MATEMATICAS
BIBLIOGRAFIA Y DOCUMENTACION

Ministerio de Educación y Ciencia
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

MATEMATICAS

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

MATEMATICAS

BIBLIOGRAFIA Y DOCUMENTACION

EQUIPO DE TRABAJO

Coordinadora:
Carmen Calvo

Equipo:
Isabel Callejo
Manuel Aguilera
Leopoldo Martínez

Miembros del Equipo de Apoyo de Matemáticas

Nivel: E. G. B.

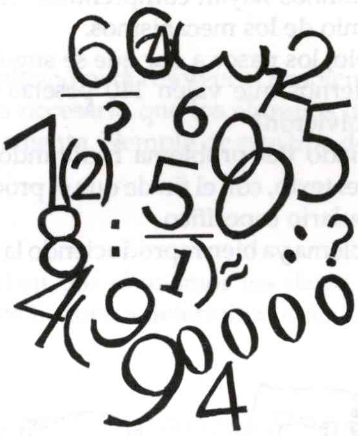
Colección: *"Documentos y propuestas de trabajo"*

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
N. I. P. O.: 176-87-153-2
I. S. B. N.: 84-369-1378-7
Depósito Legal: M-5172-1988
Imprime: MARIN ALVAREZ HNOS.

INDICE

Página

Resolución de situaciones problemáticas



Luis Ferrero

Los conceptos matemáticos, especialmente los numéricos, superadas las fases de comprensión y asimilación a través de experiencias personales o de otras provocadas y mediante una ejercitación gradual, variada y suficiente, se afianzan y cobran sentido cuando son aplicados a la resolución de situaciones problemáticas de la vida real u otras simuladas de interés para los alumnos.

I. Consideraciones previas

El objetivo de la resolución de problemas es desarrollar en los alumnos el razonamiento cualitativo de las situaciones en la vida real; así, las actividades de cálculo ligadas a situaciones problemáticas juegan un papel secundario, una función de servidumbre. Por ello, las operaciones que los alumnos deben realizar para resolver un problema deben estar completamente dominadas e interiorizadas. Es previo a la resolución de problemas el conocimiento del concepto de operación y el desarrollo razonado de su algoritmo. La resolución de problemas no afianza la mecánica de las operaciones, sino que da significado a las mismas.

II. Dificultades

Las dificultades que los alumnos presentan en la resolución de problemas se pueden resumir en tres grandes apartados:

a) No se comprende el enunciado del problema motivado, entre otras razones, porque los alumnos no tienen la habilidad suficiente para leer, porque las situaciones planteadas no son familiares al alumno...

b) No se reconocen las operaciones matemáticas que hay que realizar y los alumnos toman "a suerte" las operaciones a efectuar y calculan espontánea y precipitadamente, lo que conduce fácilmente a resultados equivocados.

c) No se capta el orden en que hay que realizar las operaciones.

III. Proceso de resolución de problemas

Para la resolución de problemas no hay modos de proceder normalizados, es decir, no hay ningún esquema algorítmico como ocurre con las operaciones; no obstante, es previo, como ya se ha indicado anteriormente, que los alumnos hayan comprendido el significado de cada una de las operaciones y tengan adquirido el dominio de los mecanismos.

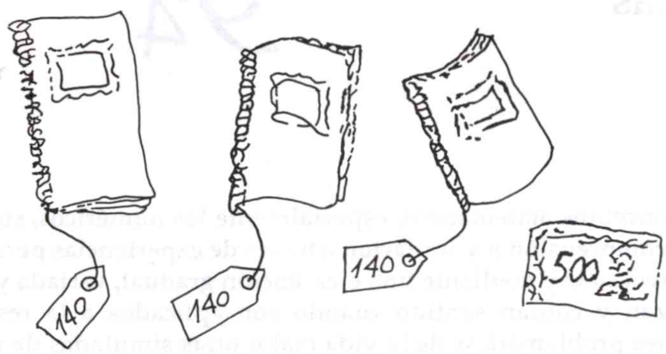
Veamos, con un ejemplo, los pasos a dar que se sugieren para resolver un problema:

"Para pagar tres cuadernos que valen 140 pesetas cada uno entregué un billete de 500 pesetas. ¿Cuántas pesetas me devolvieron?"

1.° Lectura del enunciado del problema facilitando la comprensión de todos y cada uno de los términos que aparecen en el texto, con el fin de que el proceso de razonamiento no se vea entorpecido por la comprensión del vocabulario específico.

2.° Aclaración del problema ya bien reproduciendo la situación de un modo concreto o gráfico, ya bien describiendo la situación.

Por ejemplo:



3.° Extracción de los datos y de las preguntas de la situación problemática:

Datos: 3 cuadernos
140 pesetas cada cuaderno
500 pesetas que entregué.

Pregunta:
¿Cuántas pesetas me devolvieron?

4.° Enumeración oral del problema teniendo a la vista únicamente los datos extraídos.

5.° Explicación verbal del desarrollo del problema indicando qué operaciones hay que hacer y en qué orden deben realizarse.

6.° Planteamiento: escribir las operaciones de forma indicada o forma horizontal, una operación debajo de otra y en el orden en que deben realizarse.

3 x 140 ptas. = ________
500 ptas. – = ________ = ________

7.° Realización de las operaciones expresando, tanto en las soluciones parciales como en la solución final, las magnitudes que procedan.

3 x 140 ptas. = 420 ptas. valen los cuadernos
500 ptas. – 420 ptas. = 80 ptas. devolvieron

8.° Expresión del problema mediante una operación combinada.

500 – (3 x 140) = 80

9.° Comprobación del problema realizando las sustituciones convenientes.

10.° Expresión escrita del desarrollo del problema. Por ejemplo:

"Se calcula el valor de los tres cuadernos multiplicando el número de cuadernos que se compran (3) por el valor de cada cuaderno (140 ptas.), o sumando 140 ptas. + 140 ptas. + 140 ptas. El resultado obtenido (420 ptas.) se resta de la cantidad que he entregado (500 ptas.), resultando que me devuelven 80 ptas."

IV. Algunas clases de problemas que se pueden plantear

a) *Problemas con los datos completos*

Tener los datos completos no basta por sí mismo para resolver el problema, hay que conocer también la relación que los datos guardan entre sí. Es necesario que los alumnos descubran esta relación y no planteen las operaciones a realizar precipitadamente. Ejemplo de este tipo de problemas es el desarrollado anteriormente.

b) *Problemas con los datos incompletos*

Es importante que los alumnos comprueben por sí mismos los datos que son necesarios para la resolución del problema, que sean ellos los que lleguen a determinar qué datos son los que faltan, cómo se pueden obtener y que los obtengan.

Ejemplos:

"Para pagar 7 litros de leche entregamos un billete de 1.000 ptas. ¿Cuántas pesetas nos devolverán?"
"Calcular el valor del mobiliario que hay en el aula."

c) *Problemas con datos que no son necesarios para su resolución*

Los alumnos deben seleccionar los datos que se dan y plantear el problema sólo con los necesarios. No debemos olvidar que para matematizar las situaciones de la vida real debemos analizar los datos que nos ofrecen y extraer aquellos con los que vamos a operar.

La práctica de este tipo de problemas evitará que los alumnos operen precipitadamente.

Ejemplos:

"Un agricultor vende 3.500 kg. de trigo a 15 ptas. el kg. y 5.600 kg. de cebada a 12 ptas. el kg. ¿Qué dinero obtuvo con la venta de la cebada?

"Un automóvil va de Madrid a Bilbao, cuya distancia es de 420 km. Si consume 8 litros de gasolina cada 100 km., ¿cuántos litros consumirá en un trayecto de 300 km.?"

d) *Problemas con una solución y problemas con múltiples soluciones*

Sin querer restar importancia a los problemas con una solución, el planteamiento de problemas con múltiples soluciones también favorece el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los alumnos.

Ejemplo:

"Un juguete vale 120 ptas. Escribir al menos tres formas distintas de poder pagarlo."

"Usando solamente billetes de 5.000 ptas., de 1.000 ptas. y de 100 ptas., ¿qué cantidad de dinero se puede tener con tres billetes?"

e) *Problemas con preguntas y problemas sin preguntas*

No sólo se han de plantear a los alumnos problemas con preguntas, sino también problemas en los que el alumno tenga que hacer la pregunta en relación a los datos presentados.

Didácticamente, al no plantear la pregunta se obliga al alumno a introducirse en la situación planteada.

Ejemplo:

"Begoña tiene 720 ptas. María tiene 580 ptas."

Ante esta situación los alumnos pueden plantear múltiples preguntas, entre otras: "¿Cuántas pesetas tienen entre las dos?" "¿Cuántas ptas. tiene más o menos una niña que la otra?" "¿Cuántas ptas. le faltan a una de ellas para comprar un juguete que vale 1.000 ptas.?"

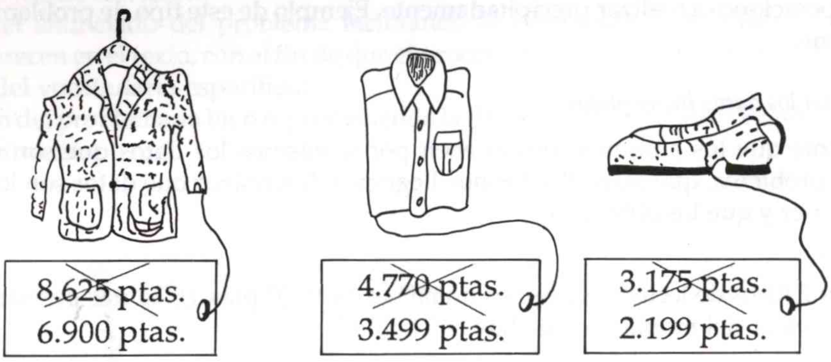
Estos problemas representan un medio más para evitar que los alumnos operen mecánicamente con los números sin tener claro lo que éstos representan.

f) *Problemas expresados en forma gráfica*

Son aquellos problemas en los que la información o el enunciado o ambos vienen dados de forma gráfica o esquemática. Pertenecen a este tipo de problemas los denominados de "rebajas", "compras", "escaparates"...

Ejemplo:

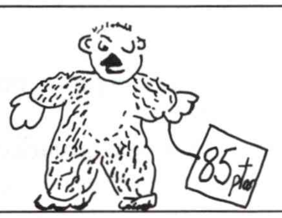
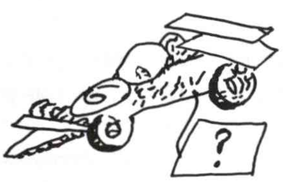
"Rebajas"



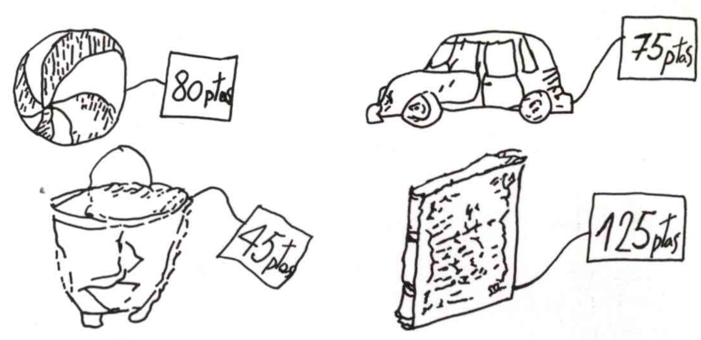
Un anuncio similar al que se indica permite plantear a los alumnos preguntas tales como:

"¿Cuál es el valor de los tres objetos antes de las rebajas?" "¿Cuál es el valor de los tres objetos con el precio actual?" "¿Cuál es el valor total de las rebajas de los tres objetos?"...

"Compras"

El objeto vale...	Pago con...	Me devuelven...
 147.-	Un billete de 100 ptas. Dos monedas de 25 ptas.	?
	?	Tres monedas de 5 ptas.
 ?	Dos billetes de 100 ptas. Una moneda de 50 ptas.	Dos monedas de 5 ptas. Tres monedas de 1 pta.

"Escaparates"



Esta presentación permite hacer múltiples formulaciones de problemas que pueden surgir del profesor o de los propios alumnos. Por ejemplo:

"Con 200 ptas. puedo comprar..." "¿Cuántos coches puedo comprar con 300 ptas.?" "Compro la pelota y dos libros. Si entrego 500 ptas., ¿cuántas pesetas me devolverán?"...

g) *Problemas en los que los alumnos tienen que plantear el enunciado del mismo*

Es necesario, y como último proceso en la resolución de problemas, que los alumnos planteen enunciados de problemas en los siguientes casos:

1. Escribir el enunciado de un problema que responda a una pregunta dada.
   Por ejemplo: "¿Qué cantidad de dinero recibe cada uno?"

2. Escribir el enunciado de un problema dados los datos.
   Por ejemplo: "Con los siguientes datos: 7 kg. de patatas, 45 ptas. el kg. y 500 ptas., escribir el enunciado de un problema."

3. Escribir el enunciado de un problema que se resuelva con unas operaciones dadas.
   Por ejemplo: "Escribir el enunciado de un problema que se resuelva con estas operaciones: 4 + 3 = 7; 7 x 56 = 392; 500 – 392 = 103."

V. Características que deben reunir los problemas

Por último, y a modo indicativo, es aconsejable que los problemas que se planteen a los alumnos reúnan, al menos, estas características:

a) Que motiven a los alumnos; para ello es preciso partir de situaciones de interés y sacadas de la vida y el entorno del niño.

b) Que se adapten a la edad, a los conocimientos y a las técnicas operativas que el alumno posea.

c) Que los enunciados, planteamientos o formulaciones de los problemas favorezcan la interdisciplinariedad.

NOTA.—Este artículo está basado en el trabajo "Análisis de los errores más frecuentes en los que incurren los alumnos de E. G. B. en el área de Matemáticas", que realizó el Seminario de Matemáticas de E. G. B. del ICE-UAM durante el curso 82/83.

La Estadística en los Ciclos Inicial y Medio

BOLETIN INFORMATIVO ACCION EDUCATIVA, número 19

Luis Ferrero

«También nos parece oportuna la introducción de algunas nociones elementales de "Estadística" a un nivel asequible a estas edades, sin tener que esperar al Ciclo Superior. Creemos que los niños están capacitados para realizar actividades como registrar observaciones mediante dibujos sobre condiciones climáticas, interpretar registros relativos a juegos, etc.»[1].

La obtención de información a partir de la organización de datos es necesaria e imprescindible para llevar a la práctica una enseñanza activa y vinculada al método científico. Resulta, pues, sorprendente que los Nuevos Programas Renovados de la E. G. B. del área de Matemáticas de los Ciclos Inicial y Medio no recojan en sus contenidos la iniciación a la estadística y a la probabilidad, cuyas actividades favorecen notablemente la interdisciplinariedad —tan deseada en los mencionados Programas Renovados— preferentemente en el área de Experiencias (Social y Natural). No deja de ser paradójico que los alumnos del Ciclo Medio tengan que interpretar gráficas cuya elaboración no se contempla en los N. P. R. de Matemáticas.

Con el presente trabajo se pretende ofrecer una alternativa a la omisión, en los últimos programas de Matemáticas recientemente aprobados, de los conceptos estadísticos que se pueden desarrollar con los alumnos de los Ciclos Inicial y Medio de la E. G.·B., presentando una programación de objetivos y unas sugerencias de actividades que permitan alcanzar los objetivos expuestos y que servirá de base para un estudio más profundo y sistemático de la Estadística en niveles educativos superiores.

1.—Objetivos:

Ciclo Inicial

Primer Curso:

— Registrar observaciones de la vida diaria mediante dibujos.
— Elaborar e interpretar registros de condiciones climáticas.
— Elaborar e interpretar registros relativos a juegos.
— Elaborar e interpretar registros relativos a fenómenos sociales.

[1] "Los Programas Renovados de la E. G. B. Análisis, crítica y alternativas". ICE-UAM, 1981.

Segundo Curso:

— Registrar observaciones de condiciones climáticas, juegos y fenómenos sociales.
— Elaborar e interpretar registros.
— Elaborar e interpretar gráficos (con material).

Ciclo Medio

Tercer Curso:

— Registrar observaciones y elaborar e interpretar registros.
— Elaborar e interpretar gráficas.
— Hallar la media aritmética, de forma manipulativa, mediante igualación de columnas.

Cuarto Curso:

— Elaborar e interpretar diagramas de barras, gráficos de puntos y diagramas figurativos.
— Calcular la media aritmética.

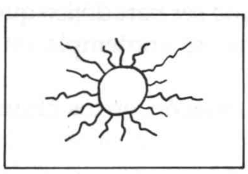
Quinto Curso:

— Elaborar e interpretar diagramas y gráficas y determinar las semejanzas y las diferencias entre los diferentes diagramas y gráficas.
— Interpretar el concepto de media aritmética.

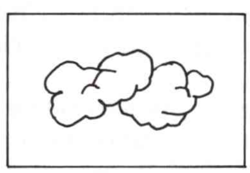
2.—Actividades

1. Elaborar e interpretar registros de condiciones climáticas

1.1. Registrar mediante símbolos o dibujos las condiciones climáticas de cada día.



Día soleado



Día nublado

Día lluvioso

L	M	X	J	V	S	D

1.2. Pegar o dibujar en el calendario el símbolo adecuado.

1.3. Determinar el número de días soleados, lluviosos o nublados en una semana, en una quincena o en un mes.

1.4. Interpretar, según el registro, si en el mes llovió mucho, poco, etc.

2. Elaborar e interpretar registros relativos a juegos

2.1. Colocar fichas (rojas y azules, más de un color que de otro) en una caja.
— Indicar de qué color puede ser la ficha que se saque.
— Anotar con rayitas las fichas que han salido.

Por ejemplo:

Rojas	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III
Azules	~~IIII~~ II

— Interpretar por medio de la observación del registro cuál es el color que sale más.

2.2. Hacer la tabla de frecuencias de preferencia de juegos entre los alumnos de la clase.

Fútbol	
Baloncesto	
Balonmano	

— Interpretar, por medio de la observación de la tabla de frecuencias, cuál es el juego de mayor preferencia, de menor, etc.

2.3. Proponer a los alumnos juegos similares al siguiente:
— Tratar de meter una canica en un agujero a una distancia determinada (por ejemplo, diez pasos).
— Determinar el número de tiradas de cada jugador (por ejemplo, veinte veces cada uno).
— Anotar en una tabla de frecuencias los fallos.
— Hacer observar la tabla de frecuencias.
— Preguntar: "¿Quién es el ganador?" "¿Cuántas veces ha introducido cada uno la canica en el agujero?", etc.

3. Elaborar e interpretar registros de fenómenos sociales

3.1. Realizar e interpretar registros de la asistencia diaria.
3.2. Realizar e interpretar registros familiares.
Por ejemplo: formar la tabla de frecuencias del número de hermanos que tienen los alumnos de la clase.

	Total
No tienen hermanos	
Tienen 1 hermano	
Tienen 2 hermanos	
Tienen 3 hermanos	
Tienen 4 hermanos	
Tienen más de 4 hermanos	

3.3. Realizar e interpretar registros relativos a la salud.

Por ejemplo: formar la tabla de frecuencias de las enfermedades que han padecido los alumnos de la clase.

	Total
Sarampión	
Varicela	
Rubéola	
Gripe	
Otras	

— Interpretar, por medio de la observación de la tabla, cuál es la enfermedad más frecuente, cuál es la menos frecuente, etc.

4. Elaborar e interpretar gráficas

4.1. Contar el número de coches y camiones que pasan a una determinada hora por una carretera. Repetir la experiencia a otra hora.

— Desarrollo de un ejemplo hipotético:

a) Formar la tabla de secuencias en el tiempo:

1.° Entre las 9 y las 9,15.

2.° Entre las 11 y las 11,15.

b) Formar las tablas de frecuencias:

1.° Entre las 9 y las 9,15.

Coches	●	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
Camiones	◘	||||	4

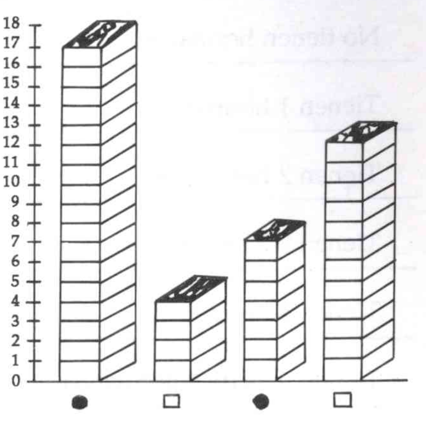
2.° Entre las 11 y las 11,15.

Coches	●	~~||||~~ ||	7
Camiones	◘	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12

c) Interpretar, mediante preguntas, las tablas.

d) Formar gráficas sobre murales con cajas de cerillas.

e) Interpretar las gráficas mediante preguntas.



5. Elaborar e interpretar gráficas

5.1. Ordenar datos que se recopilen de alguna investigación.

— Recopilar datos; por ejemplo: número de personas que viven en cada casa.

— Formar la tabla de frecuencias.

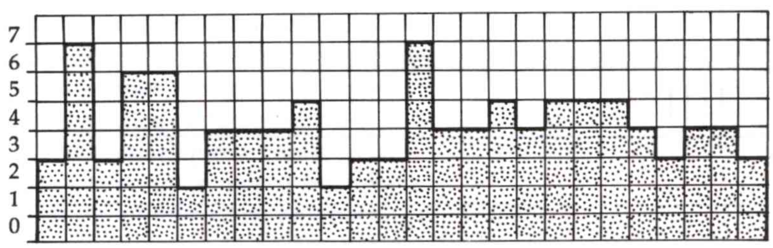
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Total</th></tr>
<tr><td>2 personas</td><td>𝍷𝍷</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3 personas</td><td>𝍸 𝍸</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4 personas</td><td>𝍸 𝍸 𝍷𝍷</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5 personas</td><td>𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷</td><td>9</td></tr>
<tr><td>6 personas</td><td>𝍸 𝍷𝍷</td><td>7</td></tr>
<tr><td>7 personas</td><td>𝍷𝍷𝍷</td><td>3</td></tr>
</table>

— Interpretar, mediante preguntas, la tabla.

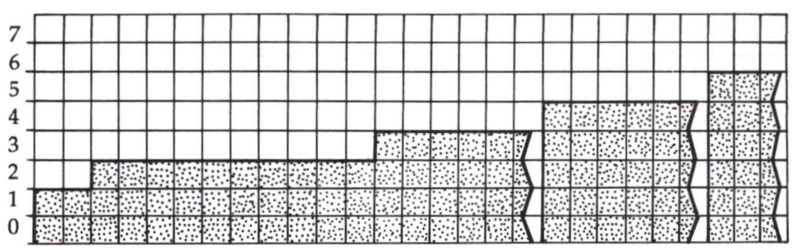
5.2. Formar gráficas con material, sobre murales: con cajas de cerillas, con papeles (cuadritos), etc.

— Cada columna representa el número de personas que viven en una casa.

— Cada caja de cerillas, o cada cuadro, representa una persona.



5.3. Ordenar las columnas de mayor a menor.



5.4. Hallar la media en la gráfica de columnas ordenadas, mediante la igualación de columnas.

6. Elaborar e interpretar gráficas

Modelo de "fichas de trabajo" para entregar a los alumnos.

6.1. Recopilar datos:

Por ejemplo:

En el parque hay jugando varios niños. María pregunta a cada niño su edad. Las respuestas que obtiene son:

7, 10, 7, 8, 6, 7, 7, 9, 8, 6
10, 8, 6, 7, 5, 7, 7, 6, 8, 9
8, 6, 9, 9, 9, 8, 6, 5, 5, 7
7, 8, 9, 7, 8, 8, 7, 9, 6, 5

— Contestar:
— ¿A cuántos niños preguntó su edad?
— ¿Cuál es la edad del mayor?
— ¿Cuál es la edad del más pequeño?

6.2. Ordenar los datos de menor a mayor para poder analizarlos.

5, 5, 5, 5, ______________________

______ ______________________

______ ______________________

______ ______________________

6.3. Registrar con rayitas verticales, en la tabla, los datos obtenidos. Cada rayita representa a un niño.

		Total
Con 5 años	||||	4
Con 6 años		
Con 7 años		
Con 8 años		
Con 9 años		
Con 10 años		
	Total	

— Contestar:

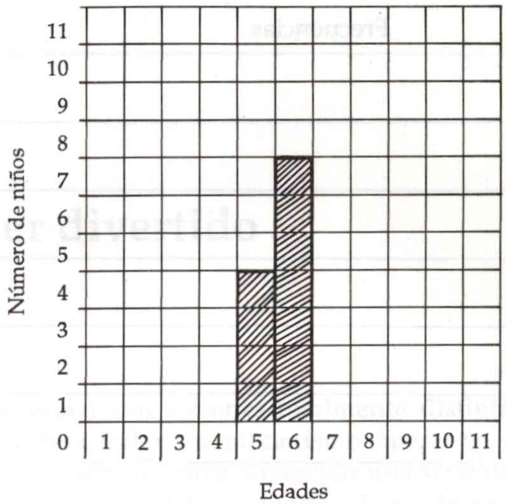
- ¿Qué edad se repite más?
- ¿Cuál menos?
- ¿Hay algún niño con menos de 5 años?
- ¿Hay algún niño con más de 10 años?

6.4. Expresar los datos obtenidos en el diagrama de barras.

— Tener en cuenta que:

a) En la línea horizontal se representan las edades de los niños, y en la línea vertical las frecuencias, es decir, el número de niños que tienen una edad determinada.

b) Cada cuadro representa a un niño.



— Observar:

- Encima del número 5 de la línea horizontal se han rayado cuatro cuadros, que corresponden a los cuatro niños que tienen 5 años.
- Encima del número 6 de la línea horizontal se han rayado siete cuadros, que corresponden a los siete niños que tienen 6 años.

— Completar el diagrama.

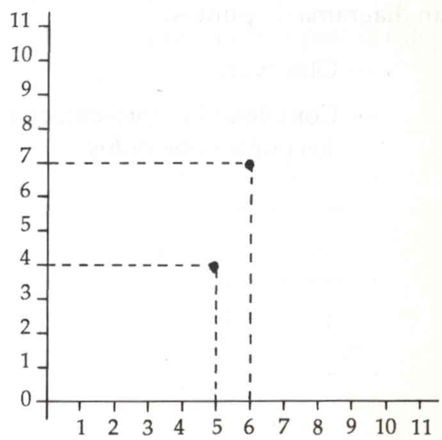
— Contestar:

- ¿Cuál es la barra más alta? ¿La más baja?
- ¿Cuántos niños tienen más de 7 años?
- ¿Cuántos niños tienen menos de 6 años?
- ¿Cuántos niños tienen edad impar?
- ¿Cuántos niños tienen edad par?
- ¿Cuál es la edad que se repite más?
- ¿Cuál es la edad de menor frecuencia?
- Encima del número 3 no hay barra. ¿Por qué?
- Encima del número 11 no hay barra. ¿Por qué?

— Los datos obtenidos los vamos a expresar en un diagrama.

— Escribir la frecuencia que corresponde a cada edad.

- 5 años, 4 niños = (5, 4)
- 6 años, 7 niños = (6, 7)
- 7 años, = ( )
- 8 años, = ( )
- 9 años, = ( )
- 10 años, = ( )



— Completar la representación.

— Escribir qué significa cada punto.

— Observa:

La gráfica de puntos ofrece la misma información que el diagrama de barras.

7. Elaborar e interpretar gráficas

Modelo de "ficha de trabajo" para entregar a los alumnos.

— Se pregunta a los niños de 5.° curso qué deporte prefieren practicar, obteniéndose el siguiente resultado:

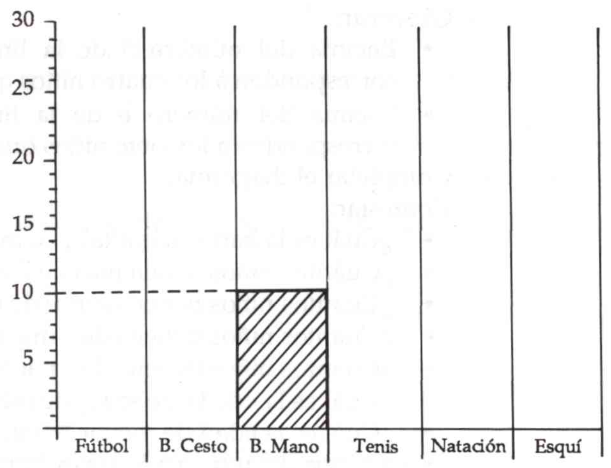
	Frecuencias	Total
Fútbol		30
Baloncesto		15
Balonmano		10
Tenis		25
Natación		20
Esquí		17

Total: 117

— Completar el diagrama de barras.

— Contestar:

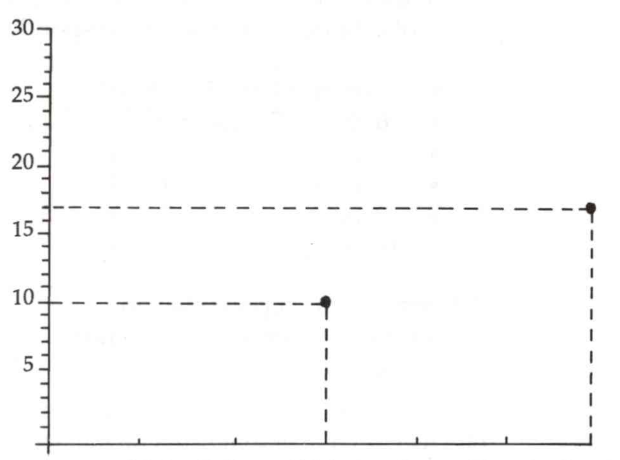
- ¿Qué deporte tiene mayor número de preferencias?
- ¿Cuál menos?
- ¿Cuántos han preferido más fútbol que tenis?
- ¿Cuántos han preferido más natación que esquí?



Esta situación también se puede representar en un diagrama de puntos.

— Observar.

— Completar la representación y unir los puntos obtenidos.



El cálculo puede ser divertido

Luis Ferrero

> **"...Hacer sumar y sumar son acciones totalmente distintas. Enseñar a hacer sumas implica desarrollar un mecanismo operativo en el que la participación del alumno sólo se limita a ejercitar una serie de habilidades y destrezas, sin entender lo que está haciendo... Enseñar a sumar implica comprender el significado de la operación y el desarrollo sistemático y razonado de su algoritmo..."**

El objeto de este artículo, dirigido preferentemente a los alumnos del ciclo medio de la E. G. B., es presentar distintas formas y procedimientos de cálculo, no sólo para mecanizar y automatizar las operaciones elementales con números naturales, dejando claro que la automatización debe ser posterior al proceso razonado de cada una de las operaciones, sino también para desarrollar el cálculo mental y la capacidad de razonamiento a través de los diferentes esquemas que se realizan.

La agilidad y destreza de cálculo deseadas debe conseguirse mediante:

a) Un planteamiento de formas nuevas, sin olvidar las tradicionales (operaciones disponiendo sus términos en horizontal o en vertical).

b) Una presentación de actividades suficientes y variadas que eviten la monotonía y aumenten la motivación.

c) Un orden progresivo de dificultad; la seriación de actividades aumenta la seguridad y confianza de los alumnos.

A continuación, y a modo de sugerencia, se indican algunos ejemplos de cuadros, tablas y diagramas de cálculo para su aplicación en el aula.

a) *Tablas de doble entrada,* que pueden ser utilizadas tanto para el cálculo exacto como para el cálculo aproximado. Ejemplos:

+	425	410	835
240	665	650	
320	745		
560			

•	37	21	46
24	800	400	
18	800		

b) ***Tablas de doble entrada de operaciones combinadas,*** **en las que se conviene denominar con la letra "a" a los datos de la primera fila, y con la letra "b" los datos de la primera columna. A continuación se indicará a los alumnos el significado de la operación estrella (★).**

Por ejemplo:

✳	70	40	90
3			
7		16	
8			

$$\ast \longrightarrow \frac{a \quad b}{10} - 12$$

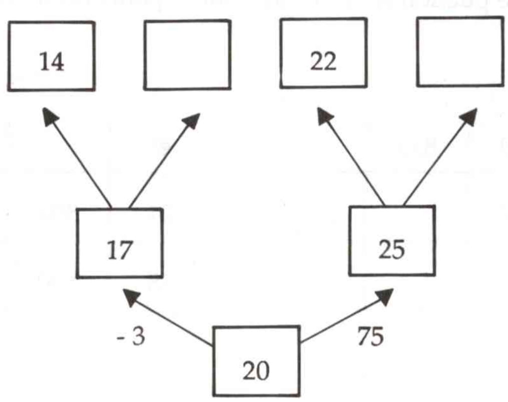
$$\frac{40 \cdot 7}{10} - 12 = 16$$

c) ***Tablas en las que se incluyen los datos y las operaciones.***

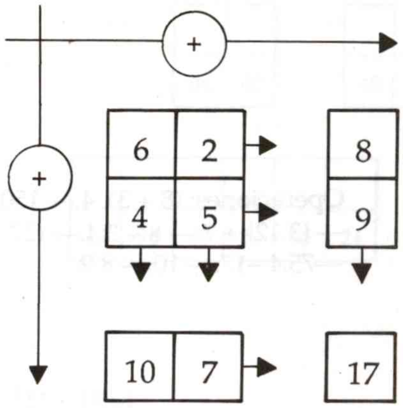
Por ejemplo:

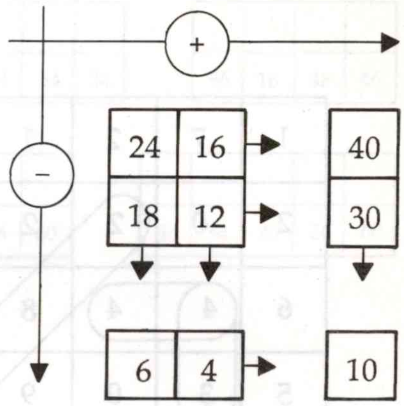
Datos		Operaciones			
a	b	a + b	a - b	a + 13	80 - b
100	30	130	70	113	50
200	40				
250	75				

d) ***Diagramas en forma de árbol, en los que se combinan, principalmente, dos operaciones:*** **sumar y restar, o multiplicar y dividir. Para su realización se dan: un número, que puede ser el del cuadro inferior, y las órdenes de cálculo de las flechas. Por ejemplo:**



e) *Tablas en las que los alumnos puedan comprobar si su realización ha sido correcta,* ya que en el último cuadro tienen que coincidir. Ejemplos:





f) *Crucigramas.* Los crucigramas numéricos se rigen por las mismas normas que los tradicionales crucigramas de letras, es decir, en cada cuadro en blanco se escribe una cifra. Veamos un ejemplo:

	A	B	C	D
A	1	4	7	
B	6	6		
C				
D				

Horizontales: A, 89 + 58.—B, 37 + 29. —7. 3 – 17.—C, 10 – 2 – 59 + 28.—D, 164 + 259.

Verticales: A, 64 + 39 + 65.—B, 50 – 4. —C, (6 + 4) - 3.— 25 + 18 + 39.— D, 300 – (20 + 7).

La realización de los crucigramas a lo largo del curso puede seguir las siguientes etapas:

1.ª Se dan las operaciones en horizontal y en vertical; los alumnos rellenan los espacios en blanco con los resultados de las mismas.

2.ª Se dan las operaciones sólo en vertical o sólo en horizontal; los alumnos rellenan los espacios en blanco y escriben las operaciones que corresponden a los datos verticales y horizontales que no se hayan dado.

3.ª Se da el crucigrama resuelto, y los alumnos tendrán que escribir las operaciones cuyos resultados correspondan a los datos verticales y horizontales.

g) *Sopa de números*. Los alumnos tienen que resolver las operaciones, buscar y rodear los resultados en el cuadro.

Ejemplo:

1	7	2	1	4
2	0	2	2	3
6	4	4	8	2
5	3	0	9	3
2	3	4	0	9

Operaciones: (8 + 3). 4.— 150 – (3.8).
— (3.12) + 7.— 8 + 3.4.— (27 – 3): 2.
—75.4 –17.— 100 – 8.9.

h) *"Cuadros mágicos"*. Se denominan así a los cuadros en los que la suma de la suma de los números en todas las direcciones es la misma. Los alumnos tienen que completar los espacios en blanco con números sin repetir ninguno.

Ejemplos:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8		
	20	4
16		32

i) *"Códigos secretos"*. Los alumnos, mediante la realización de las operaciones, tienen que descifrar el mensaje.

Ejemplo:

L 12 · 5	**S** 48 : 3	**D** 745 – 698	**J** (93 - 6B) + 15	**R** 1000 – 946
A 322 : 7	**B** (34 + 16) – 1	**E** 48 · 2	**T** (37 – 14) + 25	**O** 192 : 8

Código:

96	60

48	95	16	24	54	24

96	16	48	46

47	96	49	46	40	24

47	96	60

46	54	49	24	60

Notas finales:

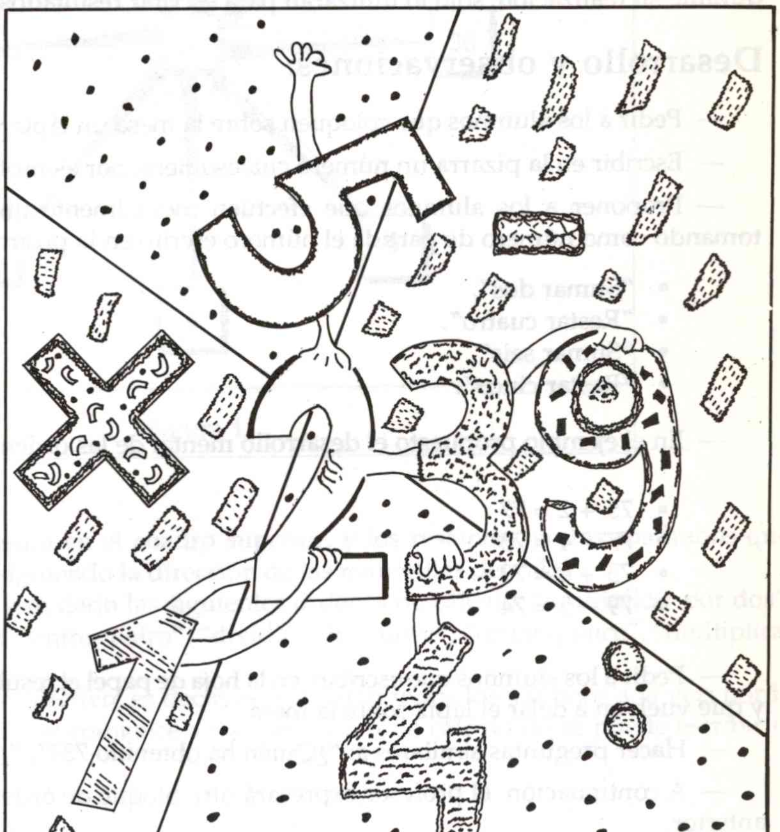
- Las diferentes actividades expuestas son un ejemplo de las muchas formas existentes de hacer un cálculo ágil y motivador. Es importante, no obstante, que estas actividades u otras similares estén integradas en el programa del área de Matemáticas, para que su realización sea sistemática y progresiva a lo largo del curso.
- Hay que hacer notar que la mayor dificultad que presentan los alumnos para realizar los diferentes cuadros, esquemas y diagramas de cálculo es la realización del propio esquema. Esta dificultad se puede salvar si los profesores elaboran esquemas-tipo sin datos, que se entregarán fotocopiados a los alumnos.

Actividades de cálculo mental

Luis Ferrero*

Efectuar operaciones exactas y aproximadas para desarrollar la agilidad necesaria de cálculo en las relaciones de la vida diaria [1].

En épocas pasadas, en nuestras escuelas la práctica diaria del cálculo mental tenía un objetivo preciso, claro y fundamental: *realizar operaciones más o menos complejas con rapidez y precisión y automatizar las destrezas operatorias.*



En la actualidad, si bien es cierto que este objetivo queda cubierto con la utilización de la calculadora, no es menos cierto que para el cálculo que las personas hacemos en la calle, en el comercio, en el mercado, etc., para resolver nuestras situaciones cotidianas, no se utiliza el lápiz y el papel, ni siquiera la calculadora, sino que se hace mediante cálculo aproximado, que no deja de ser otra forma de cálculo mental.

La escuela debe fomentar y potenciar el cálculo mental no sólo por su carácter instrumental, sino, y principalmente, por sus valores educativos, formativos, ya que el cálculo mental:

— *Agiliza la mente.*

---

* Luis Ferrero es asesor de la Dirección General de E. G. B.

[1] Objetivo número 29 del área de Matemáticas del Anteproyecto para la Reforma del Ciclo Superior de E. G. B.

— *Potencia el desarrollo de la atención, de la observación, de la reflexión...*
— *Desarrolla fundamentalmente la capacidad de interiorización.*
— *Da una mayor habilidad para el cálculo operatorio.*
— *Mediante el cálculo mental se aplican y desarrollan las propiedades de las operaciones.*

Por otra parte, la utilización de las máquinas de calcular en el aula, práctica cada vez más extendida —que, dicho de paso, debe introducirse una vez que los niños han adquirido la comprensión del concepto del número y de las operaciones numéricas—, debe ser complementada con un nuevo enfoque de tratamiento del cálculo mental.

En consecuencia, el cálculo mental debe ser una practica diaria en todas las escuelas y en su desarrollo se ha de tener en cuenta el paso de lo concreto a lo abstracto; por ello, en los primeros niveles de enseñanza se realizarán actividades de cálculo utilizando objetos manipulables; posteriormente estas actividades se apoyarán en modelos gráficos y, por último, serán únicamente numéricas.

A continuación, y a modo de sugerencia, se expresan algunos ejemplos de actividades de cálculo mental para realizar en el aula.

Actividad 1.ª: "¡Lápices fuera!"

Denomino así a esta actividad porque es aconsejable que los alumnos no tengan el lápiz en la mano durante su realización; sólo lo utilizarán para escribir resultados cuando se lo indique el profesor.

Desarrollo y observaciones:

— Pedir a los alumnos que coloquen sobre la mesa un lápiz y una hoja de papel.

— Escribir en la pizarra un número cualesquiera, por ejemplo, el 75.

— Proponer a los alumnos que efectúen mentalmente una serie de operaciones encadenadas, tomando como número de partida el número escrito en la pizarra. Por ejemplo:

- "Sumar dos".
- "Restar cuatro".
- "Sumar seis".
- "Restar cinco".

— En el ejemplo propuesto el desarrollo mental de las órdenes de cálculo dadas será:

- $75 + 2 = 77$
- $77 - 4 = 73$
- $73 + 6 = 79$
- $79 - 5 = 74$

— Pedir a los alumnos que escriban en la hoja de papel el resultado que mentalmente hayan obtenido y que vuelvan a dejar el lápiz sobre la mesa.

— Hacer preguntas similares a: "¿Quién ha obtenido 73?", "¿Quién 75?" (El resultado es 74).

— A continuación, el profesor expresará otro bloque de órdenes de cálculo y se repetirá el proceso anterior.

— Hay que tener en cuenta que el número de órdenes de cálculo en cada bloque, como la complejidad de las operaciones, dependerá del nivel real de los alumnos.

— Esta actividad puede resultar o muy fácil o, por el contrario, muy difícil: depende de si cada orden de cálculo en cada bloque se expresan con menor o mayor rapidez.

Para motivar a los alumnos más lentos a que puedan seguir el proceso entre una orden de cálculo y la siguiente se dejará una pausa suficiente que permita responder correctamente a estos niños.

Actividad 2.ª "Estrella de cálculo"

Desarrollo y observaciones:

— Entregar a cada alumno un gráfico similar al que se indica en la figura 1.

— Pedir a los niños que escriban en el cuadrado central de la estrella un número cualesquiera, el mismo para todos; por ejemplo, el 36.

— A continuación, el profesor expresará verbalmente las órdenes de cálculo que hay que realizar con el número central, una tras otra y con la pausa suficiente para que puedan resolverse. Los alumnos efectuarán mentalmente estas operaciones y escribirán en los cuadrados que representan las puntas de la estrella los resultados obtenidos de cada una de las operaciones.

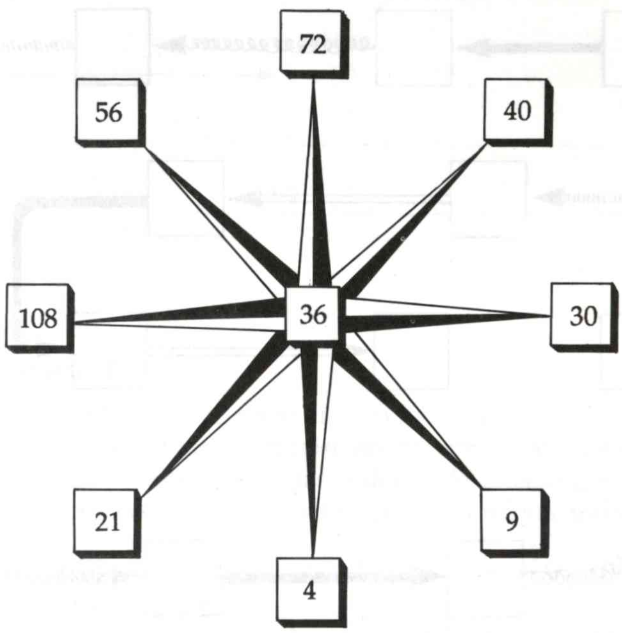


Figura 1

— El primer resultado se expresará en el cuadro superior, y los restantes, en los cuadrados que representan la punta de la estrella, siguiendo la dirección de las manecillas del reloj.

— En la actividad propuesta se han dado las siguientes órdenes de cálculo: "multiplicar por dos", "sumar cuatro", "restar seis", "dividir entre cuatro", "dividir entre nueve", "restar quince", "multiplicar por tres", "sumar veinte".

— La actividad es de desarrollo colectivo, es decir, la realizarán todos los alumnos a la vez; por lo tanto, hay que indicarles que cuando se comience a dar una orden de cálculo no se puede escribir el resultado de la anterior.

Actividad 3.ª "Espiral"

Desarrollo y observaciones:

— Cada alumno dispondrá de un gráfico como el de la figura 2.

— Pedir a los alumnos que escriban en el primer cuadrado un número cualquiera, el mismo para todos; por ejemplo, el 4.

— Hacer observar que a cada tipo de flecha le corresponde una orden de cálculo.

— Los alumnos realizarán mentalmente las operaciones que indican las flechas y escribirán los resultados en los cuadros correspondientes.

— Es conveniente que la presentación de estos gráficos a los alumnos se haga de forma gradual en cuanto al número de operaciones y a la complejidad de las mismas. Se comenzará proponiendo gráficos con una o dos operaciones y progresivamente se irán aumentando.

— Para la realización de esta actividad no es aconsejable fijar un tiempo determinado; sólo se hará, excepcionalmente, cuando se desee conocer la capacidad de cálculo de cada uno de los alumnos de clase.

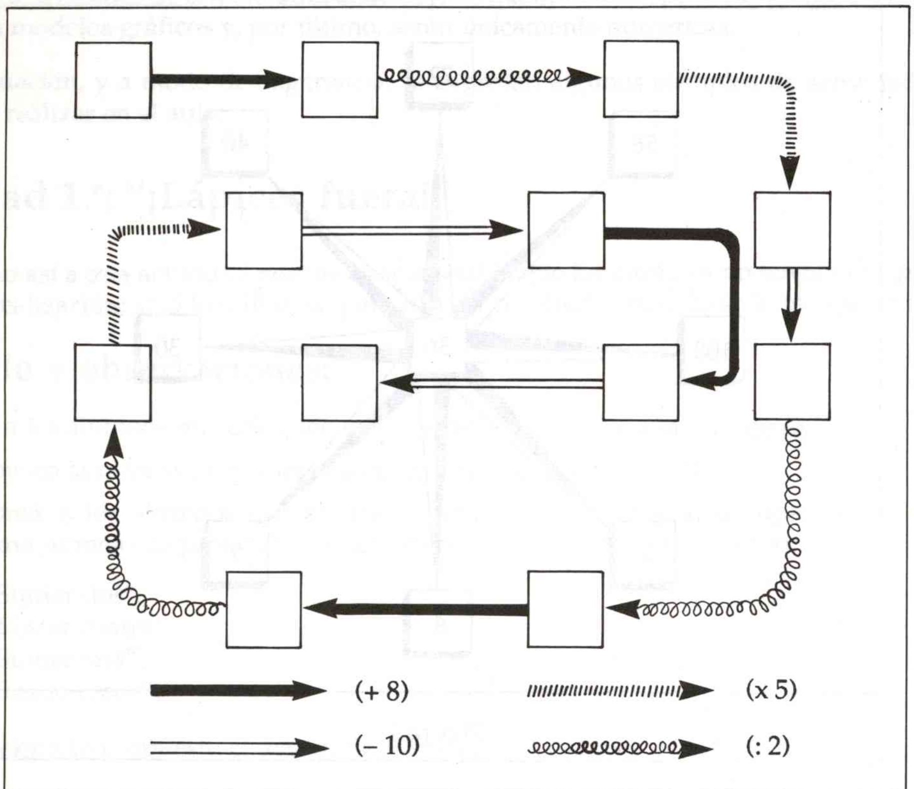


Figura 2

Actividad 4.ª

Desarrollo y observaciones:

— Para la sustitución de la formulación oral de las operaciones que deben realizar mentalmente los alumnos es muy indicado el gráfico representado en la figura 3.

— Cada alumno, partiendo del número inicial, resuelve mentalmente las operaciones y escribe el número resultante en el cuadro final.

— Es conveniente que todos los alumnos resuelvan esta actividad, y, por tanto, no es aconsejable fijar para su realización un tiempo determinado.

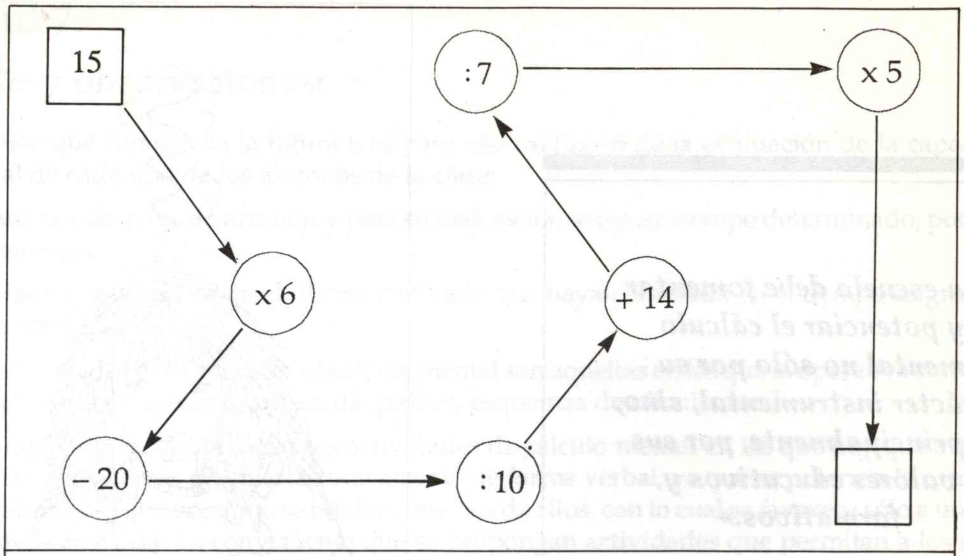


Figura 3

Actividad 5.ª

Desarrollo y observaciones:

— Cada alumno dispondrá de un gráfico como el de la figura 4.

— En el cuadrado inicial los alumnos escribirán un número cualquiera, el mismo para todos. A continuación, el profesor indicará verbalmente las órdenes de cálculo que los alumnos tienen que efectuar mentalmente, con las pausas suficientes para que sea el mayor número posible de alumnos quienes las realicen.

— Para facilitar la realización de esta actividad, los alumnos escribirán las órdenes de cálculo en los círculos y efectuarán mentalmente la operación.

— Se han de graduar el número y la complejidad de las órdenes de cálculo en función del nivel de los alumnos.

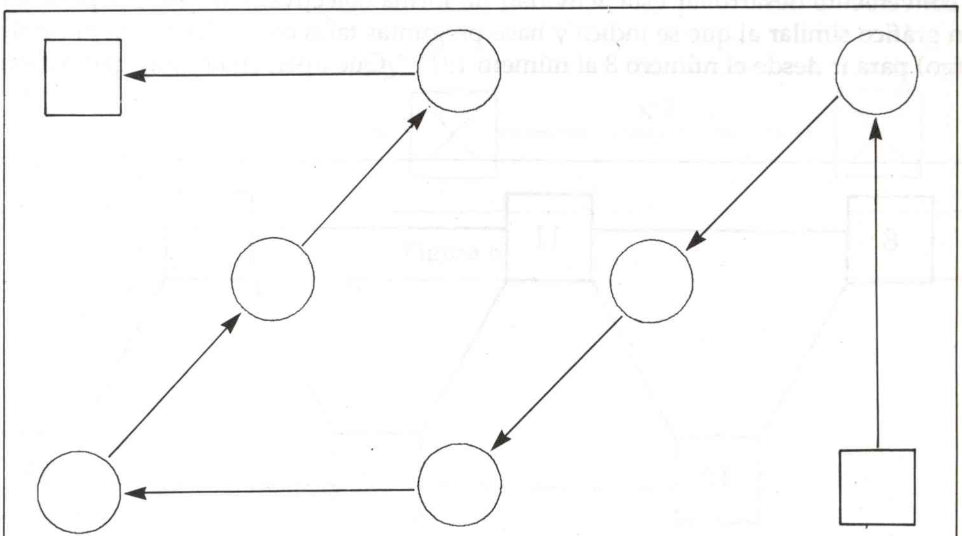


Figura 4

> *«La escuela debe fomentar y potenciar el cálculo mental no sólo por su carácter instrumental, sino, y principalmente, por sus valores educativos y formativos.»*

Actividad 6.ª

Desarrollo y observaciones:

— Presentando a los niños esquemas como el de la figura 5 también se desarrolla la capacidad de cálculo mental.

— Es conveniente desarrollar esta actividad de forma colectiva. Para ello, el profesor copia en la pizarra un gráfico similar al que se indica y hace preguntas tales como: "¿Cuál es el camino más corto (o más largo) para ir desde el número 8 al número 19?" "¿Qué operaciones hay que realizar?", etc.

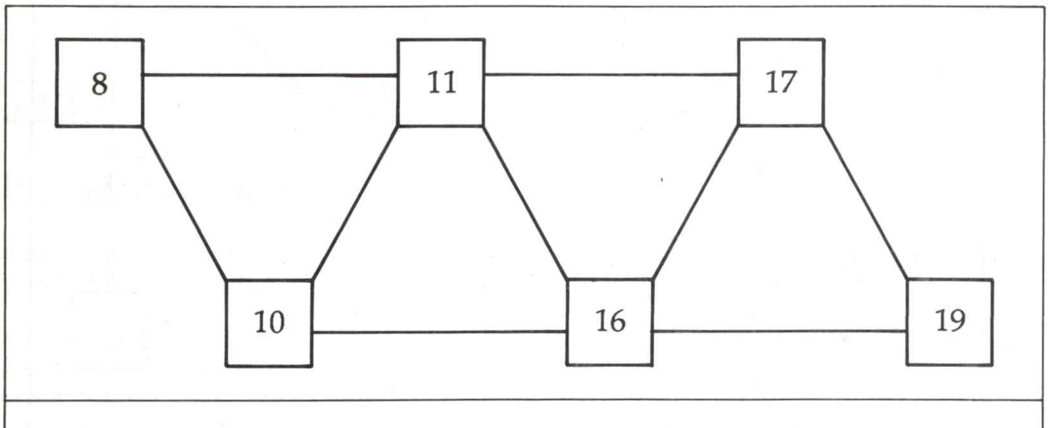


Figura 5

Actividad 7.ª

Desarrollo y observaciones:

— El gráfico que representa la figura 6 es para uso exclusivo de la evaluación de la capacidad de cálculo mental de cada uno de los alumnos de la clase.

— Cada alumno dispone de una hoja y para su realización se fija un tiempo determinado; por ejemplo cinco o diez minutos.

— Los alumnos sólo escribirán el último resultado que hayan obtenido en el tiempo asignado en el cuadrado que corresponda.

• Otras actividades que favorecen el cálculo mental son aquellas en las que la operativa con números naturales se presenta en cuadros, tablas, diagramas, esquemas de cálculo, etc.[2].

• Por último, es aconsejable evitar las actividades de cálculo mental en las que hay que expresar el resultado de las operaciones propuestas únicamente de forma verbal, ya que se potencia la competitividad entre los alumnos y provoca que se inhiban muchos de ellos, con lo cual se favorece sólo a unos pocos en perjuicio de la mayoría. Es conveniente que se propongan actividades que permitan a los alumnos expresar por escrito los resultados obtenidos. También, y para evitar la evidencia, la angustia... de los alumnos más lentos, las hojas de actividades se recogerán "cuando todos hayan acabado».

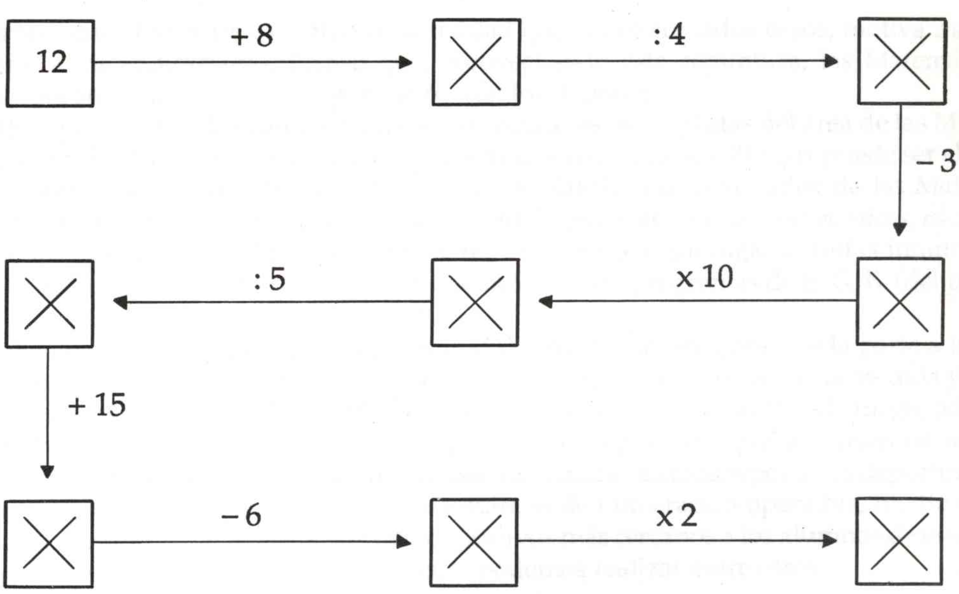


Figura 6

[2] Consultar el artículo "El cálculo puede ser divertido", en la revista *Nuestra Escuela*, número 53.

Las Matemáticas y el deporte

Manuel Aguilera Iglesias

En mi preocupación constante de intentar motivar a los alumnos en el área de Matemáticas, en procurar que esta asignatura resulte agradable, escojo en esta ocasión la interdisciplinariedad con el deporte.

Considero que el deporte es el tipo de actividad que, salvo contados casos, motiva más tanto a los niños como a los adolescentes. Pienso que, aprovechando esta coyuntura, las Matemáticas pueden obtener importantes dividendos en su relación con los deportes.

A ningún profesional de la enseñanza, y sobre todo a los especialistas del área de las Matemáticas, se le escapa la multitud de conexiones que tienen estas dos áreas y lo sencillo que puede ser el relacionar en una *programación* las actividades deportivas con los objetivos desarrollados de las *Matemáticas*, y si nuestro campo de mira se amplía a parcelas deportivas como *municipales, autonómicas, nacionales e internacionales*, los ejercicios y problemas que podemos realizar son sin lugar a dudas innumerables, y de cualquiera de los bloques temáticos que se contemplan en los programas de E. G. B. (del primer nivel al octavo).

Si analizamos los programas de los ciclos inicial y medio observamos que la parte a la que se le da mayor importancia es la numeración y la operativa, sin olvidar, por supuesto, la medida y la geometría.

¿Cómo podemos relacionar estos temas con las actividades deportivas? Desde luego, nos fijaremos en que los niños de esta edad juegan a correr. Es la edad propia para que se inicien en natación, judo, aprendan a montar en bicicleta y ya en porcentajes más bajos se interesen por otros deportes (fútbol, tenis, gimnasia, etc.). Pues bien, las actividades matemáticas de numeración operativa, medida, geometría y estadística las centraremos en estos aspectos deportivos más cercanos a los alumnos de estos niveles; por ejemplo, para efectuar ejercicios de numeración podemos realizar entre otros:

— Número de licencias y de clubs que había en España el 30 de diciembre de 1983:

Actividad	Núm. de licencias	Núm. de clubs
Fútbol	403.629	9.799
Judo	129.847	1.140
Tenis	9.429	801
Atletismo	40.150	542
Ciclismo	30.210	1.224
Natación	21.872	434
Gimnasia	13.343	222

A los alumnos les damos el cuadro fotocopiado sin las cantidades y les dictamos los números (ésta podía ser una práctica del cuarto al quinto nivel).

Medallas obtenidas por el deporte español durante 1983 en competiciones de carácter internacional:

Medallas de Oro: 181

Medallas de Plata: 198

Medallas de Bronce: 162

(práctica de numeración propia de los alumnos del C. I.).

— Pruebas más frecuentes en carreras pedestres y natación.

— Número de participantes en las distintas carreras populares.

— Como ejercicios de numeración decimal podemos utilizar los récords nacionales e internacionales de pruebas como las de natación o pedestres.

— Ejemplos: carreras pedestres (masculinas), en segundos:
pruebas de velocidad en natación (femeninas):

Prueba	**R. Nacional**	**R. Europeo**	**R. Olímpico**	**R. Mundial**
100 m	10,41	10,01	9,95	9,93
200 m	20,77	19,72	19,83	19,72
400 m	45,98	44,50	43,83	43,83

Prueba	**R. Nacional**	**R. Europeo**	**R. Olímpico**	**R. Mundial**
100 mL	57,84 seg.	55,18 seg.	54,79	54,79
200 mL	2 m 4,26 seg.	1 m 59,45 seg.	1 m 58,33	1 m 58,23
400 mL	4 m 8,27 seg.	4 m 8,07 seg.	4 m 8,76	4 m 6,28

Si a este tipo de ejercicios añadimos los tiempos que inviertan los niños en sus propias carreras conseguiremos un doble objetivo: 1.° que se interesen por las pruebas y éxitos del deporte, y 2.°, que les motive la numeración.

En el bloque del cálculo operativo las actividades, ejercicios y problemas a realizar son realmente variados y numerosos. A título de ejemplo:

- El número de clubs de fútbol en España en 1983 era de 9.799; de balonmano, 1.478, y de baloncesto, 7.627. ¿Cuántos clubs hay entre los tres deportes? ¿Cuántos clubs de baloncesto habría que crear para tener tantos como de fútbol?

- Si en España existen 1.869 equipos de voleibol y cada equipo tuviese 12 jugadores, ¿cuántos jugadores habría en total?

Pero si centrásemos todas nuestras actividades en las estadísticas deportivas caeríamos nuevamente en algo frío y poco emotivo, y al niño hay que motivarle constantemente con actividades lo más próximas a él, por lo que deberemos alternar los ejercicios desarrollados a partir de los datos que nos facilitan las noticias deportivas con aquellos que diariamente se desarrollan en su propio medio, en NUESTRA ESCUELA.

- En nuestro colegio hay 462 alumnos:

¿Cuántos equipos de fútbol podríamos formar? (11 jugadores por equipo). Siendo 6 el número de jugadores por equipo de voleibol, ¿cuántos equipos podríamos formar de este deporte?

• El número de alumnos que practican la natación en un centro de forma que en cada prueba participen el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos habrá en cada prueba?

¿Y qué decir de la relación con los bloques temáticos de *medida y geometría*?

¿Os dais cuenta de que el deporte es medida en todos sus aspectos?

• Observamos uno de los deportes que se pueden realizar con mayor facilidad por todos nuestros alumnos de E. G. B. de cualquier punto de España, y que bien orientado entusiasma hasta a los menos dotados.

El Atletismo

• En las carreras tenemos que realizar medidas de distancias. No pretenderé que se hagan mediciones superiores a los 200 m., pero carreras de 40 m. y 50 m., fácilmente realizables, nos permitirán el estudio del metro y del decámetro, y las carreras de 100 y 200 m. motivarán el estudio del hectómetro, preparando el kilómetro a partir de pruebas de tipo oficial como los 5.000 y 10.000 m. y los 20 y 50 km. marcha.

• El salto de longitud y altura pueden servirnos de base para el estudio de los submúltiplos del metro (decímetro y centímetro), y como ejercicios de clase podemos utilizar otras pruebas de lanzamiento, las cuales, al propio tiempo de servirnos como actividades matemáticas, nos permitirán ir dando a conocer a los niños los progresos que en esta clase de pruebas realiza el atletismo nacional e internacional, y, ¿por qué no?, motivando a los alumnos en la práctica de estos deportes.

Especialidad	R. Nacional	R. Europeo	R. Mundial	R. Olímpico
Altura	2,26 m	2,36 m	2,38 m	2,36 m
Longitud	8,23 m	8,54 m	8,90 m	8,90 m
Triple salto	16,69 m	17,57 m	17,89 m	17,39 m
Pértiga	5,45 m	5,83 m	5,83 m	5,78 m
Peso	18,40 m	22,22 m	22.22 m	21,35 m

Tanto a partir de los datos de los *récords* como de los ejercicios deportivos desarrollados por los alumnos podemos enunciar actividades y problemas para que manejen el SMD, en este caso en lo que se refiere a las unidades de longitud.

Por ejemplo:

• En la clase de gimnasia los alumnos han realizado la prueba de los 50 m. lisos siete veces. ¿Cuántos metros han recorrido en total? ¿Cuántos metros tendrán que recorrer para alcanzar la longitud de un kilómetro?

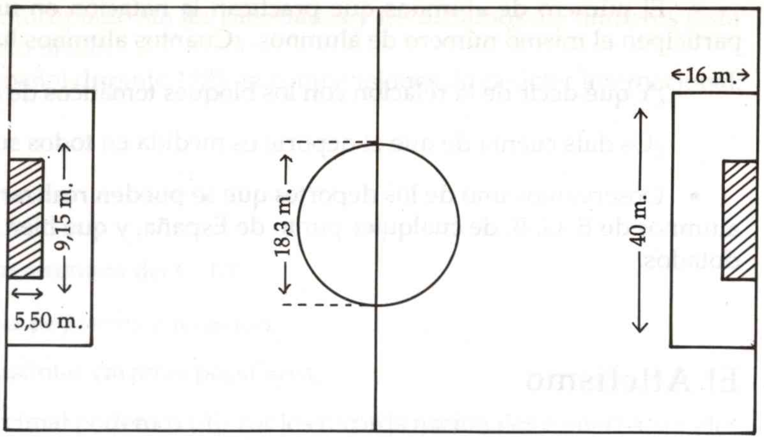
Un grupo de niños de la clase de 5.° de E. G. B. realiza carreras alrededor de una pista, relevándose cada 100 m.; al final de la prueba han recorrido 1,7 km. ¿Cuántos alumnos han realizado la prueba?

Averigua a partir de la tabla de récords nacionales y olímpicos los centímetros que les faltaban a los españoles para igualar el récord olímpico en las especialidades de altura, longitud y triple salto.

El atletismo nos va a permitir el estudio de medidas de tiempo (horas, minutos, segundos...) a partir de las carreras; medidas de peso (en las especialidades de lanzamientos: peso, disco, jabalina, martillo).

En los aspectos geométricos, una de las actividades más importantes será las superficies de los campos, sin olvidar, por supuesto, los volúmenes de balones, capacidades pulmonares, respiración, etc.

«*Como ejercicios de numeración decimal podemos utilizar los récords nacionales.*»



Veamos algunos de los ejercicios y problemas que se pueden plantear en lo que se refiere a superficies de los campos que se utilizan en los distintos deportes.

- **Determinar la superficie de un campo de fútbol cuyas dimensiones son 110 m. de largo por 72 m. de ancho.**
- **Dado el esquema de un campo de fútbol, determina las distintas superficies de las zonas enmarcadas.**
- **En el patio de nuestro colegio determinar la posibilidad de trazar un campo de: balonmano, baloncesto y voleibol, siendo las dimensiones para la práctica de estos deportes en la escuela las siguientes:**

Deporte	**Largo**	**Ancho**	**Categoría**
Balonmano	26-32 m	14,16 m	infantil
Baloncesto	20 m	12 m	mini
Voleibol	9 m	6 m	mini

- **Indiquemos algún ejercicio para la práctica de volumen y capacidad.**
- Un niño, al hacer una carrera durante dos minutos, realiza 28 inspiraciones por minuto, introduciendo en cada inspiración 12 dl. ¿Cuántos litros de aire introducirá en sus pulmones a lo largo de la carrera?
- La piscina a la que han ido los alumnos de nuestro centro tiene las siguientes dimensiones: profundidad media, 1,8 m.; longitud, 25 m.; altura, 18 m. Calcula:

a) El volumen en metros cúbicos.
b) La cantidad de litros de agua que precisa para llenarse.
c) El tiempo que tardarán en llenarla, mediante cuatro caños que arrojan 400 l. por minuto cada uno de ellos. (Problema propio para segunda etapa.)

Como se puede apreciar en la lectura de estas líneas, los problemas que podemos realizar pueden ser de todos los tipos que figuran en los Programas Oficiales del área de Matemáticas, sin olvidarnos del bloque de estadística, que trabajado a los niveles de los ciclos iniciales y medios lo podemos realizar a partir de las preferencias de los niños de nuestras clases, observando cómo van variando éstas según vamos avanzando de nivel.

Estos muestreos deben servirnos para orientar las actividades deportivas a los gustos de nuestros alumnos, y de esta forma obtener resultados más positivos en el área de la Educación Física, fundamental en la formación integral de los niños.

"Para desarrollar el número entero tenemos una fuente inagotable en los resultados."

Este artículo quedaría incompleto si no ampliásemos las actividades hacia la segunda etapa, dado que hasta este momento nos hemos centrado más en los alumnos de los ciclos inicial y medio.

Ya los intereses de los niños de doce a catorce años en los aspectos deportivos se han desarrollado hacia actividades más complejas y diversas, por lo que sería bueno que recibiesen información de la mayor parte de los deportes que en su localidad pueden practicar.

Sin olvidar los ejercicios que dimanen de sus propias actividades, realizaremos problemas variados con los datos que podamos recopilar a partir de la prensa, en su sección de deportes, así como de los datos que nos pueden proporcionar entidades como: Concejalía de Deportes de nuestro Ayuntamiento, Comunidad o el propio Consejo Superior de Deportes.

- Por ejemplo, para desarrollar el número entero, tenemos una fuente inagotable en los resultados deportivos de las distintas competiciones nacionales y comarcales.
- Para efectuar problemas de porcentajes podemos recurrir a cualquier tipo de actividad deportiva actualizada, como por ejemplo:
- En los partidos de fútbol de la Primera División se han producido los siguientes resultados: siete victorias del equipo de casa y dos empates. Expresa en tantos por ciento estos resultados.
- En una competición de atletismo internacional se han realizado 45 pruebas. Si de las 135 medallas en juego, España ha conseguido 28, ¿cuál ha sido el porcentaje de puestos de honor conseguidos por el deporte español en esta prueba?
- Si en nuestro Centro, de 240 alumnos que están matriculados en segunda etapa, 45 practican fútbol, 53 baloncesto y 37 voleibol, indica en porcentajes los alumnos que se dedican a estas modalidades deportivas.
- Para las actividades de estadística pienso que no es necesario dar ejemplos, puesto que cualquiera puede realizarlas a partir de los torneos deportivos internos, externos o de ámbito regional, etc.

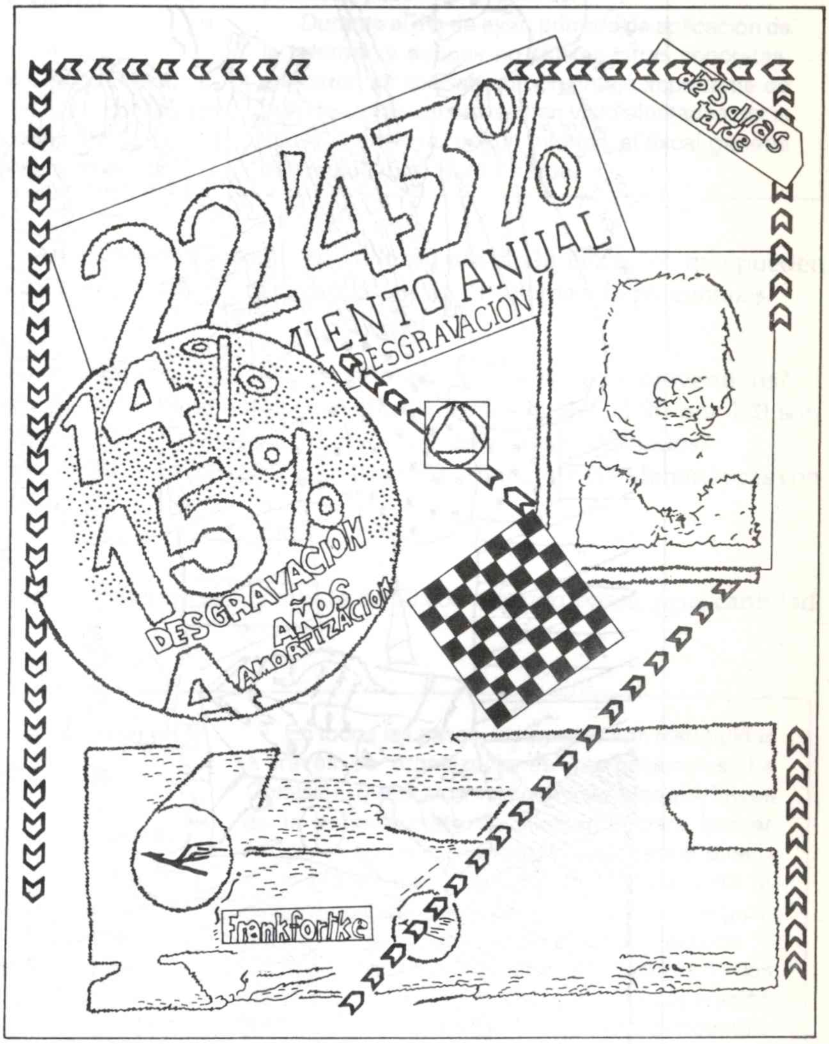
Espero que la intención de este artículo de la utilización del deporte en actividades matemáticas para el bien de los alumnos de NUESTRA ESCUELA la haya conseguido. Ya sé que con él no descubro nada nuevo, pero sí deseo crear una inquietud entre los enseñantes y recordarles una vez más que la relación de las Matemáticas con las demás áreas es posible.

Fuente de información: Consejo Superior de Deportes.

Las Matemáticas y las noticias

Manuel Aguilera Iglesias

¿Cuántas veces y en cuántos libros los profesionales de la enseñanza de las Matemáticas nos hemos preguntado y hemos leído que para motivar a los alumnos en este área es absolutamente necesario que las actividades que se realicen sean de su propio entorno, que los niños comprueben que la enseñanza que reciben les sirve para algo en la vida real? Pienso que incontables.



Cada vez que realizamos una programación lo tenemos en cuenta y queda reflejada nuestra intención, pero..., unas veces los programas oficiales, otras la falta de tiempo, y otras circunstancias que se nos presentan, hace que caigamos en una y otra ocasión en la comodidad del problema de la actividad programada en los LIBROS DE TEXTO, con lo que la motivación desaparece y en el mejor de los casos queda muy disminuida. (Y, por supuesto, no deseo con estas palabras anular los libros de texto, sino que éstos deben ser una orientación de nuestras actividades y auxiliar eficaz, pero nunca debemos ser esclavos de ellos, no han de ser nuestro NORTE Y GUIA, sino unos colaboradores importantes, de tal modo que no anulen nuestra actividad y, sobre todo, la de nuestros alumnos.)


EL PAIS
EL PAIS
PITURRUKI
EXPO
Bela 84

Me preocupa, como a otros muchos compañeros, el fracaso de nuestros alumnos cuando llegan al final de la E. G. B. y me preocupa sobre todo el fracaso en MATEMATICAS por varias razones fundamentales, entre otras: por ser especialista en el área y por ser las Matemáticas las que, por desgracia, se llevan la palma en los mismos.

Y realmente, pienso, no es tan difícil encontrar el tema de actualidad para trabajar la materia que nos ocupa; basta con tomar un periódico cualquiera, de un día tomado al azar, y observaremos que prácticamente la totalidad de sus páginas contiene material y actividades para realizar las propias de un día normal de clase.

Veámoslo:

Tengo ante mí un periódico rescatado de los papeles, cuyo destino probablemente sería convertirse en materia prima, para reconvertirse, por qué no, en un nuevo periódico; es del día 19 de julio de 1983, pero que podría haber valido cualquier otro, cosa que puede comprobar aquel que se haya tomado la molestia de leer hasta este punto.

Excarcelados los primeros reclusos beneficiados por la reforma del Código Penal

La aplicación de la reforma del Código Penal, que entró en vigor el pasado domingo, junto con las modificaciones de la Ley de Enjuiciamiento Criminal, producirá la salida de las cárceles, antes del mes de octubre, de unos 5.000 reclusos, de los que un 90 por 100 son preventivos. En la actualidad la población reclusa española asciende a 12.534 penados y 7.074 preventivos.

Durante el día de ayer, primero de aplicación de la reforma, y aunque no existen cifras concretas, quedaron en libertad un porcentaje importante de presos, cuyas causas se han visto afectadas por la nueva normativa, según informó el fiscal general del Estado, Luis Burón Barba.

De esta noticia podemos "sacar" una serie de actividades, válidas para cualquier nivel, que pueden ir desde la propia numeración (lectura y escritura de cantidades), hasta problemas de porcentajes.

Ejemplos:

- ¿Cuántos son los reclusos que existen en las cárceles españolas, entre penados y preventivos?
- Si en el mes de octubre saldrán de las cárceles 5.000 reclusos, de los cuales el 90 por 100 son preventivos, ¿cuántos de los excarcelados serán de los preventivos y cuántos de los penados?

Al propio tiempo, esta noticia nos permitiría realizâr la interdisciplinariedad de las Matemáticas con otras áreas (las Ciencias Sociales).

Ejemplos:

- Si la C. E. E. destina 33 millones de pesetas para la ayuda de 50.000 nicaragüenses, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno?

Nicaragua, destinataria de ayuda de urgencia de la C. E. E.

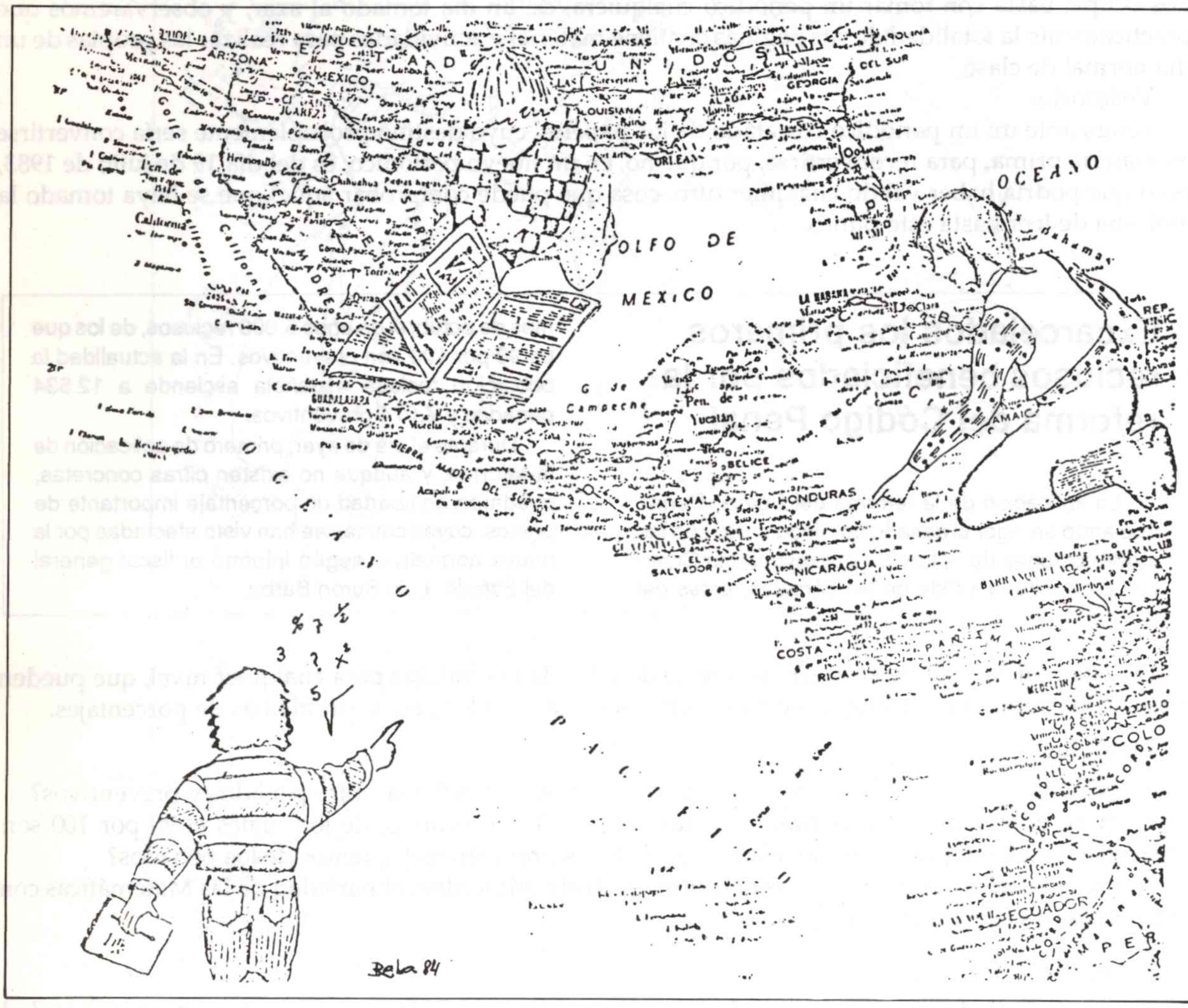
Andrés Ortega, **Bruselas**

La Comisión Europea, órgano ejecutivo y burocrático de la C. E. E., decidió ayer una ayuda de urgencia, por un valor total de 123 millones de pesetas, a favor de Paraguay, Argentina, Bolivia y Nicaragua. A este último país van destinados 33 millones de pesetas para ayudar a más de 50.000 personas, víctimas de los enfrentamientos guerrilleros entre Nicaragua y Honduras en el norte del país.

En todos los casos, las ayudas son distribuidas a través de organizaciones internacionales. La Comisión, que otorga esta cantidad a los que huyen de la frontera norte de Nicaragua para buscar refugio en zonas más seguras, entregará el dinero a los Médicos sin Frontera de Bélgica, para la compra de medicamentos, y a Oxfam, de Bélgica, para conseguir víveres y utensilios domésticos.

Por su parte, los Ministros de Exteriores de "los Diez" debatieron, en el marco de la cooperación política de la C. E. E., la situación en Centroamérica, y expresaron, según fuentes comunitarias, su satisfacción por el buen funcionamiento del grupo de Contadora, al que "hay que apoyar".

- Calcula el interés que producirían los 123 millones de pesetas de la ayuda de la C. E. E. a países de América Central y del Sur, durante tres años, a interés simple del 8 por 100.
- Continuando el análisis de las páginas del periódico podemos observar que efectivamente cualquiera de ellas nos permitirá seguir realizando ejercicios, problemas y actividades de Matemáticas:



> ***«Utilizar el periódico en el aula nos permitirá aficionar a los alumnos a la lectura de la prensa.»***

Página 8:

«Revista de la prensa»

De este artículo podemos realizar diferentes problemas que van desde operaciones con los números decimales, siguiendo por otros de porcentajes y también problemas de creatividad por parte de los alumnos. Al mismo tiempo podrán realizarse trabajos en el área de las Ciencias Sociales sobre los rendimientos de los trabajadores, así como los conceptos de huelga, asalariados, empresarios, sindicatos, etc.

Revista de la prensa

El Nuevo Lunes

Bajan los conflictos y mejora la productividad

El Ministerio de Economía acaba de hacer público un interesante informe sobre la negociación colectiva de 1982. Una de las conclusiones más importantes de este estudio es que durante el pasado año ha descendido espectacularmente la conflictividad laboral, ha bajado el absentismo y se ha elevado la productividad del trabajo. Como consecuencia de ello, los responsables del estudio señalan que la retribución por hora realmente trabajada se ha incrementado de forma más moderada de lo que parece.

Hay que señalar antes de nada que el estudio se basa en una muestra de 262 grandes empresas que dan ocupación a 750.000 trabajadores, lo que representa la mitad de los empleados en grandes empresas y las tres cuartas partes de los asalariados que rigen sus condiciones de trabajo por convenios de empresa.

En efecto, durante el pasado año las horas de huelga por empleado fueron 4,57, menos de la mitad que en 1981 (10,83), y el mismo descenso puede observarse en la plantilla afectada, que pasó desde el 40,75 por 100 en 1981 hasta el 17,37 por 100 en 1982. Este hecho ha sido valorado positivamente por los empresarios, quienes señalaban hace siete años (encuesta de la C. E. O. E.) que la conflictividad era su primera preocupación.

«Por su interés intradisciplinario con otras áreas (naturales y sociales), destaco la página del tiempo, donde además de la gran variedad de ejercicios que se pueden realizar (gráficas, frecuencias, etc.), podemos hacer estudios comparativos con el entorno.»

El Gobierno adquiere numerosos compromisos legislativos a requerimiento del Parlamento

B. DE LA C., Madrid

El ejercicio de la función parlamentaria de control sobre el Gobierno durante la actual legislatura se ha traducido en la aprobación de una serie de requerimientos al Ejecutivo, la mayoría de ellos sin fecha fija, que vinculan al Gabinete socialista. El Congreso ha comprometido al Gobierno para que establezca ayudas para el acceso a la vivienda por quienes no alcancen el salario mínimo, y la remisión, antes de final de 1983, de sendos proyectos de ley sobre subvenciones estatales a la Prensa periódica y sobre estatuto de la agencia Efe.

El primero de los compromisos citados fue adoptado por el Pleno del Congreso del pasado 28 de junio, en el que se aprobó que el Gobierno incluya en la futura ley de protección pública de la vivienda fórmulas de ayuda para personas que no alcancen el salario mínimo. En la misma sesión plenaria se acordó que el Gobierno remita a las Cortes, antes del 31 de diciembre de 1983, uno o varios proyectos de ley que regulen el sector público empresarial, así como que informe con carácter trimestral al Congreso sobre los niveles de empleo y para que establezca "con urgencia" acuerdo adoptado el 15 de marzo de 1983 medidas de ordenación de las actividades extractivas a cielo abierto.

Otros emplazamientos de la Cámara Baja al Gobierno tienen como objeto que remita un proyecto de ley cambiaria y del cheque antes del 10 de febrero de 1984 y un proyecto de ley de aguas en noviembre de 1983, y que proceda a la regulación de las facultades provisionales de los ingenieros técnicos antes de final del año actual.

Mil preguntas de la oposición

Como consecuencia de acuerdos del Senado, el Gobierno deberá comparecer ante la Cámara Alta para declarar sobre las medidas adoptadas para combatir los daños causados por los vientos huracanados en las islas de Hierro y La Gomera, así como aplicar con el máximo rigor la normativa taurina en la actual temporada.

Dentro de la actividad de control parlamentario, y al margen de la actividad más conocida de las interpelaciones y preguntas orales planteadas, el total de las preguntas presentadas por escrito al Gobierno durante este período fue de 772 en el Congreso —de las que se han contestado 596— y 217 en el Senado, de las que se contestaron 195.

Es de destacar que, en todo caso y a diferencia de lo que ocurría en la anterior Legislatura, ninguna de las contestaciones se ha producido fuera del plazo previsto en el Reglamento.

El total de interpelaciones presentadas fue de 28 en el Congreso y 17 en el Senado. Las peticiones de documentación y comparecencias fueron 40 en la Cámara Baja y 17 en la Alta.

Por lo que respecta a la Comisión de Peticiones, se registraron 96 en el Congreso frente a 80 en el Senado.

> ***«En este artículo se pueden realizar actividades relativas al espacio entre fechas para la ejecución de los compromisos.»***

En este artículo se me ocurre realizar actividades relativas al espacio entre fechas para la ejecución de los compromisos del Gobierno; también podríamos hacer sencillos ejercicios de numeración.

Tendríamos material para hablar de las Cortes, etc.

Continuando el análisis del periódico comprobaremos que todas las páginas son válidas para la realización de distintas actividades dentro del área y, por supuesto, con otras áreas. De esta forma, EL PERIODICO SERA UN METODO DE INTERDISCIPLINARIEDAD ENTRE LAS DISTINTAS MATERIAS DE LA E. G. B.

Así, una por una, prácticamente todas las páginas del periódico nos van dando noticias de las que podemos obtener buenos rendimientos matemáticos para la actividad escolar (hasta los anuncios y chistes del periódico serían válidos con un poco de imaginación y la creatividad de alumnos y profesores), pero donde la fuente es ya inagotable es en la sección económica:

Cotizaciones en la Bolsa:

— Porcentajes.
— Pérdidas y ganancias.
— Problemas de estadísticas.
— Frecuencias.
— Diagramas, etc.

Mercados de divisas:

— Evolución de los valores de las monedas y problemas sobre los mismos.
— Proporcionalidad.
— Gráficas de valores, etc.

Mercados de metales:

— Problemas sobre los valores de los distintos metales: oro, plata, platino, cobre, aluminio, hierro, chatarra, etc.

«Todas las páginas del periódico nos van dando noticias de las que podemos obtener buenos rendimientos matemáticos para la actividad escolar.»

MERCADO DE DIVISAS

	Comp.	Vend.
1 dólar EE. UU.	147,022	147,382
1 dólar canadiense	119,345	119,784
1 franco francés	19,017	19,076
1 libra esterlina	226,355	227,493
1 libra irlandesa	180,101	161,132
1 franco suizo	69,121	69,454
100 francos belgas	284,571	286,123
1 marco alemán	57,102	57,353
100 liras italianas	9,651	9,681
1 florín holandés	50,994	51,208
1 corona sueca	19,182	19,254
1 corona danesa	15,919	15,976
1 corona noruega	20,135	20,212
1 marco finlandés	26,397	26,509
100 chelines australianos	810,708	815,391
100 escudos portugueses	124,489	125,005
100 yens japoneses	61,114	61,391

Fuente: Bolsa de Madrid.

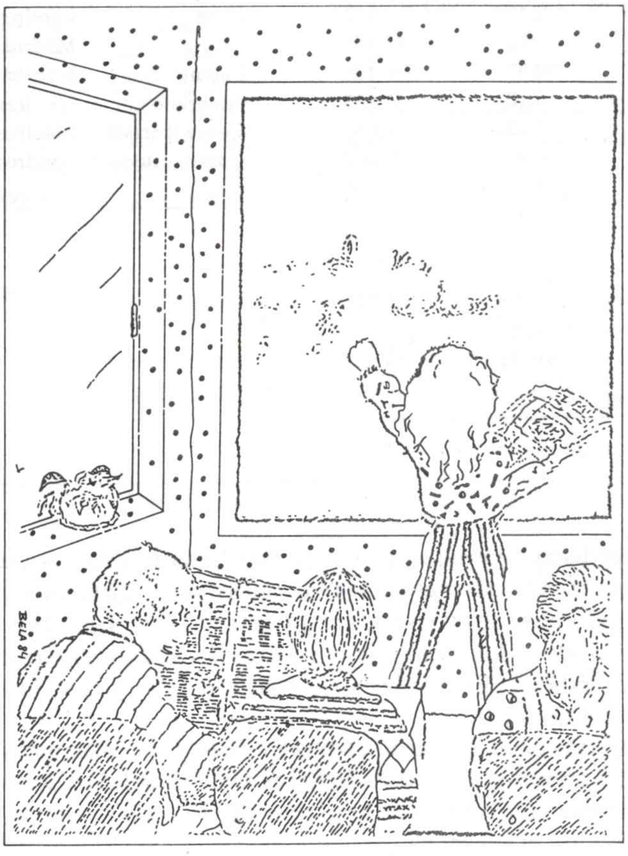
MERCADOS DE METALES

Oro	Londres	422.75 S/onza.
	Madrid (Ind)	2.082.85 Ptas./gr.
	Madrid (Man)	2.162.96 Ptas./gr.
	París	105.700 Fr./kg.
	Zurich	426 S/onza.
Plata	Londres	12.033 Civ./onza
	Madrid	65.140 Ptas./kg.
Platino	Madrid	2.616 Ptas./gr.
Aluminio	Londres	980 £/Tm.
Cobre (barras)	Londres	1.121.50 £/Tm.
Cobre (cátodos)	Londres	1.080 £/Tm.
Estaño	Londres	8.745 £/Tm.

Por su interés de interdisciplinariedad con otras áreas (naturales y sociales), destaco la página del tiempo (página siguiente), donde además de la gran variedad de ejercicios que se pueden realizar (gráficas, frecuencias, etc.), podemos hacer estudios comparativos con el entorno y el resto de los lugares que se especifican, familiarizándose los alumnos con otras localidades, nacionales y extranjeras, hacer estudios de la España húmeda y la España seca, de los diferentes climas, de la sucesión de las estaciones en las distintas partes del mundo, etc.

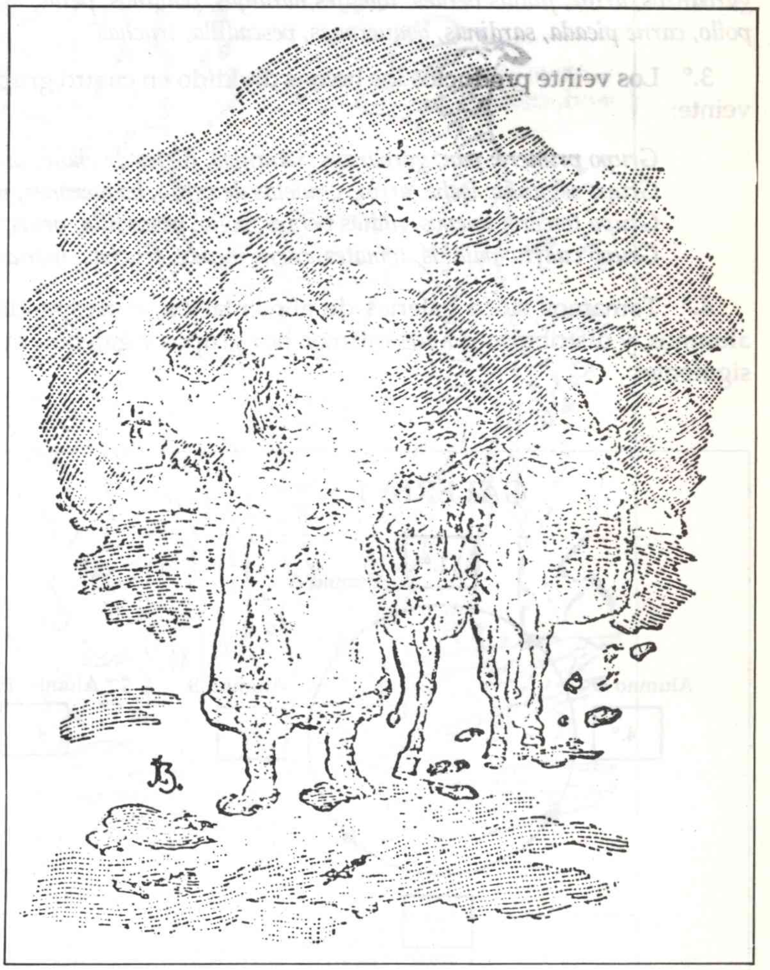
No deseo extenderme más en este artículo. Mi intención a través de estas líneas, pienso ha quedado suficientemente clara; sólo añadir que además de haber visto la utilidad del periódico en el aula, nos permitirá aficionar a los alumnos a la lectura de la prensa diaria y a interesarse por las noticias diarias que se producen en su medio y en el exterior.

ESPAÑA		MAX.	MIN.			MAX.	MIN.	EXTRANJERO		MAX.	MIN.
Albacete	C	34	18	Madrid	C	32	15	Amsterdam	A	23	16
Alicante	Q	30	21	Málaga	C	32	17	Angeles, Los*	Q	27	19
Almería	C	29	20	Melilla	A	25	21	Atenas*	C	33	23
Avila	A	25	10	Murcia	O	34	22	Beirut	C	35	24
Badajoz	C	30	17	Orense	A	25	13	Bonn	S	27	16
Barcelona	C	30	22	Oviedo	P	22	17	Bruselas	A	25	16
Bilbao	Q	31	21	Palencia				Buenos Aires*	D	3	2
Burgos	C	30	16	Palma	C	37	17	Cairo, El	C	34	23
Cáceres	C	28	18	Palmas, Las	C	26	21	Caracas*	Q	29	20
Cádiz	A	25	20	Pamplona	C	34	17	Chicago*			
Castellón	C	30	21	Pontevedra	P	23	15	Copenhague	A	25	17
Ceuta	C	26	17	Salamanca	C	20	12	Estocolmo	A	18	15
Ciudad Real	C	31	18	San Sebastián	C	32	18	Francfort	C	29	20
Córdoba	C	33	17	S. C. Tenerife	C	27	22	Ginebra	C	31	18
Coruña, La	P	23	16	Santander	C	27	20	Lisboa	A	24	17
Cuenca	C	32	12	Santiago de C.	P	21	12	Londres	C	27	19
Gerona	C	32	17	Segovia	C	28	14	México	Q	24	12
Gijón	P	21	19	Sevilla	C	32	16	Miami	Q	26	3
Granada	C	33	15	Soria	C	29	14	Moscú	A	23	14
Guadalajara	C	31	15	Tarragona	C	27	23	Nueva York*	D	34	23
Huelva	C	26	19	Teruel	C	31	17	Oslo	P	27	12
Huesca	C	32	18	Toledo	C	33	17	París	C	27	20
Ibiza	O	29	23	Valencia	C	28	22	Rabat	A	25	17
Jaén	C	33	19	Valladolid	C	31	11	R. de Janeiro*	P	32	8
León	A	25	14	Vigo	P	21	15	Roma	C	30	19
Lérida	C	34	20	Vitoria	C	33	18	Tokio*	Q	26	20
Logroño	C	34	17	Zamora	C	26	16	Viena	C	31	19
Lugo	P	22	12	Zaragoza	Q	35	21	Zurich	C	31	17



Las Matemáticas y la cesta de la compra

Manuel Aguilera Iglesias



«No es una novedad el binomio Matemáticas-cesta de la compra. De siempre, desde que el hombre comercia con sus semejantes, está relacionando estos términos, y antes de que existiera ese polémico intermediario "Don Dinero" era más complicado. Ahora el problema ha quedado reducido a eso, "al dinero": que si el poder adquisitivo, que si la devaluación de la moneda, que si la inflación, que si el paro, que si los intermediarios...

Pero no deseo meterme en discusiones filosófico-matemáticas, que "autores hay" que ya lo han tratado: Platón y Aristóteles, Leibniz y Hegel; Frege, Saussure, Jakobson y Freud.» (Artículo de Miguel Sánchez Mazas sobre el libro de Víctor Gómez Pin-Javier Echevarría *Límites de la Conciencia y del Matema*». *El País*, 30 de octubre de 1983.)

Lo único que pretendo en esta exposición es contarles una experiencia que estamos llevando a cabo con los alumnos de E. G. B. del C. F. Párroco D. Victoriano, un Centro Público con 40 alumnos por clase en una zona de Alcorcón (ciudad dormitorio de Madrid), que ya comienza a dar sus frutos y que pensamos puede llevarse a cabo en cualquier Centro de España.

Objetivos

1. Vivenciar las Matemáticas.
2. Realizar un estudio socioeconómico de la localidad y del barrio.
3. Investigar la variación de productos según la época del año.
4. Investigar los pasos que siguen los distintos alimentos desde su origen hasta el consumidor.
5. Investigar la variación de costos de un mismo producto de unos mercados a otros.
6. Realizar un estudio a medio y largo plazo sobre la carestía de la vida.
7. Relacionar el barrio con su mercado.
8. Buscar la interdisciplinariedad de las Matemáticas con otras áreas.
9. Imbuir en los alumnos la apreciación del costo de los alimentos.
10. Inculcar en los alumnos el sentido crítico sobre el control de calidad de los alimentos.

Explicación de la tarea

1.° En los primeros días del curso, cada uno de los ochenta alumnos del Sexto Nivel de E. G. B. presentaron los veinte productos alimenticios que consumen con mayor frecuencia en sus casas (lo que nos ha permitido realizar un estudio socioeconómico de las familias de nuestro Centro).

2.° Con estos productos presentados por cada uno de los alumnos hemos elaborado "una cesta" formada por los productos de mayor frecuencia de consumo, que resultaron ser: *pan, leche, huevos, patatas, garbanzos, arroz, judías verdes, tomates,naranjas, plátanos, peras, manzanas, filetes de choto, chuletas de cerdo, pollo, carne picada, sardinas, boquerones, pescadilla, truchas.*

3.° Los veinte productos los hemos dividido en cuatro grupos, formados cada uno por cinco de los veinte:

Grupo primero: pan, garbanzos, naranjas, filetes de choto, sardinas.
Grupo segundo: leche, arroz, chuletas de cerdo, boquerones, plátanos.
Grupo tercero: huevos, judías verdes, pollo, pescadilla, peras.
Grupo cuarto: patatas, tomates, carne picada, truchas, manzanas.

4.° Tomamos cinco galerías de alimentación, correspondientes a los distintos domicilios de los alumnos, y distribuimos a los mismos por grupos y galerías, quedando esquemáticamente de la forma siguiente:

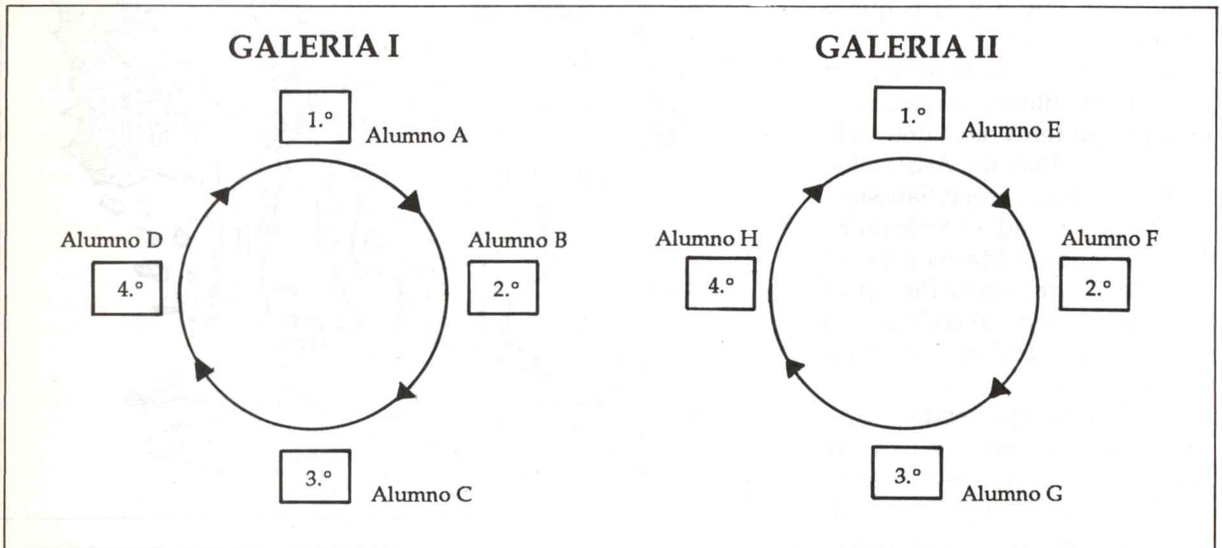


Figura 1

De esta forma, cada cuatro niños componen un equipo, entre los cuales completan los veinte productos de la cesta. En cada muestreo, salen los cuatro componentes del grupo a la galería que les corresponde y toman los datos de los cinco productos que en esa quincena deben investigar completando la cesta con los precios tomados por sus compañeros, pero a la quincena siguiente variarán de alimentos de tal forma que cada cuatro muestreos todos han pasado por los veinte así:

El 29-9-83, el ALUMNO "A" recoge los precios de:
pan, naranjas, garbanzos, filetes de choto, sardinas.
El 14-10-83:
leche, arroz, chuletas de cerdo, boquerones, plátanos.
El 28-10-83:
huevos, judías verdes, pollo, pescadilla, peras.
El 11-11-83:
patatas, tomates, carne picada, truchas, manzanas.

Completando de esta forma su ciclo.

El alumno "B" comienza por el grupo de alimentos segundo y sigue con el tercero y el cuarto, para terminar con el primero. Y así sucesivamente.

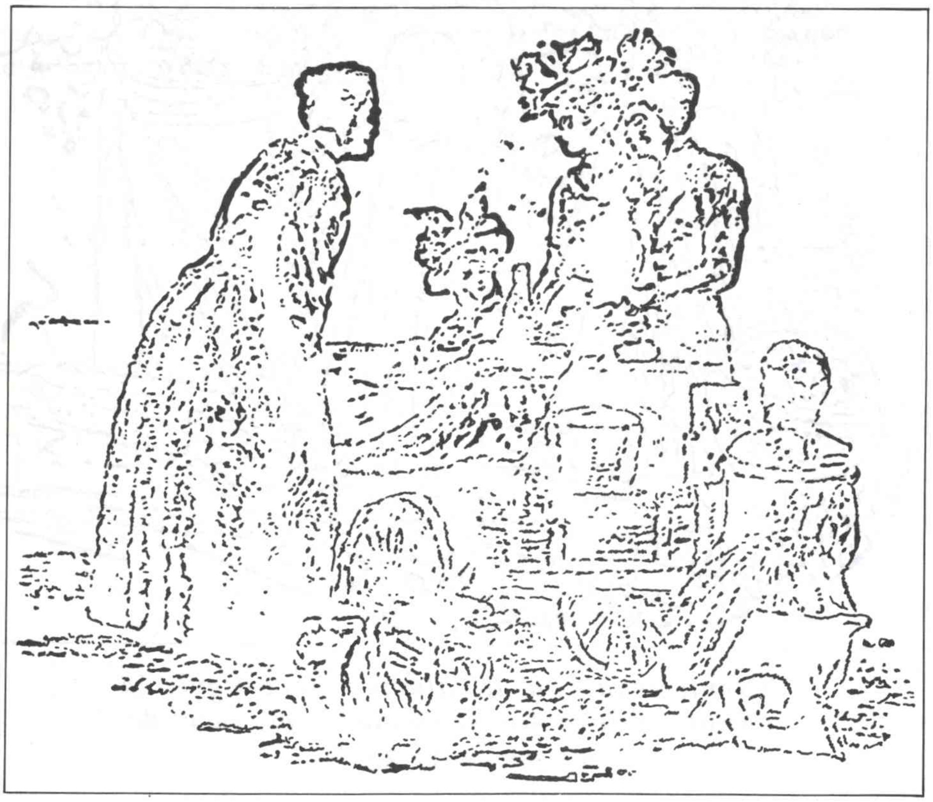
"Es interesante que los alumnos investiguen la variación de costos de un mismo producto de unos mercados a otros."

Recogida de datos

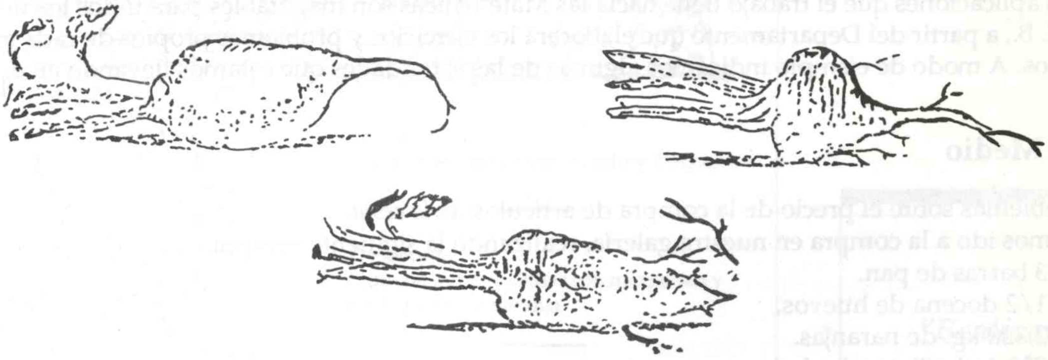
1.° Una vez explicada con detalle la tarea, a cada alumno le proporcionamos varias fichas, como la que reproducimos (Ficha 1):

PRODUCTO	FECHA-PRECIO 29-9-83	14-10-83	28-10-83	11-11-83	25-11-83
Pan (pistola)					
Leche					
Huevos					
Patatas					
Garbanzos					
Arroz					
Judías verdes					
Tomates					
Naranjas					
Filetes de choto					
Chuletas de cerdo					
Pollo					
Carne picada					
Sardinas					
Boquerones					
Pescadillas					
Truchas					
Plátanos					
Peras					
Manzanas					

Ficha 1



2.° En las fechas que se indican (cada quince días y a ser posible siempre en viernes), los alumnos recogen los datos que les corresponden, yendo juntos los cuatro compañeros que forman los equipos y en el domicilio de cada uno de ellos los pasan, los de todos a su ficha, comentando las variaciones que se han producido respecto a la quincena anterior. Cuando éstas son muy acusadas deben investigar las causas:



Ejemplo: Las naranjas de 160 pesetas el kilogramo pasan en una quincena a valer prácticamente la mitad. Investigando las causas llegan a las siguientes conclusiones:

a) Que en el primer muestreo, las naranjas eran de cámara, guardadas de la temporada anterior, y debido a la escasez y la demanda, el precio se eleva.

b) Que las naranjas cuyo precio se ha recogido en el segundo muestreo son ya de la campaña actual, por lo que al haber mayor cantidad hace que el precio de las mismas adquiera valores más reales.

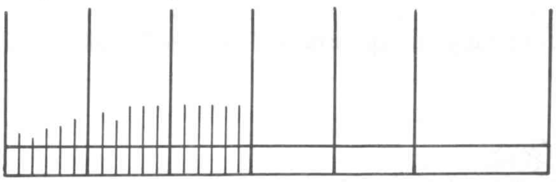
c) Que el precio también ha influido por ser muy ácidas y la demanda no es elevada.

3.° Al día siguiente de clase de Matemáticas son recopilados los datos, comprobándose los posibles fallos y despistes que pudieran haberse producido.

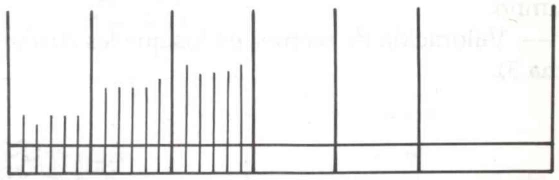
4.° Corregimos las fichas, y los datos son llevados a unas gráficas de barras donde figuran las cinco galerías en distintos colores (Ficha 2).

GALERIA I: en azul; II: en rojo; III: negro; IV: verde; V: marrón

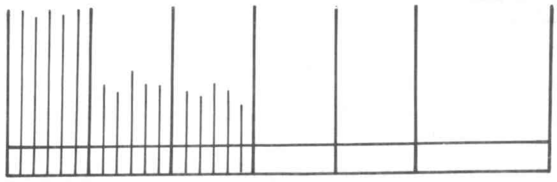
PAN
(2 mm ~ 1 pta.; nivel de referencia, 20 ptas./pistola)



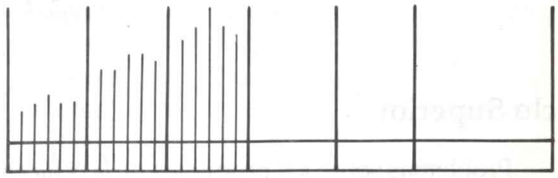
POLLO
(1 mm ~ 4 ptas.; nivel de referencia, 150 ptas./kg.)



NARANJAS (de mesa)
(1 mm ~ 3 ptas.; nivel de referencia, 50 ptas./kg.)



TRUCHAS
(1 mm ~ 5 ptas.; nivel de referencia, 250 ptas./kg.)



Ficha 2

5.° Las gráficas quedan expuestas en los corchogramas de las clases para posteriores estudios y aplicaciones.

Aplicaciones

Matemáticas

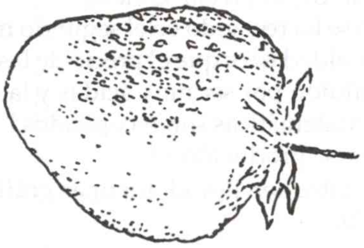
Las aplicaciones que el trabajo tiene hacia las Matemáticas son inagotables para todos los niveles de la E. G. B., a partir del Departamento que elaborará los ejercicios y problemas propios de cada grupo de alumnos. A modo de ejemplo indicamos algunas de las actividades que estamos llevando en el Centro:

Ciclo Medio

Problemas sobre el precio de la compra de artículos de *la cesta*.
Hemos ido a la compra en nuestra galería, realizando la siguiente compra:

3 barras de pan.
1/2 docena de huevos.
2,300 kg. de naranjas.
750 g. de filetes de choto.
5 truchas, que nos han pesado 900 gramos.

Si hemos entrado en la galería con 3.222 pesetas, ¿cuánto nos sobrará?
(**Nota**: Cada alumno tomará los precios de su propia galería y del último muestreo.)



— Problemas sobre la variación de los mismos artículos de una galería a otra en la misma fecha (los datos de los distintos muestreos pueden ser tomados por los propios alumnos del Ciclo Medio o solicitarlo de sus compañeros del Ciclo Superior según crea conveniente el profesor).

— Gráficas de barra de la variación de los mismos artículos en las distintas galerías o en la propia del alumno.

— Valoración de menús, en los que les daremos el menú y el esquema (ver desarrollo del mismo en ficha 3).

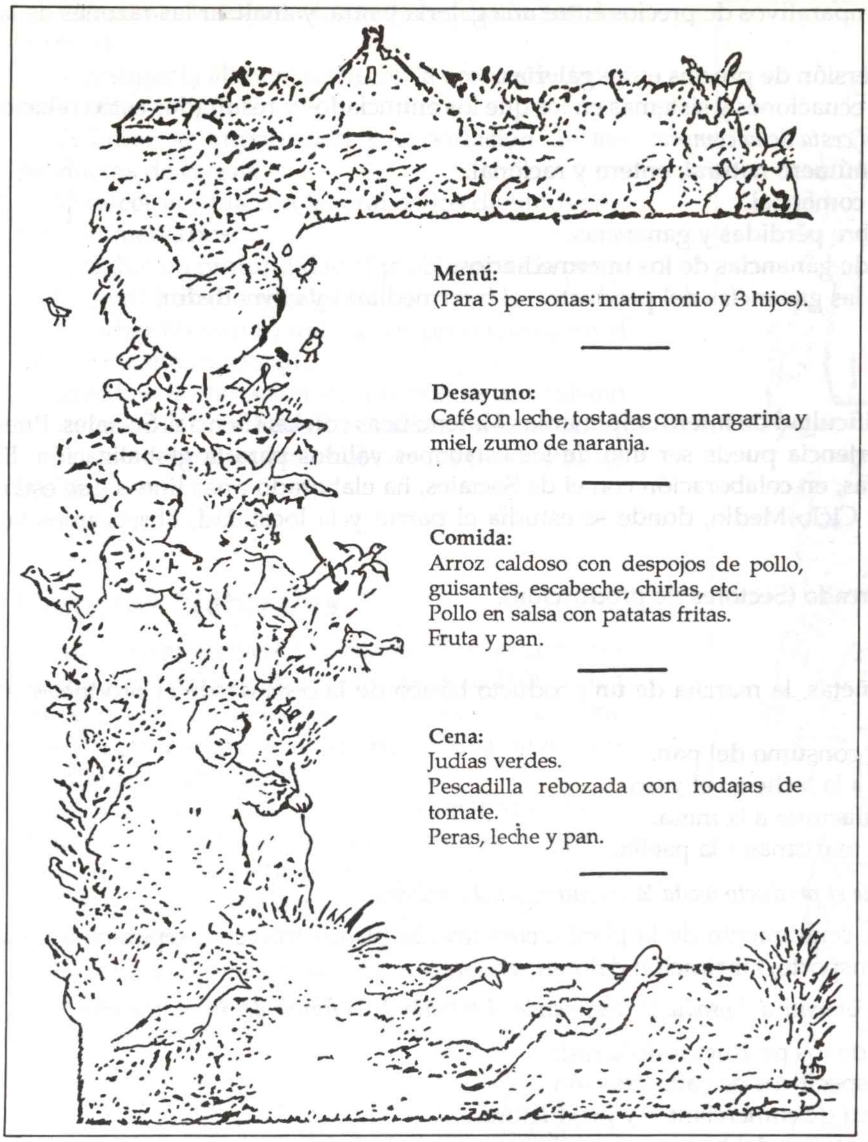
Ciclo Superior

— Problemas sobre los productos de *la cesta* en los que el alumno expondrá el enunciado sobre el día fundamental de la compra en su casa.

— Realizar ejercicios sobre las medias de los productos de distintas quincenas.

— Efectuar gráficas de barra y de sector.

— Averiguar los porcentajes de variación a la alza o a la baja de los productos de la cesta de su propia galería.



Menú:
(Para 5 personas: matrimonio y 3 hijos).

Desayuno:
Café con leche, tostadas con margarina y miel, zumo de naranja.

Comida:
Arroz caldoso con despojos de pollo, guisantes, escabeche, chirlas, etc.
Pollo en salsa con patatas fritas.
Fruta y pan.

Cena:
Judías verdes.
Pescadilla rebozada con rodajas de tomate.
Peras, leche y pan.

"Realizar un estudio a medio y largo plazo sobre la carestía de la vida."

	Precio unidad en tu galería				Precio unidad en tu galería		
Producto de la cesta	**Cantidad**	**Ultimo muestreo**	**Costo**	**Producto de la cesta**	**Cantidad**	**Ultimo muestreo**	**Costo**
Leche	2 litros			Judías verdes	1 Kg.		
Pan	3 pistolas			Pescadilla	1 Kg.		
Naranjas	1,250 Kg.			Tomates frescos	250 g.		
Arroz	200 g.			Peras	625 g.		
Pollo	1,800 Kg.			Huevos	2 unid.		
Manzanas	625 g.			Varios*			
Patatas	500 g.						

* Condimentos (aceite, vinagre o limón, sal, azúcar, especias, cebolla, ajo, guisantes, escabeche, chirlas, etc.). Café, margarina y miel.
Valoramos estos conceptos y les damos un costo estimativo de 250 ptas.

TOTAL MENU: 250 ptas.

— Realizar problemas comparativos de precios entre una galería y otra, y analizar las razones de la carestía de las galerías.
— Hacer gráficas de dispersión de precios entre galerías.
— Realizar problemas de ecuaciones y sistemas en los que los enunciados y resultados estén relacionados con los productos de *la cesta de la compra*.
— Efectuar ejercicios del número natural, entero y racional.
— Aplicar la matemática comercial.
— Efectuar problemas sobre pérdidas y ganancias.
— Hallar los porcentajes de ganancias de los intermediarios.
— Realizar gráficas entre las ganancias del productor, el intermediario y el vendedor.

Ciencias Sociales

De todos es conocida la dificultad de interdisciplinar las Matemáticas con las Ciencias Sociales. Pues bien, creemos que esta experiencia puede ser uno de los eslabones válidos para la globalización. El Departamento de Matemáticas, en colaboración con el de Sociales, ha elaborado unas líneas que están dando sus frutos. Así, en el Ciclo Medio, donde se estudia el barrio y la localidad, observamos las siguientes conexiones:

Estudio del barrio: El mercado (Sectores de producción).

Ejemplos de actividades:

Dibujar, por medio de viñetas, la marcha de un producto básico de la *cesta* desde el productor al consumidor:
— Del cultivo del trigo al consumo del pan.
— De la vaca en el prado a la leche en el vaso.
— De la trucha en la piscifactoría a la mesa.
— De los arrozales de las marismas a la paella.

Investigar los pasos que sigue el producto hasta la consumición del mismo:

— Trigo, pan (sementera, seguimiento de la planta, combate de plagas, cosecha, separación de la harina del salvado, transporte, fabricación del pan, venta).

Buscar las causas del encarecimiento del producto, realizando el estudio de la figura del intermediario.

Investigar la procedencia de los productos de *la cesta*.
Descubrir los productos específicos de cada estación.
Conocer la situación laboral de comerciantes y productores.
Descubrir el número de personas del barrio que se dedican a este trabajo.
Encontrar los productos que compra, y el porqué, la gente del barrio.

Estudio de la localidad: Estudio comparativo de barrios.
Ejemplos de actividades:

Localizar en el plano de la localidad cada uno de los barrios que se estudian en *la cesta*.
Investigar la época en que se construyeron, si tienen un estilo arquitectónico definido, en qué materiales se construyeron, amplitud, número de puestos, etc.
Estudiar las condiciones higiénicas sanitarias de los distintos mercados.
Investigar las condiciones de los puestos, así como las revisiones de los mismos por parte de las autoridades de la localidad.
Investigar si los mercados son públicos o privados.
Relacionar los mercados con los barrios.
En el Ciclo Superior, donde se estudian las distintas autonomías que forman el mapa de España, señalamos algunas de las múltiples actividades que pueden estar relacionadas con este trabajo:
Investigar dónde se producen con mayor intensidad cada uno de los veinte productos de *la cesta*.
Relacionar la España húmeda y la España seca con los distintos productos.
Investigar la Reforma Agraria para que nuestros productos del campo puedan ser competitivos con los de otros países.
Relacionar la Industria y la Agricultura (transporte, industria conservera, etc.).

Relacionar la España húmeda con las industrias cárnicas.

Investigar la alimentación con la economía de las naciones.

Estudiar la importación y exportación de los productos de *la cesta*.

Conocer la situación laboral de los distintos sectores alimentarios.

Estudiar en profundidad el problema de la pesca y las aguas jurisdiccionales.

Estudiar las variaciones de los productos a nivel nacional e internacional.

Estudiar la variación de precios de un mismo producto en las distintas localidades de España.

Realizar estudios históricos de los productos de *la cesta*.

Ciencias Naturales

Al igual que en las Ciencias Sociales, las conexiones que se pueden realizar entre las *cestas de la compra* y las Ciencias Naturales son inagotables y realmente sencillas, con lo que conseguiremos una interdisciplinariedad entre estas asignaturas.

En nuestro Colegio, donde el Departamento de Matemáticas y de Naturales están unidos, no nos ha sido difícil establecer esta conexión; en los Centros donde funcionen de manera independiente se podrá establecer a través de una colaboración sencilla.

En esta disciplina de Naturales nos proponemos, a través de esta experiencia, los siguientes objetivos para llevarlos en coordinación entre Ciclos y Niveles:

— Seguir el proceso vital de algunos de los productos vegetales de *la cesta* (en los Centros donde funcione el huerto escolar la experiencia es bien sencilla). Nosotros lo vamos a realizar con jardineras.

— Dibujar las partes de cada uno de los productos vegetales haciendo las oportunas investigaciones, cortes, etc.

— Investigar los árboles de naranjos, manzanos, perales, estudiando las partes: troncos, raíces, hojas, flores y frutos.

— Estudiar la célula animal a partir del huevo.

— Visitar una granja para la observación de diferentes animales.

— Visitar una industria alimentaria.

— Realizar estudios monográficos sobre sardinas, pescadillas, truchas, etc., haciendo los dibujos correspondientes.

— Valorar los alimentos en proteínas, hidratos de carbono, grasas, vitaminas, etc.

— Hacer menús equilibrados.

— Efectuar gráficas de consumo de los distintos productos de *la cesta*.

— Estudiar la digestión de los alimentos.

— Etcétera.

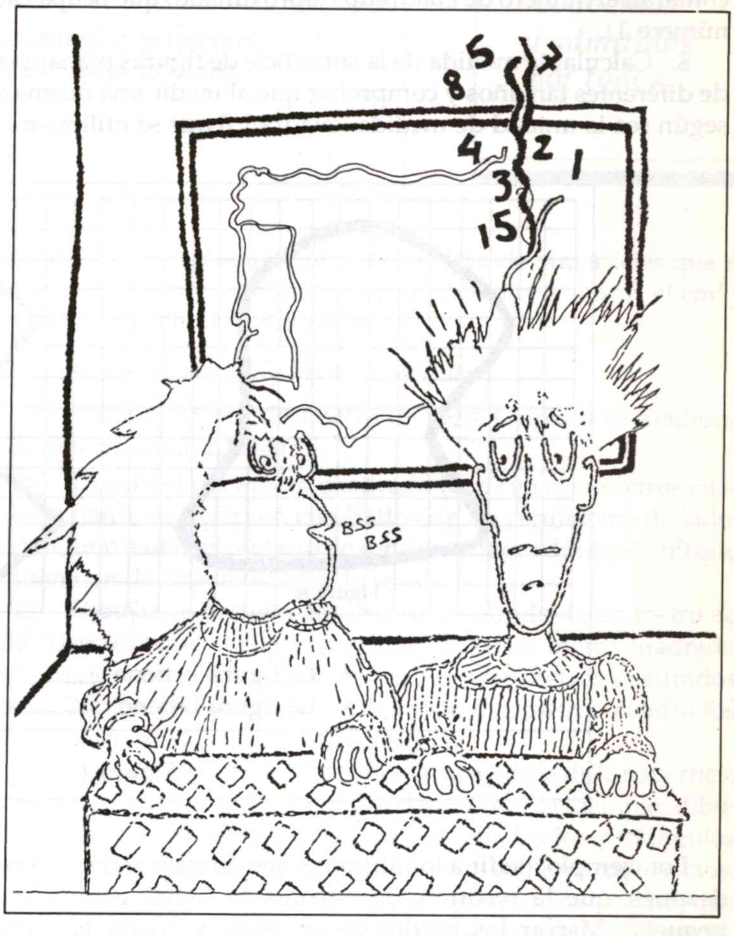
Medida de superficies

Luis Ferrero*

"Aplicar las unidades usuales de medidas de longitudes, superficies, volúmenes, capacidades, masas, tiempo y amplitud de ángulos a la resolución de problemas de la vida real seleccionando la unidad adecuada"[1].

El presente trabajo tiene como objeto sugerir un proceso de introducción de las unidades de superficie y de cálculo de las áreas de rectángulos, cuadrados y triángulos de forma experimental, destinado a alumnos de E. G. B.

Medir es comparar. Medir la superficie de una figura es compararla con otra que se toma como unidad. En general, la unidad de medida de superficie es un cuadrado; por tanto, medir una superficie es contar el número de cuadrados unidad que ocupa, y el área de una figura es el número que nos indica la medida de su superficie.



Hay que poner a los niños en situación de que descubran la necesidad de utilizar unidades conocidas y admitidas por todos, es decir, unidades universales de medida de superficies, para lo cual se debe pasar, al menos, por las siguientes etapas:

1. Medir superficies con diversas unidades de medida arbitrarias invariantes, es decir, cuadrados de diferentes tamaños.

---

* Luis Ferrero es asesor de la Dirección General de E. G. B.

[1] Objetivo número 11 del área de Matemáticas del Anteproyecto de Reforma del Ciclo Superior de E. G. B.

2. Medir superficies con cuadrados unidad aceptados universalmente: centímetro cuadrado decímetro cuadrado, metro cuadrado, etc.

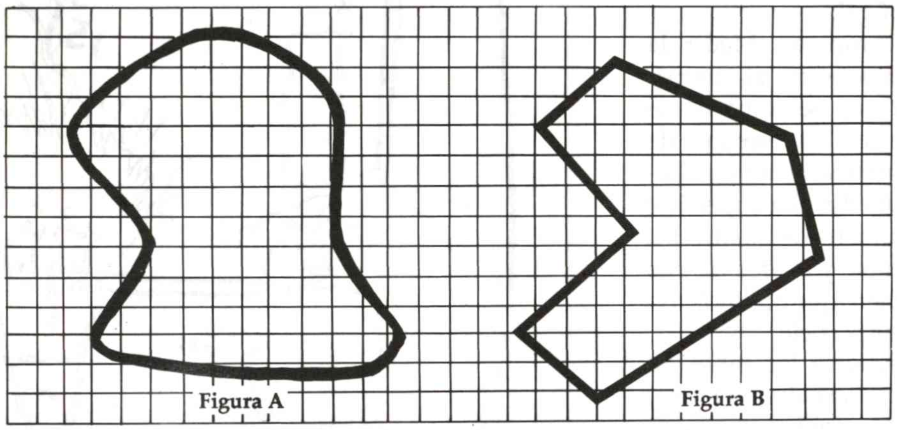
El proceso secuencial y progresivo que se sugiere para el desarrollo del tema es el siguiente:

"Medir es comparar. Medir la superficie de una figura es compararla con otra que se toma como unidad. En general, medir una superficie es contar el número de cuadrados unidad que ocupa."

1. Reconocer superficies manipulando todo tipo de materiales y superficies, como hojas de papel, trozos de tela, gomas, globos, botellas, maderas, etc.
2. Describir las semejanzas y las diferencias de las superficies que se hayan manipulado.
3. Diferenciar las superficies planas de las superficies curvas.
4. Presentar superficies planas, de forma libre, mediante el dibujo.
5. Componer y descomponer superficies planas, para lo cual se pueden realizar actividades similares a: recortar en trozos una tarjeta, recubrir con trozos de papel superficies dadas (una mesa, un dibujo...), etc.
6. Comparar superficies por superposición de unas con otras. Por ejemplo: dibujar tres figuras cualesquiera, recortarlas y superponerlas; expresar cuál es mayor o cuál es menor.
7. Calcular la medida de la superficie de figuras planas irregulares, mediante el uso de la cuadrícula.

Por ejemplo: los niños recortarán sobre papel cuadriculado dos figuras irregulares. A continuación contarán el número de cuadrados (aproximado) que ocupa cada una de las figuras dibujadas (ver figura número 1).

8. Calcular la medida de la superficie de figuras planas poligonales mediante el uso de la cuadrícula de diferentes tamaños y comprobar que al medir una misma superficie se obtienen resultados distintos según sea la unidad de medida (cuadrado) que se utilice en cada caso.



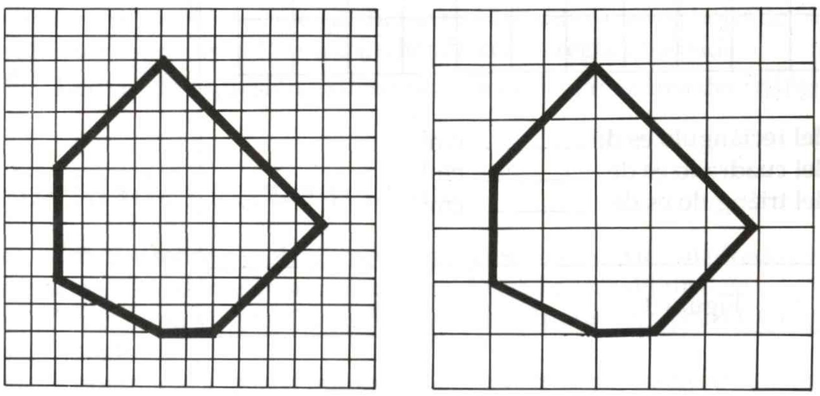
- La figura A tiene _____ cuadrados
- La figura B tiene _____ cuadrados

Figura 1

Por ejemplo: pedir a los alumnos que dibujen sobre una cartulina una figura poligonal cualquiera y, después, que la recorten. Superponer la figura recortada sobre papel cuadriculado de cuadrícula pequeña. Marcar los bordes de la figura y contar el número de cuadrados pequeños que ocupa. Superponer de nuevo la figura anterior sobre papel cuadriculado de cuadrícula grande. Marcar los bordes de la figura y contar el número de cuadrados grandes que ocupa. Comparar los resultados y hacer observar que al medir una misma superficie se obtienen resultados distintos según sea la unidad de medida que se utilice (ver figura número 2).

9. Introducir las unidades universales de medida de superficies y establecer equivalencias entre ellas.

Las primeras unidades universales de medida de superficie: centímetro cuadrado (cm^2), decímetro cuadrado (dm^2), metro cuadrado (cm^2)... se han de introducir de forma experimental y manipulada, y a medida que se van presentando nuevas unidades se irán estableciendo entre ellas las equivalencias correspondientes y, simultáneamente, se aplicarán a la resolución de situaciones problemáticas de la vida diaria.



- La figura tiene _____ cuadrados pequeños.
- La figura tiene_____ cuadrados grandes.

Figura 2

"Hay que poner a los niños en situación de que descubran la necesidad de utilizar unidades conocidas y admitidas por todos."

Es conveniente que para el tratamiento de las primeras unidades de medida de superficies que se estudian se utilice el papel milimetrado con el objeto de que los alumnos materialicen el dm^2, el cm^2 y el mm^2, y comprueben experimentalmente las equivalencias entre ellas.

Para el desarrollo de este objetivo se sugiere la siguiente secuenciación de actividades:

a) Dibujar sobre papel milimetrado un cuadrado de un decímetro de lado. Colorear el cuadrado dibujado. Indicar que han coloreado un decímetro cuadrado (dm^2).

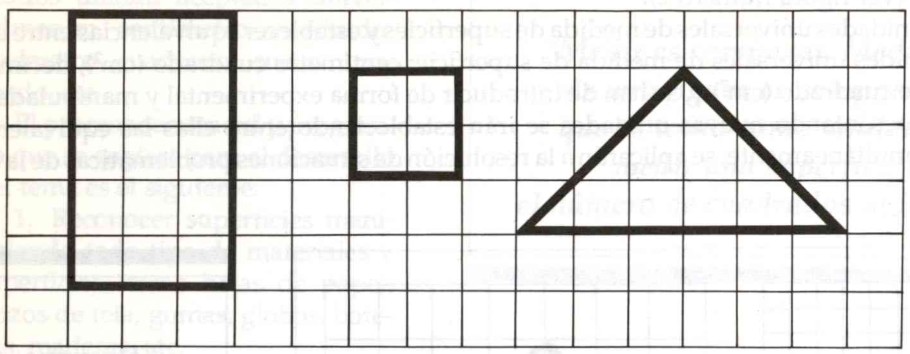
b) Dividir el decímetro cuadrado (dm^2) en centímetros cuadrados (cm^2), es decir, en cuadrados de un centímetro de lado. Contar, uno a uno, el número de centímetros cuadrados (cm^2) que contiene un decímetro cuadrado (dm^2).

c) Dibujar en el suelo del aula un cuadrado de un metro de lado. Destacar que el cuadrado dibujado es un metro cuadrado (m^2). Dividir el metro cuadrado (m^2) en decímetros cuadrados (dm^2). Contar uno a uno el número de decímetros cuadrados (dm^2) que contiene el cuadrado dibujado.

"Los niños pueden recortar sobre papel cuadriculado dos figuras irregulares. A continuación contarán el número de cuadrados que ocupa cada una de las figuras dibujadas."

10. Calcular de forma experimental la medida de la superficie de rectángulos, de cuadrados y de triángulos. Por ejemplo: dibujar sobre papel milimetrado rectángulos, cuadrados y triángulos cuyas dimensiones (largo y ancho) sean centímetros exactos. Contar, uno a uno, el número de centímetros cuadrados (cm^2) que contiene cada una de las figuras dibujadas (ver figura número 3).

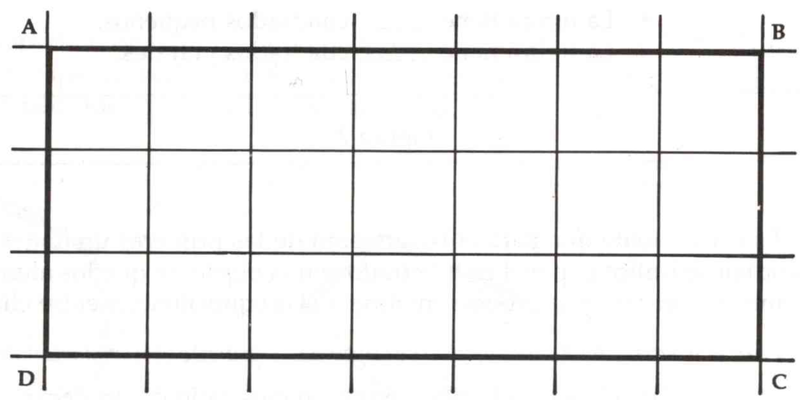
11. Deducir la expresión matemática para calcular el área del rectángulo y el área del cuadrado.



- El área del rectángulo es de ________ cm^2
- El área del cuadrado es de ________ cm^2
- El área del triángulo es de ________ cm^2

Figura 3

"Dibujar tres figuras cualesquiera, recortarlas y superponerlas; expresar cuál es el mayor o cuál es menor."



- Cuenta y escribe el número de cm^2 que tiene el rectángulo ABCD.
- ¿Cuántos cm mide el lado DC?
- El lado DC es la base (largo) del rectángulo.
- ¿Cuántos cm mide el lado BC?
- El lado BC es la altura (ancho) del rectángulo.

LONGITUD DE LA BASE X LONGITUD DE LA ALTURA = AREA DEL RECTANGULO

_____ cm x _____ cm = ________ cm^2

Figura 4

Actividades secuenciadas:

a) Dibujar sobre papel milimetrado un rectángulo (y un cuadrado) cuyas dimensiones (largo y ancho) sean centímetros exactos. Contar, uno a uno, el número de centímetros cuadrados (cm^2) que contiene la figura.

b) Hacer observar que se puede calcular el área de un rectángulo si se multiplica el número de centímetros que mide una dimensión (largo) por el número de centímetros que mide la otra dimensión (ancho) (ver figura número 4).

Posteriormente, proponer a los alumnos que calculen, utilizando la expresión matemática del área del rectángulo (o del cuadrado), el área de recintos rectangulares como la clase, una habitación, un despacho, un pasillo, etc.; también el área de figuras dadas, dibujadas en hojas de papel, en las que los niños tengan que obtener los datos necesarios midiendo con la regla graduada.

12. Deducir la expresión matemática para calcular el área del triángulo.

Actividades secuenciadas:

a) Dibujar sobre papel milimetrado un rectángulo o un cuadrado cuyas dimensiones sean centímetros exactos. Calcular el área de cada una de las figuras dibujadas.

b) Trazar una diagonal en cada una de las figuras dibujadas y comprobar que se han obtenido dos triángulos iguales.

c) Contar, uno a uno, el número de centímetros cuadrados que tiene cada uno de los dos triángulos que se han obtenido en cada figura, y comprobar que el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo o de un cuadrado de las mismas dimensiones (ver figura número 5).

13. Plantear y resolver problemas en los que intervengan el cálculo de áreas y de perímetros.

Por ejemplo: Dibujar un cuadrado de 3 centímetros de lado, y un rectángulo de dimensiones: 4 centímetros y 2 centímetros. Calcular el área y el perímetro de las dos figuras dibujadas (ver figura número 6).

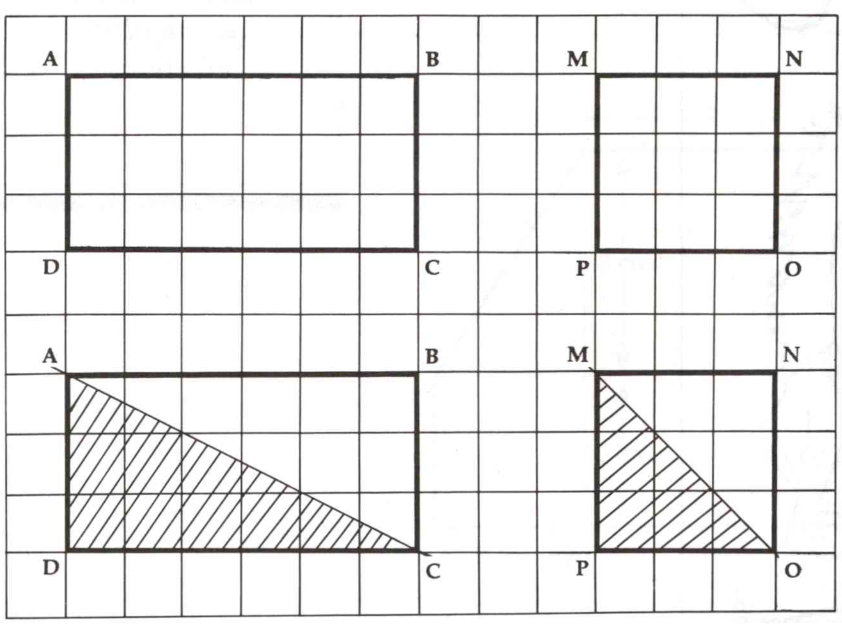
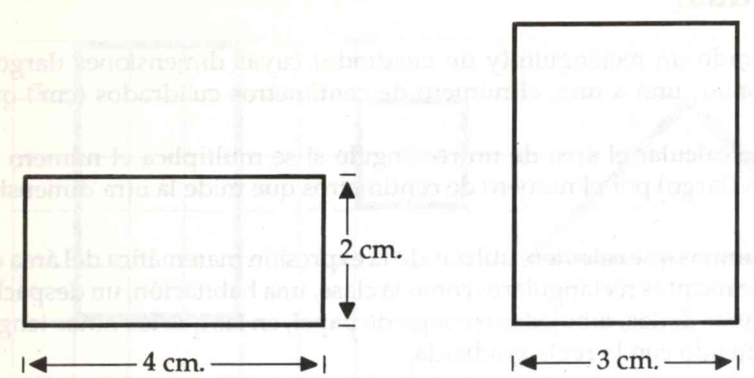


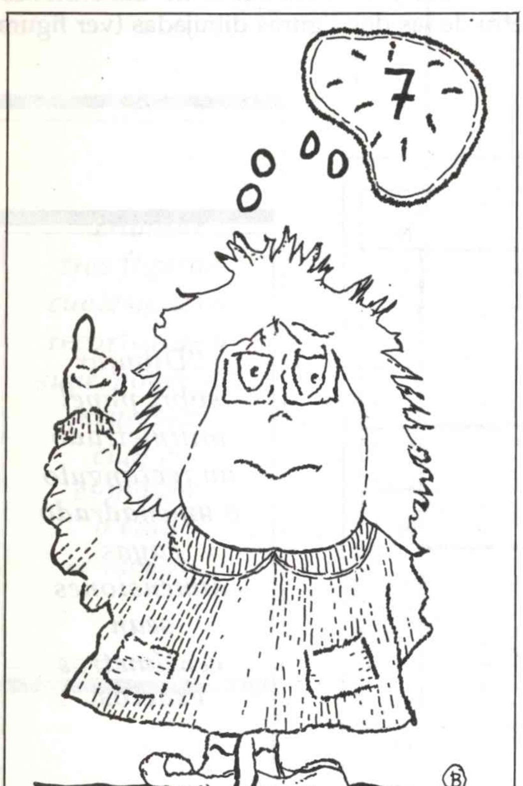
Figura 5

"Dibujar sobre papel milimetrado un rectángulo o un cuadrado cuyas dimensiones sean centímetros exactos."



	PERIMETRO	AREA
RECTANGULO	12 cm.	8 cm^2
CUADRADO	12 cm.	9 cm^2

Figura 6



Hay que poner a los niños en situación de que descubran la necesidad de utilizar unidades conocidas.

"Proponer a los alumnos que calculen el área de recintos rectangulares como la clase, una habitación, un despacho, un pasillo, etcétera."

Hacer observar que aunque ambas figuras tienen el mismo perímetro, en cambio no tienen igual área. Hacer referencia a la aplicación de este hecho a la construcción de edificios en general y, en particular, a la de granjas, graneros, cercados, etc.

14. Calcular el área de figuras poligonales mediante su partición en rectángulos, cuadrados o triángulos (ver figura número 7).

Para la realización de estas actividades es conveniente en una primera fase dar triangulada o cuadriculada la figura; posteriormente, serán los alumnos quienes dividan la figura según crean más conveniente.

Previo al desarrollo del tema propuesto es necesario que los niños tengan adquiridos los siguientes conceptos: unidades de medida de longitudes, concepto de polígono y saber reconocer y describir paralelogramos y triángulos.

La generalización del cálculo de las áreas de los polígonos y su desarrollo razonado es propio de un trabajo posterior.

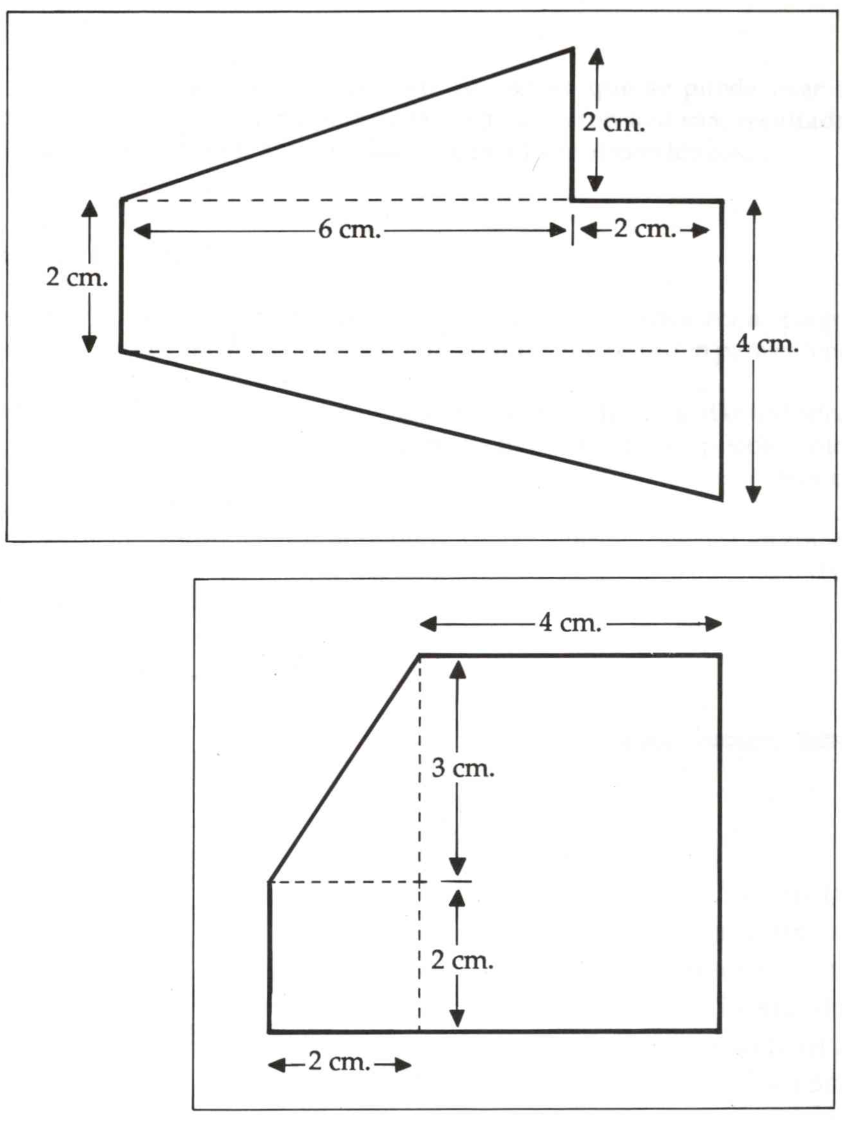


Figura 7

Contar

Miguel de Guzmán

Las siguientes notas constituyen un ensayo que se puede usar como inspiración para ilustrar y ambientar una clase, con historia, resultados de alcance profundos en Matemáticas, juego, elementos estéticos...

1. El arte de contar

¿Por qué contamos? Un montón de cosas semejantes es un caos, un desorden opaco a la comprensión. Pero la semejanza entre ellas sugiere la introducción de algún tipo de orden para entenderlas mejor, para que dejen de constituir un mero montón.

¿Cómo contar? Una ristra de objetos los ordena por su longitud, puede dar una idea de los muchos o pocos que son. Dos ristras pueden compararse, pero no todos los objetos pueden colocarse en ristra, ni se pueden tener delante al mismo tiempo. ¿Cómo contar los días que han pasado desde el solsticio? ¿Cómo contar las ovejas de un gran rebaño?

Desde siempre el método primitivo ha consistido en hacer muescas, señales, en amontonar piedras que corresponden a cada uno de los objetos que queremos contar. Hoy día lo usamos todavía. Hacemos una elección en clase. ¿Cómo hacemos el recuento de votos?

Pepe	IIII I	6
Pedro	IIII III	8
Juan	IIII IIII I	11

"Los pitagóricos relacionaron los números con la figura, la música y la estructura de todas las cosas."

Algunas tribus primitivas siguen utilizando este método, y para ellos los números sucesivos son:

1,2,2*1,2*2, 2*2*1, 2*2*2...

Otras toman como básico el 3:

1,2,3,3*1,3*2, 3*3, 3*3*1, 3*3*2, 3*3*3...

¿Qué inconveniente ves en el sistema?

Si los números son grandes, aparecen muchos doses o treses. ¿Remedio? Se puede intentar una base mayor: 5,10,60... y así se hizo. Pero si los números son grandes, siguen apareciendo muchos cincos o dieces o sesentas.

En el año 3000 a. de C. los babilonios ya habían salido del atasco. Se dijeron: "¿Por qué no tratar los muchos sesentas que pueden aparecer como un nuevo montón a contar?" Ellos habían introducido el 60 como número básico. Tenían, pues, símbolos distintos para expresar montones hasta de sesenta objetos. Así un montón de 185 objetos lo numeraban ellos:

Tres** montones de 60 * **cinco

Con el tiempo se prescinde de lo superfluo, y eso de escribir *montones de sesenta,* una vez que todos sabían de qué se trataba, resultaba claramente superfluo. Todos comenzaron a sobreentender que

tres** * **cinco

era precisamente lo de arriba.

Ahora el principio ya estaba claro.

Si tenían un enorme montón de

ciento ochenta y cinco montones de sesenta * siete,

¿por qué no tratar el enorme montón inicial del mismo modo? Es decir, lo subrayado es

*tres * cinco,*

y así el número anterior es:

*tres * cinco * siete.*

Ya nos entendemos. Con esto los babilonios habían inventado ***la notación posicional**: no sólo interesa la cifra, sino también la posición que ocupa.*

Aparecía un problema importante. Si pretendemos escribir

*doscientos cuarenta montones de sesenta * cinco,*

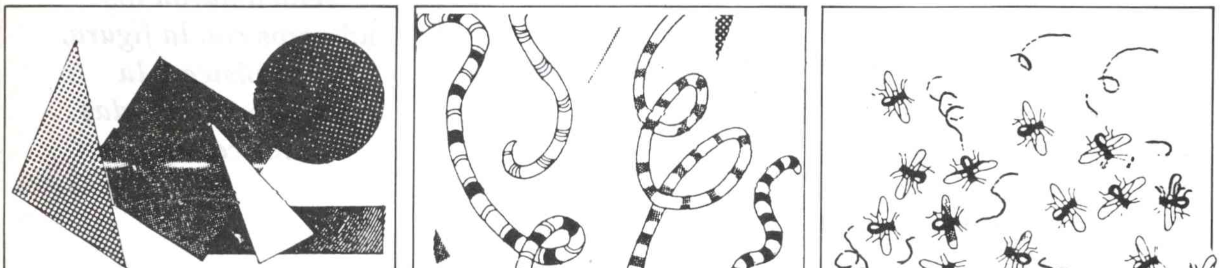
deberíamos poner, según el sistema descrito,

cuatro * nada * cinco.

Inicialmente los babilonios no tenían símbolo para ese *nada,* y sólo dejaban un espacio vacío, con la consiguiente posible confusión:

Cuatro* *cinco

se podía interpretar como doscientos cuarenta y cinco.



Más adelante inventaron un símbolo especial, *el cero*, y la cosa resultaba mucho más clara escribiendo: cuatro * cero * cinco

En el siglo IV a. de C. los astrónomos sucesores de aquellos primitivos babilonios utilizaban con gran soltura el sistema sexagesimal en notación posicional.

Nosotros lo seguimos utilizando en nuestros relojes y en la medida de los ángulos, lo que indica la fuerte influencia que han ejercido en el desarrollo de la astronomía los babilonios.

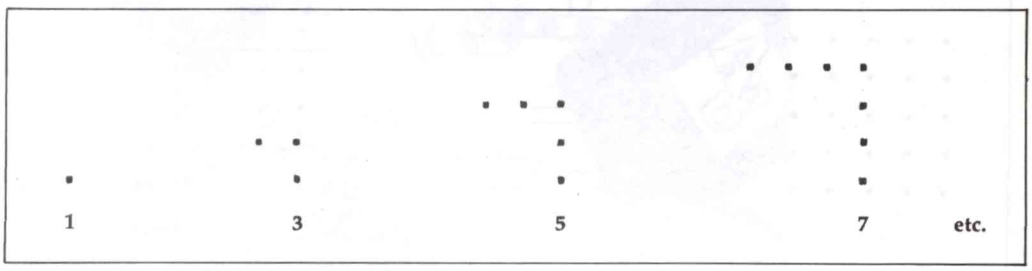
El *sesenta* de los babilonios se convirtió en *diez* entre los astrónomos indios que siguieron conservando el sistema posicional y el cero. Mientras tanto, el mundo de los griegos y de los romanos y la Europa toda hasta el siglo XVII utilizaban sistemas farragosos de numeración que dificultaron extraordinariamente el desarrollo de la Matemática. Sumar, por ejemplo, MCMLIV y MMCXLIII resultaba una verdadera proeza.

2. El comienzo de la Matemática de verdad

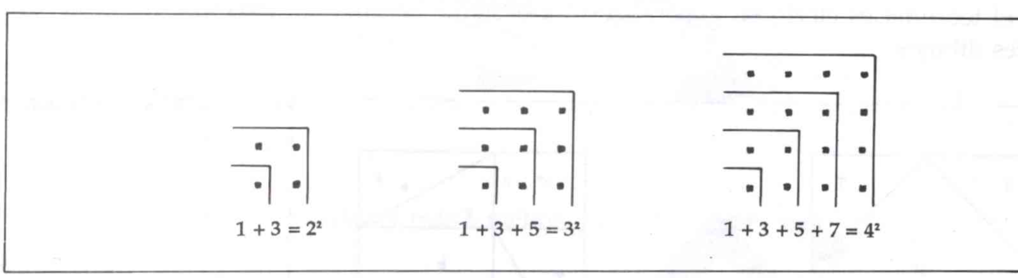
Para los pitagóricos del siglo VI a. de C. los números no sólo estaban relacionados con la cantidad, con el *cuánto*, sino también con la *figura*, con la *música*, con la misma *estructura de todas las cosas*.

Ellos jugaban con piedras, haciendo con ellas verdaderos teoremas. De ahí viene nuestra palabra *cálculo*. Un cálculo es una piedra, y tener un cálculo en el riñón no significa que 7 x 9 se nos ha quedado atascado ahí.

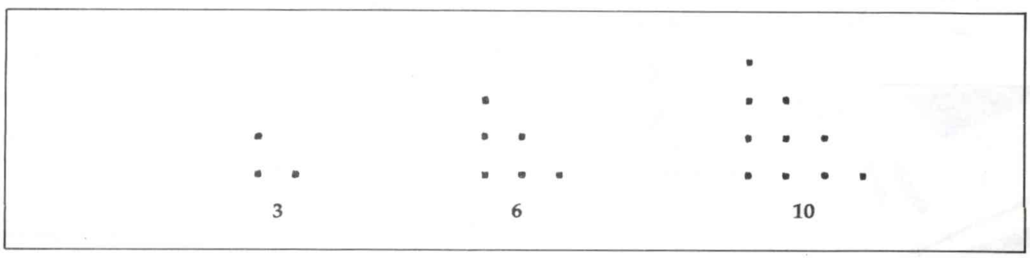
Los números impares se pueden representar así, con piedras:



Y si los vamos poniendo juntos resultan números cuadrados

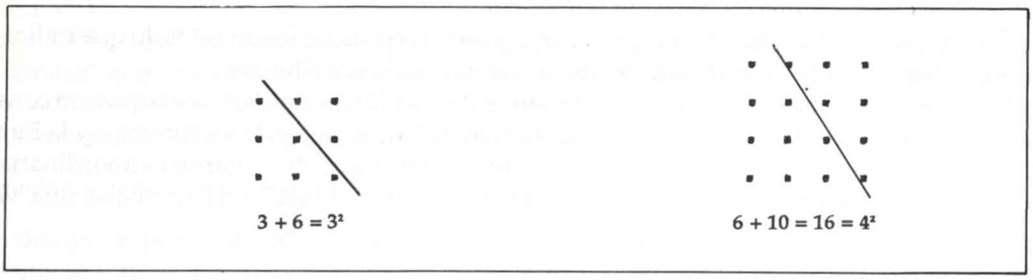


Los pitagóricos encontraron así que *La suma de los n primeros impares es n^2.*
Un teorema nada despreciable.
Los números triangulares los formaban así:



¿Cuáles son los tres siguientes?

Si colocamos dos triangulares consecutivos uno encima de otro convenientemente resulta un cuadrado.



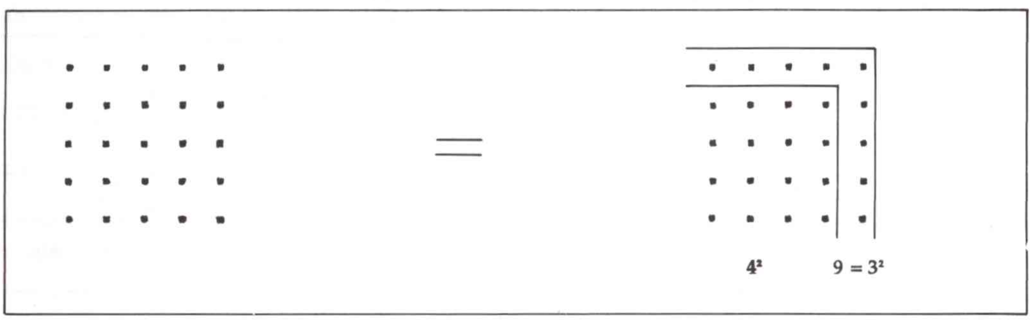
Así les resultó el teorema:

La suma de dos triangulares consecutivos es un cuadrado.

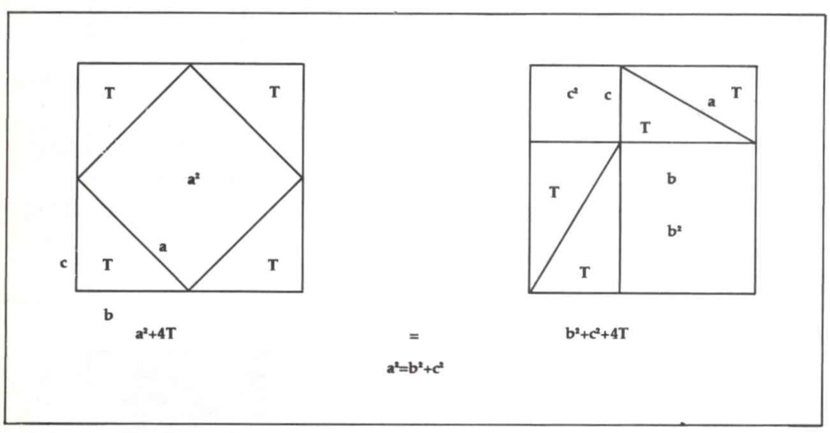
Probablemente así, jugando, comenzaron a sospechar que el teorema de Pitágoras era verdad. En particular:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

resultaba de la siguiente forma:



Que el teorema es cierto en general resulta bastante sencillo sin más que mirar las áreas en los siguientes dibujos.



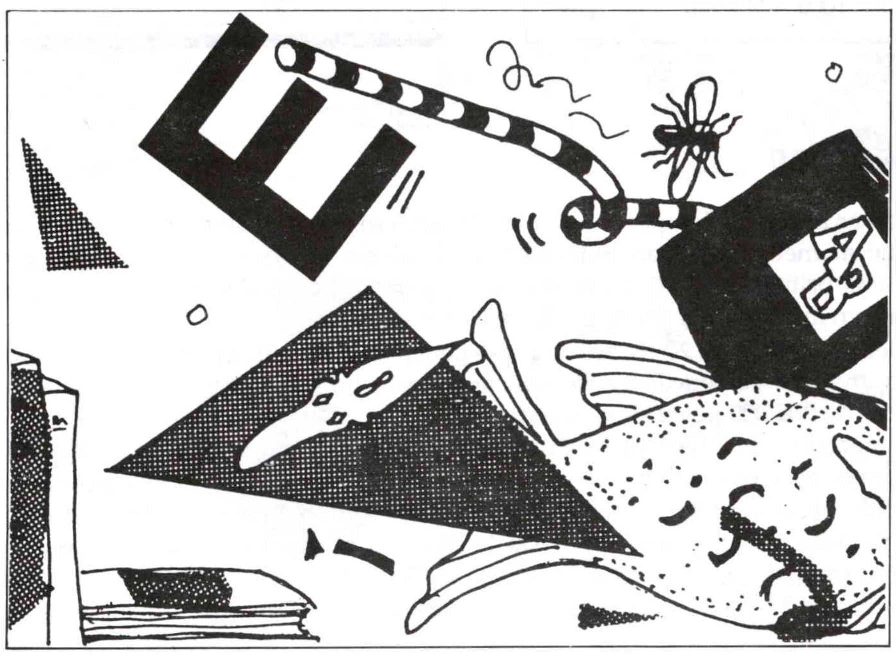
> *"Los astrónomos sucesores de los babilonios utilizaron con gran soltura el sistema sexagesimal."*

3. Contar inteligentemente

Cinco niños quieren contar el dinero que tienen en un sacote de monedas. ¿Cómo se lo organizan? Uno propone que el saco se reparta en cinco montones parecidos y que cada uno cuente las de un montón. Si todas las monedas son iguales, de peseta, por ejemplo, no es mal método. Pero las hay de 100, 50, 25, 5, 1 pesetas. Probablemente será mejor, piensa otro, separar primero por un lado las de 100, por otro las de 50..., luego contar las de cada clase, multiplicar y sumar.

La Matemática consiste en gran parte en un *contar inteligente.*

Un maestro un poco harto de sus niños les propuso, para estar tranquilo un buen rato, que encontraran la suma de los cien primeros números. Entre ellos, niños de cinco años, había uno que se llamaba Carlos Federico Gauss. No habían pasado dos minutos y allá fue al maestro con su resultado: 5.050. Más adelante, Carlos Federico sería considerado como el matemático más importante de todos los tiempos, junto con Arquímedes (siglo III a. de C.) y Newton (siglo XVII).

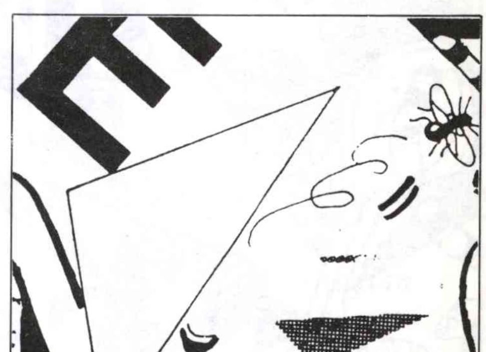


El razonamiento de Gauss debió de ser más o menos el siguiente:

$$\begin{array}{l} 1+2+3+\ldots+98+99+100=S \\ 100+99+98+\ldots+3+2+1=S \\ 101+101+101+\ldots+101+101+101=2S \\ 101\times100 \quad = \quad 2S \\ S=50\times101=5.050 \end{array}$$

Las grandes ideas merecen explorarse a fondo. Vamos a sumar

$$4+11+18+25+32+39+46$$



Siguiendo la idea

$$4 + 11 + 18 + 25 + 32 + 39 + 46 = S$$
$$46 + 39 + 32 + 25 + 18 + 11 + 4 = S$$
$$3.500 = 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 +$$
$$=2S \quad S=1.750$$

¿Y cómo sumar en general?

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 99d)$$

Fácil

$$a + (a+ d) +\ldots+ (a+98d) + (a+99d) = S$$
$$(a+99d) + (a+98d) +\ldots+ (a+ d) + a = S$$
$$2x100a + 100x99d = 2S. \; S = 100a + 50x99d$$

"Carlos Federico Gauss sería considerado como el matemático más importante de todos los tiempos, junto con Arquímedes y Newton."

4. Adivinar sin contar

Una bandada de 17 palomas acaba de desaparecer por los 16 agujeros de un palomar. ¿Qué puedes deducir? Por supuesto, que al menos dos han entrado por el mismo agujero. Este principio tan absurdamente simple se llama principio de Dirichlet, o mejor, *principio del palomar,* y constituye una herramienta muy interesante en aritmética, a fin de poder adivinar sin contar.

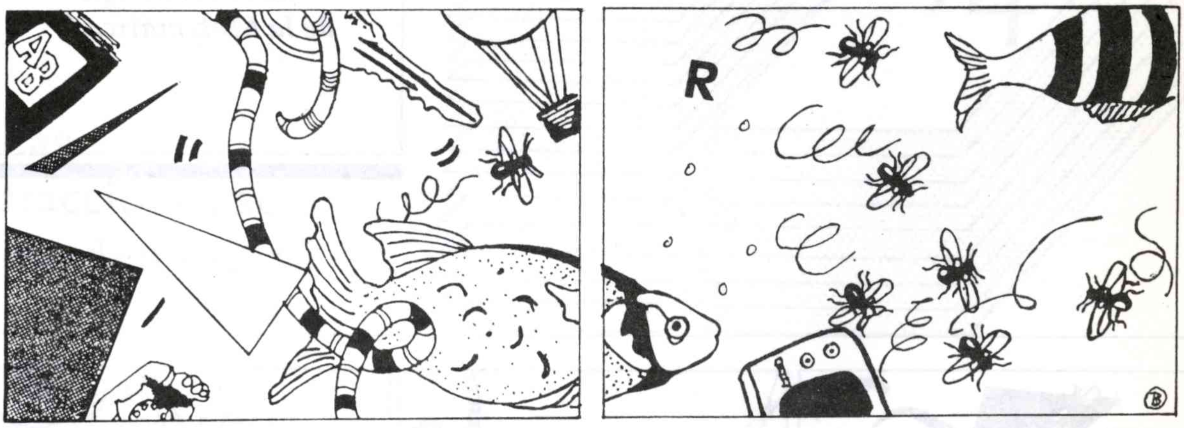
¿Sabes que en este momento hay más de 20 madrileños que tienen exactamente el mismo número de pelos en la cabeza? Curioso, ¿no? Es una sencilla consecuencia del principio del palomar, y del sencillo hecho de que nadie tiene más de 200.000 pelos en la cabeza. Verás.

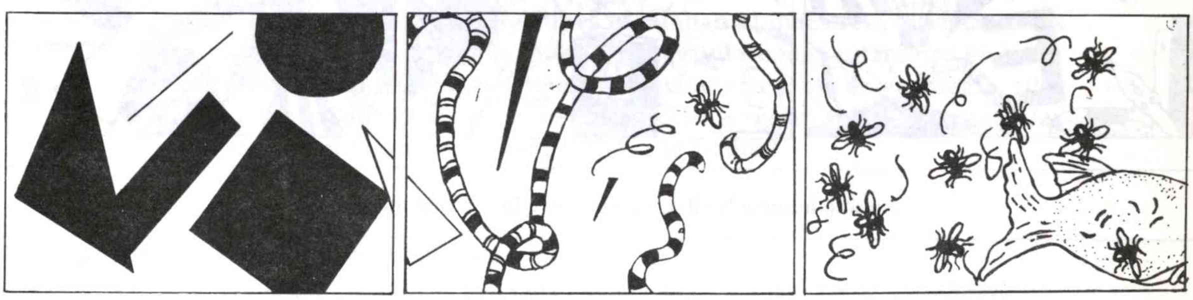
Nos inventamos un palomar con 200.000 agujeros y a cada uno le damos un número, 1, 2, 3,..., 200.000. Los madrileños son las palomas, más de 4 millones. A cada uno lo metemos por el agujero cuyo número coincide con el número de pelos de su cabeza; es decir, si Felipe Rodríguez tiene 153 pelos, se meterá por el agujero 153. Si es que no pasaran por ningún agujero más de 20, es decir, si por cada agujero pasan 20 o menos madrileños, el número total de madrileños sería menor que 20 x 200.000 = 4.000.000. Falso. Luego por algún agujero se meten más de 20 madrileños, es decir, más de 20 tienen el mismo número de pelos.

Otro principio importante que da lugar a muchos resultados matemáticos muy profundos es el siguiente:

Se dan seis puntos sobre una circunferencia. Se unen cada dos de ellos por un segmento. Con un lápiz rojo y otro verde se van pintando cada uno de estos segmentos de rojo o de verde. Entonces, lo hagas como lo hagas, al final te encuentras con un triángulo todo él de un mismo color.

Esto es una forma sencilla de lo que se llama teorema de Ramsey, que ha tenido muchas aplicaciones en diversos campos de la Matemática.





La Matemática consiste en un contar inteligente.

¿Serías capaz de razonar por tu cuenta por qué sucede lo que se afirma? No es difícil. Sólo requiere contar inteligentemente.

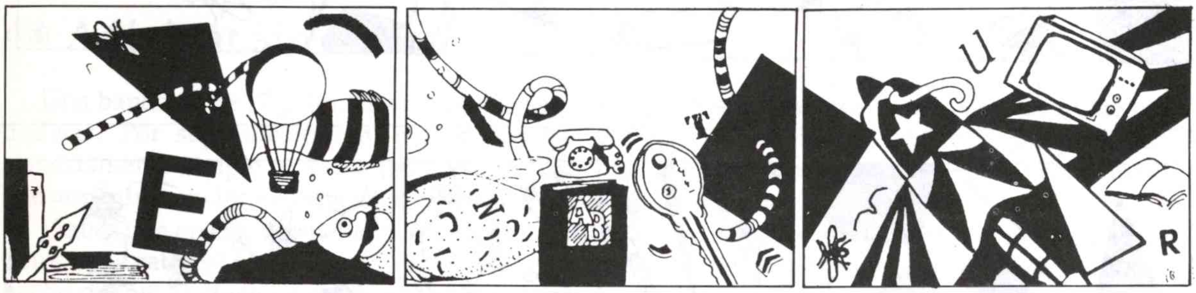
Llamamos a los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nos vamos a hacer una lista de segmentos verdes y rojos. Consideramos los segmentos 12, 13, 14, 15, 16. Son cinco, y así es claro que habrá tres de ellos al menos de un mismo color. Por ejemplo, supongamos que 12, 15, 16 son verdes.

Verdes	Rojos
12	
15	
16	

"Los babilonios tenían símbolos distintos para expresar montones de sesenta objetos."

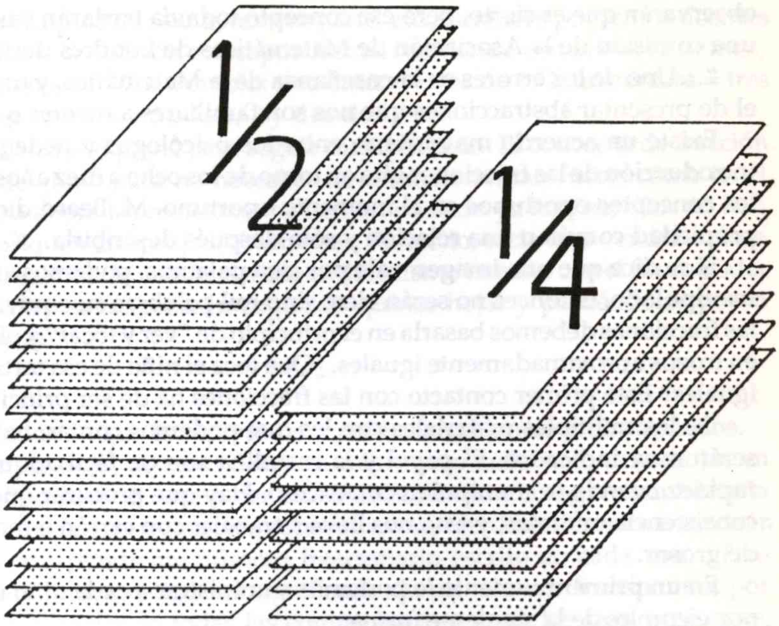
Nos preguntamos ahora dónde van, es decir, de qué color son 25, 26, 56. Si uno de ellos es verde, por ejemplo 26, entonces el triángulo 12, 26, 16 es todo verde. Si los tres son rojos, entonces todo el triángulo 25, 26, 56 es rojo. Por tanto, *hay un triángulo del mismo color necesariamente.*

"El teorema de Ramsey ha tenido muchas aplicaciones en diversos campos de la Matemática."



No sólo interesa la cifra, sino también la posición que ocupa.

Las fracciones se pueden tocar



Gregorio San Román

Quizá el cambio de las fracciones, y desgraciadamente alguno más, sea uno de los que más desesperaciones ocasionan al maestro a la vista de los resultados obtenidos. Es hora, pues, de preguntarnos si estaremos en buen camino en cuanto a la forma y tiempo de tratar este tema en el colegio. ¿Por qué existen tal cantidad de errores y conceptos erróneos? ¿Explicamos las fracciones en el momento y de la forma adecuados?

Pensamos que, básicamente, el enfoque falla en:

a) No se corresponden los niveles exigidos con las edades a las que se les exigen.

b) Los pasos que se siguen en la explicación de las fracciones no guardan una correlación adecuada con las etapas de maduración del niño.

c) Se pasa con demasiada rapidez a la mecanización operativa.

d) Explicamos algunas operaciones que, por la misma complejidad de la fracción, son incomprensibles en cualquier nivel de la E. G. B.

Es muy triste, más bien indignante, encontrarse con alumnos a los que se les ha enseñado a sumar verdaderos "trenes de fracciones" por el mecanismo de multiplicar cada numerador por todos los numeradores menos el suyo y... Evidentemente, la máquina de ese tren es el resultado.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{2}{7} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{152.976}{40.302}$$

Es de suponer que el concepto de fracciones equivalentes que tienen esos alumnos deja mucho que desear. Pero, eso sí, luego simplifican esa fracción hasta llegar a la irreducible. ¿Entenderán algo de lo que hacen? Lo que resulta asombroso es que haya niños que, haciendo semejante operación, no se equivoquen.

También podremos decirles que dividir por una fracción es lo mismo que multiplicar por el inverso de ella, pero ¿están ya capacitados en la E. G. B. para abstraer conceptos de esa forma? Numéricamente observarán que es cierto, pero ese concepto todavía tardarán bastante tiempo en interiorizarlo. En 1938, una comisión de la Asociación de Matemáticas de Londres decía:

"...Uno de los errores en la enseñanza de la Matemática, y uno al que estamos siempre propensos, es el de presentar abstracciones que nos son familiares a mentes que no están preparadas para ellas."

Existe un acuerdo mayoritario entre los psicólogos y pedagogos en que la edad adecuada para la introducción de las fracciones gira en torno de los ocho a diez años. Lo que hace falta es suministrar al niño los conceptos oportunos en el momento oportuno. M. Beard dice: "...es mejor 'ver' primeramente una propiedad común o una relación y sólo después describirla..."

Si se dice que una imagen vale por cien palabras, podemos afirmar que si esa imagen se ha tocado y manipulado, entonces no serán cien, sino mil palabras su equivalencia. Por lo tanto, la introducción de las fracciones debemos basarla en el principio de "ver y tocar" y olvidarnos de la tradicional tarta dividida en trozos aproximadamente iguales. ¿Qué toca el niño de esa tarta? ¿Estamos seguros que esos trozos son iguales? Este primer contacto con las fracciones ha de ser principalmente manipulativo.

De los múltiples materiales con los que podemos contar, habrá algunos que, por su naturaleza, no serán muy indicados. El papel y la cartulina son de fácil adquisición, pero se estropean con relativa rapidez cuando se manipulan con exceso. Hay que procurar que estos materiales tengan una rigidez y consistencia mínimas, y esto nos lleva a trabajar con cartón o maderas de unos tres o cuatro milímetros de grosor.

En un primer momento le podemos suministrar a cada niño un estuche con cinco regletas divididas, por ejemplo, de la siguiente forma:

Una entera, de 30 cm., pintada de blanco.
Una partida en dos trozos de 15 cm. pintados en rojo.
Una dividida en tres trozos de 10 cm. pintados de verde.
Otra dividida en cuatro trozos de 7,5 cm. pintados en amarillo.
Y otra en cinco trozos de 6 cm. pintados de azul.

No será ninguna pérdida de tiempo el dedicar la primera clase a familiarizarse con este material para comprender posteriormente las cuestiones que les vayamos planteando. A continuación indico algunas:

1. Escribe formas distintas de tapar la regleta blanca sin que sobre ni falte nada. El alumno contestará: "Tapo la blanca con dos rojas; con cuatro amarillas; con una roja y dos amarillas..."

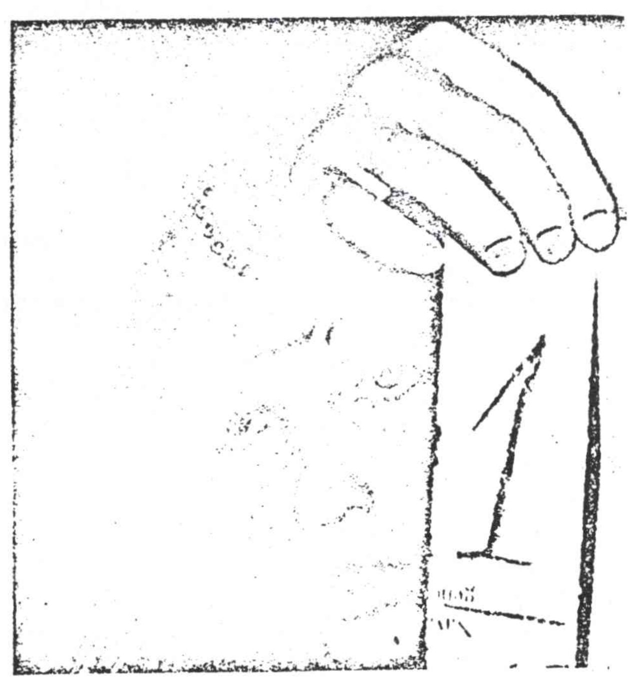
2. Escribe en forma de igualdad la relación que guardan estas regletas. (Una blanca = dos rojas; una blanca = cuatro amarillas; una blanca = una roja y dos amarillas...)

3. De las siguientes igualdades indica las que no sean ciertas:
   — Una blanca = cinco azules.
   — Una azul = una amarilla.
   — Una blanca = cuatro amarillas.
   — Una roja = dos azules.

4. Contesta y razona tu respuesta:
¿Es una roja la mitad de una blanca? ¿Es la blanca el triple de una azul? ¿La cuarta parte de una blanca es una amarilla? ¿De qué color es una pieza que es la tercera parte de una blanca?

5. Escribe en cada ficha el nombre que te parezca más adecuado. (Es conveniente que lo escriban literalmente y no numéricamente.) El alumno escribirá en la blanca: ENTERA; en la roja: MITAD; en la verde: TERCERA PARTE; en la amarilla: CUARTA PARTE; en la azul: QUINTA PARTE.

6. Escribe de nuevo, pero con los nombres actuales, la relación que guardan estas fichas (cuestión 2.ª). El chico puede escribir: una entera = dos mitades; una entera = tres terceras partes; una entera = cuatro cuartas partes; una entera = una mitad y dos cuartas partes...



Cuando tengan interiorizados los conceptos de mitad, tercera parte, etc., entonces podremos decirles que escriban numéricamente en cada ficha la fracción correspondiente, repitiendo con la nueva nomenclatura las contestaciones a la cuestión anterior. Por ejemplo: una entera = dos de 1/2; una entera = tres de 1/3; una entera = cuatro de 1/4; una entera = una de 1/2 y dos de 1/4...

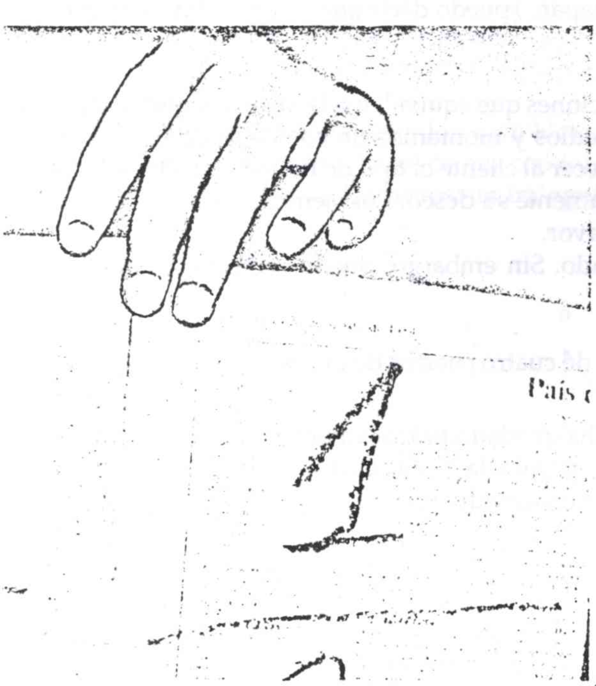
En un nivel posterior ya podemos recurrir al papel para seguir manipulando. El concepto de fracción lo tendrán lo suficientemente adquirido como para no necesitar de un material tan fuerte como en el proceso de introducción. Además, hasta ahora las fracciones se las hemos dado ya hechas; ellos no han fraccionado nada. Hagamos que se fabriquen sus propias fracciones. Para ello, cada uno vendrá a clase provisto de tres periódicos, procurando que los de toda la clase sean del mismo tamaño con el fin de poder intercambiar las hojas entre los compañeros. Empezarán cogiendo quince hojas y partiéndolas por la mitad. Les haremos preguntas similares a:

— ¿Cuántos trozos te han salido?
— ¿Cómo se llama cada trozo?
— Escribe en cada uno de ellos la fracción que lo representa y ponlos en el banco todos apilados.

Después repetirán lo mismo con diez hojas dividiéndolas en tres trozos cada una, ocho hojas en cuartos, seis hojas en quintos, cinco en sextos y cuatro hojas en octavos. Si usan la regla para hacer la división en tercios, quintos y sextos, se irán dando cuenta de que hacen trozos iguales. Al terminar tendrán seis montones de fracciones con su correspondiente número fraccionario escrito en cada una. ¿Tendremos mucho problema en que un niño nos explique el significado de un número fraccionario, por ejemplo 1/3? Con sus papeles delante, y haciendo todas las comprobaciones que les sean necesarias, deben contestar a las cuestiones que les vayamos planteando. Por ejemplo:

— ¿Hay algún cuarto mayor que otro?
— ¿Son todos los quintos iguales?
— ¿Dónde hay más papel, en dos quintos o en un tercio?
— ¿Tienes más de cinco quintos?
— ¿Por qué en los medios se escribe un dos debajo de la raya?
— ¿Por qué todos los trozos tienen un uno encima de la raya?
— ¿Por qué todos los trozos tienen un uno encima de la raya y sin embargo el número de debajo varía según los trozos?
— ¿Pueden tapar la hoja completa, sin que sobre nada, con varios trozos, aunque no sean todos iguales? Pon varios ejemplos.

Para evitar que se les muevan después, pueden grapar cada fracción a la parte superior de la hoja de forma que levantando todos los trozos tengan ésta a la vista. A continuación anotarán en su cuaderno:



Una hoja la tapo con:
— 1/2 y 1/4 y 1/4
— 1/8 y 1/2 y 1/4 y 1/8
— 1/2 y 1/2, etc.

También pueden hacer comparaciones con la unidad superponiendo varios trozos; por ejemplo:

— 1/2 y 1/3 es menor que una hoja entera.
— 1/5 y 1/3 y 1/2 es mayor que una hoja entera.
— 1/8 y 1/8 y 1/4 y 1/3 y 1/3 es mayor que una hoja entera, etc.

Una pregunta cuya respuesta nos hace recurrir a menudo a la supuesta imaginación del niño, es la relativa a fracciones con el numerador mayor que el denominador. Es normal que no comprenda el significado de la fracción 7/4 porque ¿cómo va a coger siete trozos de los cuatro en que ha partido una cosa? ¿Cómo le explicamos satisfactoriamente la existencia de estas fracciones? Lo mejor será salir al paso de esta pregunta antes de que surja. Como el niño tiene encima de la mesa sus montones de fracciones, estableceremos con él un diálogo que le lleve a usar precisamente este tipo de números fraccionarios. Por ejemplo:

— De uno de los montones coge unos cuantos papeles y cuéntalos. ¿Cuántos tienes?

— Nueve.

— ¿Nueve qué?

— Nueve de un cuarto.

— Entonces, ¿cuántos cuartos tienes?

— Tengo nueve cuartos.

Así está nombrando fracciones con el numerador mayor que el denominador como la cosa más natural. A continuación debe tomar hojas enteras y cubrirlas grapando esos cuartos sobre ellas. Comprobará sin ningún esfuerzo que sus nueve cuartos son dos hojas completas y una cuarta parte de otra. Repitiendo esta actividad con varias fracciones más, en poco tiempo podremos preguntarle que cuántas hojas tiene con veinticinco octavos, veinte quintos, etc. En su cuaderno irá escribiendo las igualdades que le vayan surgiendo:

— 9/4 de hoja son 2 hojas enteras y 1/4 de hoja: 9/4 = 2 + 1/4.

— 25/8 de hoja son 2 hojas enteras y 1/8 de hoja: 25/8 = 3 + 1/8.

— 20/5 de hoja son 4 hojas enteras: 20/5 = 4.

Como actividad de refuerzo podemos dividir la clase en dos grupos y cada uno hacer preguntas al otro del estilo:

— ¿Cuántos tercios de hoja son cinco hojas completas y dos tercios de otra?

— ¿Cuántos cuartos son ocho hojas?

— ¿Cuántas hojas son 25/5 de hoja?

— ¿Cuántas hojas son 19/2 de hoja?

Para introducir el concepto de fracciones equivalentes, aunque bastantes ya lo habrán intuido, podemos partir de la siguiente situación: les decimos que sobre el montón de los medios pesa una sanción por la cual en media hora no podemos tocarlos. ¿Cómo nos las arreglamos para tapar media hoja exacta? No tardarán mucho en comprobar que lo hacen con dos cuartos, con cuatro octavos o con tres sextos. A continuación se les pueden hacer preguntas de este tipo:

— ¿Puedo tapar media hoja justa con dos cuartos de hoja?

— ¿Tapo más de media hoja con tres sextos de hoja?

— ¿Me da lo mismo tapar media hoja con dos cuartos que con cuatro octavos de hoja?

— Teniendo en cuenta la cantidad de papel que tapan, ¿puedo decir que cuatro octavos es igual que tres sextos?

— ¿Puedes escribir tú alguna igualdad más?

— ¿Llamarías de alguna forma especial a las fracciones que equivalen a la misma cantidad de papel?

Levantamos ya la sanción que pesa sobre los medios y montamos un comercio de fracciones. Los dependientes tienen como condición el no poder ofrecer al cliente el tipo de fracción que le pide, pero sí darle otras que le quedan y que le satisfacerán plenamente su deseo. Por ejemplo:

—Buenos días, quiero doce tercios de hoja, por favor.

—Lo siento, pero los tercios se me han terminado. Sin embargo, puedo ofrecerle cuatro medios, una hoja entera y seis sextos de otra.

—¿Me da ocho quintos de hoja?

—Uy, tantos no me quedan, ¿le daría igual que le dé cuatro cuartos de una hoja y los tres quintos que me quedan?

Sin habérnoslo propuesto, la suma de fracciones ha quedado prácticamente explicada, aunque haya que comprobar ahora sus propiedades. Para éstas, y para la resta, dejamos al maestro que siga el desarrollo que más sugerente le sea, bien por grupos o individualmente.

Siete estrategias para plantear problemas en Geometría

(Publicado por Perfeccionamiento del Profesorado en "La Enseñanza de la Matemática, a Debate".)

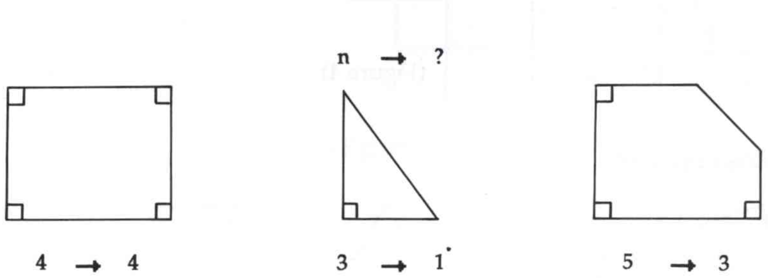
David S. Fielker*

Uno de los aspectos más curiosos de las Matemáticas es el ritmo tan rápido de cambio de las ideas. Después de haber presentado el título de esta ponencia, mis propias ideas han cambiado, y ya no estoy seguro de que haya exactamente siete estrategias para resolver problemas en Geometría. Quizás solamente haya seis; puede que haya diez.

De cualquier forma, hay dos maneras de estructurar lo que voy a decir. Podría desarrollar una tras otra todas las estrategias, ilustrando cada una con problemas. Creo que prefiero la estructura alternativa, y discutiré varios problemas, cada uno de los cuales ilustra varias estrategias o puede ser entendido utilizando varias estrategias a la vez. ¡El problema a resolver por ustedes es identificar las estrategias!

Algunos conferenciantes anteriores han sugerido que no se ha enseñado Geometría en las escuelas durante los últimos veinte años. Me inclino a creerlo, y pienso que ya es hora de que volvamos a enseñar Geometría. No obstante, deberíamos sacar provecho de este lapso de veinte años y reconsiderar lo que estamos haciendo.

Me gustaría comenzar planteando un problema que ustedes deberán tratar de resolver durante aproximadamente veinte minutos antes de que continuemos. Es bastante evidente que un cuadrilátero puede tener a lo sumo cuatro ángulos rectos; un triángulo, uno, y un pentágono, tres.



(Figura 1)

* Centro de Matemáticas «Abbey Wood». Londres.

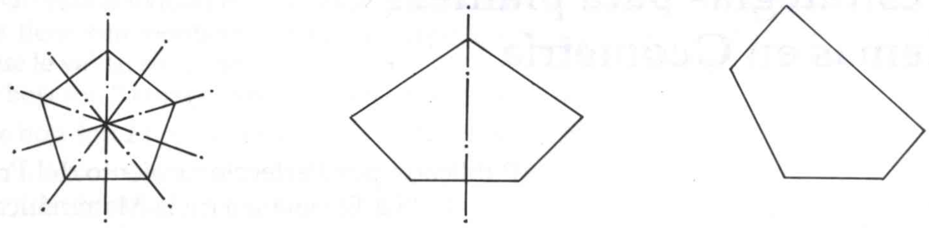
Dado n, el número de lados de un polígono, ¿puede usted determinar el número máximo de ángulos rectos?

(En este momento, se dio a los participantes veinte minutos para trabajar en el problema. Se sugiere al lector que haga lo mismo antes de continuar.)

Este problema tiene varias características interesantes:

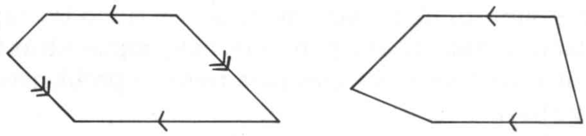
1.ª Es *accesible*. Solamente requiere entender los ángulos rectos y los polígonos. ¿Cuánta Geometría está fuera del alcance de los estudiantes porque emplean ideas demasiado difíciles?

2.ª Este problema es *interesante*. Todos han querido resolverlo. Puede que sea porque no se refiere sólo a triángulos y cuadriláteros y sus propiedades. Una actividad muy socorrida era la de clasificarlos, pero las clasificaciones eran un tanto endebles, y eran por lo general expuestas por el profesor en lugar de que los alumnos las explorasen. ¿Por qué no clasificar los pentágonos? No tenemos una clasificación utilizable de inmediato para ellos. Esta carencia nos sugiere a nosotros y a nuestros alumnos trabajar con mayor amplitud de miras. ¿Cuáles son las consecuencias de clasificar pentágonos según la simetría,



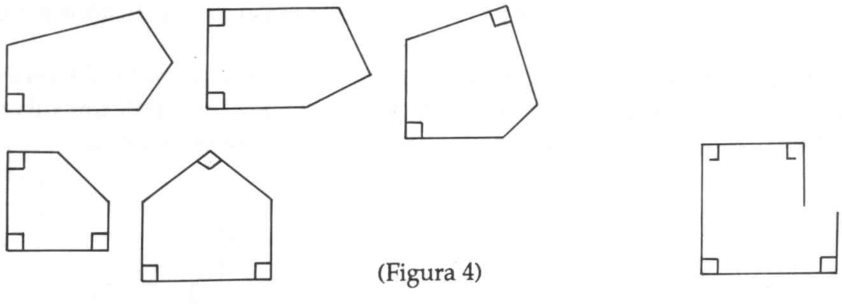
(Figura 2)

los lados paralelos,



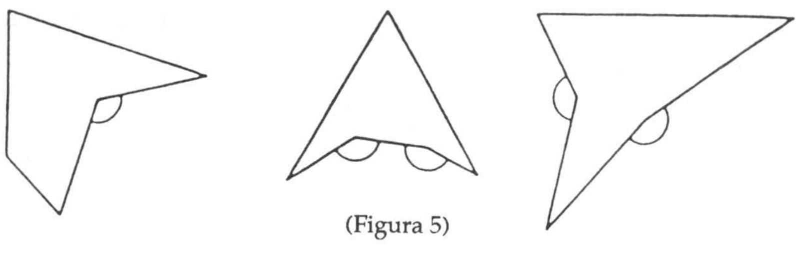
(Figura 3)

el número de ángulos rectos,



(Figura 4)

el número de ángulos obtusos?



(Figura 5)

3.ª Este problema es también interesante porque es difícil, y es difícil porque no hay un método obvio de solución; es decir, no hay ningún algoritmo de aplicación inmediata. Por lo tanto, estamos *realmente* ante un problema. Una de las dificultades que se presentan generalmente con los llamados problemas en Matemáticas es que no se trata de problemas para los estudiantes, puesto que el profesor da el método de solución. Además, una característica peculiar de la Geometría ha sido a menudo la total ausencia de problemas.

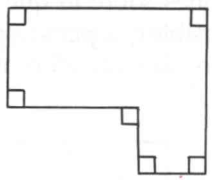
(El tema de esta conferencia podría ser: cómo crear problemas geométricos interesantes que sean accesibles a todos los niños.)

4.ª Este problema es también interesante porque es *práctico*. Los niños necesitan dibujar diagramas en Geometría. Los profesores trabajando en este problema comprueban que ellos también necesitan dibujar. Incluso si alguien obtiene una solución teórica, ésta deberá ser puesta en práctica. Puede que usted haya podido probar que un polígono de 24 lados puede tener 17 ángulos rectos, pero ¿lo puede dibujar?

5.ª Una característica de este problema, al menos en la forma en que yo lo presenté, era que estaba *mal-definido*. Cuando la gente me hace preguntas, yo no contesto. (¡Cuando me preguntan en español, simulo no entender!). Así que ustedes tienen que tomar sus propias decisiones acerca de lo que es el problema, y luego examinar las consecuencias de esas decisiones.

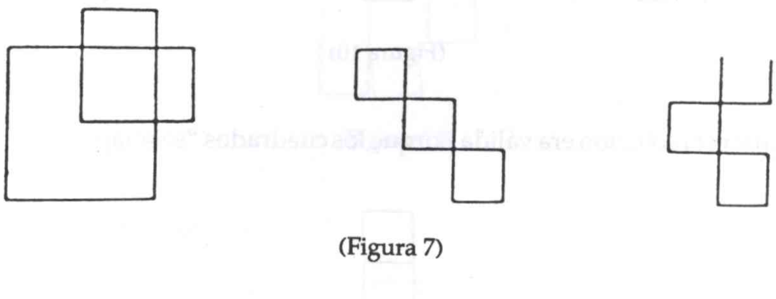
Por ejemplo, la pregunta que se me hace más frecuentemente es: "¿El polígono tiene que ser convexo?" Yo no soy la persona que debe contestar a eso. Deben explorar las consecuencias de la convexidad, que son que cualquier polígono de al menos cinco lados solamente puede tener tres ángulos rectos. Usted puede decidir entonces que esto es trivial o aburrido y decidir en su lugar investigar el problema más interesante de los polígonos no convexos.

Puede que entonces decida que los ángulos rectos "externos" son permisibles,



(Figura 6)

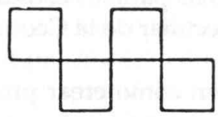
o polígonos "cruzados",



(Figura 7)

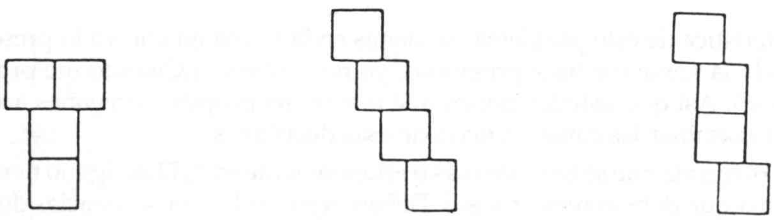
o polígonos tridimensionales, o polígonos dibujados en la superficie de una esfera.

A muchos problemas se les hace aburridos y estériles cuando el profesor impone restricciones. Un ejemplo clásico es el tipo de problemas "Polyomino", es decir, ¿cuántas formas diferentes se pueden construir con cuatro cuadrados? Generalmente el profesor impone restricciones del tipo de: todos los cuadrados deben unirse mediante lados enteros, y las reflexiones y las rotaciones son equivalentes. Si se quitan las restricciones la situación se convierte en mucho más rica. He explorado con niños muy jóvenes las posibilidades de cuadrados unidos a los vértices



(Figura 8)

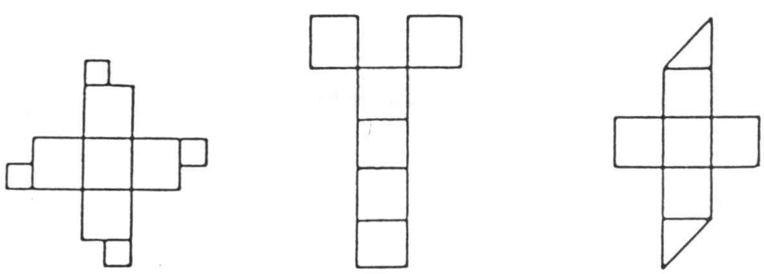
o en el punto medio de los lados,



(Figura 9)

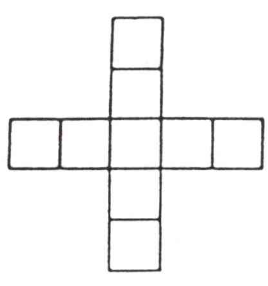
o he participado en discusiones acaloradas acerca de si las reflexiones y rotaciones son "lo mismo".

Generalmente, las preguntas del tipo de "cuántas" son buenas, siempre y cuando se planteen con amplitud suficiente para efectuar decisiones sobre lo que se está contando en realidad. Por ejemplo, ¿cuántas redes existen para un cubo? Es posible que pensemos que conocemos la respuesta, pero la última vez que se lo pregunté a una clase de niños de once años me encontré con varias sorpresas,



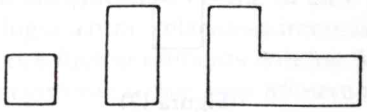
(Figura 10)

y una niña insistió que esta solución era válida porque los cuadrados "se solapan en la parte de arriba".



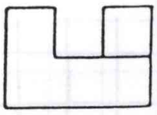
(Figura 11)

Geoff Giles, de la Universidad de Stirling, en Escocia, ha preparado problemas del tipo de: ¿cuántas formas simétricas diferentes puedes hacer con estos trozos? Es una lástima que insista en que la Geometría de este problema ha de ser invariante respecto a las reflexiones, y al preguntar acerca del número de posibilidades existentes, nos encontramos por lo general con un número reducido. Para mí es más interesante presentar estos tres pedazos,



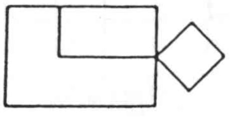
(Figura 12)

que dan lugar a un número relativamente grande de posibilidades, junto con preguntas del tipo de:
¿se permiten rotaciones?
¿han de usarse los tres trozos conjuntamente?



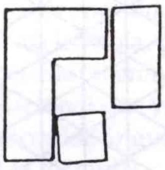
(Figura 13)

¿se pueden juntar en las esquinas?



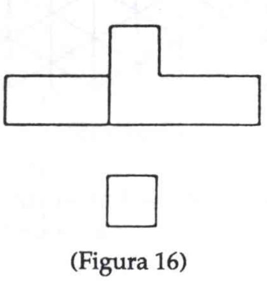
(Figura 14)

¿se permiten agujeros?



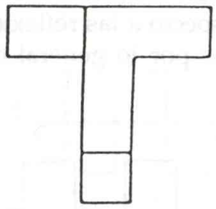
(Figura 15)

¿pueden estar los trozos separados?



(Figura 16)

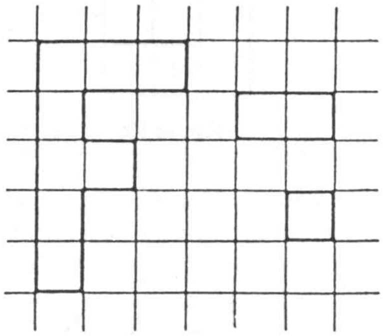
¿se pueden solapar los pedazos?



(Figura 17)

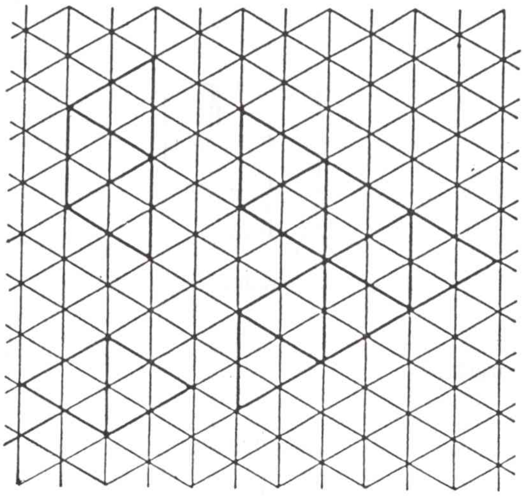
El profesor no contesta estas preguntas. Los estudiantes deben decidir lo que se permitirá, y deben dilucidar si sus decisiones dan lugar a problemas interesantes. Dado que las decisiones son suyas, pueden cambiarlas si así lo desean.

Siempre he animado a mis estudiantes a que piensen nuevos problemas. El problema anterior puede ser generalizado fácilmente inspeccionando las características del problema y luego cambiándolas. No tenemos por qué usar estas tres formas, podemos usar otras diferentes.



(Figura 18)

Podemos basarnos en formas triangulares en vez de en cuadrados.



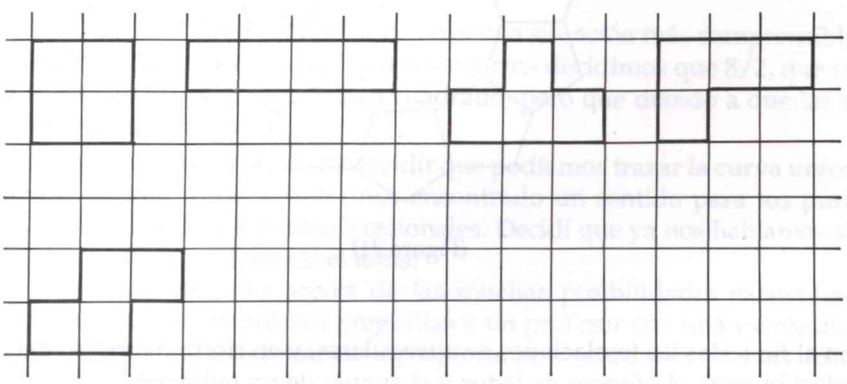
(Figura 19)

Podemos trabajar en tres dimensiones, utilizando formas generadas por cubos.

También podemos invertir el problema. Por ejemplo, ¿puedes crear tres trozos que se combinarán para producir una figura simétrica únicamente de tres formas?

Invertir el razonamiento de esta forma ayuda a plantear nuevos problemas. Por ejemplo, a menudo damos a los estudiantes formas y les pedimos encontrar perímetros. En su lugar les podemos dar perímetros y pedirles que busquen las formas. Esta pregunta es también del tipo de "cuántos". Además requiere tomar decisiones. Por ejemplo, una vez pregunté a chicos de quince años si podían encontrar formas cuyo perímetro fuese de 24 cm. El problema es demasiado amplio, a no ser que alguien elija algunas restricciones. Unos solamente consideraron triángulos. Otros, triángulos isósceles, y encontraron algunas relaciones interesantes entre variables tales como la base y la altura. Otros solamente consideraron polígonos regulares, dando lugar a otras relaciones interesantes. Otros consideraron solamente triángulos con lados cuyas dimensiones fueron números enteros, lo que da un número finito de posibilidades y está pidiendo a gritos una generalización a un número real para el perímetro.

En concreto, una decisión puede ser el dibujar las formas en papel cuadriculado; 24 es demasiado grande para empezar; supongamos que el perímetro es 10.



(Figura 20)

¿Esas son todas las formas con un perímetro de 10? ¿Cómo podéis proceder sistemáticamente? ¿Cómo sabéis cuándo las tenéis todas? ¿Cuántas formas hay con perímetros menor de 10 o mayor de 10? Nótese cómo se puede generar este problema, no generalizando el problema anterior, sino considerando un caso particular. No iba a decir nada de las teselaciones, principalmente porque hay tanto que decir que podría fácilmente pasarme una semana hablando sobre este aspecto de la Geometría tan atractivo y fructífero. ¡Fue entonces cuando me acordé que estaba en el país de la Alhambra! Así que me decidí a incluir unas cuantas ideas.

Hace algunos años estaba trabajando con unos chicos de quince años que querían ver las teselaciones que podían hacer a partir de polígonos regulares con todos los vértices congruentes; es decir, estaban investigando las teselaciones semi-regulares. Yo lo sabía, pero ellos no; se lo podía haber dicho a ellos, pero no lo hice. Lo que es realmente interesante fue su enfoque ante el problema y su ulterior desarrollo.

Empezaron dibujando al azar algunas teselaciones que ya conocían, y luego decidieron que para lograr un enfoque más sistemático necesitarían conocer los ángulos de los polígonos regulares. Construyeron un método general para hacerlo y llegaron a la fórmula:

ángulo de un polígono de **n** lados = $180° - 360°/\mathbf{n}$,

y elaboraron una tabla, omitiendo aquellos que ellos no estimaron necesarios.

LADOS	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20
ANGULO	60	90	108	120	135	140	144	150	156	160	162

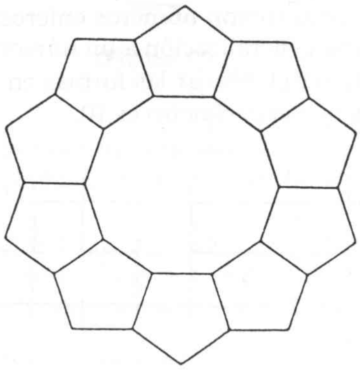
Luego empezaron a ver de forma sistemática qué combinaciones de ángulos sumarían en total 360°. Había que comprobar cada posibilidad mediante un dibujo. El caso

2 x 60° y 2 x 120°

por ejemplo, tenía dos versiones según que los triángulos estuviesen juntos o separados por hexágonos, y la primera versión no verificaba la regla de los vértices congruentes. Más aún, combinaciones tales como

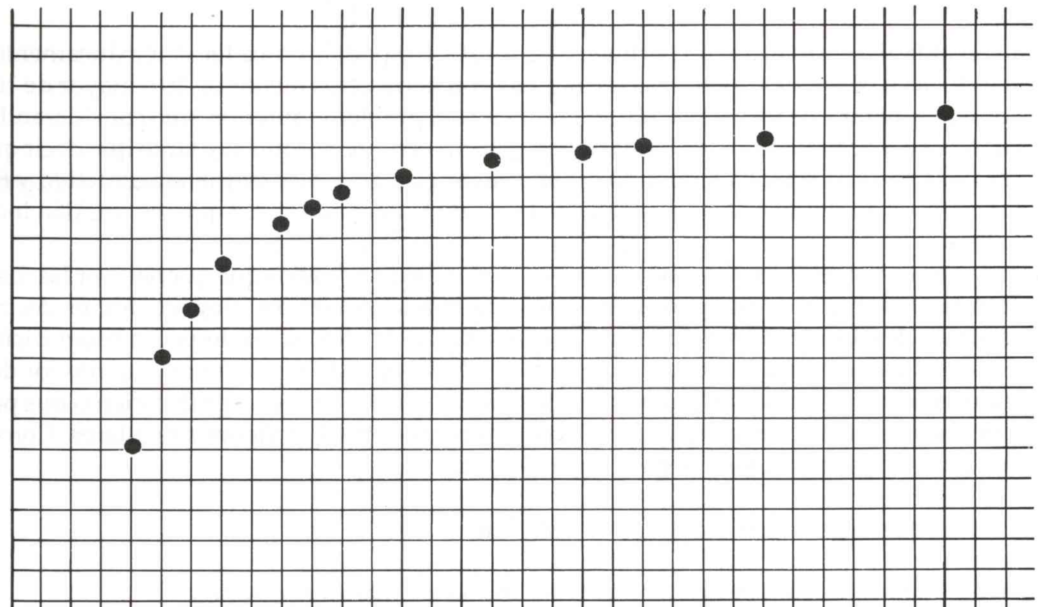
$$108 + 108 + 144 \quad y \quad 60 + 144 + 156$$

no podían extenderse en el plano. (La primera de estas dos es un caso especial de polígonos de lados rodeando un polígono de 2n lados, pero no nos detuvimos a explorar esta situación en esta ocasión.)



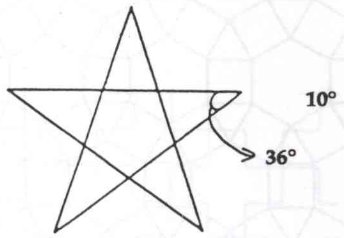
(Figura 21)

Encontraron al fin todas las teselaciones semirregulares, y en cierto momento decidieron dibujar un gráfico de la relación entre el número de lados y el ángulo de un polígono.



(Figura 22)

Era una curva interesante. Alguien sugirió unir los puntos. Otros a objeciones, porque solamente teníamos números enteros como valores para las dimensiones de los lados y los puntos de en medio no tendrían ningún sentido, pero decidimos que un polígono de dos lados tendría un ángulo de 0° y colocamos ese punto en la curva. Pregunté si era posible un polígono regular de 2 1/2 lados. Si existiese tendría un ángulo de 40°. Cotejamos con la fórmula y encontramos que un polígono regular de 2 1/2 lados tendría un ángulo de 36°. Decidimos dibujarlo, ¡y comprobamos que podíamos!



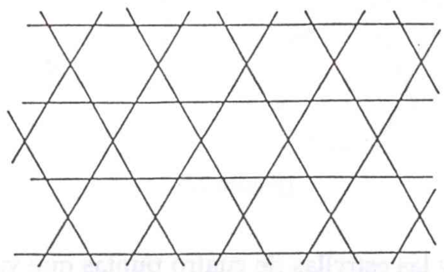
(Figura 23)

Si reescribimos 2 1/2 como 5/2, nos encontramos con una situación más comprensible. Examinamos "polígonos regulares de 7/2 y 7/3 lados, etc.", y de esta forma decidimos que 8/2, que era un octógono "cruzado", no era lo mismo que 4/1, que era un cuadrado, pero que debido a que las fracciones eran equivalentes tenían los mismos ángulos.

Volvimos al gráfico y estuvimos a punto de decidir que podíamos trazar la curva uniendo los puntos. Pero alguien se opuso, porque aunque habíamos encontrado un sentido para los puntos racionales, todavía no habíamos interpretado los puntos irracionales. Decidí que ya nos habíamos alejado durante suficiente tiempo del programa, ¡y dejamos el tema!

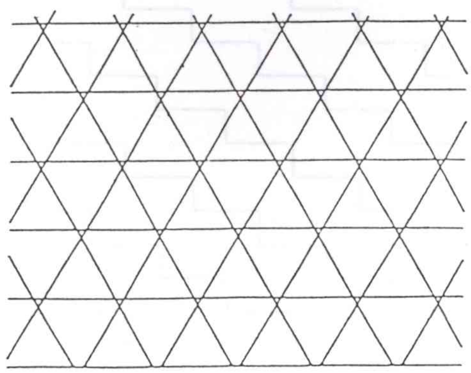
La anécdota anterior es instructiva acerca de las muchas posibilidades existentes cuando a los estudiantes se les permite hacer sus propias preguntas a un profesor con una mente abierta. También ilustra el hecho de que hay métodos sistemáticos de explorar las teselaciones además del de poner juntas distintas formas.

Al analizar una teselación es particularmente útil ver de qué está compuesta, y luego trabajar con las distintas variables que uno percibe. Considérese uno de los teselados que encontraron mis estudiantes.



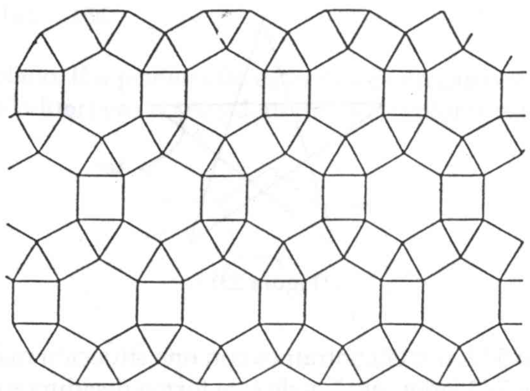
(Figura 24)

1. En lugar de mirar a los triángulos y hexágonos, se le puede examinar como tres conjuntos de líneas paralelas. Estas se pueden dibujar en tres hojas de papel vegetal y explorar otras maneras de ponerlas juntas.



(Figura 25)

2. Cada hexágono está rodeado por triángulos. ¿Hay algún teselado en el cual cada hexágono está rodeado por cuadrados?

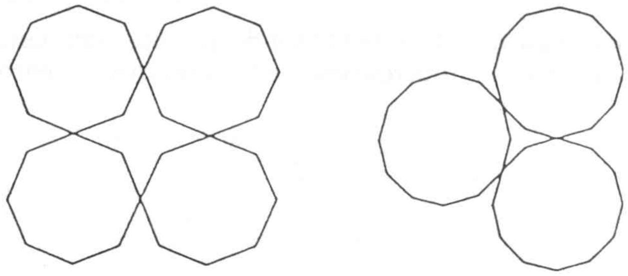


(Figura 26)

Alternativamente, cada triángulo está rodeado por hexágonos.

¿Podría estar cada triángulo rodeado por cuadrados? ¿O cada cuadrado estar rodeado por triángulos, o por hexágonos, o por dos de cada?

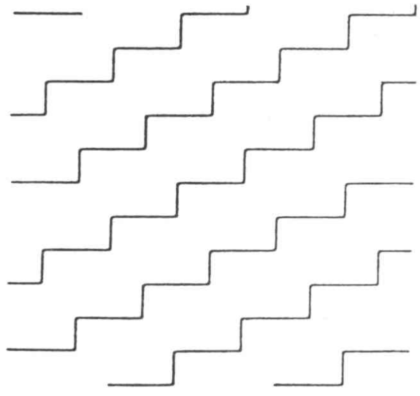
3. Los hexágonos (o los triángulos) se unen por los vértices, dejando huecos triangulares (o hexagonales). ¿Podemos usar otros polígonos regulares juntándose por los vértices, y qué tipo de huecos dejan?



(Figura 27)

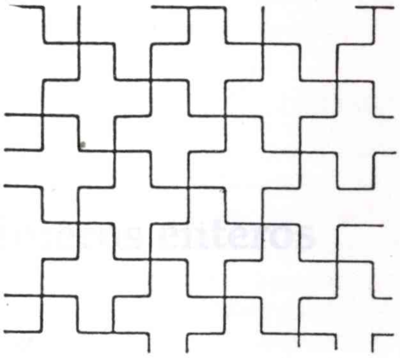
El teselado de los octógonos y las estrellas de cuatro puntas que vimos anteriormente nos pueden servir para empezar. Se le puede ver como dos conjuntos de líneas "paralelas" en zig-zag, y éstas se pueden dibujar en dos hojas vegetales y variar sus posiciones relativas para producir otros teselados.

Se puede generalizar este tema. Tómense dos conjuntos cualesquiera de rectas en zig-zag:



(Figura 28)

Rótese unos 90° y superimpóngase de diferentes maneras. Las rectas en zig-zag pueden ser descritas por un par de números, haciendo posible una exploración sistemática. Los resultados pueden ser a la vez sorprendentes y atractivos, pero la variedad se aprecia mejor con un proyector de transparencias que leyendo estas páginas tan estáticas.



(Figura 29)

Kobayashi (1989) sugiere [illegible] de [illegible]. Los [illegible] zig-zag pueden ser descritas por un par de números, haciendo posible una exploración sistemática. Los resultados pueden ser a la vez sorprendentes y atractivos, pero la variedad se aprecia mejor con un proyector de transparencias que llevando estas páginas tan estáticas.

[illegible]

Alternativamente [illegible]

¿Podrías [illegible]

o por hexágonos [illegible]

2. Un hexámetro [illegible]

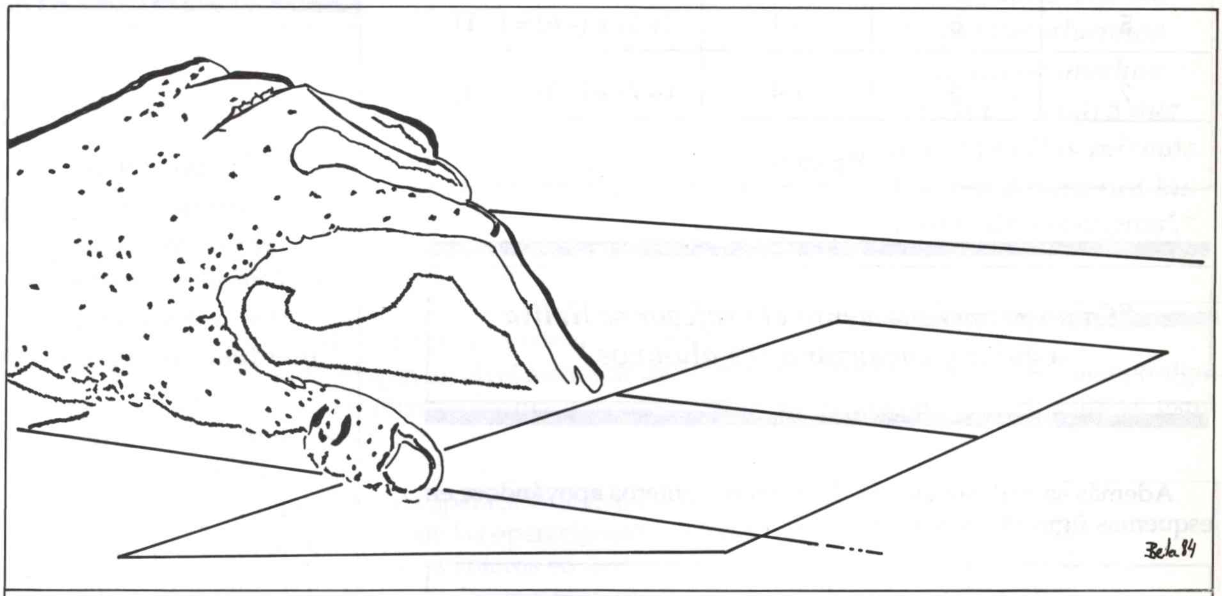
tabla. ¿Podrías [illegible]

Materializar los números enteros

Leopoldo Martínez Hernández

Es en el campo de los números enteros donde los alumnos de la segunda etapa de E. G. B. comienzan a encontrar sus primeras dificultades para la correcta realización de actividades algebraicas.

El trabajo que presento es parte de la experiencia llevada a cabo durante los dos últimos cursos con los alumnos de 7.° de E. G. B. del Colegio "Areteia", de Madrid.



El material debe ser manipulable.

El planteamiento metodológico previo a la realización de la experiencia fue el ser lo más fiel posible al proceso de aprendizaje de los conceptos, partiendo de lo concreto-manipulativo hasta llegar a lo abstracto-simbólico y a su posterior aplicación a situaciones nuevas.

• El primer paso consistió en materializar el número entero con un material que fuera simple, accesible y manipulable; podrían ser tuercas y tornillos, garbanzos y judías, chapas, tapones, fichas negras y blancas, etc., siendo este último por el que nos decidimos. Metimos las fichas negras y blancas en bolsas diferentes colocando un pequeño cartel con el signo + en la bolsa de las negras y otro con el signo – en la bolsa de las blancas.

- El desarrollo de la operación se realizó por parejas. Cada niño sacaba las fichas que quería de cualquiera de las dos bolsas. Ambos juntaban lo extraído y contaban el resultado de esa unión o suma. Si hubiesen elegido ambos la misma bolsa, la operación sería una simple suma; pero si hubiesen elegido bolsas distintas, las fichas negras se neutralizarían con las blancas (o viceversa), quedando como resultado fichas negras o fichas blancas.

Como ejemplo, imaginemos a dos ninos trabajando:

— "He cogido cinco fichas negras." Las deposita sobre la mesa.
— "Y yo, seis fichas blancas." Las deposita también sobre la mesa.
Juntan lo que han extraído y las hacen corresponder neutralizando ficha negra con ficha blanca.
— "Cinco fichas negras se han neutralizado con cinco fichas blancas y queda como resultado una ficha blanca."
En este momento su lenguaje se ha centrado en los objetos (ficha negra, ficha blanca) y no en el significado (positivo, negativo) de los objetos.

- Después de haberse familiarizado con el material, su manejo y desarrollo durante un corto período de tiempo y haber investigado todas las posibilidades de sumas que pueden realizar observando sus resultados, se les entrega una tabla en la que deben expresar numéricamente las acciones que van realizando con las fichas y escribirlas en forma de sumas de números enteros. (Ver figura 1.)

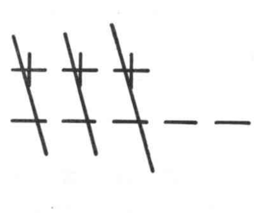
F. ROJAS (+)	F. BLANCAS (–)	TOTAL	SUMA
5	6	– 1	(+ 5) + (– 6) = (– 1)
7	3	+ 4	(+ 7) + (– 3) = (+ 4)

(Figura 1)

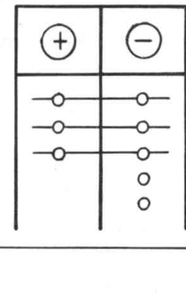
"En un primer momento el profesor se limita a guiar y encauzar a los alumnos."

Además se realizan sumas de números enteros apoyándose en esquemas figurativos como los de la figura 2.

$$\begin{array}{r} (+3) \\ + \ (-5) \\ \hline (-2) \end{array}$$



ó



(Figura 2)

"El primer paso consistió en materializar el número entero con un material que fuera accesible, simple y manipulable; podrían ser tuercas y tornillos, garbanzos y judías, chapas y tapones, fichas negras y blancas, etc."

Es conveniente que los alumnos realicen muchos ejercicios para que así sean ellos mismos los que descubran las "reglas de los signos" y las propiedades de la suma de números enteros. En un primer momento el profesor se limita a guiar y encauzar a los alumnos; pero, al finalizar cada sesión, se realiza una puesta en común.

Las puestas en común realizadas fueron muy enriquecedoras por la cantidad y riqueza de las conclusiones que espontáneamente surgían como consecuencia de sus propias investigaciones.

Como ejemplo interesa citar algunas de ellas:

— "Me he dado cuenta de que cuando cogemos el mismo número de fichas negras que de blancas el resultado es cero." "Si sumamos dos positivos el resultado siempre es positivo." "Si cogemos más positivos que negativos el resultado es siempre positivo." "Cuando yo cojo de la bolsa de fichas blancas y mi compañero no coge de la bolsa de fichas negras el resultado es el mismo número de fichas blancas."

Hubo una pareja que para realizar más operaciones en menos tiempo utilizó un mecanismo que había observado anteriormente y que consistía: si en la operación anterior la suma realizada era, por ejemplo, (+3) + (–2) = (+1), en la suma siguiente se limitó a cambiar el signo de los dos sumandos y supo, sin realizarlo, que el resultado era opuesto del anterior (–3) + (+2) = (–1). Habían descubierto que "la suma de los opuestos es igual al opuesto de la suma".

• Seguidamente los alumnos resolvieron sumas de números enteros sin el apoyo que ofrecían las fichas y los esquemas figurativos. Realizaron las operaciones sobre una tabla en la que se les daba los sumandos y se les pedía que hallaran el total de la suma y expresarla con números enteros (Figura 3.)

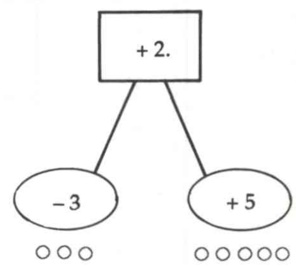
+	−	TOTAL	SUMA
5	9	– 4	(+.5) + (– 9) = (– 4)
6 y 7	–	+ 13	(+ 6) + (+ 7) = (+ 13)

(Figura 3)

"Es consecuente que los alumnos realicen muchos ejercicios para que así sean ellos mismos los que descubran las 'reglas de los signos'."

Los alumnos que hayan adquirido correctamente el concepto de la suma se desprenderán pronto de todos los apoyos utilizados. Sin embargo, es imprescindible respetar el ritmo de aprendizaje de cada uno, porque los que tengan un nivel menor de abstracción necesitarán durante más tiempo algún tipo de apoyo. Así serán ellos mismos los que, cuando no lo necesiten, eliminen tanto el apoyo manipulativo como el figurativo.

• Teniendo en cuenta que cada operación de reunión implica otra de separación (reversibilidad de las operaciones), es importante la descomposición de números enteros en sumas de dos o más sumandos (y viceversa), manipulativamente, mediante esquemas figurativos, etc.; por ejemplo:



(– 7) = —— + —— + ——

(– 5) + (+ 3) + (+ 4) = ——

• «Sumar dos posiciones sobre la recta no tiene sentido alguno. En cambio, cuando damos valor numérico a las posiciones y a los desplazamientos, un desplazamiento transforma una posición en otra, y en este caso actúa como un operador.

El esquema más simple de la suma será entonces:

Posición inicial + Desplazamiento = Posición final.

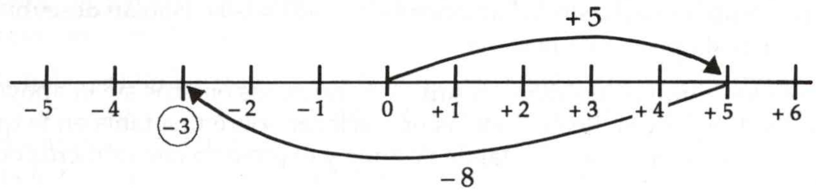
Dos desplazamientos consecutivos pueden reducirse a uno, y eso nos da una nueva versión de la suma"[1].

La representación gráfica de sumas de números enteros se puede realizar partiendo de situaciones concretas; por ejemplo:

Ejemplo a):

"En un juego de azar se obtiene la siguiente jugada: adelantar cinco casillas y retroceder ocho casillas. Se pregunta a los alumnos: ¿Se puede hacer esto con un solo movimiento? ¿Cuál es el movimiento que tienes que realizar?" (Ver figura 4.)

1.ª jugada	2.ª jugada	Jugada final
+ 5	− 8	− 3



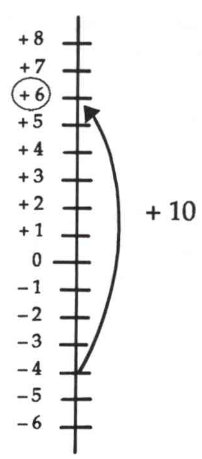
$(+5) + (-8) = (-3)$

(Figura 4)

Ejemplo b):

"A las tres de la mañana la temperatura era de –4 °C. Ha subido 10 °C. ¿Qué temperatura tenemos? (Ver figura 5.)

tª inicial	Variación de tª	tª final
− 4	+ 10	+ 6



$(-4) + (+10) = (+6)$

(Figura 5)

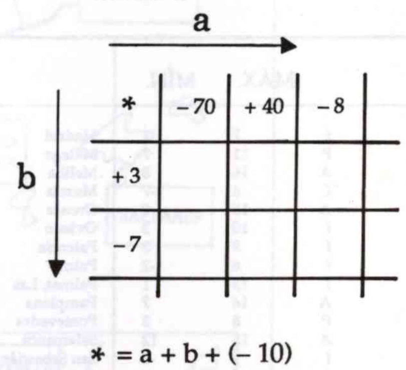
[1] Colectivo Periódica Pura: *Didáctica de los números enteros*. Editorial Nuestra Cultura, 1982, página 20.

• Las prácticas del cálculo mental son necesarias para que el alumno adquiera mayor agilidad en las operaciones, reforzando además la automatización y mecanización de las mismas. Esta práctica, a la vez que motiva al alumno, le desarrolla otras capacidades como la atención, razonamiento y memoria.

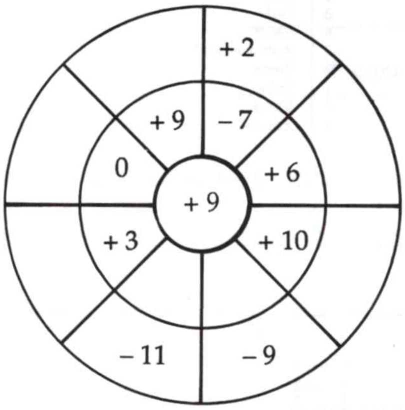
Para realizar este tipo de cálculo se entregaron a los alumnos diagramas de cálculo, tablas, cuadros mágicos, etc. (Ver figuras 6, 7, 8 y 9.)

+	+ 7	− 10	+ 30
+ 8	+ 15		
+ 4			

(Figura 6)



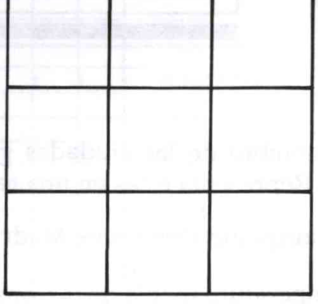
(Figura 7)



(Figura 8)

"Las prácticas de cálculo mental son necesarias para que el alumno adquiera mayor agilidad en las operaciones."

Completa el cuadro de tal forma que la suma en horizontal, diagonal y vertical sea (−3), utilizando los números −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, sin repetir ninguno.



(Figura 9)

Estas actividades se complementan con las formulaciones orales propuestas por el profesor, a las que el alumno contestará la solución de forma oral o escrita.

Como último paso en el desarrollo de este proceso conviene aplicar los conocimientos de números enteros a situaciones tomadas de la vida real a través de los medios de comunicación. Por ejemplo, utilizando la tabla de temperaturas de la sección de "El tiempo" de un periódico (*El País*, 15-2-84), figura 10, se pueden plantear cuestiones tales como:

ESPAÑA		MÁX.	MÍN.			MÁX.	MÍN.	EXTRANJERO		MÁX.	MÍN.
Albacete	f	7	1	Madrid	f	9	-5	Amsterdam	Q	0	-1
Alicante	P	11	7	Málaga	A	18	4	Ángeles, Los *			
Almería	A	16	8	Melilla	P	14	10	Atenas	f	8	5
Ávila	f	4	-7	Murcia	P	12	6	Beirut			
Badajoz	A	15	0	Orense	A	16	0	Bonn	f	4	-5
Barcelona	f	10	3	Oviedo	f	10	0	Bruselas	f	3	-2
Bilbao	f	9	3	Palencia				Buenos Aires *			
Burgos	f	6	-2	Palma	f	12	6	Cairo, El	A	20	13
Cáceres	f	13	1	Palmas, Las	A	20	15	Caracas *			
Cádiz	A	16	7	Pamplona	f	9	1	Chicago *			
Castellón	P	8	3	Pontevedra	A	15	1	Copenhague	Q	1	-3
Ceuta	A	15	12	Salamanca	f	6	-4	Estocolmo	F	0	-1
Ciudad Real	f	9	-3	San Sebastián	f	8	-1	Francfort	f	4	-3
Córdoba	f	14	0	S. C. Tenerife	A	20	15	Ginebra	F	-1	-4
Coruña, La	f	14	3	Santander	f	10	6	Lisboa	A	16	7
Cuenca	f	8	-5	Santiago de C.	A	15	1	Londres	Q	9	-1
Gerona	f	8	1	Segovia	f	5	-4	México *			
Gijón	f	11	-2	Sevilla	A	18	4	Miami *			
Granada	f	13	-3	Soria	f	8	-4	Moscú	F	-10	-21
Guadalajara	f	9	-4	Tarragona	P	9	4	Nueva York *			
Huelva	A	18	6	Teruel	Q	6	-5	Oslo	F	-4	-6
Huesca	f	7	1	Toledo	f	10	-3	París	f	5	-1
Ibiza	P	12	6	Valencia	P	9	6	Rabat	A	15	11
Jaén	f	9	4	Valladolid	f	9	-2	R. de Janeiro *			
León	f	8	-3	Vigo	f	14	7	Roma	f	9	0
Lérida	f	9	3	Vitoria	f	8	1	Tokio *			
Logroño	f	9	2	Zamora	f	8	-3	Viena	Q	0	-6
Lugo	f	11	0	Zaragoza	P	8	2	Zürich	F	-1	-8

A, agradable / C, mucho calor / c, calor / D, despejado / F, mucho frío / f, frío / H, heladas / K, nevadas / P, lluvioso / Q, cubierto / S, tormenta /T, templado / V, vientos fuertes.
* Datos del día anterior.

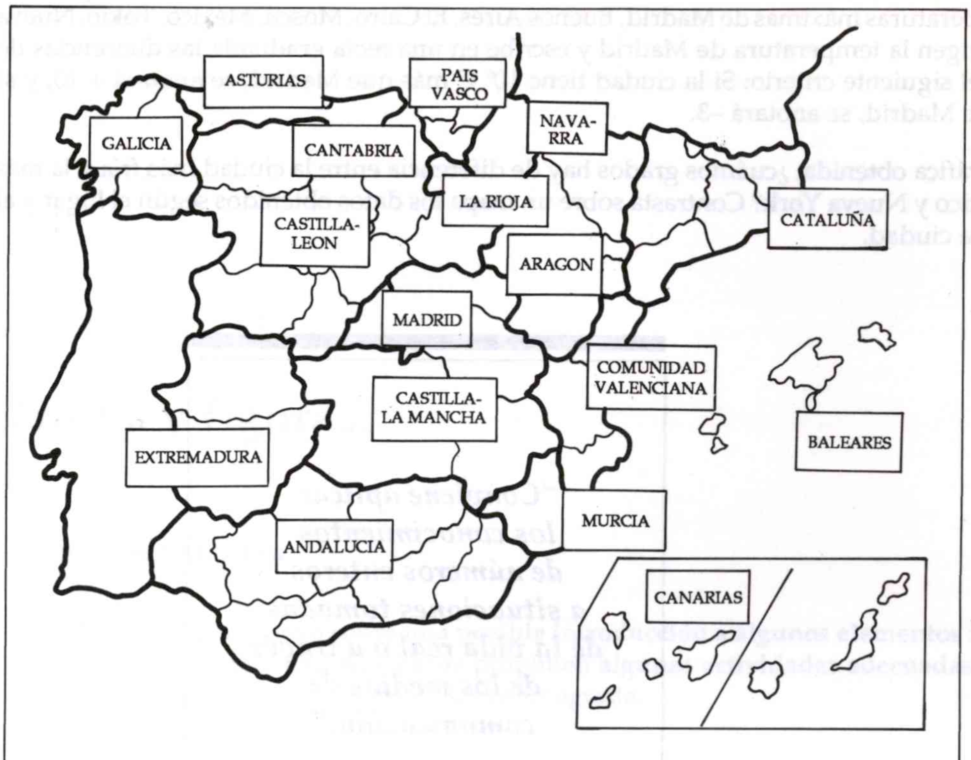
(Figura 10)

"Es imprescindible respetar el ritmo de aprendizaje de cada alumno."

a) Escribe el nombre de las ciudades gallegas citadas en la tabla y sus temperaturas mínimas correspondientes. Representa éstas en una recta graduada y al lado escribe el nombre de la ciudad.

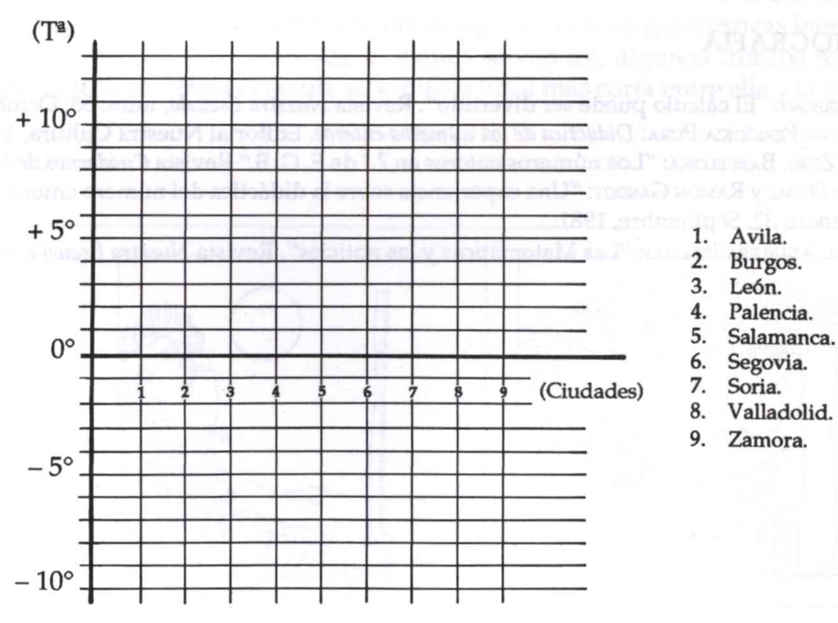
b) ¿Cuál es la amplitud térmica de Madrid?

c) Halla la temperatura media de la Comunidad Autónoma Andaluza, primero de la tabla de máximas y luego de la tabla de mínimas. Haz lo mismo con las demás Comunidades Autónomas del Estado español. Escribe estos datos sobre un mapa de España y relaciónalos con las características de cada Comunidad. (Se aconseja realizar este ejercicio por grupos.) Figura 11.



(Figura 11)

d) Representa en el cuadro de la figura 12 las temperaturas máxima y mínima de las ciudades que componen la Comunidad de Castilla-León. Une los puntos de las temperaturas máximas con una línea roja y los de las mínimas con una línea azul. Escribe al lado de cada ciudad su amplitud térmica.



(Figura 12)

e) Anota las temperaturas máximas de Madrid, Buenos Aires, El Cairo, Moscú, México, Tokio, Nueva York. Toma como origen la temperatura de Madrid y escribe en una recta graduada las diferencias de temperatura según el siguiente criterio: Si la ciudad tiene 10° C más que Madrid, se anotará + 10, y si tiene 3° C menos que Madrid, se anotará –3.

Observando la gráfica obtenida, ¿cuántos grados hay de diferencia entre la ciudad más fría y la más cálida? ¿Y entre México y Nueva York? Contrasta sobre un mapa los datos obtenidos según el lugar y el tipo de clima de cada ciudad.

"Conviene aplicar los conocimientos de números enteros a situaciones tomadas de la vida real o a través de los medios de comunicación."

BIBLIOGRAFIA

Luis Ferrero: "El cálculo puede ser divertido". Revista *Nuestra Escuela*, núm. 53. Octubre, 1983.

Colectivo Periódica Pura: *Didáctica de los números enteros*. Editorial Nuestra Cultura, 1982.

Grupo Zero. Barcelona: "Los números enteros en 7.° de E. G. B." Revista *Cuadernos de Pedagogía*, núm. 64. Abril, 1980.

Dolors Dilmé y Ramón Gassiot: "Una experiencia sobre la didáctica del número entero". Revista *Reforma de la Escuela*, número 32. Septiembre, 1981.

Manuel Aguilera Iglesias: "Las Matemáticas y las noticias". Revista *Nuestra Escuela*, núm. 57. Febrero, 1984.

Forma y figura...

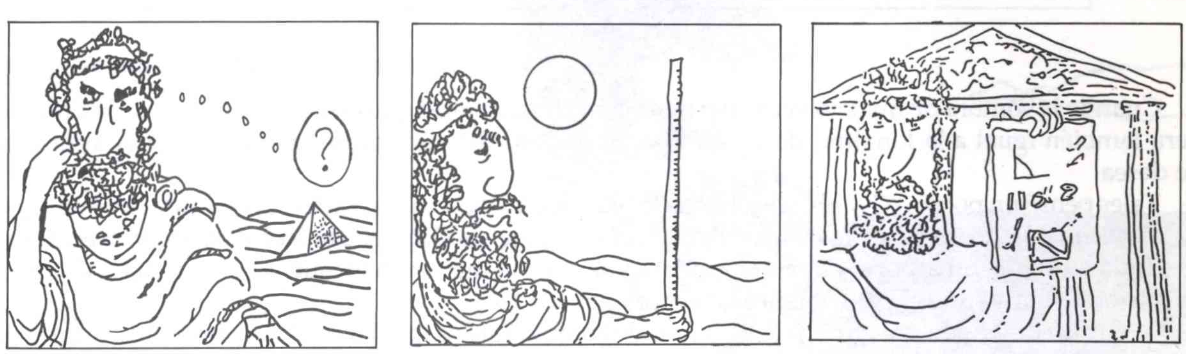
Miguel de Guzmán

Un ensayo sobre una posible introducción a algunos elementos iniciales de Geometría. Al final se proponen algunas actividades adecuadas para su utilización en una enseñanza integrada.

Nuestro mundo está lleno hasta rebosar de figuras geométricas. A nosotros hoy día nos resulta extraordinariamente fácil encontrar la Geometría por todas partes. Casi nos es más difícil poner los ojos en un objeto que no tenga una forma geométrica, pública, simple, elaborada por la mente humana. Nuestro suelo es plano, nuestras paredes verticales, nuestra taza del desayuno redonda, como nuestros botones, las ruedas del coche... Menos mal que conservamos algunos árboles, que conservamos aún la posibilidad de mirar el cielo con sus nubes, que son como quieren...

El hombre muy primitivo, cuando estaba aún cerca del mono, cuando apenas había modificado su entorno, se hallaba lejos de la Geometría, pero ya tenía también algunas formas geométricas bien cerca.

El mar es un plano; el Sol y la Luna son circulares, al menos se ven así; algunos troncos son bien cilíndricos; la pupila del ojo es circular. Hasta el águila sabe que la línea más corta entre ella y la presa es la línea recta.



"Tales de Mileto observó el vértice de las pirámides."

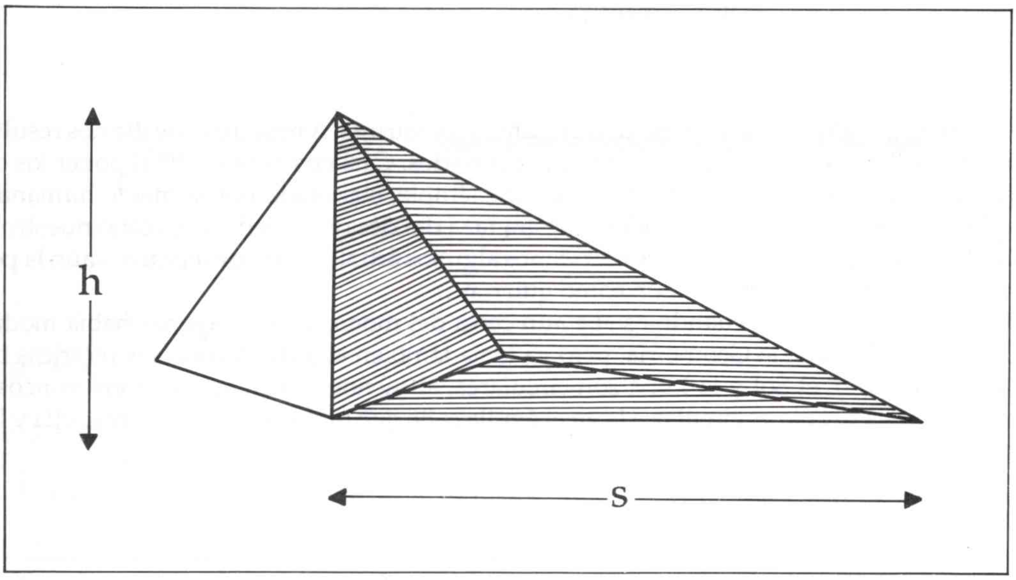
La imposición de la forma geométrica representa una forma del ejercicio del dominio del hombre sobre la Naturaleza. Cuando el hombre quiso señalar su poder sobre las aguas construyó un zigurat, una torre, un seguro contra los diluvios, con una geometría perfecta. Cuando quiso asegurarse un dominio sobre su muerte y corrupción construyó una pirámide. ¿No era un reflejo de la geometría perfecta de los caminos que los astros recorrían?

Del dominio simbólico se pasó al dominio práctico. El pensamiento geométrico nació probablemente en Babilonia, siguiendo los caminos de las estrellas, y en Egipto, donde cada inundación del Nilo producía un quebradero de cabeza a los poseedores de las tierras inundadas. ¿Cómo señalar hasta dónde llegaban los dominios de cada cual? Había que medir la Tierra, y esto es precisamente la GEO-METRIA. Los egipcios diseñaron multitud de reglas prácticas que les fueron extraordinariamente útiles para ello y para la construcción de sus templos y pirámides.

De la receta al pensamiento abstracto

Los griegos fueron quienes hicieron ascender la receta práctica de los egipcios a la categoría de pensamiento abstracto. ¿Cómo? Observando que una receta que se utiliza en un contexto podría servir para muchas otras situaciones semejantes.

Tales de Mileto, en el siglo VI a. de C., viajante empedernido, había observado probablemente cómo los egipcios, para medir la altura del vértice de una pirámide, se servían de su sombra.



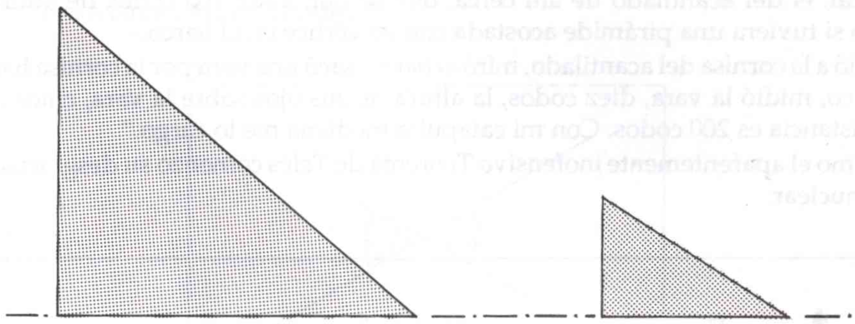
Cuando la sombra de un palo vertical p tiene la misma longitud que el palo, la altura h de la pirámide será también igual a la longitud de su sombra. Bastará medir esta sombra para obtener la altura que se desea.

Tales pensó un poco: «¿Cuál es el problema? Medir la distnacia sobre el suelo del punto al que no puedo llegar fácilmente y echar desde él una cuerda verticalmente. Es claro que la receta me puede servir para medir la altura de un árbol al que no me quiero subir. En el momento en que la sombra del palo sea de la misma longitud que el palo, mediré la sombra del árbol.»

Medir la sombra de una pirámide bien grande cuando ésta es igual a su altura debía de ser una cosa bien pesada. Tales pensó un poco más: «¿Por qué no medir la sombra cuando la sombra del palo es la mitad de la longitud del palo? ¿O cuando es la cuarta parte? La sombra es mucho más corta y fácil de medir. Luego se multiplica por dos o por cuatro, y asunto concluido.»

Tales había empezado a dar con lo que desde entonces se llamó Teorema de Tales:

Si la sombra de un palo vertical mide un cuarto de la longitud de ese palo, la sombra de cualquier otro palo vertical a la misma hora mide un cuarto de la longitud de ese palo.



"Los griegos fueron quienes hicieron ascender la receta práctica de los egipcios a la categoría de pensamiento abstracto. ¿Cómo? Observando que una receta que se utiliza en un contexto podría servir para muchas otras situaciones semejantes."

Tales era un tío listo que no se contentaba con recetas. Por algo fue uno de los siete sabios de Grecia. El problema que la receta le había resuelto era: *calcular la distancia al suelo de un punto inaccesible.*

Método: *la sombra.* ¿Por qué funciona la sombra? Porque a la misma hora *la dirección de la línea de sombra* del vértice de la pirámide y de la punta del palo es *la misma.*

Del Teorema de Tales al arte de la guerra

Un problema interesante con que Tales se encontró en su ciudad de Mileto, en la costa griega, cuando volvió a casa, consistía en averiguar la distancia a que está un barco enemigo anclado frente a su costa. Si sabía la distancia podría adivinar mejor con qué catapulta, la de largo, mediano o corto alcance, podría darle una buena pedrada.

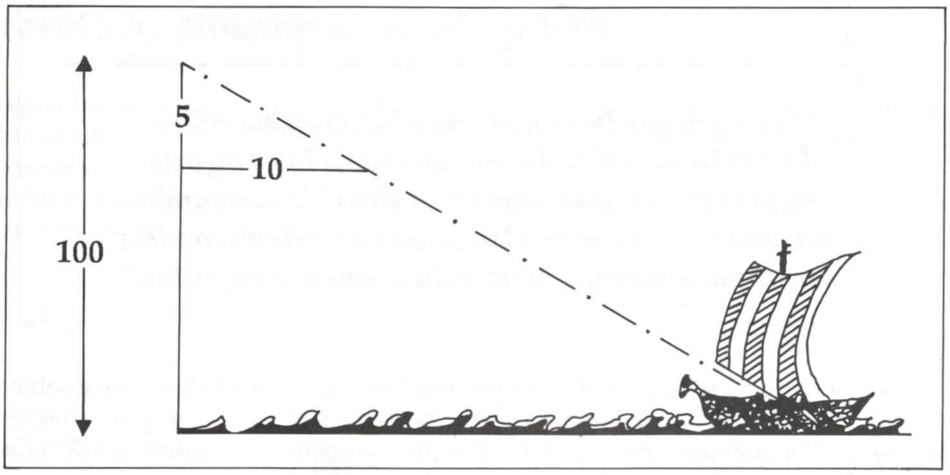
Tales se debió de acordar de los egipcios y pensó que el problema era muy parecido al de su receta

"Si la sombra de un palo vertical mide un cuarto de la longitud de ese palo, la sombra de cualquier otro palo vertical a la misma hora mide un cuarto de la longitud de ese palo."

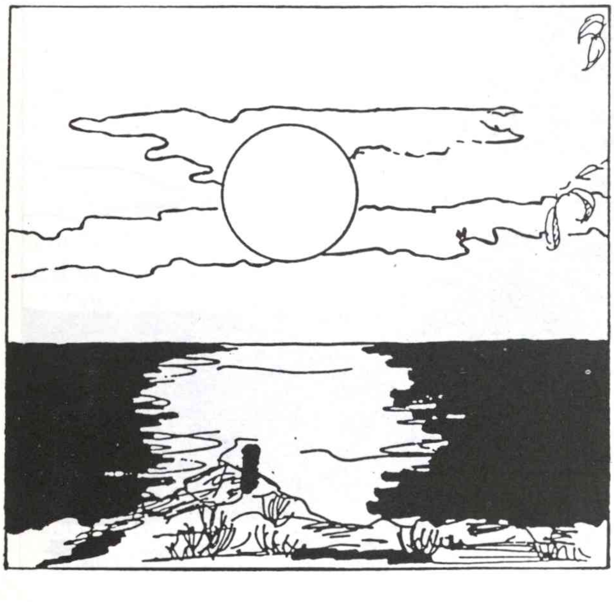
para calcular la distancia desde la copa de un árbol al suelo. Era una distancia inaccesible lo que había que medir, pero ahora desde un punto del mar a la costa. «Si el barco estuviera en la punta de una pirámide acostada..., si hubiese un Sol debajo del agua que me mandara una sombra... ¡Fantasías! Pero ¿qué falta me hace el Sol? ¡La línea de luz desde el barco a mi ojo también es una línea recta! ¡Y puedo hacerme con un suelo vertical, el del acantilado de ahí cerca, que sé que mide 100 codos de altura sobre el mar! Esto hará como si tuviera una pirámide acostada con su vértice en el barco.»

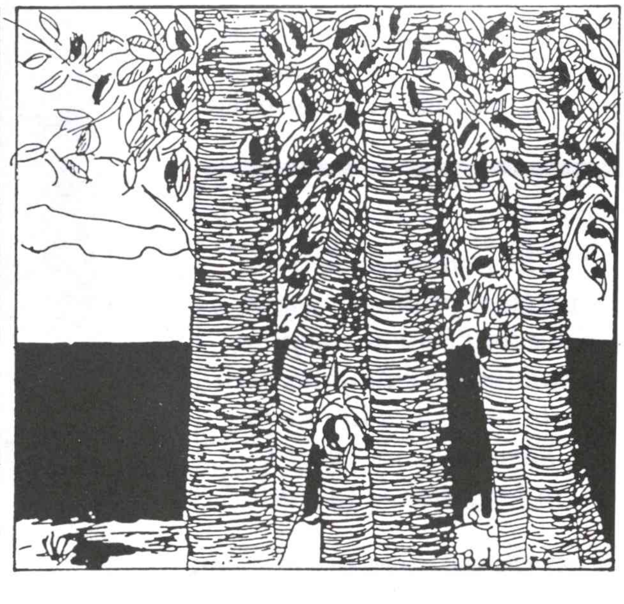
Tales se subió a la cornisa del acantilado, miró al barco, sacó una vara por la cornisa hasta que su punta le ocultó el barco, midió la vara, diez codos, la altura de sus ojos sobre la vara, cinco codos, y se dijo: "¡Eureka! La distancia es 200 codos. Con mi catapulta mediana me lo cargo."

Y he aquí cómo el aparentemente inofensivo Teorema de Tales comenzó su desgraciado camino hacia el armamento nuclear.



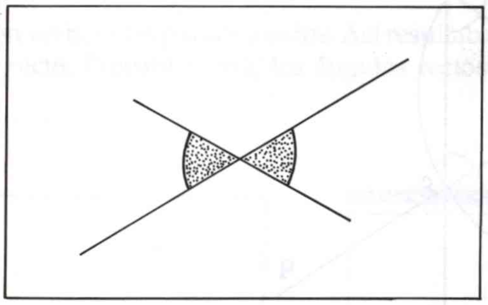
"Un problema interesante con que Tales de Mileto se encontró en su ciudad consistía en averiguar la distancia a que está un barco enemigo."



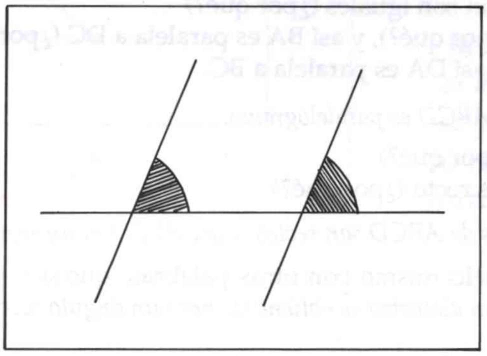


Hacia la Geometría de verdad

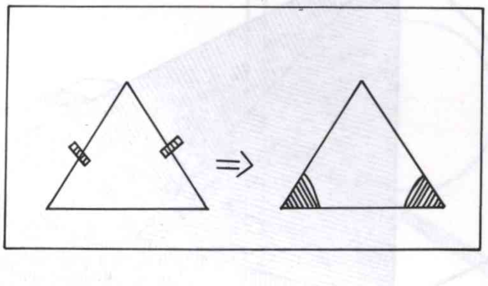
Tales debió de conocer muchos otros hechos curiosos relacionados con ángulos y triángulos. Sabía, por ejemplo, que *dos ángulos opuestos por el vértice son iguales,* es decir, superponibles (dando una media vuelta a uno se le lleva a coincidir con el otro).



Sabía también que dos rectas que se inclinan lo mismo y del mismo lado sobre una misma recta son paralelas y que, al revés, dos rectas paralelas se inclinan lo mismo sobre otra recta cualquiera.

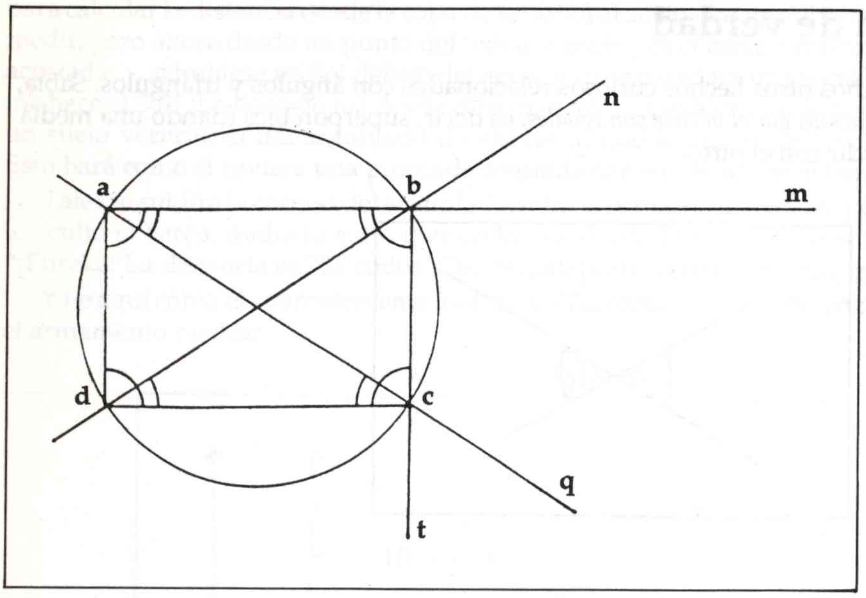


Debió de saber también que si un triángulo tiene dos lados iguales, también tiene dos ángulos iguales.



Con todo esto debió de llegar al resultado profundo y llamativo siguiente: *Si en un círculo cualquiera se trazan dos diámetros y el cuadrilátero ABCD que sus extremos determinen, entonces este cuadrilátero es un rectángulo.*

La cosa no es nada obvia, y en hechos como éste se puede afirmar que comienza de verdad lo que los matemáticos llaman Geometría. Apoyándote en los hechos anteriores, trata tú mismo de rellenar los porqués de la siguiente cadena de razonamientos:



"¿Qué elementos geométricos distintos saltan a nuestros ojos en nuestro mundo civilizado?

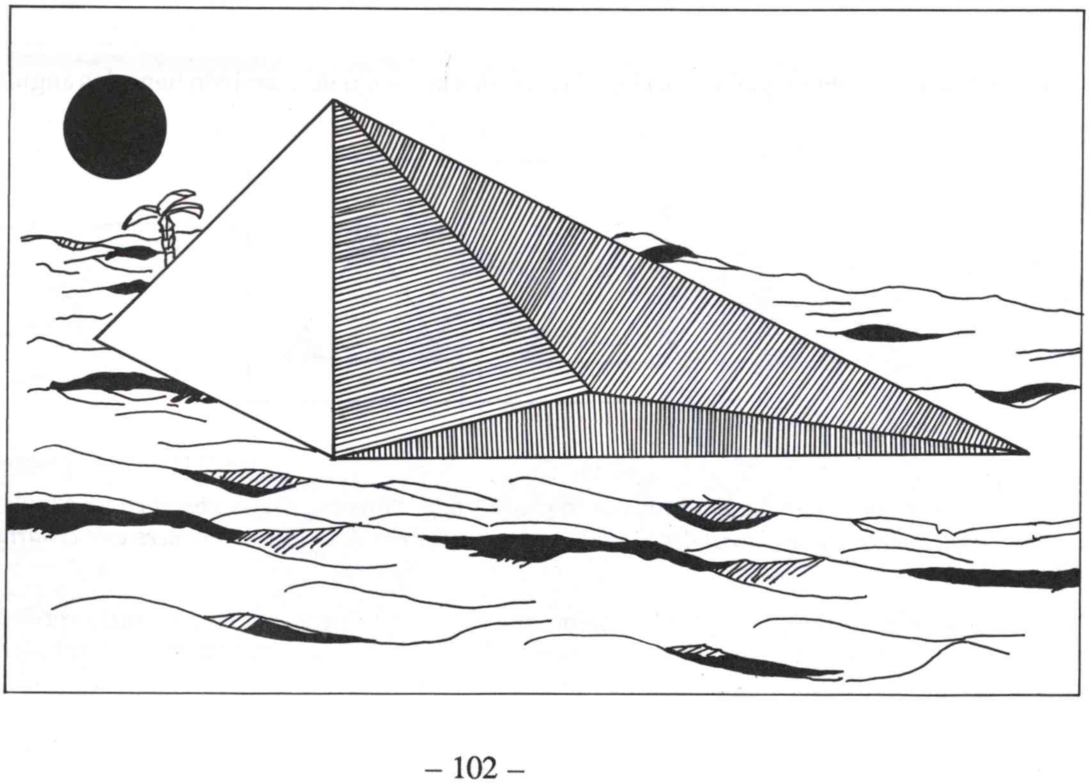
1. Los ángulos señalados con son iguales (¿por qué?)
2. Los ángulos señalados con son iguales (¿por qué?)
3. También BDC = NBM (¿por qué?), y así BA es paralela a DC (¿por qué?)
4. También DAC = PCQ, y así DA es paralela a BC.

Por tanto, ya sabemos que ABCD es paralelogramo.

5. También BAD = MBC (¿por qué?)
6. Por tanto, CBA = CBM es recto (¿por qué?)

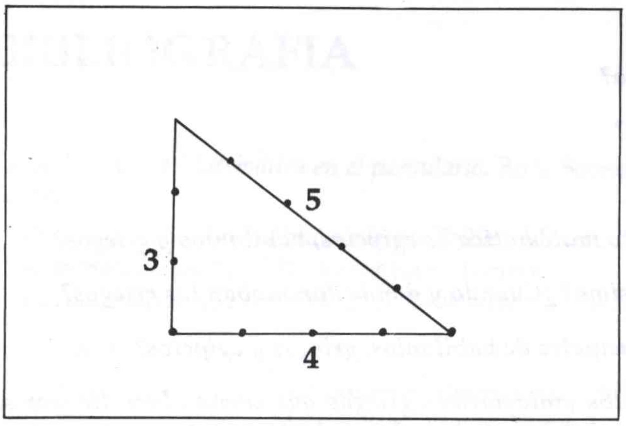
Por tanto, todos los ángulos de ABCD son rectos, y así ABCD es un rectángulo.

Así sabía también Tales (es lo mismo con otras palabras) que *si se une un punto cualquiera de una circunferencia a los extremos de un diámetro se obtiene siempre un ángulo recto.*

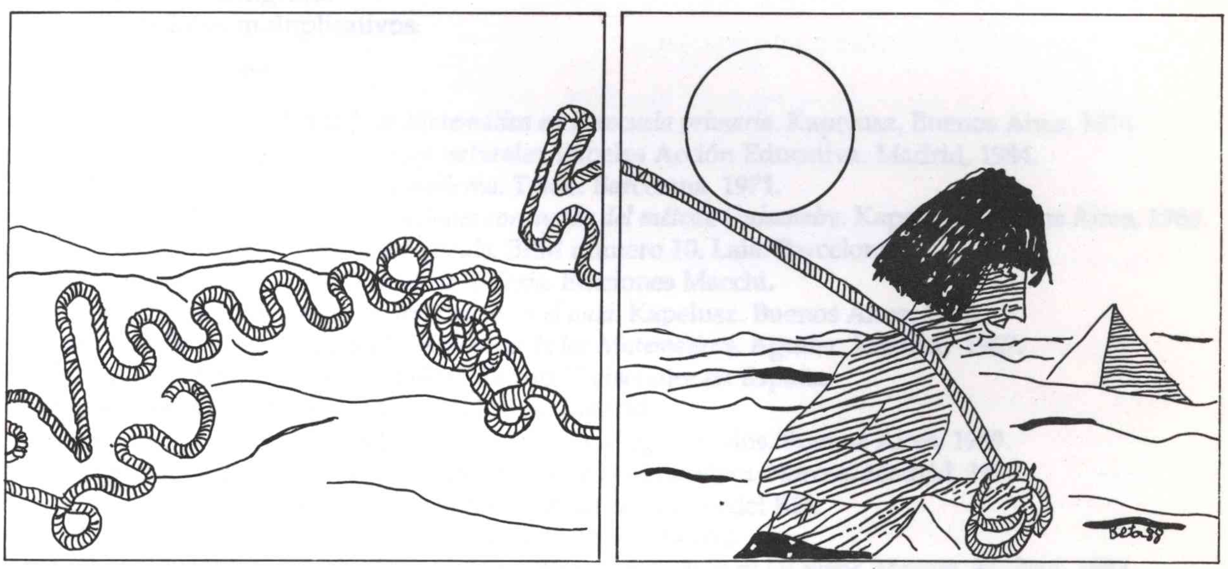


Tales debió de quedar satisfecho de haber sobrepasado en tantísimo a sus maestros egipcios. Estos sabían que para trazar un ángulo recto había que tomar un cordel, señalar tres codos, a continuación cuatro codos y a continuación cinco codos, así

y luego formar un triángulo con vértices los puntos gordos. Así resultaba que el ángulo recto entre los tres codos y los cuatro codos era recto. Probablemente los ángulos rectos de la pirámide de Keops están construidos así.



"La imposición de la forma geométrica representa una forma del ejercicio del dominio del hombre sobre la Naturaleza. Cuando el hombre quiso señalar su poder sobre las aguas construyó un zigurat, una torre, su seguro contra los diluvios, con una geometría perfecta."



Reflexiones finales

Creo que alrededor de este ensayo se pueden establecer muchas actividades interesantes y se puede complementar con muchos elementos que conducirían a una enseñanza integrada (Geometría, Historia, Pensamiento, Geografía, Arte...). He aquí algunas preguntas y temas para desarrollar:

- *¿Qué elementos geométricos podrían saltar a los ojos de un hombre primitivo en la Naturaleza?*
- *¿Qué elementos geométricos distintos saltan a nuestros ojos en nuestro mundo civilizado? ¿Dónde ves círculos, rectas, planos, rectángulos, paralelos, pirámides, elipses, parábolas...?*
- *¿Quiénes eran los babilonios y cuál fue su papel en el desarrollo del pensamiento matemático? ¿Dónde vivían? ¿Cuándo fueron más poderosos?*
- *¿Y los egipcios? ¿Por qué las pirámides?*
- *¿Cómo es eso de las inundaciones del Nilo?*
- *¿Cómo incidieron en nuestra civilización?*
- *¿Qué tuvieron que ver con los hebreos?*
- *¿Cuál es la diferencia entre el pensamiento matemático de egipcios, babilonios y griegos?*
- *¿Cómo fue que los griegos supieron tantísimo? ¿Cuándo y dónde dominaban los griegos?*
- *¿Cómo y cuáles son las obras de arte principales de babilonios, griegos y egipcios?*
- *¿Cuáles son los principales nombres de los matemáticos griegos que suenan hoy día por sus teoremas? Tales, Pitágoras, Euclides, Arquímedes. ¿Sabes alguna historia interesante y alguna idea importante de cada uno de ellos?*
- *¿Te parece un avance interesante poder medir la altura de un árbol sin tener que subirse a él?*
- *¿Se te ocurre algo parecido para medir la altura de la bombilla de tu cuarto sobre el suelo?*
- *¿Por qué no medim la altura de algún árbol de nuestro patio?*
- *¿Se te ocurre cómo les pudo pasar por la cabeza a los egipcios que el triángulo de lados 3, 4, 5 codos es rectángulo?*

BIBLIOGRAFIA

CANA, M. A.: *La Matemática en el parvulario.* Rosa Sonsat. Barcelona.

CASTELNUOVO, E.:

Didáctica de la Matemática moderna. Trillas. México.
Matemáticas nella realitá. Boringhieri. Torino.
La Matemática: 1) I Numeri. 2) La Geometría. La Nuova Italia, 1981.

DIENES. A. P.:

Cómo seis etapas de aprendizaje en la Matemática. Teide.
La construcción de las Matemáticas. Vicens-Vives.

Los primeros pasos en Matemáticas:

1. Lógica y juegos lógicos.
2. Conjuntos, números y potencias.
3. EXPLORACION del espacio y práctica de la media.

Ed. Teide, Barcelona, 1973.

Estados y operadores:

1. Operadores aditivos.
2. Iniciación al álgebra.
3. Operadores multiplicativos.

Ed. Teide, Barcelona.

ESCOLONA y NORIEGA: *Didáctica de la Matemática en la escuela primaria.* Kapelusz, Buenos Aires, 1974.
FERRERO, Luis: *Operaciones con números naturales.* Papeles Acción Educativa. Madrid, 1984.
FLETCHER: *Didáctica de la Matemática moderna.* Teide. Barcelona, 1971.
FRICK y DESUDEN: *El cálculo y las operaciones con ayuda del método Guisenaire.* Kapelusz. Buenos Aires, 1968.
FREINET y BEAGRAND: *La enseñanza del cálculo.* BEM número 10, Laia. Barcelona.
FURMAN, CABAL y MATZKIN: *Reeducando la dislexia.* Ediciones Macchi.
FURTH, H. G.: *Las ideas de Piaget, su aplicación en el aula.* Kapelusz. Buenos Aires. 1978.
CATTEGNO y OTROS: *El material para la enseñanza de las Matemáticas.* Aguilar. Madrid, 1967.
GOUTARD, M.: *Las Matemáticas y los niños.* Madrid, Cuisenaire en España.
GUZMÁN, Miguel: *Cuentas con cuentos.* Ed. Lagos. Madrid.
HOLLEWAY: *Concepción de la Geometría en el niño según Piaget.* Paidos. Buenos Aires, 1969.
IEPS: *El juego y el material didáctico en el aprendizaje de la Matemática.* Narcea. Madrid, 1979.
JAVLIN, F.: *Las cuatro operaciones básicas de las Matemáticas.* Pablo del Río.
KLINE, M.: *El fracaso de la Matemática moderna.* Siglo XXI. Madrid.
LOVELL: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* Morata. Madrid, 1977.
MARASTONI: *Hagamos la Geometría.* Fontanella. Barcelona, 1980.

MIALARET, G.:

Las Matemáticas. Cómo se aprenden, como se enseñan. Pablo del Río.
Los comienzos del cálculo. Kapelusz. Buenos Aires, 1967.
Pedagogía de la iniciación en el cálculo. Kapelusz. Buenos Aires, 1967

MONTESSORI:

Psico-aritmética. Areluce. Barcelona, 1934.
Psico-geometría. Arañive. Barcelona, 1934.

MORENO, M., y SASTRE, G.: *Aprendizaje y desarrollo intelectual.* GEDISA. Barcelona.
NORTES CHECA: *Psicopedagogía de las Matemáticas.* Santiago Rodríguez. Burgos, 1978.
PAROT: *Actualización matemática.* Teide. Barcelona, 1974.
PIAGET:

La enseñanza de las Matemáticas. Aguilar. Madrid, 1971.
La enseñanza de las Matemáticas modernas. Alianza, 1978.
Epistemología matemática y Psicología. Grijalbo, 1980.
La génesis del número en el niño. Guadalupe. Buenos Aires, 1974.
El nacimiento de la inteligencia en el niño. Aguilar. Madrid, 1969.
Seis estudios de Psicología. Seix Barral. Barcelona.

PIMOL, M.: *La construcción del espacio en el niño.* Pablo del Río.
RICHMOND, P. G.: *Introducción a Piaget.* Fundamentos. Madrid.
SASTRE, G., y MORENO, M.: *Descubrimiento y construcción de conocimientos.* Gedisa, Barcelona, 1980.
SANOY, J. S.: *El niño ante el espacio.* Pablo del Río.
SÁNCHEZ-CUESTA: *Educación General Básica y nueva Matemática.* Marsiega.
SANTALO, L.: *La Educación Matemática.* Teide, 1975.
SKEMP, R.: *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Morata. Madrid.
SAUVU, Jean et SIMONNE: *El niño ante el espacio. Iniciación a la tipología intuitiva.* Pablo del Río. Madrid, 1980.
ZUBIETA, Russi: *La moderna enseñanza dinámica de las Matemáticas.* Ed. Trillas. México, 1972.
Diccionario Monográfico de Matemáticas. Vox. Bibliograf.
Nuevas tendencias actuales de la enseñanza de las Matemáticas. Volúmenes III y IV.
Potencias de diez. Elarnes. Morrison.
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS: *Matemática moderna para profesores de Enseñanza Elemental.* Santillana. Aula XXI.

CONSULTA DE INFORMACION GENERAL

WARUSFEL, A.: *Los números y sus misterios.* Martínez y Roca. Barcelona, 1968.
ASIMOV, I.: *Los números y su historia.* El Ateneo.
COLERUS ELMONT: *Breve historia de las Matemáticas* (dos tomos). Doncel - Libro Joven de Bolsillo. Madrid, 1972.
ARNAL, J., y CELMA, F.: *Conceptos básicos de Matemáticas.* Fontalba. Barcelona, 1984.
MORRISON, P.: *Potencias de diez.* Labor, Barcelona, 1984.

JUEGOS, CURIOSIDADES Y ENTRETENIMIENTOS MATEMATICOS

ROIG, Père: *Matemáticas y noticias.* Avance. Barcelona, 1976.
PERELMAN, Y.: *Matemáticas recreativas.* Martínez y Roca.
ALEM, J. P.: Juegos de ingenio y entretenimiento matemático. GEDISA. Barcelona, 1984.
GARDENER, M.:

Aja. Edit. Labor. Barcelona, 1981.
Paradojas. Barcelona, 1983.

MATAIX, M.: *Cajón de sastre matemático.* Marcombo, Barcelona, 1978.

DOCUMENTACION

1. "Resolución de situaciones problemáticas". L. Ferrero
   Boletín Informativo de Acción Educativa, núm. 22

2. "Estadística en los Ciclos Inicial y Medio". L. Ferrero
   Boletín Informativo de Acción Educativa, núm. 19

3. "El cálculo puede ser divertido". L. Ferrero
   Nuestra Escuela, núm. 66

4. "Actividades de Cálculo Mental". L. Ferrero
   Nuestra Escuela, febrero 85

5. "Las Matemáticas y el deporte". M. Aguilera
   Nuestra Escuela, núm. 61

6. "Las Matemáticas y las noticias". M. Aguilera
   Nuestra Escuela, núm. 57

7. "Matemáticas y la cesta de la compra". M. Aguilera
   Nuestra Escuela, núm. 56

8. "Medida de superficies". L. Ferrero
   Nuestra Escuela, núm. 68

9. "Contar". M. de Guzmán
   Nuestra Escuela, núm. 63

10. "Las fracciones se pueden tocar". G. San Román
    Boletín Informativo de Acción Educativa, núms. 28 y 29

11. "Siete estrategias para plantear problemas en Geometría". D. Fielker
    "Enseñanza de las Matemáticas a debate".

12. "Matematizar los números enteros". L. Martínez
Nuestra Escuela, núm. 59

13. "Forma y figura". M. de Guzmán.
Nuestra Escuela, núm. 62