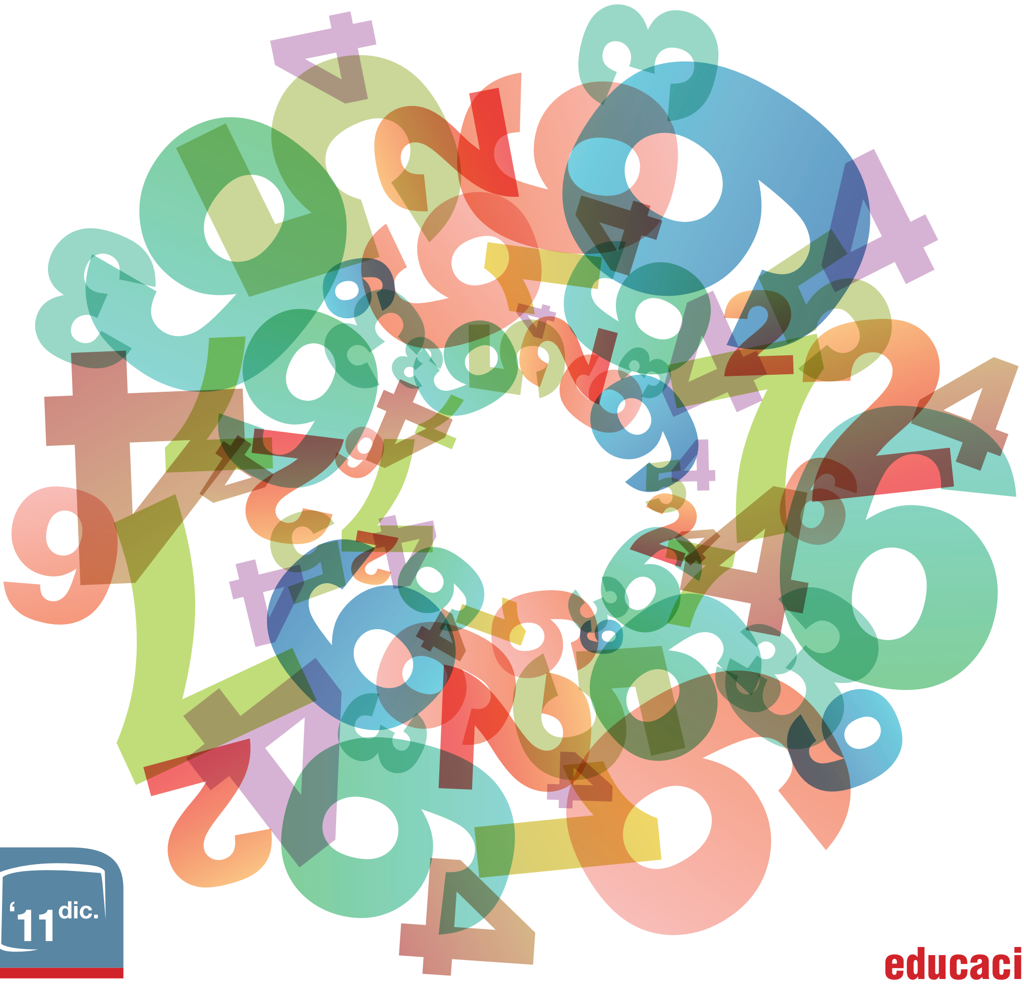
EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN MÉXICO

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

Cuadernos México

Enseñanza de las Matemáticas

Núm. 3



'11 dic.

educacion.es

3

CUADERNOS

México

3

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Cuadernos México núm. 3

Impreso en diciembre de 2011

NIPO (Versión impresa): 820-11-434-3
NIPO (Versión electrónica): 820-11-435-9

Coordinación: Cristina Arasa G.

Impreso en México / *Printed in Mexico*

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

En este tercer número de *Cuadernos México*, la más reciente publicación de la Consejería de Educación en México dedicada a la difusión de los contenidos de los seminarios hispano mexicanos de Educación, podemos encontrar, en forma de artículos, ponencias y talleres que se impartieron en el marco de las Jornadas binacionales México-España sobre la Enseñanza de la Matemáticas, organizadas con el Colegio Madrid, y celebradas en las instalaciones de este Centro los días 20 y 21 de octubre de 2010, en el Colegio Cristóbal Colón de Veracruz el día 22 de octubre.

Las Jornadas tuvieron como centro el intercambio sobre la Enseñanza de las Matemáticas. Las matemáticas están en todas partes, pero son pocos los lugares o los aspectos de nuestras vidas en los que saber esas matemáticas es realmente importante o nos puede parecer a priori. Entonces, lo relevante se convierte en enseñar otras formas de pensar que permitan a los estudiantes, posteriormente y si lo necesitan, acceder a otros conocimientos. Así dichas Jornadas supusieron una gran oportunidad de discutir sobre este tema y escuchar cómo se aborda en diversos lugares, cuáles son las matemáticas que se enseñan y cuáles las que se aprenden, cómo afrontarlas para que su aprendizaje resulte más sencillo, más apasionante para el alumno. Para ello contamos con la presencia de ponentes de ambos países que nos ilustraron con su experiencia en la investigación y docencia dentro de esta disciplina.

Como siempre, agradecemos a los ponentes y talleristas el esfuerzo realizado a la hora de poner en blanco sobre negro sus presentaciones, reflexiones, así como los contenidos de sus talleres. *Cuadernos México* es deudor de esta tarea desinteresada sin la cual la misma publicación no podría haber visto la luz. En este apartado no quiero dejar de mencionar la labor del equipo académico y directivo del Colegio Madrid que, como siempre, ha aportado su diligente colaboración para que este número sea una realidad.

Por último, esperamos que las contribuciones aquí recogidas sirvan a quienes tienen este ejemplar entre las manos para avanzar en la tarea de la enseñanza de la Matemáticas.

J. Alfonso Aísa Sola
Consejero de Educación

REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS SOBRE EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE ALUMNOS DE PRIMARIA EN CONTEXTOS ARTÍSTICOS*

EDELMIRA BADILLO JIMÉNEZ

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.
Universitat Autònoma de Barcelona (España)

RESUMEN

En este artículo se presenta una reflexión teórica y metodológica sobre una manera de entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas basado en un enfoque competencial. Desde esta perspectiva, hemos venido diseñando e implementando secuencias didácticas, validadas en diferentes aulas de primaria, que buscan tanto el desarrollo de la competencia matemática: el conocimiento matemático, los procesos asociados a la actividad matemática y el contexto de aprendizaje, como el desarrollo de otras competencias, como la argumentativa y la artística. La propuesta que aquí presentamos pretende ser un pequeño aporte a ese gran desafío, mostrando cómo es posible desarrollar competencias matemáticas en un contexto artístico, particularmente las competencias geométricas.

Edelmira Badillo Jiménez. Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona (España). Licenciada en Educación con especialidad en Matemáticas, Diplomada en Profesorado de Educación General Básica y estudiante de Psicopedagogía en la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Formadora permanente de maestros y profesores de matemáticas y docente de cálculo mental y geometría a nivel de infantil y primaria. Miembro del Grupo de Investigación PREMAT (Resolución de Problemas y Educación Matemática), líneas de investigación: El pensamiento matemático avanzado y Resolución de Problemas, juego y matemáticas.

* Este trabajo ha sido realizado, en parte, en el marco del proyecto EDU2009-08120/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Desde hace unos años, estamos introduciendo una manera innovadora de ver la geometría en la escuela aprovechando la riqueza y la complejidad que nos proporciona el contexto artístico (Badillo y Edo, 2004a, b; 2007a, b; 2008a, b; 2010a, b).

En este artículo proponemos una metodología en la que conjuntamente maestros y alumnos se involucran en un proceso de reflexión sobre la funcionalidad de los conceptos geométricos para interpretar y crear "producciones artísticas", resaltando al mismo tiempo emociones, sentimientos y valores en el estudio, y creación de una composición artística, sin dejar de lado el desarrollo de competencias.

El artículo se encuentra estructurado en cinco apartados. En el primero situamos nuestra propuesta dentro de la tendencia actual del currículo de España. En el siguiente apartado, describimos los referentes teóricos que sustentan nuestras propuesta, que es el marco constructivista. Posteriormente, presentamos nuestra propuesta didáctica, ilustrando con ejemplos de aula las diferentes actividades diseñadas. Finalmente, expondremos algunas conclusiones sobre la potencialidad que ofrece el contexto artístico para el desarrollo de competencias matemáticas y no matemáticas en los alumnos.

Enfoque competencial del aprendizaje de las matemáticas

Adúriz-Bravo (2011), postula que en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas, así como en la investigación educativa en general, la noción de competencia es considerada a la vez problemática y potente.

Este autor afirma que:

> "[…] los problemas provienen, entre otras cosas, de los orígenes extra educativos del concepto (principalmente, desde los campos de la economía, el desarrollo y el trabajo) y de sus numerosos –y delicados– matices político-ideológicos; la potencia, por su parte, se deriva de su promisoria capacidad de hacer que se reestructuren a fondo los currículos, la evaluación (formadora o acreditativa, interna o externa) y la formación del profesorado."

Aquí se asume el término de competencia, de manera global desde la perspectiva del ámbito del Espacio Europeo de ES, como: *La capacidad general basada en los conocimientos, experiencias, valores y disposiciones que una persona ha desarrollado mediante su compromiso con las prácticas educativas* (Eurydice, 2002: 13).

Sin embargo, matizamos el término, de manera particular, tal y como lo plantea Adúriz-Bravo (2011), quien propone una definición *operativa* de competencia, que denomina *modelo de las tres ces (3C)*, que nos puede ayudar a ver de manera sencilla y poderosa, la relación que debe existir entre los diferentes contenidos de ciencias, en las secuencias que diseñamos, para que los alumnos construyan conocimiento científico en el aula.

> "[...] una competencia científica escolar es cualquier **capacidad** (cognitiva, discursiva, material, afectiva) de orden superior específica, capacidad de hacer algo sobre un **contenido** (científico) determinado, dentro de un **contexto** delimitado reconocible (escolar significativo y, por tanto, transferible a la vida ciudadana)."

Desde esta visión, Sanmartí (2009) afirma que un trabajo competencial en el aula implica tener en cuenta cinco variables: (1) **Complejidad**, que implica red de conocimientos, incertidumbre, emergencia, etc.; (2) **Integración** de conocimientos en la resolución de problema; (3) **Funcionalidad y transferibilidad del conocimiento**, en la aplicación a situaciones relevantes socialmente e imprevisibles, (4) **Autonomía**, para aprender y actuar eficazmente, gestionar el conocimientos y para regularse y, (5) **Evaluabilidad**, para poder autorregular el pensamiento, los valores, las emociones y la actuación.

Así, los nuevos planes curriculares nos plantean un desafío importante: pasar de una formación centrada en el logro de objetivos específicos definidos desde los "contenidos" del área, a una enseñanza centrada en el desarrollo de competencias orientada a potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes. Asumir el enfoque de competencias implica reconocer la importancia tanto del hacer como del comprender, y por tanto, reconocer que en esta noción se involucran y relacionan diversos saberes: *el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo*. Por tanto, debemos tener en cuenta que cuando hablamos de la competencia matemática, es necesario tener en cuenta tres aspectos que se relacionan permanentemente: el *conocimiento matemático* (distinguiendo sus dos tipos: conceptual y procedimental), los *procesos asociados a la actividad matemática* (formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar y formular comparar y ejercitar procedimientos) y el *contexto de aprendizaje* (Badillo, Jiménez y Vanegas, 2011).

El Currículum actual de España, basado en un enfoque competencial, concretamente en el propuesto por la Generalitat de Catalunya, se remarca que *las competencias básicas son el eje del proceso educativo. El currículum orientado a la adquisición de competencias establece que la finalidad de la educación obligatoria es conseguir que los alumnos y las alumnas adquieran las herramientas necesarias para entender el mundo y sean personas capaces de intervenir activamente y crítica en la sociedad plural, diversa y en cambio continuo que nos ha tocado vivir. Un currículum por competencias significa enseñar para aprender y seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida* (GENCAT, 2009: 7-8).

Así, se identifican dos grupos de competencias básicas: por un lado, las *competencias transversales*, que son la base del desarrollo personal y de la construcción del conocimiento, entre las cuales consideran: (1) **las comunicativas**, para comprender y expresar la realidad; (2) **las metodológicas**, que activan el aprendizaje, entre estas se encuentra la competencia matemática; y, (3) **las personales**. Por otro lado, las *competencias específicas*, centradas en convivir y habitar el mundo y relacionadas con la cultura y la visión del mundo. En síntesis, las competencias básicas son las siguientes ocho (figura 1):

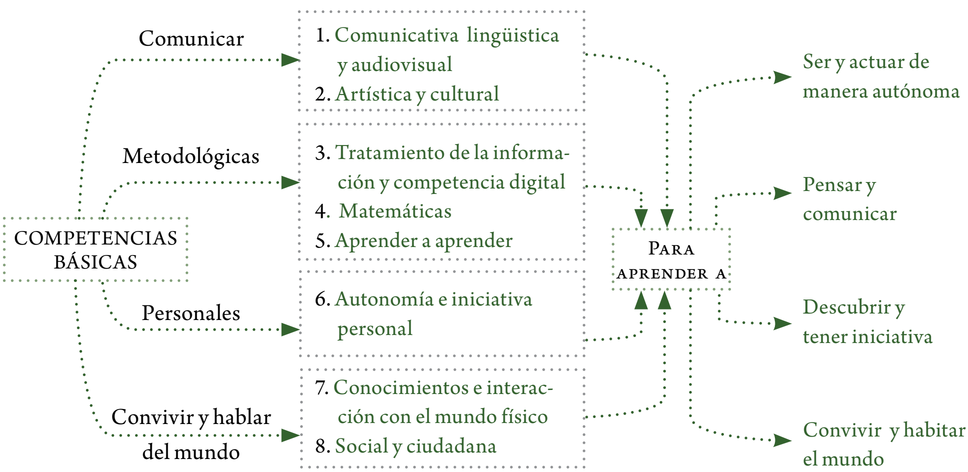


Figura 1. Competencias básicas (archivos de la Web de la Generalitat de Catalunya).

Referentes teóricos de las propuestas didácticas que relacionan contextos artísticos con el desarrollo de la competencia matemática

Los planteamientos teóricos que sustentan estas propuestas se basan en una visión constructivista del aprendizaje y la enseñanza.

La actividad matemática que se genera en el aula, a partir de este contexto, tiene en cuenta los diferentes criterios que han sido señalados de forma recurrente por la reciente investigación psicoeducativa en el ámbito de la educación matemática (Onrubia *et al.*, 1999):

- Contextualizar el aprendizaje de las Matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
- Activar y utilizar como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal de los alumnos.
- Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas, teniendo en cuenta la variedad de sistemas de representación y de traducción entre sistemas de representación: gráficos, tablas, ecuaciones, descripciones verbales, etc.
- Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial o su uso en la cotidianidad.
- Promover sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos. Resaltamos la importancia del trabajo cooperativo.
- Ofrecer al alumnado las oportunidades suficientes para «hablar de Matemáticas» en el aula.
- Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las Matemáticas.

Las actividades y contenidos matemáticos que hemos venido desarrollando durante los últimos años, tomando como referente el contexto artístico para el desarrollo de competencias matemáticas y no matemáticas (Badillo y Edo, 2004a, b; 2007a, b; 2008a, b; 2010a, b) se diseñaron a partir de los siguientes aspectos: (1) La naturaleza dual de las Matemáticas (relación del pensamiento intuitivo geométrico y el pensamiento formal matemático); (2) El uso de representaciones; (3) La importancia de la definición y la demostración matemática y del uso del lenguaje matemático; y, (4) La autorregulación de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Igualmente, en relación con el proceso de descripción y análisis de una producción plástica, realizada por los mismos alumnos o por algún artista reconocido, hemos propuesto una pauta metodológica basándonos en los trabajos de Torres y Juanola (1998a, 1998b) y en los aportes de especialistas en Educación Visual y Plástica y en Educación Infantil (Edo y Gómez, 2006).

Estas últimas autoras que hemos mencionado, recomiendan realizar este análisis en tres fases (figura 2):

ANÁLISIS DE UN CUADRO CON ALUMNOS DE PRIMARIA

Percepción	Lenguaje
• ¿Qué ves? • ¿Qué hay? • ¿Qué elementos reconoces?	**Descripción objetiva** de los elementos que se reconocen en la obra (líneas, puntos, figuras, volúmenes, superficies, texturas, colores…)
• ¿Qué podría ser? • ¿Qué me sugiere? • ¿Qué me recuerda? • ¿Qué me provoca?	**Evocación creativa** centrada en la propia mirada subjetiva
• ¿Qué título le pondrías?	**Interés de síntesis**

Figura 2. Análisis en tres fases.

1. La fase inicial se centra en una «descripción objetiva» de los elementos que se reconocen en la obra (líneas, puntos, manchas, figuras, volúmenes, superficies, texturas, colores…), elementos que forman parte del alfabeto visual y plástico y que, al mismo tiempo, muchos de ellos son conceptos básicos del currículo matemático de Primaria.
2. La segunda fase consiste en una «evocación creativa» centrada en la mirada subjetiva de cada espectador: ¿Qué podría ser? ¿Qué me sugiere? ¿Qué me recuerda? ¿Qué me provoca?
3. La tercera fase es un «intento de síntesis» centrado en la pregunta: ¿Qué título le pondrías?

Al seguir esta pauta observamos que la primera fase, la más objetiva y conectada con la matemática, dota al alumno de una serie de «herramientas» derivadas del análisis de la forma que permiten que la segunda fase, la más subjetiva y creativa, llegue a ser más interesante, rica en matices y diversa dentro de una misma aula. Siguiendo esta pauta conseguiremos que la primera mirada, geométrica y objetiva, se conecte y convierta en elemento necesario para aumentar la capacidad de interpretar y crear composiciones artísticas vinculándose el desarrollo de sentimientos y emociones estéticas. En la tercera fase, cuando se asigna un posible título, aparecen a menudo elementos clave de la descripción objetiva o de la evocación creativa. Por tanto, entendemos esta parte de la actividad como un intento de síntesis de las conversaciones anteriores.

Propuesta didáctica

Los referentes anteriores, han constituido la base para el diseño de una serie de propuestas didácticas en la que se da un tratamiento integrado y coordinado entre la Geometría y el Arte, como un espacio de reflexión que nos permite trasladar al aula de geometría una visión dual de la matemática. Es decir, que ayude a los niños a integrar y trasladar la visión que tienen de los conocimientos matemáticos como un sistema formal abstracto de autocontenido hacia entenderlos como un instrumento que permite la resolución de problemas prácticos en contextos reales (Onrubia *et al.*, 1999).

Antes de profundizar en la reflexión sobre lo que el contexto artístico posibilita en el desarrollo de competencias matemáticas, es importante resaltar que compartimos la idea planteada por diversos investigadores en la que se reconoce que el *contexto del aprendizaje de las matemáticas* es el "lugar" no sólo físico, sino ante todo sociocultural desde donde se construye sentido y significado para las actividades matemáticas, desde donde estudiantes y maestros pueden pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva (Badillo y Jiménez, 2009). Y por tanto, desde donde se posibilita el establecimiento de conexiones entre la actividad matemática con la vida cotidiana de los estudiantes, con las actividades de las instituciones escolares y, en particular, con otras ciencias y otros ámbitos de las matemáticas mismas (Badillo, Jiménez y Vanegas, 2011).

El trabajo en contextos artísticos no sólo se constituye en una experiencia motivadora para el trabajo en la clase de matemáticas, porque permite una experiencia grata de visualización, o por el carácter lúdico-creativo que posibilita. El contexto artístico es importante (Badillo y Edo, 2004a, b; 2006; 2007a, b; 2008 a, b; Torres y Juanola, 1998a, b) desde una visión del aprendizaje y la enseñanza en donde se asume el enfoque de competencias como vertebrador del desarrollo del pensamiento matemático. Para desarrollar la actividad matemática a partir del contexto artístico en la Educación Primaria, consideramos un diseño que contempla los siguientes objetivos:

- Utilizar obras de arte famosas para la introducción, construcción y evaluación de conceptos geométricos (conceptual).
- Interpretar obras de arte famosas a partir de la aplicación de los conceptos geométricos desarrollados (conceptual/procedimental).
- Crear y justificar producciones artísticas como resultado de la aplicación de los conceptos geométricos desarrollados (procedimental/conceptual).

Para poder alcanzar los objetivos señalados anteriormente, en todas nuestras propuestas se diseñan cuatro tipos de actividades, que no tienen que aparecer de manera lineal: (1) Actividades de familiarización; (2) Actividades de definición matemática; (3) Actividades de producciones artísticas; y, (4) Actividades de evaluación.

Actividades de familiarización

Generalmente, se presentan dos tipos de actividades de familiarización. Un primer grupo de actividades buscan, por un lado, que los alumnos construyan las relaciones entre Arte y Geometría y, por otro lado, obtener las ideas previas de los alumnos de los conceptos implícitos en la obra de arte. Con este propósito, por ejemplo, para el concepto de ángulo, con alumnos de 11-12 años, presentamos en esta fase, el siguiente cuadro (figura 3), sin especificar, ni autor ni título, y se utiliza el modelo de análisis presentado en la figura 2 para generar espacios de construcción de significados a partir del intercambio de ideas que emergen del análisis de esta obra artística:

- ¿Qué podría ser?
- ¿Qué me sugiere?
- ¿Qué me recuerda?
- ¿Qué me provoca?
- ¿Qué conceptos geométricos identifica?
- ¿Qué título le pondrías?

Figura 3.

Un segundo grupo de actividades se centran en el estudio de los rasgos más significativos de la vida y obra de los pintores escogidos. Para motivar la investigación de la obra de Paul Klee, en el ejemplo anterior, y la de otros pintores que permiten el estudio de estos conceptos geométricos, se expone de manera dinámica los rasgos más importantes de este pintor, se presenta su fotografía, su firma y pactamos con los alumnos que en próximas sesiones ellos mismos presentaran otras pinturas de su obra y de otros autores que nos ayudaran en el estudio de estos conceptos geométricos.

Actividades de definición matemática

En la construcción de la definición del concepto geométrico tenemos en cuenta tres fases: (1) Definición individual del concepto; (2) Confrontación entre iguales para compartir, mejorar y llegar a un acuerdo de las definiciones propuestas inicialmente; y, (3) Consenso e institucionalización de la definición, utilizando los mapas conceptuales como instrumento de síntesis de la definición del concepto que se adoptara en la clase.

Actividades de producciones artísticas

Este tipo de actividad tiene como objetivo promover procesos de reflexión sobre la importancia que tiene, en la construcción de una producción artística que relacione Arte y Geometría, la justificación de los siguientes aspectos:

- El uso práctico de los contenidos geométricos en la construcción de una producción artística.
- Los procedimientos (geométricos y/o algebraicos) utilizados en la construcción de los objetos geométricos (ángulo, triángulo, etc.) que conforman la producción artística.
- Las diferentes técnicas artísticas y materiales que utilizan en la construcción de la producción artística.
- Título del cuadro, nombre del autor, y la descripción de los sentimientos que quiere transmitir con su producción artística.

A continuación (figura 4) presentamos algunos ejemplos de trabajos realizados por niños de Primaria (10-12 años) de la Escuela Salesiana de Badalona (Barcelona, España), donde implementamos el taller durante los últimos siete años. Todos los ejemplos que presentamos siguen el modelo que sugerimos a los niños y niñas para la construcción de producciones artísticas y fueron seleccionados, por los mismos niños, como trabajos interesantes para ser expuestos en la Galería de Arte de la escuela.

Martínez, L. (2006). *La puesta del sol.*

- **Conceptos geométricos:** Triángulos, no triángulos y ángulos.
- **Técnica:** Cartulina, ceras, rotuladores y palillos.
- **Sentimientos:** Los sentimientos que transmite este cuadro son de felicidad y armonía, porque cuando uno está triste se va al mar y ve la puesta del sol y se pone feliz porque es una imagen preciosa de ver. Y he colocado al frente triángulos y otras figuras para que cada quien se centre en ver la parte que quiera.

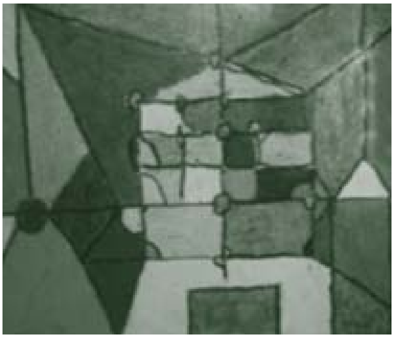
- **Procedimiento para formar ángulos:** Los ángulos que he utilizado son agudos y obtusos, completos, rectos y planos. Y el procedimiento que he utilizado no es ni algebraico ni geométrico, simplemente como me ha venido.
- **Técnica utilizada:** Yo he hecho servir acuarelas y las he mezclado pasando un pincel mojado con agua. Más tarde, cuando se ha secado he hecho ángulos con regla y un rotulador negro grueso.
- **Sentimientos:** Los sentimientos que quiero transmitir es que en la vida hay mucha variedad de objetos, por eso he hecho líneas rectas y curvas. Algunos son ángulos y de diferentes tipos porque hay muchas diferencias entre los objetos. Y le he llamado batalla de colores porque quiero que se vea que la vida está llena de colores que dan alegría y optimismo.

Muñoz, J. (2003). *Batalla de colores.*

Rou, M. (2007). *El bosque de colores.*

- **Conceptos geométricos:** Cosas de una dimensión como líneas y tipos de líneas (poligonales, curvas, rectas, etc). Y cosas de dos dimensiones, aunque no hice exactamente polígonos, sino más bien figuras geométricas planas en general.
- **Técnica:** Yo para hacer este cuadro he utilizado pinturas y ceras.
- **Sentimientos:** Los sentimientos que quiero expresar con este cuadro son: alegría y libertad. Alegría: Por los colores del fondo que representan flores y árboles. Libertad: Porque todos somos libres en este mundo, no debemos de capturar animales, tienen derecho a estar libres, hasta todos nosotros!!!

- **Conceptos geométricos:** Tipos de líneas, figuras geométricas planas, polígonos y ángulos.
- **Técnica:** Lápiz, rotulador negro, ceras y fijador de ceras.
- **Sentimientos:** Los polígonos representan los diferentes países que forman al mundo. Hay colores más vivos y alegres que representan a las sociedades que tienen la suerte de vivir bien (comida, ropa, y hasta lujos) y los colores tristes y oscuros representan a los países pobres que tienen poco o nada. El cuadro es un sueño, no es la realidad… porque he pintado muchos más países ricos que pobres… y he pintado a los pobre pequeñitos… Espero no despertar de este sueño o que cuando me despierte se haga realidad y sean más los niños que tiene de todo y sean felices de verdad.



Martínez, L. (2008). *La cara del mundo.*

Figura 4. Ejemplos de trabajos realizados por niños de Primaria (10-12 años) de la Escuela Salesiana de Badalona (Barcelona, España).

Actividades de evaluación

Dentro del marco de esta propuesta, la evaluación es considerada formativa, continua e integral. Esto implica centrarnos en la evolución de los aprendizajes más que en los resultados puntuales o finales. Además, pensamos que la evaluación es un proceso en el cual los alumnos tendrían que participar activamente. Por tanto, proponemos la reflexión sobre los siguientes tipos de evaluación que hemos implementado en el aula a lo largo de todas las secuencias:

- **Auto-evaluación.** Revisión continua de las actividades del *dossier,* revisión y mejora continua de sus producciones artísticas.
- **Entre iguales.** Valoración de las producciones del compañero, intercambio de material para corregir errores, debate y argumentación, etc.
- **Negociación de los criterios de evaluación y de los aspectos y problemas a evaluar.** Los alumnos participan en la construcción de problemas, preguntas abiertas y las correspondientes respuestas que se tendrán en cuenta en la evaluación final o de síntesis (la cual forma parte del proceso).
- **Hetero-evaluación.** Considerada no estática, ni acabada; los alumnos tienen la oportunidad de revisar, mejorar y proponer alternativas de solución que reflejen los progresos que van alcanzando.

A manera de conclusión

Uno de los aspectos claves, después de haber implementados diversas secuencias didácticas sobre contenidos geométricos relacionando arte y geometría, es la motivación de los alumnos durante todo el desarrollo de la actividad matemática que se genera en el aula. Otro aspecto a resaltar es que el contexto artístico permite la construcción de significados colectivos en relación a los conceptos geométricos inmersos en el análisis o creación de una producción artística. Valorando la experiencia en un marco competencial, consideramos que permite establecer relaciones permanentes entre:

1. El conocimiento matemático, distinguiendo aspectos conceptuales y procedimentales de los mismos.
2. Los procesos asociados a la actividad matemática, ya que se crea un ambiente de formulación y resolución de problemas, modelación de procesos y fenómenos de la realidad a partir del estudio y el análisis de las obras de arte famosas o de las propias producciones artísticas de los alumnos.
3. El contexto de aprendizaje que nos proporciona el contexto artístico cuando se trabaja con igualdad de importancia los aspectos matemáticos y los aspectos emocionales y afectivos asociados a las obras estudiadas.

Referencias bibliográficas

Adúriz-Bravo, A. (2011). *Competencias metacientíficas escolares dentro de la formación del profesorado de ciencias*. En E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (Eds.), El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes. (Aparición en febrero de 2011).

Badillo, E. y Edo, M. (2004a). *Taller de Arte y Geometría en el ciclo superior de Primaria I: Ángulos*. En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2004b). *Taller de Arte y Geometría I: Documentación para el* *taller. Desarrollo Curricular. Estrategias e Instrumentos*. En C. Tomás y M. Casas, (coord.). Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 años). Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2007a). *Taller de Arte y Geometría II: Triángulos (1ª parte).* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2007b). *Taller de Arte y Geometría II: Triángulos (2ª parte).* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2008a). *Orientaciones didácticas para el taller de Arte y Geometría III: Líneas (1D), Polígonos y otras figuras geométricas planas (2D).* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2008b). *Taller de Arte y Geometría III: Líneas (1D), Polígonos y otras figuras geométricas planas (2D).* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2010a). *Orientaciones didácticas para taller de Arte y Geometría IV: Cuerpos geométricos.* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Edo, M. (2010b). *Taller de Arte y Geometría IV: Cuerpos geométricos.* En C. Tomàs y M. Casas, Manual para Educación Primaria. Orientaciones y Recursos. 6-12 años. CD, Desarrollo Curricular, Experiencias. Barcelona: Wolters Kluwer Educación.

Badillo, E. y Giménez, J. (2009). *Viaje escolar sobre proporciones y desproporciones: de Oldenburg a Dalí, pasando por Botero.* En J. Giménez, La proporción: Arte y Matemáticas. Serie didáctica de las Matemáticas. [En línea]. Dirección URL: http://ub.academia.edu/documents/0029/5420/cap_8.pdf. [Consulta: 9 de junio de 2010]. Barcelona: Graó.

Badillo, E.; Giménez, J.; Vanegas, Y. (2011). *Desarrollo de competencias en un contex-*

to artístico: construyendo significados sobre la forma. En E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (Eds.), El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes. (Aparición en febrero de 2011).

Edo, M. y Gómez, R. (2006). *Matemática y Arte en Educación Infantil a partir del cuadro Bailando por miedo de Paul Klee»*. En M. Antón y B. Moll (coord.). Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años). Wolters Kluwer Educación.

EURYDICE (Red Europea de Información en Educación) (2002). *Las competencias clave: Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. [Disponible en línea]

GENCAT (2009). *Currículum Educació Primària*. Barcelona: Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. [Disponible en línea]

Onrubia, J. *et al.* (1999). *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica*. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comp.). Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar. Madrid: Alianza, p. 487-508.

Sanmartí, N. (2009). *¿Qué cambios implica la introducción del concepto de competencia en la educación científica?* Conferencia dictada en el VIII Congreso Internacional, Barcelona, España. [Disponible en línea]

Torres, M. y Juanola, R. (1998a). *Dibujar: mirar y pensar. Consideraciones sobre educación artística.* Barcelona: Rosa Sensat.

Torres, M. y Juanola, R. (1998b). *Una manera de enseñar artes plásticas en la escuela. 140 ejercicios para Educación Infantil y Primaria*. Barcelona: Rosa Sensat.

LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA PARA SER PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN ESPAÑA*

Vicenç Font Moll

Coordinador del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas.
Universitat de Barcelona (España)

RESUMEN

En este artículo, después de explicar cómo era la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria en el periodo 1971-2009, se explica cómo es la actual formación inicial para ser profesor de matemáticas de secundaria en España. En particular se explican las características del máster que habilita para el ejercicio de la profesión de profesor de secundaria para la especialidad de matemáticas. En la parte final, se comentan algunos aspectos problemáticos relacionados con la formación inicial actual y se hacen algunas consideraciones sobre los dos años de experimentación de este máster.

Vicenç Font Moll. Autor de 30 libros de texto de matemáticas de la ESO y de Bachillerato. Ha impartido numerosos cursos de formación permanente de profesores de secundaria. Actualmente coordina el Máster de Formación de Profesor de Secundaria en Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Ha publicado varios artículos en torno a la educación matemática en las principales revistas de investigación del área de Didáctica de las Matemáticas: Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactiques des Mathematiques, For the Learning of Mathematics, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Enseñanza de las Ciencias, Educación Matemática, etc. Ha presentado ponencias invitadas y comunicaciones en congresos internacionales (CIBEM, PME, CERME, ICME, CIEAEM, RELME, etc.).

* Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos: 1) Desarrollo de competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas (AECI 2010, C/023928/09) y 2) Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato (EDU2009- 08120/EDUC).

El profesor de secundaria en España debe formarse para enseñar en dos etapas claramente diferenciadas: la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), etapa de 4 años, obligatoria y de carácter general, y la Educación Secundaria postobligatoria constituida por el Bachillerato, etapa de 2 años, no obligatoria, con varias especialidades y que prepara para el acceso a la Universidad, o bien por la Formación Profesional (ciclos formativos de grado medio y superior). Esta estructura, junto con los cambios que se han producido en nuestra sociedad en los últimos años y que afectan de manera especial a los adolescentes, hace que sea del todo necesaria una formación específica de carácter profesionalizador para acceder a la docencia en la Educación Secundaria.

El objetivo de este artículo es explicar cómo es la actual formación inicial para ser profesor de matemáticas de secundaria en España. Para ello, hemos estructurado el texto de la siguiente manera. Después de esta introducción, en la segunda sección explicamos cómo era la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria en el periodo 1971-2009. En la tercera sección comentamos algunas conclusiones para la formación inicial que se extraen del desarrollo profesional de los profesores que tuvieron esta formación inicial. En la cuarta sección se explican las características de la formación inicial obligatoria a partir del 2010 (y que ya es vigente en algunas universidades a partir del curso 2009-2010). En la quinta sección se comentan algunos aspectos problemáticos relacionados con la formación inicial actual. Por último, en la sexta sección se hacen algunas consideraciones finales.

La formación inicial en el periodo 1971-2009

Antes de explicar las características de la actual formación para ser profesor de secundaria en España conviene comenzar comentando brevemente, cuál era la situación anterior a la actual.

Durante el periodo 1971-2009, España era uno de los países de Europa que menos formación didáctica exigía a los profesores de secundaria. Para ser profesor de secundaria de matemáticas había que tener el grado de matemáticas (física, química, ingeniería, etc.) y después tener el diploma del Curso de Adaptación Pedagógica (CAP).

En las Facultades de Matemáticas no se contemplaba un itinerario para ser profesor de matemáticas de secundaria, lo que aquí llamaremos un modelo de formación inicial en paralelo. Lo que había era un modelo consecutivo. Esto es, primero formación disciplinar y posteriormente, una mínima formación profesionalizada, que sólo se exigía en la enseñanza pública.

El Curso de Adaptación Pedagógica (CAP) era un curso teórico-práctico, con una duración de reducida (80 horas de clase y 40 de prácticas), que estuvo vigente desde 1971 hasta el curso 2008-09.

La parte teórica trataba contenidos psicopedagógicos generales, contenidos relacionados con la estructura de la institución escolar, contenidos relacionados con el currículum y contenidos de didáctica de las matemáticas. Es de destacar que, por cada hora que se dedicaba a la didáctica de las matemáticas, se dedicaban tres, a los contenidos generales psicopedagógicos. La formación práctica se desarrollaba en los centros de secundaria bajo la supervisión de profesores-tutores de enseñanza secundaria.

A pesar de la buena voluntad de los organizadores del CAP, la mayoría de los participantes se mostraban insatisfechos con este tipo de formación y lo consideraba básicamente como un requisito burocrático para poder ser profesor.

Competencias profesionales desarrolladas a partir de la práctica. Implicaciones para la formación inicial

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores ha reclamado la atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores.

Recientemente, ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas como se refleja en las revisiones incluidas en los *handbooks* de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007; Jaworski, Giménez et al 2009), y la publicación de revistas específicas como *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático, del profesorado, requerido para enseñar matemáticas.

En el caso de España, la investigación realizada sobre la formación de profesores se ha focalizado, sobre todo, en la formación inicial y permanente de maestros y en menor medida en la formación inicial de profesores de secundaria. Dichas investigaciones han servido para conocer tanto las limitaciones de la formación inicial en el periodo 1971-2009, como el tipo de competencias que los profesores que recibieron esta formación inicial fueron adquiriendo en su desarrollo profesional. El conocimiento generado por estas investigaciones permitió determinar cuáles eran las competencias profesionales del profesor de matemáticas de secundaria en activo y, por tanto, cuáles se deberían comenzar a desarrollar en su formación inicial. Entre ellas hay que resaltar las cuatro que siguen a continuación:

- Competencia en el domino de los contenidos matemáticos correspondientes al currículum de la educación secundaria.
- Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas.
- Competencia en la gestión de las secuencias didácticas en el aula.
- Competencia en el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas.

Mientras estuvo vigente la formación inicial que hemos comentado, se fue generando un amplio consenso sobre los siguientes aspectos: 1) que la formación didáctica que se exigía a los futuros profesores de secundaria de matemáticas era insuficiente y 2) que las competencias profesionales de los profesores en activo, en especial las cuatro que acabamos de comentar, se deberían comenzar a desarrollar en la formación inicial. Este segundo aspecto tenía implicaciones importantes para la organización de la formación inicial:

- Había que incorporar un itinerario educativo en la formación inicial de profesores de secundaria. Este itinerario se debía articular en torno a la Didáctica de la Matemática.
- Había que asegurar una formación adecuada en matemáticas.

Ahora bien, una formación matemática que tuviese en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, su historia, etc.

- La práctica docente debía formar parte esencial de la formación inicial de los profesores. La reflexión sobre la propia práctica es necesaria para comprender la complejidad del proceso educativo. Ahora bien, es necesario articular el análisis de la propia práctica con las aportaciones de la investigación y la innovación desde la didáctica de la matemática y, en este sentido, es necesaria la coordinación, como mínimo, entre el futuro profesor, el profesor de didáctica de la matemática y el profesor tutor de matemáticas en el centro de secundaria.

La situación actual de la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas

En este apartado comentaremos brevemente el contexto curricular en el que se desarrolla la formación inicial de los profesores de enseñanza secundaria de matemáticas a partir del curso 2010-2011. Aunque hay cambios importantes con relación a la formación inicial anterior, en la línea que se ha comentado en la sección anterior, el modelo continúa siendo secuencial. Es decir, primero unos estudios de grado disciplinares y después un máster profesionalizador.

El Espacio Europeo de Educación Superior

Según las recomendaciones de la Declaración de Bolonia, los estudios universitarios europeos deben confluir para lograr que estudiantes, docentes e investigadores gocen de una movilidad plena, sin fronteras, y para que en Europa se dé una convergencia real y efectiva de sus titulaciones universitarias. Los nuevos títulos que se han comenzado a impartir obligatoriamente a partir del curso 2010-2011, sustituirán a las diplomaturas y licenciaturas anteriores.

El espíritu que subyace en esta reforma es el de la integración de contenidos y competencias. El trabajo del estudiante pasará a ocupar el centro de atención y se medirá por créditos ECTS (1 crédito igual a 25 horas), y los resultados no se evaluarán sólo por lo que el estudiante sepa (conocimientos), sino también por lo que sepa hacer (competencias y destrezas).

Asimismo, los nuevos títulos se estructuran en tres ciclos: *grado* (240 créditos ECTS en cuatro años), *máster* (60, 90 ó 120 créditos en uno o dos años) y *doctorado*, siendo el primero un título generalista que faculte al estudiante para su inserción en el mercado laboral; el segundo un título más especializado que pueda también iniciarle en la investigación; y el tercero un título plenamente encaminado a la investigación.

Estas son, en síntesis, las líneas maestras que definen el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES): la convergencia universitaria con Europa; la movilidad plena de estudiantes, profesores e investigadores universitarios y su adaptación a unos nuevos métodos docentes y discentes.

Competencias profesionales en la formación inicial

Los actuales curriculums de formación inicial de profesores están organizados por competencias. Las directrices del máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria[1] (máster de FPS a partir de ahora) establecen que la duración sea de 60 créditos ECTS (sistema europeo de transferencia y acumulación de **créditos**). Con carácter general, las enseñanzas han de ser presenciales, al menos, en el 80% de los créditos totales del máster, incluido necesariamente el *Prácticum*. Las directrices del máster prescriben la realización del *Prácticum* en colaboración con las instituciones educativas establecidas mediante convenios entre Universidades y Administraciones Educativas. Las instituciones educativas participantes en la realización del *Prácticum* habrán de estar reconocidas como centros de prácticas, así como los tutores encargados de la orientación y tutela de los estudiantes.

Los finalidad de este máster es conseguir 11 objetivos de tipo competencial, principalmente de carácter profesionalizador. A continuación siguen, a modo de ejemplo, tres de ellos:

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

[1] ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. BOE núm. 312 del 29 de diciembre de 2007.

- Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo.
- Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las competencias de este máster se estructuran en términos de competencias profesionales genéricas, específicas (matemáticas y su didáctica en nuestro caso) y las que se desarrollan por medio de la práctica.

Un ejemplo de *competencia genérica* es:

- Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

Un ejemplo de *competencia específica*:

- Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y plantear alternativas y soluciones.

Un ejemplo de *competencia relacionada con la práctica*:

- Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

Como ejemplo de concreción de estas directrices curriculares comentamos, brevemente, el plan de estudios del máster de FPS que se imparte en la Universitat de Barcelona, que está estructurado en módulos: Módulo genérico (15 créditos), Módulo específico (25 créditos) y Módulo de Prácticum (20 créditos).

Los módulos a su vez se organizan en materias y asignaturas que suman un total de 60 créditos ECTS.

Módulo genérico: 15 créditos

- Aprendizaje y desarrollo de la personalidad.
  - Aprendizaje y desarrollo de la personalidad (5 créditos).
- Procesos y contextos educativos.
  - Contexto de la Educación Secundaria. Sistemas, modelos y estrategias (2,5 créditos).
  - Tutoría i Orientación (2,5 créditos).
- Sociedad, familia y educación.
  - Sociología de la Educación Secundaria (5 créditos).

Módulo específico: 25 créditos

- Complementos para la formación matemática.
  - Complementos históricos, metodológicos y de aplicación de los contenidos de Matemáticas (7,5 créditos).
  - Taller de resolución de problemas y modelización (2,5 créditos).
- Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
  - Didáctica de las matemáticas de la ESO y del Bachillerato (5 créditos).
  - Recursos y materiales educativos para la actividad matemática (5 créditos).
  - Competencias matemáticas y evaluación (2,5 créditos).
- Innovación docente e iniciación a la investigación educativa.
  - Innovación e investigación sobre la propia práctica (2,5 créditos).

Módulo de Prácticum: 20 créditos

- Prácticum en la especialidad.
  - Prácticum I (5 créditos).
  - Prácticum II (10 créditos).
- Trabajo Final de Máster.
  - Trabajo Final de Máster (5 créditos).

En la propuesta de la Universitat de Barcelona podemos ver que se han tenido en cuenta las tres implicaciones que se han señalado en la parte final de la sección tercera. La primera y la tercera ya vienen implícitas en las directrices curriculares del máster de FPS, ya que se trata de un itinerario educativo articulado en torno a la Didáctica de la Matemática en el que la práctica docente forma parte esencial del plan de estudios.

La segunda también se ha tenido en cuenta ya que las materias y asignaturas del módulo *Complementos para la formación matemática* tienen por objetivo presentar unos contenidos matemáticos que complementen los que los futuros profesores aprendieron en sus estudios de grado. El objetivo es que los alumnos conozcan cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, cuáles fueron los problemas que originaron los objetos matemáticos que tendrán que enseñar, que reflexionen sobre los principales procesos matemáticos como son la resolución de problemas y la modelización, etc. En definitiva, unas matemáticas con historia y relacionadas con sus contextos de aplicación.

Competencias matemáticas en el currículum de Secundaria

En el caso de España, el currículo por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria está pensado para desarrollar una competencia profesional que le permita al futuro profesor desarrollar y evaluar la competencia matemática contemplada en el currículo de secundaria.

Actualmente hay una tendencia a considerar que "saber matemáticas" incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, como es el caso de España, se ha concretado en el diseño de currículos para la educación secundaria basados en competencias. Dichos currículos contemplan la competencia matemática, la cual es entendida, en muchos casos, de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003 (OCDE, 2003).

Un aspecto problemático, una pregunta relacionada y una respuesta

Los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo.

Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? La respuesta a la cual, a su vez, depende de cómo se conteste a la pregunta previa: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

En el marco de los proyectos *Desarrollo de competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas* (AECI 2010, C/023928/09) y *Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato* (EDU2009- 08120/EDUC), profesores de la Universitat de Barcelona (UB), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) hemos reflexionado sobre las preguntas anteriores y hemos adoptado los posicionamientos que comentamos a continuación:

Un primer posicionamiento

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas.

Diversos autores han dado respuestas diferentes: "conocimiento pedagógico" (Moore, 1974), "conocimiento pedagógico del contenido" (Shulman, 1986) y "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), entre otras. En nuestra opinión, estas respuestas coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un profesor es aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje (análisis didáctico), pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

Esta primera conclusión nos ha llevado a que nuestro primer posicionamiento sea que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos de secundaria se puede considerar compuesta por dos macro competencias: 1) La competencia matemática y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. Además, consideramos que el núcleo de la competencia profesional del futuro profesor de secundaria del estado español debería ser la competencia en el análisis didáctico. De manera secundaria se debería mejorar la competencia matemática, pero se presupone que en los estudios previos que acreditan los alumnos para su ingreso en dicho máster ya se ha desarrollado, aunque no completamente, una competencia matemática de base. La razón para tomar esta opción es que la formación inicial de profesores de secundaria en España es secuencial: primero formación disciplinar y después formación profesionalizadora.

Un segundo posicionamiento

Dado que el término competencia es un término controvertido y que el currículum del máster de formación de profesor de secundaria de matemáticas presenta una cierta ambigüedad en la manera de conceptualizar las competencias, nuestra segunda opción ha sido optar por una manera de entender la competencia que no sea contradictoria con las directrices curriculares del máster de FPS del estado español ni con el Perfil del Docente en la Educación Media Superior de México. La razón de tener en cuenta también las directrices mexicanas se debe a que se trata de una propuesta conjunta de la Universitat de Barcelona (UB), la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

La opción que se ha tomado es la de considerar la competencia como una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad.

Un tercer posicionamiento

Nuestro tercer posicionamiento ha sido la elaboración de una lista de competencias redactadas de acuerdo al segundo posicionamiento que no sea contradictoria con las directrices curriculares del máster de FPS del estado español ni con el Perfil del Docente en la Educación Media Superior de México. En concreto se contemplan 5 competencias genéricas del profesor (aunque se está estudiando la posibilidad de que sean seis) y 10 competencias específicas del profesor de secundaria de matemáticas. Para cada una de dichas competencias se han considerado tres niveles de desarrollo.

A continuación, a modo de ejemplo, se detallan dos de estas 15 competencias. Un ejemplo de competencia genérica es la *competencia digital* (tabla 1) y de competencia específica, la *competencia en el análisis de secuencias didácticos* (tabla 2).

Utilizar la tecnología digital en los ámbitos profesional y social como herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente.		
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Utiliza la tecnología digital para desarrollar materiales didácticos o de referencia para su clase de gestión educativa.	Utiliza la tecnología digital para ilustrar situaciones o ejemplos en clase.	Utiliza la tecnología digital en clase con actividades que involucren directamente la actividad de los alumnos.
Utiliza la tecnología digital para obtener información útil para su labor profesional.	Utiliza la tecnología digital para establecer contacto e intercambio social eficiente con colegas y alumnos.	Utiliza la tecnología digital para el desarrollo de su labor docente con sus alumnos en un ambiente virtual o semipresencial.
Contribuye a desarrollar la competencia digital en sus alumnos.		

Tabla 1. Competencia digital.

Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.		
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Muestra conocimiento del currículum de matemáticas como elementos fundamentales para comprender su práctica pedagógica.	Integra teorías, metodologías y currículum, en la planificación de los procesos de enseñanza y reconoce las implicancias en su práctica considerando los contextos institucionales.	Implementa la planificación de los procesos de enseñanza en sus prácticas y emite juicios argumentados y reflexivos acerca de las teorías, metodologías y el currículum.
Aplica herramientas para describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos presentes en un proceso de enseñanza aprendizaje y muy en especial, en su propia práctica.	Conoce y aplica herramientas socioculturales para conocer la interacción y las normas que condicionan un proceso de enseñanza aprendizaje y muy en especial, en su propia práctica.	Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de enseñanza aprendizaje y muy en especial, en su propia práctica.
Conoce criterios de calidad y los tiene presentes en la planificación de una secuencia didáctica de matemática.	Utiliza criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de la matemática.	Aplica criterios de calidad para valorar su propia práctica y realizar innovaciones con el objetivo de mejorarla.

Tabla 2. Competencia en análisis de secuencias didácticas.

Consideraciones finales

Finalizaremos comentando dos aspectos, uno problemático y otro positivo, que en estos momentos tiene la implementación del máster para ser profesor de secundaria de matemáticas en la Universitat de Barcelona. Se trata de dos aspectos que van más allá de la Universitat de Barcelona y que, en mayor o menor medida, también están presentes en la mayoría de los másteres de FPS de matemáticas que se imparten en las universidades españolas.

El primero es que el supuesto de que las asignaturas del módulo *Complementos para la formación matemática* sirven para complementar, y no para substituir la necesaria formación anterior que ha de asegurar una competencia matemática de base, no se ajusta con la formación previa que tienen las dos primeras promociones de alumnos en la UB. En la primera sólo había un alumno con grado de matemáticas y en la segunda también sólo hay uno. En el otro extremo tenemos alumnos que han cursado pocos créditos de matemáticas en los estudios de la especialidad que les ha permitido acceder al máster de FPS. Este desfase entre lo que se presupone que los alumnos saben de matemáticas y lo que los alumnos saben realmente es, probablemente, uno de los problemas más importantes del máster de FPS y para el cual se deberá buscar alguna solución en las futuras implementaciones.

El segundo es que el diseño del máster de FPS conlleva que se tenga que formar un equipo docente en el que tiene que participar profesorado de:

1. Pedagogía, Psicología y Sociología.
2. Matemáticas.
3. Didáctica de las Matemáticas.
4. Matemáticas de secundaria en activo.

Se trata de un equipo docente que, si llega a funcionar realmente como un equipo, puede producir una sinergia importante que puede asegurar una formación de profesores de matemáticas de secundaria de mucha calidad. Conseguir la integración de este equipo es un reto importante y difícil, pero la experiencia que tenemos en la Universitat de Barcelona (UB), del primer año de implementación del máster de FPS y de lo que llevamos del segundo, nos hace ser optimistas en este aspecto.

Referencias Bibliográficas

Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge*. En V. RICHARDSON (ed.): *Handbook of Research on Teaching,* p.p. 433-456*, Washington, D.C., American Educational Research Association.*

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. K. S. (Eds.) (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R. y Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*, London: Lawrence Erlbaum Ass.

Franke, M. L., Kazemi, E. Y Battey, D. (2007). *Understanding teaching and classroom practice in mathematics*. En En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* p.p. 225-256, Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. Y Ball, D. L. (2007). *Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters*. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* p.p. 111-156, Charlotte: NCTM and IAP.

Jaworski, B, Giménez, J. et al (2009). *Development of teaching in and from practice*. En R Even & D Ball (eds), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Series vol. 11, p.p. 149-166. The 15th ICMI Study.

Llinares S. Y Krainer K. (2006*). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners*. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* p.p. 429-459, Rotherdam: Sense Publichers.

Moore, T.W. (1974). *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid: Alianza Editorial.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, París: OCDE.

Sowder, J. T. (2007). *The mathematical education and development of teachers*. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* p.p. 157-224, Charlotte: NCTM and IAP.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher,* 15(2), p.p. 4-14.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN MÉXICO: LOGROS Y RETOS*

María Trigueros Gaisman

Departamento de Matemáticas.
Instituto Tecnológico Autónomo de México.

Ana Isabel Sacristán Rock

Departamento de Matemática Educativa.
Cinvestav-IPN (México)

Lourdes Guerrero Magaña

Facultad de Física y Matemáticas.
Universidad Michoacana de San Nicolás, Hidalgo (México)

Resumen

México tiene una larga tradición en investigación en Educación Matemática. Fue uno de los primeros países del mundo con grupos de investigación dedicados específicamente a esta área. Uno de los grupos más fuertes surgió, hace 30 años, en respuesta a la necesidad de análisis del plan de estudios y el desarrollo de material didáctico, pero rápidamente se diversificó en otras áreas de investigación y dio lugar a otros grupos a nivel nacional y en otros países de habla hispana. Los programas de posgrado, inicialmente específicos de investigación y posteriormente de desarrollo profesional, han proliferado. Se han producido importantes publicaciones en México, incluyendo dos revistas de investigación de renombre. Investigadores mexicanos han publicado también internacionalmente y constantemente colaboran con grupos de investigación e instituciones de otros países. Los grupos de mexicanos han hecho importantes contribuciones para desarrollar la investigación, teórica y empírica, en áreas tales como historia y epistemología, álgebra, matemática elemental, matemática avanzada y el uso de nuevas tecnologías. Algunas de las investigaciones han tenido un impacto directo sobre el sistema educativo nacional. Otras áreas están en desarrollo, tales como las de modelado, conocimiento del profesorado, evaluación... A continuación, expondremos una visión general de los logros más significativos de la investigación en México y señalaremos algunos de los desafíos actuales para la investigación futura.

* Esta conferencia está basada en un artículo en inglés de igual título (Trigueros, Sacristán y Guerrero, 2008), presentado en la conferencia internacional PME, realizada en Morelia, México en el 2008, por las mismas autoras. Este trabajo fue parcialmente apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. y por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

María Trigueros Gaisman. Profesora del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México en México, DF, donde ha trabajado desde 1981. Es miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y nivel 2 del Sistema Nacional de Investigadores. Obtuvo su doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid en 1999. En 2006 obtuvo el Premio Luis Elizondo, categoría Científico y Tecnológico. Cuenta con más de un centenar de publicaciones en revistas nacionales e internacionales, memorias de congresos de investigación y es autoría de varios libros de texto de Matemáticas y de Física de Secundaria. Ha participado en varios proyectos nacionales: Coordinadora de evaluación de los proyectos EMAT (Enseñanza de Matemáticas con Tecnología) y EFIT (Enseñanza de la Física con Tecnología) y Coordinadora Académica de la parte de Matemáticas del Proyecto Enciclomedia. Es miembro de varios comités editoriales de revistas de investigación y de divulgación, así como de varios comités científicos nacionales e internacionales.

Ana Isabel Sacristán Rock. Investigadora del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN en México, DF, donde ha laborado desde 1989, y es miembro de nivel 2 del Sistema Nacional de Investigadores. Obtuvo su doctorado en Educación Matemática en 1997 en el Instituto de Educación de la Universidad de Londres, Inglaterra. Uno de sus principales temas de investigación es el estudio de la incorporación de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuenta con más de medio centenar de publicaciones, varias de las cuáles ha presentado en congresos y eventos internacionales. También es miembro de varios comités científicos y editoriales, tanto nacionales como internacionales; y ha sido profesora visitante en la Universidad de Londres, Inglaterra; en la Universidad de Quebec en Montreal; y en el Instituto Francés de Educación en Lyon, Francia.

Lourdes Guerrero Magaña. Profesora en la Facultad de Física y Matemáticas en la Universidad de Michoacán, México. Trabaja en esta Universidad desde 1983. Del 2000 – 2004 realizó el Doctorado en el Cinvestav-IPN. En 1997, Máster en Educación de Matemáticas en la Universidad del Estado de Morelos, México. Y obtuvo la Licenciatura en Física y Matemáticas en la Universidad de Michoacán, México, en 1985. Del 2009 a la actualidad, ha sido Profesora de diversas materias del Máster en Educación Matemática de la Universidad de Michoacán, Morelia, México. También imparte clases en la Facultad de Física y Matemáticas, Universidad de Michoacán, Morelia, México. Autora de diversas publicaciones, la mayor parte de ellas en el ámbito de su actual línea investigación: Desarrollo de software educativo, Uso de nuevas tecnologías en educación matemática.

La historia de la Educación Matemática en México se remonta al año de 1970 cuando en respuesta a las necesidades de una reforma educativa promovida por el gobierno en 1968, un grupo de matemáticos del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) fueron contratados para desarrollar nuevos materiales curriculares y nuevos textos para la escuela primaria.

Como recuerda Filloy (2006), el grupo consideraba, en general, que "los profesores necesitan saber más matemáticas", pero, al adentrarse en el problema, algunos investigadores se dieron cuenta de que era importante comprender a fondo cuestiones educativas más generales, así como los problemas específicos de la enseñanza de las matemáticas, las causas de algunas deficiencias de los profesores y las implicaciones de las tendencias de la época conocidas como «Nuevas Matemáticas».

Las primeras investigaciones de este grupo se centraron en la relación de la historia de las matemáticas con el diseño curricular. Esto, conjuntamente con la producción de los textos que se les había pedido, condujo a los primeros trabajos de investigación del país.

De esta primera experiencia nació en 1975 el primer grupo de investigación denominado *Matemática Educativa* dentro del Cinvestav, formado por once profesores.

Conscientes de las necesidades del país, estos investigadores concentraron gran parte de su trabajo en la investigación y en la formación de profesores, pues, en esa época, la mayor parte de quienes enseñaban matemáticas no tenían formación especializada como profesores.

El primer programa de Maestría en Matemática Educativa, ligado al departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del mismo Cinvestav, nació justamente en 1975 con esa perspectiva.

Para los años 80s, los programas de Educación Matemática empezaron a consolidarse a lo largo del país. En esos años se contaba ya con al menos 16 grupos establecidos en varias instituciones, más de 300 graduados en cursos de especialización y programas de investigación, al menos 5 revistas establecidas, y presencia y participación continua de investigadores mexicanos en conferencias y eventos nacionales e internacionales, además de participación visible en las sociedades internacionales de esta disciplina. Como era de esperarse, la investigación se consolidó en paralelo y los temas de investigación, los marcos teóricos y las metodologías de investigación se diversificaron y se especializaron (Waldegg, 1998).

La investigación en Educación Matemática siguió fortaleciéndose y en 1992 se abrió formalmente un programa de doctorado y el grupo de investigación se convirtió en el Departamento de Matemática Educativa (DME) dentro de la misma institución, independizándose del Departamento de Investigaciones Educativas, aunque en este último departamento continuó la investigación en esta rama del conocimiento.

En estos años, además, empezó a florecer la investigación en departamentos de Matemáticas y de Educación de otras muchas universidades y se diversificaron aún más las áreas y los temas de investigación.

La expansión de la educación matemática en México

No se puede negar la influencia que los grupos del Departamento de Matemática Educativa y del Departamento de Investigaciones Educativas han tenido en el desarrollo de la Educación Matemática como campo del conocimiento de México y en Latinoamérica.

En este momento, el Cinvestav concentra al grupo más grande de investigadores especializados en la disciplina. Sin embargo –y a pesar de que, en la mayoría de las universidades del país, la Educación Matemática como área de investigación, no ha recibido un apoyo determinante– la investigación en centros y facultades de universidades de diversos estados del país y del Distrito Federal a crecido de manera constante y, en algunos de ellos, podemos encontrar grupos sólidos que juegan un papel muy importante en la producción de investigación de reconocida calidad.

La investigación en esta área del conocimiento, la Educación Matemática, se ha visto beneficiada por la creación de nuevos programas, tanto de Maestría en Ciencias, como de doctorados en Educación Matemática en diversas universidades de todo el país. Estos programas cumplen también una función importante en el terreno de la formación de profesores de matemáticas para los distintos niveles educativos.

Una revista mexicana de investigación: ***Educación Matemática***

En 1988, nació la revista *Educación Matemática* como resultado de la fusión de varias revistas existentes relacionadas con la enseñanza de las matemáticas: Estas revistas eran: *Lecturas de Educación Matemática, Opera Prima, Matemáticas y Enseñanza,* y *Boletín Informativo,* publicadas por la UNAM, el Cinvestav, la Sociedad Matemática Mexicana y la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

La idea del equipo fundador de la revista, en 1988, era aunar esfuerzos de todas estas instituciones alrededor de un objetivo común: crear una revista, escrita en español, para publicar los resultados de la investigación en Educación Matemática en México y otros países, con el fin de hacer accesibles los resultados de esta tarea a una comunidad amplia de profesores e investigadores hispano parlantes.

Han pasado 23 años de la fundación de esta importante revista. Se puede decir que el propósito original se ha cumplido. La revista se ha convertido en una referencia obligada para investigadores de países de habla hispana; además, muchos investigadores en países donde no se habla español la han encontrado útil también.

La revista refleja el creciente interés por la investigación en Educación Matemática en los países de habla hispana, así como la amplia variedad de temas de investigación tratados por esta comunidad de investigación.

Los números recientes contienen trabajos de autoría de investigadores de más de veinte instituciones distintas de México y de quince países diferentes. Los trabajos abarcan un amplio abanico de áreas de investigación: desde las líneas de investigación tradicionales como la construcción del conocimiento matemático, la formación de profesores, la historia de la enseñanza de las matemáticas, el análisis riguroso de diseños experimentales y la enseñanza de conceptos específicos, hasta temas de investigación innovadores, como por ejemplo el conocimiento y el aprendizaje de las matemáticas por adultos, educación especial o asuntos relacionados con la cultura de la escuela o la relación entre el lenguaje y la escritura en el aprendizaje de las matemáticas.

Todos los artículos publicados en esta revista se revisan rigurosamente y, para realizar esta labor, se cuenta con el apoyo de investigadores nacionales e internacionales.

Una revista de investigación latinoamericana: ***Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa***

Como resultado de la formación de una comunidad latinoamericana interesada en la investigación en Educación Matemática, se creó el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y con él, la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime) como publicación oficial. La investigación mexicana jugó un papel importante en la creación de este importante comité internacional que une los intereses de investigación y de enseñanza de varios países. Esta revista publica artículos de investigación en varios idiomas: español, inglés, francés y portugués con el fin de llegar a un público más amplio.

¿Qué se ha hecho en México? Un vistazo…

El crecimiento en el número de investigadores en el país, ha significado una rápida acumulación de resultados interesantes e importantes. En 1992, se llevó a cabo, por primera vez, un esfuerzo para reportar el "estado del arte" en esta rama de investigación en México. El proyecto fue promovido por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa, una sociedad profesional que promueve la investigación en educación. Esta obra, coordinada por Waldegg (1992), incluye la descripción de 282 artículos publicados de investigación que habían aparecido, hasta ese momento, tanto en revistas nacionales como internacionales, además de la descripción de los resultados de tesis de doctorado escritas desde la creación del primer programa de este tipo.

Diez años más tarde, un nuevo esfuerzo de reporte del "estado del arte", esta vez coordinado por Ávila y Mancera (2003) conjuntamente con un grupo de colaboradores y promovido también por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa, mostró un enorme crecimiento en la investigación en Educación Matemática. Este reporte incluye la descripción de 483 publicaciones que aparecieron como libros, capítulos de libros, artículos con arbitraje en revistas internacionales y nacionales, así como los resultados de tesis de doctorado y maestría.

La investigación ha continuado en rápido crecimiento. No sólo han aumentado los grupos de investigación a lo largo del país, el número de publicaciones ha crecido enormemente. Los investigadores mexicanos son miembros activos de sociedades internacionales de Educación Matemática y participan en numerosas conferencias internacionales, aun cuando esta participación implica la necesidad de escribir y presentar en idiomas distintos al español.

Qué se ha logrado

Investigación al nivel de la escuela primaria

En la década pasada, los estudios sobre este nivel se enfocaron particularmente en el análisis del aprendizaje, en el desarrollo de diseños experimentales, en el estudio de las prácticas de enseñanza y los estilos de aprendizaje, así como en el análisis de recursos de enseñanza. El "estado del arte" del 2003 apuntó la necesidad de llevar a cabo investigación interinstitucional y de considerar temas importantes como el conocimiento de los profesores, el aprendizaje de las matemáticas a nivel preescolar, la formación de maestros, la medida y la evaluación del aprendizaje de las matemáticas y las matemáticas utilizadas por las culturas indígenas del país y su relación con la matemática en la escuela.

A través de la investigación que se hizo para nuestra publicación del 2008 (Trigueros, Sacristán y Guerrero, 2008) se encontró que la investigación en Educación Matemática continuó creciendo y fortaleciéndose en las áreas que se reportaron anteriormente, pero aparecieron nuevas áreas de investigación relacionadas con el aprendizaje de conceptos específicos, el análisis de recursos de enseñanza, la resolución de problemas, probabilidad y proporción. Además, surgieron algunos proyectos de investigación interinstitucional, que siguen creciendo. Es posible apreciar actualmente un cuerpo amplio de investigación sobre profesores, su conocimiento y la forma en que utilizan la tecnología en la enseñanza.

Algunas líneas de investigación emergentes estudian el impacto del uso de la tecnología, las evaluaciones nacionales e internacionales y la introducción a la escuela de algunos resultados de la investigación sobre el uso de matemáticas en las culturas indígenas.

Tal vez lo más importante a resaltar de la investigación en Educación Matemática a este nivel escolar, es que los resultados de la investigación han impactado las prácticas escolares a través del diseño curricular, de la elaboración de textos y de otros materiales educativos basados en resultados de investigación.

Investigación al nivel de educación media

Ya en el estudio de Ávila et al. (2003), se mencionaban que los estudios relacionados con las matemáticas en este nivel habían cambiado su foco de interés de los procesos de aprendizaje y el análisis curricular, a la enseñanza de conceptos específicos y a la evaluación. La investigación en esos años se orientaba principalmente al estudio del aprendizaje del álgebra, en particular al concepto de variable, al uso de tecnologías y a la modelación. Estos autores señalaron la emergencia de nuevas líneas de investigación relacionadas con el aprendizaje de aritmética, el aprendizaje de la probabilidad y el uso de la tecnología, particularmente dentro del ámbito de los proyectos nacionales y en el marco del curriculum recientemente introducidos. Los autores de dicho reporte apuntaron la necesidad de enfocar estudios en áreas que no habían recibido atención, particularmente, los estudios sobre profesores y los estudios sobre telesecundaria, un programa de enseñanza a distancia, específico para este nivel, basado en lecciones en video desarrolladas para escuelas situadas en comunidades rurales remotas y en algunas áreas suburbanas.

La investigación en este nivel creció considerablemente después del 2002. Algunas áreas de investigación, en particular las relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza del álgebra, los números negativos, el uso de tecnología y la solución de problemas continúan desarrollándose y han tenido un impacto importante a nivel internacional. Otras áreas, como la relacionada con la evaluación, se empiezan a consolidar y nuevas líneas han aparecido, en particular aquéllas relacionadas con el conocimiento de los profesores y con sus prácticas en la escuela, con los estudios de género y con la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

La investigación interinstitucional ha crecido, dominada todavía por los investigadores del Cinvestav y los mismos grupos en universidades en distintos estados del país, pero han surgido también proyectos interinstitucionales entre distintas universidades que trabajan principalmente en evaluación.

Es importante mencionar que en este nivel educativo emergieron dos grandes proyectos relacionados con la introducción de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Ambos fueron diseñados tomando en consideración los resultados de la investigación nacional e internacional: El proyecto *Educación Sec 21* y el programa *Enseñanza de Matemáticas con Tecnología* (EMAT). A través de estos proyectos se diseñaron actividades de enseñanza basadas en resultados de investigación, se llevaron a cabo talleres de formación de profesores en todo el país y se instrumentó la colaboración entre investigadores internacionales y nacionales, al tiempo que entre instituciones educativas como Cinvestav, ITAM, ILCE, la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) y la Secretaría de Educación Pública. Estos proyectos tuvieron un fuerte impacto en todo el país y promovieron importantes estudios sobre evaluación, además de un gran número de trabajos de investigación en esta área.

Investigación en el nivel preparatoria

De acuerdo al reporte de Ávila et al. (2003), durante los años 1990 y el principio de este siglo, la investigación en Educación Matemática a este nivel creció en forma continua. La mayor parte de los estudios se concentró en el aprendizaje de los alumnos, considerando, por lo general, conceptos específicos del curriculum, y en la solución de problemas. Al principio de la década de los años 2000, algunas líneas de investigación parecían estar recibiendo mayor atención, por ejemplo, el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría ligada en particular a la demostración, así como la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística. Aparecieron también estudios en áreas novedosas como el razonamiento matemático, las actitudes y concepciones de los alumnos, el uso de la tecnología y el conocimiento matemático de los profesores.

Si bien la investigación creció en la década reportada, los editores comentaron que era necesario acrecentar la investigación sobre profesores, sobre prácticas escolares y sobre evaluación.

Contrariamente a lo que ocurre en niveles educativos más elementales, la presencia del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav y de la Universidad Pedagógica Nacional en estas investigaciones, no es tan fuerte. Hay mayor interés en otras instituciones, probablemente porque muchas universidades tienen programas de preparatoria y porque en las universidades hay interés de tener mayor noción sobre el conocimiento que los estudiantes tienen cuando llegan a la universidad. Por otra parte, en este nivel hay muchos menos estudios interinstitucionales.

En los años recientes, el desarrollo de la investigación sobre este nivel continúa. Los trabajos de investigación siguen creciendo de manera constante. El aprendizaje del álgebra y del cálculo son todavía las áreas que reciben mayor interés de los investigadores, pero, al igual que en los niveles elementales de educación, se han consolidado líneas de investigación que apenas aparecían en los estudios anteriores, como por ejemplo, en el área de geometría, los estudios sobre demostración han sido complementados por estudios sobre el papel de la tecnología en su enseñanza y sobre el aprendizaje de conceptos específicos. Hay además más estudios sobre la cultura del salón de clase.

Por otra parte, en los otros niveles se cuenta con mayor número de investigaciones sobre evaluación, en este nivel han aparecido muy pocas.

Investigación en el nivel universitario

El número de publicaciones y la calidad de las investigaciones sobre Educación Matemática en la universidad ya habían crecido considerablemente durante los años 1990; sin embargo, la investigación estaba claramente dominada por los estudios relacionados con el aprendizaje del cálculo de una variable. Aparecían algunos estudios sobre el aprendizaje del cálculo de dos variables, ecuaciones diferenciales, análisis, probabilidad, estadística y variable compleja. Se contaba también con unos cuantos estudios cuyo foco eran los recursos utilizados por los profesores en su enseñanza, en particular sobre el diseño y uso de programas de computadora y sobre prácticas de aprendizaje. En ese entonces, se planteó la necesidad de acercarse más a las prácticas de enseñanza y de ampliar el abanico de conceptos a estudiar, así como considerar el uso de la tecnología en la clase con mayor profundidad.

En los últimos años, se encontró (Trigueros, Sacristán y Guerrero, 2008) que la investigación en este nivel aumentó considerablemente. Se fortalecieron las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo, de probabilidad y estadística, pero aparecieron claras líneas nuevas de investigación. Probablemente el tema más importante que emergió en los últimos años fue el relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal, seguido por la investigación en matemáticas aplicadas y las necesidades de matemáticas de programas de licenciatura distintos al de matemáticas. Se ha hecho también más investigación en el uso de la modelación y la solución de problemas en la enseñanza, en ecuaciones diferenciales y en la demostración. Sigue, sin embargo, sin haber suficientes estudios sobre las prácticas en el salón de clase y sobre el uso de la tecnología.

Enseñanza de matemáticas a los adultos

Antes del 2002, esta área de la Educación Matemática contaba con pocos esfuerzos de investigación. Es importante notar, sin embargo, que a pesar de ello, los materiales didácticos utilizados para la enseñanza de las matemáticas a adultos, estaban basados en los resultados de dichas investigaciones. Recientemente, ha habido un creciente interés, particularmente de los investigadores de la Universidad Pedagógica Nacional, en la investigación de las formas en que los adultos aprenden matemáticas y sobre cuáles son sus conocimientos; sobre la etnomatemática; sobre las prácticas matemáticas de las culturas indígenas; y sobre el uso de las matemáticas aprendidas en la escuela en la práctica.

Estos esfuerzos, si bien importantes, no son todavía suficientes como para impactar de manera más global en los problemas educativos de este sector de la población en nuestro país.

Contribuciones mexicanas al conocimiento en matemática educativa

Los investigadores mexicanos han hecho importantes contribuciones sobre lo que sabemos actualmente acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La investigación mexicana se inició, como se mencionó anteriormente, con un énfasis en los estudios epistemológicos e históricos sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos específicos, áreas en las que la investigación mexicana fue puntera. Esa tradición no se ha perdido, pero ha sido complementada con otros tipos de estudios que se basan en diferentes marcos teóricos y metodológicos, algunos de ellos elaborados por los propios investigadores mexicanos y otros en los que investigadores mexicanos han contribuido sustancialmente a su desarrollo.

Entre las contribuciones mexicanas reconocidas ampliamente, tanto a nivel nacional como internacional, destacan los estudios sobre pre-álgebra, el aprendizaje de los números negativos y sobre los usos de la variable en el álgebra elemental, el aprendizaje de las ecuaciones y el uso de la tecnología en la enseñanza del álgebra. También hay contribuciones importantes en la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental, particularmente en las áreas relacionadas con el aprendizaje de los números naturales y las fracciones.

En general, la investigación mexicana sobre el uso de la tecnología ha tenido un fuerte impacto. Los investigadores mexicanos han participado como invitados en varias reuniones internacionales donde se han discutido aspectos importantes del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Se han desarrollado en el país, modelos pedagógicos que han sido comparados positivamente con los de otros países y se han desarrollado acercamientos innovadores a la forma de enseñar con tecnología y a la forma de evaluar el aprendizaje cuando la tecnología se usa en la clase. Algunos de estos proyectos han merecido premios internacionales.

Otra área en la que la investigación mexicana ha contribuido de manera importante es en el área denominada como Pensamiento Matemático Avanzado. Aquí es importante mencionar los estudios sobre el aprendizaje del cálculo, de las ecuaciones diferenciales y del álgebra lineal que han sido pioneras en esta área de investigación. Asimismo, la investigación en resolución de problemas puede contarse también entre las áreas que han hecho contribuciones importantes. Más recientemente, nuevos desarrollos en el área del uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas empiezan a jugar un papel importante en la escena internacional. La participación de los investigadores mexicanos en la comunidad internacional ha sido reconocida a través de nominaciones a tomar parte en los comités directivos de las más importantes organizaciones internacionales y en el aumento en la cooperación en proyectos internacionales de investigación colaborativa. Es de destacar el papel de los investigadores mexicanos en el contexto de las comunidades de América Latina e Iberoamérica. México juega un papel central en la organización de reuniones y en la publicación de revistas.

Retos para el futuro

A pesar de su crecimiento y de los éxitos obtenidos, quedan retos que la comunidad de investigadores mexicanos en Matemática Educativa debe enfrentar. Uno de ellos es la publicación de las investigaciones. Muchas de ellas se presentan a nivel de conferencias nacionales o internacionales, pero no llegan a publicarse en revistas de investigación. Los investigadores apoyan en la producción de materiales de enseñanza, en la formación de profesores y en la educación de adultos, pero los resultados de esas acciones no se reflejan en proyectos de investigación que permitan evaluar sus resultados y difundirlos a comunidades más amplias.

Otro desafío a enfrentar es la creación de una sociedad de investigación en Educación Matemática que aglutine a los investigadores nacionales y amplíe las oportunidades de intercambio de resultados y opiniones acerca de los problemas educativos del país y que permita la evaluación de los productos de investigación, y la formación de grupos destinados a analizar problemáticas específicas. Estas acciones son necesarias para dar un sentido de identidad, para apoyar en la formación de nuevos investigadores calificados y para crear estándares de calidad. Todo ello es necesario para acrecentar el crecimiento de la Educación Matemática como área de investigación.

Una preocupación adicional es la necesidad de mayor interacción entre la comunidad de investigación y los tomadores de decisiones. La creación de plazas para investigadores jóvenes es indispensable. Sin su contribución es imposible promover ideas nuevas y mantener la dinámica de la comunidad. Muchos talentos se pierden cuando investigadores formados dejan el campo de la Educación Matemática por la necesidad de encontrar un trabajo en otra área dada la falta de oportunidades de empleo en las instituciones nacionales de investigación y enseñanza.

Referencias Bibliográficas

Ávila, A. & Mancera, E. (coords.) con Block, D., Carvajal, A., Eudave, D., Aguayo, L. & Camarena, P. (2003). *El campo de la Educación Matemática 1993–2001. Parte I*. En A. D. López y Mota (coord.) Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje, vol. 1, p.p. 35-353. Colección: La Investigación en México 1992–2002, núm. 7. México: COMIE, SEP, CESU.

Trigueros, M, Sacristán, A.I. & Guerrero, L. (2008). *Research in Mathematics Education in Mexico: achievements and challenges*. En Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (eds) Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, vol. 1, p.p. 219-231. México: Cinvestav-UMSNH.

Waldegg C., G. (1998). *La Educación Matemática: ¿Una disciplina científica?* Colección Pedagógica Universitaria 29, p.p. 13-44. Accesado el 5 de Abril, 2008 de http://www.uv.mx/cpue/colped/N_29/la_educación_matemática.htm.

Educación Matemática. México: Santillana. http://www.santillana.com.mx/educacionmatematica/

Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México: Clame. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Revista Mexicana de Investigación Educativa. México: COMIE. http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php

LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES Y LAS REPRESENTACIONES EN LA CLASE DE LAS MATEMÁTICAS

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

Universidad Pedagógica Nacional de México

Resumen

En este artículo se presenta un análisis del papel de las representaciones en la clase de matemáticas como una herramienta mediadora de la acción sobre las ideas representadas. La discusión se centrará principalmente en las nuevas formas de representación cuando se usan Tecnologías Digitales y se ejemplificará con algunos recursos interactivos. Se presentarán algunas reflexiones sobre cómo estas nuevas posibilidades de interacción permiten a los alumnos, reflexionar sobre los conceptos involucrados en los fenómenos observados y propician la emergencia de elementos que favorecen avanzar hacia una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres. Licenciada en Matemáticas y Computación y Especialista en Educación Matemática por la Universidad de Pamplona (Colombia). Maestra y Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Cinvestav (México). Obtuvo el Premio Arturo Rosenblueth a mejor tesis doctoral en Ciencias Sociales y Humanidades del Cinvestav (2005). Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores. Docente de matemáticas e informática en secundaria y preparatoria; de matemáticas y didáctica de las matemáticas en pregrado y posgrado. En la actualidad es profesora e investigadora de tiempo completo de la Universidad Pedagógica Nacional de México. Ha participado en el desarrollo y revisión de recursos digitales y pedagógicos de matemáticas. Participa en proyectos de investigación en enseñanza de las matemáticas y TIC; es responsable de un proyecto financiado por CONACYT/SEP/SEB. Es coautora de artículos y capítulos de libros de investigación así como libros de texto de matemáticas para primaria y secundaria.

En Educación Matemática, algunos profesores e investigadores estamos interesados en comprender las relaciones entre el conocimiento y su apropiación en condiciones especiales. Por ejemplo, cómo se desarrollan estos procesos de apropiación en los espacios educativos escolarizados. Las representaciones semióticas son el medio ideal para comunicar imágenes, ideas, conocimientos, que posee un sujeto. Cuando el cognoscente produce o interpreta una representación, se ponen en juego diferentes elementos del entendimiento como la percepción, la memoria, la imaginación y la creatividad. Aunque las representaciones deberían comunicar una idea de manera inequívoca, quien las interpreta lo hace desde su propio marco conceptual que no necesariamente coincide con el autor de la representación. Eso mismo ocurre siempre con los signos: no se les puede conceptualizar al margen del intérprete. Este fenómeno de divergencia interpretativa sucede frecuentemente en los procesos educativos matemáticos. El aprendizaje se apoya en un acto comunicativo entre profesor y estudiante. El mentor utiliza las representaciones para expresar las relaciones, propiedades y conceptos de los objetos matemáticos en cuestión.

Desafortunadamente, prevalece una ruptura en la comunicación en el aula, debido a las diferencias determinadas por los campos de experiencias de cada individuo respecto a los objetos de conocimiento a tratar. Por ejemplo, en el caso de la geometría, aunque el profesor razone sobre el objeto geométrico, muchos estudiantes lo hacen a partir del dibujo. Consideran que casi pueden leer en él las propiedades del objeto representado. No toman en cuenta que se requiere de la vinculación entre la representación y la teoría.

En una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se van estructurando en la interacción entre el sujeto y el concepto que se está formando. Dado que las representaciones cumplen una función esencial en la construcción de conceptos, es decir, las personas les asignan significados para la comprensión de las estructuras matemáticas, entonces, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático; de ahí el interés que tienen para la investigación en educación matemática (Hitt, 1998; Duval, 1999; 2003). El desarrollo constante de Tecnologías Digitales ha permitido que los estudiantes (y profesores) expandan su campo de exploración y construcción de evidencias sobre las proposiciones matemáticas a estudiar. Estas nuevas herramientas cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales, y amplían el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar (NCTM, 2000). Cuando los alumnos aprenden a usar estas nuevas herramientas, pueden también considerar los casos en los que las representaciones y técnicas usadas en la tecnología digital difieren de las convencionales; son *representaciones interactivas/ejecutables*.

En este artículo, se centrará la discusión en el papel de las representaciones en la clase de matemáticas, analizando algunos recursos tecnológicos que posibilitan la vinculación de diferentes representaciones y por ende, sus potencialidades en la construcción de conceptos matemáticos. Se reconoce que este tema en particular, en Educación Matemática, tiene diferentes posturas teóricas que si bien algunas se complementan, otras tienen puntos de divergencia. Esto es, la noción de representación es algo complejo y ha generado múltiples estudios (Rico, 2000; Bosch, 2000; Duval, 1998, 2003). Sin embargo, es un tema sobre el que se requiere seguir discutiendo y reflexionando.

La estructura de este artículo está divida en tres secciones: primero, un panorama breve de las tecnologías para la humanidad; se continuará con una descripción de las representaciones en matemáticas, y se finalizará, con ejemplos de Tecnologías Digitales en los que se analizan sus potencialidades para la enseñanza de las matemáticas, en particular para la educación primaria. Estos materiales han sido desarrollados en México y forman parte de un proyecto nacional llamado Enciclomedia (www.enciclomedia.edu.mx).

Tecnologías: materiales y simbólicas

Desde sus orígenes, el hombre como especie, ha vivido su desarrollo evolutivo acompañado de herramientas creadas por él mismo. Durante este proceso, se ha hecho plausible la capacidad para mejorar cada logro anterior y posibilitar así, una evolución tecnológica.

A la capacidad de las personas de generar conocimiento se la identifica como cognición. Uno de los principales rasgos de la especie humana ha sido la fabricación de herramientas. Es un proceso mental (experimentación, observación y deducción), en el cual la experiencia y la capacidad de relacionar unos conocimientos con otros, han generado elementos que no están en la naturaleza y, por lo tanto, no se pueden descubrir.

Desde las primeras hachas de piedra hasta el alfabeto, las herramientas se han constituido en generadores de un desarrollo más acelerado hacia la evolución de la especie humana. En otras palabras, las herramientas han sido la principal causa de cambio y evolución (figura 1).

Figura 1. Diferentes herramientas que ilustran parte de la evolución humana.

Como lo plantea Moreno (2002), cuando se pasó de la herramienta material a la idea que la había generado, se inició el paso de las herramientas materiales a las simbólicas. El problema al que se enfrentó después era cómo conservar la idea, reproducirla y mejorarla. El acto material se debía convertir en un esquema de acción: *poder recrear el mundo a un nivel virtual*. En consecuencia, la evolución de los medios para comunicar, procesar y registrar la información fueron, en gran medida, los impulsores del desarrollo de la especie humana. En especial, la oralidad y la escritura (*Ibidem*).

La capacidad de simbolización y abstracción (*memoria virtual*) ilustra cómo la mediación instrumental va cambiando las relaciones de la especie con su entorno. El signo se convierte en un instrumento de mediación, sirve para explicar la realidad.

En particular, la escritura modificó la forma de pensar, ya que convirtió el conocimiento tradicional (oral) en un objeto externo, accesible y sujeto a inspección. También permitió tener, por primera vez, un sistema externo de almacenamiento de datos fácil de usar que compensaba las considerables limitaciones de la memoria humana (Moreno, L., 2002).

La escritura se convirtió, entonces, en una especie de *memoria virtual* que permitía hacer público el pensamiento, y las ideas se pudieron considerar, comentar y criticar. Es así como se genera una nueva cultura, la escrita, donde se separa el pensador del pensamiento y, como consecuencia, el texto se convierte en objeto de reflexión y de exploración, un mediador de ideas.

> "La escritura proyectó el sonido sobre el espacio textual y propició un redireccionamiento hacia medios no-biológicos para que sirvieran de soporte a los procesos mentales de razonamiento." (Moreno, L., 2002), p. 7)

El proceso evolutivo ha sido un desarrollo artificial que venció, en gran medida, la presión de la selección natural. Dicha evolución refleja el cambio de entornos (del físico al sociocultural), y la transición de las tecnologías materiales a las simbólicas. La tecnología simbólica también evoluciona y, por ende, las formas de representación de las ideas. De ahí surgen, de manera natural, los siguientes cuestionamientos: ¿la dificultad para aprender una idea depende de la tecnología de la representación utilizada?, ¿existe una relación entre la complejidad conceptual y la tecnología de la representación?

> "En cada momento de desarrollo social y cultural, las sociedades han recurrido a tecnologías nuevas no sólo para hacer mejor lo que ya sabían hacer sino, más importante, para hacer cosas nuevas." (Op. cit., p. 5)

Pero no son los productos tecnológicos por sí solos los que producen los cambios, sino lo que se hace con ellos. Es decir, el agente de cambio social y cultural es *la acción mediada por la tecnología*.

Representaciones en Matemáticas

La humanidad dio un salto enorme cuando empezó a usar los sonidos, los gestos y los símbolos para referirse a objetos, cosas, conceptos. Amplió la referencia simbólica. En otras palabras, el sonido, el gesto o cualquier otro símbolo no son la "cosa" misma, sino que están en lugar de ella, la representan y por tanto, *la ac-*

ción cognitiva está mediada por esa herramienta. Tales posibilidades de representación muestran una facultad de la memoria e ilustran cómo la mediación de las herramientas va transformando las relaciones del hombre con su entorno. El poder de la cognición se origina de su capacidad de abstraer y de representar. Si la representación es adecuada, entonces pueden emerger nuevas experiencias y reflexiones. En este sentido, lo importante es que se puede razonar tomando como punto de partida las marcas o símbolos. Entonces, la producción de representaciones es crucial para que los seres humanos asimilen lo que les es externo y puedan comunicar los resultados de esas asimilaciones a otros.

Los sentidos representan los objetos tal como se manifiestan, mientras que el intelecto los representa tal y como son. El intelecto y la sensibilidad que se posee sólo pueden determinar objetos si actúan conjuntamente intuición y concepto.

Una acepción al respecto es la de la NCTM (2000, p. 71) la cual considera que la representación es tanto el proceso como el producto (resultado).

> "Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas, para que los alumnos comuniquen sus enfoques, sus argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización. Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación."

En otras palabras, la representación no es una mera imagen para reflexionar, sino que toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones. Ejemplos de representaciones en matemáticas son las expresiones simbólicas, dibujos, enunciados, gráficos y otras notaciones usuales, propias de ellas, ya que cada una tiene un contenido, cuyo significado se puede establecer y evaluar. Tales contenidos son objeto de estudio en matemáticas (Rico, 2000).

Las teorías de aprendizaje deben partir de un principio fundamental: la cognición está mediada por las herramientas utilizadas, ya sean materiales o simbólicos (Wertsch, 1993; citado por Moreno, 1999). El aprendizaje implica la construcción de representaciones. El individuo debe construir representaciones de los fenómenos observados (o de un objeto matemático) para que el mundo (matemático) tenga sentido. En consecuencia, las representaciones se convierten en herramientas mediadoras para la comprensión, puesto que para generarlas, el individuo debe tener la capacidad de encontrar una estructura común de los fenómenos en distintos contextos. Es así como las representaciones pueden ayudar a los sujetos a organizar su pensamiento; a representar las ideas matemáticas de manera más concreta y asequibles a la reflexión.

En el mundo material, los objetos son percibidos directamente por los sentidos, pero, ¿qué sucede en matemáticas? Para hablar de los "objetos" matemáticos, sólo se puede hacer a través de alguna de sus representaciones, pues no hay un acceso directo a ellos mediante la percepción o por medio de una experiencia directa. Es determinante que el sujeto llegue a comprender que un mismo objeto puede tener diferentes representaciones y que cada una "es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa" (Duval, 1998, p. 185). A continuación se presentan tres ejemplos que dan cuenta de la importancia de reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones (figura 2):

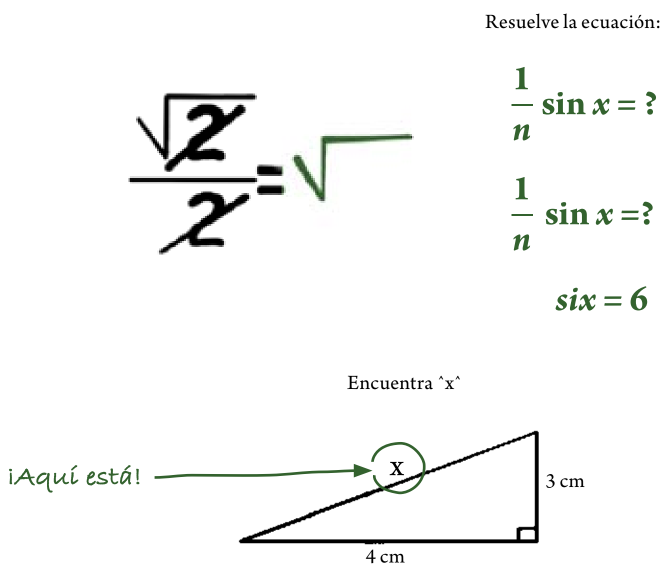
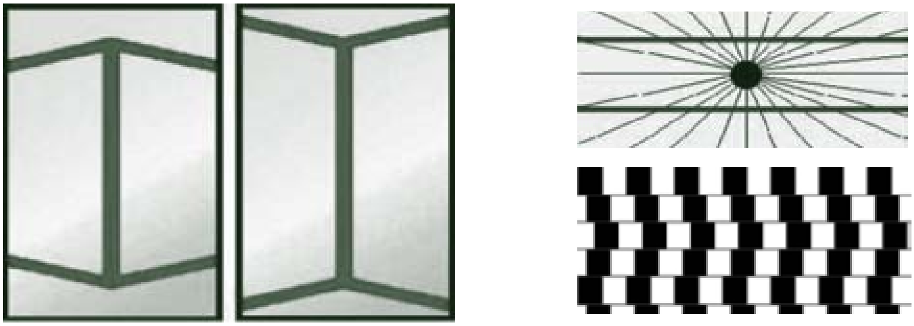


Figura 2. Imágenes retomadas de www.concursoeducared.org.pe

Pero, ¿sucede lo mismo en otro tipo de representaciones?, ¿cómo inciden las representaciones en la percepción y por ende en el razonamiento?

Las siguientes representaciones (figura 3), comúnmente denominadas ilusiones ópticas, permiten hacer este análisis.



a) b)

Figura 3. Diferentes ilusiones ópticas: a) ¿Cuál es la línea más larga?; b) ¿Qué relación hay entre las rectas de la figura?

Las imágenes anteriores pueden generar conjeturas, en algunos casos incorrectas como resultado de la percepción inmediata. Sin embargo, haciendo uso de conocimientos matemáticos (en particular, propiedades geométricas) se pueden contradecir las conjeturas generadas por la ilusión y obtener razonamientos correctos. Para el caso de las dos figuras b), las rectas son paralelas.

Por ejemplo, en la geometría euclidiana, el dibujo es la única representación semiótica que se tiene del objeto geométrico. El estudiante cree, injustificadamente, en el contexto del papel y lápiz, que puede decodificar el objeto geométrico a través del dibujo que lo representa. Pero ¿qué sucede cuando el dibujo no está bien hecho? Algunas investigaciones realizadas con papel y lápiz (Mesquita, 1998; Pluvinage, 1998; Sandoval, 2001) y en ambientes digitales (Sandoval, 2009) han mostrado que los estudiantes establecen relaciones perceptivas más que estructurales, debido a que la enseñanza que han recibido se ha basado en el reconocimiento y la aproximación de las formas. En este trabajo, las relaciones perceptivas se interpretan como aquellas que se establecen a partir de los datos sensibles de una representación (los que se obtienen a través de los sentidos). Las relaciones estructurales son aquellas que se establecen a partir de los elementos constitutivos del objeto representado y las relaciones entre ellos enmarcados en la teoría geométrica, es decir, las características geométricas inmersas en dicha representación.

El siguiente ejemplo (figura 4) ha sido retomado de Pluvinage (1998) y se ha aplicado a estudiantes en todos los niveles educativos, encontrándose el mismo tipo de respuestas, aunque en diferentes porcentajes. Las diferencias argumentativas entre las relaciones estructurales y perceptivas al resolver este problema, amén de ilustrar cómo se usa por parte de los estudiantes, es la percepción como un medio de deducción. En este artículo sólo se presentarán los resultados con estudiantes de preparatoria y secundaria en México.

En este esbozo, hecho a mano, están dibujados:

- Un rectángulo ABCD
- Un círculo con centro en A pasando por D.
- El círculo corta al lado AB en el punto E.

¿Qué longitud tiene el segmento EB?
¿Cómo obtuvo la respuesta?

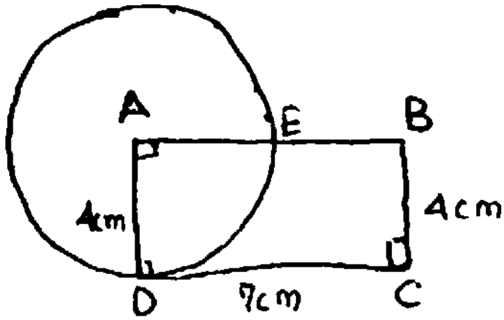


Figura 4. La percecpción como un medio de deducción.

El problema se aplicó a un grupo de 31 alumnos de primer año de bachillerato con edad promedio de quince años. Estos alumnos habían hecho por lo menos un curso de geometría en la secundaria. Las respuestas obtenidas a la pregunta *¿cuál es la longitud del segmento EB?* fueron:

	Respuestas Matemáticas. Correctas	Respuestas Perceptivas. Incorrectas	
Respuestas encontradas	3	3.5	4
Porcentajes	32%	62%	6%

Tabla 1. Resultados de las respuestas al problema.

El mismo problema se aplicó a estudiantes de secundaria como parte de una competencia regional realizada por la Secretaría de Educación Pública de un Estado de la República en México, vía Internet. El enunciado del problema era igual al anterior, la única diferencia es que se expusieron cuatro opciones de respuesta: 3 cm, 3.5 cm, 4 cm y Ninguna de las anteriores, para que el alumno seleccionara la correcta. Los resultados obtenidos de un total de 13,930 alumnos de los tres grados de secundaria, se presentan a continuación (figura 5):

Figura 5. Resultados globales a este problema.

Los resultados anteriores muestran, nuevamente, la fuerte tendencia de los estudiantes hacia un razonamiento apoyado únicamente en la percepción. Sólo el 18% logró, supuestamente, establecer las relaciones estructurales necesarias para obtener la respuesta correcta. Los datos aquí presentados son únicamente cuantitativos.

Un análisis de estos resultados, grado por grado, es el siguiente: en el primer grado de secundaria, la edad promedio de los estudiantes era de 12.75 años; en el segundo grado, de 13.71 años y en tercer grado, de 14.67 años de edad. Se encontró que la tendencia a establecer relaciones perceptivas es similar en los tres grados, 18%. El programa curricular de los tres grados contempla el estudio de algunas figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios, rombos y círculos) tanto en su construcción como en el estudio de sus propiedades. Estos resultados hacen comprensible que la confusión entre el dibujo y el objeto geométrico sea un problema presente en diferentes niveles educativos.

La enseñanza tradicional de la geometría euclidiana sigue privilegiando, en gran medida, el nivel perceptivo, enfocándose casi exclusivamente al reconocimiento y construcción de figuras, al cálculo de áreas y volúmenes para ejercitar las fórmulas. Entonces, se evidencia una necesidad de que los estudiantes desarrollen, dentro del pensamiento geométrico, habilidades para construir y manipular representaciones mentales con el propósito de distinguir entre dibujo y objeto geométrico y, en consecuencia, identificar características y relaciones, de acuerdo con el problema planteado. Es decir, lograr que el alumno pueda comprender una propiedad geométrica, independientemente de la representación utilizada para ilustrarla. Es aquí donde las Tecnologías Digitales posibilitan crear un puente entre lo perceptivo y lo teórico, como varias investigaciones así lo señalan (Mariotti et al., 1997; Arzarello et al., 1998; Gardiner y Hudson, 1998; Mogetta, 2001; Olivero, 2003). Estas herramientas permiten la retroalimentación inmediata a las acciones realizadas, lo que posibilitan la reflexión sobre las representaciones obtenidas, la construcción y validación de conjeturas, así como la construcción de argumentos que apoyan o refutan dichas conjeturas. Sin embargo, el papel del profesor sigue siendo central en el proceso de negociación de significados y en la construcción de las propias actividades en las que se hacen uso de TD.

Tecnologías digitales: ¿Nuevas representaciones?

Al igual que el microscopio para la biología, el telescopio para la astronomía, o el compás y regla para las matemáticas, las Tecnologías Digitales (TD) se han convertido en instrumentos mediadores, tanto cognitivos como epistemológicos. Dichas herramientas suministran un amplio abanico de representaciones de un objeto matemático y de relaciones matemáticas. Por ejemplo, permiten construir una figura geométrica, una gráfica o una tabla de valores de una función. Y lo más importante, admiten pasar de una a otra representación, lo cual supone una extraordinaria herramienta en Educación Matemática. Las tradicionales representaciones analíticas y de carácter estático se han visto ampliamente enriquecidas con estas nuevas herramientas. A continuación, se presentarán dos ejemplos de recursos interactivos desarrollados en México para estudiantes y profesores de Educación Primaria.

Dados. Un recurso para aprender sobre la predicción y el azar

El siguiente recurso permite realizar tiradas de dados de 1 en 1, de 10 en 10 y de 100 en 100. Este proceso de simulación (figura 6) permite que el análisis se enfoque en la parte gráfica (frecuencia) y se vincule con el número de tiradas para predecir qué número tiene mayor probabilidad de ganar. De igual manera se puede trabajar con dos y tres dados así como con dados cargados. Con este interactivo se tienen resultados en el aula que han mostrado las potencialidades de este recurso gracias a la mediación del profesor (Trigueros, Lozano y Sandoval, 2005; Sandoval y Lozano, 2007).

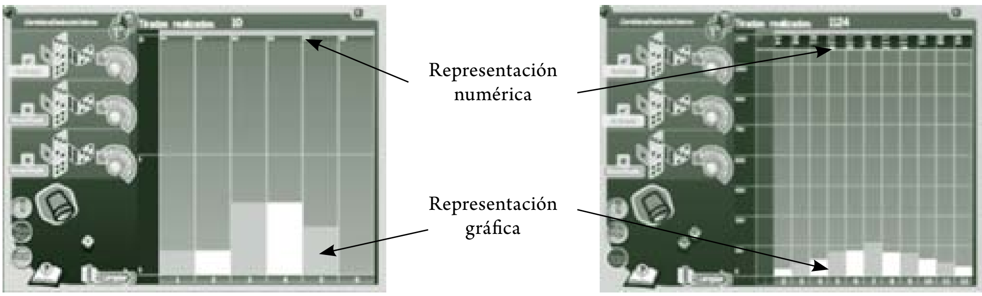


Figura 6. Simulador de lanzamiento de dados.

¿Dónde está el número? Un juego interactivo de la recta numérica

El propósito es que los estudiantes se familiaricen con el orden en enteros, decimales y fracciones y la densidad de los números. En interactivo presenta un eje numérico con dos números que indican un intervalo. El usuario debe encontrar un número que esté entre los dos números dados. Se obtiene diferente puntaje por acierto, dependiendo del número que elija: con enteros positivos obtiene un punto, con un número decimal obtiene dos puntos, si es una fracción mixta, el programa da tres puntos. Para el caso de números negativos, el interactivo dará 4 puntos por cada acierto. El máximo de equipos que pueden jugar son cuatro. El interactivo permite distintas modalidades para jugar, así como distintos niveles de dificultad y hace posible la retroalimentación inmediata a las acciones del usuario validando la respuesta que se ingrese. En caso de que la respuesta sea incorrecta, inmediatamente se cede el turno al siguiente equipo en juego. Al finalizar, se obtiene un ganador y si hay más equipos, también se define el lugar de los otros participantes.

El recurso está diseñado de tal manera que el intervalo original, al dar un número contenido en éste, queda divido en dos sub-intervalos, el programa elige el más pequeño. Esto lleva al usuario de manera natural a usar números decimales y fraccionarios. Para los grados de quinto y sexto de primaria, se abordan los racionales positivos.

En el aula ha mostrado potencialidades, a pesar de sus propias restricciones, pero es la intervención del profesor el que posibilita la discusión matemática sobre las acciones realizadas (Sandoval y Jimenez, 2011). Por ejemplo, en la figura 7 se observa que todos los equipos están usando números mixtos independientemente de si la parte fraccionaria es propia o impropia. Cabe destacar que cuando usan fracciones, el interactivo divide el segmento de recta en tres sub-intervalos y el usuario debe, además, seleccionar en cuál de ellos está el número elegido por él. En la imagen, la alumna elije el número 250 ½ entre el 168 11/10 y 332 5/5.

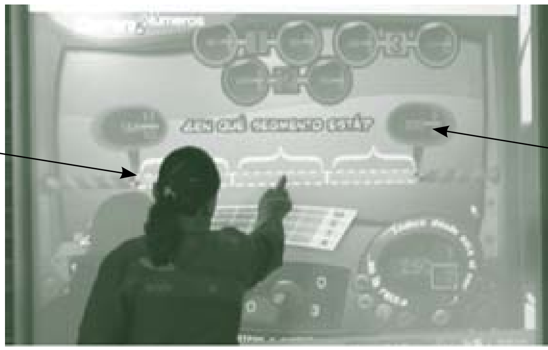


Figura 7. Alumna seleccionando en cuál de los tres segmentos se encuentra el número elegido por su equipo.

Un cuestionamiento natural es si las representaciones generadas por estas TD son las mismas o, por lo menos, análogas a las generadas con lápiz y papel. En el caso de la geometría dinámica, la *representación* de un objeto geométrico *es dinámica*, a diferencia de los presentados en los libros o en un pizarrón. A continuación se presenta un ejemplo de la construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto dado usando un programa de Geometría Dinámica. Una manera de construirla es usar la propiedad de perpendicularidad con el radio de la circunferencia. La recta tangente es la perpendicular que pasa por el punto dado. *El arrastre* se convierte entonces, en una manera de verificar si una construcción mantiene las relaciones geométricas y no sólo es producto de una impresión visual. Este recurso de la geometría dinámica puede favorecer la distinción entre dibujar y construir. Esta retroalimentación solo es posible con TD, el lápiz y el papel o el pizarrón no interactúan con el sujeto sobre estas acciones. La imagen siguiente (figura 8) podría ser correcta en un ambiente de papel y lápiz (es una representación estática).

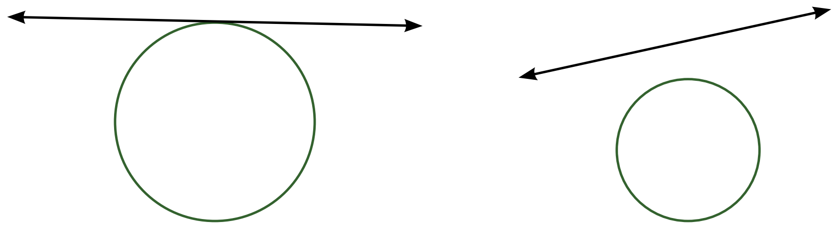


Figura 8. Dibujar la tangente a una circunferencia.

Mientras que ésta otra (figura 9), efectivamente evidencia una explicitación de una propiedad geométrica que se mantiene invariante: la de tangencia.

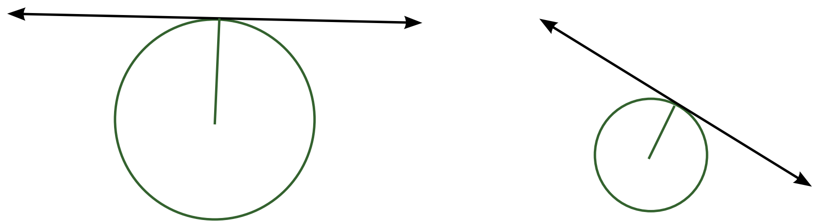


Figura 9. Construcción de la tangente a una circunferencia.

Lo anterior, ilustra como con la Geometría Dinámica, en particular, se puede "agarrar" un punto (libre) de una construcción, arrastrarlo por toda la pantalla y explorar las relaciones que se conservan después de la acción. La actualización de las transformaciones, a causa del movimiento, es en tiempo real.

Un supuesto del que se parte es que la imagen dinámica (senso-motora) que forma el individuo está estrechamente ligada con el tipo de herramienta que utilice. Al tener que hacer la construcción anterior, el sujeto está más cerca de la definición formal y, por ende, la experiencia que internaliza el sujeto es distinta.

En suma, las TD producen representaciones diferentes: *representaciones ejecutables.* El nuevo sistema de representación permite tener acceso tanto a la representación de un objeto como a las acciones con el objeto. En otras palabras, lo que se manipula se encuentra más cerca del objeto conceptual que de un dibujo.

En las *representaciones ejecutables* (Moreno y Lupiáñez, 2001; Santillán, 2002; Moreno y Waldegg, 2004) se exterioriza no sólo la memoria sino diversas capacidades cognitivas, por ejemplo, graficar, hacer operaciones con números, corregir ortografía, gramática. Podemos decir que las representaciones ejecutables hacen ciertas acciones por el sujeto y, por tanto, éste adquiere un nuevo papel, el de explorar, investigar, interpretar lo que visualiza y manipula en la pantalla y así, puede establecer conjeturas para luego validarlas. Las *representaciones ejecutables* tienen una característica que las diferencia de las demás: *procesan las representaciones* (Santillán, 2002).

Esto nos lleva a que el uso de TD conlleva una reestructuración cognitiva puesto que requieren también del aprendizaje de una sintaxis. Es posible que la enseñanza contribuya al proceso de internalización de las herramientas externas, ofrecidas por el ambiente a la construcción del significado del concepto matemático. Como lo plantea Laborde (2004), el diseño del programa mismo afecta la construcción de éstos, incluso el conocimiento matemático también está inmerso en ellos. Los conocimientos matemáticos de los usuarios son, por lo tanto, cruciales para ejercer un control del manejo de la herramienta.

Reflexiones finales

En la enseñanza y en los textos se ha dado mayor énfasis a ciertas representaciones geométricas que muestran "mejor" una situación o hecho geométrico. Por ejemplo, una representación de un triángulo con una base horizontal es más típico que otro sin tal base. Pero la pregunta que se genera es: ¿qué consecuencias tiene en el aprendizaje?

Como se ha mencionado a lo largo de este artículo, las representaciones generadas con TD proporcionan un campo de exploración que no es factible con las representaciones con lápiz y papel: **Representaciones ejecutables.** Estas representaciones están controladas por la teoría inmersa en la programación del software, esto es, controladas por el universo matemático interno que está programado en el procesador central de la computadora. Con las TD se tienen formas de representación dinámicas que pueden generar una reestructuración en la clase de matemáticas; cambia la localización del conocimiento. Ya no sólo reside en el profesor, sino también en la máquina. Lo más interesante es que se genera una interacción instantánea y la comunicación es bidireccional. Existe un diálogo personalizado de manera recíproca entre el alumno y la máquina. El uso de estas herramientas proporciona otro sentido a las actividades que se efectúan en la clase. Exigen, al profesor, un diseño que le permita al alumno descubrir las propiedades y utilizar la máquina para validar un aspecto de la teoría que se esté trabajando. Por lo que:

- El uso de variedad de tecnologías en el aula permite al alumno interactuar de diferentes maneras con los fenómenos que estudia.
- Las posibilidades de interacción permiten al alumno reflexionar sobre los conceptos involucrados en los fenómenos y propician la emergencia de elementos para avanzar hacia una mejor comprensión de los conceptos.

Sin embargo, la integración de TD en la enseñanza ha sido concebida, por unos, como la solución para evitar los problemas materiales a los estudiantes y permitirles examinar solamente sus problemas conceptuales. La situación no es así de simple, dado que las herramientas introducen problemas de manipulación y nuevas preguntas en cuanto a la resolución de tareas planteadas a los estudiantes (Laborde, 2004). Los procedimientos de resolución en un problema dependen de las herramientas disponibles: por ejemplo, hacer cálculo con o sin calculadora, trazar un cuadrado en papel cuadriculado, o sobre un papel en blanco con escuadra y regla graduada, o con programas de Geometría Dinámica (Cabri, Geogebra, etc).

Ahora bien, solucionar una actividad matemática, en un ambiente tecnológico, requiere dos clases de conocimiento: el matemático y el instrumental. Sin embargo, los significados que construye un sujeto están contextualizados en la experiencia fenomenológica y su proceso de descontextualización, esto es, una evolución en los significados requiere de la construcción social en la clase, con la guía del profesor (Mariotti, 2001).

Referencias bibliográficas

Arzarello, F.; Micheletti, C.; Olivero, F. y Robutti, O. (1998). *Dragging in cabri and modalities of transition form conjectures to proofs in geometry. PME XXII Stellenbosch* (2) p.p. 32-39.

Bishop, A. (1992). *Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización.* Antología en Educación Matemática. Cinvestav-IPN. México, p.p. 29-41.

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática*. IV Simposio SEIEM (Huelva), España. http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm

Drijvers, P. (2002). *Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. ZDM* 34 (5) p.p. 221-229.

Gardiner, J. y Hudson, B. (1998). *The evolution of pupils' ideas of construction and proof using hand–held dynamic geometry–technology. PME XXII Stellenbosch* (2) p.p. 337-344.

Hitt, F. (1998). *Visualización Matemática, Representaciones, Nuevas Tecnologías y Curriculum*. Revista Educación Matemática 10 (2). Grupo Editorial Iberoamérica. México, p.p. 23-45.

Laborde, C. (2004). *Instrument et processus d'instrumentation. M2-EIAHD UE 3.* Université Joseph Fourier, Grenoble, p.p. 1-8.

Laborde, C. y Laborde, J-M (2011). *Interactivity in dynamic mathematics enviroments: what does that mean?* Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics, ATCM. Mathematics and Technology, LLC: Bolu, Turquía

Mariotti, M. (2001). *Introduction to Proof: The mediation of a Dynamic software environment*. Educational Studies in Mathematics 44. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p.p. 25-53.

Mariotti, M.; Bartolini, M.; Boero, P.; Ferri, F. y Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*. En *PME21*. Lathi, Finland, (1) p.p. 180-195.

Mesquita, A. (1998). *On conceptual obstacles linked with external representation in geometry*. Journal of Mathematical Behavior 17(2), p.p. 183-195.

Mogetta, C. (2001). *Argumentative processes in problem solving situations: the mediation of tools*. PME25 (3) p.p. 375-382

Moreno, L. (2002). *Cognición y herramientas de mediación*. Documento de trabajo del Seminario de Doctorado Investigación III.

Moreno, L. y Lupiañez, J. (2001). *Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas*. En XXX, *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro, p.p. 291-300. Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología: Una visión integral para el maestro*. Aula XXI, Santillana, México.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston. VA: NCTM.

Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment*. PhD thesis. University of Bristol.

Pluvinage, F. (1996). *Diferentes formas de razonamiento matemático*. Investigaciones en Matemática Educativa. Editorial Iberoamérica. México, p.p. 77-91.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. IV Simposio SEIEM. Huelva, p.p. 1-13.

Sandoval, I y Jimenez, E (2011). *The integration of interactive resources in the teaching of mathematics in primary education in Mexico*. Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics, ATCM. Mathematics and Technology, LLC: Bolu, Turquía.

Sandoval, I. (2001). *Visualización y Razonamiento Geométrico*. Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Sandoval, I. (2009). *La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico*. En Revista Educación Matemática, vol. 21 (1), p.p. 5-27. Santillana. México.

Sandoval, I. y Lozano, D. (2007). *Enciclomedia: Una herramienta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria*. Investigaciones y propuestas sobre el uso de tecnología en Educación Matemática. Pantoja, R., Añorve, E; Cortés, J y Osornio, L. (Editores), vol. 1. Digitalizado en el Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán.

Santillán, M. (2002). *Mediación Instrumental con Calculadora*. Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Trigueros, M.; Lozano, M. y Sandoval, I. (2005). *Uso de un interactivo para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad a nivel primaria*. XVIII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Acapulco, Guerrero.

NUMERACIÓN MAYA

Elena de Oteyza de Oteyza

Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México

M. en C. Emma Lam Osnaya

Facultad de Ciencias .
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

La civilización maya ocupó una vasta zona geográfica que comprende, en la región de México, lo que actualmente son los estados de Yucatán, Campeche y la parte oriental de Chiapas y Quintana Roo y en Centroamérica, el área que ocupa Guatemala, incluyendo el Petén y parte de Honduras. Es claro que sin una herramienta matemática suficientemente poderosa y precisa como base, no hubiesen podido desarrollar cálculos astronómicos que perduraran a través de los siglos. Es necesario señalar que en la aritmética maya, no se requieren tablas de sumar, ni de restar, ni de multiplicar o dividir. El sistema de numeración maya era vigesimal. Utilizaban una notación posicional, como la que empleamos actualmente en nuestro sistema de numeración que es decimal, es decir, cada signo tiene un valor de acuerdo con la posición que ocupa en la representación del número. Los mayas utilizaban solamente tres signos para representar cualquier número imaginable. Estos signos son: el punto, la raya, y el caracol. En este trabajo se presenta una adaptación al sistema decimal, lo que permite obtener los beneficios de la aritmética maya con todas las ventajas que trae consigo, como un aprendizaje fácil, rápido y divertido para dominar las operaciones fundamentales mediante un método visual y manual.

Elena de Oteyza de Oteyza. Cursó la carrera de Matemáticas y la maestría en Ciencias en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Es profesora de tiempo completo de la Facultad de Ciencias desde 1979 y coautora de varios libros para estudiantes de educación básica y superior. Ha impartido numerosos cursos de actualización para profesores de nivel medio superior. Ha realizado traducciones de diversos textos de matemáticas. Ha sido jurado calificador en el IX Concurso Universitario Feria de las Ciencias y jurado para el Premio al Servicio Social Dr. Gustavo Baz Prada. Ha participado como ponente en diversos congresos de matemáticas tanto a nivel nacional como internacional. Fue jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias de 2001 a 2002. Actualmente es Profesora Titular A de la Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas de la UNAM.

Emma Lam Osnaya. Licenciada en Matemáticas y maestra en Ciencias por la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente es profesora de tiempo completo de la Facultad de Ciencias de la UNAM y coautora de varios libros para estudiantes de educación básica y superior. Colaboró de 1993 a 1998 en La Jornada Niños. Ha participado como ponente en varios congresos de la Sociedad Matemática Mexicana y de la asociación Nacional de Profesores de Matemáticas. Ha sido jurado calificador del Programa Jóvenes hacia la Investigación y sinodal en diversos exámenes profesionales. Fue secretaria de Asuntos de Personal Académico de la Facultad de Ciencias de 2001 a 2004.

Introducción

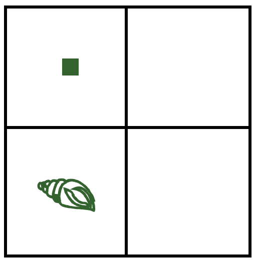
Una de las características de la numeración maya es que es un sistema posicional. Los números se escriben en forma vertical y se leen de arriba hacia abajo.

Usaremos los símbolos utilizados por los mayas en la numeración:

$\blacksquare = \mathbf{1}$ $\rule{2em}{0.15em} = \mathbf{5}$  **= cero**

En la numeración maya se escriben los primeros nueve números como:

Para escribir el número diez usamos dos niveles. Numeraremos los niveles de abajo hacia arriba. Así el primer nivel que es el más bajo, corresponde a la unidades y el segundo a las decenas. Colocamos en el tablero un punto y un caracol de la siguiente manera:



Representando así al número diez.

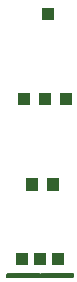
En la notación decimal desarrollada, escribimos por ejemplo el número 1328 como:

$$(1 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (8 \times 10^0)$$

Si ahora lo escribimos con notación maya veríamos:

$$1328 = \blacksquare \times 10^3 + \blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare \times 10^2 + \blacksquare\,\blacksquare \times 10^1 + \underline{\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare} \times 10^0$$

Que puede escribirse como:



1

3

2

8

Reglas:

1. Dos rayas en un nivel equivalen a un punto en el nivel inmediato superior.
2. Un punto en un nivel equivale a dos rayas en el nivel inmediato inferior.
3. Cinco puntos en un nivel equivalen a una raya en el mismo nivel.
4. Una raya en un nivel equivale a cinco puntos en ese nivel.

La suma

La comprensión del mecanismo de la suma se logra de manera sencilla. Todo el desarrollo es manual y visual. Sumar equivale a agregar y en nuestro caso significa copiar las figuras que vemos en cada nivel, para posteriormente transformar la cantidad obtenida de manera que podamos leer el resultado.

Entre las ventajas de este método destacan:

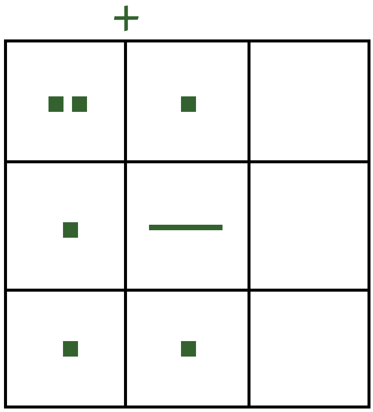
- El primer paso se realiza de manera manual sin necesidad del proceso de abstracción.
- Para escribir el resultado de manera que lo podamos leer, basta con hacer uso de las reglas 1 y 3.
- En el caso de la suma no hay que preocuparse por el “acarreo”.

Esto sienta las bases para que el proceso de abstracción que inevitablemente tendrá que adquirir el alumno, sea obtenido de manera natural.

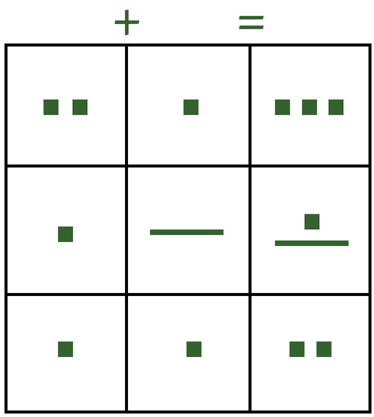
Este método permite que desde temprana edad el niño pueda realizar sumas de números muy grandes.

Veamos algunos ejemplos.

a) Efectuar la suma:



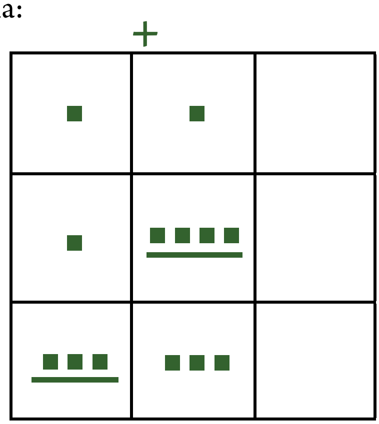
Se suma por niveles. Copiamos lo que hay en cada sumando.



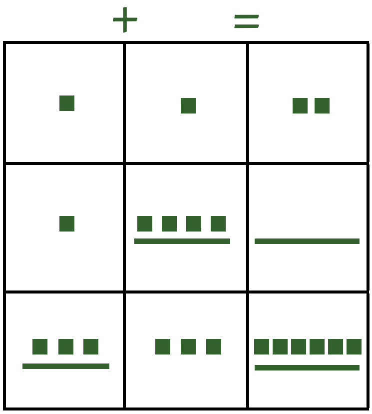
Comprobamos el resultado:

$$211 + 151 = 362$$

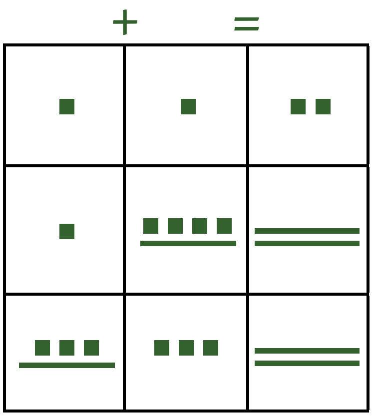
b) Efectuar la suma:



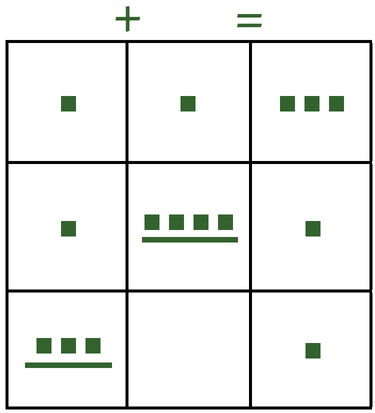
Copiamos lo que hay en cada nivel.



Usamos la regla 3: Sustituimos cada 5 puntos por 1 raya sin cambiar de nivel.



Usamos la regla 1, es decir, eliminamos 2 rayas en un nivel y ponemos 1 punto en el nivel inmediato superior.



Comprobamos que:

$$118 + 193 = 311$$

La resta

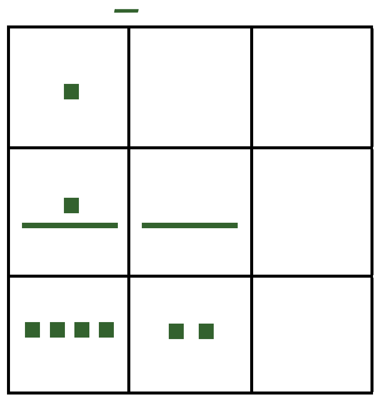
La resta es la primera operación en la que los métodos tradicionales presentan dificultades. El procedimiento aquí presentado, facilita la comprensión de la operación ya que el alumno quita manualmente las figuras que corresponden al número que desea restar.

En las restas en las que hay que pedir prestado, este método resulta muy sencillo. Pues con el uso de las reglas fundamentales se transforma el minuendo de manera que posteriormente sólo haya que quitar por niveles la figura que aparece en el sustraendo. El número obtenido después de efectuar la resta se puede leer sin tener que hacer ninguna transformación. La resta se efectúa de abajo hacia arriba.

Algunas veces en la resta tenemos que modificar el minuendo, para ello utilizamos las reglas 2 y 4.

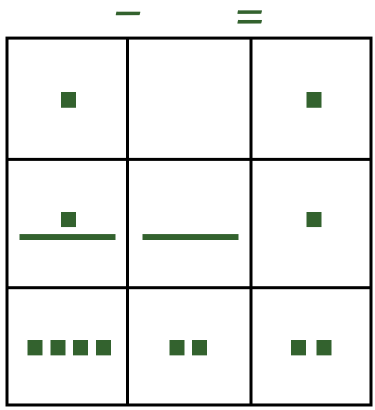
Veamos unos ejemplos.

a) Efectuar la resta:



Observamos que al colocar los números en el tablero es necesario alinear las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

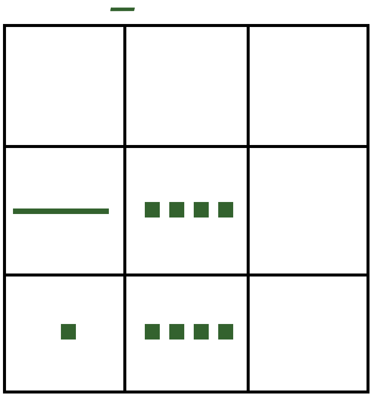
Se resta por niveles, empezando por abajo. Ponemos en la tercera columna del tablero lo que resulte de quitar a la columna de la izquierda lo que tenemos en la segunda. La regla es punto mata punto y raya mata raya.



Comprobación:

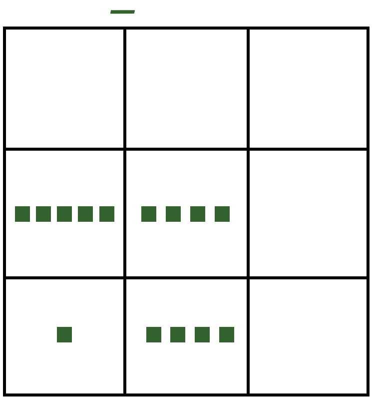
$$164 - 52 = 112$$

b) Efectuar la resta:

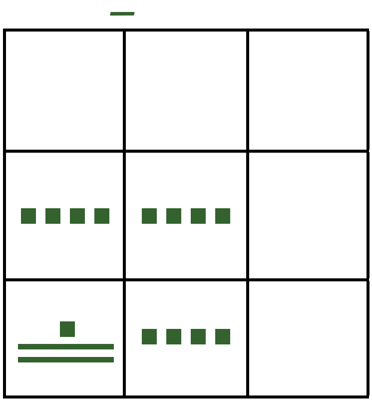


Observamos que no podemos realizar la operación en el primer renglón. En el segundo renglón tenemos una raya y cuatro puntos.

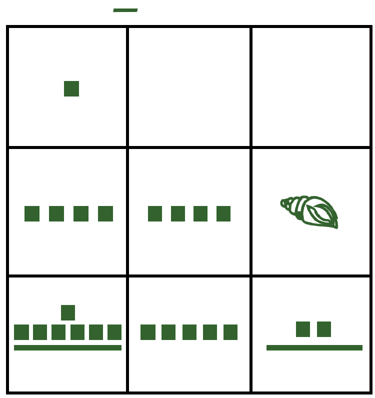
Lo primero que hacemos, utilizando la regla 4, es cambiar la raya por 5 puntos.



Ahora tomamos uno de estos puntos y lo pasamos al nivel inferior como 2 rayas, es decir, utilizamos la regla 2.



Finalmente cambiamos una de las dos rayas por cinco puntos y realizamos la operación.



Comprobación: 51 – 44 = 7.

La multiplicación

La multiplicación es, de todas las operaciones, la que más sorprende. Reproducir figuras en el tablero se logra de manera sumamente sencilla y la interpretación del resultado, que aparece en la diagonal, se consigue transformando el número obtenido usando las reglas fundamentales de la misma manera que en la suma.

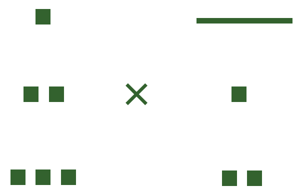
El método tradicional requiere no solo del conocimiento de las tablas de multiplicar sino además de cierta madurez que no todos los niños adquieren al mismo tiempo. Este método permite aprender a multiplicar sin conocer las tablas y al efectuar la operación de manera concreta el alumno puede llegar al proceso de abstracción de forma natural.

Una de las ventajas didácticas de enseñar la multiplicación con este método es que el alumno puede deducir las tablas de multiplicar, lo cual le facilitará el aprendizaje de las mismas.

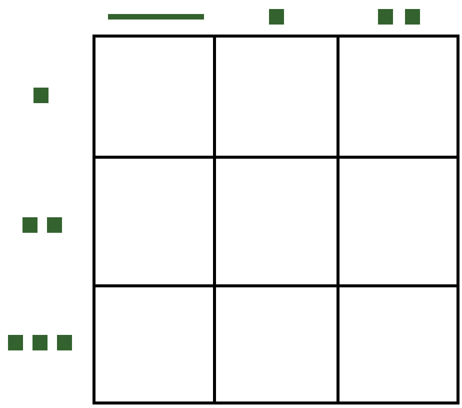
Este método de multiplicar puede ser utilizado aun con niños con problemas de aprendizaje ya que con él vencen un obstáculo, el de las tablas, mejorando su autoestima, esencial en el aprendizaje.

Veamos un ejemplo.

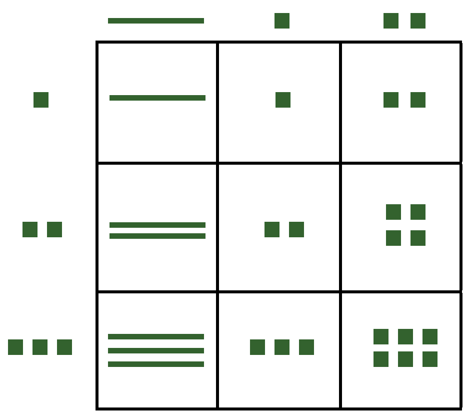
a) Efectuar la multiplicación:



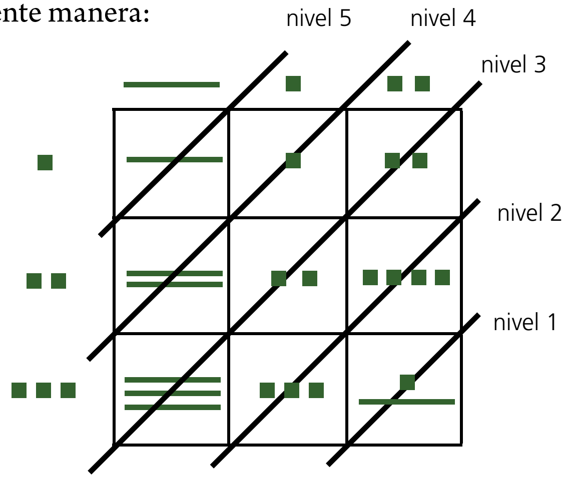
Para multiplicar dos números los colocamos fuera del tablero, uno del lado izquierdo y el otro arriba horizontalmente. Dibujamos una cuadrícula que tenga tantos renglones como niveles el primer número y tantas columnas como niveles el segundo.



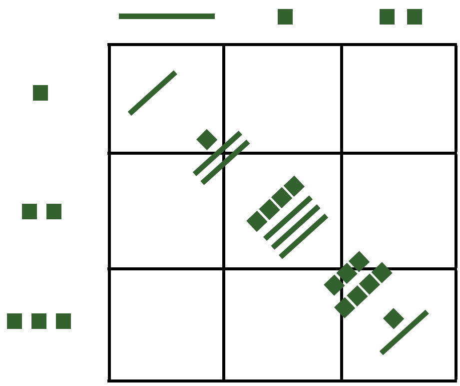
En cada casilla copiamos el símbolo que hay en la parte superior de esa columna, tantas veces como indica el símbolo de la parte izquierda en ese renglón:



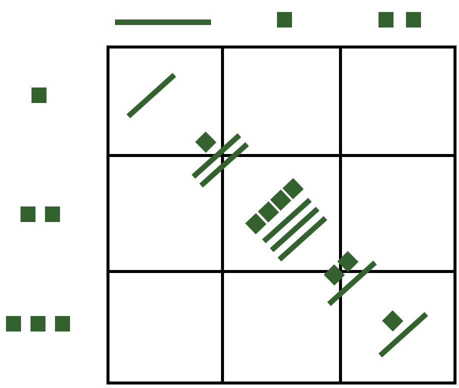
En la última casilla sustituimos 5 puntos por una raya y establecemos los niveles de la siguiente manera:



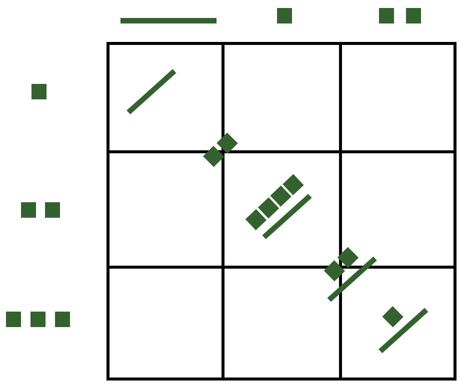
Es decir,



Usamos la regla 3, es decir, colocamos una raya por cada 5 puntos:



Ahora usamos la regla 1, es decir, dos rectas en un nivel equivalen a un punto en el nivel inmediato superior.



Comprobamos que 123 × 512 = 62976.

La división

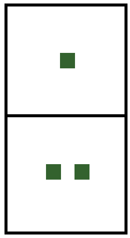
Al igual que con el método tradicional, la división con el método que presentamos se lleva a cabo mediante tanteo. De igual manera que en la multiplicación no se hace uso de las tablas de multiplicar.

La división se concibe como una multiplicación en la que se conoce uno de los factores y el resultado. Por la manera en la que se realiza la división es claro que se trata de la operación inversa de la multiplicación.

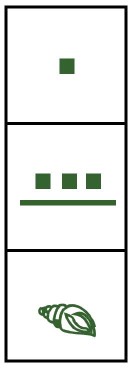
A pesar de que se utiliza el tanteo, éste es mucho más natural debido a que las figuras que aparecen en el nivel del dividendo se pueden descomponer como lo requiera la figura que aparece en ese nivel en el divisor.

a) Efectuar la división:

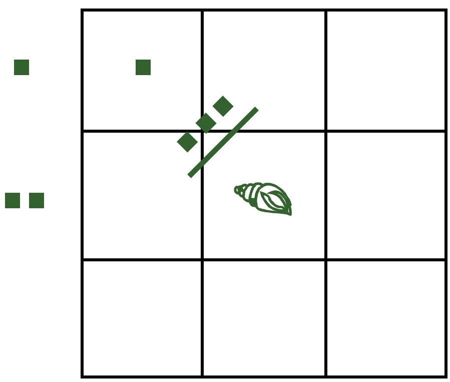
Estamos buscando un número que al multiplicarlo por:



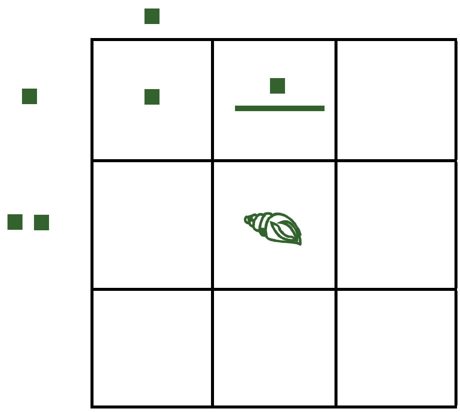
nos de:



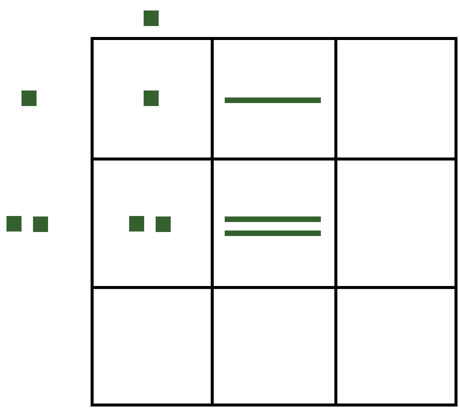
Como el resultado de la multiplicación lo vemos en la diagonal de una cuadrícula, entonces debemos colocar los números de la siguiente manera:



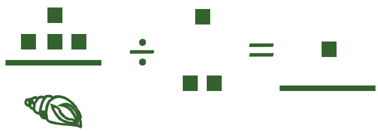
Arriba de la primera columna debe aparecer un punto ya que en la primera casilla aparece un punto, recuerda que en cada casilla debe verse lo que aparece arriba tantas veces como lo que tenemos a la izquierda. Ahora debemos verificar que en la casilla de abajo esté correcta la operación. Observa que de la cantidad que aparece en la diagonal podemos poner dos puntos en la casilla de abajo y el resto en la casilla de arriba a la derecha.



Como en la casilla de arriba a la derecha hay un entonces debemos colocar arriba el pero esto implicaría que en la casilla de abajo a la derecha tendría que haber un lo cual no puede ser porque hay un . Entonces bajamos el punto que está en la casilla de arriba a la derecha, como dos rayas a la casilla de abajo a la derecha. Intentamos completar la operación. Debemos colocar una raya arriba ya que en la casilla de arriba a la derecha hay una raya, y verificamos que lo que tenemos en la casilla de abajo a la derecha es correcto.



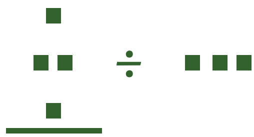
El resultado de la división es el número que aparece arriba de la cuadrícula. Es decir:



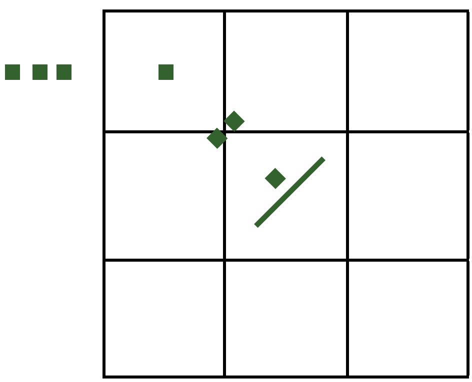
Comprobamos que:

$$180 \div 12 = 15$$

b) Efectuar la división:



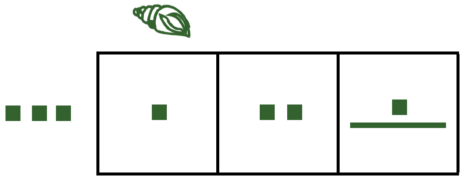
Colocamos los números en el tablero:



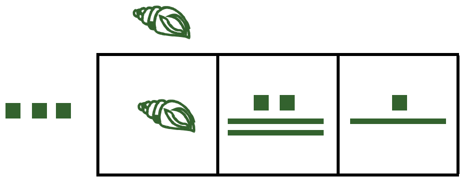
Como el número que se encuentra fuera del tablero sólo tiene unidades, entonces en cada nivel colocamos los números en la casilla de arriba.

En la primera casilla hay un sólo punto entonces arriba debemos colocar .

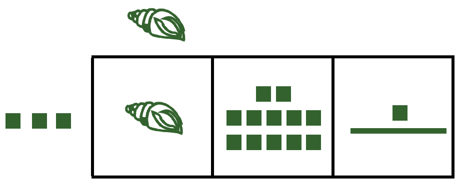
Es decir:



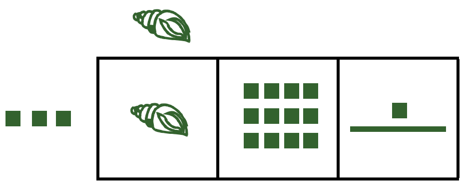
y pasar el punto al nivel anterior, pasa como 2 rayas y desaparece el nivel 3.



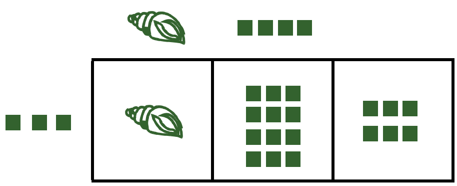
Reemplazamos las dos rayas por 10 puntos:



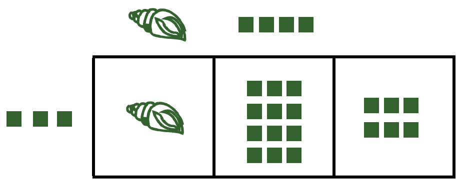
Hacemos tres grupos con los puntos de la segunda casilla.



Lo que siguiere colocar un ■■■■ arriba de la segunda casilla, y para continuar cambiamos la raya del primer nivel por 5 puntos:



y arriba de estos colocamos 2 puntos:



Así:

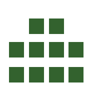
Comprobación: $126 \div 3 = 42$.

La raíz cuadrada

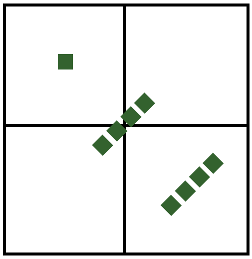
La raíz cuadrada surge de manera natural como una multiplicación en la cual tenemos el resultado y buscamos los dos factores que deben ser iguales. En este proceso buscamos siempre la simetría de las figuras en el tablero. Puesto que los dos factores deben ser iguales, la cuadrícula que debemos llenar debe ser cuadrada.

Esta manera de encontrar la raíz cuadrada de un número resulta ser mucho más sencilla que en el caso tradicional en el cual necesitamos un algoritmo que es bastante complicado y que se olvida fácilmente.

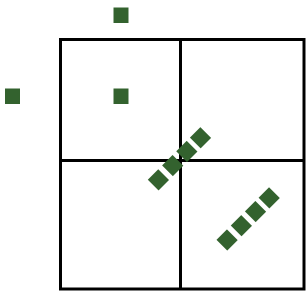
a) Encontrar la raíz cuadrada de:



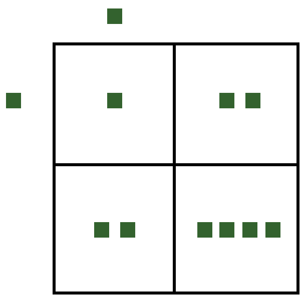
Colocamos el número dentro del tablero sobre la diagonal.



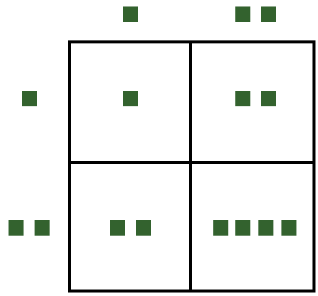
En la casilla correspondiente al tercer nivel aparece un punto, entonces debemos colocar un punto arriba y a la izquierda de la primera casilla.



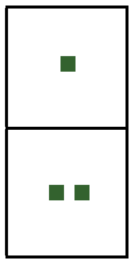
En el segundo nivel tenemos cuatro puntos que podemos colocar de la siguiente manera:



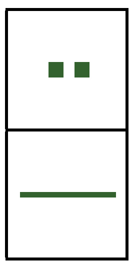
Lo cual nos obliga a colocar dos puntos arriba y a la izquierda de ese nivel.



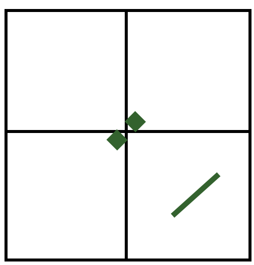
Verificamos que la última casilla esté correcta. Por tanto, la raíz buscada es:



b) Encontrar la raíz cuadrada de:

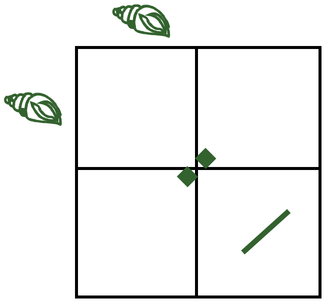


Colocamos el número de manera que las unidades queden en un cuadro.

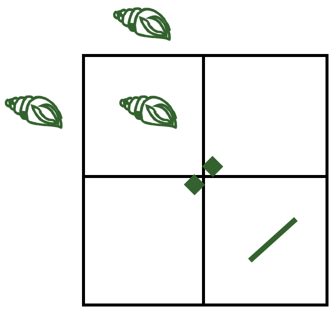


Lo que aparece dentro de la cuadrícula es el resultado de una multiplicación en la que los dos factores son iguales.

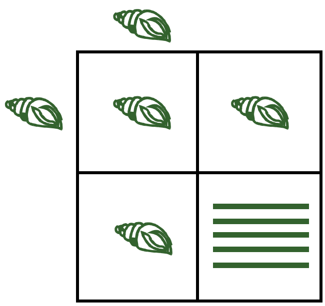
Puesto que el cuadro correspondiente al tercer nivel está vacío, entonces colocamos un  arriba y a la izquierda de la primera casilla.



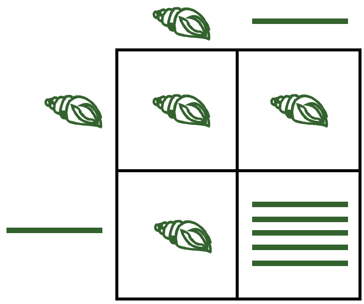
En el cuadro correspondiente al tercer nivel colocamos un  ya que es el producto de los dos factores correspondientes.



Como tenemos un  a la izquierda entonces en la primera fila todos los cuadros del tablero tienen que tener un  y también la primera columna tienen que tener  entonces bajamos los dos puntos al siguiente nivel como cuatro rayas



Para completar la operación debemos colocar una raya arriba y otra a la izquierda como se indica:



Por tanto, la raíz cuadrada buscada es: ——.

Referencias Bibliográficas

Abel, G. *Exploration of the Universe*. Holt Rinehart and Winston, Nueva York, 1969.

Calderón H. M. *La ciencia matemática de los mayas*. Editorial Orión, México, 1966.

Girard, R. *Los mayas*. Libromex Editores, México, 1966.

Lam, E., Magaña, L. F., de Oteyza, E. *Puntos, rayas y caracoles*. Litoral, México, 2005.

Landa, D. *Relación de las Cosas de Yucatán*. Editorial Porrúa, México, 1973.

Magaña, L. F. *Las matemáticas de los mayas*. Revista Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, núm. 19, 1990.

Morley, S. G. *La civilización maya*. Fondo de Cultura Económica, México, 1972.

ESTRATEGIAS MOTIVACIONALES EN EL APRENDIZAJE APOYADO POR TIC

Norma Elena Mendoza Zaragoza

Universidad Cristóbal Colón de Veracruz (México)

Laura Herrera Corona

Universidad Cristóbal Colón de Veracruz (México)

Resumen

Incluir estrategias que fomenten la motivación de los estudiantes durante el Diseño Instruccional (DI) de un curso, es crucial para tener éxito en los resultados del aprendizaje. El modelo motivacional ARCS de Keller, ha sido aplicado por docentes e investigadores en los procesos de enseñanza-aprendizaje, se ha comprobado que existe una íntima relación motivación-desempeño académico. Las categorías a considerar en el DI son: Atención, Relevancia, Confianza y Satisfacción. Cada uno de ellos juega un papel preponderante al conectar la instrucción a las metas del estudiante, proveyendo estimulación y niveles apropiados de reto. Los juegos, las actividades lúdicas y diversas estrategias de evaluación, son opciones efectivas para captar la atención de los estudiantes y lograr en ellos aprendizaje significativo.

Norma Elena Mendoza Zaragoza. Licenciada en Sistemas Computacionales; Especialidad en Educación Superior; Maestría en Tecnologías de Información, todas por la Universidad Cristóbal Colón (UCC), en Veracruz, México. Certificación de Microsoft Office Specialist. Grado Máster Instructor. Ha impartido cátedra, seminarios y talleres de titulación y asignaturas relacionadas con metodología de investigación y seminarios de elaboración de tesis de posgrado. Representante Institucional ante la ANUIES. Ha producido artículos de libros, ponencias e informes de investigación en el área de tecnología educativa para publicaciones reconocidas y congresos nacionales e internacionales: México, España, Estados Unidos, Canadá y Europa. En el 2007 obtuvo junto con su equipo de trabajo, el Premio ANUIES en Educación Superior a Distancia, en la categoría de Investigación y en Julio de 2008 obtuvo junto con este mismo equipo un reconocimiento como uno de los mejores trabajos presentados en el Congreso Mundial de Tecnología Educativa en Viena, Austria.

Laura Herrera Corona. Licenciada en Ciencias de la Comunicación por la Universidad de las Américas, Puebla. Maestra y Doctora en Comunicación Audiovisual con especialidad en Investigación por la Universidad Autónoma de Barcelona. Ha sido Directora de Publicidad en Studioware, S.A. de C.V. en la Ciudad de Puebla, Jefe del Departamento de Difusión Científica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Profesora Invitada en el Posgrado en Comunicación de la Universidad Veracruzana, Profesora de Planta en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México y Coordinadora del Área de Tecnología Educativa en la Universidad Cristóbal Colón. Ha producido artículos de libros, ponencias e informes de investigación en el área de tecnología educativa para publicaciones reconocidas y congresos nacionales e internacionales: México, España, Estados Unidos, Canadá y Europa. En el 2007 obtuvo junto con su equipo de trabajo, el Premio ANUIES en Educación Superior a Distancia.

Actualmente, se están aplicando modelos en la enseñanza apoyada por tecnologías, que buscan generar eficiencia en el proceso de aprendizaje a través de logros significativos en los estudiantes. En estos modelos se plantea el rol del docente, el del estudiante, el del asesor/tutor, y se establecen las funciones de los recursos tecnológicos y pedagógicos en la enseñanza. Existe abundante investigación al respecto. Sin embargo, modelos como el motivacional que se centra en la persona y en sus expectativas, sentimientos y acciones de motivación ha sido un tema de investigación reciente, de los últimos tiempos. El hecho de que la persona se sienta bien con lo que hace y la experiencia que vive satisfaga sus expectativas como persona, marca un punto clave para el éxito en sus estudios.

Lo anterior indica la relevancia de la motivación en el éxito o fracaso de un programa basado en e-learning, considerando que las personas cuando se encuentran cursando algún programa en esta modalidad son especialmente sensibles a la comunicación con sus compañeros, asesores y tutores, así como a los aspectos que aumenten o disminuyan su motivación. Es por ello, de suma importancia dar a conocer las funciones y el impacto de este modelo en la investigación de la enseñanza apoyada por TIC.

El Diseño Instruccional y su relación con la motivación

Se entiende por Diseño Instruccional (DI) a la combinación de teorías de aprendizaje usadas para desarrollar la instrucción utilizando diversos recursos. Está relacionado con el entendimiento, mejora y aplicación de métodos de instrucción.

Su propósito es inventar significados relevantes para obtener los resultados deseados. Al DI le concierne principalmente la prescripción de métodos óptimos para la instrucción, así como generar los cambios deseados en el conocimiento y las habilidades del estudiante.

Existen varias teorías y modelos que se relacionan con el Diseño Instruccional y que pueden ser bastante útiles para ponerlo en práctica, tales como: los Nueve pasos para la instrucción de Robert Gagne (1979: 246); el Modelo de diseño motivacional ARCS de John Keller (2006: 1); la Teoría de desplegado de componentes de Merrill y la Teoría de elaboración de Reigeluth (2007: 81); y el Constructivismo.

Lo que el Diseño Instruccional busca básicamente es tener un diseño más efectivo y eficiente, con métodos de instrucción más atractivos que mejoren el proceso formativo y eviten el desgaste, tanto del docente como del aprendiz.

Existe una clara relación entre el DI y el proceso educativo en general (figura 1), así como con el diseño curricular en particular (Reigeluth, 2007: 82).

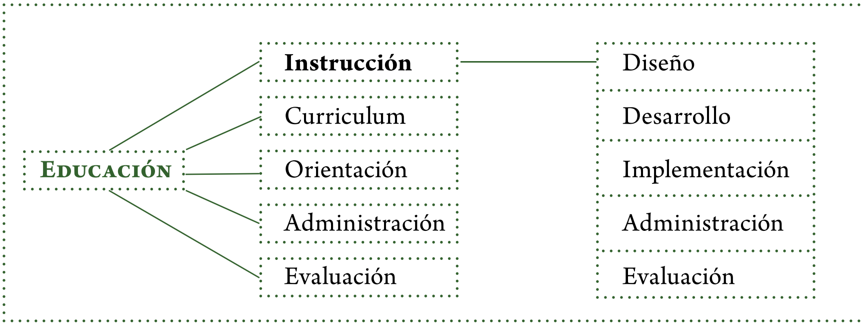


Figura 1. Mapa del Diseño Instruccional.

Numerosos estudios muestran que la motivación tiene un impacto significativo en los logros académicos de un estudiante, lo cual implica siempre una íntima relación motivación-desempeño académico.

Es por ello que el diseño motivacional de los cursos es esencial. Se distingue por conectar la instrucción con las metas del estudiante, proveyendo estimulación y niveles apropiados de retos; influyendo en la forma en que los estudiantes conseguirán exitosamente el objetivo, e incluso, dando seguimiento a las fallas, las cuales también se consideran elementos básicos de aprendizaje para poder subsanarlas a tiempo y que no se presenten en el futuro.

La motivación y el uso de la tecnología en el aprendizaje

La motivación consiste en el esfuerzo que una persona destina a perseguir un objetivo.

Tiene magnitud y dirección, es decir, puede ser más o menos intensa dependiendo del impacto que determinado estímulo tenga en la persona. Además, su camino es bien definido, así como la ruta que va a tomar dependiendo de las aspiraciones y necesidades del sujeto, quien claramente sabe hacia dónde dirigirse y cómo llegar ahí (ARCS model, 2006: 1). Para Keller (1983: 428), la Motivación es el grado de las decisiones que la gente toma y la cantidad de esfuerzo que les imprime.

Existen dos tipos de motivación: la intrínseca y la extrínseca. La primera se entiende como la motivación para involucrarse en una actividad, por la satisfacción que produce, más que por otros motivos externos. La motivación extrínseca, en cambio, se da cuando la conducta del aprendiz es inducida por otra persona o estímulo externo, y causa un deseo individual de lograr determinada meta (Ryan y Deci, 2000: 57).

Cuando se trata de cursos apoyados por tecnología, la motivación intrínseca juega un papel esencial, pues define la manera en que una persona es capaz de involucrarse con los contenidos didácticos que se le presentan. Los componentes que promueven la motivación intrínseca, de acuerdo con Lepper y Hodell (1989: 130), son el reto, la curiosidad, el control y la fantasía. Por otro lado, curiosamente Malone (1981: 354) habla igualmente del reto, la fantasía y la curiosidad.

Esto que acabamos de señalar, es importante de resaltar, pues a pesar de tratarse de autores y corrientes distintas, ambos coinciden en los elementos que deberían estar presentes en los contenidos de cualquier curso para ser capaces de estimular la motivación intrínseca.

A continuación se mencionan algunos elementos que intervienen en la presencia o ausencia de la motivación hacia una experiencia de aprendizaje apoyada por tecnología:

- Factores afectivos, sociales y cognitivos.
- El estilo de aprendizaje y las preferencias.
- Las necesidades personales de logro, control y ansiedad.
- El nivel de interacción en línea con otras personas.
- El nivel de interacción con el medio.
- El control sobre la plataforma virtual de aprendizaje, sus elementos y los materiales.
- La presencia de elementos interactivos como animaciones, demostraciones, simulaciones…

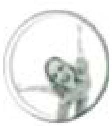
El Modelo Motivacional ARCS

Una de las innovaciones que ha sido tomada en cuenta de una manera muy enfática en los países del primer mundo cuando se trata de concebir y diseñar cursos apoyados por tecnología, es el Modelo Motivacional ARCS de Suzuki, y Keller (1988: 428), de la Florida State University. Dicho modelo considera que para diseñar un ambiente motivacional, es necesario tener un enfoque holístico de lo que es el Diseño Instruccional. Muchos investigadores motivacionales han sugerido numerosos modelos y técnicas para distintos ambientes de aprendizaje y saben que utilizando de forma adecuada las estrategias motivacionales, el estudiante puede adquirir un profundo compromiso cognitivo.

ARCS ha sido unos de los modelos motivacionales más conocidos, aplicados y validados por maestros e instructores en todos los niveles educativos. También ha sido validado por corporaciones, agencias de gobierno, y la milicia. Reportes de investigación en todo el planeta han mostrado su validez y su eficacia. Su poder reside en las teorías motivacionales y conceptos que aterrizan en la creación y selección de tácticas basadas en cuatro dimensiones (figura 2): Atención, Relevancia, Confianza y Satisfacción.

Atención. Para captar el interés de los aprendices y estimular la curiosidad por aprender.

Relevancia. Para alcanzar las necesidades personales y metas del aprendiz. Utilizando experiencia, valor actual, usos futuros, dinámicas.



Confianza. Para ayudar al aprendiz a desarrollar expectativas positivas de éxito.

Satisfacción. Todo aprendizaje debe ser recompensando o satisfactorio de alguna forma, sea por el logro de objetivos, elogios de un superior o mero entretenimiento.

Figura 2. Las cuatro dimensiones del modelo ARCS.

Cada una de las dimensiones del modelo ARCS a su vez se subdivide en categorías, las cuales se explican a continuación:

ATENCIÓN	RELEVANCIA	CONFIANZA	SATISFACCIÓN
Perceptual. Utiliza la sorpresa a la incertidumbre para obtener interés (novelas, sorpresa, incongruencia y eventos certeros).	**Orienta hacia metas.** Definir pre-requisitos y objetivos.	**Requirimientos de estudiante.** Definir objetivos, requisitos de desempeño y criterios de evaluación, ayudan al estudiante a estimar la probabilidad de éxito.	**Reforzamiento intrínseco.** El estudiante debe sentir que sus habilidades son útiles o beneficiosas, dando oportunidad de usar sus conocimientos en un ambiente de "la vida real".
Investigativa. Estimula la curiosidad con preguntas desafiantes o problemas a ser resueltos.	***Motive Matching.*** Explicar a los estudiantes cómo el nuevo conocimiento va a empatar con sus habilidades existentes. Utilizar dinámicas de logros, toma de riesgos, poder y afiliación.	**Oportunidades de éxito.** Si los estudiantes sienten que los objetivos son muy altos, su motivación decrece.	**Recompensas extrínsecas.** Cuando los estudiantes aprecian los resultados, se encuentran motivados a aprender .
Variabilidad. Materiales para los distintos estilos de aprendizaje, utilizando diversos métodos para presentarlas (videos, lecturas cortas, mini grupos de discusión).	**Familiaridad.** Utilizar lenguaje y ejemplos con los que el estudiante esté familiarizado.	**Control personal.** Los estudiantes deben sentir un cierto grado de control sobre su aprendizaje y su evaluación. Deben creer que el éxito es un resultado directo de su esfuerzo.	**Equidad.** No ser condescendientes con el estudiante sobre recompensando las tareas fáciles.

Tabla 1. Las dimensiones del modelo ARCS y las categorías que las componen.

Este modelo además, provee un enfoque sistemático de siete pasos para diseñar tácticas motivacionales en la instrucción:

1. Recolectar información del curso.
2. Recolectar información de la audiencia.

3. Analizar la audiencia.
4. Analizar el material existente.
5. Definir objetivos y evaluación.
6. Desarrollar el diseño preliminar.
7. Elaborar el diseño final.

Aplicación del modelo ARCS en un curso de Redacción

El modelo ARCS se implementó a través de un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) en el Sistema Escolarizado Abierto (SEA) de la Facultad de Ciencias de la Comunicación de la Universidad Veracruzana, región Veracruz. La plataforma utilizada fue *Moodle,* software para la implementación de cursos en *e-learning*. La Experiencia Educativa (EE) se titula: "Taller de redacción: crónica", en la que participaron veinte estudiantes. La información se procesó y se presenta de forma cualitativa, con la intención de recuperar las experiencias y comentarios textuales de los estudiantes.

Fomento a la motivación a través de DI, DM y AVA

La motivación es importante en cualquier modalidad, presencial, semipresencial o mixta. Cuando estamos hablando de un SEA, la motivación cobra especial importancia, pues las concentraciones presenciales son distantes en fechas, los tiempos de interacción maestro-estudiante, así como estudiante-contenidos son cortos. Con un AVA, un Diseño Instruccional (DI) estructurado y planificado de forma adecuada, en el que se vea incluido el Diseño Motivacional (DM), el aprendizaje significativo se alcanza.

A continuación se presenta la forma en que los elementos de ARCS fueron definidos a lo largo del curso y la manera en que se aplicaron:

- **Atención**. Se logró despertando la curiosidad de los aprendices y manteniendo su atención a través de la experiencia de aprendizaje. Utilizando estimulación sensorial, cuestionamientos (a través de preguntas provocadoras) y variabilidad (variando las actividades y formas de presentación). Algunos ejemplos incluyeron presentar a los estudiantes videos, lecturas, imágenes y materiales interactivos en línea para estimular su curiosidad, y ejercitar la redacción a partir de ejemplos prácticos.

- **Relevancia**. Es un elemento básico en la enseñanza, con el fin de que el aprendiz pueda entender y creer en las bondades del aprendizaje para su vida. Algunos ejemplos incluyen el desarrollo de actividades que requieren de descripción, de narración, de localización de faltas de ortografía en el entorno, de discusión sobre los problemas del lenguaje actual, etc.
- **Confianza**. Se gana cuando el aprendiz entiende los requerimientos del ambiente de aprendizaje y es capaz de ver que puede ser exitoso al lograrlo. Esta expectativa de éxito puede ser implementada mediante el establecimiento de metas específicas y de retroalimentación. Ejemplos incluyen dar a los estudiantes un calendario de actividades para poder organizar sus tiempos, así como lapsos suficientes para poder completar exitosamente sus lecciones. Asimismo, los foros de discusión pueden ser bastante efectivos en el aprendizaje social.
- **Satisfacción**. Es crucial a largo plazo y se refleja mediante el uso de la información aprendida en casos de la vida real del estudiante. Se define como la motivación intrínseca del aprendiz y su respuesta a estímulos o premios. Algunos ejemplos son los premios que se dan a los estudiantes en las calificaciones por presentar buena ortografía y redacción impecable, co-evaluar el trabajo de sus compañeros y reconocer sus avances y logros al concluir el curso.

Algunos comentarios de los estudiantes del curso Sistema Escolarizado Abierto (SEA) fueron los siguientes:

> "Me esforcé y me tomé el tiempo necesario para realizar los ejercicios a conciencia y lo mejor posible."
>
> "Lo primero que hacía llegando del trabajo, era abrir la plataforma para ver que no se me pasara ninguna tarea, o ver qué fue lo que escribieron mis compañeros en el foro."
>
> "Me esforcé en mejorar la redacción, en base a las observaciones que la maestra mandaba."
>
> "Creo que ésta es la materia a la que he estado más al pendiente y en la que he aprendido más."

"Los foros fueron importantes, ya que hubo retroalimentación cuando no entendía algo, muchas veces mis compañeros tenían la respuesta. Las preguntas de la profesora en el foro, hizo que me esforzara.".

"En general hubo avances y esfuerzo de mi parte, para la realización de todas las tareas que encargó."

A continuación se presentan los comentarios de los estudiantes clasificados de acuerdo con cada una de las dimensiones del modelo motivacional ARCS.

Atención

"Antes que nada, me gustaría darle gracias por la manera en que trabajamos, por las cosas que nos enseñó y por las críticas constructivas que nos dio."

"Agradezco mucho a este taller, en serio que ha sido muy dinámico y, es de lo que más me ha gustado durante la carrera."

"Puedo decir que me agradó la materia y es una de las que más provecho he sacado, porque siempre dejo las cosas para el último momento, en su materia fue muy diferente, pues siempre estuve al pendiente de las actividades."

"Su foro está padrísimo, me encantó la idea de la plataforma."

"Motivó el interés por mantenerme en constate interacción con todos, a través de los foros y el material didáctico."

Relevancia

"Los contenidos están completísimos."

"Me gustaron mucho las lecturas, pues enriquecieron mi conocimiento y por lo tanto, esto hace que haya tenido un buen desempeño en la materia."

"Leí mis tareas, es un nuevo hábito."

"La calificación en ocasiones no interesa tanto cuando el alumno se lleva un aprendizaje significativo, y eso es lo que me dejó a mí el curso."

"Las tareas me sirvieron para tener mayor práctica en la redacción, además de que las lecturas fueron un auxiliar para este curso."

"Los videos, que puso en la plataforma, en donde no me dormía de tanto leer jajaja y aun así, aprendía."

"Lo más agradable fue la constante innovación y la gran cantidad de recursos de apoyo, que por desgracia tuvieron una duración muy corta."

"Lo que más me agrada de este curso es la interactividad lograda con el apoyo de la plataforma *moodle*, se logró un mejor aprovechamiento del tiempo y se abarcaron muchos más temas de los que se hubieran abordado con sólo las tres concentraciones."

"Debo subrayar que la participación del mismo grupo en la plataforma, fue mucho mejor y más provechosa, que su participación durante las concentraciones."

"Nos permitió retroalimentarnos como grupo."

"Lo que más me gustó del curso fue la práctica, pues además de benéfico, era muy dinámico y te motivaba a realizar todas las actividades."

"El uso de la plataforma es una estrategia que brinda diversos beneficios, tanto para la docente como para los estudiantes."

"Los ejercicios que se pedían, eran amenos, pero a la vez te ayudaban para que adquirieras práctica en la redacción y ésta por consiguiente, se mejorara en cada uno."

Confianza

"La maestra siempre estuvo al pendiente de nosotros y se mostró comprometida al estarnos corrigiendo y dándonos ánimos. Estuvo increíble."

"Sin lugar a dudas, el apoyo y la disposición que usted mostró sirvió de mucho."

"Fue una excelente maestra, me aportó muchos conocimientos, y espero poder aplicarlos."

"Quiero agradecerle de antemano maestra, que haya sido muy accesible y relajada con todos nosotros, ya que creó un ambiente de amistad y compañerismo y nos hizo sentir a todos en el mismo nivel jerárquicamente que usted, eso se agradece mucho porque se crea la confianza y la seguridad de poder preguntar cualquier cosa sin ser tachado de tonto o inferior."

"Tal vez escribo mal, pero antes de esta materia escribía aun peor."

"Las actividades que nos brindó la maestra me motivaron y estoy interesada en escribir mejor, aunque es un reto difícil, no quiere decir que sea imposible."

"La retroalimentación que realiza la docente en cada trabajo entregado es lo que más me gustó, pues te permite saber en que éstas bien y, por el contrario, qué debes corregir."

"Cuando empezó el curso, pensaba cómo iba a mejorar, si tenía tantas faltas al ordenar las ideas, pero no esperaba tener un sistema tan bueno de aprendizaje, que deberían adoptar otros maestros."

"¿Lo que más me gustó?... que nunca se desesperó, que nos ayudó, que nos enseñó, que hubo interacción, que fue dinámico, que no fue aburrido y que hubo buena química entre nosotros."

Satisfacción

"Lo que más me gustó fue aprender, muchas materias que cursaremos en esta facultad no sabremos ni recordaremos en el futuro cómo las pasamos. Ésta es una experiencia educativa que sin duda utilizaré el resto de mi vida, por eso fue importante APRENDER."

"En general, me gustó y me sirvió de mucho el curso, pues me ayudó en la redacción."

"Yo considero que esta materia ha sido una de las mejores."

"Cualquiera que no aproveche lo visto en esta materia, se lo reprochará el día de mañana."

"Creo que fue un gran curso aunque fue corto."

"Ya no me vi obligada a pedir permiso a mi jefe para consultar a mi profesora, pues en la plataforma estaba todo."

"Me gustaría que se extendiera este sistema de enseñanza en todas las materias de la facultad, sobre todo en el SEA."

"Felicidades por su propuesta educativa que integra a la tecnología actual logrando la convivencia plena de las actividades escolares presenciales y virtuales."

"La verdad creo que el curso en su totalidad estuvo muy completo y fue muy bueno, yo no cambiaría nada, me agradó tal como lo planteó: la información, los métodos de aprendizaje."

"Si me piden calificar esta manera de trabajar en una materia, pues yo doy un 10. Así aprendemos, opinamos y, nos interesamos en los temas."

"Lo que más me gustó fue que había mucha competencia, pues podías checar quién había subido algo; la competencia me encantó."

"Es la primera vez que tengo ganas de sobresalir y ser la mejor."

Como ejemplo de aplicación de estos cuatro elementos se puede describir una de las actividades del curso, titulada "*La mejor foto de una falta de ortografía*". En esta actividad, cada estudiante del curso, tomó diversas fotografías del entorno donde aparecieran textos con errores ortográficos y/o de redacción. Cada estudiante seleccionó de su repertorio sólo aquella foto que a su criterio hubiera sido la mejor, con la intención de someterla a un concurso. La mejor fotografía de cada estudiante, se "subió" a *moodle* acompañada por una narración, de esta forma, todos los estudiantes podrían ver y calificar todas las fotografías. Posteriormente, se generó una "consulta" en línea (tipo encuesta) para que cada estudiante votara de forma anónima por la foto de su predilección. El propietario de la foto con más votos, se hacía acreedor de 1 punto para incrementar su calificación.

A continuación se expone la manera en que cada uno de los elementos del modelo ARCS fue aplicado en el módulo:

- **Atención**. Al guiar a los estudiantes para estar alertas, en cualquier momento, a toda la comunicación escrita que los rodea y así poder detectar los errores.
- **Relevancia**. Al hacerles ver la importancia de saber enviar mensajes efectivos y correctos a una audiencia grande, reiterando el punto de ser "publicados".
- **Confianza**. Con los señalamientos en clase, los ejercicios y diversas actividades, los estudiantes se pueden sentir seguros para poder localizar fácilmente errores ortográficos y/o de redacción en el entorno. Su expectativa es cubierta cuando han aprendido a evitar errores comunes y a transmitir un mensaje social de forma correcta.
- **Satisfacción**. La satisfacción, en este caso en particular, tuvo que ver con realizar una actividad entretenida sobre la cual se podía discutir y elogiar en el foro, cuyo destino fue el reconocimiento a través de "votos" por parte de sus pares y del tutor.

Conclusiones y reflexiones finales

La motivación es un factor esencial en el diseño de cursos en cualquier modalidad, incluyendo, por supuesto, la presencial. Sin embargo, cuando se trata de concebir cursos en su naturaleza semipresencial o en línea, la motivación es determinante en el aprendizaje y en la permanencia de los estudiantes durante el curso, pues hay que recordar que el profesor, tutor o instructor no se encuentra presente para estimular, "empujar" o motivar a los participantes en el logro de sus metas personales.

Es por ello que en la fase de concepción y diseño de los materiales para el curso en plataforma, se tengan siempre presentes las preguntas: ¿De qué manera voy a motivarlos para que terminen este módulo o tema? ¿Cómo genero atención, relevancia, confianza y satisfacción en ellos para lograr resultados efectivos en su aprendizaje?

Ya sea que se trate de una clase impartida en modalidad presencial, semipresencial o en línea, los grupos se encuentran conformados siempre por personas que tienen distintos perfiles y necesidades específicas, así como diferentes estilos para aprender y comunicarse. Pues bien, los contenidos diseñados, las estrategias de enseñanza y aprendizaje concebidas y las formas de evaluación planteadas deben atender a esas variadas formas de ser y de aprender.

El diseño de las actividades que se llevarán a cabo durante el curso, así como el desarrollo de los materiales multimedia que vamos a mostrar (imágenes, videos, sonidos, presentaciones interactivas, etc.), deben siempre atender a los gustos e intereses de nuestros usuarios finales.

Mark Prensky (2001: 5) acuñó los conceptos de nativos digitales e inmigrantes digitales, refiriéndose a los primeros como las personas relativamente jóvenes que han nacido y crecido entre computadoras, internet, televisión interactiva, celulares, videojuegos y medios en general que forman parte de su vida cotidiana. Por otro lado, se encuentran los inmigrantes digitales, que se conforman por las generaciones de adultos que no nacieron con la presencia de estos nuevos medios de comunicación y aprendizaje, pero han tenido que adaptarse a su existencia y uso a través de la vida, ya sea por una necesidad laboral o personal o por el simple gusto de conocerlos y aplicarlos.

Para Prensky, los juegos y las actividades lúdicas tienen un papel esencial en el aprendizaje de las generaciones actuales, sobre todo para captar su atención y poder dirigirlos a los objetivos que desde un principio se plantearon, pero sobre todo, para que el proceso de aprender resulte verdaderamente significativo para su vida y tenga una aplicabilidad y una razón de ser.

Pues bien, cuando hablamos del diseño de contenidos en línea para el aprendizaje, es necesario que tomemos en cuenta dichas consideraciones y de alguna manera nos convirtamos en pedagogos, comunicólogos y diseñadores gráficos para poder concebir aquellos contenidos que sean realmente motivadores, atractivos, cercanos, interesantes, interactivos y dinámicos para nuestros usuarios del otro lado de la pantalla.

Se busca que el estudiante no solamente aprenda, sino que a ser posible, se divierta mientras lo hace, y que pueda, mediante ese aprendizaje, resolver problemas específicos de su vida diaria. En este proceso, existe un elemento que cobra especial y esencial relevancia: la motivación.

Referencias Bibliográficas

Colakoglu, O. & Akdemir, O. (2008). *Motivational Measure of the Instruction Compared: Instruction Based on the ARCS Motivation Theory versus Traditional Instruction in Blended Courses*. In Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2008, p.p. 48-53, Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from http://www.editlib.org/p/28375.

Gagné, Robert Mills (1979). *Las condiciones del aprendizaje*. Traducido al español con la colaboración de José Carmen Pecina. Interamericana; tercera edición, p. 246, México.

Han, K., Park, S., Keller, J. & Park, K. (2006). *Developing a Web-based Tool for Systematic Motivational Design*. In T. Reeves & S. Yamashita (Eds.), Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2006, p.p. 2841-2844, Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from http://www.editlib.org/p/24136.

Kalinowski, K. & Huett, J. (2007). *Enhancing Motivation in Distance Education*. In R. Carlsen et al. (Eds.), Proceedings of Society for Information Technology and Teacher Education International Conference 2007, p.p. 374-376, Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from http://www.editlib.org/p/24564.

Keller, John M. (2006). Keller's ARCS model of motivational design. Official site. Consulted on October 29, 2009. In URL http://www.arcsmodel.com/

Keller, J., & Suzuki, K., (1988). Uses of the ARCS motivation model in courseware design. In: Jonassen, D. (Ed.), Instructional Designs for Microcomputer Courseware, p.p. 401-434, Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Kim, K. (2009). *Motivational Challenges of Adult Learners in Self-Directed e-Learning.* Journal of Interactive Learning Research. 20 (3), p.p. 317-335. Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from http://www.editlib.org/p/26239.

Lepper, M. R., & Hodell, M. (1989). *Intrinsic motivation in the classroom*. In R. Ames & C. Ames (Eds.), Research on motivation in education, San Diego, CA: Academic Press, p.p. 128-147.

Malone, T. W. (1981). *Toward a theory of intrinsically-motivating instruction*. Cognitive Science, 4, p.p. 333-369.

Prensky, Mark (2001). *Digital Natives, Digital Immigrants*. From On the Horizon (MCB University Press, vol. 9 Núm. 5, October 2001). On october 29, 2009.

URL:http://www.marcpresnky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20 Natives,%20Digital%20Inmigrants%20-%20-%20Psrt1.pdf p.p. 1-6

Reigeluth, C. (2007). *Elaborating the elaboration theory*. Educational Technology Research & Development, 40(3), p.p. 80-86.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). *Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions*. Contemporary Educational Psychology, 25(1), p.p. 54-67.

What is instructional design (n.d.). On november 6, 2009. URL: http://www.coe.uh.edu/courses/cuin6373/whatisid.html#whosays

Improving instructional design (n.d.). On november 2, 2010. URL: http://improvinginstructionaldesign.blogspot.com/2007/03/instructional-design-defined.html

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN MÉXICO

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN