comunes a ambos conjuntos.

Si la operación la representamos por $\cap$, la referida operación se puede expresar así:

$$M \cap N = \{x/x \in M \quad \text{y} \quad x \in N\}$$

Cuando dos conjuntos carecen de elementos comunes decimos que son *disjuntos* y su intersección es el vacío.

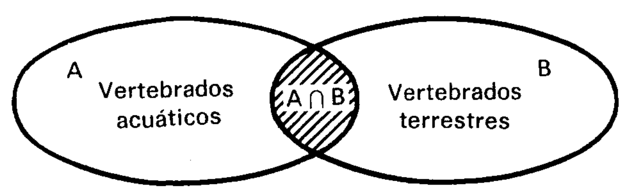
Ejemplos:

1.º

A = { Animales vertebrados acuáticos }

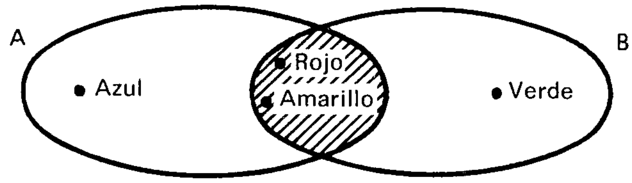
B = { Animales vertebrados terrestres }

$A \cap B$ = { Animales anfibios }



A ∩ B = { Vertebrados anfibios } (Zona rayada)

2.º



$A = \{$Rojo, Amarillo, Azul$\}$

$B = \{$Verde, Amarillo, Rojo$\}$

$A \cap B = \{$Amarillo, Rojo$\}$

3.º

$A = \{$Colores de la bandera española$\}$

$B = \{$Colores de la bandera italiana$\}$

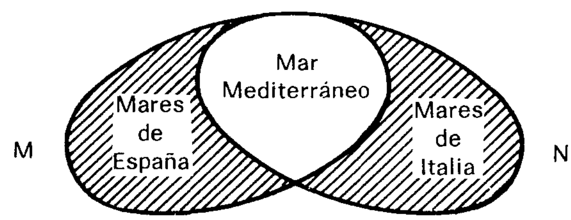
$A \cap B = \{$Color rojo$\}$

4.º

$M = \{$Mares españoles$\}$; $N = \{$Mares italianos$\}$

$M \cap N = \{$Mar Mediterráneo$\}$

$M \Delta N = \{$Atlántico, Cantábrico, Adriático, Tirreno, Ligúrico, Jónico$\}$



La unión e intersección de conjuntos gozan de las siguientes propiedades:

1. La unión de un conjunto con cualquiera de sus partes, es el propio conjunto; es decir, si $M \subset N$ entonces $M \cup N = N$.

2. La intersección de un conjunto cualquiera con uno de sus subconjuntos, es este subconjunto; es decir, si $M \subset N$ entonces $N \cap M = M$.

(*Nota*: Observemos que esta primera propiedad nos conecta la relación de inclusión con las operaciones unión e intersección de manera tal, que podemos utilizar dicha propiedad para definir las operaciones a partir de la relación de inclusión o al revés, podemos definir la inclusión conocidas las operaciones).

3. Como caso particular, cuando $M = N$, tenemos la llamada propiedad IDEMPOTENTE que se enuncia: la unión o intersección de un conjunto consigo mismo es dicho conjunto, lo que simbólicamente se expresa

$$M \cup M = M \quad ; \quad M \cap M = M$$

4. Otro caso particular lo tenemos en la propiedad de ABSORCION que expresamos así:

$$M \cup (M \cap P) = M \quad ; \quad M \cap (M \cup P) = M$$

ya que M contiene a $M \cap P$ y está contenido en $M \cup P$.

5. La propiedad CONMUTATIVA expresa el hecho de que el variar el orden en que se unen o intersecan dos conjuntos no se altera el resultado:

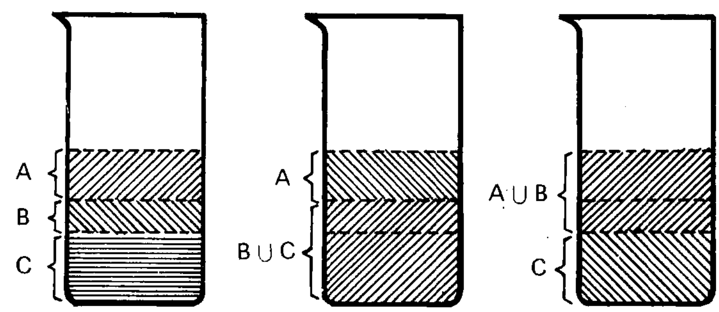
$$M \cup N = N \cup M \quad ; \quad M \cap N = N \cap M$$

6. La propiedad que nos permite reunir o intesecar con un conjunto, el resultado de la unión o intersección de otros dos, sin que varíe el resultado final al realizar dichas operaciones, recibe el nombre de ASOCIATIVA:

$$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$$

$$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$$

Ejemplo:



A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C

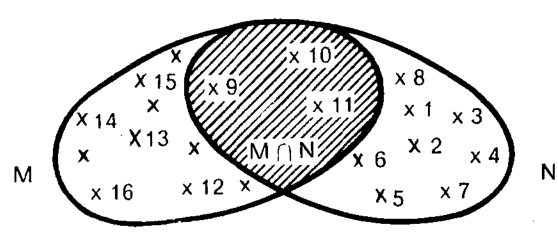
7. La propiedad DISTRIBUTIVA de la *unión* respecto de la *intersección* y de la *intersección* respecto de la *unión* se escribe:

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P) \quad ; \quad M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

Lo que podemos expresar diciendo: la unión de un conjunto con la intersección de otros dos, es el mismo conjunto que resulta al intersecar la unión del primer conjunto considerado, con cada uno de los otros dos. Exprese el lector con palabras la otra igualdad.

Los siguientes diagramas aclaran las propiedades anteriores:

M = {Personas mayores de 8 años}
N = {Personas menores de 12 años}



M ∩ N = {Conjunto de las personas mayores de 8 años y menores de 12}

Si combinamos estas operaciones con los conjuntos complementarios de otros dados, tenemos las siguientes propiedades:

1. La unión de los complementarios de M y N, respecto de X, es el complementario, respecto de X, de la intersección de M y N; así mismo, y más brevemente, la intersección de los complementarios es el complementario de la unión de los conjuntos considerados. (Leyes de De Morgan):

$$C_X M \cup C_X N = C_X(M \cap N) \quad ; \quad C_X M \cap C_X N = C_X(M \cup N)$$

2. La unión de un conjunto y su complementario respecto de X es el propio X; la intersección de un conjunto y de su complementario respecto X, es el conjunto vacío:

$$M \cup C_X M = X \quad ; \quad M \cap C_X M = \emptyset$$

7. Diferencia simétrica

Recibe el nombre de diferencia simétrica de dos conjuntos M y N, el conjunto unión de $M-N$ con $N-M$, se representa

$$M \Delta N = C_N M \cup C_M N$$

y es el conjunto constituido por todos los elementos de cada conjunto que no pertenecen al otro.

Ejemplo:

$$M \Delta N = (M-N) \cup (N-M)$$

$M = \{$mares de España$\}$ $\qquad N = \{$mares italianos$\}$

$M \Delta N = \{$Atlántico, Cantábrico, Adriático, Tirreno, Ligúrico, Jónico$\}$

(Parte rayada de la figura del ejemplo 4.º)

8. Pares ordenados

Si consideramos dos objetos simultáneamente, y los ligamos para formar con ellos un ente único, tenemos un nuevo elemento que recibe el nombre de par. Si tenemos en cuenta el orden que se da en los objetos componentes del par, éste se dice ordenado. Si a es el primer objeto componente de un par, y b el segundo componente, el par ordenado correspondiente se indica (a, b).

9. Producto cartesiano de dos conjuntos

Dados los conjuntos A y B se obtiene otro conjunto, llamado *producto cartesiano* de A por B, constituido por todos los pares ordenados que se pueden formar, tales que su primera componente sea un elemento de A, y la segunda componente sea un elemento de B; dicho conjunto se expresa así: $A \times B$.

Ejemplo:

Bailarines: $C = \{a, b, c\}$
Bailadoras: $C' = \{m, n\}$
Parejas de baile: $M = C \times C'$

C′ \ C	a	b	c
m	(a, m)	(b, m)	(c, m)
n	(a, n)	(b, n)	(c, n)

Parejas de baile: $C \times C'$

Como propiedades del producto cartesiano de dos conjuntos, enunciaremos las siguientes:

1. El producto cartesiano *no* goza de la propiedad conmutativa, ya que al cambiar el orden de los factores, los pares ordenados invierten el orden de sus componentes; es decir, que

$$A \times B \neq B \times A$$

2. Se verifica la propiedad distributiva del producto cartesiano respecto de la unión e intersección; es decir, que el producto cartesiano de un conjunto A con el conjunto unión de los conjuntos B y C, es igual a la unión de los productos cartesianos de A por B, y A por C, y análogamente, el producto cartesiano de A por B, con A por C, simbólicamente:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad ; \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

o al revés

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A) \quad ; \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

Ejemplo:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\} \quad ; \quad \mathrm{B} = \{1, 2\} \quad ; \quad \mathrm{C} = \{3, 4\} \quad ; \quad \mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\overset{\mathrm{A} \times \mathrm{B}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{p}, 1 & \mathrm{p}, 2 \\ \hline \mathrm{q}, 1 & \mathrm{q}, 2 \\ \hline \end{array}} \cup \overset{\mathrm{A} \times \mathrm{C}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{p}, 3 & \mathrm{p}, 4 \\ \hline \mathrm{q}, 3 & \mathrm{q}, 4 \\ \hline \end{array}} = \overset{\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})}{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathrm{p}, 1 & \mathrm{p}, 2 & \mathrm{p}, 3 & \mathrm{p}, 4 \\ \hline \mathrm{q}, 1 & \mathrm{q}, 2 & \mathrm{q}, 3 & \mathrm{q}, 4 \\ \hline \end{array}}$$

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \times \mathrm{C})$$

3. Si A es un subconjunto de M, y B lo es de N, entonces el producto cartesiano de A por B, es un subconjunto del producto cartesiano de M por N; es decir, que si $A \subset M$ y $B \subset N$, entonces $A \times B \subset M \times N$, ya que todo par de $A \times B$ es un par de $M \times N$, puesto que $(a, b) \in A \times B$ implica que $a \in A \subset M$, $b \in B \subset N$.

Ejemplo:

$$A = \{1, 2\} \subset M = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{a, b\} \subset N = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); \} \subset M \times N = \{(1, a); (1, b); (1, c);$$
$$(2, a); (2, b); (2, c); (3, a); (3, b); (3, c)\}$$

4. El producto cartesiano de un conjunto cualquiera por el vacío, es el conjunto vacío, puesto que al carecer de elementos uno de los factores no se puede formar ningún par y, por consiguiente, el producto también carece de elementos,

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

10. Ternas ordenadas

Se entiende por terna ordenada, tres objetos dados en un cierto orden. Dados tres conjuntos A, B, C, llamaremos *producto cartesiano* de los tres conjuntos, al conjunto formado por todas las ternas posibles que se pueden constituir con un elemento del primer conjunto como primera componente de la terna, otro del segundo conjunto como segunda componente de la terna, y otro del tercero como última componente de la terna.

Análogamente se define n-pla como n objetos ordenados, y el producto cartesiano de n conjuntos, como el conjunto de las n-plas correspondientes.

Ejemplo:

$$A=\{m\} \qquad B=\{p, q\} \qquad C=\{a, b, c\}$$
$$A\times B\times C=\{(m, p, a);\ (m, p, b);\ (m, p, c);\ (m, q, a);\ (m, q, b);\ (m, q, c)\}$$

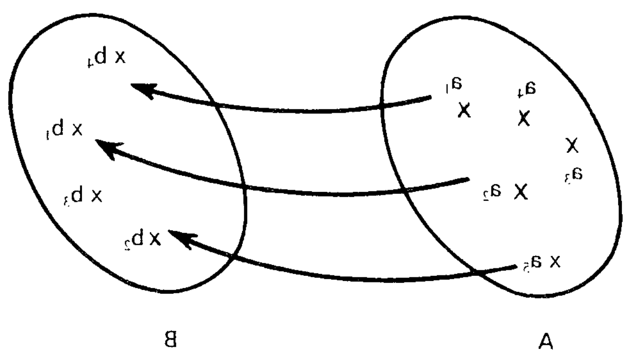
NOTA: Según la definición de producto cartesiano de dos conjuntos no se verifica la propiedad asociativa, es decir, que $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$, convendremos en considerar las expresiones anteriores equivalentes a la $A\times B\times C$.

TEMA 2. GRAFOS. CORRESPONDENCIAS. APLICACIONES

1. Grafos

Dados dos conjuntos A y B daremos el nombre de grafo G a todo subconjunto del producto $A \times B$; los elementos del grafo son, pues, pares ordenados de la forma (a, b) donde $a \in A$, $b \in B$.

Si convenimos en representar los conjuntos A y B mediante un diagrama de Venn y mediante una flecha con origen en A y extremo en b los pares que pertenecen a G, tendremos la figura siguiente:



Esta nos indica que el grafo G está constituido por los pares $\{(a_1, b_4); (a_2, b_1); (a_5, b_2)\}$. A los elementos de los conjuntos A y B que figuren, al menos una vez, como componentes de los pares que constituyen G les daremos el nombre de vértices del grafo: a los elementos de éste, es decir, a los pares ordenados del subconjunto considerado de $A \times B$, se les da el nombre de flechas del grafo.

Los grafos anteriormente descritos se dicen orientados en el sentido de que se puede distinguir entre los vértices iniciales, de los cuales parten las flechas que corresponden a las primeras componentes de cada par ordenado. elementos del grafo, y los vértices finales que son los extremos o puntas de las flechas que constituyen las segundas componentes de los elementos del grafo. Los primeros se llaman originales y los segundos imágenes.

Cambiando el sentido de las flechas, lo que equivale en nuestro caso a considerar el subconjunto del producto $B \times A$, se obtiene otro grafo distinto del primero y que llamaremos su inverso. Es decir, dado un grafo G se obtiene otro que llamaremos su inverso y denotaremos G^{-1} sin más que invertir el orden de sus flechas (o de sus pares componentes). Para el ejemplo de la figura tenemos

$$G^{-1} = \{(b_4, a_1); \ (b_1, a_2); \ (b_2, a_5)\}$$

2. Correspondencias

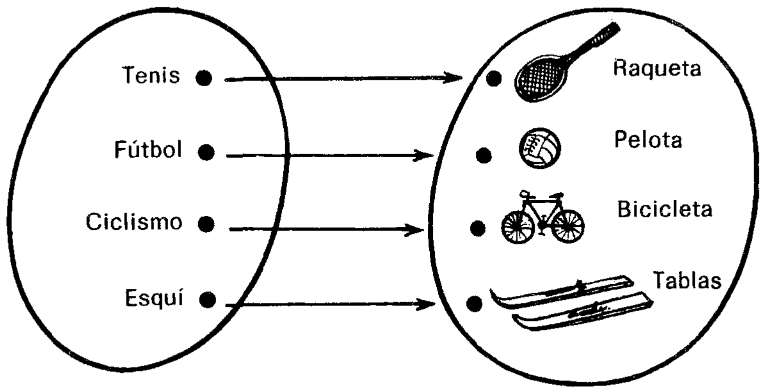
Una correspondencia entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B, en este orden, es un criterio, norma o ley que permite relacionar a cada elemento de A con uno o varios de B. Los pares de elementos correspondientes se dicen homólogos.

Ejemplo:

$A=\{$Deportes: tenis, fútbol, ciclismo, esquí$\}$

$B=\{$Utiles para el deporte: raqueta, balón, bicicleta, esquís$\}$

La correspondencia viene representada por:



Dada una correspondencia c entre los elementos de un conjunto A y los de otro conjunto B, llamaremos al conjunto A *conjunto inicial* de la correspondencia c y al conjunto B *conjunto final* de la misma. Podemos indicar estos conjuntos por $In(c)$ y $Fin(c)$, respectivamente.

Al conjunto formado por aquellos elementos de A, que tienen al menos un correspondiente en B mediante c, le damos el nombre de *conjunto original* de la correspondencia y lo denotamos $Or(c)$. Se verifica, pues, que $Or(c)\subset In(c)$.

Por último, entederemos por *conjunto imagen,* mediante la correspondencia c, al subconjunto del conjunto final constituido por todos los elementos de dicho conjunto que son homólogos, al menos, de un elemento del conjunto inicial de la correspondencia.

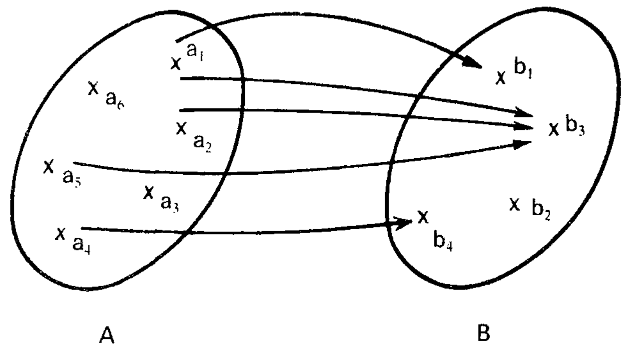
La imagen de un elemento a del conjunto original está constituida por todos sus homólogos mediante c, se indica $Im_c(a)$: En particular si a sólo tiene un homólogo, entonces $Im_c(a)$ consta de un solo elemento. Convendremos en identificar el conjunto unitario $Im_c(a)=\{b\}$ con el elemento b y diremos que la imagen de a mediante c es b.

Según lo anterior, la imagen de un cierto conjunto A mediante la correspondencia c es la unión de las imágenes de todos sus elementos. Se indica así:

$$Im_c(A)=\bigcup_{x\in A} Im_c(x)$$

Análogamente, el original de un elemento b del conjunto B es el subconjunto de A, constituido por todos los elementos de $Or(c)$ cuyo homólogo es b.

Ejemplo:



$$In(c)=A=\{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\}$$
$$Fin(c)=B=\{b_1\ b_2\ b_3\ b_4\}$$
$$Or_c(B)=\{a_1\ a_2\ a_4\ a_5\}$$
$$Im_c(A)=\{b_1\ b_3\ b_4\}$$

$$Im_c(a_1)=\{b_1\ b_3\}$$
$$Im_c(a_2)=\{b_3\}$$
$$Or_c(b_1)=\{a_1\}$$
$$Or_c(b_3)=\{a_1\ a_2\ a_5\}$$

3. Grafo de una correspondencia

Una correspondencia queda determinada si conocemos todos los pares de elementos homólogos, es decir, si conocemos el subconjunto correspondiente del producto cartesiano de $A\times B$. Dicho subconjunto es un grafo que decimos *grafo de la correspondencia*; recíprocamente dado un grafo $G\subset A\times B$ éste determina una correspondencia c única entre los conjuntos A y B, sin más que asociar a cada elemento $a\in A$, primer componente de los pares pertenecientes a G, el elemento $b\in B$, segundo componente de dichos pares.

El grafo de la correspondencia C del ejemplo anterior, sería

$$G=\{(a_1, b_1);\ (a_1, b_3);\ (a_2, b_3);\ (a_4, b_4);\ (a_5, b_3)\}$$

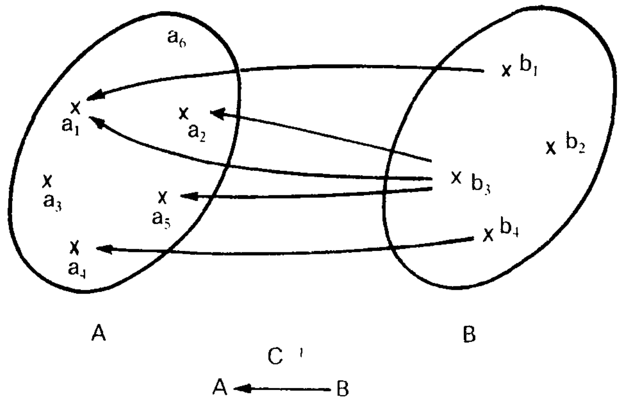
4. Correspondencia inversa de una dada

Dada una correspondencia c entre los conjuntos A y B del grafo G, podemos obtener el grafo G^{-1}, inverso del anterior, al cual le viene asignado una correspondencia única c^{-1} entre los conjuntos B y A que decimos *correspondencia inversa* de c.

Ejemplo:

El grafo de la correspondencia inversa del ejemplo anterior es:

$$G^{-1}=\{(b_1, a_1);\ (b_3, a_1);\ (b_3, a_2);\ (b_4, a_4);\ (b_3, a_5)\}$$



5. Correspondencias unívocas

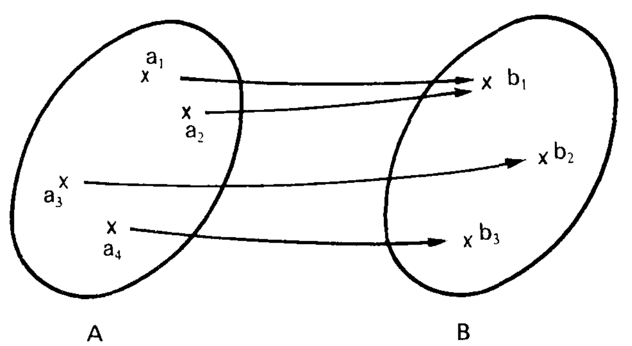
Un caso particular e importante de correspondencia es cuando cada elemento del conjunto original tiene un sólo homólogo en el conjunto final; dicho de otro modo, cuando la imagen de cada elemento del conjunto original es un conjunto unitario. Estas correspondencias se dicen *unívocas* (también reciben el nombre de funciones, especialmente cuando son correspondencias entre conjuntos de números).

6. Aplicaciones

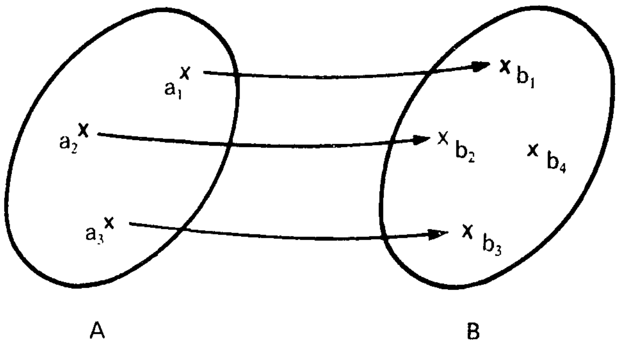
Aplicación es una correspondencia unívoca en la que $Or(c)=In(c)$, o sea una correspondencia unívoca en la que todo elemento del conjunto inicial tiene homólogo.

Una aplicación entre dos conjuntos pueden ser de tres clases:

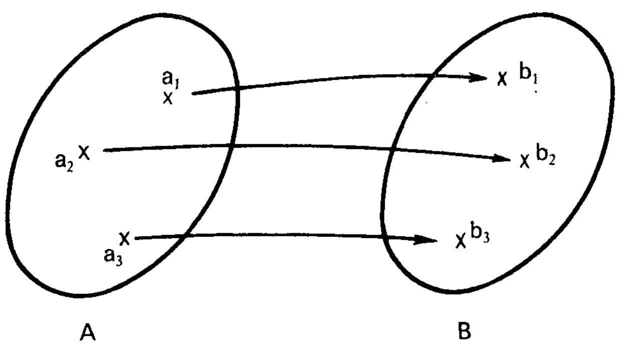
1.°) Las aplicaciones en las cuales $Im(c)=Fin(c)$, estas aplicaciones reciben el nombre de *exhaustivas*, es decir, son aquellas en que todo elemento del conjunto final tiene un homólogo, o varios, en el conjunto original.



2.°) De una aplicación f diremos que es *inyectiva*, cuando cada elemento de la imagen $Im(f)$ sea homólogo de un solo elemento del conjunto inicial $In(f)$.



3.º) Se denominan *biyectivas* o *biunívocas*, las aplicaciones tales que a todos y cada uno de los elementos del primer conjunto corresponde uno sólo del segundo y recíprocamente o, lo que es lo mismo, si es una aplicación inyectiva y exhaustiva simultáneamente.



Si entre dos conjuntos se puede definir o establecer una biyección se dice que los conjuntos son equipotentes o coordinables. Si dichos conjuntos son finitos, entonces tienen el mismo número de elementos los dos conjuntos considerados.

Ejemplos:

a) Aplicación exhaustiva

1. $A = \{$Cto. futbolistas de 1.ª división$\}$
   $B = \{$Cto. equipos de fútbol de 1.ª división$\}$

   Correspondencia: a cada futbolista le hacemos corresponder su equipo.

2. $A = \{$Cto. de números naturales$\}$
   $B = \{$Cto. de números pares$\}$

   Correspondencia: a cada número le hacemos corresponder su doble.

b) Aplicación inyectiva

1. $A=\{$Cto. de espectadores de una sesión del Teatro Liceo$\}$
   $B=\{$Cto. de localidades de la misma sesión del Teatro Liceo$\}$

   Correspondencia: a cada espectador le corresponde su localidad.

2. $A=\{$Cto. de números pares$\}$
   $B=\{$Cto. de los números naturales$\}$

   Correspondencia: a cada número le hacemos corresponder su mitad.

c) Aplicación biyectiva

1. $A=\{$Cto. de caballos que participan en una cierta carrera$\}$
   $B=\{$Cto. de jinetes que montan los caballos de la carrera anterior$\}$

   Correspondencia: a cada caballo su jinete.

2. $A=\{$Cto de los números naturales$\}$
   $B=\{$Cto. de los números cuadrados perfectos$\}$

   Correspondencia: a cada número natural se le hace corresponder su cuadrado.

7. Aplicación inversa

La correspondencia *inversa* de una aplicación biyectiva es otra biyección; si la aplicación no es biyectiva su correspondencia inversa no sólo no es biyectiva, sino que, en general, ni siquiera es una aplicación. Véanse de nuevo las definiciones y ponga el lector, aparte de los siguientes, ejemplos de esta situación.

Ejemplos:

$A=\{$Aviones en vuelo en un instante dado$\}$
$B=\{$Pilotos-jefes de los respectivos aviones del cto. $A\}$

Correspondencia c: a cada avión su piloto-jefe.

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ a_1 & \xleftrightarrow{c} & b_1 \\ a_2 & \longleftrightarrow & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & \longleftrightarrow & b_n \end{array}$$

Correspondencia inversa c^{-1}: a cada piloto-jefe su avión en vuelo.

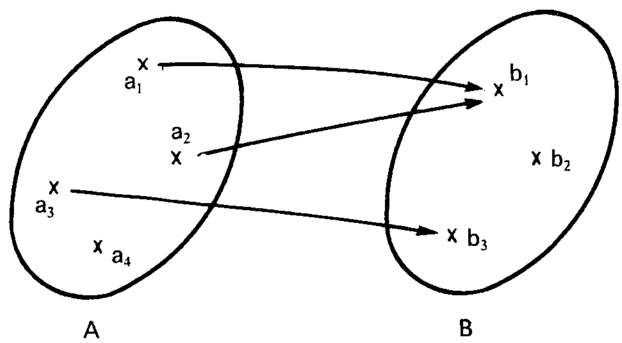
$$\begin{array}{ccc} B & & A \\ b_1 & \xleftrightarrow{c^{-1}} & a_1 \\ b_2 & \longleftrightarrow & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & \longleftrightarrow & a_n \end{array}$$

8. Correspondencias «en» y «sobre»

Las correspondencias para las cuale $Im(c)=Fin(c)$ designando por A el conjunto inicial y por B el conjunto final, diremos que es una correspondencia de A sobre B.

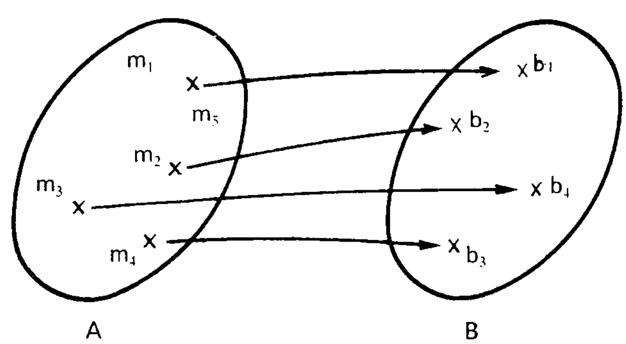
Cuando $Im(c)\subset Fin(c)$, $Im(c)\neq Fin(c)$, es decir, si en el conjunto final de la correspondencia existen elementos que no son homólogos de ningún elemento del conjunto original, diremos que la correspondencia es de un conjunto *en* el otro o brevemente que se trata de una correspondencia *en*.

1.º



Correspondencia «en»: de A *en* B

2.º



b_1

Correspondencia «sobre»: de A *sobre* B

9. Composición de aplicaciones. Aplicación producto

Dadas las aplicaciones f del conjunto A en el B, y g de B en el conjunto C, diremos que estas aplicaciones son multiplicables si $Or(g)=Im(f)$; en este caso podemos definir otra aplicación h de A en C, del modo siguiente:

Si

$$f(a)=b,\ a\in A,\ b\in B \quad \text{y} \quad g(b)=c,\ b\in B,\ c\in C$$

entonces

$$h(a)=c,\ a\in A,\ c\in C$$

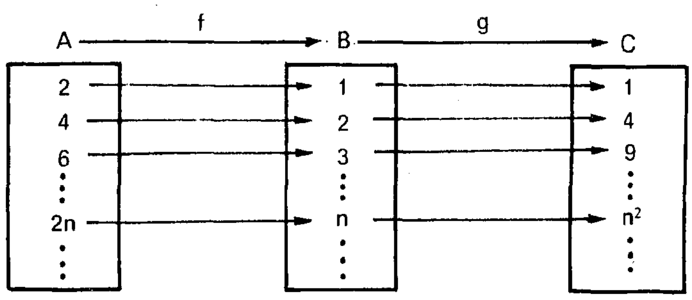
para cualquier elemento de A.

La aplicación h recibe el nombre de *aplicación producto,* o aplicación compuesta, de f y g, lo que indicamos:

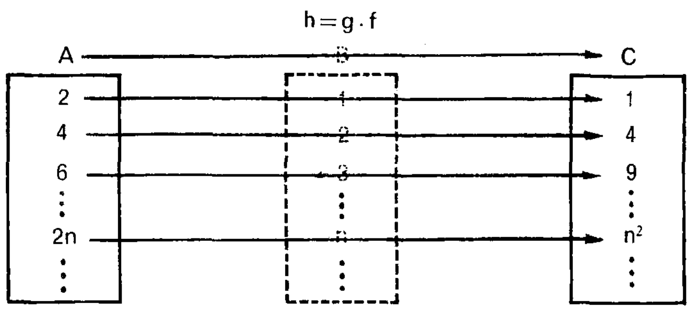
$$h = g \circ f$$

Este producto goza de la propiedad asociativa, pero no de la conmutativa.

Ejemplo:



A={Conjunto de los números pares}
B={Conjunto de los números naturales}
C={Conjunto de los cuadrados de los números naturales}



$$A = \{2, 4, 6, \dots, \}; \quad B = \{1, 2, 3, \dots\}; \quad C = \{1, 4, 9, \dots\}$$

$$x \in A \qquad f(x) = \frac{x}{2} \in B \qquad ; \qquad \frac{x}{2} \in B \qquad g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \in C$$

$$h(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$6 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 9$$

$$6 \xrightarrow{h} 9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

TEMA 3. RELACIONES BINARIAS: ORDEN Y EQUIVALENCIA CONJUNTO COCIENTE

1. Relación binaria

En término generales, una relación binaria es un criterio o norma que liga a dos elementos del mismo o distintos conjuntos. Este segundo caso está estudiado en los capítulos anteriores al tratar de las correspondencias y funciones.

Especialmente, cuando se trata de los elementos de un mismo conjunto C, consideramos que es una *relación binaria*, quedando ésta definida por un subconjunto R del producto $C \times C$, y lo expresamos en la forma siguiente:

$$a\,R\,b \quad \text{o bien} \quad a\,{}^{R}\,b$$
$$a \in C \quad b \in C$$

A ese criterio o norma establecida entre a y b se llama *Relación.*

Ejemplos:

1. En el conjunto de personas se pueden definir relaciones de parentesco:

R: «padre de...» R': «hermano de...»

Criterio o norma que permite afirmar si dos personas están o no ligadas por dichas relaciones de parentesco.

Si a está relacionado con b, se expresa así:

aRb, sí y sólo si «a es padre de b»

$aR'b$, sí y sólo si «a es hermano de b»

2. En el conjunto de número naturales se puede definir la siguiente relación:

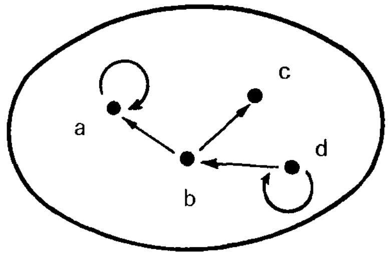
R: «múltiplo de ...»

criterio o norma que permite afirmar si dos números naturales están relacionados por R (notación aRb), sí y sólo si «a es múltiplo de b».

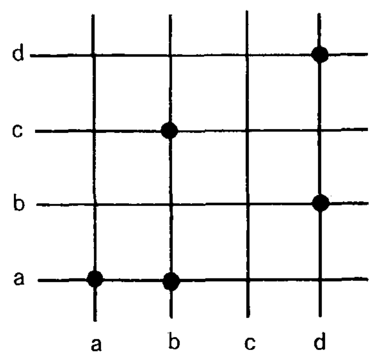
3. En un conjunto de sellos de correos podemos definir una relación, mediante el criterio de suponer relacionados los sellos del mismo valor facial.

4. Las relaciones binarias admiten diversas representaciones gráficas, entre las que señalamos:

4.1. Representación sagital o por flechas:



4.2. Representación cartesiana:



4.3. Representación matricial o en cuadro

R	a	b	c	d
a	X	X		
b				X
c		X		
d				X

Consideremos una correspondencia de un conjunto A en sí misma, de manera que a cada elemento de A le corresponda, por homólogo, otro elemento de A, siendo $R \subset A \times A$ el grafo de dicha correspondencia. Esta es una relación binaria, definida en el conjunto A. Dos elementos de A homólogos mediante R, se dice que están relacionados (el orden es esencial: a puede estar relacionado con a' y a' no estarlo con a).

El grafo de la relación indicada en las representaciones anteriores es:

$$R = \{a,a), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$$

2. Propiedades

Una relación binaria definida en un conjunto A puede gozar, entre otras, de las siguientes propiedades:

1. REFLEXIVA. Una relación binaria decimos que es reflexiva si todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir, si para todo $a \in A$ se verifica que $(a, a) \in R$.

Ejemplo: La relación de divisibilidad entre números naturales es reflexiva, ya que todo número es divisor de sí mismo.

2. SIMÉTRICA. Esta propiedad indica el hecho que ocurre cuando si un elemento a del conjunto está relacionado con otro b, entonces también b está relacionado con a.

«si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$»

Ejemplo: La relación de perpendicularidad entre rectas del plano tiene la propiedad simétrica, ya que si la recta a es perpendicular a la recta b, entonces b es perpendicular a la recta a.

3. ANTISIMÉTRICA ESTRICTA: Es la propiedad que indica el hecho contrario a la anterior, es decir que si a está relacionado con b, entonces b no está relacionado con a.

Ejemplo: La relación de paternidad es antisimétrica estricta, ya que si «a es padre de b», entonces necesariamente «b no es padre de a».

4. ANTISIMÉTRICA. Esta propiedad también es opuesta a la 2, pero en un sentido no tan fuerte como la anterior. Podemos enunciarla de la siguiente manera: si a está relacionado con b, en general b no estará relacionado con a, pero si también b está relacionado con a, es que a y b son el mismo elemento, es decir que si simultáneamente se verifica que a está relacionado con b y b está relacionado con a, entonces a es igual a b.

«si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ entonces $a = b$»

Ejemplo: La relación de inclusión entre conjuntos posee la propiedad antisimétrica, ya que:

«si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$»

5. TRANSITIVA. Siempre que un elemento a esté relacionado con otro b y éste a su vez con un tercero c, y de aquí podamos deducir que a está relacionado con c, diremos que la relación correspondiente posee la propiedad transitiva

«si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$»

Ejemplo: La relación de paralelismo entre rectas del plano es una relación transitiva, ya que si: «a es paralela a b y b es paralela a c, entonces a es paralela a c».

3. Relaciones de orden

Se llaman *relaciones de orden*, aquellas que poseen las propiedades 1, 4 y 5.

Si gozan sólo de las propiedades 3 y 5 se dicen relaciones de *orden estricto*; y en el caso en que las relaciones posean únicamente las propiedades 1 y 5, las llamaremos *relaciones de preorden*.

Si entre los elementos de un conjunto se tiene definida una relación de orden, se dice que el conjunto *está ordenado*.

Para indicar las relaciones de orden utilizaremos el símbolo $\leqslant$ que leeremos «menor o igual que»; utilizaremos el símbolo $<$ que leeremos «menor que» o «estrictamente menor que», para indicar las relaciones de orden estricto; por último las relaciones de preorden las designaremos mediante el signo $\preccurlyeq$ que leeremos «precede a».

Ejemplos:

a) La relación de inclusión entre conjuntos es una relación de orden, ya que verifica las propiedades reflexivas, antisimétrica y transitiva.

b) La relación de descendencia es una relación de orden estricto pues verifica las propiedades 3 y 5.

c) La relación de paisanaje es una relación de preorden, ya que goza de las propiedades 1 y 5.

4. Mayorantes y minorantes

Dado un conjunto ordenado C y un subconjunto S del mismo, los elementos de C, que son mayores que todos y cada uno de los elementos de S, reciben el nombre de *mayorantes* de S en C; los elementos de C que son menores que todos y cada uno de los elementos de S reciben el nombre de *minorantes* de S en C. Mayorantes y minorantes también suelen recibir el nombre de *cotas superiores* e *inferiores* de S en C, respectivamente.

Ejemplos:

a) $C=\{$Conjunto de números racionales comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{13}{2}\}$

$S=\{$Conjunto de números racionales comprendidos entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{2}$ excluidos éstos$\}$

Mayorantes de S en C, son todos los números racionales comprendidos entre $\frac{9}{2}$ y $\frac{13}{2}$

Minorantes de S en C, son todos los números racionales comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$

b) Sea $X \subset A$, es decir, $X \in P(A)$. Mayorantes de X en $P(A)$ son todos los subconjuntos de A que contienen a X, y minorantes los subconjuntos de A que están contenidos en X.

c) Sea $C=\{$Cto. de personas comprendidas entre 10 y 40 años$\}$

Sea $S=\{$Cto. de personas de edades comprendidas entre 20 y 30 años$\}$

Mayorantes de S en C son las personas mayores de 30 años y menores de 40.

Minorantes de S en C son las personas menores de 20 años y mayores de 10.

5. Infimo y supremo. Máximo y mínimo

Elemento ínfimo o, simplemente *ínfimo*, de un subconjunto S de un conjunto ordenado C, es la mayor de la minorantes de S.

Análogamente se define el *supremo* de un subconjunto S del conjunto ordenado C, como la menor de las mayorantes de S.

El ínfimo y supremo de un subconjunto S también son designados por extremo inferior y extremo superior de S, respectivamente.

En el caso en que el ínfimo de S pertenezca a S se le da el nombre de *mínimo* de S; análogamente si el supremo de S es un elemento del propio S, dicho supremo recibe el nombre de elemento *máximo* de S.

Dado un subconjunto A de un cierto conjunto ordenado B, los elementos que acabamos de definir pueden o no existir, para dicho subconjunto A.

Ejemplos:

En el ejemplo anterior a), el ínfimo de S es $\frac{3}{2}$ y el supremo es $\frac{9}{2}$, S no tiene elemento mínimo ni elemento máximo.

En el ejemplo anterior c) el conjunto S tiene ínfimo y supremo, que por pertenecer a S, son respectivamente el mínimo y el máximo de S.

6. Intervalos y segmentos

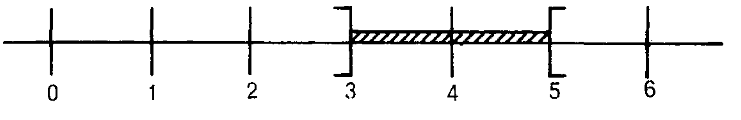
Dado un conjunto ordenado C, y dos elementos a y b del mismo, supondremos $a<b$, llamaremos *intervalo* de extremo a y b, representación $]a, b[$, al conjunto de elementos de C estrictamente mayores que a y estrictamente menores que b, es decir, todos los elementos de C comprendidos entre a y b excluidos ellos mismos, simbólicamente:

$$]a, b[=\{x \in C / a \leqslant x \;,\, x \neq a,\; x \leqslant b,\; x \neq b\}$$

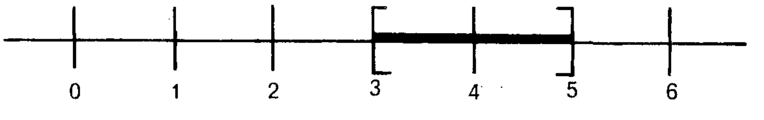
Llamaremos *segmento* de extremos a y b, $[a, b]$, al conjunto de elementos de C que son mayores o iguales al elemento a y menores o iguales a b, es decir, todos los elementos de C comprendidos entre a y b incluidos ellos mismos, simbólicamente:

$$[a, b]=\{x \in C / a \leqslant x \quad \text{y} \quad x \leqslant b\}$$

Ejemplos:



$$]3,5[=\{x/3<x<5\}$$



$$[3,5]=\{x/3 \leqslant x \leqslant 5\}$$

7. Relaciones de equivalencia

Toda relación que verifique las propiedades 1, 2 y 5, es decir que sea reflexiva, simétrica y transitiva diremos que es una relación de equivalencia. Esta relación se suele indicar mediante el símbolo $\equiv$, que se lee «equivalente a» o por el signo $=$ que se lee «igual a».

Ejemplos:

a) El paralelismo de rectas es una relación de equivalencia.

b) La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia.

c) En el conjunto de personas tener la misma nacionalidad es una relación de equivalencia.

d) Dos números enteros m y n diremos, que están relacionados, si su diferencia es múltiplo de 3; esta relación verifica las leyes:

Reflexiva:

$$nRn \qquad n-n=0=0\cdot 3$$

Simétrica:

$$nRm \Leftrightarrow n-m=3=h\cdot 3 \Leftrightarrow m-n=(-h)3 \Leftrightarrow mRn$$

Transitiva:

$$nRm \Leftrightarrow n-m=3\,h$$

$$mRp \qquad m-p=3\,k$$

$$\text{quedando} \quad n-p=3(h+k) \Leftrightarrow nRp,$$

luego esta relación es de equivalencia.

8. Clases de equivalencia

Dada una relación de equivalencia en un conjunto C, se llama *clase de equivalencia* a los subconjuntos formados por los elementos relacionados, o equivalentes, con uno determinado $a \in C$.

Toda relación de equivalencia definida entre los elementos de un conjunto A produce una clasificación de sus elementos en clases.

En efecto, consideremos una relación de equivalencia R definida en A; dados dos elementos x e y de A, tenemos que, x está relacionado con y mediante R (notación: xRy), o bien, x no está relacionado con y mediante R (notación: x no Ry). En el primer caso, para todo $a \in A$ relacionado con x tenemos que aRx, y, como xRy, la propiedad transitiva nos dice que aRy. Luego el conjunto de todos los elementos de A relacionados con uno dado, están relacionados entre sí y forman un subconjunto de A que designaremos por $\{Rx\}$, y es una clase de equivalencia.

Si, por el contrario, y no Rx resulta que $y \notin \{Rx\}$, pudiendo formar otra clase Ry con todos los elementos de A relacionados con y. Se puede seguir de este modo hasta agotar los elementos de A.

Tenemos, pues, que $\bigcup_{x \in A} \{Rx\} = A$ y, por otro lado, las clases así constituidas son disjuntas dos a dos, ya que si $Rx \neq Ry$ se verifica que $Rx \cap Ry = \emptyset$, pues si existiera un elemento m común a ambas tendríamos que mRx y mRy luego xRy, lo que implicaría que $Rx = Ry$ en contra de la hipótesis.

Ejemplos:

a) Las clases de equivalencia correspondientes a la relacion de paralelismo entre rectas del plano son las distintas direcciones en el plano, es decir, cada clase es el conjunto de rectas paralelas a una dada.

b) En el caso de la semejanza de triángulos cada clase de equivalencia está constituida por todos los triángulos semejantes a uno dado.

c) En el tercer ejemplo de relaciones de equivalencia, las clases son las distintas naciones consideradas como conjuntos de individuos de la misma nacionalidad.

d) La relación de equivalencia definida en este último ejemplo subordina las siguientes clases de equivalencia: Los múltiplos de tres, los múltiplos de tres más uno y los múltipos de tres más dos.

Una clase de equivalencia puede ser representada por uno cualquiera de sus elementos.

9. Conjunto cociente

Conjunto cociente de un conjunto C, por una relación de equivalencia R, es el conjunto de las clases de equivalencia determinadas en C por R, es decir, los elementos del conjunto cociente son los subconjuntos de C constituidos por todos los elementos de C que son equivalentes entre sí mediante R. Notación: C/R.

— En el primer ejemplo de los citados anteriormente el conjunto cociente es el conjunto de direcciones del plano.

— En el tercer ejemplo el conjunto cociente es el conjunto de naciones.

CAPITULO III

TEMA 1. COORDINACION DE CONJUNTOS

1. Conjuntos coordinables

Sea el conjunto $C=\{a, b, c, d\}$ en el que cada elemento $a \in C$ representa un alumno de una clase en la que hay libros a disposición de aquéllos. Sea $a' \in C'$ uno de esos libros pertenecientes al conjunto $C'=\{a', b', c', d'\}$

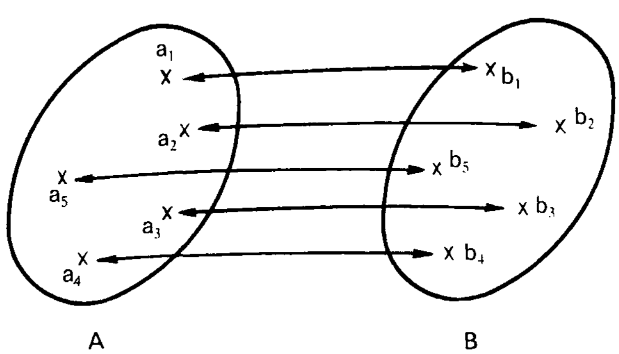
Entregando un libro a cada uno de los alumnos:

$$\begin{array}{l} a \to a' \\ b \to b' \\ c \to c' \\ d \to d' \end{array}$$

Se tiene así una correspondencia tal, que no ha sobrado ningún libro ni hay alumno que haya quedado sin él.

Decimos entonces que esos dos conjuntos son *coordinables*, o bien que existe entre ellos una *correspondencia biunívoca* o *biyectiva.*

Representemos esto gráficamente con el diagrama de Venn, en el que a cada elemento del primer conjunto corresponde uno sólo del segundo y recíprocamente.



Ejemplos:

1. Conjunto de automóviles en circulación y conjunto de conductores de los mismos son también conjuntos coordinables.

2. El conjunto de circunferencias y el conjunto de sus centros son conjuntos coordinables.

2. Propiedades

La coordinación de conjuntos es una relación de equivalencia, ya que si, como vimos en el apartado anterior, dos conjuntos son coordinables cuando entre sus elementos se puede definir una biyección, tenemos:

1. Todo conjunto es coordinable consigo mismo mediante la aplicación idéntica, $1_A(a)=A$, $\forall a \in A$, que es biyectiva. (P. reflexiva).

2. Si un conjunto A es coordinable con otro B, existe una biyección $\varphi(a)=b$, luego la aplicación inversa $\varphi^{-1}(b)=a$ también es biyección y, por tanto, B es coordinables con A. (P. simétrica).

3. Si A es coordinable con B y éste lo es con C, es decir, si $f: A \leftrightarrow B$ y $g: B \leftrightarrow C$ son biyectivos, también lo es la aplicación compuesta $(g \circ f): A \leftrightarrow C$, por tanto, A es coordinable con C. (P. transitiva).

3. Clases de conjuntos coordinables

La coordinación permite clasificar los conjuntos en clases de equivalencia, formada cada una de ellas por todos los conjuntos coordinables entre sí. Cualquiera de los conjuntos que constituyen una clase puede ser elegido como representante de la misma.

Daremos el nombre de *cardinal* de un conjunto a la clase de equivalencia a la que pertenece dicho conjunto.

Cuando los conjuntos que forman una clase de equivalencia son finitos al cardinal correspondiente se le da el nombre de *número natural.*

Según lo anterior los *números naturales* son las clases de conjuntos finitos coordinables entre sí.

4. Sucesión de números naturales

Si tomamos un conjunto con un solo elemento, es decir, un conjunto *unitario*, a su cardinal lo representamos por el símbolo 1, y lo llamamos *uno*:

$$C(a)=C'(a')=1$$

agregando un elemento más a ese conjunto, su cardinal se representa por el símbolo 2, y lo llamamos *dos*:

$$C(a, b)=C'(a', b')=2$$

continuando así sucesivamente formamos nuevos conjuntos, cuyos cardinales representamos por 3, 4, 5, ... y llamamos *tres, cuatro, cinco,* ... Estos sucesivos conjuntos que hemos ido formando al agregar una unidad al anterior y los coordinables con cada uno de ellos, forman clases de equivalencia y cada una de ellas determina un número natural.

El conjunto formado por todas ellas y que representamos por N, es decir,

$$N=\{1, 2, 3, \dots\}$$

constituye la llamada sucesión de *números naturales.*

Bastará, pues, dado un conjunto cualquiera compararlo con N y ver con qué parte de ese conjunto es coordinable, y el número que le corresponda es el *número cardinal* del conjunto.

Ejemplos:

1. Sea, por ejemplo, el conjunto de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc} \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\ a & b & c & d & e & f & g \end{array}$$

¿Cuántos triángulos hay?

Comparemos con el conjunto N y tendremos:

$$\begin{array}{l} C \ldots a\ b\ c\ d\ e\ f\ g \\ N \ldots 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \end{array}$$

Como esos dos conjuntos son coordinables, el número de triángulos, número natural, será 7, que corresponde al cardinal del conjunto.

2. Sea $A=\{\triangle, \square, \circ\}$ conjunto coordinable con $\{1, 2, 3\}\subset N$, decimos que el cardinal de A es 3.

Observemos que todo número de la sucesión se obtiene del anterior agregándole una unidad.

5. Igualdad de números naturales

Dos números naturales decimos que son iguales si representan la misma clase de conjuntos coordinables.

Propiedades de la igualdad

$a=a$	Simétrica
$a=b \Rightarrow b=a$	Reflexiva
$a=b,\ b=c \Rightarrow a=c$	Transitiva

La igualdad de números naturales es, por tanto, una relación de equivalencia.

6. Orden de los números naturales

Diremos que el número natural a es menor o igual que el número b y escribiremos

$$a \leqslant b$$

cuando los conjuntos de la clase representada por a sean coordinables con los conjuntos de la clase representada por b o con algún subconjunto de los mismos.

Propiedades del orden

$a \leqslant a$	Reflexiva
$a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$	Antisimétrica
$a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$	Transitiva

Dados dos elementos a, b de N se verifica que $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$; el orden en N es total.

7. Conjuntos bien ordenados

Un conjunto ordenado se dice *bien ordenado* si todo subconjunto del mismo tiene primer elemento.

En este sentido, decimo que: La sucesión natural está *bien ordenada.*

La operación que realizamos para formar las distintas clases de conjuntos se denomina *contar.*

Contar es, pues, efectuar la coordinación de los elementos de un conjunto con un subconjunto de N a partir del 1, de manera que a un elemento del conjunto se le hace corresponder el 1, al siguiente el 2 y así sucesivamente; el número correspondiente al último elemento del conjunto se dice que es el *número ordinal* de dicho conjunto.

El número ordinal no depende, por tanto, del orden en que se cuenten los elementos, sino del cardinal del conjunto.

TEMA 2. SISTEMAS DE REPRESENTACION NUMERICA

1. Sistemas de numeración

Como sería imposible asignar a cada número de la serie indefinida de números naturales un símbolo y un nombre, ha sido preciso dar reglas y establecer algunos convenios que permitan exponer y representar los números más fácilmente.

Para facilitar esta operación, tanto en su expresión oral como en la escrita se han formado los distintos *sistemas de numeración*.

En todo sistema, la reunión del número de unidades que forman una unidad del orden siguiente se llama *base* del sistema.

Cuando la base es *diez*, el sistema es el llamado sistema decimal que no detallamos por ser conocido.

Los convenios establecidos para los sistemas de numeración son:

a) En todo sistema de numeración de base b: b unidades de un orden constituyen una unidad del orden siguiente.

b) Para su escritura o notación:

1.°) Que cada cifra ocupe en la escritura el lugar que a su número de orden corresponde. Contamos de derecha a izquierda.

2.°) Que el valor de cada cifra por su figura, es independiente del que le corresponde por el lugar que ocupa.

3.°) La carencia de unidades de un orden se representa por el símbolo 0, que es la clase de los conjuntos carentes de elementos.

Por esa razón, la sucesión N se expresa también así: $(N, 0)$.

2. Sistema binario

Supuesto manejado con soltura el sistema decimal, conviene dar a conocer, a nivel de enseñanza básica, el modo de expresar los números en distinta base, y fundamentalmente en base 2, ya que su uso hoy día es constante como aplicación a los distintos problemas desarrollados en los ordenadores.

En el sistema binario, se utilizan para la expresión del número las únicas cifras de 0 y 1, ya que su base es 2, análogamente a como en el sistema decimal, se utilizan el 0 y nueve cifras ya que su base es 10.

Para evitar la enumeración de esas reglas generales, podemos directamente referirnos al sistema binario, únicamente sirviéndonos de partida el sistema decimal, en donde podemos escribir la serie de potencias de base 10

$$10^n, \dots 10^3, 10^1, 10^2, 10^0$$

que constituyen los distintos órdenes de unidades y en donde cualquier número puede expresarse como una suma de potencias de 10, como, por ejemplo,

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0$$

Escribamos análogamente estas relaciones referidas a la base 2.

Es decir, los distintos órdenes de unidades en base 2 vendrán expresados por la serie de sucesivas potencias:

$$2^n, \dots, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$$

y también cualquier número podrá expresarlo, como una suma de potencias de 2, como podemos ver con el mismo ejemplo anterior.

En efecto:

$$\begin{array}{lll}
2^7 < 237 < 2^8 & \text{luego} & 237 = 2^7 + 109 \\
2^6 < 109 < 2^7 & \text{luego} & 109 = 2^6 + 45 \\
2^5 < \ \ 45 < 2^6 & \text{luego} & 45 = 2^5 + 13 \\
2^3 < \ \ 13 < 2^4 & \text{luego} & 13 = 2^3 + 5 \\
2^2 < \ \ \ \ 5 < 2^3 & \text{luego} & 5 = 2^2 + 1 \\
 & & 1 = 2^0
\end{array}$$

Por consiguiente, sumando estas igualdades resulta

$$237 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

que justifica la descomposición citada.

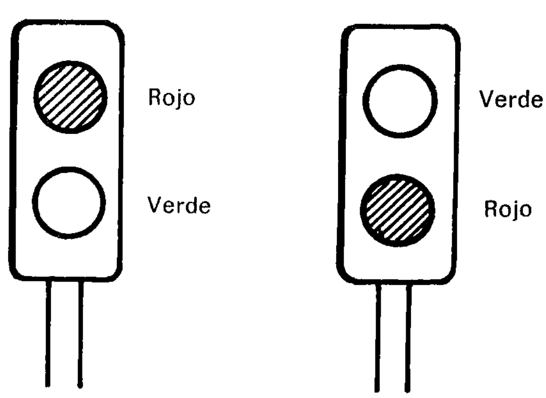
Conviene hacer observar que, por tratarse de base 2, en esta descomposición ninguna potencia que figure en la misma puede llevar coeficiente alguno distinto de la unidad.

Por tanto, teniendo en cuenta el mismo principio de la numeración decimas en cuanto al valor relativo de las cifras según el lugar que ocupen en la escritura, poniendo 0 donde falte alguna, y observando que en el anterior desarrollo de potencias de 2, faltan las correspondientes a exponente 1 y 4, es decir, las de segundo y quinto lugar, el número quedará escrito así:

$$237 = 11101101_{(2}$$

Ejemplo:

Consideremos un semáforo con sus dos luces de color rojo y verde.



Supongamos que los discos cambian de color cada medio minuto, y deseamos expresar en sistema binario el número de cambios que se realizan de 8 a 12 de la mañana.

Evidentemente el número de cambios es de 480 expresado en el sistema decimal. Por tanto, como este número, conforme a lo indicado anteriormente, puede descomponerse en suma de potencias de 2, resulta:

$$480 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5$$

Bastará colocar 0 en el lugar que corresponda a la carencia de esas potencias, y 1 en el lugar que existan éstas, ya que como se ha dicho, todos los coeficientes de estas propiedades necesariamente son la unidad, para que, siguiendo las normas establecidas, ese número quede expresado en el sistema binario en la siguiente forma:

$$111100000_{(2}$$

3. Problema inverso

El problema inverso, es decir, conocido el número en base 2, escribirlo en base decimal, podemos resolverlo simplemente procediendo en la forma siguiente:

Sea el número n dado en base binaria:

$$n = 110101001_{(2}$$

según lo establecido anteriormente, las cifras 1 indican que en la descomposición del número en potencias de la base, es decir, de 2, existen de éstas las que corresponden a los órdenes del lugar que ocupan, no existiendo en aquellos que figura 0.

Por consiguiente, existirán únicamente potencias de 2, correspondientes a los órdenes: primero, cuarto, sexto, octavo y noveno, es decir,

$$2^0, 2^3, 2^5, 2^7 \quad \text{y} \quad 2^8$$

luego el número será

$$n = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^0$$

que efectuando sus operaciones nos da

$$n = 256 + 128 + 32 + 8 + 1 = 425$$

Es decir:

$$n = 110101001_{(2} = 425$$

4. Unicidad

Dos números representados en el mismo sistema de numeración con los mismos guarismos y en el mismo orden son iguales, es decir la representación numérica en cada sistema es única.

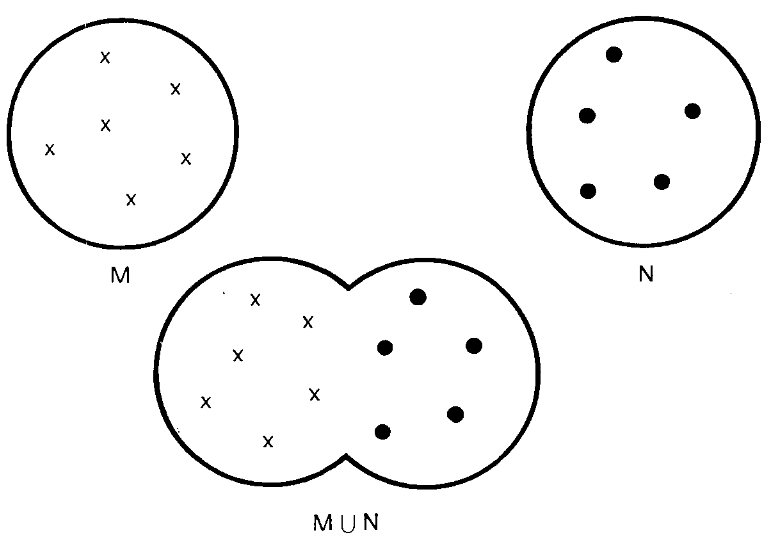
TEMA 3. OPERACIONES Y CALCULO EN N. NOCION DE ESTRUCTURA. SEMIGRUPO Y SEMIANILLO

1. Adición de números naturales

Si el número natural a representa la clase de los conjuntos coordinables con A y b la clase de los conjuntos coordinables con B, *sumar* a y b es obtener un tercer número c que representa la clase de los conjuntos coordinables con $A \cup B$. (Suponemos que A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$).

La suma de los números a y b se indica $a+b$ y se lee: «a más b».

Sean los conjuntos M y N representados por los diagramas siguientes:



La unión de esos dos conjuntos, es el conjunto formado por todos los elementos de ambos.

Si esos conjuntos son los representantes de los números 6 y 5, o lo que es lo mismo, éstos son las clases de aquéllos, la suma de esos números se indica:

$$6+5$$

y es la clase del conjunto $M \cup N$ cuyo representante es 11.

La suma de números naturales obedece a distintas leyes:

a) Uniforme

Si M y N son conjuntos representantes de m y n, y M' y N' son otros representantes de los mismos números, se verifica que:

$$m=m' \quad , \quad n=n' \quad \text{y} \quad M \cup N \approx M' \cup N'$$

y, por tanto,

$$m+n=m'+n'$$

b) Asociativa

Entre los conjuntos M, N y P se verifica

$$(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$$

por tanto, entre sus clases se verifica

$$(m+n)+p=m+(n+p)$$

c) Conmutativa

Si entre los conjuntos M y N, cuyos representantes son m y n se verifica

$$(M \cup N)=(N \cup M)$$

entre los números se verifica

$$m+n=n+m$$

d) Elemento neutro

$$M \cup \emptyset = M$$

es decir,

$$m+0=m$$

Ejemplo: En virtud de las propiedades anteriores se puede comprobar la siguiente igualdad

$$7+(3+2)+5=3+7+(5+2)$$

2. Sustracción

Dados los números naturales a y b, tales que $a \geqslant b$ se llama diferencia entre a y b al número x, tal que al sumarlo con b se obtiene a.

Escribamos: $a-b=x$, es decir, $b+x=a$.

El número a se denomina *minuendo*, el b *sustraendo* y x *diferencia.*

3. Multiplicación

Dados los conjuntos A y B representantes de las clases que determinan los números naturales a y b, llamamos producto de a por b al número natural determinado por el conjunto $A \times B$ y todos los coordinables con él.

Propiedades de la multiplicación

Este producto goza de las siguientes propiedades:

a) Uniforme

Si

$$A \approx A' \quad \text{y} \quad B \approx B'$$

los conjuntos $A \times B$ y $A' \times B'$ son coordinables y, por consiguiente, sus representantes serán iguales, es decir, vendrán expresados por el mismo número natural

$$a \cdot b = a' \cdot b'$$

b) Conmutativa

Como los conjuntos $A \times B$ y $B \times A$, son coordinables, pues el cuadro de sus elementos es el mismo, sus números naturales correspondientes $a \times b$ y $b \times a$ serán iguales, es decir,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

c) Propiedad asociativa

Como el producto de los conjuntos $(A \times B) \times C$, tiene tantos elementos como el producto de los conjuntos $A \times (B \times C)$, ambos productos son coordinables, y, por consiguiente, entre sus número naturales correspondientes se verifica que

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

d) Elemento neutro

Elemento neutro en la multiplicación es un número x, tal que cualquiera que sea el número a se verifica:

$$x \cdot a = a$$

Este elemento x es el correspondiente a la clase de los conjuntos unitarios, es decir, $x = 1$, ya que si el conjunto A es un representante de la clase a y $C = \{u\}$ es un representante del número 1, tenemos que $A \times C$ y A son conjuntos coordinables y, por tanto,

$$a \cdot 1 = a$$

e) Propiedad distributiva

Si tenemos el producto $A \times (B \cup C)$ y los productos $A \times B$ y $A \times C$, observamos que el conjunto de los pares de elementos del primer producto es el conjunto de los pares de los otros dos, es decir, que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

y, por consiguiente, se verificará entre los números naturales correspondientes la relación

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

que constituye la propiedad distributiva de la multiplicación.

Las operaciones de adición y multiplicación en IN están ligadas por la propiedad distributiva.

4. Noción de estructura matemática

Un conjunto C y una operación «o» definida entre los elementos del conjunto y que verifique unas ciertas propiedades, diremos que es una *estructura matemática.*

5. Semigrupo

En el caso que la operación «o», definida entre los elementos de C, goce de las propiedades:

1. Asociativa.
2. Conmutativa.
3. Existencia de elemento neutro.

diremos que el par (C, o) tiene estructura de *semigrupo.*

En este sentido el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con la adición anteriormente definida es un *semigrupo aditivo.*

Análogamente $\mathbb{N}$ respecto de la multiplicación es un *semigrupo multiplicativo.*

6. Semianillo

Si en un conjunto C están definidas dos operaciones «o», «$*$» respecto de cada una de las cuales C tengan estructura de semigrupo, y ligadas por la propiedad distributiva $(C, o, *)$, se dice que tiene estructura de *semianillo.*

Por consiguiente $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, es un *semianillo.*

7. Propiedades de monotonía

El orden definido (tema 1 de este capítulo) en los números naturales es compatible con las operaciones de sumar y multiplicar, es decir, se verifica que: si $a \leqslant b$ y $c \leqslant d$, entonces

$$a+c \leqslant b+d \text{ y } a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

Estas propiedades se conocen como *propiedades de monotonía* de la suma y producto de números naturales y puede el lector comprobarlos como ejercicio.

CAPITULO IV

TEMA 1. LA DIVISION ENTERA. SU MECANISMO

1. División exacta

Al definir la multiplicación de números naturales decimos que dados dos números b y c siempre se podía determinar otro número a, su producto, y escribíamos: $a=b\cdot c$.

El problema inverso, dados dos números a y b determinar otro número c tal que $a=b\cdot c$ (1), no siempre admite solución en $\mathbb{N}$. Por ejemplo, dados $a=18$ y $b=6$ podemos determinar $c=3$, tal que $18=6\cdot 3$; pero dados $a=21$ y $b=4$ no existe ningún natural c tal que $21=4\cdot c$, ya que si $c=5$, $4\cdot 5=20<21$ y si $c=6$, $4\cdot 6=24>21$.

Cuando para un cierto par de números a y b existen un tercero c cumpliendo la relación (1), diremos que a es divisible por b; la operación que permite determinar este número c se llama *división exacta* de a por b; de a decimos que es el dividendo y b el divisor, dando a c el nombre de *cociente* de la división considerada.

La operación se indica con el símbolo «:» entre dividendo y divisor, así: $a:b$, o mediante una raya que separa dividendo y divisor en este orden, $\frac{a}{b}$ o a/b, y se lee en estos casos: a dividido por b.

Ejemplos:

1) $16:4=4$, ya que $4\cdot 4=16$; $26:13=2$, ya que $13\cdot 2=26$.

2) $15:5=3$, $15:3=5$.

Propiedades

1) Si $a:b=c$, entonces $a:c=b$.

2) Si multiplicamos el dividendo por un número k, el cociente queda multiplicado por k: si $a:b=c$, entonces $(ka):b=kc$, pues

$$a=bc \qquad \text{y} \qquad ak=bck=b(kc)$$

3) Si dividendo y divisor se multiplican ambos por un mismo número, el cociente no varía: si $a:b=c$, entonces $(ka):(kb)=c$, pues $a=bc$ y $ka=bck=bkc$.

4) El cociente de la suma de dos números por otro b es la suma de los cocientes que resultan al dividir por b cada uno de los sumandos:

$$(a_1+a_2):b=(a_1:b)+(a_2:b) \quad \text{pues} \quad [(a_1:b)+(a_2:b)]\cdot b=(a_1:b)\cdot b+(a_2:b)\cdot b=a_1+a_2$$

2. División entera

Acabamos de ver en el apartado anterior que dados dos números naturales a y b no siempre se podrá encontrar un número c, tal que $bc=a$. Entonces planteamos la cuestión de esta otra manera. Dados dos números naturales a y b se trata de encontrar el *mayor* número natural c, tal que su producto por b sea *menor* o *igual* que a, es decir, un número c, tal que $bc\leqslant a$ y que $b\cdot(c+1)\geqslant a$.

La operación que permite determinar el número c se llama *división entera* de a por b, el número c es el *cociente por defecto* y la diferencia $a-bc=r$ recibe el nombre de *resto por defecto*; los números a y b se siguen llamando *dividendo* y *divisor* respectivamente en la división entera. Tenemos, pues, que $a=bc+r$, con $r<b$, ya que $a<b(c+1)=bc+b$, y por tanto, $bc+r<bc+b$ y $r<b$.

Si en lugar de considerar el número c consideramos el $c+1$ tendríamos el *cociente por exceso* y $r'=b(c+1)-a$ sería el *resto por exceso* y, por consiguiente, la suma de los restos por exceso y por defecto es igual al divisor: $r=a-bc$, $r'=b(c+1)-a=bc+b-a$ sumando tenemos $r+r'=b$.

Ejemplos:

Dividir 815 por 7

Tenemos que $7\cdot 10^2<815<7\cdot 10^3$, luego el cociente tiene tres dígitos pues está comprendido entre 100 y 999. Para calcular las centenas del cociente se tiene $7\cdot 1<8<7\cdot 2$, por tanto 1 es el primer dígito del cociente (centenas); queda $815-700=115$. Tomamos las 11 decenas y como $7\cdot 1<11<7\cdot 2$, la segunda cifra del cociente (decenas) es también 1; por último para las unidades tenemos $115-70=45$ y como $7\cdot 6<45<7\cdot 7$ la última cifra del cociente es 6 y queda $45-42=7\cdot 116+3$.

Dividir 411 por 12

Como $12\cdot 10<411<12\cdot 10^2$ el cociente está comprendido entre 10 y 99, tiene por consiguiente dos dígitos. El número de decenas del cociente lo obtenemos de $12\cdot 3<41<12\cdot 4$; quedan $411-360=51$ unidades y como $12\cdot 4<51<12\cdot 5$ tenemos las unidades del cociente, el cual es 34, y el resto viene dado por $51-48=3$, o sea que $411=12\cdot 34+3$.

3. Mecanismo y práctica de la división entera

El mecanismo de la división consiste en realizar las fases que nos permitan saber cuál es el número máximo de veces que se puede restar el divisor del dividendo, cada una de estas sustracciones da un resto parcial de la división y cuando se obtenga un resto menor que el divisor se finaliza la operación. El cociente viene dado por el número total de sustracciones.

(Este proceso es el utilizado a veces en la programación de las calculadoras, en las que, dada su rapidez operativa, no importa tanto la longitud del proceso como la sencillez del mismo; en cambio en la práctica manual de la división el proceso se simplifica como se ha indicado en los ejemplos anteriores).

Observación metodológica: Una vez comprendido el proceso de la división se debe tender a su realización automática.

4. Ejemplos y aplicaciones

Aplicamos a continuación la división para el cambio de base en los sistemas de representación numérica y damos un ejemplo de cómo se inicia un programa para efectuar divisiones con ordenador, para lo cual se ha dibujado el organigrama correspondiente y se han escrito secuencialmente las distintas fases del mismo.

a) Cambio de base en los sistemas de representación numérica

En el tema 2 del tercer capítulo hemos visto la representación de los números en distintas bases. El número $3.512_{(8}$ escrito en base 8, se puede escribir $3\cdot 8^3+5\cdot 8^2+1\cdot 8+2$ que es el número $3\cdot 512+5\cdot 64+1\cdot 8+2=1.866$ en base 10; por tanto, para pasar de un número escrito en base b al mismo escrito en base 10, basta escribir dicho número en base b en forma polinómica y efectuar las operaciones indicadas.

El problema inverso: dado un número escrito en base 10 escribirlo en base b, es el que vamos a resolver por medio de la división entera.

Dado el número A en base 10 para expresarlo en base b se divide A por b, el resto de esta división nos proporciona las unidades de A respecto de la nueva base; si el cociente c es mayor que b se efectúa una nueva división de c por b, el resto son las decenas respecto la base b, etc.; es decir,

$$A=cb+a, \text{ si } c>b \text{ tenemos } c=c_1b+a, \text{ luego}$$
$$A=(c_1b+a_1)b+a_2=c_1b^2+a_1b+a_2 \text{ si } c_1>b,\ c_1=c_2b+a_2$$
$$A=(c_2b+a_2)b^2+a_1b+a_2=c_2b^3+a_2b^2+a_1b \quad +a_2, \text{ etc.}$$

y el proceso termina cuando el cociente c_n sea menor que b.

Si, por ejemplo, queremos escribir 815 en base 7, tenemos:

$$815=116\cdot 7+3; \quad 166=16\cdot 7+4$$

luego

$$815=(16\cdot 7+4)\cdot 7+3=16\cdot 7^2+4\cdot 7+3$$

como

$$16=2\cdot 7+2; \quad 815=(2\cdot 7+2)\cdot 7^2+4\cdot 7+3=2\cdot 7^3+2\cdot 7^2+4\cdot 7+3$$

y queda

$$815=2.243_{(7}$$

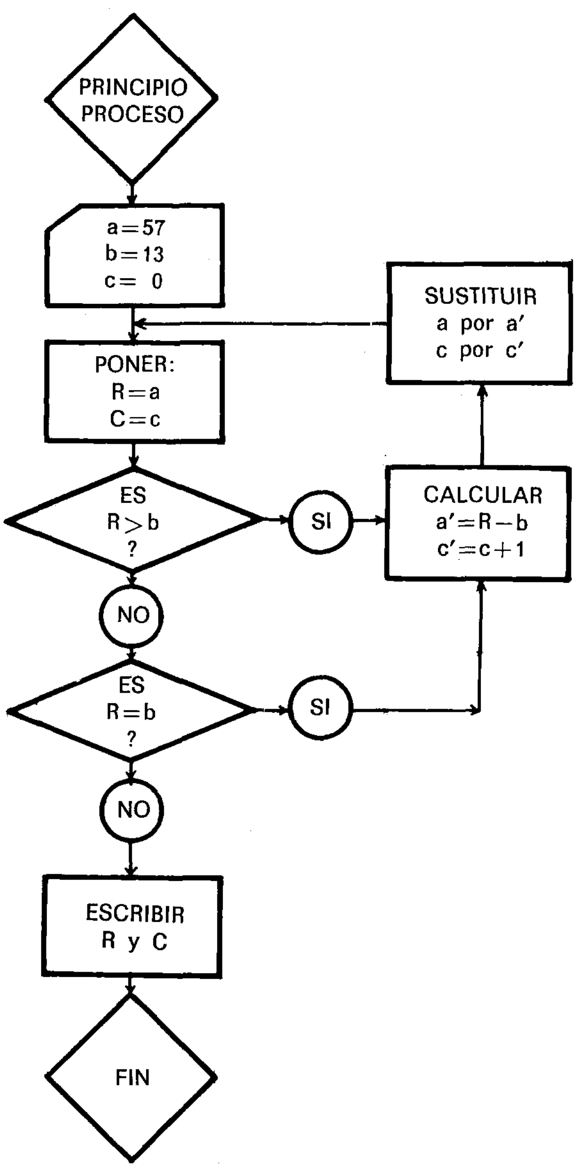
Los cálculos se pueden disponer de la siguiente manera:

815	7		
11	116	7	
45	46	16	7
3	4	2	2

unidades
decenas
centenas
millares

b) División de a por b. Organigrama y lista de secuencias

Datos $a=57$, $b=13$



1. Datos $a=57$, $b=13$; se pone $c=0$
2. Se pone: $R=57$, $C=0$
3. Es $57>13$? Sí
4. Calcular $57-13=44$, $0+1=1$
5. Sustituir 57 por 44, 0 por 1
6. Poner $R=44$, $C=1$
7. Es $44>13$? Sí
8. Calcular $44-13=31$, $1+1=2$
9. Sustituir 44 por 31, 1 por 2
10. Poner $R=31$, $C=2$
11. Es $31>13$? Sí
12. Calcular $31-13=18$, $2+1=3$
13. Sustituir 31 por 18, 2 por 3
14. Poner $R=18$, $C=3$
15. Es $18>13$? Sí
16. Calcular $18-13=5$, $3+1=4$
17. Sustituir 18 por 5, 3 por 4
18. Poner $R=5$, $C=4$
19. Es $5>13$? No
20. Es $5=13$? No
21. Escribir $R=5$, $C=4$
22. Fin

TEMA 2. RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD EN N. CONCEPTO DE MULTIPLO Y DIVISOR

1. Relación de divisibilidad

En N, y entre dos números a y b, podemos establecer una relación, llamada de divisibilidad, sí y sólo si existe un número $c \in N$, tal que se verifique la condición de ser $a = b \cdot c$. Se expresa mediante la notación $b|a$ que indica que b es *divisor* de a, o bien que a es *múltiplo* de b.

Ejemplos:

Los números 3 y 15 están relacionados, pues 3 divide a 15, o bien $3|15$, ya que existe un elemento de N, el 5 en este caso, tal que $15 = 3 \cdot 5$.

Asimismo están relacionados los números 7 y 21, 5 y 30, etc; en cambio no están relacionados los números 11 y 13, ni 6 y 23.

2. Conjunto de divisores de un número natural

Dado el número natural n, el conjunto de sus divisores, es decir, todos los elementos de N, tales que $d|n$ lo indicaremos por $D(n)$. Consta de un número finito de elementos y no es vacío, ya que $1 \in D(n)$, $n \in D(n)$.

Diremos que n es primo si $D(n) = \{1, n\}$, en caso contrario n se dice compuesto.

Ejemplos:

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$; $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$; $D(9) = \{1, 3, 9\}$;

$D(7) = \{1, 7\}$; $D(13) = \{1, 13\}$; $D(31) = \{1, 31\}$

3. Conjunto de múltiplos de un número natural

El conjunto de los múltiplos del número natural n, es decir, todos los elementos m de N, tales que $n|m$ lo indicaremos por $M(n)$, y es el conjunto infinito $\{n, 2n, 3n, \ldots\}$, llamado también la sucesión de los múltiplos de n.

Ejemplos:

$M(3)=\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$; $M(8)=\{8, 16, 24, 32, \ldots\}$; $M(10)=\{10, 20, 30, \ldots\}$

4. Descomposición de un número en producto de factores primos

Todo número compuesto admite una descomposición en producto de factores primos En efecto si a no es primo $D(a)$ contiene al menos un elemento d_1 distinto de 1 y de a, luego $a=d_1 \cdot a'$; si d_1 y a' son primos la proposición queda demostrada. Si alguno, o los dos, no son primos, se repite para ellos el mismo razonamiento y así sucesivamente, y al ser finito el número de divisores de a, resulta:

$$a=d_1 \cdot d_2 \ldots d_n$$

con $d_1, d_2, \ldots, d_n$ factores primos.

5. Unicidad de la descomposición en producto de factores primos

La descomposición de un número en producto de factores primos es única, es decir, que un número no se puede descomponer en producto de factores primos de varias formas distintas salvo el orden de los factores.

Supongamos que el número a tuviese dos descomposiciones en factores primos, con factores iguales o distintos.

Es decir:

$$a=p_1p_2 \ldots p_n \quad ,, \quad a=q_1q_2 \ldots q_n$$

El factor p_1 divide al primer producto por ser uno de sus factores, luego tiene que dividir al segundo producto, que es el mismo a, pero como son primos todos para dividirlos p_1 tiene que ser igual a uno de ellos; luego, por ejemplo, $p_1=q_1$. Continuando el mismo razonamiento con los demás factores observamos que todos los de la primera descomposición son iguales a los de la segunda. En consecuencia, la descomposición citada es única.

6. Infinitud del conjunto de los números primos

Por definición los números que no admiten descomposición en producto de factores distintos de la unidad y de él mismo, son los primos.

Hay una infinidad de números primos o, lo que es lo mismo, la sucesión de números primos es ilimitada. En efecto, si así no fuera existiría uno p, mayor que todos y consideraríamos entonces el número $p'=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p+1$, mayor que p. Si el número p' es primo tenemos contradicción con la hipótesis hecha sobre p, luego p' debe ser compuesto; y en este caso admitiría un divisor primo q mayor que p, ya que p' no es divisible por ningún primo menor que p, porque nos encontraríamos nuevamente con la contradicción de la hipótesis. Lo anterior implica que no existe un primo mayor que todos y, por consecuencia, la sucesión de los números primos es ilimitada.

7. Propiedades de la relación de divisibilidad

En virtud de la definición de la relación de divisibilidad se puede ver que dicha relación goza de las siguientes propiedades:

1. REFLEXIVA. Para todo número natural n se verifica que $n|n$, ya que existe el número natural 1, tal que $n=n\cdot 1$.

2. ANTISIMÉTRICA. Si $a|b$ y $b|a$ se verifica que $a=b$. En efecto, $a|b$ quiere decir que existe un número natural h, tal que $b=a\cdot h$, pero como por hipótesis también $b|a$ existirá otro natural k, tal que $a=b\cdot k$ y sustituyendo en la anterior igualdad tenemos $b=(b\cdot k)\cdot h=b(k\cdot h)$ lo que nos dice que $k\cdot h=1$ y, por tanto, $k=h=1$; luego $a=b\cdot 1$ ó $b=a\cdot 1$, es decir, $a=b$.

3. TRANSITIVA. Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$. En efecto, como $a|b$ existe $d\in N$, tal que $b=a\cdot d$ y como $b|c$ existe $g\in N$, tal que $c=b\cdot g=(a\cdot d)\cdot g=a\cdot(d\cdot g)$, pero $d\cdot g$ es un número natural, luego $a|c$.

La relación de divisibilidad acabamos de comprobar que es de orden, y es un orden parcial ya que existen pares de números naturales que no son comparables, es decir, que ni uno divide al otro, ni éste al primero como pasa con el 4 y el 15, por ejemplo.

8. Maximo común divisor de dos números

Sean a y b dos números naturales y sean $D(a)$, $D(b)$ los conjuntos de divisores respectivos; consideremos el conjunto intersección $D(a)\cap D(b)=D(a,b)$ constituido por todos los divisores comunes a a y b, este conjunto no es vacío ya que $1\in D(a,b)$ y es un subconjunto finito de N; por tanto, respecto del orden usual, tiene un elemento máximo d al cual llamaremos máximo común divisor de a y b, se escribe m.c.d.$(a,b)=d$ o $a\wedge b=d$. Si $D(a,b)=1$ se dice que a y b son primos entre sí.

Para obtener el máximo común divisor de a y b procederemos del siguiente modo, conocido como *algoritmo de Euclides*: supongamos $a>b$ entonces $a=b\cdot c+r_1$, con $r_1<b$ luego los divisores comunes a a y b son comunes a b y r_1, ya que $r_1=a-b\cdot c$. Reiteramos este proceso con b y r_1 poniendo $b=r_1\cdot c_1+r_2$, $r_2<r_1$ y, análogamente, los divisores comunes a b y r_1 son comunes a r_1 y r_2, etc., es decir, $D(a,b)=D(b,r_1)=D(r_1,r_2)=D(r_2,r_3)=\ldots$ con $a>b>r_1>$ $>r_2>r_3>\ldots$ puesto que números menores que a sólo hay en cantidad finita la cadena debe terminar, lo cual quiere decir que el último elemento de la misma es cero o lo que es equivalente que un cierto r_n es divisor de r_{n-1}. Este r_n es el m.c.d. buscado.

Ejemplos:

$D(18,12)=D(18)\cap D(12)=\{1,2,3,6,9,18\}\cap\{1,2,3,4,6,12\}=\{1,2,3,6\}$
m.c.d.$(18,12)=6$

$D(9,16)=D(9)\cap D(16)=\{1,3,9\}\cap\{1,2,4,8,16\}=1$
m.c.d.$(9,16)=1$; 9 y 16 son primos entre sí.

Hallar el m.c.d.(68,51); $68=1\cdot 51+17$, $51=3\cdot 17+0$, luego m.c.d.(68,51)$=17$. Hallar el máximo común divisor de los números 93 y 217: se divide 217 entre 93, $217=2\cdot 93+31$ se divide 93 entre 31, $93=3\cdot 31+0$ y el último resto distinto de cero que es 31 nos da el máximo común divisor pedido.

9. Mínimo común múltiplo

Para indicar el conjunto de múltiplos comunes a a y b escribimos $M(a,b)$ y, claramente, representa el conjunto $M(a)\cap M(b)$. Este conjunto no es vacío pues al menos pertenece a él $a \cdot b$, por ser un subconjunto de N está ordenado por el orden usual respecto del cual tiene un primer elemento m. Dicho elemento m recibe el nombre de mínimo común múltiplo de a y b. Notación: m.c.m. (a, b) o $a \vee b$.

Ejemplos:

$M(18, 30) = M(18) \cap M(30) = \{18, 36, 54, 72, 90, \ldots\} \cap \{30, 60, 90, \ldots\} = \{90, \ldots\}$

m.c.m.$(18, 30) = 90$;

$M(3, 6) = M(3) \cap M(6) = \{3, 6, \ldots\} \cap \{6, \ldots\} = \{6, \ldots\}$

luego m.c.m.$(3, 6) = 6$;

$M(2, 5) = M(2) \cap M(5) = \{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\} \cap \{5, 10, \ldots\} = \{10, \ldots\}$

m.c.m.$(2, 5) = 10$

Proposición: El producto de dos números es igual al producto del mínimo común múltiplo por el máximo común divisor de ambos números, es decir, si los números son a y b, d su m.c.d. y m su m.c.m., entonces tenemos:

$$a \cdot b = m \cdot d$$

Demostración: Sea $a = a_1 a_2 \ldots a_p$ y $b = b_1 b_2 \ldots b_q$ la descomposición en factores primos de los números a y b. Sea $d = d_1 d_2 \ldots d_n$ el m.c.d. (a, b), por tanto $d_1 d_2 \ldots$ y d_h factores primos de d dividirán a a y b y coincidirán por tanto con los factores $a_1, a_2, \ldots a_h$ y $b_1 b_2 \ldots b_h$; por tanto $a = d \cdot a_{h+1} \ldots a_p$ y $b = d \cdot b_{h+1} \ldots b_q$ donde $b' = a_{h+1} \ldots a_p$ y $a' = b_{h+1} \ldots b_q$ carecen de factores comunes, asimismo si m es el mínimo común múltiplo de a y b tenemos que $m = a \cdot a'$ y $m = b \cdot b'$; luego, m.d.$= a \cdot a' \cdot d = a \cdot b$, ya que $b = a' \cdot d$.

Consecuencia de la proposición anterior es que el m.c.m. de los dos números queda determinado sin más que dividir el producto de los números por su m.c.d., el cual podemos determinarlo por el algoritmo de Euclides.

Ejemplos:

Hallar el m.c.m. (18,30); se halla m.c.d. (18,30) que es $30 = 1 \cdot 18 + 12$, $18 = 1 \cdot 12 + 6$, $12 = 2 \cdot 6 + 0$, 6 es el m.c.d. (18,30); luego, $18 \cdot 30/6 = 18 \cdot 5 = 90$ es el m.c.m. pedido:

m.c.m. $(18,30) = 90$

Hallar el m.c.m. (9, 17); como 9 y 17 son primos entre sí su m.c.d. es 1, luego el m.c.m. es $9 \cdot 17 = 153$.

Propiedades de las operaciones m.c.d. y m.c.m, y estructura de N respecto de ambas.

Dados dos números naturales a y b la operación de obtener su m.c.d. nos determina otro número natural d y la operación de obtener el m.c.m. determina otro número natural m. Respecto de la relación de divisibilidad, diremos que un número «precede» o es «anterior» a otro si el primer número es divisor del segundo y diremos que le «sigue» o es «posterior» si es múltiplo del mismo. En este sentido el m.c.d. de dos números es el elemento máximo de los que preceden a ambos números y, análogamente, el m.c.m. es el menor de los números que siguen a los dos dados.

Tenemos pues definidas en N dos operaciones $\vee$, $\wedge$, las cuales determinan para cada par de elementos de N, un extremo superior y un extremo inferior respecto de la relación de divisibilidad.

De la definición de las operaciones $\wedge$, $\vee$ se deducen las siguientes propiedades:

1. *Idempotente:* el m.c.d. (a, a) y el m.c.m. (a, a) es a, simbólicamente escribimos:

$$a \wedge a = a \quad ; \quad a \vee a = a$$

2. *Conmutativa:* el m.c.d. y el m.c.m. de dos números no depende del orden en que consideremos dichos números, lo que podemos expresar escribiendo:

$$a \wedge b = b \wedge a \quad ; \quad a \vee b = b \vee a$$

3. *Asociativa:* el m.c.d. y el m.c.m. de tres o más números, se puede determinar hallando el m.c.d. (el m.c.m.) de dos de ellos, con este número y el tercero de los dados se calcula el m.c.d. (el m.c.m.) de los mismos que es el m.c.d. (el m.c.m.) de los tres números dados y lo anterior no depende del orden en que se realicen los distintos pasos; brevemente:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \quad ; \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

4. *Absorción:* el m.c.d. de un número a y de un múltiplo del mismo número es el propio a. El m.c.m. de un número a y de un divisor del mismo también es el propio a; escribimos en particular:

$$(a \vee b) \wedge a = a \quad ; \quad (a \wedge b) \vee a = a$$

Si comparamos las propiedades anteriores con las de las operaciones $\cap$, $\cup$ definidas en el capítulo II, vemos que, tanto en aquel caso como en éste, la situación es análoga: un conjunto (que puede ser $P(A)$ o N) en que están definidas dos operaciones con las propiedades anteriores y una relación de orden parcial. Entre las operaciones y la relación de orden existe una mutua interdependencia en el sentido de que definido el orden quedan determinadas las operaciones verificando las propiedad 1 y 4, y recíprocamente si las operaciones son dadas, éstas subordinan un orden parcial en el conjunto. La estructura anterior recibe el nombre de *retículo* y será estudiado en el tema siguiente.

Ejemplo: Dados los números $a=2$, $b=6$, $c=9$ comprobar las propiedades 1 y 4.

11. Condición de divisibilidad de un número por otro

La condición de divisibilidad de un número a por otro b se obtiene de la siguiente equivalencia «$b|a$ equivale a decir $a=b \cdot c$ con $c \in N$», de la que se deduce que todos los factores primos de la descomposición de b pertenecen a la descomposición en producto de factores primos de a y solamente pueden formar parte en la descomposición de b factores primos que figuren en la descomposición de a, por consiguiente: un número b divide a otro a sí y sólo si la descomposición de b en factores primos contiene factorec que estén en la descomposición de a un número menor o igual de veces.

Ejemplo: 9 divide a 18, ya que $9=3 \cdot 3$ y $18=2 \cdot 3 \cdot 3$; 21 divide a 84, ya que $21=3 \cdot 7$ y $84=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Teorema de Euclides: Si un número divide al producto de dos factores y es primo relativo con uno de ellos, entonces divide al otro factor.

Demostración. En efecto, supongamos que el número d divide al producto de $a \cdot b$, luego todos los factores de la descomposición de d pertenecen a la descomposición de $a \cdot b$, pero por hipótesis d es primo con uno de ellos; sea $D(d, a)=1$, y ningún factor de la descomposición de d pertenece a la descomposición de a, por tanto todos los factores de las descomposición de d deben pertenecer a la descomposición de b.

Corolario. Si un número primo divide al producto de dos factores, divide al menos a uno de ellos.

12. Criterios para la obtención del m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números

Dados los números se descomponen en producto de factores primos y tenemos los siguientes:

Criterio 1. El m.c.d. de dos o más números descompuestos en sus factores primos es el número que se obtiene formando el producto de los factores primos comunes a cada una de las descomposiciones de los números considerados y repetidos el mínimo número de veces que figuren en cada una de las descomposiciones, es decir, cada factor primo debe estar afectado del exponente mínimo con que figure en cada una de las descomposiciones.

Criterio 2. El m.c.m. de dos o más números descompuestos en sus factores primos, se obtiene formando el producto de los factores primos distintos que figuran en cada descomposición con los mayores exponentes con que aparecen en las mismas.

Ejemplos:

Hallar el m.c.d. $(18, 42)$, $18=2\cdot 3^2$, $42=2\cdot 3\cdot 7$, m.c.d. $(18, 42)=2\cdot 3=6$.

Hallar el m.c.d. $(16, 40, 72)$, $16=2^4$, $40=2^3\cdot 5$, $72=2^3\cdot 3^2$, luego m.c.d. $(16, 40, 72)=2^3=8$.

Hallar el m.c.m. $(21, 45)$, $21=3\cdot 7$, $45=3^2\cdot 5$, entonces el m.c.m. $(21, 45)=3^2\cdot 5\cdot 7=315$.

Hallar el m.c.m. $(6, 8, 33)$, $6=2\cdot 3$, $8=2^3$, $33=3\cdot 11$, por consiguiente m.c.m. $(6, 8, 33)=$ $=2^3\cdot 3\cdot 11=264$.

TEMA 3. NOCION DE RETICULO. INICIACION A LA TEORIA DE LA DIVISIBILIDAD

1. El concepto de retículo

Un conjunto ordenado C decimos que es un *retículo* cuando para todo par de elementos y respecto de la relación de orden definida en C, existe una mínima cota superior y una máxima cota inferior.

2. Operaciones en un retículo. Propiedades. Definición algebraica de retículo

En todo retículo se pueden definir dos operaciones abstractas, que llamaremos «sup» e «inf» y designaremos por «$\vee$», «$\wedge$», respectivamente, de la manera siguiente:

$$a \vee b = \text{ext. sup. } \{a, b\} \quad ; \quad a \wedge b = \text{ext. inf. } \{a, b\}$$

Estas dos operaciones y en virtud de su definición, gozan de las siguientes propiedades:

1. Idempotente: $a \vee a = \text{ext. sup. } \{a, a\} = a$
   $a \wedge a = \text{ext. inf. } \{a, a\} = a$

2. Conmutativa: $a \vee b = \text{ext. sup. } \{a, b\} = \text{ext. sup. } \{b, a\} = b \vee a$
   $a \wedge b = \text{ext. inf. } \{a, b\} = \text{ext. inf. } \{b, a\} = b \wedge a$

3. Asociativa: $(a \vee b) \vee c = \text{ext. sup. } \{\text{ext. sup. } \{a, b\}, c\} =$
   $= \text{ext. sup. } \{a, \text{ ext. sup. } \{b, c\}\} = a \vee (b \vee c)$
   $(a \wedge b) \wedge c = \text{ext. inf. } \{\text{ext. inf. } \{a, b\}, c\} =$
   $= \text{ext. inf. } \{a, \text{ ext. inf. } \{b, c\}\} = a \wedge (b \wedge c)$

4. Absorción: $(a \vee b) \vee = \text{ext. inf. } \{\text{ext. sup. } \{a, b\}, a\} = a$
   $(a \wedge b) \wedge = \text{ext. sup. } \{\text{ext. inf. } \{a, b\}, a\} = a$

Recíprocamente, si en un conjunto C tenemos definidas, entre sus elementos, dos operaciones, verificando las propiedades 1 a 4, podemos establecer entre los elementos de C una relación de orden $\leqslant$ del modo siguiente:

$\forall\, a, b, \in C$ diremos que $a \leqslant b$ sí y sólo si $a \vee b = b$ o también, si, y sólo si, $a \wedge b = a$.

El conjunto C queda ordenado por $\leqslant$ y se verifica que para todo par de elementos, p, q de C, se tiene que:

$$\text{ext. sup. } \{p, q\} = p \vee q \quad ; \quad \text{ext. inf. } \{p, q\} = p \wedge q$$

Por tanto, el retículo lo podemos considerar como conjunto ordenado o como conjunto con dos operaciones, ya que son equivalentes.

3. Retículo distributivo

Si las operaciones $\vee$, $\wedge$ de un retículo verifican la propiedad distributiva:

Propiedad distributiva: $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

diremos que el retículo es un retículo distributivo.

4. Retículo complementario. Cotas universales

Cuando respecto del orden definido en C existe un máximo absoluto, que designaremos por S, y un mínimo absoluto, que designaremos por I, se dice que C posee *cotas universales* y para los elementos de C podemos definir el elemento *complementario.*

Dado $a \in C$, diremos que $a' \in C$ es elemento complementario de a si, y sólo si,

$$a \vee a' = S \quad ; \quad a \wedge a' = I$$

Si $\forall a \in C \ \exists a' \in C$, verificando las dos condiciones anteriores, se dice que el retículo C es un retículo complementario.

Los elementos minimales para el orden en C reciben el nombre de *átomos.*

Un retículo distributivo y complementario se dice que es un *álgebra de Boole.*

Como casos particulares de retículos, tenemos el conjunto $P(X)$ de las partes de X. Como vimos en el Capítulo II era un álgebra de Boole.

Otro ejemplo de retículo lo hemos visto en el tema 2 del presente capítulo al estudiar la divisibilidad entre números naturales, el retículo $(\mathbb{N}, /)$ tiene átomos que son los números primos y es distributivo, puesto que se verifica:

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad \text{y} \quad (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

es decir, que el mínimo común múltiplo de c y el máximo común divisor de a y b es el máximo común divisor del mínimo común múltiplo de a y c, y el mínimo común múltiplo de b y c. Enunciado análogo para la segunda igualdad.

Demostremos que se verifica $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$:

Sea p un factor de la descomposición en factores primos de $(a \wedge b) \vee c$, es decir, «$p \in D(a, b)$» o «$p \in D(c)$»; luego «$p \in D(a)$ y «$p \in D(b)$» o «$p \in D(c)$» lo cual implica «$p \in D(a)$ o $p \in D(c)$» y «$p \in D(b)$ o $p \in D(c)$», quiere esto decir que p pertenece a la descomposición en factores de $(a \vee c) \wedge (b \wedge c)$. Recíprocamente, si p es un factor de la descomposición de

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

entonces

$$«p \in D(a) \quad \text{o} \quad p \in D(c)» \quad \text{y} \quad «p \in D(b) \quad \text{o} \quad p \in D(c)»,$$

lo cual implica que

$$«p \in D(a) \quad \text{y} \quad p \in D(b)» \quad \text{o} \quad «p \in D(c)»,$$

luego p es un factor de la descomposición de $(a \wedge b) \vee c$.

Demostración análoga para la segunda igualdad. El retículo $(\mathbb{N}, /)$ es pues distributivo, no así complementario, ya que si bien posee una cota inferior universal, la unidad en este caso, carece de cota superior universal y no se puede definir el complementario de cada elemento de $\mathbb{N}$, no es, por tanto, este retículo un álgebra de Boole.

5. Divisibilidad en un retículo cualquiera. Propiedades del m.c.d. y m.c.m. de dos números

Según lo anterior, en todo retículo se pueden definir las operaciones para obtener el supremo e ínfimo de cada par de elementos. Las propiedades que enunciamos a continuación, referidas al m.c.d. y m.c.m. de los números naturales, tienen su traducción paralela al caso de un retículo cualquiera. Tanto estos enunciados como las demostraciones correspondientes puede realizarlas el lector como ejercicios convenientes.

1. Todo divisor de dos o más números lo es de su m.c.d.

2. Todo múltiplo de dos o más números lo es de su m.c.m.

3. El producto de dos números es igual al producto de su m.c.d. por su m.c.m.

4. Si multiplicamos dos números por otro k, el m.c.d. y el m.c.m. de dichos números queda multiplicado por k:

$$k(a \wedge b) = (ka) \wedge (kb) \quad ; \quad k(a \vee b) = (ka) \vee (kb) \quad (\textit{Propiedad distributiva})$$

5. La división por un divisor común a dos números a y b es distributiva respecto de las operaciones

$$\frac{a \wedge b}{k} = \frac{a}{k} \wedge \frac{b}{k} \quad : \quad \frac{a \vee b}{k} = \frac{a}{k} \vee \frac{b}{k}$$

o lo que es lo mismo: si dividimos dos números por un divisor común su m.c.d. y su m.c.m quedan divididos por dicho número.

6. Al dividir dos números por su m.c.d. los cocientes obtenidos son primos entre sí y recíprocamente, si al dividir dos números por un tercero los cocientes son primos entre sí el tercer número es m.c.d. de los dos primeros.

7. Los cocientes de dividir el m.c.m. de dos números por estos números son primos entre sí y recíprocamente.

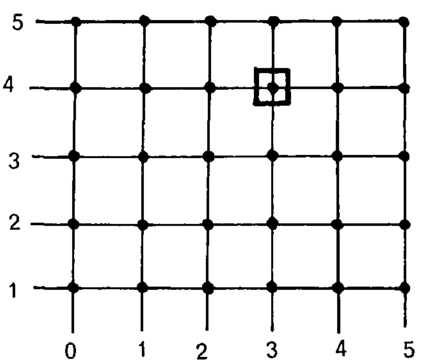
CAPITULO V

TEMA 1. INTRODUCCION A LOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS: Q^+ REPRESENTACION Y EQUIVALENCIA. ORDEN EN Q^+

1. Conjunto F de las fracciones

Las fracciones consideradas como pares ordenados de números naturales, *númerador* y *denominador*, con la segunda componente distinta de cero, surgen de manera natural al considerar la partición de una unidad concreta en n partes iguales, o m unidades subdivididas en n partes iguales. La expresión abstracta de cada una de esas partes resultantes de la subdivisión en su aspecto cuantitativo, se indica: $1/n$ o m/n con el par de números naturales $(1, n)$ o (m, n), y recibe el nombre de fracción.

El conjunto F de las fracciones es, pues $N \times N^*$, es decir, el producto cartesiano del conjunto de los números naturales por el mismo conjunto sin el cero. Este producto cartesiano admite una representación mediante una cuadrícula, como se indica en la figura, formada por un conjunto de semirrectas que representan los elementos de N y otro conjunto



de semirrectas que se cortan perpendicularmente con las anteriores y representan los elementos de N^*; los puntos de intersección, resaltados en la figura, representan las fracciones. Así, por ejemplo, en la figura se ha marcado el punto (3,4) que representa la fracción 3/4.

2. Relación de equivalencia entre los elementos de F

Entre los elementos de F, definimos la siguiente relación R: diremos que las fracciones a/b y c/d están relacionadas mediante R si, y sólo si, se verifica que $a \cdot d = c \cdot b$.

Ejemplos:

Las fracciones $1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, \ldots$ están todas relacionadas entre sí ya que dos cualesquiera de entre ellas, $3/6$ y $5/10$, por ejemplo, verifican la condición; para las dos escogidas tenemos $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$, y, en general, $h/2h$, $k/2k$ están relacionadas puesto que $h \cdot 2k = k \cdot 2h$ para todo h y k naturales.

La relación que se acaba de definir es una relación de igualdad o de equivalencia, ya que verifica las propiedades que caracterizan a las mismas. En efecto, se cumplen las propiedades:

1. REFLEXIVA: $a/b \, R \, a/b$ puesto que $a \cdot b = a \cdot b$.

2. SIMÉTRICA: $a/b \, R \, c/d$ implica $c/d \, R \, a/b$, ya que si $a \cdot d = c \cdot b$ también $c \cdot b = a \cdot b$ de donde se obtiene la implicación enunciada.

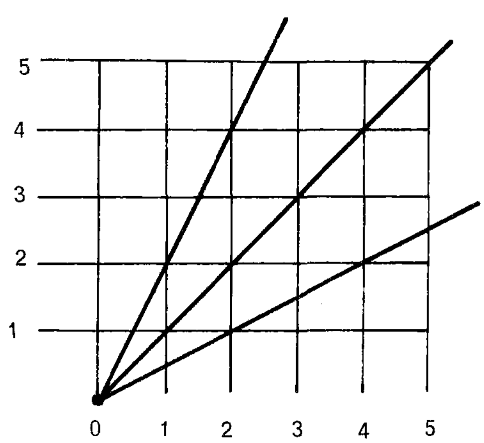
3. TRANSITIVA: si $a/b \, R \, c/d$ y $c/d \, R \, h/k$, entonces $a/b \, R \, h/k$. En efecto, la hipótesis expresa que $a \cdot d = c \cdot b$ y $c \cdot k = h \cdot d$ multiplicando estas dos igualdades miembro a miembro tenemos $a \cdot d \cdot c \cdot k = c \cdot b \cdot h \cdot d$ y suprimiendo los factores c y d comunes a ambos miembros de la igualdad queda $a \cdot k = h \cdot b$, lo que quiere decir que $a/b \, R \, h/k$.

La relación R, definida entre las fracciones, es pues de equivalencia y a partir de aquí se indicará simplemente con el signo «=», es decir, que para expresar que dos fracciones son equivalentes escribiremos $a/b = c/d$.

3. Conjunto de los números racionales positivos: Q^+

La relación R de equivalencia definida en el conjunto F de las fracciones, clasifica los elementos de F en clases de equivalencia. Cada una de estas clases de equivalencia están formada por todas las fracciones relacionadas entre sí mediante R.

En el gráfico adjunto se han representado estas clases de equivalencia, mediante semirrayos que, partiendo de cero, pasan por todos los puntos que representan fracciones equivalentes entre sí.



El conjunto cociente F/R constituido por las clases de equivalencia de los elementos de F mediante la relación R, se puede representar por el conjunto de semirrayos; este conjunto cociente recibe el nombre de conjunto de los números racionales positivos y se designa por Q^+; los números racionales positivos son elementos de Q^+ y están constituidos por una clase de fracciones equivalentes entre sí.

Cada clase de equivalencia puede ser representada por uno cualquiera de los elementos que la constituyen, por tanto una fracción representa un número racional, pero también cualquier fracción equivalente a la anterior representa el mismo número racional. Recíprocamente un número racional está constituido por una fracción, que le representa, y por todas sus equivalentes.

Ejemplo: Las fracciones 3/4 y 9/12 son equivalentes y ambas representan el mismo número racional.

4. Representación canónica de un número racional. Fracciones irreducibles

Cuando en una clase de equivalencia existe un elemento de la misma que se distingue de las demás, por cuanto presenta ciertas ventajas para representar dicha clase, se le suele llamar «*representante canónico*» de la misma En el caso presente existen fracciones que son más simples y conviene elegirlas como representantes del correspondiente número racional, son las llamadas fracciones *irreducibles.*

Podemos definir las fracciones irreducibles como las fracciones cuyas componentes carecen de divisores comunes. Dada una fracción f que representa al número racional r, o es irreducible o existe una fracción irreducible f' equivalente a f y que, por tanto, representa el mismo número racional; en efecto: sea f la fracción a/b, si es irreducible ya está comprobado el aserto anterior, si a/b no es irreducible entonces $a=a'\cdot c$ y $b=b'\cdot c$, donde c representa los factores comunes al numerador y denomidor, y la fracción a'/b' es irreducible pues a' y b' carecen de divisores comunes, y es equivalente a la fracción a/b, ya que

$$a\cdot b'=a'\cdot c\cdot b'=a'\cdot b$$

y ambas representan el mismo número racional r como afirmábamos.

El proceso que nos permite pasar de una fracción cualquiera a otra equivalente, e irreducible, recibe el nombre de *simplificación de fracciones.* En virtud de lo anterior para simplificar fracciones basta suprimir los divisores comunes a numerador y denominador con lo que se obtiene otra fracción equivalente e irreducible.

Ejemplos:

Simplificar las fracciones 8/6; 12/4; 3/9; 1/7; 24/17; 18/12; 21/7; 19/8; 31/33.

Dada la fracción 5/15 encontrar otras fracciones que representen el mismo número racional y encontrar el representante canónico del mismo.

(Está claro que en el primer caso tenemos respectivamente 4/3, 3, 1/3, 1/7, 24/17, 3/2, 3, 19/8, 31/33, y en el segundo 2/6, 3/9, 4/12, 6/18, etc., y el representante canónico es 1/3).

5. Orden en Q^+

Se trata ahora de definir una relación de orden en el conjunto Q^+ que sea una ampliación del orden natural de N y compatible con las operaciones, suma y producto, a definir, tema 2 de este capítulo, en Q^+.

De entre los distintos órdenes que se pueden definir en Q^+ interesará en primer lugar aquel que afecte por igual a todas las fracciones equivalentes, es decir, interesará un orden no sobre las fracciones, sino sobre las clases. La consideración de estas clases como los semirrayos que parten de 0 en la figura, nos da una idea de este orden; será aquel que nos ordene los semirrayos en el sentido de las agujas del reloj. Por consiguiente, de dos semirrayos será mayor (posterior) el que forme menor ángulo con las semirrectas horizontales. Lo anterior podemos expresarlo mediante la siguiente

Definición

Dados dos números racionales a/b y m/n diremos que a/b es menor o igual que m/n y escribiremos $a/b \leqslant m/n$, si y sólo si, $a \cdot n \leqslant b \cdot m$ (donde este último símbolo $\leqslant$ representa el orden natural de N, el cual se utiliza también para indicar el nuevo orden recién definido en Q^+). Asimismo diremos que m/n es mayor o igual que a/b.

6. Propiedades del orden en Q⁺

La relación de orden que hemos definido en Q^+ verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $a/b \leqslant a/b$, ya que $ab = ab$

2. Antisimétrica: $a/b \leqslant c/d$ y $c/d \leqslant a/b$ implica $ad \leqslant cb$ y $cb \leqslant ad$, luego $ad = cb$ y, por consiguiente, $a/b = c/d$.

3. Transitiva: $a/b \leqslant c/d$ y $c/d \leqslant m/n$ implica $ad \leqslant cb$ y $cn \leqslant md$ luego $adn \leqslant cbn$ y $bcn \leqslant bmd$, es decir, $adn \leqslant bmd$ de donde $an \leqslant bm$ y, por consiguiente, $a/b \leqslant m/n$.

Lo anterior nos dice que el par $(Q^+, \leqslant)$ es un conjunto ordenado. El orden definido es un orden total, ya que dados dos racionales a/b y c/d se verifica los números ad y cb o son iguales o uno es menor que otro y, por consiguiente, lo mismo ocurre con a/b y c/d.

Para poner de manifiesto que el orden definido en Q^+ prolonga el orden natural de N basta observar que para todo par de números naturales a y c si se verifica que $a \leqslant c$ en N también se verifica que $a/1 \leqslant c/1$ en Q^+ y recíprocamente.

Por último señalemos una propiedad importante del orden en el conjunto de los racionales, si $ab \leqslant c/d$ siendo $a/b \neq c/d$ se tiene que $a/b \leqslant (a+c)/(b+d) \leqslant c/d$ como se comprueba fácilmente, lo cual expresa que entre dos racionales cualesquiera siempre existe otro racional.

Ejemplos:

Dados los racionales 21/17 y 32/41, decir cuál es menor; escribimos $21 \cdot 41$ y $32 \cdot 17$ y afirmamos que 32/41 es menor que 21/17.

Dados los racionales 1/5 y 3/4 hallar otro racional comprendido entre los dos, el racional pedido es $(1+3)/(5+4)$, es decir, 4/9.

TEMA 2. OPERACIONES CON LOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS

1. Operaciones en Q

En el conjunto de los números racionales positivos, introducidos en el tema anterior, vamos a definir dos operaciones: adición y multiplicación.

Estas operaciones gozan de las propiedades uniforme, asociativa, conmutativa y existencia de elemento neutro para cada una de las operaciones citadas. La multiplicación además goza de la existencia de elemento inverso para cada racional positivo y, por último, están ligadas por la propiedad distributiva del producto respecto de la misma.

2. Suma de números racionales

Dados dos números racionales, en forma de fracción, pueden presentarse dos casos, que tengan el mismo denominador o que los denominadores sean distintos:

1.°) Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b}$ tiene el mismo denominador, se llama suma de las fracciones dadas a la expresión $\frac{a+a'}{b}$ resultante de sumar los numeradores y poner el mismo denominador.

Si designamos por c y c' los valores de esos cocientes, tendremos:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{a}{b}=c & a=bc \\ \frac{a'}{b}=c' & a'=bc' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a+a'=b(c+c')$$

$$\frac{a+a'}{b}=c+c'=\frac{a}{b}+\frac{c'}{b}$$

2.°) Si las fracciones son de distintos denominadores $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, se hallan dos fracciones equivalentes a ellas, que tengan el mismo denominador.

Para ello multiplicamos los dos términos de cada una por el denominador de la otra.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, multiplicando los dos términos de la primera por b' y los de la segunda por b, resulta

$$\frac{ab'}{bb} \quad \text{y} \quad \frac{a'b}{bb'}$$

y teniendo ya el mismo denominador podemos aplicar la regla anterior, es decir, la suma de ellos será

$$\frac{ab'}{bb'}+\frac{a'b}{bb'}=\frac{ab'+a'b}{bb'}$$

pues siendo

$$\frac{a}{b}=c \quad \text{y} \quad \frac{a'}{b'}=c'$$

se obtiene

$$a=bc \quad \text{y} \quad a'=b'c'$$

y también

$$ab'=bb'c \quad \text{y} \quad a'b=bb'c'$$

de donde

$$\frac{ab'}{bb'}=c \quad \text{y} \quad \frac{a'b}{bb'}=c'$$

o sea,

$$\frac{ab'}{bb'}=\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a'b'}{b'b'}=\frac{a'}{b'}$$

La operación de convertir las dos fracciones de distinto denominador en otras equivalentes con un mismo denominador se llama *reducción a un común denominador.*

La operación inversa de pasar de la fracción

$$\frac{ab'}{bb'} \quad \text{a la} \quad \frac{a}{b}$$

suprimiendo el factor común b' en los dos términos se llama *simplificación de fracciones.*

Ejemplo:

$$\frac{27}{12}=\frac{9\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{4} \quad ,, \quad \frac{15}{25}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{3}{5}$$

3. Reducción de dos fracciones a otras equivalentes con el mínimo denominador común

Es conveniente, por la simplificación que introduce en los cálculos, saber obtener fracciones equivalentes a otras con el mismo denominador, pero siendo éste el más pequeño posible. Pocedemos de la siguiente forma:

Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se halla el m.c.m. $(b, d)=m$, es decir, $m=b\cdot b'$ y $m=d\cdot d'$ tenemos que $\frac{a\cdot b'}{b\cdot b'}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c\cdot d'}{d\cdot d'}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$, luego si ponemos $p=a\cdot b'$ y $q=c\cdot d'$, las fracciones $\frac{p}{m}$ y $\frac{q}{m}$ tienen el denominador común más pequeño posible y son equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente.

Ejemplos:

Sumar $\frac{23}{12}+\frac{17}{18}$ tenemos m.c.m. $(12, 18)=36$, por tanto,

$$\frac{23}{12}+\frac{17}{18}=\frac{23\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{17\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{69}{36}+\frac{34}{36}=\frac{103}{36}$$

4. Propiedades de la suma de números racionales positivos

a) Propiedad uniforme: La suma de números racionales no depende de las fracciones elegidas para representarlos; es decir, la suma de dos fracciones y la suma de dos fracciones equivalentes a las anteriores son fracciones equivalentes:

Si

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$

entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

en efecto $ab'=ba'$ y $cd'=c'd$ se tiene $ab'dd'+cd'bb'=c'dbb'$ sumando miembro a miembro tenemos: $ab'dd'+cdbb'=ba'dd'+c'dbb'$, o sea $(ad+bc)b'd'=(a'd'+c'b')bd$, es decir,

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+c'd'}{b'd'} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

como queríamos demostrar.

b) Propiedad asociativa:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

Demostración:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{(ad+bc)f+ebd}{bdf}=\frac{adf+bcf+ebd}{bdf}=$$

$$\frac{adf+b(cf+ed)}{bdf}=\frac{a}{b}+\frac{cf+ed}{df}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

c) Propiedad conmutativa:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Demostración:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

d) Existencia de neutro para la suma

$\exists\, x \in Q^{+}$ tal que $\forall\ r \in Q^{+}$ se verifica $x+r=r$

Demostración: Sea $r=\frac{a}{b}$, sea $x=\frac{\alpha}{\beta}$; escojamos otros representantes de r y x que sean fracciones de denominador común

$$r=\frac{a'}{b'} \quad , \quad x=\frac{\alpha'}{b'}$$

y queremos que

$$\frac{a'}{b'}+\frac{\alpha'}{b'}=\frac{a'}{b'}$$

pero

$$\frac{a'}{b'}+\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{a'+\alpha'}{b'}=\frac{a'}{b'}$$

luego $a'+\alpha'=a'$, de donde $\alpha'=0$ y tenemos que $x=\frac{0}{b'}$, siendo b' cualquier entero distinto de cero. Este elemento x le llamamos *cero* de los racionales y lo representamos por 0.

El conjunto de los racionales positivos con el cero respecto de la operación de sumar, decimos que tiene una estructura de *semigrupo conmutativo.*

5. Monotonía de la suma de números racionales

El orden definido en Q^{+} es compatible con la estructura de semigrupo aditivo.

Demostración: Decimos que el orden de Q^{+} es compatible con la estructura de semigrupo aditivo cuando siendo

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}\leqslant\frac{c'}{d'}$$

se verifica que

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leqslant\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

lo cual ocurre en nuestro caso ya que:

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab'\leqslant a'b \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d}\leqslant\frac{c'}{d'} \Leftrightarrow cd'\leqslant c'd$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades $ab'\leqslant a'b$, $cd'\leqslant c'd$ y teniendo en cuenta la monotonía en $\mathbb{N}$, para el producto en números naturales, tenemos, multiplicando la primera desiguladad por dd' y la segunda por bb': $ab'dd' \leqslant a'bdd'$, $cd'bb' \leqslant c'dbb'$ y sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta la monotonía en $\mathbb{N}$ respecto de la suma:

$$ab'dd' + cd'bb' \leqslant a'bdd' + c'dbb'$$

y sacando factor común:

$$(ad + bc)b'd' \leqslant (a'd' + b'c')bd$$

de donde

$$\frac{ad + bc}{bd} \leqslant \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

y aplicando la definición de suma a los dos miembros de la desigualdad tenemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leqslant \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

como queríamos demostrar.

Podemos, pues, afirmar que el semigrupo aditivo de los números racionales positivos es un *semigrupo ordenado*.

6. Producto de números racionales positivos

Dados dos racionales positivos, representados por fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, llamaremos producto de dichos números a otro número racional representado por la fracción $\frac{ac}{bd}$, esta operación se indica: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, es decir:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Regla práctica: Para multiplicar dos números racionales, dados en forma de fracción, se escribe otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

7. Propiedades del producto de números racionales (positivos)

a) Propiedad uniforme

El producto de números racionales no depende de las fracciones elegidas para representarlos; es decir, el producto de dos fracciones y el producto de dos fracciones equivalentes a las anteriores son fracciones equivalentes.

En efecto: sean $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, es decir $ab' = a'b$ y $cd' = c'd$, luego $ab'cd' = a'bc'd$ o $(ac) \cdot (b'd') = (bd)(a'c')$ y en virtud de la definición de equivalencia $\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$.

b) Propiedad asociativa:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

En efecto:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{(ac)\cdot e}{(bd)\cdot f}=\frac{a\cdot(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

c) Propiedad conmutativa:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

Demostración:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

d) Existencia de elemento neutro para el producto:

Existe un número racional tal que al multiplicarlo por cualquier otro racional $\frac{a}{b}$ distinto de cero el producto es el mismo $\frac{a}{b}$.

En efecto, sea ese número racional representado por la fracción $\frac{m}{m}$, m número natural distinto de cero, el que verifica que

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{m}=\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$$

Este número racional es la *unidad* de los racionales y los representamos por 1.

De aquí obtenemos una *regla práctica* para simplificar fracciones: Descompuesto numerador y denominador de una fracción en factores primos, si suprimimos los comunes a ambos se obtiene una fracción irreducible equivalente a la primera.

e) Existencia de inverso de un número racional:

Dado un número racional positivo distinto de cero, representado por $\frac{a}{b}$, existe otro, número racional, que llamamos su inverso, tal que al multiplicarlos el resultado es la unidad.

En efecto, dado $\frac{a}{b}$, $a\neq 0$, resulta que $\frac{b}{a}$ es otro número racional positivo, tal que

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$$

8. División de números racionales

De lo anterior obtenemos otra regla práctica para efectuar la división de números racionales dados en forma de fracción, como se ve a continuación.

Dividir el número racional $\frac{a}{b}$ por el número racional $\frac{m}{n}$, es hallar otro número racional $\frac{x}{y}$ tal que multiplicado por $\frac{m}{n}$ resulta $\frac{a}{b}$. Es decir, $\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$ tal que $\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$ luego basta que $x=a\cdot n$ e $y=b\cdot m$. Podemos, pues, enunciar «para dividir el racional $\frac{a}{b}$ por $\frac{m}{n}$ basta multiplicar $\frac{a}{b}$ por el inverso de $\frac{m}{n}$, o sea:

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}=\frac{an}{am}$$

Acabamos de ver que el conjunto de los números racionales positivos con la operación de multiplicar definida entre ellos forman un *grupo conmutativo.*

9. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

Esta propiedad que liga las dos operaciones definidas en Q^+ expresa el hecho de que al efectuar el producto de un número racional positivo por una suma de otros varios se obtiene igual resultado que multiplicando por el número racional cada uno de los sumandos y efectuando la suma de estos productos; brevemente:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}$$

En efecto:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{mq+np}{nq}=\frac{a(mq+np)}{bnq}=\frac{amq+anp}{bnq}=\frac{amq}{bnq}+\frac{anp}{bnq}=\frac{am}{bn}+\frac{ap}{bq}=$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q} \qquad c\cdot q\cdot d$$

10. Propiedad de monotonía del producto de números racionales positivos

El grupo multiplicativo de los racionales positivos es un grupo ordenado respecto del orden definido Q^+. Es decir:

Si

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{m}{n}\leqslant\frac{p}{q}$$

entonces

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\leqslant\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$$

En efecto: Si $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$ quiere decir que $ad\leqslant cb$ y si $\frac{m}{n}\leqslant\frac{p}{q}$ quiere decir que $mq\leqslant pn$ luego por la propiedad de monotonía de los números naturales tenemos que $admq\leqslant cbpn$, o sea, que:

$$\frac{am}{bn}\leqslant\frac{cp}{dq}$$

por último

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\leqslant\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q} \qquad c\cdot q\cdot d$$

TEMA 3. NUMEROS DECIMALES Y NUMEROS B-ALES OPERACIONES EN D$^+$ TOPOLOGIA DE LOS DECIMALES POSITIVOS

1. Número decimal

Número decimal es todo número racional que se pueda expresar en forma de fracción cuyo denominador sea una potencia de 10.

Ejemplos: $\frac{1}{4}$ es un número decimal, ya que $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=\frac{25}{10^2}$; análogamente $\frac{1}{5}$ es otro número decimal, ya que $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$; también son números decimales 3, $\frac{7}{2}$, $\frac{39}{30}$, $\frac{28}{35}$, pues son respectivamente $\frac{30}{10}$, $\frac{35}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{8}{10}$. En cambio no son números decimales las racionales 1/3, 11/7, 1/9, etc., que no se pueden representar por fracciones cuyo denominador sean potencias de 10.

2. Conjunto de los números decimales positivos: D$^+$

El conjunto de los números decimales positivos, representado por D^+, es, por tanto, un subconjunto de Q^+ formado por todos aquellos números racionales positivos que admiten una representación mediante fracciones cuyos denominadores sean potencias de 10.

3. Representación de los elementos de D$^+$

Sea el número decimal $\frac{a}{10^m}$, donde a es un número natural que en base 10 admite la siguiente expresión:

$$a=a_n\,10^n+a_{n-1}\,10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$$

donde los $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los dígitos de 0 a 9. Se pueden presentar los siguientes casos:

1.°) $n \geqslant m$, tendremos

$$a=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\,10^{n-1}+a_m\,10^m+a_{m-1}\,10^{m-1}+\ldots+a_0$$

y
$$\frac{a}{10^m}=a_n\frac{10^n}{10^m}+a_{n-1}\frac{10^{n-1}}{10^m}+\ldots+a_m\frac{10^m}{10^m}+a_{m-1}\frac{10^{m-1}}{10^m}+\ldots+a_0\frac{1}{10^m}$$

es decir,

$$\frac{a}{10^m}=a_n\,10^{n-m}+a_{n-1}\,10^{n-m-1}+\ldots+a_m+a_{m-1}\frac{1}{10}+\ldots+a_0\frac{1}{10_m}$$

y podemos escribir

$$\frac{a}{10^m} = a_n\, a_{n-1} \ldots a_m\,,\, a_{m-1} \ldots a_0$$

separando con una coma las cifras que indican la parte entera de las cifras que indican la parte fraccionaria.

Ejemplos:

a)

$$\frac{3351}{10^2} = 3\,\frac{10^3}{10^2} + 3\,\frac{10^2}{10^2} + 5\,\frac{10}{10^2} + 1\,\frac{1}{10^2} = 3 \cdot 10 + 3 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} = 33{,}51$$

b)

$$\frac{26713}{10^3} = \frac{2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3}{10^3} = 2 \cdot \frac{10^4}{10^3} + 6 \cdot \frac{10^3}{10^3} + 7 \cdot \frac{10^2}{10^3} + 1 \cdot \frac{10}{10^3} 3 \cdot \frac{1}{10^3} =$$

$$2 \cdot 10 + 6 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} = 26{,}713$$

c)

$$\frac{23}{2} = \frac{115}{10} = \frac{1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5}{10} = 1 \cdot \frac{10^2}{10} + 1 \cdot \frac{10}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10} = 1 \cdot 10 + 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} = 11{,}5$$

d)

$$\frac{13500}{10^2} = \frac{1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0}{10^2} = 1 \cdot \frac{10^4}{10^2} + 3 \cdot \frac{10^3}{10^2} + 5 \cdot \frac{10^2}{10^2} + 0 \cdot \frac{10}{10^2} + 0 \cdot \frac{1}{10^2} = 135$$

2.°) $n < m$, tendremos

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \text{y} \quad \frac{a}{10^m} = \frac{a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0}{10^m} =$$

$$= a_n\, \frac{1}{10^{m-n}} + a_{n-1}\, \frac{1}{10^{m-n-1}} + \ldots + a_0 \frac{1}{10^m} = 0{,}00 \ldots 0\; a_n\, a_{n-1} \ldots a_0$$

lo cual puede expresarse anteponiendo a la primera cifra significativa a_n tantos ceros como indique el número $m-n-1$ separando todo mediante una coma de la parte entera, que también es cero en este caso, teniendo en cuenta que, en total, detrás de la coma debe haber m cifras.

Ejemplos:

a)

$$\frac{13}{10^2} = \frac{1 \cdot 10 + 3}{10^2} = 1 \cdot \frac{10}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} = 1 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} = 0{,}13$$

b)

$$\frac{7}{10^3} = 7 \cdot \frac{1}{10^3} = 0{,}007$$

4. Números b-ales o decimales b-arios

Sea b la base de representación de los número b-arios, entendemos por número b-al todo número racional que se puede expresar en forma de fracción cuyo denominador sea una potencia de b.

Análogamente al caso $b=10$ tenemos $\frac{A_{(b}}{b^m}$, donde $A_{(b}$ es un número natural en base b cuya expresión polinómica es

$$A_{(b}=a_n b^n+a_{n-1}b^{n-1}+\ldots+a_0$$

entonces (para el caso $n \geqslant m$):

$$\frac{A_{(b}}{b^m}=\frac{a_0 b^n+a_{n-1}b^{n-1}+\ldots+a_0}{b^m}=a_0\frac{b^n}{b^m}+a_{n-1}\frac{b^{n-1}}{b^m}+\ldots+a_0\frac{1}{b^m}=$$

$$=a_n b^{n-m}+a_{n-1}b^{n-m-1}+\ldots a_m+a_{m-1}\frac{1}{b}+\ldots+a_0\frac{1}{b^m}=a_n a_{n-1}\ldots a'_m a_{m-1}\ldots a_{0(b}$$

Ejemplos:

a) Sea $b=3$, el número $\frac{13}{3^2}$ es un número ternal y su representación en base 3 es:

$$\frac{13}{3^2}=\frac{111_{(3}}{3^2}=\frac{1\cdot 3^2+1\cdot 3+1}{3^2}=1+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2}=1{,}11_{(3}$$

b) Sean $b=5$, los números $\frac{2}{5}, \frac{27}{25}, \frac{13}{5^4}$, son números 5-ales que se representan respectivamente:

$$0{,}2_{(5} \quad , \quad \frac{102_{(5}}{5^2}=1{,}02_{(5} \quad , \quad \frac{23_{(5}}{5^4}=0{,}0023_{(5}$$

Caso singularmente importante es cuando $b=2$; en el sistema binario o dual los números binales sólo admiten cifras 0; 1 en su representación.

Ejemplos:

a)

$$\frac{7}{4}=\frac{7}{2^2}=\frac{1\cdot 2^2+1\cdot 2+1}{2^2}=1+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2^2}=1{,}11_{(2}$$

b)

$$\frac{15}{8}=\frac{1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1}{2^3}=1\cdot 2+0+0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}=10{,}001_{(2}$$

c) $\frac{13}{3}$ no es un nnúmero binal, pues el denominador no se puede expresar como potencia de 2.

Teniendo en cuenta que $b=10_{(b}$ estos números también se les puede llamar decimales b-arios y su representación decimal b-aria en base b, es entonces idéntica a la decimal, en efecto:

$$\frac{a}{b^m}=\frac{A_{(b}}{10^m_{(b}}$$

así:

$$\frac{13}{3^2}=\frac{111_{(3}}{10^2_{(3}}=1{,}11_{(3} \quad \text{o} \quad \frac{27}{5^2}=\frac{102_{(5}}{10^2_{(5}}=1{,}02_{(5}$$

separando con una coma tantas cifras del numerador como indica el exponente de la base en el denominador.

Es evidente que todo número racional admite representación decimal b-aria para una cierta base b convenientemente elegida y recíprocamente todo número que admita representación decimal en alguna base b es racional.

5. Operaciones en D⁺: Suma y producto

SUMA: Como todo número decimal es racional, definimos la suma de dos números decimales como la suma de los racionales correspondientes.

Consecuencia de lo anterior es:

La suma de dos números decimales es otro número decimal. En efecto: sean

$$\frac{A}{10^p} \quad \text{y} \quad \frac{B}{10^q}$$

dos números decimales, su suma

$$\frac{A}{10^p}+\frac{B}{10^q}=\frac{A10^q+B10^p}{10^{p+q}}=\frac{C}{10^t}$$

donde $C=A\cdot 10^q+B\cdot 10^p$ y $t=p+q$.

En virtud de las propiedades de la adición de números racionales se deduce que la suma de números decimales, como caso particular, tiene las propiedades de asociatividad, conmutatividad y existencia de neutro, luego $(D^+, +)$ es un sub-semigrupo del semigrupo $(Q^+, +)$.

Observemos que se puede dar una expresión más simplificada de la suma para dos decimales $\frac{A}{10^p}$ y $\frac{B}{10^q}$, ya que si:

1.°) $p>q$, tenemos $p=q+h$ y el decimal $\frac{B}{10^q}$ es el mismo que $\frac{B\cdot 10^h}{10^p}$, luego

$$\frac{A}{10^p}+\frac{B\cdot 10^h}{10^p}=\frac{A+B\cdot 10^h}{10^p}=\frac{C}{10^p}$$

donde $C=A+B\cdot 10^h$

2.º)

$$p=q \quad ; \quad \frac{A}{10^p}+\frac{B}{10^p}=\frac{A+B}{10^p}$$

3.º)

$$p<q \quad ; \quad p+h=q \quad \text{y} \quad \frac{A}{10^p}=\frac{A\cdot 10^h}{10^q}$$

luego

$$\frac{A}{10^p}+\frac{B}{10^q}=\frac{A\cdot 10^h}{10^q}+\frac{B}{10^q}=\frac{A\cdot 10^h+B}{10^q}=\frac{C}{10^q}$$

donde C es ahora $A\cdot 10^h+B$.

Si tenemos en cuenta que en la representación decimal el número cifras que se escriben a la derecha de la coma es precisamente el exponente de 10 en el denominador de la fracción correspondiente, podemos enunciar la siguiente regla práctica:

Regla práctica:

Para sumar dos números decimales con el mismo número de cifras detrás de la coma, caso 2.º, basta sumar los números naturales que se obtienen al suprimir la coma y del resultado se separan tantas cifras decimales como tengan los sumandos.

Si los dos sumandos tienen distinto número de cifras decimales, casos 1.º y 3.º, se igualan añadiendo ceros al sumando que menos tenga y se procede como en el caso anterior.

Ejemplos:

a) $3{,}25+7{,}13=10{,}38$, ya que $325+713=1038$;

$43{,}12+3{,}21=46{,}33$, ya que $4312=4633$.

b) $12{,}6+33{,}712=12{,}600+33{,}712=46{,}312$, ya que $12600+33712=46312$.

c) Si como suele ocurrir en la práctica se colocan los sumandos en columnas cuidando que las cifras que representan los mismos órdenes de unidades queden alineados en las mismas columnas se puede proceder directamente:

$$\begin{array}{r} 3{,}12 \\ 15{,}725 \\ \hline 18{,}845 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125{,}417 \\ 3121{,}15 \\ \hline 3246{,}567 \end{array}$$

PRODUCTO: Asimismo definimos el producto de dos números decimales como el producto de los racionales correspondientes. También para este caso se ve fácilmente que:

El producto de dos números decimales es otro número decimal. En efecto:

$$\frac{A}{10^p}\cdot\frac{B}{10^q}=\frac{A\cdot B}{10^{p+q}}=\frac{P}{10^t}$$

donde $P=A\cdot B$ y $t=p+q$.

Se deduce, por tanto, que el producto de números decimales tiene las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de neutro para el producto que es precisamente la unidad racional $1=\frac{10}{10}$, pero en cambio no todo número decimal admite un inverso, ya que el número 3, por ejemplo, que es decimal, pues $3=\frac{30}{10}$ tiene por inverso $\frac{1}{3}$ el cual hemos visto que no es decimal. Tenemos que $(D^{+}, \cdot)$ es un semigrupo y acabamos de ver que es un subsemigrupo del grupo multiplicativo de los racionales positivos.

La propiedad distributiva del producto respecto de la suma también se verifica como paso particular de la distributividad de los racionales.

Regla práctica

Con la observación hecha para la suma podemos enunciar la correspondiente regla para el producto de números decimales:

«Para multiplicar dos números con p y q cifras decimales respectivamente, se prescinde de la coma y se multiplican los naturales obtenidos, separando, del producto, tantas cifras decimales como indique el número $p+q$ suma del número de cifras decimales de cada uno de los factores».

Ejemplos:

$2{,}13 \cdot 0{,}15$; $213 \cdot 15 = 3195$, luego $2{,}13 \cdot 0{,}15 = 0{,}3195$

$7{,}28 \cdot 2{,}3$; $728 \cdot 23 = 16744$, luego $7{,}28 \cdot 2{,}3 = 16{,}744$

6. Orden de D^{+}

El conjunto de los números decimales positivos resulta ordenado por el orden definido en Q^{+}, es decir:

$$\frac{A}{10^{p}} \leqslant \frac{B}{10^{q}}$$

si y sólo si $A \cdot 10^{q} \leqslant B \cdot 10^{p}$

Lo anterior se simplifica observando que:

1. Si $p<q$; $A \cdot 10^{q} \leqslant B \cdot 10^{p}$ equivale a $A \cdot 10^{q-p} \leqslant B$
2. Si $p=q$; $A \cdot 10^{q} \leqslant B \cdot 10^{p}$ equivale a $A \leqslant B$
3. Si $p>q$; $A \cdot 10^{q} \leqslant B \cdot 10^{p}$ equivale a $A \leqslant B \cdot 10^{p-q}$

Ejemplos:

Ordenar los números $\frac{325}{10^{3}}$ y $\frac{4175}{10^{4}}$, tenemos que $325 \cdot 10 \leqslant 4175$, luego $\frac{325}{10^{3}} \leqslant \frac{4175}{10^{4}}$.

Comparar los números $\frac{1725}{10^{3}}$ y $\frac{1512}{10^{3}}$, tenemos que $1512 \leqslant 1725$, luego $\frac{1512}{10^{3}} \leqslant \frac{1725}{10^{3}}$.

De los números $\frac{712}{10^5}$ y $\frac{112}{10^3}$ decir cuál es mayor, tenemos $712 \leqslant 112.10^2$, luego $\frac{712}{10^5} \leqslant \frac{112}{10^3}$

Cuando los números vengan representados por su expresión decimal bastará tener en cuenta que el número de cifras a la derecha de la coma es el exponente de 10 y se procede directamente.

7. Monotonía de la suma y producto de los números decimales

El orden de D^+ es compatible con la suma y producto de números decimales. Es decir, si:

$$a, b, c, d \in D^+ \quad \text{y} \quad a \leqslant b \quad ; \quad c \leqslant d$$

se verifica que

$$a + c \leqslant b + d \quad \text{y} \quad a \cdot c \leqslant b \cdot d$$

Lo cual se obtiene como caso particular de la monotonía de la suma y producto de números racionales.

8. División decimal

Hemos visto en la división entera que dividir un número natural a por otro b consistía en encontrar un par de números c y r, llamados cociente y resto (por defecto), tales que $a = c \cdot b + r$, $r < b$ y siendo c el mayor natural, tal que $b \cdot c \leqslant a < b(c+1)$.

Escribimos $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$ (1) siendo c la parte entera del número racional $\frac{a}{b}$ y $\frac{r}{b}$ la parte fraccionaria. Esta parte fraccionaria la podemos expresar en forma de décimas, centésimas, etc., sin más que dividir $10r$ por b, suponemos $10r > b$ si no dividiríamos $10^2 r$, $10^3 r$, etc., por b, tendremos:

$$10r = c_1 \cdot b + r_1 \quad , \quad r_1 < b$$

es decir,

$$\frac{10r}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b}$$

o lo que es igual

$$\frac{r}{b} = \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$$

sustituyendo en (1):

$$\frac{a}{b} = c + \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$$

donde c_1 expresa ahora las décimas del cociente; repitiendo el proceso con $\frac{r_1}{10b}$ y suponiendo $10^2 r_1 > 10b$, si no sería $10^3 r_1 > 10b$ ó $10^4 r_1 > 10b$, etc., mayor que $10b$ y dividiríamos $10^4 r_1$ por b, tendríamos:

$$10r_1 = c_2 b + r_2$$

o sea

$$\frac{10r_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b}$$

es decir,

$$\frac{r_1}{10b}=\frac{c_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2b}$$

sustituyendo

$$\frac{a}{b}=c+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2b}$$

donde c_2 son las centésimas del cociente, etc. Al reiterar el proceso se concluye con una de las siguientes formas:

Caso 1.º Un cierto resto termina por ser cero, es decir, $r_n=0$ y $10^n r_{n-1}=b\cdot c_n$ como $r_{n-1}<b$ tenemos que b divide a 10^n, luego los factores primos de b sólo pueden ser 2 y 5; por consiguiente $\frac{a}{b}$ es un número decimal y se puede representar mediante cifras decimales.

Caso 2.º Ningún resto es cero, el proceso puede ser continuado indefinidamente, pero como los restos posibles son en número finito, a partir de un cierto r_n se vuelven a repetir de manera periódica. En este caso b contiene factores primos distintos del 2 y del 5 y $\frac{a}{b}$ no es un número decimal, por tanto sólo se puede representar mediante cifras decimales con una cierta aproximación. El error cometido es de orden menor que la última cifra despreciada.

Ejemplos:

$$\frac{35}{20}=1+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=1{,}75$$

$$\frac{11}{3}=3+\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\ldots=3{,}666\ \ldots$$

donde los puntos indican que el proceso continúa, decimos que $\frac{11}{3}$ es aproximadamente 3,666 y el error cometido al tomar el número decimal 3,666 como valor del racional $\frac{11}{3}$ es menor que una milésima.

TOPOLOGIA DE LOS DECIMALES POSITIVOS. SUCESIONES

9. Sucesiones de números decimales

Una sucesión de números decimales positivos es una aplicación de IN en D^+; la imagen de 1 es el primer término de la sucesión que lo indicaremos por medio de un subíndice, así: d_1; la imagen de 2 es el segundo término de la sucesión que indicaremos d_2; ..., etc., en general la imagen del número natural n, d_n, es el n-éesimo término o término general de la sucesión.

La sucesión $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ se representará encerrando el término general entre llaves: $\{d_n\}$.

Ejemplos:

$$d_1=\frac{3}{10} \quad ; \quad d_2=\frac{33}{10^2} \quad ; \quad d_3=\frac{333}{10^3} \; ; \; \dots \; ; \; d_n=\frac{33 \overset{n}{\dots} 3}{10^n} \; ; \; \dots$$

es una sucesión que escribimos:

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{10^2}, \frac{333}{10^3}, \dots, \frac{33 \overset{n}{\dots} 3}{10^n}, \dots$$

También son sucesiones de números decimales las siguientes:

$1{,}9;\ 1{,}99;\ 1{,}999;\ \dots;\ 1{,}99 \overset{n}{\dots} 9;\ \dots$

$2;\ 4;\ 6;\ \dots;\ 2n;\ \dots$

$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ \dots$

$1;\ 0;\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{10};\ 2;\ 1;\ \frac{25}{10^2};\ 0;\ \frac{4}{20};\ 1{,}33;\ \dots$

Es una sucesión de números racionales, pero no es una sucesión de números decimales la siguiente:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$$

Observamos en los ejemplos anteriores que, en algunas sucesiones, es muy sencillo expresar el término general en función de n, mientras que en otros casos no es así. Una sucesión queda determinada cuando conocemos la ley de formación de sus términos.

10. Sucesión de números decimales con ley de formación periódica

Un caso sencillo y particularmente importante de ley de formación de términos de una sucesión de números decimales lo hemos obtenido en el caso 2.º de la división decimal. Ahí hemos visto que, las cifras decimales del cociente se repetía periódicamente a partir de uno de ellos; cada nueva cifra da un nuevo término de la sucesión y conocido el período queda determinada, por tanto, la sucesión. Por ejemplo:

$\frac{1}{3}=0{,}333\ \dots$, es decir, la sucesión sería en este caso:

$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \dots$ ó $\frac{3}{10}, \frac{33}{10^2}, \frac{333}{10^3}, \frac{3333}{10^4}, \dots$

$\frac{1}{7}=0{,}142857142857\ \dots$, es decir, una sucesión sería:

$0{,}1;\ 0{,}14;\ 0{,}142;\ 0{,}1428;\ 0{,}14285;\ 0{,}142857;\ 0{,}1428571;\ 0{,}14285712;\ 0{,}142857;$

$0{,}142857142857;\ 0{,}142857142857142857;\ \dots$

También: $\frac{1}{6}=0{,}1666\ \dots$, luego una sucesión sería:

$0{,}1;\ 0{,}16;\ 0{,}166;\ 0{,}1666;\ \dots;\ 0{,}166 \overset{n-1}{\dots} 6;\ \dots$

Estas sucesiones las llamamos sucesiones con ley de formación periódica o simplemente, sucesiones periódicas.

Nota: Hacemos observar, ampliando el caso 2.º de la división decimal, que si el dividir b no contiene el factor primo 2 ni el 5 las cifras decimales se repiten periódicamente a partir de la primera. Si b contiene el factor 2 ó el 5, aparte de otros, las cifras decimales se repiten periódicamente a partir de una de ellas la h-ésima, por ejemplo, y no se repiten periódicamente las h primeras.

11. Sucesiones constantes

Como caso particular de las sucesiones anteriores tenemos las llamadas sucesiones constantes; son aquellas que a partir de un cierto término todos los siguientes son iguales. Por ejemplo, las sucesiones:

$$\frac{2}{10}, \frac{2}{10^3}, \frac{2}{10^5}, \frac{2}{10^5}, \frac{2}{10^5}, \ldots, \frac{2}{10^5}, \ldots \quad \text{y} \quad 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

son sucesiones constantes.

12. Límites racionales de sucesiones de números decimales

Dada la sucesión d_n de números decimales cuyos términos son $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ diremos que esta sucesión tiene por límite el número racional $\frac{a}{b}$ o que tiende al número racional $\frac{a}{b}$ si siempre que fijemos un número racional positivo r sea posible encontrar un término de la sucesión, el d_m, por ejemplo, tal que *todos* los siguientes a él difieran de $\frac{a}{b}$ en menos de r; es decir, que

$$\frac{a}{b} - d_p \quad \left(\text{ó } d_t - \frac{a}{b} \right)$$

sea menor que r *para todo* $p > m$.

Ejemplos:

La sucesión 0,9; 0,99; 0,999; ...; $0{,}99 \overset{n}{\ldots} 9$; ... tiene por límite 1, ya que la diferencia

$$1 - 0{,}99 \overset{n}{\ldots} 9 = 0{,}00 \ldots 01 = \frac{1}{10^m}$$

se puede hacer menor que cualquier número racional positivo r sin más que escoger el término m-ésimo lo suficientemente avanzado y a partir de él todos los términos de la sucesión difieren de 1 en una cantidad aún menor que $\frac{1}{10^m}$.

Sin embargo, la sucesión de números decimales:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14559;\ \ldots$$

que va dando las sucesivas cifras decimales del número π sabemos que no tiene por límite un número racional.

Otro caso lo tenemos en la sucesión:

$$1;\ 0{,}1;\ 1;\ 0{,}1;\ 1;\ 0{,}1;\ \ldots$$

la cual es una sucesión que carece de límite como puede comprobar el lector aplicando la definición.

Cuando una sucesión $\{d_n\}$ tiene por límite el número $\frac{a}{b}$ se suele escribir $\lim_{n} d_n = \frac{a}{b}$ (donde n significa que el subíndice n aumenta indefinidamente; se lee «n tiende a infinito»).

Si una sucesión de números decimales tiene límite éste es único, es decir, una misma sucesión no puede tender a la vez a dos números distintos.

13. Sucesiones equivalentes de números decimales

Dadas dos sucesiones de números decimales positivos d_n y d'_n, diremos que son equivalentes si, siempre que fijemos arbitrariamente un número natural m, es posible encontrar un subíndice n tal que todo término, de subíndice mayor que n, de una de las sucesiones difiera de cualquier término de la otra, de subíndice también mayor que n, en menos de $\frac{1}{10^m}$, o sea, que para todo p y q mayores que n se verifica:

$$d_p - d'_q < \frac{1}{10^m} \quad \text{ó} \quad d'_q - d_p < \frac{1}{10^m}$$

según sea $d_p \geqslant d'_q$ ó $d'_q \geqslant d_p$ respectivamente.

Ejemplos:

Las sucesiones $1{,}1,\ 1{,}01,\ 1{,}001,\ \ldots,\ 1{,}00 \overset{n}{\ldots} 01,\ \ldots$ y $0{,}9,\ 0{,}99,\ \ldots,\ 0{,}99 \overset{n}{\ldots} 99,\ \ldots$ son equivalentes ya que fijado arbitrariamente un número m, tenemos que:

$$1{,}00 \overset{n}{\ldots} 01 - 0{,}99 \overset{n}{\ldots} 99 = 0{,}00 \overset{n}{\ldots} 02 = \frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^m}$$

sin más que elegir $n = m + 1$.

Las sucesiones $2{,}9,\ 2{,}99,\ 2{,}999,\ \ldots,\ 2{,}99 \overset{n}{\ldots} 9,\ \ldots$ y $0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ \ldots,\ 0{,}999 \overset{n}{\ldots} 9,\ \ldots$ no son equivalentes, ya que $2{,}99 \overset{n}{\ldots} 9 - 0{,}99 \overset{n}{\ldots} 9 = 2$ y cualquiera que sea n esta diferencia no es menor que $\frac{1}{10}$ para $m = 1$, por ejemplo.

Como consecuencia de lo anterior es posible obtener la siguiente proposición que enunciamos simplemente:

Proposición: Dos sucesiones de números decimales que tengan el mismo límite son equivalente.

Los casos 1.º y 2.º de la división decimal, junto con la proposición anterior, permite afirmar que todo número racional es límite de infinitas sucesiones equivalentes de números decimales.

CAPITULO VI

TEMA 1. MEDIDA DE MAGNITUDES. SISTEMAS DE UNIDADES. CALCULO APROXIMADO Y ERRORES

1. Concepto de magnitud

Magnitud es un semigrupo aditivo M entre cuyos elementos está definida una relación de equivalencia compatible con la adición.

Cada elemento de M representa un estado particular de la magnitud al cual damos el nombre de *cantidad*. Elementos equivalentes en M representan la misma cantidad.

Magnitud escalar

El semigrupo M diremos que es una magnitud escalar si es un semigrupo ordenado verificando que si $a, b \in M$ y $0<a<b$ entonces existe un número natural n, tal que

$$a+a+\overset{n}{\ldots}+a=n\,a>b$$

Magnitud escalar absoluta

El semigrupo ordenado M es una magnitud escalar absoluta si $0<a$, $\forall a \in M$. Por ejemplo: el peso, la capacidad, son magnitudes escalares absolutas.

Magnitud escalar relativa

El semigrupo ordenado M es una magnitud escalar relativa, si todo elemento a de M admite un opuesto $-a$, es decir, si M tiene estructura de grupo ordenado. Por ejemplo: las temperaturas relativas sobre y bajo cero, las longitudes orientadas, etc., son magnitudes escalares relativas.

2. Medida de magnitudes

Al comparar una magnitud A con otra U de la misma especie, tomada como unidad, puede ésta estar contenida un número exacto de veces en aquella o no. Si lo está, el número de veces que está contenido se llama *medida* de A, con la unidad U.

Si, por ejemplo, el metro está contenido exactamente 7 veces en una longitud dada, diremos que la medida de ella es de 7 m.

Generalmente no ocurre que la unidad dada esté contenida exactamente en la magnitud que se quiere medir, sino que la unidad está comprendida más de n veces, sin llegar a estar contenida $n+1$, es decir:

$$nU < A < (n+1)U$$

Los valores n y $n+1$, se dicen medida aproximadas por defecto y exceso respectivamente.

Ejemplo:

Si el radio de una circunferencia es de 4 m. su longitud está comprendida entre

$$2 \times 3{,}14 \times 4 < L < 2 \times 3{,}2 \times 4$$

según que π, lo consideremos por defecto, 3,14, o por exceso, 3,2.

Todo esto nos indica que en el cálculo de la medida aparecen normalmente estos números aproximados, y su estudio constituye la teoría de errores, o cálculo de números aproximados.

3. Sistemas de unidades

Hemos visto que para medir una cantidad de magnitud es necesario fijar una unidad. El conjunto de unidades fijado para medir las cantidades de las distintas magnitudes recibe el nombre de sistemas de unidades. En cada uno, según las necesidades, se usan múltiplos y submúltiplos de la unidad por igual. En el apéndice figura el sistema métrico decimal.

4. Números aproximados

Al efectuar la medida de una magnitud, en general, bien por no ser posible, bien por no ser necesario, se expresa la medida según acaba de indicarse, mediante un número que la aproxima, con un error menor que una cierta cantidad fijada de antemano, y que se conoce con el nombre de *cota de error.*

La relación, por diferencia o razón, entre la medida exacta y la aproximada recibe el nombre de *error.*

En los números aproximados se consideran pues dos clases de errores: el error *absoluto* y el error *relativo.*

Error absoluto es la diferencia entre el número exacto y el aproximado.

Error relativo es el cociente del error absoluto por el número exacto.

Normalmente no se conocen los errores, sino sus límites por exceso o defecto.

Si al medir una distancia cometemos un error de $\frac{1}{2}$ metro, no tiene el mismo valor práctico ese error si se trata de una longitud pequeña, que de la longitud de una carretera, por ejemplo.

Por esto en estos casos, se utiliza el error relativo, o sea, que si N es el valor exacto y N' es el aproximado

$$e = N - N' \qquad \text{(error relativo)}$$

y

$$\varepsilon = \frac{e}{N} \qquad \text{(error absoluto)}$$

En nuestro ejemplo:

$$e = \tfrac{1}{2} \text{ m.} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{\frac{1}{2}}{N} \text{ m.}$$

que si la longitud de la carretera suponemos que es de 100 km. el error relativo sería

$$\frac{\frac{1}{2}}{100000} = \frac{1}{200000} \text{ de metro}$$

prácticamente despreciable.

En el cálculo con números aproximados se estudia el error a que viene afectada la operación, conocida la aproximación de los datos, o bien el problema inverso, pero nosotros nos limitaremos, una vez dadas estas nociones, únicamente a recordar los sistemas corrientes de unidades de medida, para longitudes, superficies, volúmenes, capacidad y peso y cuyo detalles los ofrecemos al final en un apéndice.

Hallar la medida de un segmento es hallar su *longitud*. Si la unidad o algunas de sus partes está exactamente contenida en la magnitud ésta se llama conmensurable y el número que la expresa *exacto*; en el caso contrario, la magnitud es inconmensurable con la unidad, y el número que expresa su media es *aproximado*.

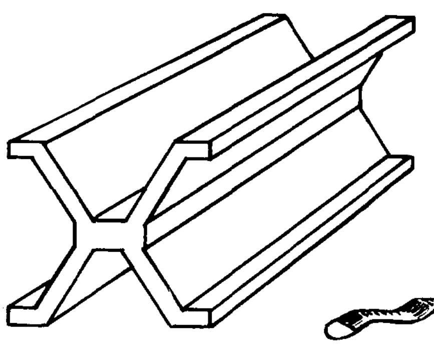
TEMA 2. UNIDADES DE SUPERFICIE. AREAS DE FIGURAS PLANAS. MEDIDAS DE ANGULOS

1. Metro y metro cuadrado

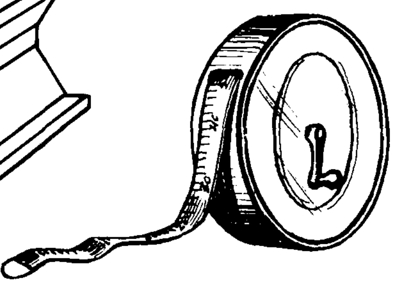
La unidad de longitud es el metro, con sus múltiplos y divisores.

Para determinar las longitudes se usa el *doble decímetro*, el *metro*, la *cinta métrica*, etcétera, según sea menor

(Doble decímetro



(Metro patrón)



(Cinta métrica)

o mayor la referida longitud buscada y cuando ésta es muy grande se utilizan aparatos, tales como el teodolito.

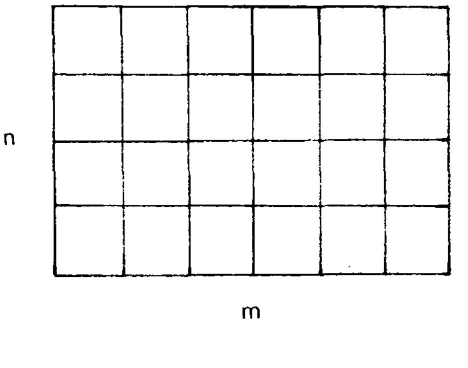
La medida de una superficie se llama área.

La unidad de medida es el *metro cuadrado*, con sus múltiplos y divisores.

Veamos el cálculo de áreas de algunas superficies.

2. Rectángulo

Suponiendo que la unidad lineal esté contenida *m* veces en la base y *n* en la altura, trazando las paralelas



a los lados para las divisiones indicadas en la figura, se obtiene una cuadrícula que determina $m \cdot n$ cuadrados, uno de los cuales tomaremos por unidad superficial. El número de veces que está contenido este cuadrado en la superficie, será el área del rectángulo; es decir, $m \cdot n$. Llamando pues, b a la base y a a la altura, el área de esta figura será *base* por *altura*

$$A = b \cdot a$$

3. Cuadrado

Como esta figura es un caso particular del rectángulo en donde $b=a$, es el lado l del cuadrado, su área sería

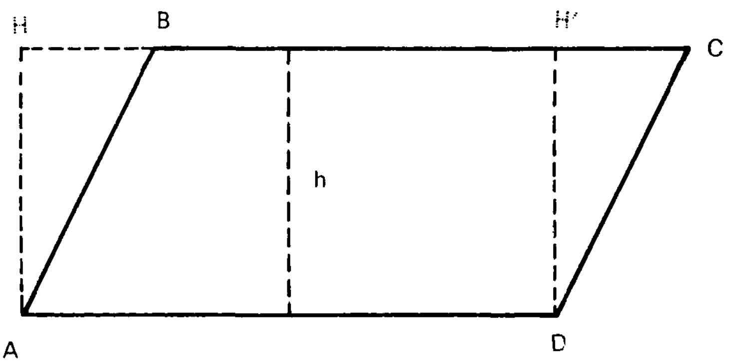
$$A = l^2$$

o sea: área igual al *cuadrado* de su lado.

4. Paralelogramo

Dos figuras que tienen la misma área se llaman equivalentes.

Supongamos el paralelograma $ABCD$, en el que trazamos las alturas AH y DH', con lo que se habrá formado un



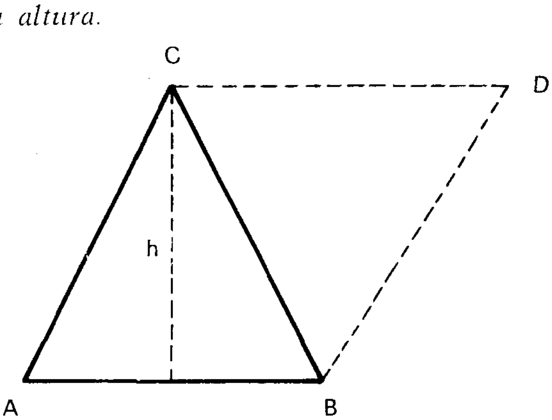
rectángulo $AHH'D$ equivalente al paralelogramo dado. En efecto, los triángulos AHB y $DH'C$ son iguales por rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa iguales, y, por consiguiente, restando de la figura total uno u otro triángulo, las áreas resultantes serían iguales, luego:

Ar. paralelogramo $=$ Ar. rectángulo $= AB \cdot AH = b \times h =$ base $\cdot$ altura

5. Triángulo

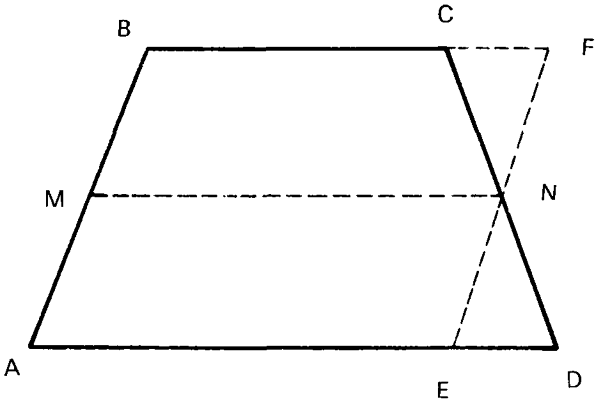
Si por los vértices C y D del triángulo trazamos paralelas al lado opuesto, se forma un paralelogramo, cuya área es $AB \cdot h$.

Siendo ese triángulo la mitad del paralelogramo, su área será $A = \frac{1}{2} l \cdot h$, es decir, la *mitad de su base por su altura*.



6. Trapecio

Sea la figura $ABCD$



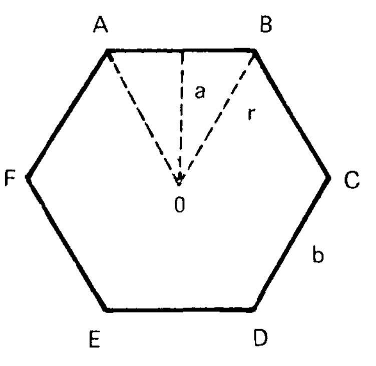
Trazando por el punto N, medio de CD, una paralela a AB, se forman un paralelogramo de área $AB \cdot h$ que es equivalente al trapecio, pues los dos triángulos NCF y NED, son iguales por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido igual; por consiguiente, si de la figura total restamos unos u otros, las figuras son equivalentes, luego

Ar. trapecio$=$ar. paralelogramo$=AE \cdot h = MN \cdot h$, es decir: Ar. trapecio$=$*paralela media por la altura*

$$A = p \cdot h = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

7. Polígonos regulares

Basta descomponer el polígono en triángulos, trazando los radios que van a todos sus vértices, con lo que quedará descompuesto, si el polígono tiene n lados, en n triángulos iguales.



Como el área de uno de esos triángulos es $\frac{1}{2}$ de base por altura, es decir, $\frac{1}{2}\, b \cdot a$, el área del polígono será:

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} l \cdot a = \tfrac{1}{2}(ln) \cdot a = \tfrac{1}{2}\, p \cdot a$$

donde p es el *perímetro* y a la *apotema*.

El área de una figura poligonal cualquiera se halla descomponiéndola en triángulos y sumando sus áreas.

8. Medida de ángulos

La medida de un ángulo, como la de las restantes magnitudes, se halla comparando éste con otro tomado por unidad, bien sea el ángulo recto o una de sus partes.

Generalmente se considera dividido el ángulo recto en 90 partes, las cuales se llaman *grados sexagesimales,* o bien en 100 partes, llamadas *grados centesimales.*

Es decir,

ángulo recto $= 90^{o}$ sexagesimales

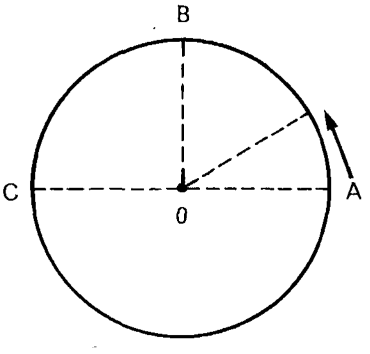
ángulo recto $= 100^{g}$ centesimales

Ejemplo:

un ángulo llano $= 2$ rectos $= 180^{o} = 200^{g}$

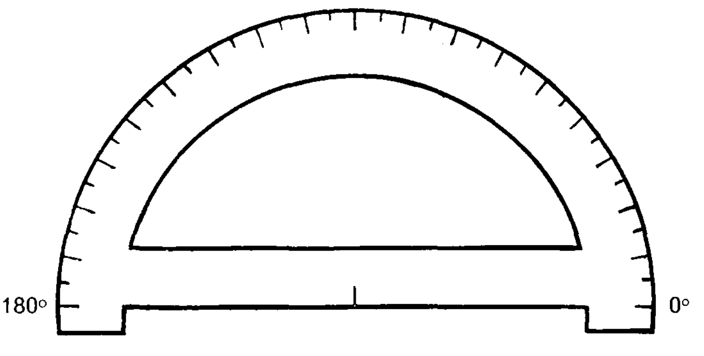
Arco correspondiente a un ángulo es el trazado desde su vértice como centro y comprendido entre sus lados.

Si un semirrayo *OA*, gira describiendo cuatro ángulos rectos, un punto del mismo, *A*, describe una circunferencia. Al ángulo *recto* corresponde un *cuadrante*; al *llano* corresponde una *semicircunferencia.* Por consiguiente, *grados angulares* y *de arco*, se corresponden.



Por tanto: *La medida de un ángulo, es la de su arco correspondiente.*

Para la medida de los ángulos en el plano, se utiliza el *semicírculo* graduado; para medidas espaciadas cualquier goniómetro, teodolito, etc.



9. Angulos en la circunferencia

A) Angulo central

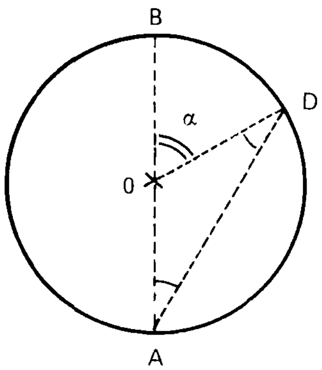
Si el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia, su medida es la del *arco correspondiente*, según acaba de indicarse.

B) Angulo inscrito

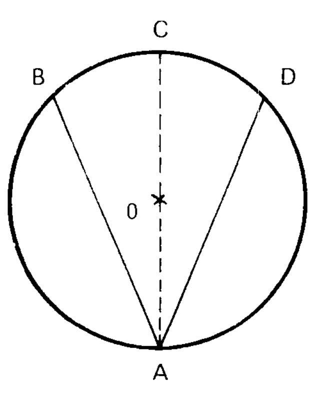
Angulo inscrito en una circusferencia, es el que tiene su vértice en ella, y sus lados son cuerdas.

a) Si uno de los lados de $\widehat{BAD}$ pasa por el centro, tal como AB, como $\hat{A}$ y $\hat{D}$ son iguales, por ser isósceles el triángulo OAD, el ángulo α, externo de ese triángulo, es doble del ángulo $\hat{A}$, luego

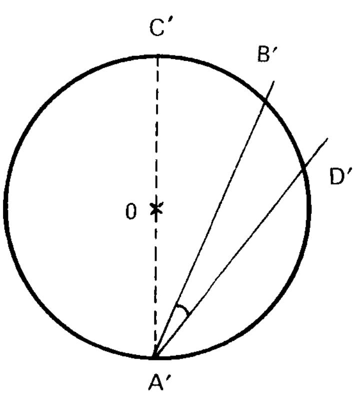
$$\hat{A} = \tfrac{1}{2}\,\alpha \qquad \text{med. } \hat{A} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BD}$$



b) Si los lados del ángulo no pasan por el centro, mediante una suma o diferencia de ángulos, queda reducido el caso al anterior.



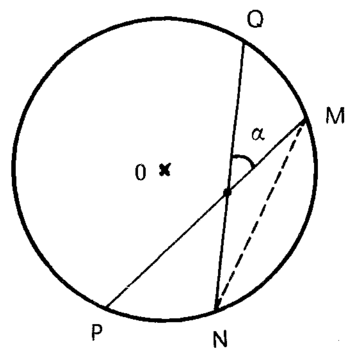
$$\hat{A} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$$
$$\hat{A}' = \widehat{C'A'D'} - \widehat{C'A'B'}$$
$$\text{Med. } \hat{A} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BC} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{CD} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BD}$$
$$\text{Med. } \hat{A}' = \tfrac{1}{2}\,\widehat{C'D'} - \tfrac{1}{2}\,\widehat{C'B'} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{B'D'}$$



En el caso particular de ser uno de los lados del ángulo tangente a la circunferencia, se llama *ángulo seminscrito*.

C) Angulo interior

Angulo interior a una circunferencia, es el que tiene su vértice en el círculo, y sus lados son cuerdas. Caso particular de este es el central.



Si unimos M con N, tenemos que α, en el triángulo MAN, es igual a $\hat{M}$ más $\hat{N}$, y, por consiguiente:

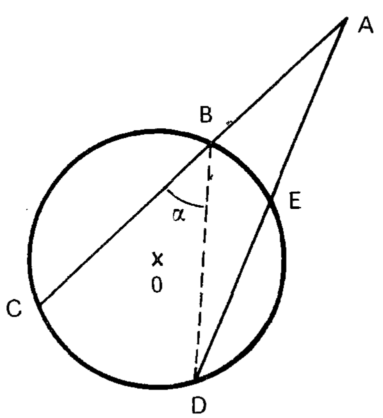
$$\text{Med. de } \alpha = \text{Med. } \hat{M} + \text{Med. } \hat{N}$$

$$\text{Med. de } \alpha = \tfrac{1}{2}\,\overparen{PN} + \tfrac{1}{2}\,\overparen{QM} = \tfrac{1}{2}\,(\overparen{PN} + \overparen{QN})$$

Es decir, la medida de un ángulo interior es igual a la *semisuma de los arcos que los lados y sus prolongaciones determinan en la circunferencia.*

D) Angulo exterior

Angulo exterior respecto a una circunferencia, es el determinado por dos secantes o tangentes a la misma.



Si unimos B con D, el ángulo α, por externo del triángulo ABD, es igual a $\hat{A}+\hat{D}$, y, por consiguiente:

$$\hat{A} = \hat{\alpha} - \hat{D} \quad ,, \quad \text{med. de } \hat{A} = \tfrac{1}{2}\,\overparen{CD} - \tfrac{1}{2}\,\overparen{BE}$$

o sea

$$\text{med. } \hat{A} = \tfrac{1}{2}\,(\overparen{CD} - \overparen{BE})$$

es decir: La medida de un ángulo exterior en una circunferencia, es *igual a la semidifirencia de los arcos que sus lados interceptan en la circunferencia.*

10. Areas circulares

A) Círculo

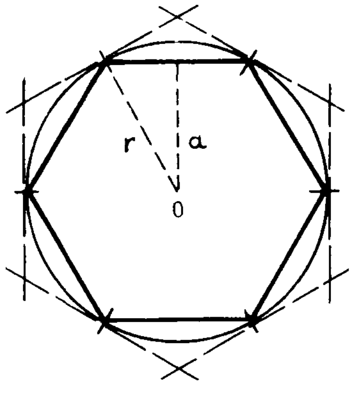
Si dada una circunferencia, inscribimos un polígono regular en ella, y en sus vértices trazamos el polígono circunscrito correspondiente, la longitud de la circunferencia, es el límite común de los perímetros de ampos polígonos, cuando el número de lados de ambos crece indefinidamente.

Por consiguiente, el área del círculo, o sea el área limitada, por la circunferencia, será el límite común de las áreas de los referidos polígonos.

$$\text{área círculo} = \lim . \tfrac{1}{2}\, p \cdot a$$

siendo p el perímetro del polígono inscrito y a la apotema correspondiente. Por consiguiente, como el límite de p es la longitud de la circunferencia, y el de a, el radio de la misma, tenemos:

$$\text{área círculo} = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$



Es decir, el área del círculo es igual al producto del número π, por el cuadrado del radio, expresadas en unidades superficiales correspondientes, a la unidad lineal en que esté expresado el radio.

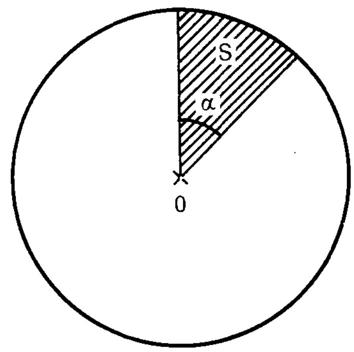
B) Sector circular

Como en una misma circunferencia los arcos y los sectores correspondientes son proporcionales, ya que a áreas iguales, sectores iguales, y a un arco suma de dos corresponde sector suma de los respectivos sectores, se tiene

$$\frac{\text{Ar. sector } S}{\text{Ar. círculo}} = \frac{\alpha}{360}$$

luego

$$\text{Area sector} = \pi\, r^2 \frac{\alpha}{360}$$

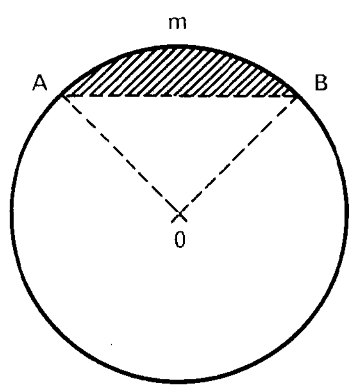


C) Segmento circular

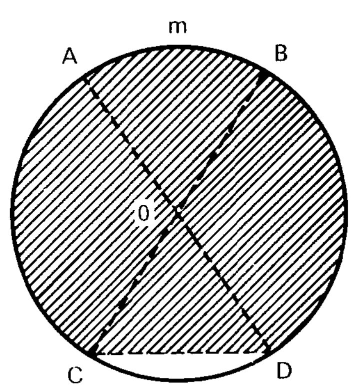
$$\text{seg. } AmB = \text{sector } \overset{\sphericalangle}{AOB} - \overset{\triangle}{AOB}$$

luego

$$\text{área Seg. } AmB = \text{Ar. sector } \overset{\sphericalangle}{AOB} - \text{Ar. Triáng. } \overset{\triangle}{AOB}$$



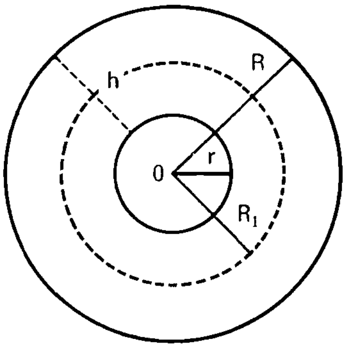
Si el segmento es mayor que un semicírculo, como CmD, el área será la del sector correspondiente más el triángulo OCD.



D) Corona circular

Como sabemos que la corona circular es la porción de superficie limitada por dos circunferencias concéntricas, tendremos:

Area corona = Ar. círculo mayor − área círculo menor



$$Ar. = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Si llamamos h a la altura de la corona, es decir, $R - r = h$, tenemos

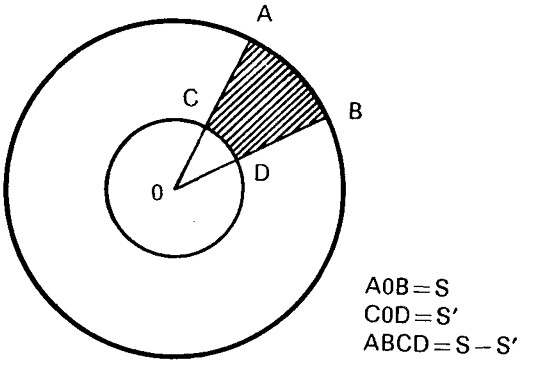
$$Ar. = \pi(R+r)(R-r) = 2\pi \frac{(R+r)}{2}(R-r) = 2\pi R_1 h$$

donde R_1 es el radio de la circunferencia media de la corona.

E) Trapecio circular

Trapecio circular es la parte corona circular comprendida entre dos radios.

Su área será igual a la diferencia de áreas de los dos sectores correspondientes, S y S
Area sector = Area sector mayor − Area sector menor



TEMA 3. VOLUMENES DE CUERPOS. SU MEDIDA Y CALCULO

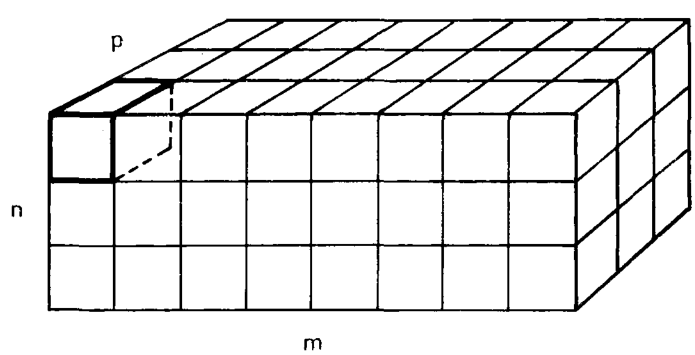
1. Volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos

En el sistema métrico decimal se adopta como unidad de volumen el cubo de lado igual a un metro, o sea el metro cúbico.

Dos cuerpos son equivalentes si tienen igual volumen. Dos cuerpos congruentes son equivalentes.

2. Ortoedro

Si la unidad lineal está contenida un determinado número de veces, m, n, p, en cada una de esas aristas, trazando por cada una de esas divisiones planos paralelos a las caras del octoedro, quedará éste descompuesto en $(m \cdot n \cdot p)$ cubos iguales, cada uno de los cuales es la unidad de volumen, luego el volumen del ortoedro sería $V = m \cdot n \cdot p$, es decir, el producto de la medida de las tres dimensiones.

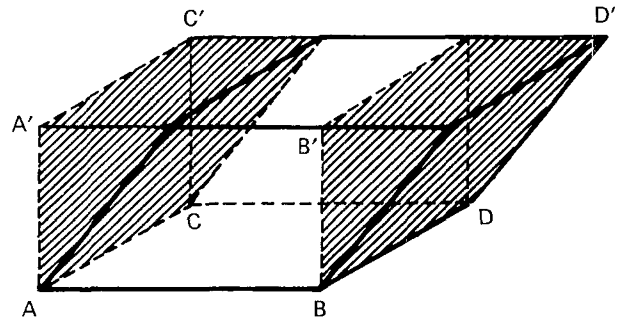


Si se trata del exaedro, su volumen será el cubo de la medida de su arista, es decir:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

3. Volumen del paralelepípedo

Siempre se puede pasar de un paralelepípedo a un octaedro de base equivalente e igual altura, mediante adiciones y sus tracciones de poliedros equivalentes.



En el ejemplo de la figura, suponiendo la base rectangular, basta trazar por dos aristas opuestas de la base dos planos perpendiculares a la misma, con lo que se formarán dos prismas triangulares equivalentes, por tener todos sus elementos iguales y, por consiguiente restando uno u otro de esos prismas resulta el paralelepípedo equivalente al octaedro

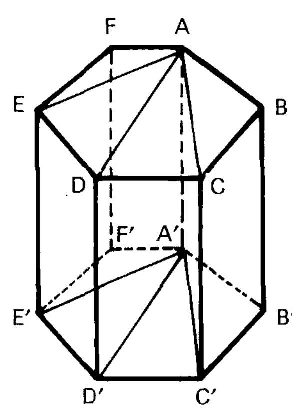
Su volumen es, pues, el área de la base por la altura

$$V = B \cdot h$$

Si la base del paralelepípedo no es rectangular, se convierte en otro equivalente que lo sea, reduciendo el caso al anterior.

4. Volumen del prisma

Un paralelepípedo cortado por un plano diagonal se descompone en dos prismas simétricos de base triangular, el área de esta base es la mitad del área de la base del paralelepípedo y las alturas son la misma, luego:



El volumen del *prisma triangular* es igual al *área de la base por la altura*

$$V = B \cdot h$$

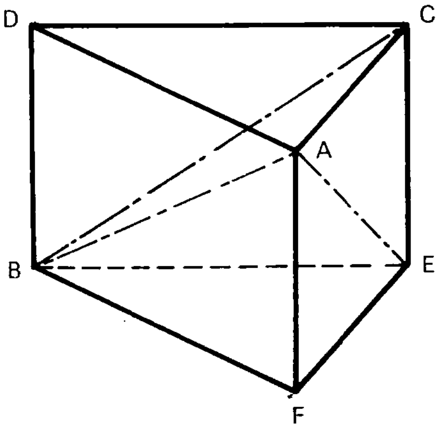
Teniendo en cuenta que todo prisma se puede descomponer en prismas triangulares de igual altura que el primitivo y que la suma de las áreas de las bases triangulares es igual al área de la base del prisma, tenemos que: el volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de la base por la altura

$$V = B \cdot h$$

5. Volumen del tetraedro

Todo prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes.

Si por A trazamos el plano ABC, queda descompuesto el prisma en una pirámide cuadrangular $ABCDE$, y el tetraedro $ABCF$, y trazando el plano diagonal ABE de la pirámide cuadrangular queda ésta descompuesta en dos tetraedros que son equivalentes por serlo sus bases y tener igual altura, y que a su vez lo son con el tetraedro primero por la misma razón.

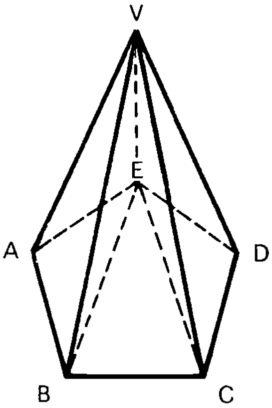


Por tanto: el volumen de un tetraedro es igual a un tercio del área de la base por la altura

$$V = \tfrac{1}{3}\, B \cdot h$$

6. Volumen de la pirámide

Cualquier pirámide se puede descomponer en suma de tetraedros de igual altura mediante planos diagonales que pasen por el vértice y al sumar los volúmenes de los tetraedros tendremos que: el volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura. Es decir, $V = \frac{1}{3} B \cdot h$.

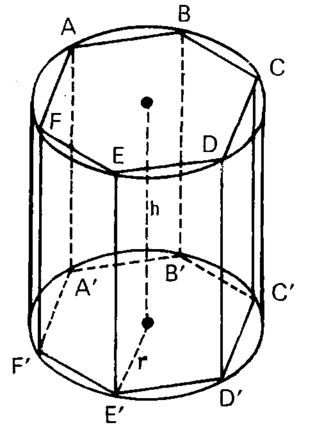


7. Volumen del cilindro

El volumen del cilindro, considerado como límite de los volúmenes de los prismas inscritos en él al aumentar indefinidamente el número de caras de las mismas, también será el producto del área de la base por la altura.

Si el radio de la base es r, su área es πr^2 y el volumen del cilindro es:

$$V = \pi\, r^2\, h$$

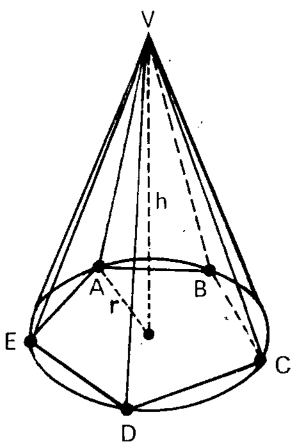


8. Volumen del cono

Igualmente el volumen del cono se considera como límite de los volúmenes de las pirámides inscritas al aumentar indefinidamente el número de caras laterales de los mismos.

Por consiguiente, el volumen del cono sería igual a un tercio del producto del área de la base por la altura. Siendo r el radio de la base, el volumen del cono viene dado por

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



9. Volumen de la esfera

El volumen de la esfera se obtiene multiplicando los cuatro tercios de π por el cubo del radio.

De los volúmenes esféricos nos limitamos a dar la regla anterior, por razones de limitar la extensión del programa.

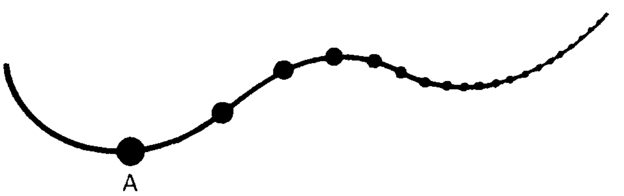
CAPITULO VII

TEMA 1. ELEMENTOS GEOMETRICOS

1. Elementos geométricos

El punto es el elemento geométrico primitivo, el más simple. Su concepto es intuitivo. La punta de un lápiz, por ejemplo, sirve para materializarlo. Una letra mayúscula sirve para su representación.

Un punto moviéndose engendra una línea



Podemos pues, definir la *línea* como el conjunto de puntos obtenido por el movimiento continuo de uno de ellos.

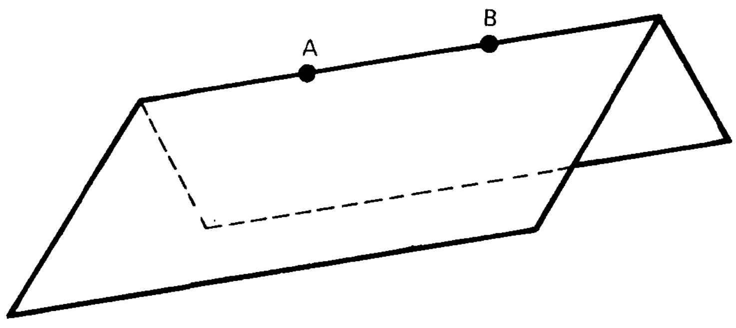
Si la línea se mueve en el espacio, sin deslizarse sobre ella misma, engendra la *superficie*.

Por consiguiente, podemos definir la superficie como la figura geométrica que puede engendrarse por el movimiento continuo de una línea que no se deslice sobre ella misma.

Si a su vez, una superficie se mueve en el espacio, sin deslizarse sobre ella misma, engendra otra figura geométrica que es el *cuerpo*.

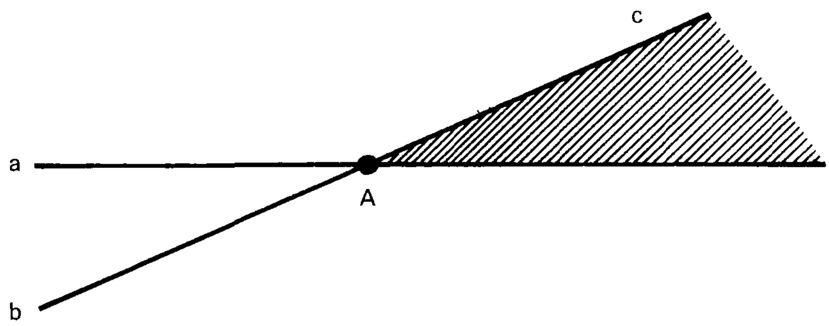
Entre las líneas, está la denominada *recta*, que se caracteriza por ser indefinida, idéntica en todas sus partes, y está determinada por dos de sus puntos.

Puede materializarse marcando dos puntos *A* y *B* en el papel y doblando por ellas, el doblez, es la recta *AB* que pasa por ellos.



Igualmente puede materializarse por un hilo tirante que pase por los dos puntos.

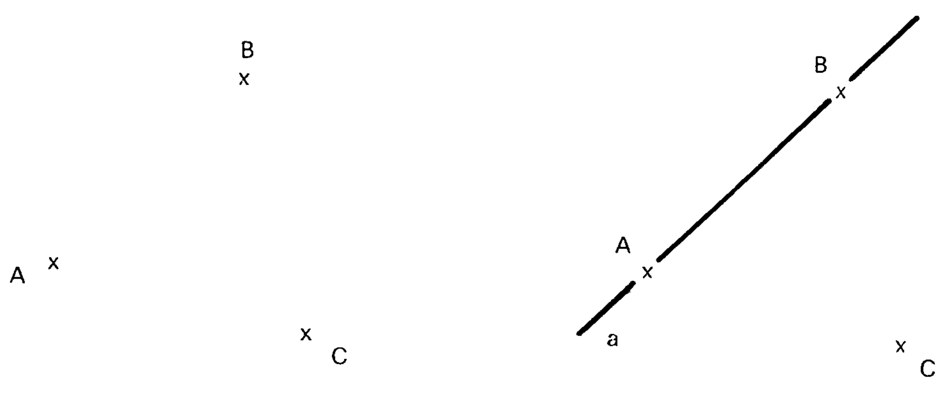
Si tenemos dos rectas con un punto común, y hacemos deslizar sobre ellas, una tercera, engendra una superficie que se llama *plano*.



El *plano* se caracteriza por ser indefinida, idéntico en todas sus partes y están determinadas por dos rectas que se corten.

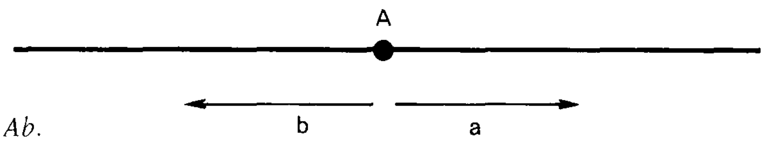
El plano queda determinado también por tres puntos que no estén en línea recta, pues uniendo dos de ellas con el tercero queda reducido este caso al anterior.

Igualmente puede determinarse por un punto y una recta que no lo contenga, pues bastará tomar dos puntos en la recta, y tendríamos reducida al caso últimamente citado.



2. La recta

Si en una recta señalamos un punto A, queda dividida en dos partes que se llaman *semirrectas* o *semirrayos* con el extremo A común



semirrayos Aa y Ab.

Dichos semirrayos se dicen de opuesto sentido o sentido contrario, y se expresan así:

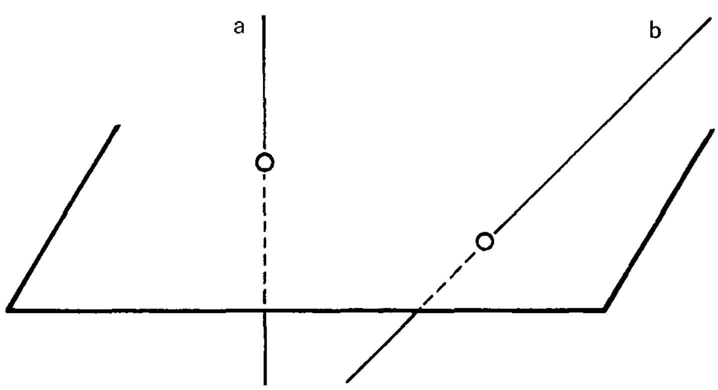
$$\overleftarrow{Aa} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{Ab}$$

Si en una recta tomamos dos puntos A y B, el conjunto de los puntos situados entre ellos, y ellos mismos, se llama *segmento rectilíneo*, y los puntos A y B, extremos del segmento $\overline{AB}$

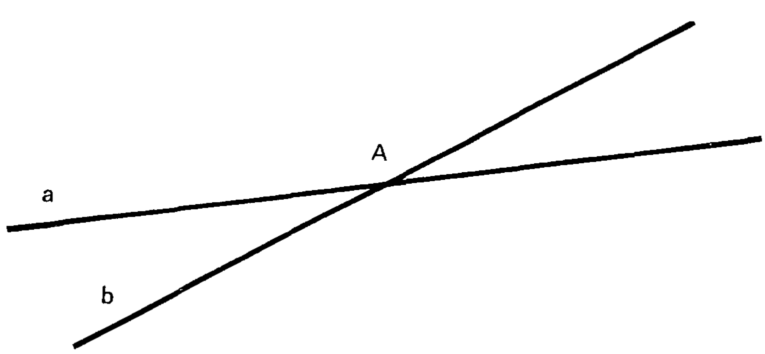
3. Posiciones de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden tener tres posiciones:

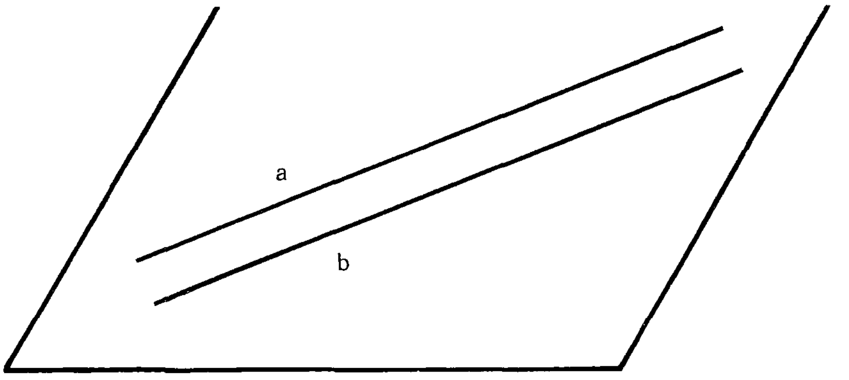
a) No tener ningún punto común sin estar en un plano. Se dice que se *cruzan*



b) Tener un punto común, y entonces se *cortan*



c) Estar en un plano y no tener ningún punto común. Las rectas se llaman *paralelas*.

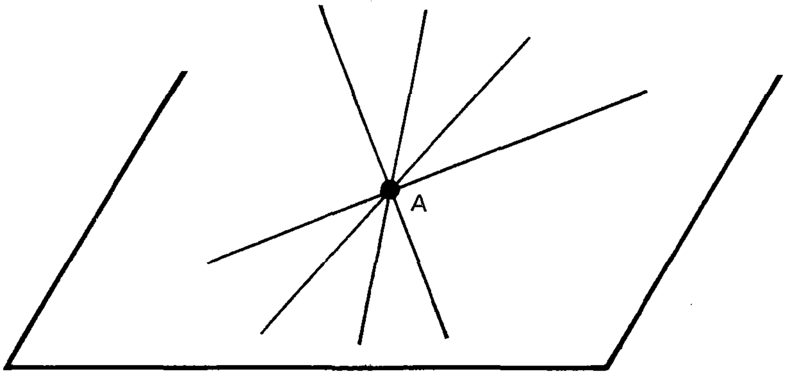


Si tienen más de un punto común coinciden, por razón de sus propiedades características.

4. Radiación - Haz de rayos

Las infinitas rectas que pasan por un punto A, en el espacio, constituyen una *radiación* de vértice A.

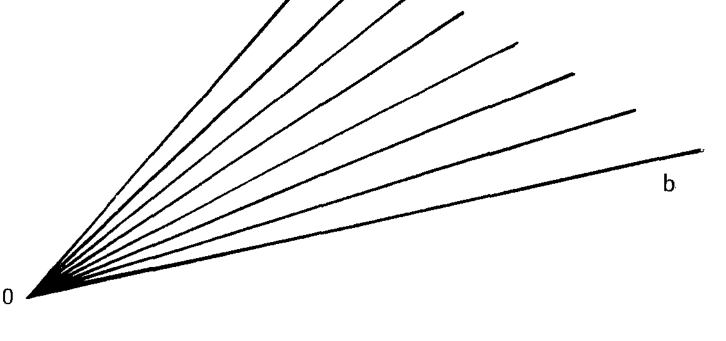
Cuando son infinitas las rectas que pasan por A y están en un plano, ese conjunto se llama *haz de rectas*.



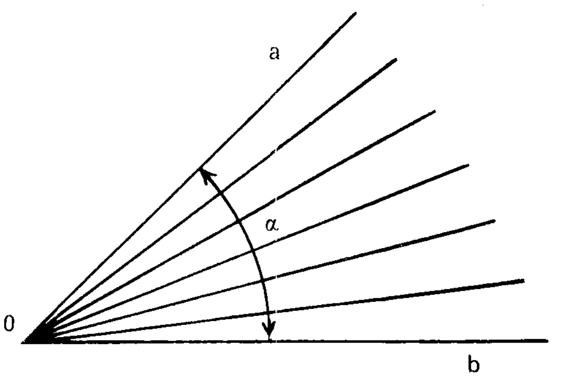
Si en lugar de las rectas se consideran los semirrayos a partir de A, por ejemplo, se forma un *haz de semirrayos* de vértice A.

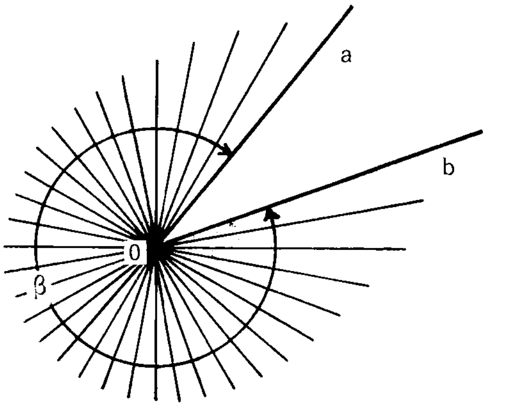
5. Angulos

La parte de haz de semirrayos limitada por dos de ellos se llama ángulo. Sea el *ángulo* $\widehat{aOb}$ o simplemente $\hat{ab}$.

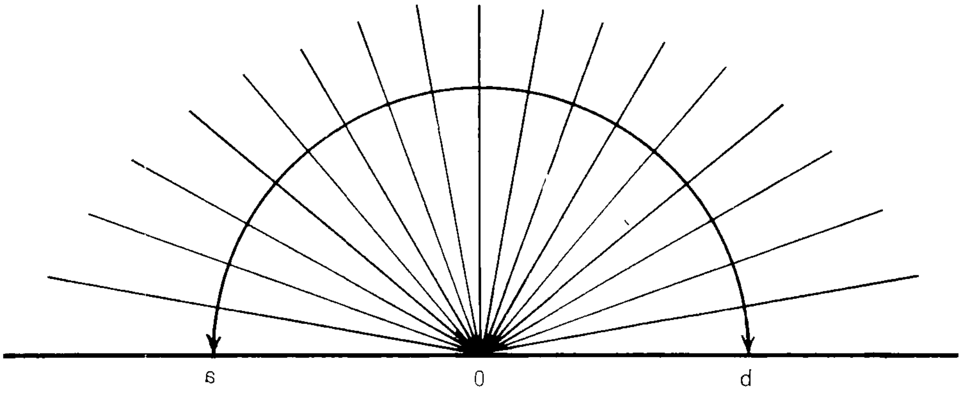


Los dos semirrayos limitan dos partes del haz. El ángulo: $a\hat{O}b = \alpha$ que se llama *convexo* y el $a\hat{O}b = \beta$

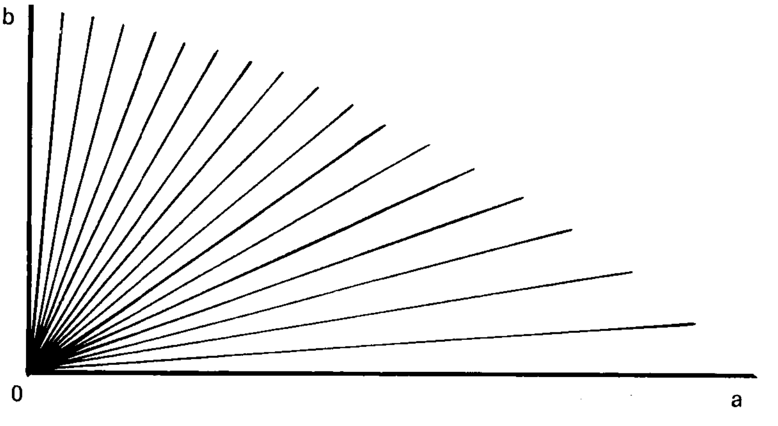




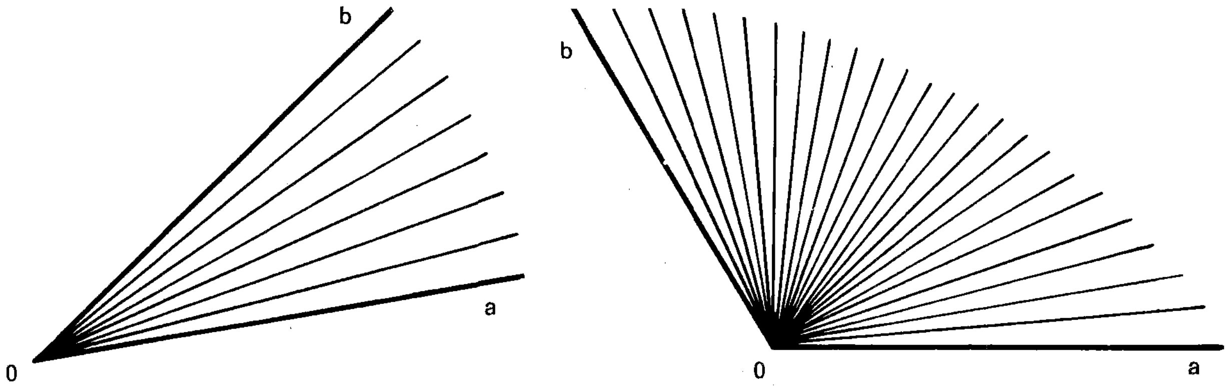
que se denomina *cóncavo*, según sea menor o mayor que un *semi-haz* que es el determinado por dos semirrayos opuestos, constituyendo el ángulo *llano*



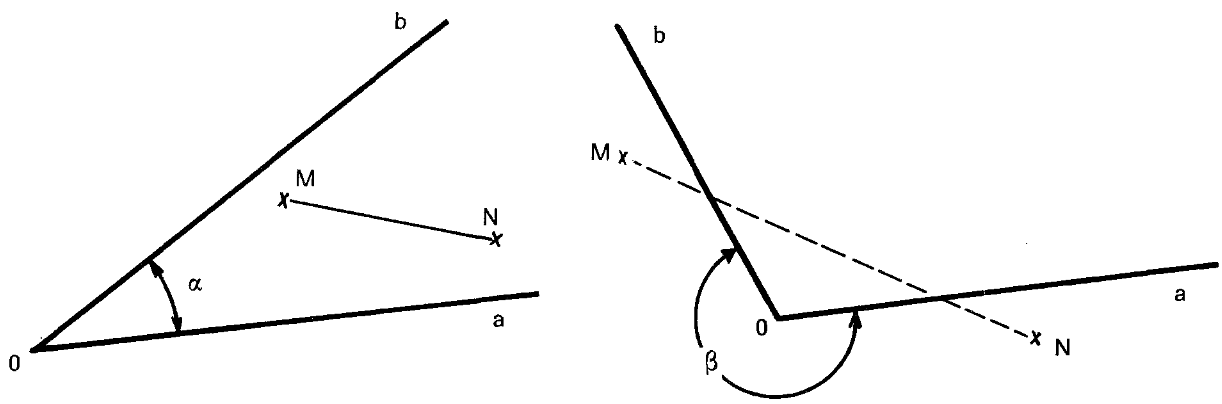
La mitad de un ángulo llano, se llama *ángulo recto*, y sus lados se dice que son rectas *perpendiculares*.



Todo ángulo menor que un recto se dice *agudo*, y si es mayor se llama *obtuso*.

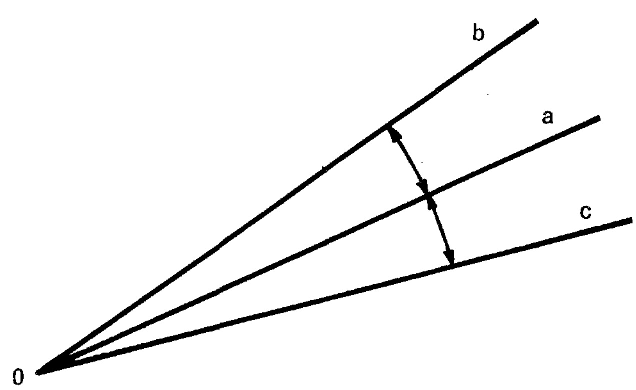


En un ángulo convexo, el segmento que une dos de los puntos de su zona angular está contenido en él. En el caso de ser cóncavo, el segmento puede cortar a sus lados



6. Angulos consecutivos

Son los que teniendo un lado común, los otros dos están a distinto lado. Sean $a\widehat{O}b$ y $a\widehat{O}c$.



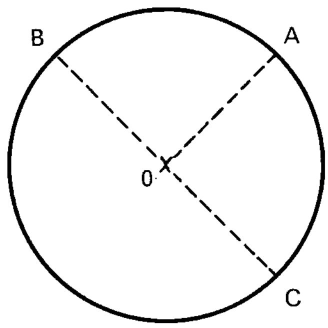
El ángulo formado por los dos lados externos, el $\widehat{bc}$ de nuestro ejemplo se llama suma de los dos dados. Cuando tienen un lado común, y los otros dos al mismo lado, el ángulo formado por los dos no comunes se llama *diferencia* de los ángulos dados.

Si un ángulo recto se divide en 90 partes, cada parte se llama grado *sexagesimal*, y si hace en 100, se denomina, cada ángulo obtenido, grado *centesimal*. Así pues, un ángulo recto tiene 90° y 100° respectivamente.

Un ángulo queda determinado por sus dos lados, sabiendo si es cóncavo o convexo.

7. Circunferencia

Entre las líneas citaremos también, como importante por el papel que juega en las relaciones planas, la *circunferencia*, que es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de uno fijo del mismo, llamado *centro*. La distancia del *centro* a uno de los puntos de la *circunferencia* se llama *radio*. El segmento limitado por dos puntos opuestos de la misma, es decir, que pasa por el centro se denomina *diámetro*. La parte del plano limitado por la circunferencia se denomina *círculo*.



Cuando cierto conjunto de puntos cumple con una condición, y los restantes puntos del plano no la cumplen, se llama *lugar geométrico*.

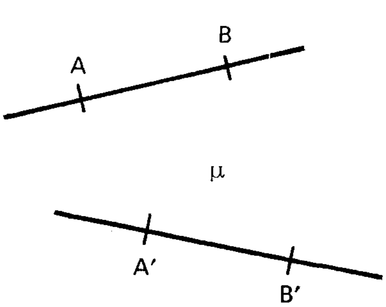
Así pues, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro fijo llamado *centro*.

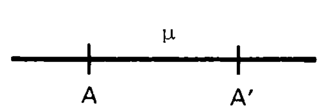
8. Movimientos

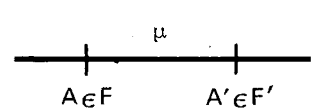
Para el estudio de las figuras geométricas es conveniente muchas veces utilizar la idea de *movimiento* del que a su tiempo y en el capítulo correspondiente se expondrá más ampliamente. Cuando una figura ocupando distintas posiciones en el espacio, ligados como es natural a los distintos instantes en un desplazamiento, y prescindiendo del tiempo, y de las distintas posiciones intermedias tenemos únicamente en cuenta la posición inicial F y la final F', diremos que se ha efectuado un movimiento con la figura F en la que sus elementos primitivos y posiciones relativas permanecen inalterables.

Llamando μ al movimiento, F a la figura primitiva y F' a la posición final, podemos escribir

$$F \xrightarrow{\mu} F'$$



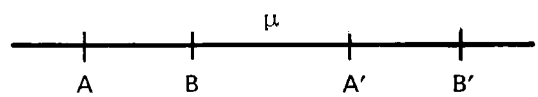




9. Segmentos

Dos segmentos estén o no situados en una misma recta, se dice que son iguales, cuando por un movimiento los extremos coinciden.

Sea $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$



el segmento $\overline{AB}$ de la figura, coincide con $\overline{A'B'}$ mediante el movimiento μ, luego son iguales.

10. Segmentos generales

El conjunto de los segmentos del plano quedan clasificados en clases de equivalencia mediante la relación de igualdad anteriormente definida; cada clase de equivalencia está constituida por todos los segmentos del plano iguales entre sí, y cualquiera de ellos puede utilizarse para representarla. Si el segmento $\overline{AB}$ pertenece a una cierta clase ésta se denotará por $[AB]$; también se utilizan letras minúsculas $a, b, \ldots$ para representar las clases. A cada clase de segmentos le damos el nombre de *segmento general.*

11. Adición de segmentos generales

Dados dos segmentos generales a y b, llamaremos *suma* de los mismos, notación $a+b$, al segmento general que se obtiene tomando como representante del mismo el segmento $\overline{AC}$ suma de un representante $\overline{AB}$ de a y otro $\overline{BC}$ de b consecutivos. En símbolos:

$$a+b=[AB]+[BC]=[AB+BC]=\overline{AC}$$

Propiedades de la adición

1. *Uniforme.* Si $[AB]=[A'B']$ y $[BC]=[B'C']$ entonces

$$[AB]+[BC]=[A'B']+[B'C']$$

ya que

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{A'B'}+\overline{B'C'}=\overline{A'C'}$$

2. *Asociativa.* $([AB]+[BC])+[CD]=[AB]+([BC]+[CD])$, en efecto:

$$(AB+BC)+CD=AC+CD=AD=AB+BD=AB+(BC+CD)$$

luego entre las clases correspondientes se verifica $([AB+BC])+[CD]=[AB]+[BC+CD]$, es decir,

$$([AB]+[BC])+[CD]=[AB]+([BC]+[CD])$$

3. *Conmutativa.* $[AB]+[BC]=[AC]=[CA]=[CB]+[BA]$ y como $a=[AB]=[BA]$, $b=[BC]=[CB]$ tenemos $a+b=b+a$ que expresa la conmutatividad de la suma.

4. *Existencia de neutro.* Consideraremos el segmento $\overline{OO}$, cuyos extremos coinciden, y todos sus equivalentes como el segmento general neutro para la suma, ya que:

$$[AB]+[BB]=[AB]$$

Tenemos, por tanto, que el conjunto de los segmentos generales y la operación de sumar definida entre ellos es un semigrupo conmutativo.

12. Producto de segmentos generales por números naturales

El producto del número n por el segmento general a es la suma de n veces el segmento a:

$$n \cdot a = a + a + \overset{n}{\dots} + a$$

Este producto goza de las siguientes propiedades:

1. *Distributividad respecto de la suma de números naturales*, es decir,

$$(m+n) \cdot a = ma + na$$

ya que

$$(m+n)a = a + a + \overset{m}{\dots} + a + a + a \overset{n}{\dots} a = ma + na$$

2. *Distributividad respecto de la suma de segmentos*, es decir,

$$m(a+b) = ma + mb$$

en efecto

$$m(a+b) = (a+b) + (a+b) + \overset{m}{\dots} + (a+b) = a + a \overset{m}{\dots} + a + b + b + \overset{m}{\dots} + b = ma + mb$$

3. *Una cierta asociatividad entre el producto de números y del producto de números por segmentos*, en el siguiente sentido:

$$(m \cdot n)a = m(n \cdot a)$$

en efecto,

$$(m \cdot n)a = a + a + \overset{mn}{\dots\dots} + a = (a + a + \overset{n}{\dots} + a) + (a + a + \overset{n}{\dots} + a) + \overset{m}{\dots} (a + a + \overset{n}{\dots} + a) = m(n \cdot a)$$

4. *En virtud de la definición se verifica:* $1 \cdot a = a$

En el semigrupo $\mathcal{S}$ de los segmentos generales tenemos definido un producto por elementos de $\mathbb{N}$ verificando las cuatro propiedades anteriores, decimos entonces que $(\mathcal{S}, \mathbb{N}, +)$. es un semimódulo o que el conjunto de los segmentos generales respecto de la suma y el producto por naturales es un semimódulo sobre $\mathbb{N}$.

13. La relación de orden de los segmentos generales

Diremos que el segmento general b es menor o igual que el a, notación $b \leqslant a$, si existe otro segmento c tal que $b + c = a$; en particular c puede ser el segmento neutro para la suma y en ese caso se verifica la igualdad entre a y b.

Puede el lector comprobar que esta relación entre segmentos es efectivamente una relación de orden.

El orden así definido es compatible con la suma de segmentos, ya que se verifica la siguiente propiedad de monotonía:

Si $a \leqslant b$ y $c \leqslant d$ entonces $a+c \leqslant b+d$, en efecto

$$a+h=b \quad . \quad c+k=d$$

luego

$$(a+c)+(h+k)=b+d$$

es decir:

$$a+c \leqslant b+d$$

Asimismo, es compatible con el producto por números naturales ya que se verifica:

Si $a \leqslant b$ entonces $na \leqslant nb$, en efecto:

$$a+h=b \quad ; \quad n(a+h)=nb \quad ; \quad na+nb=nb$$

por tanto, $na \leqslant nb$.

14. Sustracción de segmentos generales

Dados dos segmentos generales a y b tal que $b \leqslant a$, llamaremos *diferencia* de a y b, notación $a-b$, al segmento general c tal que $a=b+c$.

En virtud de la definición se verifica la siguiente equivalencia $a-b=c$ equivale a $b+c=a$, asimismo: $a-c=b$ es equivalente a $a-b=c$ y a $b+c=a$.

Nota práctica: Para sustraer segmentos bastará superponer dos representantes y la diferencia viene dada por el segmento determinado por los extremos no comunes de los segmentos superpuestos.

15. Angulos generales

Dos ángulos diremos que son iguales si pueden superponerse mediante movimientos sucesivos de manera que sus lados coincidan, escribiremos

$$aVb=a'V'b'$$

La igualdad de ángulos verifica las propiedades reflexivas, simétrica y transitiva es, por tanto, una relación de equivalencia entre los ángulos convexos del plano.

A cada una de las clases de equivalencia correspondientes les damos el nombre de *ángulo general*. Es decir, un *ángulo general* es la clase de todos los ángulos convexos del plano iguales entre sí, lo representaremos por $\widehat{ab}$ o $\widehat{ab}$, donde las letras a, b indican los lados de uno cualquiera de los ángulos de la clase.

16. Adición de ángulos generales. Propiedades

Dados dos ángulos generales $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ llamamos *suma* de los mismos y la representaremos por $\widehat{ab}+\widehat{cd}$ al ángulo general $a'd'$ obtenido mediante la suma de los ángulos consecutivos $a'Vh$ y hVd' representantes de $\hat{ab}$ y $\hat{cd}$ respectivamente

La adición de ángulos generales goza de las siguientes propiedades:

1. *Uniforme.* Si $\widehat{ab}=\widehat{cd}$ y $\widehat{a'b'}=\widehat{c'd'}$ se verifica que $\widehat{ab}+\widehat{a'b'}=\widehat{cd}+\widehat{c'd'}$, en efecto tomamos

$$mVh=aPb=cP'd \quad \text{y} \quad hVp=a'Ob'=c'O'd'$$

luego

$$\widehat{ab}+\widehat{a'b'}=[mVh+hVp]=\widehat{mp} \quad ; \quad \widehat{cd}+\widehat{c'd'}=[mVh+hVp]=\widehat{mp}$$

por consiguiente

$$\widehat{ab}+\widehat{a'b'}=\widehat{mp}=\widehat{cd}+\widehat{c'd'}$$

2. *Asociativa*: Se verifica que

$$(\widehat{ab}+\widehat{cd})+\widehat{ef}=\widehat{ab}+(\widehat{cd}+\widehat{ef})$$

en efecto tomando

$$a'Vh\in\widehat{ab} \quad , \quad hVd'\in\widehat{cd} \quad \text{y} \quad d'Vf'\in\widehat{ef}$$

se tiene

$$(\widehat{ab}+\widehat{cd})+\widehat{ef}=(\widehat{a'h}+\widehat{hd'})+\widehat{d'f'}=\widehat{a'd'}+\widehat{d'f'}=\widehat{a'f'}=\widehat{a'h}+\widehat{hf'}=\widehat{a'h}+(\widehat{hd'}+\widehat{d'f'})=\widehat{ab}+(\widehat{cd}+\widehat{ef})$$

3. *Conmutativa*: Se verifica $\widehat{ab}+\widehat{cd}=\widehat{cd}+\widehat{ab}$, en efecto si

$$a'Vh\in\widehat{ab} \quad ; \quad hVd'\in\widehat{ca}$$

también

$$hVa'\in\widehat{ab} \quad ; \quad d'Vh=\widehat{cd}$$

pues

$$a'Vh=hVa' \quad ; \quad hVd'=d'Vh$$

luego

$$a'Vh+hVd'=a'Vd'=d'Va'=d'Vh+hVa'$$

y pasando a las clases de equivalencia

$$\widehat{ab}+\widehat{cd}=\widehat{a'd'}=\widehat{d'a'}=\widehat{cd}+\widehat{ab}$$

4. Existencia de *neutro* para la adición: Consideramos que la clase de ángulos constituida por todos los ángulos cuyos lados coinciden es el elemento neutro ya que se verifica:

$$\widehat{ab}+\widehat{bb}=\widehat{ab}$$

para cualquier ángulo general $\widehat{ab}$.

Queda establecido que el conjunto de los ángulos generales del plano es un semigrupo respecto de la adición.

17. Producto de ángulos generales por números naturales

Definimos el producto del ángulo general ab por el número natural n, como el ángulo (convexo) general suma de n veces el ángulo $\widehat{ab}$, o sea:

$$n\cdot\widehat{ab}=\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{n}{\ldots}+\widehat{ab}$$

En virtud de la anterior definición se verifica:

1.

$$(m+n)\widehat{ab}=(\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{m}{\ldots}+\widehat{ab})+(\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{n}{\ldots}+\widehat{ab})=m\cdot\widehat{ab}+n\cdot\widehat{ab}$$

2.

$$m\cdot(\widehat{ab}+\widehat{cd})=(\widehat{ab}+\widehat{cd})+(\widehat{ab}+\widehat{cd})+\overset{m}{\ldots}+(\widehat{ab}+\widehat{cd})=\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{m}{\ldots}+ab+$$

$$+\widehat{cd}+\widehat{cd}+\overset{m}{\ldots}+\widehat{cd}=m\cdot\widehat{ab}+m\cdot\widehat{cd}$$

3.

$$(m\cdot n)\cdot\widehat{ab}=(\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{n}{\ldots}+\widehat{ab})+(\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{n}{\ldots}+\widehat{ab})+\overset{m}{\ldots}+(\widehat{ab}+\widehat{ab}+\overset{n}{\ldots}+\widehat{ab})=m\cdot(n\cdot\widehat{ab})$$

4.

$$1\cdot\widehat{ab}=\widehat{ab}$$

Como en el caso de los segmentos generales hemos establecido que con las operaciones anteriores el conjunto de los ángulos generales del plano es un semimódulo sobre $\mathbb{N}$.

18. Desigualdad de ángulos generales

Dados dos ángulos generales $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ diremos que $\widehat{ab}$ es menor que $\widehat{cd}$, notación $\widehat{ab}<\widehat{cd}$, si podemos elegir representantes respectivos hVb' y hVd' superpuestos tales que se verifique $hVb'+b'Vd'=hVd'$ siendo hVb' y $b'Vd'$ ángulos consecutivos.

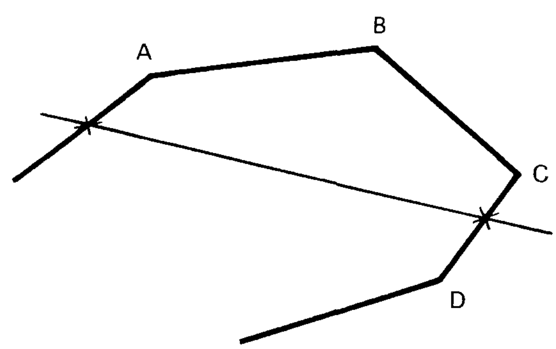
El ángulo general $\widehat{b'd'}$ le llamaremos diferencia entre el ángulo general $\widehat{cd}$ y el $\widehat{ab}$, notación $\widehat{cd}-\widehat{ab}$.

TEMA 2. IGUALDAD DE TRIANGULOS. GENERALIZACION A OTRAS FIGURAS PLANAS

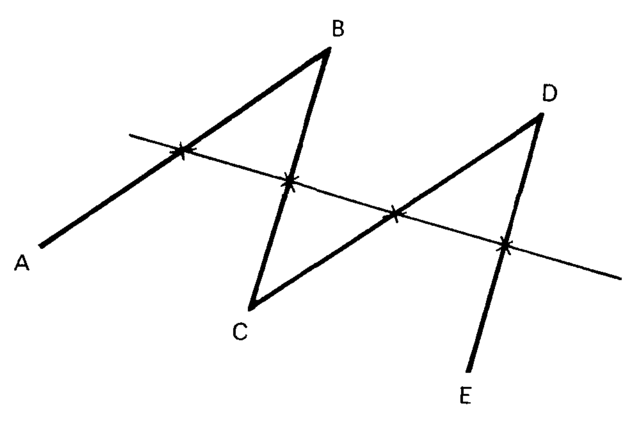
Polígonos

Aún dando por conocidas las nociones elementales, muchas intuitivas, sobre esta materia, las sistematizaremos ahora fundamentándolas en capítulos anteriores, según nuestra línea expositiva establecida.

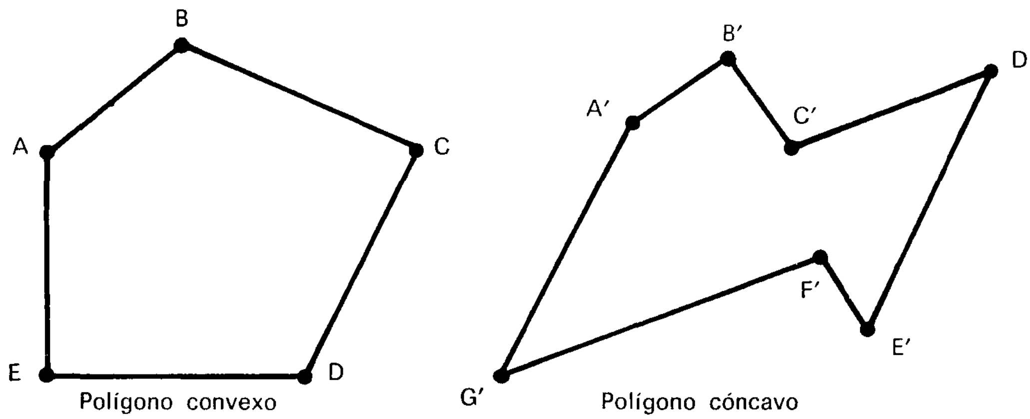
Una línea formada por segmentos consecutivos, se llama *quebrada*; siendo *plana* y *convexa*, cuando situada en un plano, cualquier recta de éste no queda cortada en más de dos puntos.



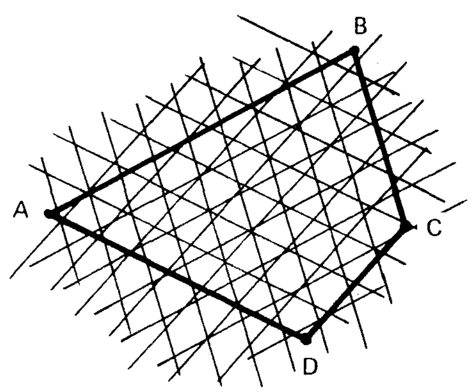
Si la línea plana es tal que hay alguna recta que la corte en más de dos puntos se llama *cóncava*.



Polígono es la porción del plano limitado por una línea quebrada cerrada.



Como cada recta en el plano determina dos semiplanos, el polígono es la parte de plano *común* a los semiplanos de todos sus lados, tales que cada uno contienen a los demás vértices del polígono.



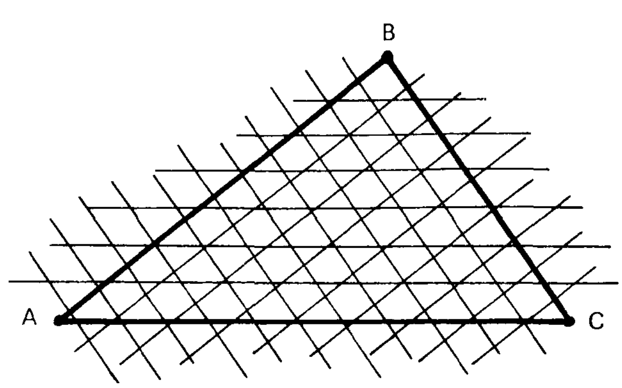
La parte rayada, común a los semiplanos citados, constituye el polígono *ABCDE*.

Los segmentos *AB*, *BC*, ... son los lados del polígono. Los puntos extremos son los vértices, la línea quebrada es el contorno, y su medida, el perímetro.

Los polígonos se clasifican en *triángulos*, *cuadriláteros*, y, en general, *eneágonos*, según el número de sus *lados* o de sus *ángulos*.

2. Triángulos

Triángulo es la figura plana delimitada por tres rectas que se cortan dos a dos.



Los puntos de intersección de cada dos rectas reciben el nombre de *vértices* del triángulo, los segmentos determinados por cada dos *vértices* se llaman *lados* del triángulo y los ángulos formados por las semirectas con origen en cada vértice y que contienen a dos lados se llaman *ángulos* del triángulo. Suponemos conocida la clasificación de triángulos y las relaciones elementales entre lados, lados v ángulos entre sí.

3. Igualdad de triángulos

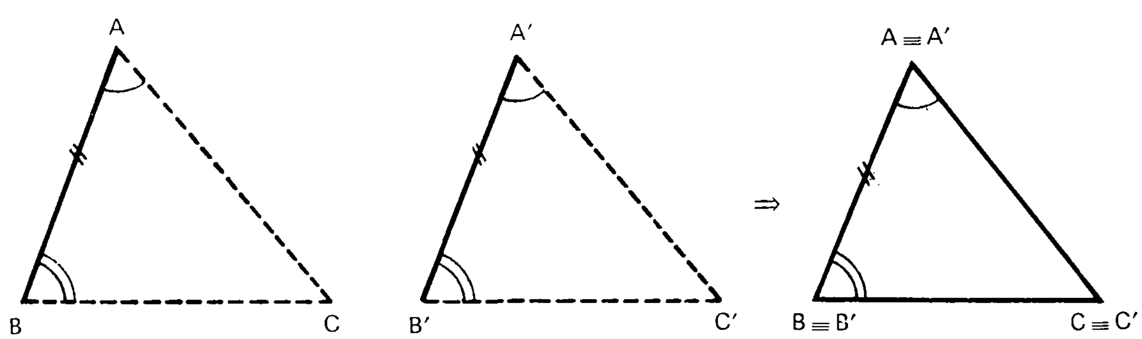
Dos triángulos son iguales cuando podemos superponerlos mediante movimientos sucesivos de manera que coincidan sus vértices.

Recíprocamente si dos triángulos tienen iguales sus lados y sus ángulos, los dos triángulos son iguales; sin embargo, basta que sean iguales algunos de estos elementos para que se verifique la igualdad como se comprueba mediante los siguientes criterios de igualdad de triángulos.

Aun cuando más tarde demos estas demostraciones siguiendo las normas de sistematización establecida ,estudiaremos de un modo intuitivo los casos de igualdad de triángulos.

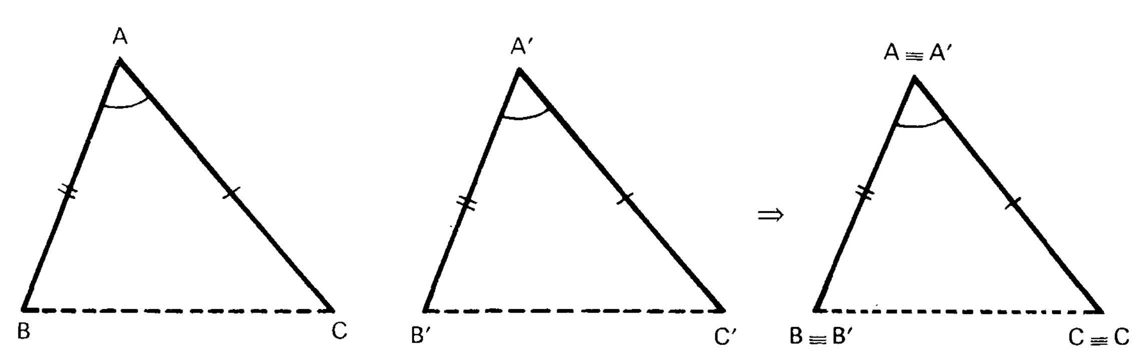
1.º) Tener iguales un *lado* y dos *ángulos*.

Si hacemos coincidir uno de ellos, considerándolo rígido, recortado y lo superponemos sobre el otro coincidiendo el lado igual, como los vértices y ángulos contiguos coinciden por ser iguales, los otros dos lados tienen que coincidir ya que los semirrayos coinciden y, por consiguiente, su punto de intersección.



2.º) Tener iguales *dos lados* y el *ángulo comprendido*.

Al recortar uno de ellos y llevarlo sobre el otro, coincidiendo los ángulos iguales, coincidirán los semirrayos correspondientes y como los lados son iguales, los segmentos coinciden y, por consiguiente, los extremos que son los otros vértices.

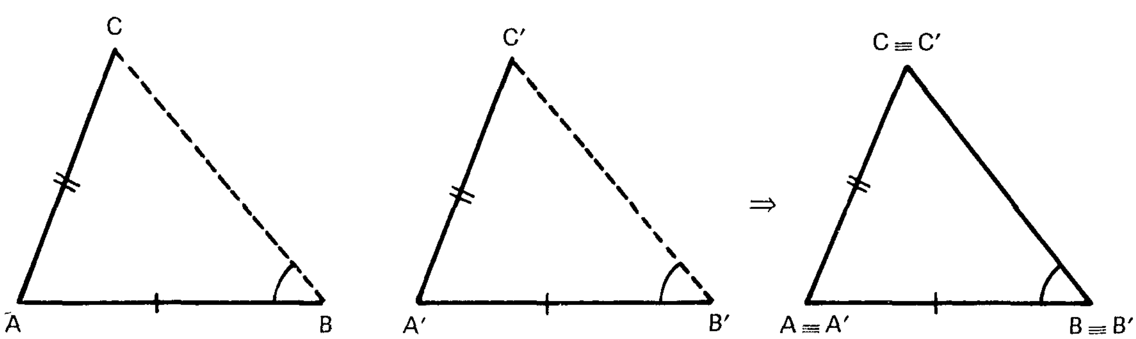


3.º) Tener iguales los tres lados.

Al recortar un triángulo y llevarlo sobre el otro, haciendo coincidir los lados BC y $B'C'$, situando ambos triángulos en la misma región del plano, como las circunferencias con centros en B y C, de radios BA y CA respectivamente, coinciden con las correspondientes a las trazadas en el triángulo $A'B'C'$, por coincidir sus centros y ser iguales sus radios, también coinciden sus puntos de intersección que determinan el tercer vértice de ambos triángulos.

4.º) Si dos triángulos tienen iguales *dos lados*, desiguales entre sí, de cada triángulo y el *ángulo opuesto* al mayor de ellos, los triángulos son iguales.

En efecto, sea $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ y sea $AC > AB$ siendo $\widehat{cBa} = \widehat{c'B'a'}$; llevamos $A'B'$ sobre AB de manera que c y c' queden en el mismo semiplano. Como $\widehat{cBa} = \widehat{c'B'a'}$, las semirrectas que contienen a BC y BC' coinciden (ver figura).



En estas condiciones los vértices C y C' coinciden, pues si no coincidieran tendríamos que C' coincidiría con otro punto C'' del segmento $\overline{BC}$, luego $\overline{AC''} = \overline{A'C'} = \overline{AC}$ y el triángulo CAC'' es isósceles, luego los ángulos $\widehat{ACC''}$ y $\widehat{AC''C}$ son iguales pero $\widehat{AC''C}$ es mayor que $\widehat{ABC}$ por ser exteriores al triángulo ABC'' luego tendríamos que $\widehat{ACB}$ es mayor que $\widehat{ABC}$ y como a mayor ángulo se opone mayor lado tendríamos que $AB > AC$ en contra de la hipótesis. Si en lugar de quedar C' en el punto C'' interior al segmento BC quedara exterior se repetirá el razonamiento, pero transportando ahora el triángulo ABC sobre el $A'B'C'$ con lo que C quedaría interior al segmento $B'C'$ y estaríamos en el caso anterior.

Cuando los triángulos reúnen algunas condiciones especiales, como la de ser *equiláteros, rectángulos* o *isósceles*, las condiciones de igualdad quedan reducidas, teniendo en cuenta la propiedad específica correspondiente.

En efecto:

Equiláteros. Es suficiente para ser iguales, tener un lado igual.

Rectángulos

1.º Tener los *catetos* iguales..

2.º Tener un *lado* y un *ángulo* iguales.

3.º Tener un *cateto* y la *hipotenusa* iguales.

Isósceles

1.º Tener iguales la *base* (lado desigual) y un *lado*.

2.º Tener un *lado* y un *ángulo* iguales.

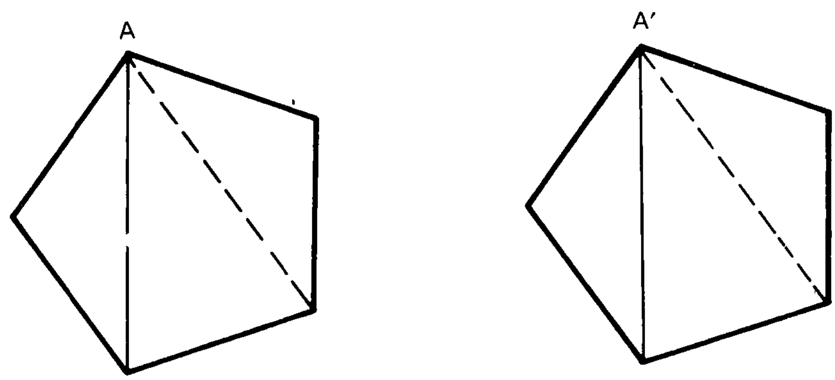
Todos estos casos quedan reducidos a los casos generales, teniendo en cuenta las propiedades correspondientes de cada clase de triángulos.

4. Igualdad de polígonos

Dos polígonos son iguales cuando mediante movimientos sucesivos pueden superponerse de manera que coincidan.

Por consiguiente dos polígonos iguales tienen sus lados y ángulos iguales.

Recíprocamente, cuando tienen sus lados y ángulos iguales respectivamente los polígonos son iguales.



Es suficiente trazar las diagonales desde A y A' es decir, los segmentos determinados por esos vértices, y quedan descompuestos los polígonos en igual número de triángulos iguales e igualmente dispuestos, por lo estudiado anteriormente en los triángulos, y, por consiguiente, al superponer dos de ellos coinciden los demás y todos sus elementos.

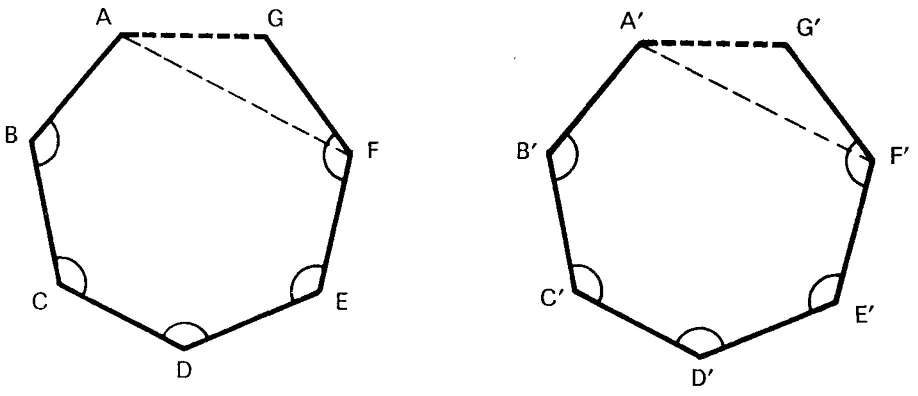
Al igual que en el caso de los triángulos es suficiente para que dos polígonos sean iguales que sean iguales determinado número de lados y ángulos.

Los dos primeros criterios de igualdad de triángulos pueden ser generalizados a otros polígonos, no así los criterios que hemos enumerado 3.º y 4.º que son específicos de los triángulos.

C.P. 1.º Dos polígonos de n lados son iguales si tienen $n-1$ lados, y los $n-2$ ángulos que forman, respectivamente iguales.

En efecto, la demostración la realizamos por inducción: el criterio es cierto para el triángulo, suponemos que es cierto para un polígono de $n-1$ lados y lo demostraremos para el polígono de n lados.

Numeremos los vértices. En la figura se representa el caso $n=7$ para fijar ideas, unamos por medio de una diagonal los vértices AF y $A'F'$ tenemos así dos polígonos de $n-1$ lados que por verificar la hipótesis son iguales.



Entonces el movimiento que lleva a coincidir los $n-1$ vértices $A-F$ del primer polígono con los correspondientes vértices $A'-F'$ del segundo, hace que coincidan también el vértice G con el G' pues los triángulos AFG y $A'F'G'$ son iguales, ya que $AF=A'F'$, $FG=F'G'$ y $AFG=A'F'G'$

G.P. 2.° Para que dos polígonos sean iguales es suficiente que sean iguales los lados y ángulos correspondientes que resultan al prescindir de un ángulo y los lados que lo forman.

En efecto, al prescindir en cada polígono del vértice correspondiente al ángulo, los $n-1$ vértices restantes forman polígonos iguales y los triángulos AFG y $A'F'G'$ son iguales por tener el lado $AF=A'F'$ y los ángulos A y F iguales a los A' y F', luego el punto G coincide con G' en el movimiento que transforma el primer polígono en el segundo.

5. Cuadriláteros

Existen clases de cuadriláteros interesantes, como son el *paralelogramo*, el *trapecio* y el *cuadrado.*

El trapecio, es el que tiene dos lados paralelos y los otros dos no. El segmento determinado por los dos puntos medios de lado, se llama *paralela media,* y altura a la distancia MN entre las dos bases.

El paralelogramo es el que tiene sus lados paralelos dos a dos e iguales.

Si todos sus ángulos son rectas se llama *rectángulo.* Un rectángulo con sus lados iguales es el *cuadrado.*

Cuando todos sus lados son iguales y sus ángulos no son *rectos* se tiene el *rombo.*

Si dos *trapecios* tienen iguales sus bases, un lado y uno de sus ángulos contiguos son iguales.

Basta ver que coinciden al superponer una de sus bases, estando situados en la misma región del plano.

Dos *rombos* son iguales si tienen un lado y un ángulo igual, pues al coincidir un lado y un ángulo coinciden los demás elementos.

Dos *cuadrados* son iguales cuando tienen un lado igual, lo cual es evidente, pues es el caso anterior cuando los ángulos son rectos.

TEMA 3. CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

1. Generalidades

Dado un segmento $a=\overline{AB}$ si fijamos el extremo A y hacemos girar el segmento alrededor de A, hasta su posición inicial, habremos barrido una porción de plano que llamamos *círculo* de centro A y radio a; el extremo B del segmento recorre una línea que recibe el nombre de *circunferencia* también de centro A y radio a.

Toda recta que tenga dos puntos en común con una circunferencia se llama *secante* a la circunferencia. Si sólo tiene un punto en común con la circunferencia se llama *tangente* a la circunferencia. Si no tiene puntos comunes se dice *exterior* a la circunferencia.

El segmento que resulta de unir dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Toda secante a la circunferencia contiene una cuerda de la misma. *Diámetro* es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia y es igual a dos veces el radio de la misma.

La intersección o parte común de un círculo con cada uno de los semiplanos determinados por toda recta que pasa por su centro recibe el nombre de semicírculo; la correspondiente intersección de la circunferencia con cada uno de los semiplanos la damos el nombre de semicircunferencia.

Todo diámetro determina dos semicircunferencias y, por consiguiente, dos semicírculos.

Dos circunferencias son iguales si se pueden superponer de manera que todos sus puntos sean comunes. Dos circunferencias son iguales si sus radios son iguales. Cuando las circunferencias son iguales, sus círculos correspondientes también lo son.

Dos círculos son iguales cuando se pueden superponer de manera que sus circunferencias coincidan.

2. Angulos centrales. Sectores circulares. Arcos

Un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia se llama *ángulo central* de la misma.

Sector circular es la intersección del círculo con la región angular de un ángulo central o bien la parte de círculo comprendida entre dos radios. Cuando esta intersección es un semicírculo el ángulo decimos que es *llano*.

Arco es la intersección de una circunferencia con la región angular de un ángulo central o bien la parte de circunferencia limitada por dos de sus puntos. Los lados del ángulo cortan a la circunferencia en dos puntos que son los *extremos* del arco. Notación: $\overset{\frown}{AB}$. Dos puntos de la circunferencia, limitan dos arcos, que completan aquella (si hay lugar a confusión se introduce un nuevo punto P y escribimos $\overset{\frown}{APB}$).

Al unir los extremos de un arco se obtiene una cuerda que llamamos correspondiente al arco dado y al unir los extremos de la cuerda con el centro de la circunferencia se obtiene un ángulo central que también llamamos correspondiente a la cuerda considerada.

3. Arcos consecutivos y arcos superpuestos

En una *misma* circunferencia diremos que dos arcos son consecutivos cuando tienen un extremo común, siendo éste el único punto común a los dos arcos o lo que es igual estando los otros dos puntos a distinto lado. El arco que tiene por extremos los extremos no comunes de dos arcos consecutivos se dice que es la *suma* de éstos.

Asimismo, dos arcos diremos que están superpuestos cuando teniendo un extremo común todos los puntos de uno de los arcos son comunes con el otro.

Los ángulos centrales correspondientes a arcos consecutivos son ángulos consecutivos y los ángulos centrales de arcos superpuestos son ángulos superpuestos.

4. Arcos equivalentes y arcos iguales. Arcos generales

Dos arcos decimos que son *equivalentes* cuando los ángulos centrales correspondientes son iguales. Notación: $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{A'B'}$.

Consecuentemente se verifica que: $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{AB}$ propiedad reflexiva; si $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{CD}$ quiere decir que el ángulo central correspondiente al arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual al ángulo central correspondiente el arco $\overset{\frown}{CD}$ y en virtud de la propiedad simétrica de la igualdad de ángulos tenemos que $\overset{\frown}{CD} \approx \overset{\frown}{AB}$; si $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{CD} \approx \overset{\frown}{EF}$ en virtud de la transitividad de la igualdad de ángulos tenemos que $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{EF}$.

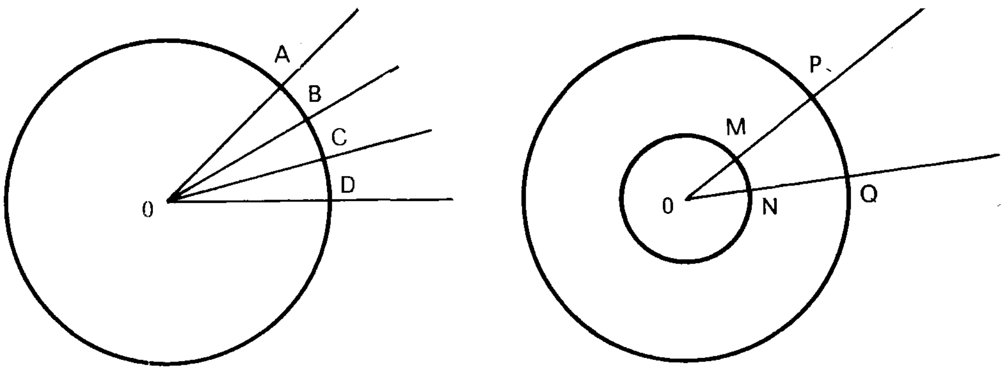
Todos los arcos equivalentes entre sí forman una clase que llamamos «amplitud de giro», «amplitud del arco» o simplemente amplitud si no hay lugar a confusión. Notación: $\alpha = [\overset{\frown}{AB}]$.

Igualdad de arcos: Dos arcos diremos que son *iguales* cuando mediante movimientos sucesivos se pueden superponer de manera que sus extremos coincidan.

Dos arcos iguales pertenecen a circunferencias iguales.

En circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y recíprocamente. Análogamente si dos arcos son iguales sus cuerdas correspondientes también lo son. La igualdad de arcos la denotaremos así: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Dos arcos iguales son equivalentes, la recíproca no es cierta como se comprueba en la figura



$AB = CD \quad A\hat{O}B = C\hat{O}D \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{CD} \quad ; \quad P\hat{O}Q = M\hat{O}N \Rightarrow MN \approx PQ$ pero $\overset{\frown}{MN} \neq \overset{\frown}{PQ}$

por pertenecer cada uno a circunferencias distintas.

Tenemos que dos arcos equivalentes pertenecientes a circunferencias iguales son iguales.

Angulo recto: Dos arcos iguales y consecutivos cuya suma sea una semicircunferencia se llama *cuadrantes* de la circunferencia. El ángulo central correspondientes es un *ángulo recto.*

Arco general: A partir de ahora consideraremos los arcos sobre una misma circunferencia.

La igualdad de arcos es una relación de equivalencia como fácilmente se comprueba y clasifica los arcos en clases. Cada clase de equivalencia, constituida por todos los arcos iguales entre sí, recibe el nombre de *arco general.* Para representar un arco general basta elegir uno cualquiera de los arcos que le constituyen y encerrarlo entre llaves, así: $\{\overset{\frown}{AB}\}$.

5. Adición de arcos generales. Propiedades

Dados dos arcos generales $\{\overset{\frown}{AB}\}$ y $\{\overset{\frown}{CD}\}$ se llama *suma* de los mismos y se representa por $\{\overset{\frown}{AB}\}+\{\overset{\frown}{CD}\}$ al arco general $\{\overset{\frown}{MN}\}$, tal que $\overset{\frown}{MP}$ y $\overset{\frown}{PN}$ sean arcos consecutivos y

$$\{\overset{\frown}{MP}\} = \{\overset{\frown}{AB}\} \quad , \quad \{\overset{\frown}{PN}\} = \{\overset{\frown}{CD}\}$$

La adición de arcos tiene las propiedades: *uniforme, asociativa, conmutativa* que se demuestran como en el caso de los ángulos generales.

Podemos considerar el arco general cuyo representante es un arco de extremos coincidentes, $\overset{\frown}{MN}$, de amplitud nula y, por tanto, este arco general desempeña el papel de neutro para la suma, ya que

$$\{\overset{\frown}{LM}\} + \{\overset{\frown}{MM}\} = \{\overset{\frown}{LM}\}$$

6. Producto de un arco general por un número natural. Propiedades

Definimos el producto

$$n \cdot \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB} + \overset{n}{\dots} + \overset{\frown}{AB}$$

este producto goza de las propiedades, ya demostradas para el caso de los ángulos generales, que nos limitamos a enunciar:

1. $(m+n)\overset{\frown}{AB} = m\,\overset{\frown}{AB} + n\,\overset{\frown}{AB}$

2. $m(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) = m\,\overset{\frown}{AB} + m\,\overset{\frown}{CD}$

3. $(m \cdot n)AB = m \cdot (n\,\overset{\frown}{AB})$

4. $1 \cdot \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$

7. Desigualdad y diferencia de arcos generales

Diremos que el arco $\{\overset{\frown}{AB}\}$ es menor o igual que el $\{\overset{\frown}{CD}\}$ y escribiremos $\{\overset{\frown}{AB}\} \leqslant \{\overset{\frown}{CD}\}$ si existe un arco general $\{\overset{\frown}{MN}\}$, tal que

$$\{\overset{\frown}{AB}\} + \{\overset{\frown}{MN}\} = \{\overset{\frown}{CD}\}$$

El arco $\{\overset{\frown}{MN}\}$ puede ser el elemento neutro para la suma, en ese caso $\{\overset{\frown}{AB}\}$ y $\{\overset{\frown}{CD}\}$ son iguales.

Al arco $\{\overset{\frown}{MN}\}$ anterior le llamamos diferencia entre $\{\overset{\frown}{CD}\}$ y $\{\overset{\frown}{AB}\}$ escribiendo

$$\{\overset{\frown}{MN}\} = \{\overset{\frown}{CD}\} - \{\overset{\frown}{AB}\}$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $\{\overset{\frown}{AB}\} \leqslant \{\overset{\frown}{AB}\}$, ya que

$$\{\overset{\frown}{AB}\} + \{\overset{\frown}{BB}\} = \{\overset{\frown}{AB}\}$$

2. Transitiva: Si

$$\{\overset{\frown}{AB}\} \leqslant \{\overset{\frown}{CD}\} \quad \text{y} \quad \{\overset{\frown}{CD}\} \leqslant \{\overset{\frown}{EF}\}$$

entonces se tiene que $\{\overset{\frown}{AB}\} \leqslant \{\overset{\frown}{EF}\}$, ya que

$$\{\overset{\frown}{AB}\} + \{\overset{\frown}{MN}\} = \{\overset{\frown}{CD}\} \quad . \quad \{\overset{\frown}{CD}\} + \{\overset{\frown}{PQ}\} = \{\overset{\frown}{EF}\}$$

luego

$$\{\overset{\frown}{AB}\} + \{\overset{\frown}{MN}\} + \{\overset{\frown}{PQ}\} = \{\overset{\frown}{EF}\}$$

es decir, si

$$\{\overset{\frown}{MN}\}+\{\overset{\frown}{PQ}\}=\{\overset{\frown}{RS}\} \text{ entonces } \{\overset{\frown}{AB}\}+\{\overset{\frown}{RS}\}=\{\overset{\frown}{EF}\}$$

y $\{\overset{\frown}{AB}\}\leqslant\{\overset{\frown}{EF}\}$.

La desigualdad entre arcos así definida se dice que es una relación de *preorden*.

La relación de preorden anteriormente definida es compatible con la suma y producto por números naturales en el sentido de que si $\{\overset{\frown}{AB}\}\leqslant\{\overset{\frown}{CD}\}$ entonces

$$\{\overset{\frown}{AB}\}+\{\overset{\frown}{MN}\}\leqslant\{\overset{\frown}{CD}\}+\{\overset{\frown}{MN}\} \quad \text{y} \quad n\{\overset{\frown}{AB}\}\leqslant n\{\overset{\frown}{CD}\} \quad , \quad n\in IN$$

8. Isomorfismo de arcos y ángulos

Establecemos la siguiente biyección entre ángulos generales y arcos generales sobre una misma circunferencia de la siguiente manera: a cada arco general le hacemos corresponder el ángulo general que tiene como representante el ángulo central correspondiente a un representante del arco y recíprocamente dado el ángulo general elegimos un representante del mismo con vértice el centro de la circunferencia considerada, el cual determina un arco representante del arco general correspondiente al ángulo general dado.

La correspondencia así definida no depende de los representantes elegidos, en efecto: si el arco general es $\{\overset{\frown}{AB}\}$ y el arco $\{\overset{\frown}{AB}\}$ le corresponde el ángulo central $A\hat{O}B$ al elegir otro representante de $\{\overset{\frown}{AB}\}$, el $\overset{\frown}{A'B'}$, por ejemplo, le corresponde el ángulo central $A'\hat{O}B'$, pero como a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales tenemos que $A\hat{O}B=A'\hat{O}B'$ luego el ángulo general es el mismo. Análogamente a un ángulo general corresponde un único arco general.

Esta biyección es compatible con la suma y producto por naturales definida para arcos y ángulos generales. En efecto: supongamos que

$$\{\overset{\frown}{AB}\}\leftrightarrow[A\hat{O}B] \quad \text{y} \quad \{\overset{\frown}{BC}\}\leftrightarrow[B\hat{O}C]$$

por otro lado el arco $\{\overset{\frown}{AC}\}$ le corresponde el ángulo $[A\hat{O}C]$, pero tanto el arco $\{\overset{\frown}{AC}\}$ como el ángulo $[A\hat{O}C]$ son, respectivamente,

$$\{\overset{\frown}{AB}\}+\{\overset{\frown}{BC}\} \quad \text{y} \quad [A\hat{O}B]+[B\hat{O}C]$$

luego a la suma de arcos corresponde la suma de ángulos y recíprocamente.

Asimismo: a $n\{\overset{\frown}{AB}\}=\{\overset{\frown}{AB}\}+\ldots+\{\overset{\frown}{AB}\}$ le corresponde $[A\hat{O}B]+\ldots+[A\hat{O}B]=n[A\hat{O}B]$.

Esta biyección compatible con la suma y producto por naturales de arcos y ángulos es un isomorfismo entre el semimódulo de los ángulos generales y el semimódulo de los arcos generales.

9. Grados sexagesimales y centesimales de arco

En virtud del isomorfismo anterior se puede establecer una medida común para arcos y ángulos.

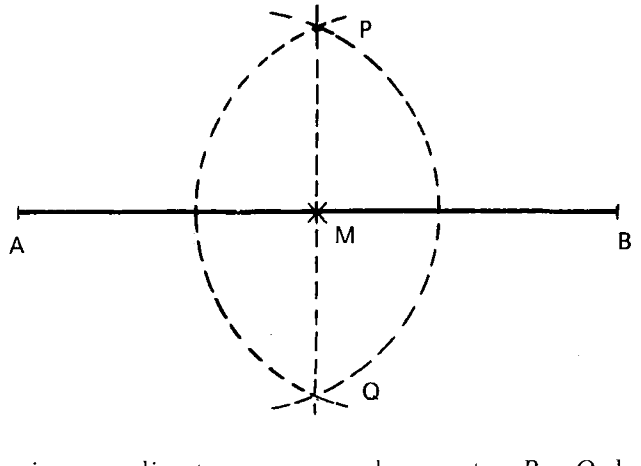
La unidad de medida se puede elegir de diversas maneras, las más usuales son el grado sexagesimal o noventa-ava parte del ángulo recto. El grado se divide en sesenta minutos de arco y éste a su vez en sesenta segundos, ejemplo: $5^{\circ}\ 31'\ 12''$, se lee «cinco grados, treinta y un minutos, doce segundo».

Si un ángulo recto se divide en cien partes cada una de ellas es un ángulo que tiene de amplitud un grado centesimal, éste se subdivide en cien minutos centésimas y el minuto a su vez en cien segundos centésimas; ejemplo: $13^{g}\ 70^{m}\ 52^{s}$ que se lee «trece grados centésimas, setenta minutos y cincuenta y dos segundos centésimas».

Las operaciones definidas entre arcos y ángulos se puede efectuar ahora entre sus medidas.

10. Trazado de la mediatriz de un segmento y determinación de la circunferencia

Mediatriz de un segmento es una recta tal que todos y cada uno de sus puntos al unirlos con los extremos del segmento determina, a su vez, segmentos iguales. Por tanto, dado el segmento AB si con centro en A y radio r convenientemente elegido (mayor que la mitad del segmento AB) trazo una circunferencia y en el punto B como centro trazamos otra

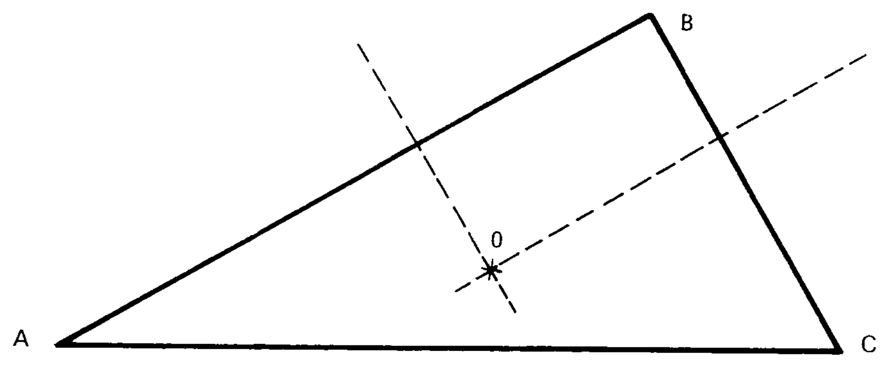


circunferencia del mismo radio, tenemos que los puntos P y Q de intersección de ambas circunferencias verifican

$$\overline{PA}=r=\overline{PB} \quad \text{y} \quad \overline{QA}=r=\overline{QB}$$

luego P y Q son puntos de la mediatriz de AB y ésta queda determinada uniendo dichos puntos. La mediatriz de un segmento es, por tanto, el l. g. de los centros de las circunferencias que pasan por los extremos.

Una circunferencia queda determinada si conocemos tres puntos de la misma, en efecto: sean los puntos A, B, C, que suponemos no alineados.



Trazamos las mediatrices de los segmentos AB y BC, que se cortan, por cortarse los segmentos, en el punto O. Este punto O verifica que $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, por tanto, pertenece también a la mediatriz de AC y es centro de una circunferencia de radio $r=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ que pasa por los puntos A, B, C.

La circunferencia es única, pues el centro O por pertenecer a las tres mediatrices coincide con la única intersección común a las tres.

Si hubiéramos supuesto que los puntos A, B y C estuvieran alineados, las mediatrices serían paralelas no tendrían, por tanto, intersección común y no existiría ninguna circunferencia que pasase por los puntos dados.

11. Determinación experimental de la longitud de la circunferencia. El número π. El radián

Para la determinación de la longitud de la circunferencia, procederemos a materializarla constituyendo una circunferencia con alambre, por ejemplo, y estirándolo después comparar su longitud con la del diámetro de la misma.

Cuando se estudian los números reales se precisa mejor esta idea, pero mientras tanto tratemos de precisar más la medida de la circunferencia, para lo cual consideremos polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia; la longitud de la misma parece que será mayor que el perímetro de los polígonos inscritos y menor que el de los circunscritos. Esta diferencia va disminuyendo al ser mayor el número de lados de los polígonos. Es posible así aproximar la longitud de la circunferencia en función de su diámetro. Se obtiene la siguiente expresión aproximada:

$$L \simeq 3{,}14 \cdot d$$

L=Longitud de la circunferencia, d=diámetro de la misma;
El valor exacto de la razón entre L y d es un número no racional que se le designa con la letra griega π y su valor aproximado es 3,141592.

El radián: Si tomamos un arco cuya longitud sea precisamente igual a la del radio de la circunferencia tenemos una nueva medida de arcos que recibe el nombre de *radián*. Una circunferencia mide por tanto 2π radianes, y el ángulo recto $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Se pasa de una unidad de medida a otra, por una proporcionalidad, lo que nos dice que un radián es un arco que mide aproximadamente 57° 19′ 10″.

12. Area del círculo

Si inscribimos un polígono regular de n lados en una circunferencia el área de este polígono se aproxima al área del círculo y tanto más parece que se aproxima cuanto mayor sea el número de n de lados.

El área del polígono es igual a n veces el producto del lado l por la apotema partido por dos, es decir,

$$\frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

donde P es el perímetro del polígono.

Cuando el número de lados se hace mayor, el perímetro más se acerca a la longitud de la circunferencia y la apotema se aproxima al radio de la misma, y el área del círculo vendrá dada por la expresión

$$\frac{L \cdot r}{2}, \text{ o sea, } \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2.$$

CAPITULO VIII

TEMA 1. APLICACIONES DEL PLANO EN SI MISMO. COMPOSICION DE APLICACIONES

1. Transformación geométrica

Una transformación geométrica T es una correspondencia en que a todo punto de una figura A le hace corresponder puntos de otra figura A'. La figura A' se dice transformada de la A por medio de T y se escribe $A' = T(A)$.

Si consideramos el plano como un conjunto de puntos, toda aplicación del plano en sí mismo es una transformación geométrica. La composición o producto de transformaciones se obtiene por aplicación sucesiva de las mismas, el resultado es otra transformación geométrica llamada producto de las transformaciones dadas: Sea $A' = T(A)$, $A'' = T'(A')$, entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'\cdot T"'] & & A' \arrow[dl, "T'"] \\ & A'' & \end{tikzcd}$$

con lo que expresamos que A se transforma en A'' mediante la transformación $T'oT$ producto de T y T'.

Ciertas transformaciones dejan invariantes algunas propiedades de las figuras geométricas: así, por ejemplo, las transformaciones que conservan las distancias se llaman transformaciones *isométricas*, si conservan los ángulos se llaman *conformes*, si conservan el paralelismo *afinidades*, etc.

En este tema estudiamos las transformaciones que conservan las distancias y los ángulos, estas transformaciones reciben el nombre de movimientos.

2. Movimiento

Partiendo de la observación de la naturaleza, podemos atribuir a toda figura rígida diferentes posiciones, ligada cada una de ellas a instantes diferentes; cada par de estas posiciones nos marcan un movimiento seguido por la figura. Pero nos interesa razonar sobre este hecho, prescindiendo de todo lo necesario para abstraer exclusivamente lo general en todo movimiento. Así, llegamos a propiedades tan generales y simples que hemos de aceptar, si es que han de estar de acuerdo nuestra razón y nuestra intuición. Por tanto, prescindimos de la noción de tiempo que va aneja a esas posiciones diferentes que adopta una figura, e incluso prescindiremos de todas las posiciones intermedias para fijarnos únicamente en las posiciones inicial F y final F', de manera que los elementos (puntos) constitutivos de F son los mismos que los de F' dispuestos en forma totalmente análoga. Para precisar este hecho acudimos a un concepto primario matemático y diremos que se han conservado las relaciones de ordenación e incidencia de los elementos.

Tenemos, pues, un conjunto de pares ordenados (F, F'), (F posición inicial; F' posición final) de forma que a todo punto A de F le podemos asociar o hacer corresponder un único punto A' de F' que llamaremos homólogo o transformado del primero. Esta relación o transformación en cada par (F, F'), decimos que es un movimiento:

$$F \xrightarrow{\mu} F' \qquad A \in F' \xrightarrow{\mu} A' \in F'$$

3. Producto de movimientos

Si tenemos las figuras (F, F') relacionadas por el movimiento μ_1, y las (F', F'') por el movimiento μ_2, entenderemos como producto de estos dos movimientos, y lo indicaremos así: $\mu = \mu_2 \mu_1$ al movimiento que nos relaciona directamente las figuras (F, F''). Es decir, prescindimos también de la posición intermedia F' para considerar como homólogos de los puntos de F aquellos puntos de F'' que, por μ_2 son homólogos de los correspondientes a los primitivos por μ_1 en F':

$$F \xrightarrow{\mu_1} F' \xrightarrow{\mu_2} F'' \ ; \quad F \xrightarrow{\mu} F'' \ : \ \mu = \mu_2 \cdot \mu_1$$

$$A \in F \xrightarrow{\mu_1} A' \in F' \xrightarrow{\mu_2} A'' \in F'' \ ; \quad A \xrightarrow{\mu} A''$$

4. Movimiento inverso

Si dos figuras (F, F') están relacionadas por un movimiento μ, podemos pensar en otro movimiento que nos relacione las figuras (F', F), es decir, que nos haga pasar de F' a F. Dicho movimiento lo llamaremos inverso o recíproco del primero y lo representamos por μ^{-1}

$$F \xrightarrow{\mu} F' \ ; \quad F' \xrightarrow{\mu^{-1}} F$$

5. Vector

Una recta del plano se puede suponer recorrida en dos sentidos llamados inverso uno de otro. Si en la recta se fija un sentido como *positivo* —el sentido inverso se designará *negativo*— se ha orientado la recta. Así, pues, para orientar una recta basta dar dos de sus puntos en un cierto orden: (A, B). Un vector es un segmento más un sentido. Por consiguiente, para determinar un vector basta dar los extremos del segmento en un cierto orden; al primer extremo del segmento se le llama origen del vector, y al segundo extremo del vector. Para distinguir el origen del extremo, se acostumbra a escribir en primer lugar el origen y en segundo el extremo, con una flecha sobre ambos: $\overrightarrow{AB}$.

Módulo de un vector es la longitud del segmento correspondiente al vector; se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dirección de un vector es la de la recta determinada por el segmento correspondiente al vector. Dos vectores tienen la misma dirección cuando las rectas que los contienen coinciden o son paralelas. Sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ es el sentido determinado por el par (A, B). Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ que tienen la misma dirección se dice que tienen el mismo sentido cuando:

a) Si los vectores son colineales (es decir, están en la misma recta), el sentido determinado por el par (A, B), es el mismo que determina el par (C, D).

b) Si no son colineales están los dos en el mismo semiplano respecto de la recta determinada por sus orígenes.

Las propiedades de tener la misma dirección, y el mismo sentido verifican las tres leyes lógicas de la igualdad: idéntica, recíproca y transitiva. Como estas propiedades también son válidas para la igualdad de módulos, serán válidas para la siguiente relación, llamada de equipolencia, entre los vectores. Dos vectores se llaman *equipolentes* cuando tienen el mismo môdulo, la misma dirección y el mismo sentido.

6. Vector libre

Por gozar la relación de equipolencia de las tres propiedades lógicas de la igualdad se puede determinar clases de vectores del plano. Se llama vector libre del plano a la clase formada por todos los vectores del mismo equipolentes entre sí. Para representar los vectores libres emplearemos las notaciones $\{\overrightarrow{AB}\}$ o $\{\overrightarrow{a}\}$. Un vector libre está constituido, pues, por infinitos vectores equipolentes entre sí, pero existe un único vector que perteneciendo a una clase del vector libre tenga el origen o el extremo en un punto determinado del plano.

Consideremos el conjunto de vectores colineales a uno dado. Entre ellos se llamará razón de dos vectores (nunca cociente) al número λ que expresa la razón de sus módulos, siendo éste positivo o negativo según que dichos vectores tengan el mismo sentido o sentido opuesto, respectivamente se define el producto de un vector $\{\overrightarrow{v}\}$ por un número λ, como un vector que tiene: su módulo igual al producto del módulo de $\{\overrightarrow{v}\}$ por el valor absoluto del número λ, la misma dirección de $\{\overrightarrow{v}\}$ y el mismo sentido o el sentido opuesto según que λ sea positivo o negativo, respectivamente.

7. Vector unidad

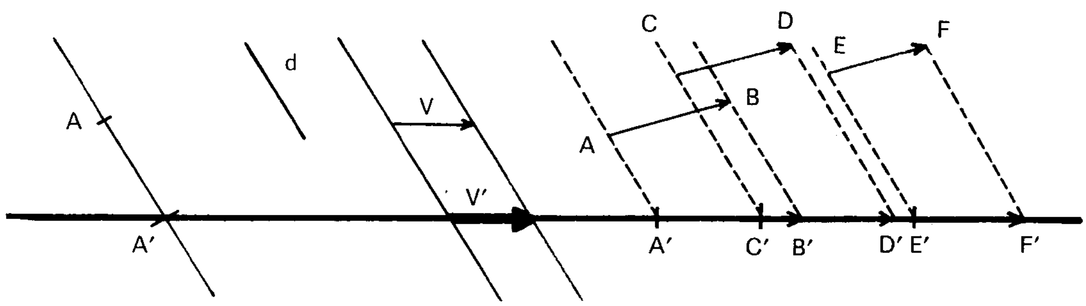
Para el estudio de vectores es preciso referir los elementos que los definen a un segmento fijo y a una dirección y sentido también fijos; estos elementos de referencia se pueden representar por un vector que distinguiremos como vector unidad y denotaremos por 1.

Cada vector, perteneciente al conjunto de vectores colineales al vector 1, viene representado por un número que expresa la medida de su módulo con respecto al del vector unidad, y que es positivo o negativo según que coincida o no su sentido con el vector unitario. A este número le llamaremos medida algebraica del vector.

Recíprocamente, dado un número λ queda determinado el vector libre $\{\vec{v}\}$ cuyo módulo es $|\lambda|$ y cuyo sentido es el del vector unitario o el opuesto según que λ sea positivo o negativo.

8. Proyección

Dada una dirección, se llama proyección paralela a esa dirección *d*, de un punto *A* sobre un eje, al punto de intersección con el mismo de la paralela a la dirección trazada por *A*. Si tenemos un vector su proyección paralela a una dirección sobre un eje, será otro vector. Y si *AB, CD, EF,* etc., son vectores equipolentes, sus proyecciones serán también vectores equipolentes.



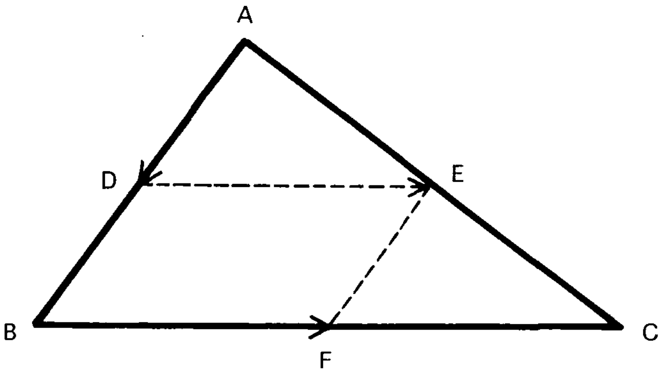
Sean los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ colineales y tales que la razón de sus medidas algebraicas respecto del vector 1 es λ; conservándose la equipolencia de vectores en la proyección, resultará que la razón entre las medidas algebraicas de los vectores proyección $\vec{O'A'}$ y $\vec{O'B'}$ respecto del vector unidad 1', proyección del anterior vector unidad, también es λ. Queda demostrado, pues, el teorema de Thales: «La razón entre dos vectores colineales es la misma que la de los vectores obtenidos al proyectarlos paralelamente a una dirección sobre una recta o eje cualquiera».

Puesto que la definición de equipolencia entre dos vectores envuelve igualdad de longitudes y coincidencia de dirección, así como el producto de un escalar por un vector, nos proporciona un vector lineal de manera que la razón entre sus medidas algebraicas es el escalar, muchas definiciones y teoremas de geometría plana se pueden expresar vectorialmente:

Proyectamos el vector *AD* sobre el lado *AC* del triángulo, paralelamente al otro lado *BC*

Ejemplo:

$$\lambda = \frac{\vec{AB}}{\vec{AD}} = \frac{\vec{AC}}{\vec{AE}}$$



Proyectando ahora el vector AE sobre el lado BC paralelamente al lado AB:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AE}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BF}}$$

y como BF es equipolente a DE, tendremos que es constante la razón entre los vectores colineales determinados por cada dos vértices de los triángulos ABC y ADE, siendo además DE paralelo a BC (1).

Si D y E son los puntos medios de AB y AC se tiene:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

Por la definición de vector, de igualdad de vectores, y de multiplicación de un vector por un escalar, se verifica que

$$\overrightarrow{DE} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

y que DE es paralela a BC.

9. Traslación

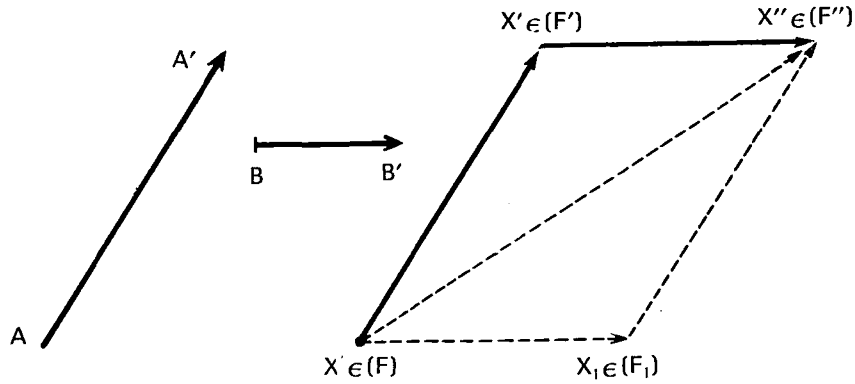
Supongamos un vector determinado por dos puntos fijos A y A'. La traslación es una transformación por la que a todo punto X corresponde otro punto X' de forma que ambos determinan un vector de igual módulo, dirección y sentido que el $\overrightarrow{AA'}$. La figura F' obtenida al trasladar todos los puntos de una figura F la llamaremos homóloga de ésta en la traslación de vector característico $\overrightarrow{AA'}$, y rectas homólogas serán las determinadas por pares de puntos homólogos, las cuales serán paralelas entre sí formando, pues, ángulos iguales con las rectas determinadas por puntos homólogos.

Si a la figura F aplicamos la traslación de vector característico $\overrightarrow{AA'}$ y a la figura obtenida F' aplicamos una nueva traslación definida por el vector $\overrightarrow{BB'}$, la transformación producto de estas dos traslaciones será una nueva traslación, cuyo vector característico es la suma de los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$, siendo ademásel resultado, independiente del orden de aplicación de ambas traslaciones; es decir, en este caso el producto es conmutativo.

La transformación recíproca de una traslación del vector característico $\overrightarrow{AA'}$, es una traslación definida por el vector $\overrightarrow{A'A}$ que llamaremos opuesto del primero.

De todo esto se deduce que el conjunto T de las traslaciones forman a su vez un grupo conmutativo contenido en el grupo más amplio de los movimientos C, por lo que diremos que es un subgrupo de éste:

$$T \subset C$$



10. Giro

Sea O un punto del plano, y φ un ángulo orientado. El giro de centro O y ángulo φ es una transformación que hace corresponder a cada punto X del plano el punto X', tal que

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'} \quad \text{y} \quad \widehat{XOX'} = \varphi$$

De la definición se deduce que los giros con centro en un mismo punto O del plano, forman un conjunto con la estructura de grupo conmutativo. El conjunto de los giros concéntricos es, pues, un subgrupo del grupo de los movimientos. No ocurre lo mismo con los giros de distintos centros, pues basta efectuar el producto de dos giros de 180 grados respecto de dos centros distintos, para obtener una traslación.

Fácilmente se puede determinar el centro de un giro conociendo ciertos elementos correspondientes:

a) Supongamos dados el par de puntos homólogos A, A' y B, B'. Basta trazar las mediatrices de los segmentos AA' y BB' y hallar su intersección.

b) Si los elementos correspondientes conocidos son dos semirrectas r, r' y en ella dos puntos homólogos A, A', se hallará la intersección de la bisetriz del ángulo formado por las semirrectas con la mediatriz del segmento AA'.

TEMA 2. SIMETRIAS. PRODUCTO DE SIMETRIAS

1. Simetrías

Distinguiremos dos clases de simetrías:

a) *Simetría Central*: Es una transformación por la que a todo punto X le corresponde otro punto X' alineado con X y un punto fijo O de manera que $\overline{OX} = \overline{OX'}$. Como se ve fácilmente este movimiento es equivalente a un giro de centro O y amplitud 180 grados.

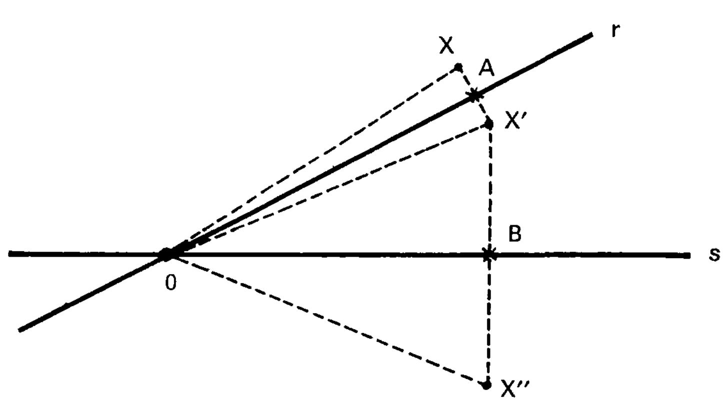
Si aplicamos nuevamente al punto X' una simetría de centro, el mismo punto O, su homólogo es el punto X. Es decir, la simetría central es una transformación tal, que su cuadro es la identidad; las transformaciones que gozan de esta propiedad se las llama *involutivas*, o también se dice que en ellas los elementos homólogos se corresponden doblemente.

b) *Simetría Axial*: Dada una recta r se llama simetría respecto de r a la transformación que hace corresponder a cada punto X del plano el punto X', tal que r es la mediatriz del segmento XX'. Las simetrías transforman, pues, segmentos iguales en segmentos iguales.

2. Producto de simetrías

Estudiemos el producto de dos simetrías σ_r, σ_s respecto a dos rectas r y s. Tanto si estas rectas se cortan en un punto Q, como si son paralelas, se verificarán las siguientes igualdades entre segmentos:

$$\overline{XA} = \overline{AX'} \quad ; \quad \overline{X'B} = \overline{BX''}$$



Supongamos el primer caso: Las igualdades anteriores entre segmentos implican las igualdades siguientes de triángulos rectángulos:

$$\widehat{OAX} = \widehat{OAX'} \quad ; \quad \widehat{OBX'} = \widehat{OBX''}$$

de donde resultan las igualdades de las respectivas hipotenusas

$$\overline{OX} = \overline{OX'} \quad , \quad \overline{OX'} = \overline{OX''}$$

y las de los ángulos

$$\widehat{XOA} = \widehat{AOX'} \quad , \quad \widehat{X'OB} = \widehat{BOX''}$$

De estas últimas se deduce:

$$\widehat{XOX''} = 2\widehat{AOB} = 2\,\hat{rs}$$

Como consecuencia de esto resulta:

$$\overline{OX} = \overline{OX''} \quad , \quad \widehat{XOX''} = 2\,\hat{rs}$$

lo cual prueba que se pasa de X a X'', mediante un giro de centro O y amplitud $2\,\hat{rs}$.

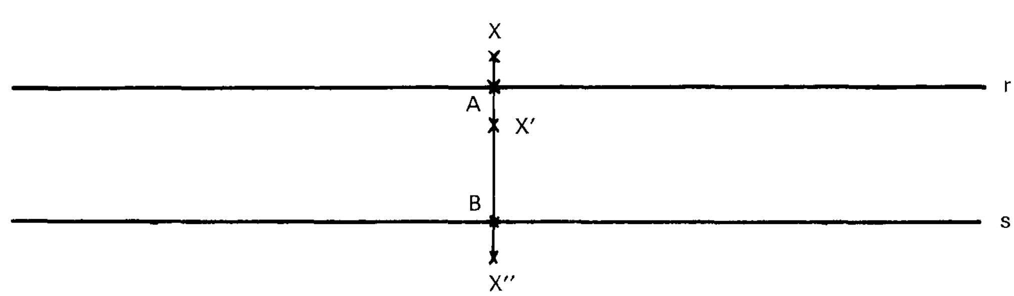
Sea ahora el segundo caso en que las rectas r y s son paralelas: Las igualdades primeras de los segmentos implican las siguientes relaciones:

$$\overline{XX''} = \overline{XA} + \overline{AX'} + \overline{A'B} + \overline{BX''} = 2\,\overline{d}$$

siendo d la distancia entre los dos ejes de simetría, orientada en el sentido del primero al segundo. Es decir, el producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación de vector característico $2\,\overline{d}$.

Resumiendo estos dos casos podemos decir: «El producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan, es un giro cuyo centro es el punto de intersección de los ejes y cuya amplitud es el doble del ángulo que forman dichos ejes, con el sentido que va del primer eje al segundo. El producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación de vector perpendicular a los ejes, módulo igual al doble de la distancia entre ellos, y sentido que va del primer eje al segundo. En particular el producto de dos simetrías respecto del mismo eje, es la identidad.

Resulta, pues, que todo giro se puede descomponer en producto de dos simetrías, cuyos ejes se cortan en el centro de giro y de los cuales se puede fijar arbitrariamente uno de ellos, siempre que sea incidente en el centro.



En efecto: sea el giro de centro O y amplitud φ, siendo φ un ángulo orientado, y sea r una recta arbitraria incidente con O. Tomemos otra recta s incidente también en O, tal que $\widehat{rs} = \frac{1}{2}\varphi$. Por lo demostrado anteriormente se verifica que $\sigma_s \sigma_r = O_\varphi$ como queríamos demostrar.

3. Identidad

Ahora bien, si efectuamos el movimiento μ y a continuación su inverso μ^{-1}, es decir, el movimiento producto de los dos, pasamos de la figura F a ella misma, con lo que tendremos una *identidad*. Para la mayor generalidad del producto de dos movimientos, consideraremos la identidad como un movimiento y la representaremos por i.

4. El grupo isométrico

Si entre los elementos de un conjunto se define una operación tal, que al aplicarla a dos de sus elementos nos proporciona un nuevo elemento del mismo conjunto, se dice que el conjunto es cerrado respecto a la operación definida.

Observamos que el conjunto C de los movimientos es cerrado respecto al producto, tal como lo hemos definido pues considerados dos movimiento cualesquiera, su producto es un movimiento y, por tanto, perteneciente a C; además también pertenece a C el movimiento inverso de cualquier movimiento:

$$\left.\begin{matrix} \mu_1 \in C \\ \mu_2 \in C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu = \mu_2 \mu_1 \in C$$

$$\mu \in C \quad ; \quad \mu^{-1} \in C \quad \text{siendo} \quad \mu \mu^{-1} = i$$

El conjunto de las simetrías y los movimientos forman un grupo de transformaciones que conservan las distancias. Decimos que es el grupo de las *isometrías* del plano.

TEMA 3. EL GRUPO EQUIFORME, LOS MOVIMIENTOS Y LA IGUALDAD DE FIGURAS

1. Homotecia

Supongamos en el plano un punto O fijo, y dado un número real $k \neq O$. Se llama homotecia de centro O y razón k, la transformación geométrica que asocia a cada punto A del plano otro punto A' alineado con O y con A', tal que

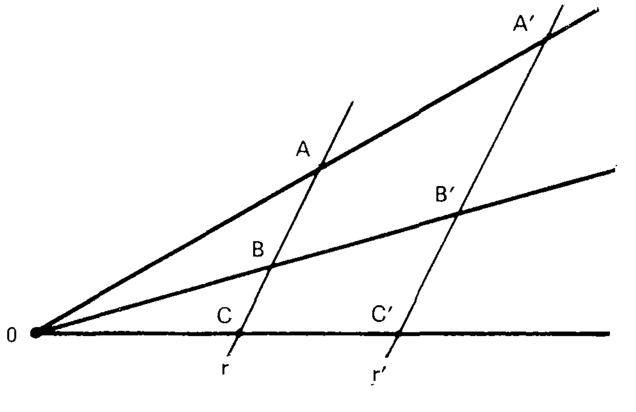
$$\frac{OA'}{OA} = k$$

Las rectas que pasan por el centro son invariantes o dobles en esta transformación. Sea una recta r que no pasa por el centro de homotecia; si son A', B', C ... los homólogos de $A, B, C, \ldots$ se verificará:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots$$

$B'A'$ es paralela a BA y lo mismo $B'C'$ con BC. Si admitimos que por B' no pasa más que una paralela a AB, los puntos A', B', C' ... están alineados y en el mismo orden que sus originales. Por último también se tiene

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{OA}{OA'} = k$$



Por tanto, las rectas homólogas que no pasan por el centro son paralelas, y los segmentos homólogos proporcionales. Con lo cual los ángulos homólogos serán iguales por ser sus lados paralelos.

Consideremos dos figuras F y F' homotéticas. Transformemos una de ellas, por ejemplo, F', por un movimiento μ obteniendo F''. La transformación que asocia a cada punto de F el homólogo en F'' de su correspondiente en F', por el movimiento μ, esto es la transformación producto de la honotecia y el movimiento se llama *semejanza*. Como tanto en la homotecia, como en el movimiento, se conserva la alineación y ordenación de puntos homólogos, proporcionalidad de segmentos homólogos e igualdad de ángulos homólogos, las figuras semejantes verificarán estas propiedades. Y recíprocamente, de dos figuras que cumplan las condiciones anteriores se puede obtener una de ellas aplicando a la otra una homotecia y un movimiento:

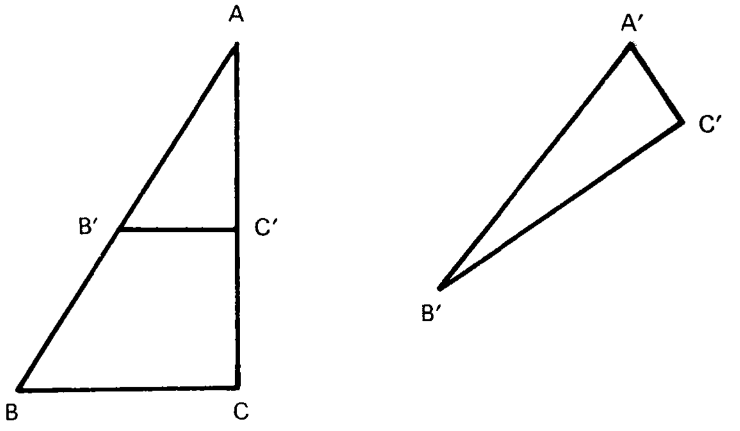
Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ que rifican

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\hat{A}=\hat{A}' \qquad \hat{B}=\hat{B}' \qquad \hat{C}=\hat{C}'$$

Llevamos, por ejemplo, sobre la semirecta, AB el segmento $A'B'=AB''$ y por B'' trazamos la paralela a BC. El triángulo $AB''C''$ y por tener sus ángulos iguales a los de éste, también serán iguales a los de $A'B'C'$. Como además $AB''=A'B'$ los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ serán iguales o lo que es lo mismo, serán homólogos en un movimiento.

Fácilmente se pueden demostrar ahora los criterios de semejanza de triángulos.



2. Grupo de homotecias

Efectuemos el producto de dos homotecias del mismo centro y razones k_1 y k_2 respectivamente. Si A' es el homólogo de un punto A por la primera homotecia y A'' el homólogo de A' por la segunda, se verificará:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OA}{OA'}=k_1\\[2ex]\dfrac{OA'}{OA''}=k_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{OA''}=k=k_2\cdot k_1$$

que nos prueba que A y A'' son homólogos en una homotecia del mismo centro, y cuya razón es el producto de las razones de las homotecias dadas. Por tanto, el conjunto de las homotecias, cuyo centro es un punto dado, forma un grupo conmutativo. A este grupo pertenecerá la identidad y la simetría central para los valores.

$$k=1 \quad \text{y} \quad k=-1$$

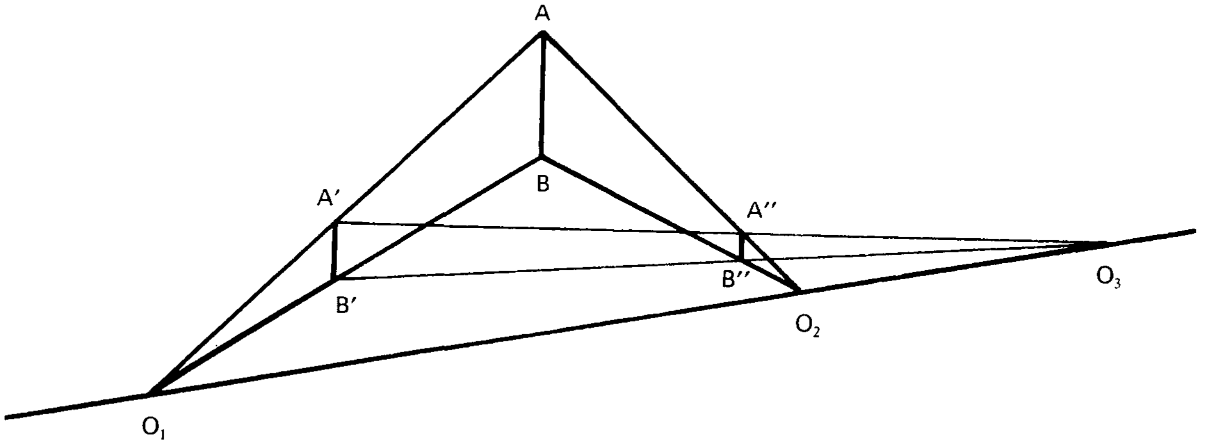
respectivamente.

Supongamos ahora dos homotecias de centros O_1 y O_2 y razones k_1 y k_2 respectivamente. Será:

$$\left.\begin{aligned} \frac{O_1A}{O_1A'}=\frac{O_1B}{O_1B}=\frac{AB}{A'B'}=k_1 \\ \frac{O_2A'}{O_2A''}=\frac{O_2B}{O_2B''}=\frac{A'B'}{A''B''}=k_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{A''B''}=k_2\cdot k_1\neq 1$$

luego es una homotecia.

Como la recta O_1O_2 es doble en las dos homotecias, también lo será en su producto y, por tanto, estará en ella el centro O_3 de la nueva homotecia.



Al omitir el caso en que $k_1\cdot k_2=1$, prescindimos de las traslaciones. Si incluimos las traslaciones, vemos que el conjunto de todas las homotecias forman un grupo.

3. El grupo de las semejanzas

Definimos la semejanza como la transformación producto de una homotecia por un movimiento.

Como el producto de homotecias es otra homotecia y el producto de dos movimientos es otro movimiento, resulta que el producto de dos semejanzas es otra semejanza. En particular resulta que las homotecias y los movimientos son semejanzas. La identidad obviamente también es una semejanza.

El grupo de las semejanzas del plano recibe el nombre de grupo *equiforme.*

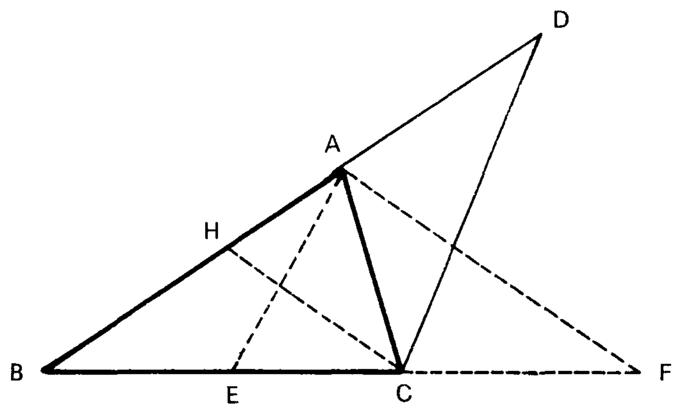
Aplicaciones

A) Dado un triángulo se definen como triángulos semejantes a él todos los que se pueden obtener trazando una paralela a cualquiera de sus lados, al intersecar los otros dos. En dos triángulos semejantes se verifican las conclusiones deducidas en el ejemplo 8 (Tema 1), además de la igualdad de sus ángulos.

De la definición se deducen inmediatamente condiciones (criterios) para la semejanza de triángulos.

B) Como todo polígono se puede descomponer en triángulos, dos polígonos serán semejantes si es posible descomponerlos en triángulos que lo sean.

C) Supongamos el triángulo ABC y sean AE y AF las bisectrices interior y exterior, respectivamente, relativas



al ángulo A. Sea $\overline{AD}$ la proyección paralela a la bisectriz interior del vector $\overline{EC}$ y $\overline{AH}$ la proyección paralela a la bisectriz exterior del vector FC, ambas sobre el lado AB. Se verifica:

$$\frac{\vec{EB}}{\vec{EC}} = \frac{\vec{AB}}{\vec{AD}} \qquad [1]$$

$$\frac{\vec{FB}}{\vec{FC}} = \frac{\vec{AB}}{\vec{AH}} \qquad [2]$$

Pero por la construcción, los vectores $\vec{AD}$ y $\vec{AH}$, de sentidos opuestos, tienen el módulo igual al lado AC del triángulo, luego se verificará:

$$\frac{\vec{EB}}{\vec{EC}} = -\frac{\vec{FB}}{\vec{FC}} \qquad [3]$$

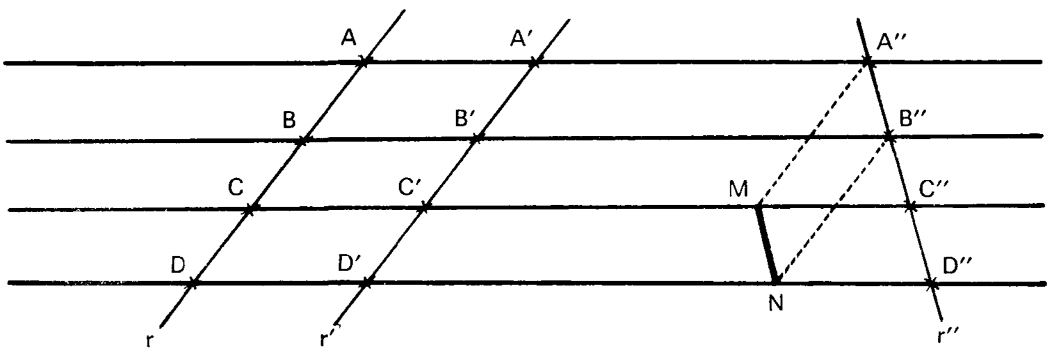
Cuatro puntos colineales, tales como los $B, C,$ y E y F, que determinan vectores que verifican la relación [3], se dice que forman una cuaterna armónica.

Las relaciones [1] y [2] referidas a los módulos de los vectores que intervienen cuando se sustituyen los AD y AH por AG, nos proporciona los teoremas relativos a las bisectrices de un triángulo.

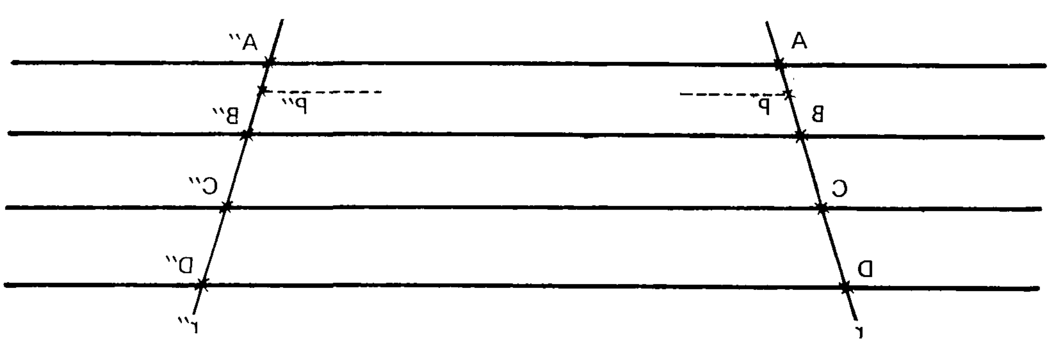
4. Teorema de Thales

Partiendo exclusivamente de la teoría de la proporcionalidad, se puede demostrar el teorema de Thales, cuyo enunciado será ahora: «Si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas, son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra». Para ello habrá que probar que existe esta correspondencia en la igualdad, en la ordenación y en la suma.

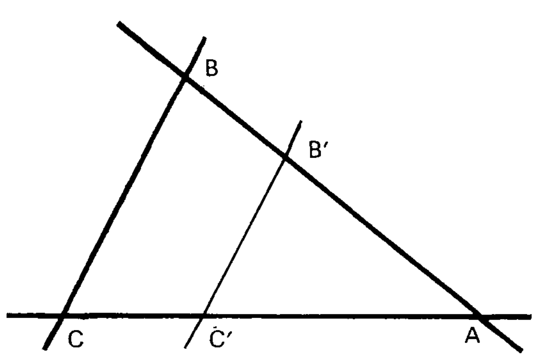
a) Si r y r' son paralelas, será: $AB=A'B'$, $CD=C'D'$ y al ser $AB=CD$ también será $A'B'=C'D'$. Si r y r'' no son paralelas, efectuamos una traslación de vector característico AC, del trapecio $ABA''B''$, con lo que coincidirá AB con CD y el segmento $A''B''$ se transformará en el MN, con lo que se tendrá $A''B''=MN$, $MN=C''D''$, por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas y, por tanto, $A''B''=C''D''$.



b) Si P es interior a AB, la paralela por P está en la posición de plano limitada por las paralelas AA'' y BB'', por lo que P'' será interior a $A''B''$, es decir, si $AP<AB \Rightarrow A''P''<$ $<A''B''$. Si $AB=AP+PB \Rightarrow A''B''=A''P''+P''B''$, con lo que hemos demostrado lo que nos proponíamos.



De aquí que toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos o sus prolongaciones segmentos proporcionales a ellos y recíprocamente. Y al lado BC y el segmento $B'C'$ determinado por la paralela son también proporcionales a AB y AB'.



5. Congruencia

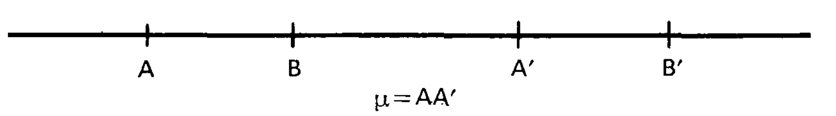
Las figuras (F, F') correspondientes en un movimiento las llamaremos congruentes. Pero si es μ el movimiento que transforma F en F', su movimiento recíproco μ^{-1} transformará F' en F, o lo que es lo mismo: si F es congruente con F' también F' es congruente con F (propiedad recíproca). Por ser el producto de dos movimientos un movimiento, si F es congruente con F', y F' a su vez es congruente con F''; también es F congruente con F'', ya que por el movimiento producto de los dos anteriores podemos transformar F en F'' (propiedad transitiva). Como además cada figura es congruente consigo misma, ya que la identidad es un movimiento (propiedad idéntica), resulta que esta relación de congruencia definida entre pares de figuras (F, F'), goza de las tres propiedades que caracterizan una igualdad lógica: propiedades idénticas, recíproca y transitiva. Por tanto, dos figuras congruentes diremos que son iguales.

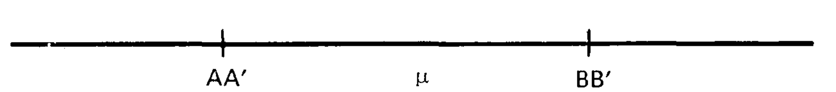
6. Aplicación de la teoría de los movimientos en el plano

Aun cuando ya se habló de este tema, insistiremos como aplicación de la citada teoría y de la congruencia de figuras.

Dos segmentos son iguales según dijimos anteriormente cuando superpuestos por un movimiento coinciden. Pueden ocurrir dos cosas:

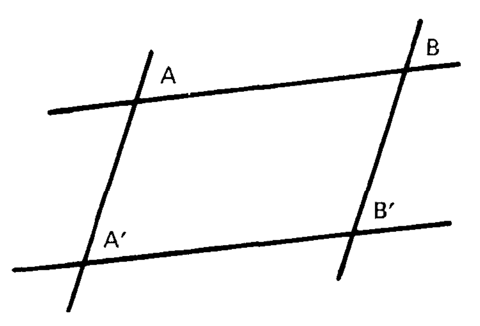
1.º) Si están en una misma recta, como AB y $A'B'$, basta una traslación del segmento AB, por ejemplo, sobre la misma recta, con módulo AA', para que esos dos segmentos coincidan.





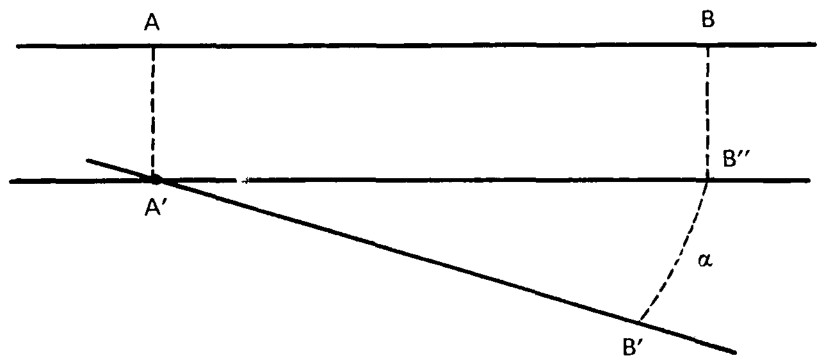
Si aun siendo iguales son de distinto sentido $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftarrow{A'B'}$, entonces coincidirán el origen y extremos del uno, con el extremo y origen del otro. Es decir, son iguales, pero opuestos.

2.º) Dos segmentos AB y $A'B'$ situados sobre rectas paralelas son iguales, cuando por una traslación de vector característicos AA' y módulo $|AA'|$, pueden coincidir



Consecuencia: Parte de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.

3.º) Si los segmentos están en rectas distintas no paralelas, serán iguales cuando mediante una traslación y un giro pueda coincidir



$AB = A'B'$ por traslación μ de eje AA' y módulo AA'

$$AB \xrightarrow[\mu]{} A'B''$$

Efectuando un giro de vértice A' y amplitud α

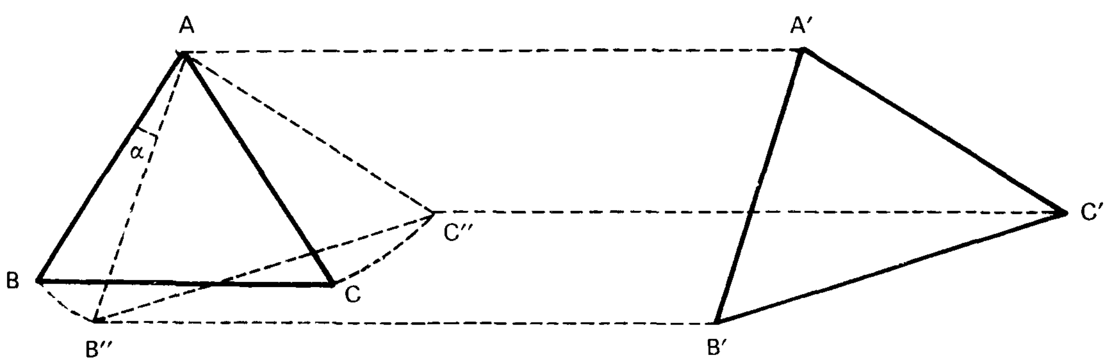
$$A'B'' \xrightarrow[\alpha]{} A'B'$$

Luego los segmentos AB y $A'B''$ son iguales.

7. Igualdad de triángulos

1.º) Dos lados iguales y el ángulo comprendido

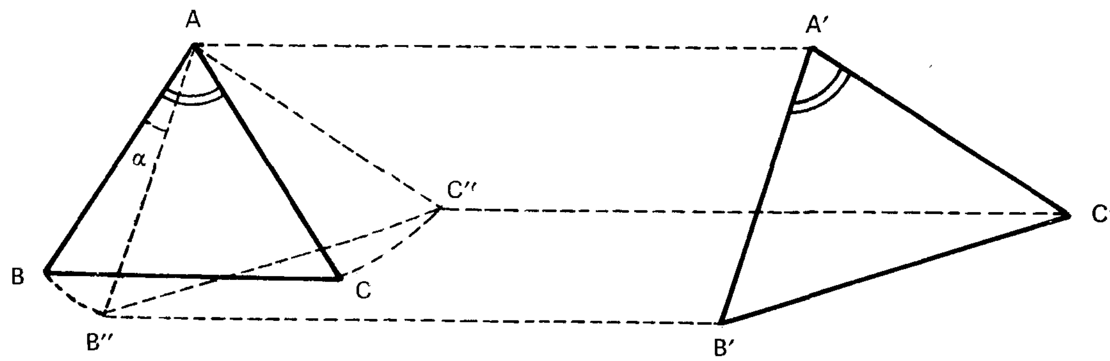
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$
$$\overline{AC} = \overline{A'C'}$$
$$\hat{A} = \hat{A}'$$



mediante una traslación de rectas AA' y módulo AA'; la única posición del segundo triángulo será la de $A'B''C''$, y realizando después un giro de ángulo α, los dos triángulos son congruentes, y, por consiguiente, iguales.

2.º) Un lado igual y los dos ángulos contiguos.

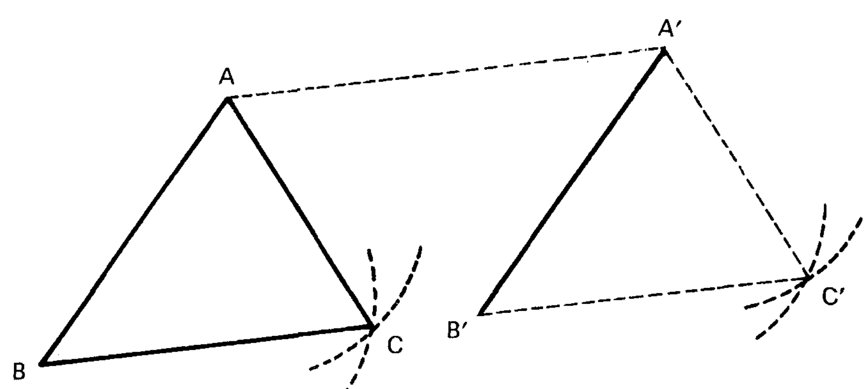
$$\hat{B} = \hat{B'}$$
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$
$$\hat{A} = \hat{A'}$$



Por una traslación de rectas AA' y módulo $\overline{AA'}$ y un giro de ángulo α, los dos triángulos pueden ser congruentes por coincidir $\overline{AB}$ con $\overline{A'B'}$, y los ángulos $\hat{B'}$ con $\hat{B}$ y $\hat{A'}$ con $\hat{A}$, y, por consiguiente, los semirrayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ y $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{B'C'}$, y por tanto su intersección, es decir, C' con C.

3.º) Los tres lados

$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c'$$



Por una traslación y un giro hacemos coincidir $\overline{A'B'}$ con $\overline{AB}$, pero entonces la circunferencia de centro A' y A coincidirán por coincidir éstos y tener igual radio $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Por la misma razón las cirfunferencias de centros B y B' coinciden también, por ser el radio $B'C' = BC$, y en consecuencia coinciden sus intersecciones que son los vértices C y C', luego quedarán congruentes los dos triángulos y, por consecuencia son iguales.

CAPITULO IX

TEMA 1. IDEA INTUITIVA DEL ESPACIO FISICO TRIDIMENSIONAL. PUNTOS Y FIGURAS ESPACIALES. REGIONES

1. El espacio físico

La diaria actividad vital pone al hombre en contacto con el medio en que la misma se desenvuelve: el *espacio físico*; en él distinguimos de modo inmediato objetos individualizados: son los *cuerpos* o *volúmenes*, también distinguiremos las partes que delimitan los cuerpos, tales partes las llamamos *superficies*, éstas a su vez se cortan dos a dos según *líneas*. Supongamos las líneas formadas por *puntos* de tal manera que dos líneas que se cortan lo hacen según un punto.

Puntos, líneas, superficies y cuerpos por sí o combinados dan lugar a las figuras geométricas en el espacio.

2. Elementos geométricos

Los elementos geométricos en el espacio son el *punto*, la *recta* y el *plano*.

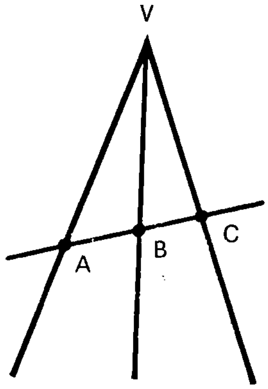
Los elementos geométricos los caracterizamos por sus propiedades:

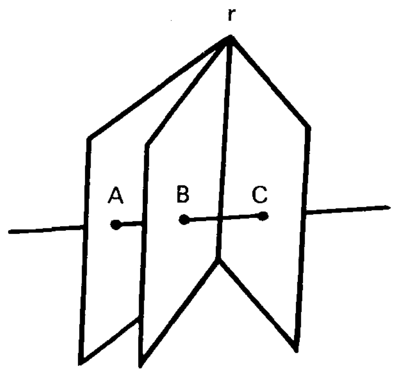
Dos puntos determinan una recta. Tres puntos no alineados determinan un plano que pasa por ellos. Dos rectas en el espacio se cruzan, se cortan o son paralelas. Si dos puntos de una recta están en un plano todos los puntos de la recta están en el plano.

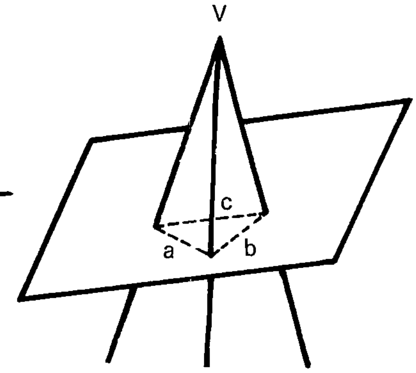
Figura geométrica, es el conjunto de varios de estos elementos, ligados entre sí de tal forma, que si alguno cambia de posición, los demás siguen guardando con él relación primitiva.

Perspectiva de una figura, compuesta de puntos y rectas, desde un punto O, es la figura constituida por las rectas y planos que pasando respectivamente por ellos, pasan por O.

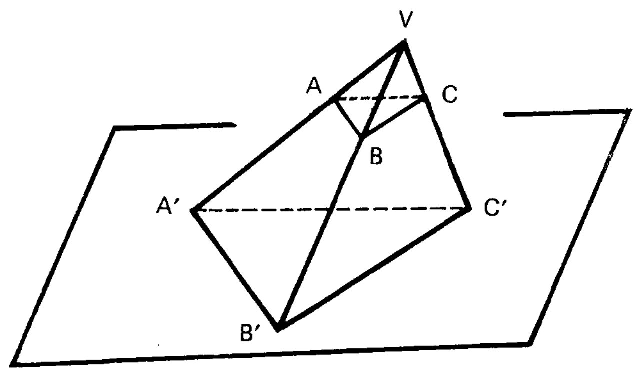
Sección de una figura, compuesta de rectas y planos, por una recta o por un plano, es el conjunto de elementos geométricos, puntos o rectas comunes a éstos y a la figura dada.







Proyectar una figura desde un punto, sobre un plano, es hallar la sección, por este plano, de la perspectiva de la figura desde el punto dado.



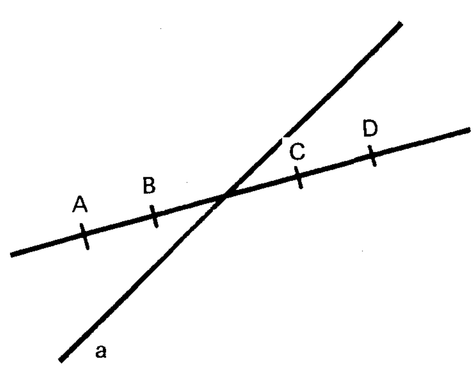
Serie de puntos, es el conjunto de las distintas posiciones de un punto que se mueve según una ley continua.

Haz plano de rectas, es el conjunto de las distintas posiciones de una recta que se mueve en el plano según una ley continua.

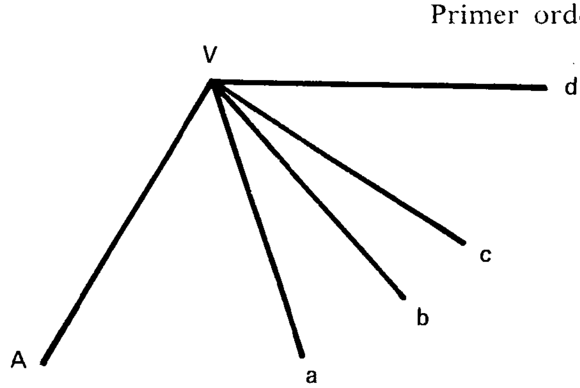
Tratándose de figuras planas, se llama *orden* de una *serie*, al número máximo de puntos que puede tener común con una recta del plano, y orden de una *haz de rectas* al número máximo de rayos del haz que pasan por un punto del plano.

La serie rectilínea es, pues, de primer orden, y el haz plano de rayos que tienen un vértice común, es también de primer orden.

Primer orden:

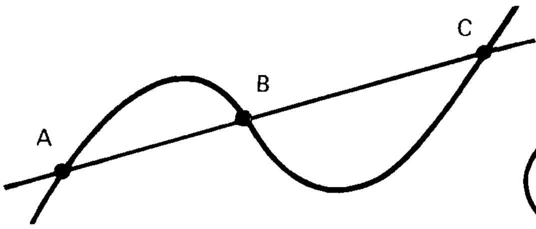


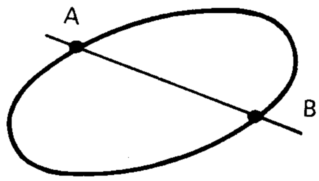
Primer orden

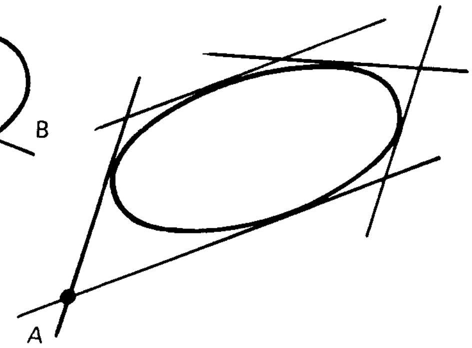


Tercer orden

Segundo orden







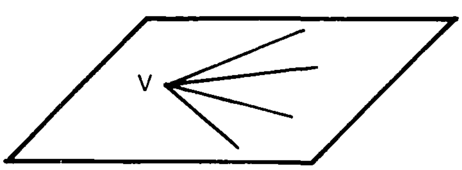
Haz radiado de rectas, es el conjunto de las distintas posiciones de una recta que pasando por un punto fijo se mueve con arreglo a una ley continua.

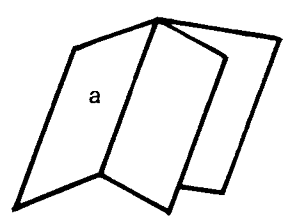
Haz radiado de planos, es el conjunto de las posiciones de un plano que pasando por un punto fijo se mueve con arreglo a una ley continua.

El *orden* de un haz radiado es el número máximo de rayos de esa radiación contenida en un plano que pase por su *vértice,* y el de un haz radiado de planos, el número máximo de planos que concurren por una recta que pase por el vértice.

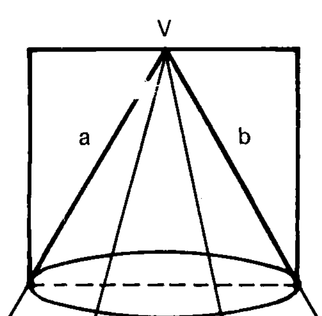
El haz radiado de rectas es de primer orden cuando es un haz plano. El haz radiado de planos es de primer orden cuando todos pasan por una recta.

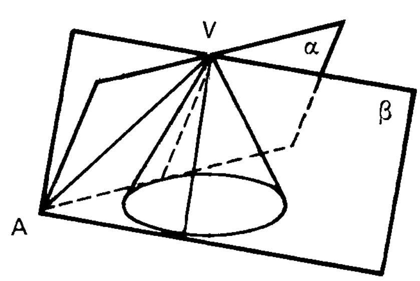
Una figura es *cerrada* cuando el elemento generador vuelve a su punto de partida.





De 1.er orden





De 2.° orden

3. Segmento rectilíneo, ángulo plano, ángulo diedro y forma

Teniendo en cuenta estos conceptos, podemos definir *segmento rectilíneo* como la parte de serie de primer orden comprendida entre dos de sus puntos.

Angulo plano, es la porción de haz plano de rectas de primer orden, comprendidas entre dos de sus rayos.

Angulo diedro es la porción de haz de planos de primer orden comprendida entre dos de sus planos.

Forma plana es el conjunto de todos los puntos y rectas de un plano. Forma radiada, es el conjunto de todas las rectas y plano de radiación, y *forma espacial,* el conjunto de todos los puntos, rectas y planos del espacio.

Obsérvese que en una *figura plana,* puede haber infinitos puntos, pero no están todos los del plano, como ocurre en la *forma plana.*

La forma plana es un conjunto *completo* de todos los elementos que la constituyen. Lo mismo ocurre con las otras *formas.*

Superficie, es la figura conjunto de puntos, que pueden considerarse como el lugar de las diversas posiciones de una serie que se mueve conforme a una ley continua.

Cuerpo geométrico es el conjunto de todos los puntos separados del resto del espacio por una superficie cerrada. Se dice que están separados, cuando lo están en la sección producida por cualquier plano que pase por ellos.

Todo plano α establece una clasificación de los puntos del espacio, no contenidos en él, en dos únicas clases o regiones, tales que: todo punto exterior al plano pertenece a una u otra región.

El segmento que une dos puntos de la misma región está totalmente contenido en la región y no corta al plano α.

El segmento que une dos puntos de distinta región corta al plano α.

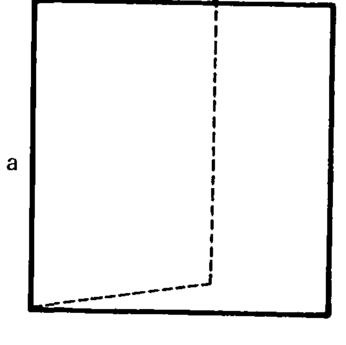
Llamamos semiespacio al conjunto de puntos de cada región más el conjunto de los puntos del plano que la limita. Los puntos del plano pertenecen a ambos semiespacios de los limitados por él.

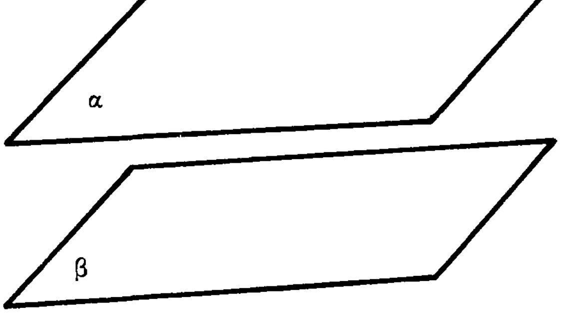
4. Intersección de planos

Dos planos se cortan según una recta que es su intersección común.

Dos planos con un punto común tienen una recta común que pasa por el punto.

Si dos planos no tienen una recta en común los planos se dicen «paralelos», en caso contrario «secantes».





El diedro, ya definido anteriormente, es el conjunto de puntos comunes a los semiespacios delimitados por dos planos α y β, no paralelos, que contienen, respectivamente, un semiplano de β y α. La recta común a los planos se llama arista del diedro y los semiplanos de α y β se llaman caras del diedro. Por tanto, dos planos secantes dividen al espacio en cuatro diedros.

Diedros que tienen una cara común y la otra formando un sólo plano, se llaman adyacentes. Dos diedros se dicen opuestos por la arista cuando las caras de uno son prolongación de las caras del otro.

El semiplano determinado por la arista de un diedro y un punto interior al mismo está totalmente contenido en el diedro, se dice que es un semiplano interior al diedro.

Uno de estos semiplanos interiores al diedro lo divide en dos diedros situados en distintos semiespacios respecto del plano que contiene a dicho semiplano.

5. Triedros. Angulos poliedros.

Dados tres planos que pasen por un mismo punto V llamamos *triedro* al conjunto de puntos de la intersección de los semiespacios respectivamente limitados por los planos dados y tales que contienen la recta intersección de los otros dos.

Cada una de las rectas intersección de dos planos del triedro se llama *arista* del mismo Cada dos aristas determinan un ángulo que se llama *cara* del triedro. El punto común a los tres planos se dice *vértice* del triedro.

Dados, en el espacio, un conjunto ordenado de semirectas de origen común, tales que el plano determinado por cada dos consecutivos deja a los demás en un mismo semiespacio, tenemos que el conjunto de puntos comunes a todos estos semiespacios se llama *ángulo poliedro.* Las semirrectas reciben el nombre de *aristas,* el origen común se llama *vértice* del ángulo poliedro y *caras* son los ángulos determinados por cada dos aristas consecutivas. Los diedros definidos por cada dos caras consecutivas se dicen *diedros* del ángulo poliedro.

Tenemos que: el ángulo definido por una arista y una semirrecta cualquiera de una cara no contigua pertenece al ángulo poliedro.

6. Superficie poliédrica

Llamamos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados *caras* de la superficie, cumpliendo las siguientes condiciones.

1. Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo a otra. Ambas caras se llaman contiguas.

2. Dos caras contiguas están en distinto plano.

3. El plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a los demás. Esta última propiedad caracteriza a las superficies poliédricas convexas.

7. Figuras convexas. Regiones

Todas las figuras definidas hasta aquí, diedros, triedros, ángulos poliedros, superficies poliédricas tienen en común la propiedad siguiente que caracteriza a las figuras llamadas convexas:

Todo segmento determinado por dos puntos de la figura está totalmente contenido en la misma.

Región: Es toda parte del espacio delimitada por una figura convexa.

TEMA 2. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO. EXPERIENCIA Y MATERIALIZACION

1. Rectas y planos paralelos

Dos rectas a y a' decimos que son *paralelas* en el espacio si, estando contenidos en el mismo plano, no tienen ningún punto en común. Notación: $a//a'$.

Dos planos α y α son *paralelos* si no tienen ninguna recta común. Notación: $\alpha//\alpha'$.

Una recta a y un plano α sin puntos comunes se dicen *paralelos*. Notación: $a//\alpha$.

Postulado de Euclides: «Por todo punto en un plano, pasa una paralela a una recta y sólo una».

Sobre este postulado se desarrolla la geometría corriente, llamada por ello, geometría euclidiana.

Existen otras geometrías de las que no trataremos, que son las no euclidianas. basadas en los *postulados de Riemann* y *Lobacheski.*

El de Riemann, dice que: «Por todo punto de un plano no existe ninguna paralela a una recta».

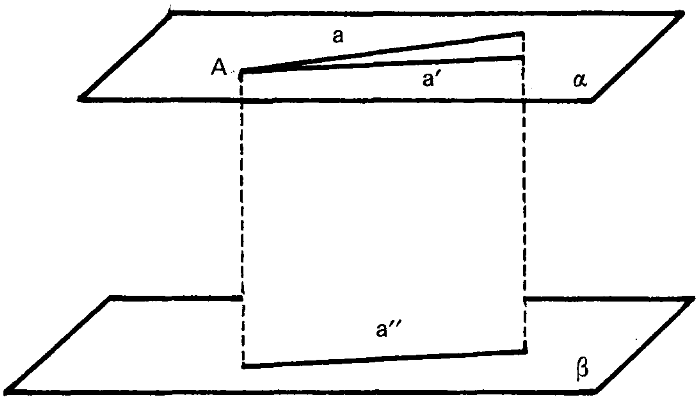
El de Lobacheski, dice que: «Por todo punto de un plano existen dos paralelas a una recta».

Continuando en nuestra geometría euclidiana tenemos: *Si dos planos son paralelos, al ser cortados por un tercero, las interseccionesson paralelas.*

En efecto, si no lo fueran tendrían un punto común y por pertenecer a ellas, pertenecería a ambos planos, lo cual no es posible por ser paralelos.

Si por un punto exterior a un plano, trazamos rectas paralelas al mismo, todas ellas están contenidas en un plano que es paralelo al primero.

En efecto, si α es el plano trazado por A paralelo al β, cualquier recta a paralela a β trazada por A está en α, pues de lo contrario, haciendo pasar por a un plano secante cortaría a α y β, en dos rectas paralelas a' y a'', según el teorema anterior y tendríamos por A, en el plano secante, dos paralelas a y a' a a'', contrario al postulado.



Consecuencia:

El lugar geométrico de las paralelas a un plano trazadas desde un punto exterior *A*, es el plano paralelo al dado trazado por dicho punto.

Por un punto A exterior a un plano α no puede haber más que un plano paralelo, pues si hubiera otro β tendría común con α una recta, y al cortar a él cortaría a su paralelo.

Un plano incidente con una recta *r* (o con un plano α) es incidente con todas las rectas (o planos) paralelos a *r* (o α).

Por un punto exterior a una recta pasan infinitos planos paralelos a ella, los cuales pasan por otras rectas paralelas a la primera y forman por tanto un haz de planos de primer orden. Consecuentemente, si una recta es paralela a dos planos que se corten la recta es paralela a la intersección.

En el paralelismo de planos se verifica que: si α es paralelo a β entonces β es paralelo a α: propiedad *simétrica* del paralelismo. Asimismo se cumple que si α es paralelo a β y β es paralelo a γ entonces α es paralelo a γ: propiedad *transitiva* del paralelismo.

Podemos considerar que todo plano en el espacio, o toda recta en el plano, es paralelo a sí mismo, es decir, se verifica la propiedad *reflexiva*.

En este sentido decimos que el paralelismo es una *relación de equivalencia* entre rectas del plano o planos del espacio. Las clases de equivalencia formados por todas las rectas paralelas entre sí se llaman «direcciones» y las formadas por todos los planos paralelos entre sí «tesituras».

Si una recta *a* se cruza con otra *b* siempre podemos trazar uno y sólo un plano que pasando por *a* sea paralelo *b*. En efecto, por un punto cualquiera de *a* se traza una recta *b′* paralela a *b* y el plano determinado por las rectas *a* y *b′* es el buscado, ya que es el paralelo a *b* y contiene a *a*; es único pues cualquier otro plano obtenido de la misma manera, con una recta *b″*, coincide con él por ser paralelos las rectas *b′* y *b″*.

2. Perpendicularidad de rectas y planos

Ya dijimos que en el plano dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando ángulos iguales.

Cuando no existe un plano que contenga a dos rectas dadas decimos que éstas se cruzan; más adelante diremos cuando dos rectas que se cruzan lo hacen perpendicularmente.

Asimismo dos planos son perpendiculares si se cortan formando cuatro diedros iguales (dos diedros son iguales si se pueden hacer coincidir sus caras mediante un movimiento).

Una recta a que corte a un plano α en un punto A, de manera que sea perpendicular a todas las rectas del plano α que pasen por él se dice recta perpendicular al plano α en A. Recíprocamente todas las perpendiculares a una recta, que pasan por un punto A de ella, están en un plano que se dice perpendicular a dicha recta en el punto A. Notación: $a \perp \alpha$.

Por un punto, pasa un plano, y sólo uno, perpendicular a una recta dada. Asimismo, por un punto, pasa una recta y sólo una, perpendicular a un plano dado.

La longitud del segmento determinado por un punto A y el pie A' de la perpendicular trazada por él a un plano, se llama distancia del punto A al plano; dicho segmento es el de menor longitud entre todos los que se obtienen uniendo A con otro punto B del plano, ya que el triángulo $AA'B$ es rectángulo en A, y, por tanto, el cateto $\overline{AA'}$ es menor que la hipotenusa $\overline{AB}$.

Si un plano α contiene una recta perpendicular a otro plano β, entonces α y β son planos perpendiculares. Por consiguiente, como por una recta pasan infinitos planos, por un punto A se pueden trazar infinitos planos perpendiculares a uno dado, y todos pasan por la perpendicular trazada por A al plano dado.

Ahora bien, por una recta r, no perpendicular a un plano α, pasa un plano, y sólo uno, perpendicular a α determinado por la recta r y la perpendicular a α trazada por un punto cualquiera de r.

Si dos rectas se cruzan y por una de ellas pasa un plano perpendicular a la otra, decimos que las rectas se cruzan perpendicularmente. En esta situación, por la segunda recta, también pasa un plano perpendicular a la primera, y estos planos se cortan según una recta que corta perpendicularmente a las dos rectas dadas.

Dadas dos rectas que se cruzan existe siempre una recta que corta perpendicularmente a ambas. La longitud del segmento determinado por los puntos de intersección de la perpendicular común de las dos rectas que se cruzan con dichas rectas, es la *mínima distancia* entre las mismas.

Un plano perpendicular a la arista de un diedro es también perpendicular a cada una de las caras del mismo, y su intersección es un ángulo plano, llamado sección recta del diedro.

Diedros iguales tienen secciones rectas iguales y recíprocamente, si las secciones rectas de dos diedros son iguales éstas también lo son.

3. Paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos. Proyecciones

Un plano perpendicular a una recta es perpendicular a todas las rectas paralelas a la dada. Asimismo, una recta perpendicular a un plano lo es a todos sus paralelos.

Por lo anterior, dos planos (o dos rectas) perpendiculares a una misma recta (o un plano) son paralelos (paralelas).

Tenemos, pues, que los segmentos de perpendiculares comunes a dos planos paralelos comprendidos entre los mismos son iguales. En general, los segmentos de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.

Llamamos *distancia* entre dos planos paralelos a la longitud de los segmentos de perpendicular común comprendidos entre ambos. *Distancia* entre una recta y un plano paralelos es la longitud del segmento determinado por un punto cualquiera de la recta y el pie de la perpendicular trazada por ese punto al plano.

Proyección de un punto A sobre un plano α (plano de proyección), según la dirección de la recta a es la intersección A' de la paralela por A a la recta a. Es, por tanto, otro punto A, tal que $AA'//a$. Si la dirección dada es perpendicular al plano de proyección se dice proyección *ortogonal*; si no proyección *oblicua*.

Llamamos proyección de una figura sobre un plano a la figura formada por la proyección de todos sus puntos.

La proyección ortogonal de una recta, no perpendicular, ni paralela a un plano, forma con la recta un ángulo agudo que llamamos *ángulo de la recta y el plano*. Si la recta es perpendicular al plano decimos que el ángulo que forma es recto, y si es paralela diremos que es nulo.

4. Materialización y experiencia

Materializamos la perpendicular al plano del horizonte mediante la *plomada* constituida por un cordel con un peso en un extremo.

La horizontalidad de un plano se materializa con el nivel, el más normal es el de burbuja, o con instrumentos de medición topográfica adecuados como teodolitos y niveles.

En clase mediante el uso de distinto material didáctico; el mejor siempre es el confeccionado por el alumno bajo la dirección del profesor, se pueden proponer diversos ejemplos en que se materialice mediante casos concretos, el paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos, así como sus propiedades. La mejor guía es, como siempre, el buen sentido del profesor para aprovechar las distintas situaciones que el *quehacer diario* le proporciona: así, por ejemplo, escuadras, perfiles, reglas, aristas de cajas ortoédricas, dados, etc.

TEMA 3. ESTUDIO DESCRIPTIVO DE LOS CUERPOS

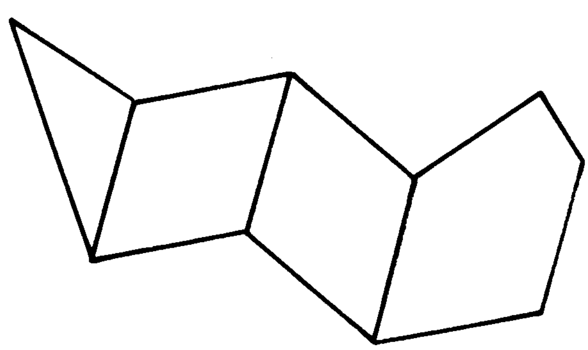
1. Poliedro

Se llama *superficie poliédrica,* como ya dijimos anteriormente, a la superficie formada por varios polígonos, situados en planos distintos, teniendo cada dos una arista común.

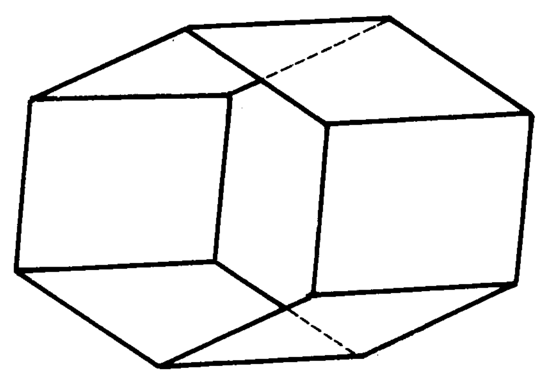
Poliedro es el cuerpo, limitado totalmente por una superficie poliédrica.

Los vértices y aristas de la superficie que limita el cuerpo, son los vértices y aristas del poliedro.

Un poliedro diremos que es *convexo* cuando el plano de cada cara deja situadas en el mismo semiespacio a los demás. En caso contrario se llama *cóncavo.*



Superficie poliédrica



Poliedro

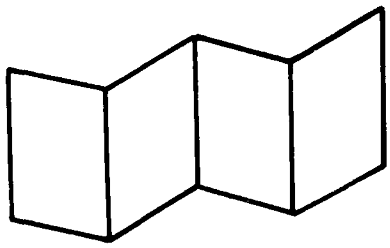
2. Prismas

Superficie *prismática* es la superficie poliédrica constituida por paralelogramos.

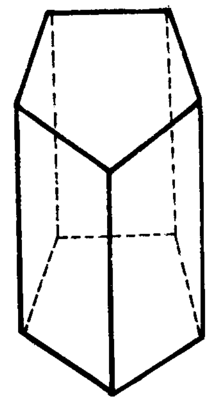
El cuerpo limitado por una superficie prismática, y dos polígonos situados en planos parlelos, se llama *prisma.* Las caras de la superficie prismática son las caras del prisma, y los dos polígonos se llaman bases del mismo.

Los lados de los paralelogramos reciben el nombre de *aristas laterales* del prisma y los lados de los polígonos de las bases se llaman *aristas básicas.*

Si las aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases el prisma se dice *recto;* si las aristas laterales no son perpendiculares a los planos de las bases el prisma se llama *oblicuo.*



Superficie prismática



Prisma pentagonal recto

El prisma recibe el nombre de triangular, cuadrangular, pentagonal, exagonal y, en general, n-agonal, según que los polígonos de las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, exágonos y, en general, n-ágonos.

Paralelepípedo: Un prisma oblicuo o recto, cuyas bases son paralelogramos se llama *paralelepípedo.*

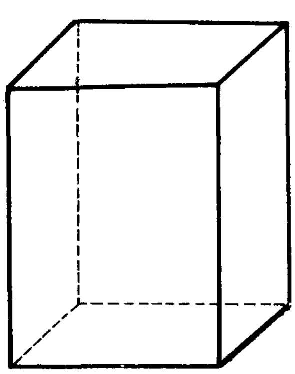
El paralelepípedo tiene sus caras paralelogramos; cada dos caras opuestas son paralelogramos iguales.

Las aristas del paralelepípedo son doce, cada cuatro de ellas son paralelas e iguales.

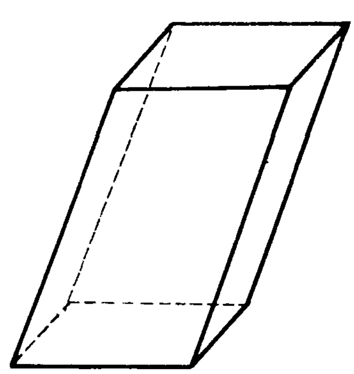
El paralelepípedo tiene ocho vértices, cada cuatro situados en una misma cara. Los vértices no situados en una misma cara se dicen *opuestos*; *diagonal* del paralelepípedo es la recta que une vértices opuestos. En total hay cuatro diagonales que se cortan entre sí en su punto medio; este punto es centro de simetría del paralelepípedo.

El paralelepípedo, puede ser *recto* y *oblicuo*, según que las aristas laterales sean o no perpendiculares a la base.

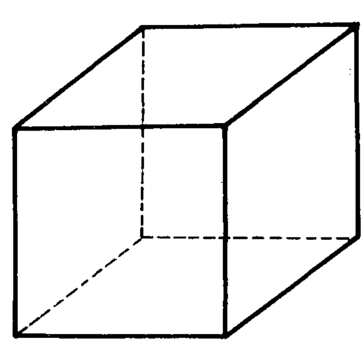
El paralelepípedo recto, cuyas caras y bases son cuadradas se llama *cubo* o *exaedro.*



Recto



Oblicuo



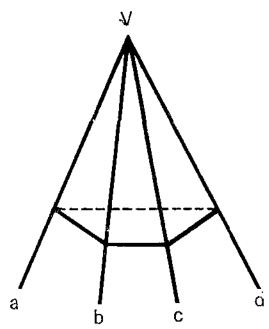
Cubo

Las diagonales de un cubo son todas iguales, cortandose en un punto que es el centro del poliedro.

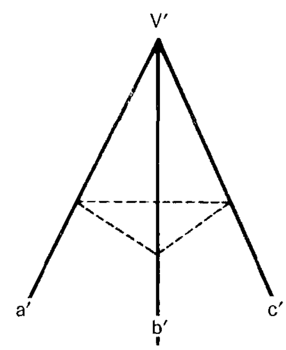
3. Angulo poliédrico

La figura formada por varios planos que pasando por un punto se cortan dos a dos, se llama *ángulo poliédrico.*

Las rectas de intersección se llaman *aristas* y el punto común a todas, *vértice.* Los ángulos determinados por cada dos aristas, son las *caras* del ángulo poliedro. Cuando se trata de tres planos, se tiene el ángulo triédrico, o simplemente *triedro.*



Angulo poliédrico



Angulo triedro

La suma de las caras de un ángulo poliédrico es menor que cuatro rectos.

4. Pirámide

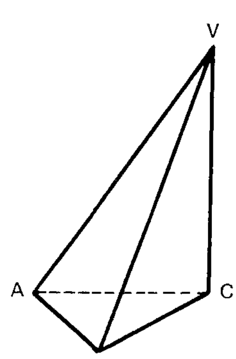
Pirámide es el cuerpo limitado por un ángulo poliédrico y un plano que corta a todas las aristas.

El polígono determinado por ese plano,se llama base, y los lados de éste, aristas básicas del poliedro.

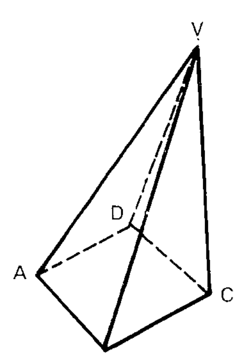
La pirámide es convexa si el polígono base lo es.

Las *caras laterales* son los triángulos determinados por el vértice y los lados del polígono base. Los segmentos que unen el vértice de la pirámide con los vértices del polígono base se llaman *aristas laterales* y los lados del polígono base son las *aristas básicas.*

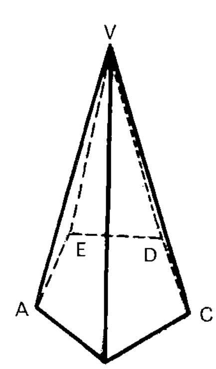
Altura de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.



Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular



Pirámide regular pentagonal

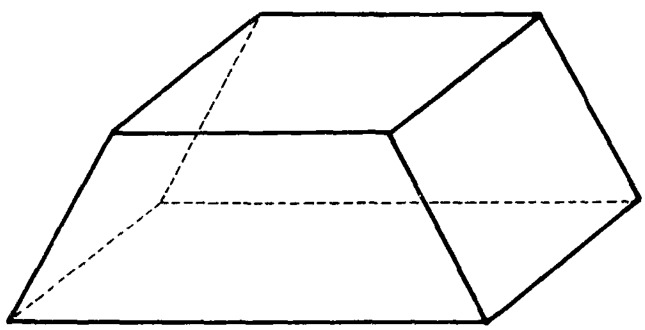
Una pirámide se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, exagonal y, en general, n-agonal cuando el polígono de la base es un triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, n-agono.

Una pirámide es *regular* cuando la base es un polígono regular y el vértice está en la perpendicular al plano de la base que pasa por el centro del polígono, esta perpendicular recibe el nombre de *eje* de la pirámide.

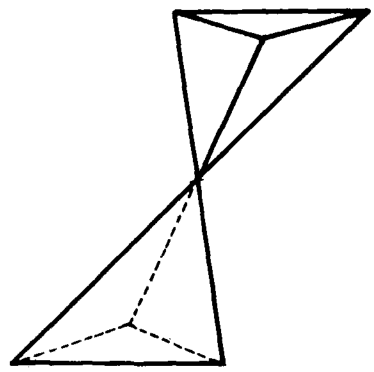
En una pirámide regular, la altura de los triángulos laterales, se llama apotema. La apotema del polígono de la base es la apotema básica.

Tronco de pirámide, es el poliedro resultante de cortar una pirámide por un plano paralelo a la base.

Cuando este plano está situado entre el vértice y la base, se obtiene el tronco de *primera especie*, o simplemente tronco. En caso contrario, se obtiene el tronco de *segunda* especie.



Tronco de 1.ª especie



Tronco de 2.ª especie

Las dos bases del tronco son polígonos semejantes.

Tronco de pirámide regular es el obtenido al trazar un plano paralelo a las bases en una pirámide regular.

Las caras de este tronco son trapecios isósceles y sus alturas son las *apotemas del tronco*.

5. Poliedros regulares

Los poliedros regulares son los poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

Como la suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectas se puede demostrar que sólo hay cinco poliedros regulares convexos llamados: *tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro* o *isosaedro*. Los cuales describimos a continuación:

A) *Tetraedro:* Es un poliedro regular cuyas caras son triángulos equiláteros, tiene cuatro caras y cuatro vértices en cada uno de ellos concurren tres caras; el número de aristas es seis.

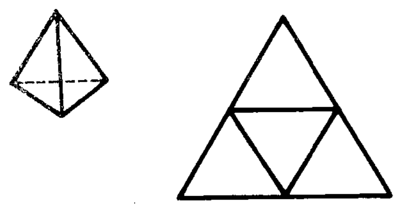
El tetraedro es, por tanto, una pirámide regular, cualquiera de sus caras puede ser la base. Las alturas son iguales y se cortan en un punto.

B) *Hexaedro o cubo:* Es el poliedro regular cuyas caras son cuadrados, tiene seis caras y ocho vértices en cada uno de ellos concurren tres caras y tres aristas, tiene por tanto doce aristas.

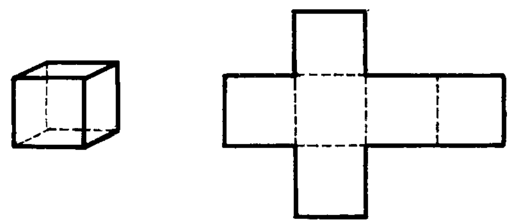
El cubo es un octaedro cuyas tres dimensiones son iguales. Las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio que es centro de simetría del cubo.

C) *Octaedro:* Es el poliedro regular cuyas caras son triángulos equiláteros, tiene ocho caras y seis vértices en cada uno de ellos concurren cuatro caras y cuatro aristas, tiene doce aristas.

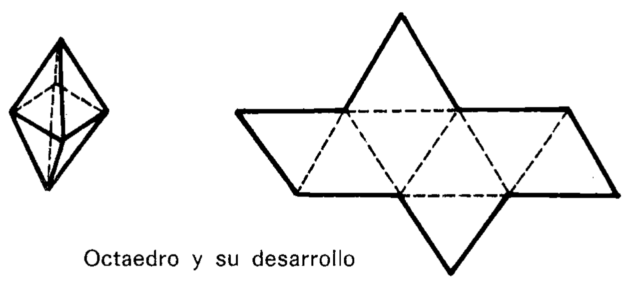
Las tres diagonales son iguales, perpendiculares dos a dos y concurren en un punto común que es centro de simetría del poliedro.



Tetraedro y su desarrollo



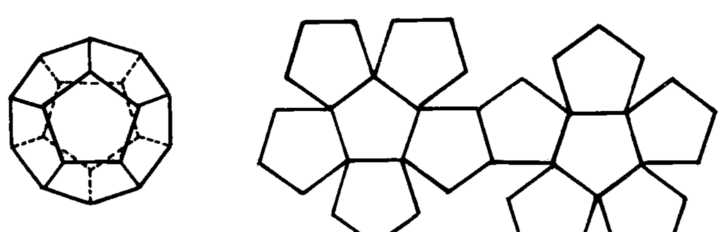
Exaedro ý su desarrollo



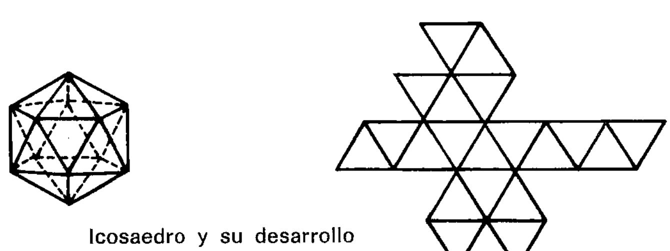
Octaedro y su desarrollo

D) *Dodecaedro:* Es el poliedro regular cuyas caras son pentágonos regulares, tiene doce caras, veinte vértices y treinta aristas; en cada vértice concurren tres caras y tres aristas.

E) *Icosaedro:* Es el poliedro regular cuyas caras son triángulos equiléteros, tiene veinte caras, doce vértices y treinta aristas, en cada vértice concurren cinco caras y cinco aristas.



Dodecaedro y su desarrollo



Icosaedro y su desarrollo

Propiedades generales de todos los poliedros regulares es tener iguales todos los diedros y ángulos poliedros.

También es una propiedad general para los poliedros regulares el tener un punto llamado *centro del poliedro*, que equidista de todos los vértices y aristas. Excepto el tetraedro, los restantes poliedros tienen un punto, que es centro de *simetría* del poliedro.

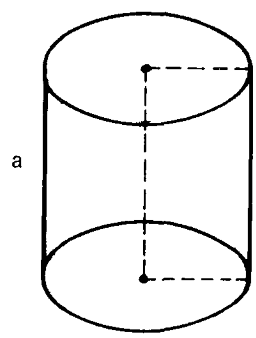
6. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera

Superficie cilíndrica, es la engendrada por una recta *a*, llamada generatriz, que gira alrededor de otra *e* paralela a ella, llamada eje. Cada punto de la generatriz engendra una circunferencia, que son los paralelos de esa superficie.

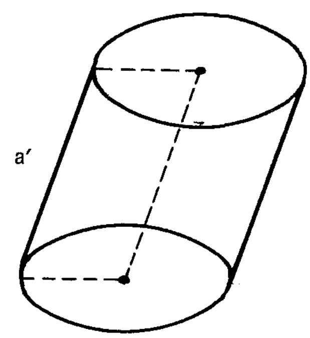
A) Cilindro

El cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y las secciones producidas por dos planos paralelos, se llama *cilindro*. Esas dos secciones son las bases del *cilindro*.

Si los dos planos trazados son perpendiculares a la generatriz o lado del cilindro, éste se llama *recto*. En caso contrario, el cilindro es *oblicuo*.



Cilindro recto



Cilindro oblicuo

Un rectángulo al girar en el espacio sobre uno de sus lados engendra un cuerpo que es el cilindro circular recto.

Eje del cilindro es la recta que contiene el lado del rectángulo que permanece fijo en el giro. *Generatriz* del cilindro, en este caso, es el lado del rectángulo paralelo al fijo en el giro.

Bases del cilindro son los círculos generados por los lados del rectángulo perpendicular al lado fijo en el giro.

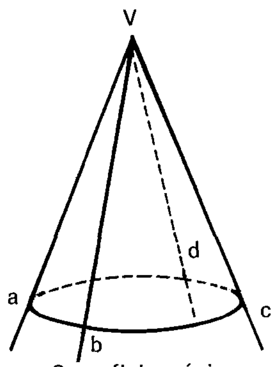
Altura del cilindro es la distancia entre las bases que en este caso coincide con la generatriz.

Los radios de las circunferencias de las bases se llaman *radios* del cilindro.

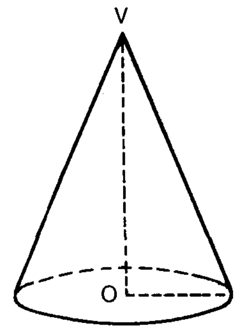
La superficie del cilindro, excluida las superficies de la base, se llama *superficie* del cilindro.

B) Cono

Se llama *superficie cónica* la engendrada por una recta *a* que gira alrededor de otra, llamada eje, con la que tiene un punto común.



Superficie cónica



Cono recto

Cada punto de la generatriz *a*, engendra una circunferencia que son los paralelos de la superficie. El cuerpo limitado por la superficie cónica y la sección producida por un plano, que la corte, se llama *cono*. Cuando éste es perpendicular el eje de la superficie, el cono es *circular* o cono *recto*. En caso contrario, se llama *oblicuo*.

Consideremos un triángulo rectángulo el cual gira alrededor de uno de sus catetos el cuerpo engendrado por el triángulo en dicho giro es el cono recto.

Vértice del cono es el vértice del ángulo agudo que permanece fijo durante el giro.

La recta que contiene al cateto alrededor del cual se efectúa el giro recibe el nombre de *eje* del cono.

Base del cono es la circunferencia engendrada por el cateto no fijo en el giro.

La distancia del vértice al plano de la base se llama *altura* del cono, y en este caso es el cateto contenido en el eje de giro.

La hipotenusa del triángulo se llama *generatriz* del cono.

El ángulo correspondiente al vértice del cono determinado por la generatriz y el eje se llama *semiabertura cónica*.

C) Esfera

Al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro, engendra una superficie, que se llama *superficie esférica*.

Consecuencia de ese giro, es que todos los puntos de esa superficie equidistan de un punto *fijo*.

El cuerpo limitado por la superficie esférica, se llama *esfera*.

Si un semicírculo gira alrededor de su diámetro, engendra un cuerpo que es la *esfera*. El centro y radio del semicírculo, son el *centro* y *radio* de la esfera.

Diámetro de una esfera, es el segmento que une dos puntos de su superficie, pasando por el centro. Un diámetro equivale a dos radios.

Plano diametral es todo plano que pasa por el centro.

La intersección de un *plano diametral* con la superficie esférica es una *circunferencia máxima.*

Un plano diametral divide a la superficie en dos partes que se llaman *hemisferios.*

Todo plano que no pase por el centro determina en la superficie esférica, circunferencias y círculos *menores.*

La parte de superficie esférica comprendida entre dos secciones producidas en ella por dos planos paralelos, se llama *zona esférica.*

La porción de esfera limitada por la superficie esférica y los dos planos se llama *segmento esférico* de dos bases.

Cada una de las dos partes de superficie esférica separada por un plano secante, se llama *casquete esférico.*

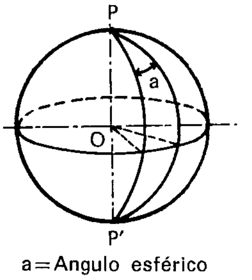
La parte de esfera que deja a uno y otro lado de la misma un plano secante se le denomina *segmento esférico de una base.*

Se llaman *polos* de una circunsferencia máxima a los extremos del diámetro perpendicular a su plano.

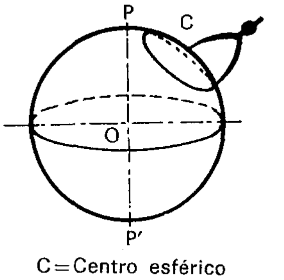
Angulo esférico es el ángulo formado por dos arcos de circunferencias máximas. *Vértices* del ángulo son el punto común de los dos arcos.

Centro esférico de una circunferencia cualquiera de una superficie esférica, es el punto desde el cual puede trazarse ella, utilizando un compás esférico.

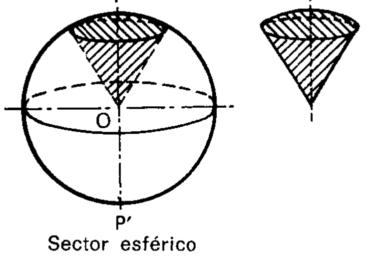
Un sector circular girando alrededor de uno de sus radios engendra un cuerpo llamado *sector esférico.*



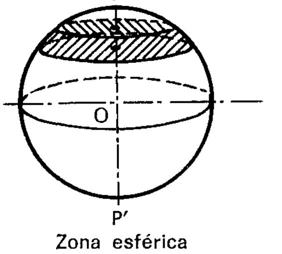
a=Angulo esférico



C=Centro esférico

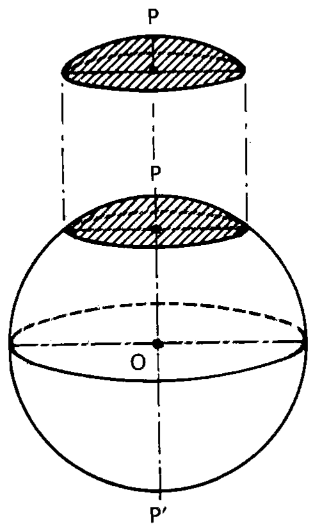


Sector esférico

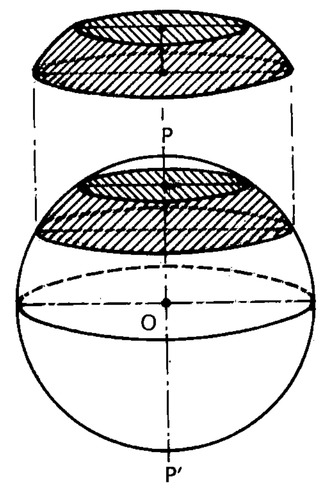


Zona esférica

El *casquete esférico* es, pues, un segmento esférico de una *base.*



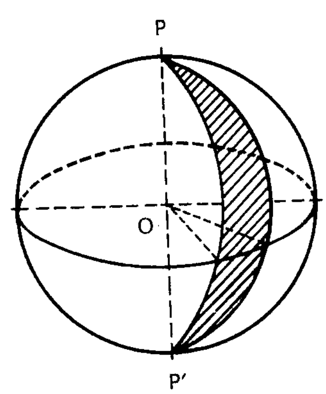
Casquete esférico



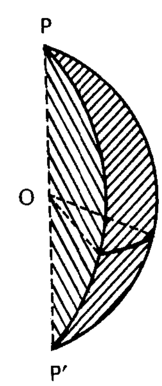
Segmento esférico

Altura de un segmento es la parte del diámetro perpendicular a las bases, comprendido entre ellas. Si es de una base, la parte comprendida entre éstos y la superficie esférica correspondiente al mismo.

Dos planos diametrales dividen a la *esfera* y a la *superficie esférica* en cuatro partes llamadas cada una, y respectivamente, *cuña esférica* y *huso esférico.*



Huso esférico



Cuña esférica

APENDICE

SISTEMA METRICO DECIMAL

1. Unidades lineales

Unidad principal: *metro.*

Valor legal

El *metro* legal es la longitud, a la temperatura de 0°, del patrón internacional, que es una barra de platino iridiado, depositada en el Pabellón de Pesas y Medidas de Breteuil.

Valor práctico

El *metro,* es la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre correspondiente a París.

El valor legal es menor que el práctico, siendo el error que se comete, al considerar como equivalentes ambas medidas, de unas dos diezmilésimas de metro.

Medidas

múltiplos		divisores
Mm.		dm.
Km.	m	cm.
Hm.		mm.
Dm.		

Cada orden contiene diez veces el inmediato inferior.

2. Unidades superficiales

Unidad principal: *metro cuadrado.*

Metro cuadrado, es la superficie de un cuadrado cuyo lado es un metro.

Medidas

múltiplos		divisores
Mm^2		dm^2
Km^2	m^2	cm^2
Hm^2		mm^2
Dm^2		

Cada orden contiene cien veces al inmediato inferior.

3. Unidades de volumen

Unidad principal: *metro cúbico.*

El metro cúbico, es el volumen de un cubo cuya arista es un metro.

Medidas

múltiplos		divisores
Mm^3		dm^3
Km^3	m^3	cm^3
Hm^3		mm^3
Dm^3		

Cada orden contiene mil veces al inmediato inferior.

4. Unidades de peso

Unidad principal: *kilogramo.*

Valor legal

El kilogramo, es la masa del prototipo internacional, que es un cilindro de platino, de igual altura que diámetro, depositado en el Pabellón de Breteuil.

Valor práctico

El kilogramo es el peso, en el vacío, de 1 dm^3 de agua pura, a su máxima densidad.

Unidad usual: *gramo*

Valor legal

El gramo es la milésima parte del prototipo internacional que representa al kilogramo.

Valor práctico

El gramo, es el peso en el vacío de un cm^3 de agua, a su máxima densidad.

Medidas

múltiplos		divisores
Tm.		dg.
Qm.		cg.
Kg.	g	mg.
Hg.		
Dg.		

Cada orden contiene diez veces al inmediato inferior.

5. Unidades de capacidad

Unidad principal: *litro.*

Valor legal

El litro, es el volumen que ocupa 1 Kg de agua pura, a su máxima densidad y bajo la presión normal.

Valor práctico

El litro es el volumen de 1 dm^3.

Medidas

múltiplos		divisores
Ml.		dl.
Kl.	l	cl.
Hl.		ml.
Dl.		

Cada orden contiene diez veces al inmediato inferior.

MEC