SECUNDARIA OBLIGATORIA

GUÍA DE USO DE LOS MATERIALES

MATEMÁTICAS

Segundo ciclo

Profesorado

Ministerio de Educación y Ciencia

MATEMÁTICAS

GUÍA DE USO DE LOS MATERIALES DEL 2° CICLO DE LA E.S.O.

— Profesorado—

Salvador Caballero Rubio
Francisco Jesús García García

(Proyecto Mosaico)

Coordinación de la edición:

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR

DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Dirección General de Renovación Pedagógica
Centro de Desarrollo Curricular
Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N.I.P.O.: 176-95-340-2
I.S.B.N.: 84-369-2776-1
Depósito legal: M-43343-1995
Realiza: MARIN ALVAREZ HNOS.

NOTAS PRELIMINARES

Esta Guía de uso de los materiales de Matemáticas del segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria completa los materiales, elaborados por la Conselleria d'Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana y coeditados conjuntamente con el Ministerio de Educación y Ciencia, que han sido enviados a los Institutos de Educación Secundaria.

Dichos materiales constituyen una propuesta, que entendemos de gran utilidad, para organizar y distribuir los contenidos del área de Matemáticas a lo largo de toda la etapa, aunque carecían de una guía de uso para el segundo ciclo.

Para paliar esta carencia, el Centro de Desarrollo Curricular encargó a los autores de dicho trabajo la elaboración de este documento con la finalidad de dar una coherencia a las actividades preparadas para el segundo ciclo, con ejemplos de varias Programaciones que establecen una selección y organización de las mismas, además de incluir aclaraciones concretas acerca de:

- Orientaciones didácticas para todas y cada una de las actividades, explicando brevemente de qué trata cada actividad, qué se pretende con ella, qué dificultades pueden encontrar los alumnos y alumnas, posibilidades de ampliación, etc.
- Propuestas de organización de los materiales y orientaciones para la evaluación.
- Modelos de programaciones comentadas, para tercer y cuarto curso, elaborados en algunos centros escolares a partir de los materiales para el segundo ciclo.

De todas formas, hay que tener en cuenta que esta guía se ha elaborado para la utilización de los materiales del segundo ciclo realizados a partir de los criterios definidos en el currículo de la Comunidad Valenciana. Si bien éstos son compatibles, en gran medida, con los establecidos para los centros incluidos en el territorio de gestión del M.E.C. y es fácil su adaptación.

El principal objetivo de esta guía es el de facilitar el uso de los materiales de 3.er y 4.º curso de la E.S.O. para la planificación de las Programaciones de dichos cursos por parte de los Departamentos.

Servicio de Secundaria del
Centro de Desarrollo Curricular

ÍNDICE

VI. Temas transversales

VII. Metodología

Tercera parte. Comentarios a las carpetas de 3º

VIII. Números

IX. Geometría

X. Probabilidad - Estadística - Recuentos Sistemáticos

INTRODUCCIÓN

El presente libro cierra un proyecto de elaboración de materiales de Matemáticas para toda la Educación Secundaria Obligatoria. En él se comentan con detalle los *materiales para los alumnos*, publicados aparte a razón de cuatro carpetas por cada uno de los dos cursos del segundo ciclo de la etapa. Consecuentemente, en muchos de sus apartados, las páginas que siguen no son autosuficientes y para su lectura resulta conveniente, cuando no imprescindible, tener a mano dichos materiales.

Con la pretensión de que los comentarios didácticos a las actividades propuestas en las mencionadas carpetas no queden reducidos a un mero solucionario de problemas, se ha dedicado parte del libro a exponer las ideas que sustentan la *filosofía* del proyecto y a detallar las decisiones que han debido tomarse hasta llegar al resultado final que muestran los *materiales para los alumnos*.

Concretamente, se aportarán argumentos para justificar la adopción de un modelo de aprendizaje de las matemáticas *en espiral* en el que desde perspectivas distintas, cada concepto, destreza o estrategia, es retomado constantemente con profundidad y complejidad crecientes. Como consecuencia del modelo se deriva la apuesta por un tratamiento metodológico de la materia que permita el trabajo individual, el trabajo y debate en grupo, la comunicación entre estudiantes y profesor, la ejecución de proyectos, el desarrollo de investigaciones, la resolución de problemas y la realización de ejercicios; tratamiento alejado intencionadamente de las metodologías conductistas que reducen la actividad matemática a oír explicaciones, tomar notas al dictado y reiterar cálculos. Asimismo, se expondrán los criterios tomados en consideración para construir la secuencia de contenidos, que incluye no solo *hechos* y *conceptos* sino también *procedimientos*, *actitudes* y *estrategias generales*.

Gran parte del presente libro es fruto de un dilatado proceso de prueba y contrastación en distintos centros educativos de la Comunidad Valenciana que ha generado un volumen ingente de experiencias, parte de las cuales se ha recogido en un anexo que contiene una muestra variada de programaciones diseñadas y desarrolladas en vivo en las aulas a partir de los mismos *materiales para los alumnos*.

Es para nosotros motivo de gran satisfacción dejar constancia de las continuas y valiosas aportaciones al desarrollo del proyecto de los profesores de los centros experimentales y de implantación anticipada de la Educación Secundaria Obligatoria, que han sabido arrancar frutos didácticos jugosísimos en un ambiente a menudo hostil. No menos valioso ha sido el esfuerzo de la amplísima nómina de autores de los *materiales para los alumnos*, que en condiciones de trabajo difíciles han sido capaces de compaginar su autonomía creativa con las expresas exigencias de un guión del que somos responsables en exclusiva los firmantes de este libro.

Finalmente queremos agradecer a D. Miguel Soler, director del Centro de Desarrollo Curricular, y a D. Javier Brihuega, asesor del mismo, la oportunidad que nos ha brindado de publicar este trabajo y la atención y facilidades que nos han dispensado.

Primera parte

EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Las cuestiones educativas
rara vez son tajantes
Orton (1990)

1. PRESENTACIÓN

El conjunto de *materiales para la Educación Secundaria Obligatoria* desarrolla la definición general que para el área de Matemáticas establece el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas 1007/1991, constituyendo un paso intermedio entre éste y la programación de aula. Tal Decreto implica cambios importantes que afectan no sólo a los contenidos, sino también y sobre todo, a la propia concepción de la educación, la configuración de las etapas educativas, los objetivos del área de Matemáticas, los criterios de evaluación y, finalmente aunque no de modo prescriptivo, a su metodología. Pero sobre todo, otorga a los centros educativos la posibilidad de diseñar un proyecto curricular del área de Matemáticas que tome decisiones sobre

- los contenidos matemáticos concretos
- la secuencia con que se presentan
- la metodología apropiada para cada tipo de contenido
- los objetivos que se persiguen
- los procedimientos de evaluación de
    . los materiales que se utilizan
    . los alumnos
    . los profesores
    . el propio proyecto adoptado

En el caso de los materiales de matemáticas que nos ocupa, el proyecto curricular de área que los sustenta ha tenido una génesis dinámica y no lineal, en la que han interactuado consideraciones relativas al *qué* enseñar con la toma en cuenta de *quién* aprende y la reflexión sobre *cómo* y *cuándo* hay que hacerlo para mejorar la eficacia del proceso de aprendizaje, amén de otras consideraciones derivadas de las anteriores y del escenario educativo en el que actúan. Así, cabe citar que el proyecto curricular del área aspira atender, de modo abierto y flexible, entre otros, a los siguientes aspectos:

1) El conjunto de *toda* la Educación Secundaria Obligatoria, de modo que los dos ciclos que la componen no pueden ser entendidos aisladamente. En la práctica esto quiere decir que en

aquellos casos transitorios en los que los alumnos de 3º de Secundaria no hayan cursado previamente los dos primeros cursos de la ESO, cualquier programación basada en estos materiales debe tener en cuenta también las actividades que se proponen para el primer y segundo curso.

2) Las características generales de la etapa, los objetivos, la estructura, las orientaciones metodológicas y los criterios de evaluación generales que van más allá de las propias Matemáticas.

3) Los contenidos de Matemáticas prescritos para la etapa en sus dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal.

4) Criterios de secuenciación tales como

- el carácter prioritario de aquellos contenidos básicos para la formación matemática, posiblemente terminal, del escolar y de aquellos otros fundamentalmente instrumentales para las restantes áreas de conocimiento y para las propias Matemáticas.

- los resultados de ciertas investigaciones didácticas, aquí aceptadas y hasta cierto punto contrastadas, que recomiendan la presentación escolar de determinados contenidos, que sugieren el momento adecuado para hacerlo y que orientan sobre la forma más eficaz de introducirlos y hasta las pautas para su valoración y evaluación.

- la dificultad de asimilación, generalmente reconocida, de los conceptos matemáticos, que aconseja sean retomados cada cierto tiempo.

5) La diversidad en el aula; la existencia de alumnos con distintas capacidades, variadas motivaciones e intereses no necesariamente coincidentes; la existencia de dos opciones distintas en el cuarto curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria. De este modo, los materiales contienen actividades con distintos grados de dificultad que pueden cubrir un amplio espectro de diferenciación en el tratamiento didáctico.

6) Las aportaciones resultantes de la experimentación de los materiales en un gran número de Centros, implicando a un número de alumnos y de profesores considerable.

Como ya se dijo, este proyecto representa un paso intermedio entre el Decreto de Enseñanza y la programación de aula. Las grandes opciones que aquí se toman, como por ejemplo la secuenciación por ciclos que se presentará en el próximo apartado, forman parte esencial del proyecto curricular del área, pero deben ser adaptadas por el departamento de cada centro según sus características, adecuándolas a cada ciclo, determinando la secuenciación *por curso*, y diseñando cada profesor, en último caso, su propia y definitiva programación de aula.

2. OBJETIVOS

Como consecuencia de todo lo expuesto, los *materiales de matemáticas* se plantean explícitamente los siguientes objetivos:

1. Atender a los objetivos de la etapa y del área para contribuir a su consecución.

2. Presentar las Matemáticas de forma que se pueda captar su *unidad* entre la diversidad de contenidos y la *diversidad* de aplicaciones de cada concepto o método particular, de forma que al final el estudiante logre actuar *usando* matemáticas.

3. Mostrar la utilidad de las Matemáticas para resolver problemas y analizar situaciones que se generan cotidianamente.

4. Poner de relevancia la conexión de las Matemáticas con las otras áreas de la Enseñanza Secundaria, tomando conciencia de que todas en conjunto contribuyen a profundizar en el conocimiento de la realidad.

5. Contemplar las Matemáticas desde un punto de vista amplio, que incluya los hechos básicos, los procedimientos y las actitudes como elementos complementarios para reflexionar tanto desde las Matemáticas como sobre las Matemáticas.

6. Establecer un marco de trabajo claro y preciso en los ámbitos previos a la programación de aula, que permita a cada profesor asumir la responsabilidad de tomar las decisiones necesarias para concretar su plan de actuación en el aula.

7. Formular una propuesta de trabajo que permita al estudiante asumir el papel protagonista, adquiriendo modos de hacer propios de la actividad matemática y valorando e integrando los recursos disponibles para el trabajo matemático en su actuación diaria, y forjar con todo ello una actitud positiva hacia el trabajo matemátcio y hacia las Matemáticas.

8. Facilitar la evaluación de forma que los departamentos puedan someter las programaciones diseñadas a partir de los *materiales de matemáticas* a una valoración general y dispongan de un banco de actividades para eventuales modificaciones.

9. Ayudar a que el profesorado de Matemáticas adquiera y consolide una actitud activa e investigadora que le permita analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje y actuar autónomamente.

10. Establecer un marco de actividades de referencia que permita a los profesores contrastar sus experiencias y analizar colectivamente los problemas particulares que se plantean en sus actuaciones didácticas.

CAPÍTULO II

LAS MATEMÁTICAS EN LA E.S.O.

Los entes matemáticos sólo existen en
el pensamiento del matemático
y no en un mundo platónico
independiente de la mente
[...] los entes matemáticos son entes
de razón: aparecen en el momento
en que el matemático los define y no
con anterioridad a todo matemático.
Apèry (1988)

3. NUESTRA CONCEPCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Las Matemáticas constituyen una rama del saber caracterizada por el estudio de las propiedades de determinados entes abstractos (números, formas, simetría, relaciones,...), y, al mismo tiempo, un poderoso método para comprender conceptual y prácticamente las pautas manifestadas por una creciente lista de fenómenos naturales, técnicos y sociales. Están actualmente tan profusamente diversificadas, han extendido tanto su campo de aplicabilidad y han acumulado tantos conocimientos y técnicas, que resulta ingenuo pretender ni siquiera una descripción sucinta de sus apartados ni de sus previsibles tendencias.

Esta realidad obliga a definir qué colección, forzosamente reducida, de resultados, métodos y actitud matemáticas deben caracterizar a la disciplina en cada etapa de la enseñanza, y en particular en la Secundaria Obligatoria sobre la que versa este proyecto curricular de área.

Las ideas matemáticas se generan para resolver problemas previamente aceptados como tales o para sistematizar soluciones ya obtenidas con anterioridad. Este proceso de génesis incluye descubrimientos de conexiones y relaciones entre las ideas matemáticas, refinamientos y simplificaciones de los resultados conocidos, planteamientos de nuevos problemas, observación de propiedades, detección de regularidades e intención explícita de demostrar, generalizar, formalizar y sistematizar.

La resolución de problemas es, pues, la esencia y la razón de ser de las Matemáticas. No puede hablarse estrictamente de *actividad matemática* si ésta no comporta la aceptación y la búsqueda de soluciones de problemas calificables de matemáticos.

La característica esencial del trabajo matemático es la resolución de problemas matemáticos y, como efecto, la toma de conciencia de que se pueden abstraer propiedades muy generales que aparecen en una multitud de situaciones concretas, y de que las abstracciones formuladas en axiomas o postulados son susceptibles de ser utilizadas a su vez para comprender con mayor profundidad, no sólo las mismas situaciones concretas, sino también otras que aparentemente no tenían relación con ellas.

Sin embargo, el estado final de las Matemáticas como producto elaborado puede no reflejar en absoluto el proceso de génesis. Tal y como dice Apèry (1988. p. 225), la actividad matemática comporta dos fases, no necesariamente separadas de modo estricto en el tiempo. En la primera fase, la actividad es mental, subjetiva, independiente del lenguaje, ligada estrechamente a la intuición. En la segunda fase, el matemático introduce notaciones, formaliza, traduce parcialmente sus intuiciones en términos comunicables y, eventualmente, comprensibles.

El postulado básico que subyace en este proyecto curricular es que la actividad matemática entendida en los términos antes expuestos se puede desarrollar en la enseñanza secundaria, resolviendo problemas, analizando juegos, consolidando destrezas, con la convicción de que tal actividad despliega cualidades y propicia actitudes intrínsecamente interesantes y permite crear conocimientos y ampliar destrezas útiles para el individuo y para la sociedad. En otros términos, *para aprender matemáticas es necesario hacer matemáticas*. Es más, al prestar atención a la *actividad* matemática, se amplia el centro de gravedad de la enseñanza, incluyendo a los contenidos *per se* y a los procesos que permiten el aprendizaje, otorgando protagonismo diferenciado al profesor y al estudiante y considerando la transmisión de conocimientos como capacitación para construirlos y articularlos.

Por otra parte, la enorme cantidad de información acumulada y la rapidez de acceso a la misma que posibilitan los medios técnicos actuales, hace que no valga la pena memorizar gran cantidad de datos, sino más bien saber de su existencia, conocer su esencia y, eventualmente, poder usarlos e integrarlos para satisfacer necesidades personales o profesionales.

Las Matemáticas proporcionan el lenguaje preciso y conciso que necesitan las ciencias para la formulación, interpretación y comunicación de las observaciones que realizan. La aplicación de los métodos matemáticos a otros ámbitos de las ciencias y las tecnologías, produce importantes resultados prácticos, tanto en la elaboración de modelos explicativos de los fenómenos que estudian, como en la recogida y análisis de los datos necesarios para la validación de los modelos.

El lenguaje matemático, además, extiende su dominio de aplicación más allá de las fronteras de la especialización científica. El desarrollo tecnológico y la creciente importancia social de los medios de comunicación, crean en la población la necesidad de conseguir la preparación suficiente para recibir grandes cantidades de información -codificada frecuentemente con símbolos, gráficos, tablas, fórmulas, diagramas,...-, comprender y expresar descripciones de carácter cuantitativo y geométrico, y analizar críticamente los mensajes emitidos en lenguaje matemático. Contempladas también desde esta perspectiva, las Matemáticas tienen que contribuir a ampliar las potencialidades expresivas de los estudiantes, incrementando su vocabulario y desarrollando la capacidad de discursar lógicamente, argumentar y convencer.

En este proyecto se entiende que la Enseñanza Obligatoria debe asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de capacitarse para cubrir las necesidades matemáticas -contar, clasificar, razonar lógicamente, medir, interpretar datos y gráficos, calcular,...- que genera, más que nunca, una sociedad altamente tecnificada como la actual. Al mismo tiempo, es preciso tener en cuenta que las capacidades cognoscitivas del escolar, las características de los procesos de aprendizaje y la propia naturaleza de la disciplina, aconsejan concebir el área de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria como una *acción de creación* de conceptos y *de práctica* de destrezas que continuamente se retoman y consolidan, más que como el estudio de un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado, que no parece conveniente presentar siempre en una fase terminal de elaboración, obviando los caminos que es necesario recorrer para la creación efectiva de conceptos.

El nivel de abstracción que conlleva el uso de muchos símbolos en contextos muy variados; la complejidad intrínseca de las reglas, los procedimientos y métodos, no carentes muchas veces de arbitrariedad aparente; la dificultad de comprensión e interpretación de los resultados, constituyen obstáculos que se agudizan especialmente en Matemáticas y que, caso de no ser tomados en consideración permanentemente, pueden conducir a indeseables situaciones de bloqueo del aprendizaje.

La actividad matemática, entendida como se ha descrito anteriormente, desencadena procesos que permiten desarrollar capacidades de carácter muy general (explorar, clasificar, analizar, generalizar, estimar, inferir, abstraer, argumentar,...); desarrolla el pensamiento lógico y la capacidad de razonamiento (deductivo, inductivo, analógico), educa la percepción y visualización espacial, estimula la actitud crítica, agudiza la intuición, fomenta la creatividad, la perseverancia en el trabajo y la confianza en las propias posibilidades. Unas matemáticas basadas en ese tipo de actividad matemática, que incluye la resolución de problemas, además, contribuyen en gran medida a la preparación para la toma de decisiones individuales y colectivas y el enfrentamiento con situaciones nuevas, habilidades que cada día son más necesarias para desenvolverse en la sociedad.

Las matemáticas son una herramienta útil para las diferentes áreas presentes en el currículo. Continuamente se extiende su uso en los estudios sobre el medio físico, económico, social y tecnológico. Los estudiantes deben conocer e intentar dominar toda una serie de conceptos y técnicas que les sirvan para comprender la realidad en que están inmersos y que les doten de la formación suficiente para hacer frente a las necesidades que se les planteen. Esta realidad determina una relación simbiótica de las Matemáticas con los demás campos del conocimiento, que se traduce en el recurso continuo a ejemplificaciones y contextos que provienen de más allá de las Matemáticas, pero sin que este proyecto contemple como objetivo satisfacer todas las demandas que, eventualmente, pueden realizarse desde otras áreas, ni asume la responsabilidad de todos y cada uno de los métodos y técnicas requeridos por ellas. Las destrezas matemáticas, al igual que por ejemplo las potencialidades expresivas, se deben consolidar en cualquier materia que las utilice y, por la generalidad de su carácter, no pueden ni deben ser circunscritas en el espacio o el tiempo. Del mismo modo, este proyecto recoge de las otras áreas y de la vida cotidiana todo aquello que le ha parecido de interés y amplía de esta manera la consideración que del tema se pudiera tener sin la intervención de las matemáticas.

Puesto que las Matemáticas proporcionan contextos idóneos para alcanzar mayores niveles de abstracción y formalización, los materiales para el alumno y el profesor que forman parte de este proyecto proponen una graduación tanto de los temas de trabajo como del nivel de complejidad, teniendo en las capacidades cognoscitivas y las competencias lógicas de cada edad, la diversidad existente entre unos estudiantes y otros y la experiencia docente de los profesores.

Uno de los objetivos de este proyecto es posibilitar la forja de una actitud positiva de los estudiantes, y en consecuencia de los adultos del futuro, hacia las Matemáticas, planteando un trabajo de interés, que produzca motivación y placer ante las actividades matemáticas, deje traslucir el propósito, el poder y la relevancia de las Matemáticas, genere satisfacción derivada de la sensación de progreso,... con el convencimiento de que las actitudes positivas ayudan al aprendizaje. Si bien en la adquisición, desarrollo y mantenimiento de las actitudes positivas hacia las Matemáticas influyen también las concepciones respecto a éstas de la sociedad en general; es en el entorno escolar, y a través del profesorado en particular, donde se puede consolidar decisivamente esa actitud positiva.

En tanto que las Matemáticas contribuyen a la formación integral de los alumnos y de las alumnas en colaboración con el resto de áreas del currículo, se ha prestado también atención a aquellos aspectos que, por su actuación directa sobre capacidades cognoscitivas generales y de pensamiento lógico en particular, trascienden a objetivos específicos de la disciplina. (responsabilidad coeducativa, medioambiental, valores sociales,...).

4. APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Sería deseable disponer de una teoría que detallase y explicase los procesos mediante los que se produce el aprendizaje de las Matemáticas. Lamentablemente, en la actualidad sólo existen aproximaciones muy parciales que bosquejan de modo incompleto tales procesos. Como dice Orton (1990, pág. 20),

> *[...] ignoramos lo que los chicos pueden aprender, sólo sabemos lo que parecen haber aprendido.*

Por el contrario, sí se pueden encontrar propuestas abstractas acerca del aprendizaje en general que arrojan algo de luz sobre qué cabe esperar cuando el individuo se enfrenta con situaciones nuevas y de las que parece razonable suponer que contienen al aprendizaje de las Matemáticas como caso particular:

> *Que los humanos aprenden es autoevidente. También es obvio que los humanos construyen nuevos conocimientos, ya que el almacén de los conocimientos en cualquier cultura aumenta con el tiempo. Lo que no es evidente son los procesos mediante los cuales los humanos construyen nuevos conocimientos [...]. Crear nuevos conocimientos es, por parte del creador, una forma de aprendizaje significativo. Ello supone a veces el reconocimiento de nuevas regularidades en hechos u objetos, la invención de nuevos conceptos o la extensión de los viejos, el reconocimiento de nuevas relaciones (proposiciones) entre conceptos y, en los saltos más creativos, la reestructuración*

> *importante de estructuras conceptuales para ver nuevas relaciones de orden superior.* (Novack, (1988)).

Siendo conscientes de que, como dicen Coll y Solé (1989),

> *Todas las propuestas curriculares sin excepción, en la medida en que trasmiten proyectos educativos, participan de una determinada manera de entender el aprendizaje y, en consecuencia, de una forma concreta de concebir la enseñanza.*

no cabe disimular que el presente proyecto se alinea con las concepciones constructivistas del aprendizaje, postulando que los conceptos y las ideas significativas, tal y como las concibe Ausubel (1963, 1968), son construidas por el estudiante; se encuentra, además, en sintonía con la denominada *enseñanza por diagnóstico*, concepto ampliamente desarrollado por Bell (1984) y otros, que trata de basar la actividad docente en la detección de las concepciones erróneas para actuar en consecuencia; y cree en la eficacia del conflicto cognoscitivo, como técnica para sacar a la luz las ideas matemáticas de modo que puedan ser sometidas a discusión y propicien la adquisición y articulación de nuevos conocimientos.

En consonancia con esas concepciones, aquí se ha entendido que un primer contacto con los conceptos no es suficiente para asimilar y dotar de significado a los mismos ni para integrarlos eficazmente en la estructura conceptual del estudiante.

Este principio queda en la práctica reflejado en una retoma continua de los temas tratados o, como dice Bruner (1972), por un *tratamiento en espiral* de los contenidos, que se traduce en sofisticación creciente en cada vuelta de tuerca y en presentación de enfoques diferentes del mismo concepto, con objeto de enriquecer y diversificar las imágenes mentales que lo sustentan. En no pocos casos, este proceso incluye fases manipulativas, en las que el concepto es visualizado, bien por medio de objetos físicos, bien a través de representaciones matemáticas específicas.

Por ejemplo, la construcción o el desarrollo plano de poliedros regulares facilita la creación de conceptos abstractos de la geometría del espacio que, abordados de otro modo, podrían devenir en carentes de significado por la ausencia de referentes, amén de que el contacto físico con los cuerpos espaciales tiene su importancia intrínseca. Del mismo modo, la búsqueda de ejemplos o contraejemplos de parejas de números naturales que cumplan o dejen de cumplir determinada propiedad, como la de ser números amigos (la suma de los divisores propios de cada uno iguala al otro número), ilustra, es decir crea una concepción, acerca de lo que debe entenderse, del significado que hay que atribuir, a las proposiciones matemáticas.

Las matizaciones que se revelan en los conceptos al ser presentados en situaciones que los enfocan de manera distinta, favorece el mantenimiento de cierta tensión entre lo que uno cree conocer y su nueva manifestación, en un proceso que en definitiva conduce a completar, que no a agotar, el conocimiento de esos conceptos. La resolución de problemas es el medio ideal para la creación de conflictos que pongan al resolutor en disposición de ampliar sus conocimientos o de reestructurarlos para hacerlos más accesibles o eficaces.

Algunas de las actividades de los materiales están diseñadas para hacer aflorar los errores, o más precisamente los conocimientos incompletos; para actuar sobre ellos, considerándolos no como negativos, sino como una manifestación normal de la viveza del proceso de aprendizaje. Las equivocaciones o concepciones erróneas de los estudiantes no son actuaciones punibles, en tanto que se da por supuesto que nadie quiere equivocarse, sino datos de inestimable valor sobre el estado del aprendizaje. El reconocimiento del papel que juegan los errores debe extenderse además a los propios alumnos, propiciando una actitud de sensibilidad para la localización de las equivocaciones propias y ajenas, que alejen la sensación de ridículo en el aula y que mantengan un ambiente en el que las ideas se expresen libremente, sin temor y con receptividad a las sugerencias y argumentaciones de los demás.

El diagnóstico sobre las concepciones del tema objeto de estudio, y en particular de los errores o incompletitudes que puedan tener los estudiantes, debe orientar a cada profesor en cada clase concreta sobre la manera de particularizar el desarrollo del mismo o de corregir el diseño que haya planificado, adaptándolo a las necesidades detectadas.

Por ejemplo, si bien se encuentran catalogados los errores típicos que suelen producirse en el significado que se atribuye a las letras en la introducción al tratamiento del álgebra (Kücherman (1981)), un diagnóstico previo permite centrar la atención en los aspectos más relevantes de estos para conseguir una elevación del nivel algebraico, aspectos que pueden variar de unos grupos a otros o con el tiempo.

Los conceptos matemáticos no tienen entidad aislada, de modo que el establecimiento de conexiones ricas y ágiles entre ellos es uno de los objetivos de este proyecto. Así, la intención es integrar cada idea nueva en una *red conceptual* que se va haciendo más densa a medida que el bagaje de experiencia matemática crece, permitiendo a su vez la captura de nuevas y más sutiles ideas.

Esta concepción holística de las Matemáticas queda concretada en la definición (véase capítulo VI) de una colección de grandes temas transversales que, sin ser propios de ninguno de los bloques de contenido, lo son a la vez de todos ellos. Con ese listado de grandes temas se tiene la intención de explicitar tales redes conceptuales, recorriendo posibles hilos de su entramado. Al mismo tiempo, esos mismos grandes temas ponen de manifiesto la dificultad de particionar estancamente los contenidos de área de Matemáticas y justifica alguna de las decisiones adoptadas para la presentación, tratamiento y secuenciación de los contenidos. Al fin y al cabo, la demostración creativa del conocimiento humano rara vez ocurre reproduciendo los elementos que lo componen, sino más bien estableciendo conexiones entre los mismos, conexiones que resultan de utilidad para resolver situaciones problemáticas o para profundizar en el mismo conocimiento.

Por otra parte, parece claro que el desarrollo y comunicación de las ideas matemáticas descansa en cada individuo sobre dos columnas que, aunque interactúan mutuamente, son bien distinguibles, a saber,

- la representación espacial, y
- el lenguaje.

Esta distinción viene a coincidir a grandes rasgos con lo que del modo más rudimentario se puede observar en las aulas, de modo que su razonable concordancia con la intuición docente viene a tender un esperable, pero no por ello menos inquietante, puente entre aprendizaje y funcionamiento de la mente. Al fin y al cabo, como dice Orton (1990, pág. 14).

> *El aprendizaje es una actividad mental. Por esa razón tendremos una mayor comprensión de éste si sabemos más sobre el funcionamiento del cerebro como procesador de información. [...] debe ponerse en claro que se podrá entender mucho más respecto del aprendizaje, como un aspecto de la psicología, cuando sepamos más sobre el funcionamiento del cerebro como un aspecto de la fisiología.*

Cuán lejos pueda llevar la exploración de esta relación es algo que se nos escapa, pero no hay ninguna razón para ocultarse que

> *existen cada vez más pruebas de índole fisiológico de que estos dos aspectos del aprendizaje de las Matemáticas pueden hallarse ligados a las actividades de diferente mitades del cerebro. En general, el pensamiento espacial se efectúa en el hemisferio derecho, mientras que las funciones lingüísticas están a cargo del hemisferio izquierdo.* (Dickson, 1991, pág. 16)

Habrá que estar atentos a lo que el futuro próximo tenga que decir sobre esta línea de exploración, no sólo porque pueda generar explicaciones coherentes sobre la enorme diversidad de comportamientos de aprendizaje que se observan a flor de piel tanto en el aula como en cada individuo concreto, sino porque además probablemente vendrán acompañadas de valiosas pistas sobre cómo tratarla didácticamente.
Otro tanto cabe decir acerca del cierto pero todavía impreciso papel de la memoria en el aprendizaje matemático, el alcance del cual plantea un problema que, desde luego, tendrá que ser dilucidado en el terreno científico y no en el de la adscripción de cada docente a una u otra corriente implícita de opinión. Y también resulta prometedor lo que a este respecto puedan revelar los investigadores:

> *Los psicólogos han expresado la opinión de que poseemos tanto memoria a corto como a largo plazo. Más recientemente se ha introducido el concepto de memoria operativa,... Lo que ciertamente deseamos lograr es un almacenamiento a largo plazo junto con una inmediata memorización [...] La retención y la memorización son más fáciles si lo que se ha aprendido es significativo en relación con la estructura de conocimientos ya existente en la mente del que aprende.* (Orton, 1990, pág. 39)

Todas las observaciones anteriores vienen a apuntar en una misma dirección sobre la que ya se había llamado la atención con anterioridad: el aprendizaje de las Matemáticas y las Matemáticas mismas son algo mucho más rico que una mera disciplina lógica, y por lo tanto constituiría un tremendo desacierto enfocar todos los problemas del aprendizaje matemático en exclusiva desde el prisma de la lógica. Por citar un ejemplo, quedaría fuera de ese campo de visión la ya mencionada relación entre aprendizaje y lenguaje, como advierte el también ya citado Orton (1990, pág. 16):

> *Una seria complejidad en el aprendizaje de cualquier materia es la relación con el aprendizaje del lenguaje. [...] hay muchos ejemplos del lenguaje peculiar y de palabras familiares utilizados de modos diferentes o muy específicos en Matemáticas.*

5. APRENDIZAJE Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El conocimiento de la *heurística* de resolución de problemas es básico para actuar en Matemáticas. Enfrentado con un problema, el alumno debe saber cómo tiene que actuar. La resolución de problemas tiene pues una componente metodológica fundamentada en la propia esencia de las Matemáticas. Esta componente necesita ser conocida e interiorizada por los alumnos, formando parte del compromiso que se debe establecer explícitamente entre el profesor y la clase.

Es preciso advertir, no obstante, que resulta muy difícil, por no decir imposible, sincronizar el aprendizaje heurístico de varias personas. Los diferentes ritmos de aprendizaje que se derivan de esta situación exigen una *atención* tendente a la *individualización,* que debe ser compatible con una *actividad matemática* con una fuerte componente *social* que permita el despliegue de aquellas capacidades de comunicación y razonamiento que solo tienen sentido si existe interlocutor que las haga posibles. La planificación de la actividad en el aula ha de atender tanto a los alumnos que tienen facilidad y avanzan rápidamente en los temas como a los que tienen dificultades, de modo que se consiga el desarrollo de las capacidades individuales de todos en función de sus posibilidades. Curiosamente, pero de ninguna manera ilógicamente, la estrategia más efectiva para la consecución de este fin es el trabajo en pequeños grupos con problemas que admitan distintos grados de profundización. Por el contrario, no es eficaz recurrir a la diferenciación que supone proponer ejercicios monótonos y rutinarios a los estudiantes con dificultades, mientras que se plantean problemas sugerentes y motivadores a los aventajados.

En resumen, a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria se considera prioritario un aprendizaje matemático activo, que busque la comprensión antes que la formalización, que se enfrente con los conceptos y procedimientos en contextos variados y próximos al entorno de relaciones y experiencias de los estudiantes. La adecuación entre los problemas que se propongan y el nivel de competencia matemática, aumentará, por otra parte, la confianza de los estudiantes en sus posibilidades y estimulará su interés, condiciones necesarias para vencer las dificultades intrínsecas de los conceptos matemáticos propios de esta etapa.

Segunda parte

SECUENCIA DE CONTENIDOS

CAPÍTULO III

LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

6. TIPOS DE CONTENIDOS

Si se conciben los contenidos como *el eje alrededor del cual se organiza la acción didáctica* (Coll y Solé, (1989)), es necesario tener en cuenta tres tipos diferentes que intervienen en el proceso educativo, fundamentalmente de carácter conceptual, procedimental y actitudinal.

En Matemáticas resulta muchas veces de gran dificultad la distinción entre unos y otros, no sólo porque la mayoría de los conceptos llevan asociada una carga conceptual y procedimental, cuando no también actitudinal, sino además porque las propias Matemáticas constituyen al mismo tiempo una disciplina específica y una herramienta utilizada por otras áreas del conocimiento.

Tal dificultad representa, por citar un ejemplo, con las fracciones, entidades que sólo adquieren sentido si son asimiladas desde una estructura que acepte su multiplicidad conceptual que les hace intervenir a veces como números pero en otras ocasiones como operadores, y alrededor de las cuales se dan cita procedimientos como los algoritmos de cálculo, el algoritmo de paso a decimal y viceversa o conceptos mucho más amplios como el de proporcionalidad. Utilizando precisamente este ejemplo, Orton (1990) dice:

> *[...] nuestro entusiasmo por iniciar a los alumnos en todo lo que de interesante podemos concebir en esta materia nos impide ver la magnitud de todo aquello con lo que se enfrenta el promedio de los alumnos [...] fue Kemp (1964) quien formuló la opinión de que las fracciones proporcionan el ejemplo obvio de una idea matemática, antes considerada como elemental, y que el análisis de los conceptos revela que dista de ser simple.*

Es preciso pues hacer una llamada de atención sobre el peligro que pueden suponer aproximaciones simplistas a la categorización, clasificación y ubicación de los contenidos en el tiempo, al menos sin tener en cuenta las aportaciones que la ciencia didáctica pueda formular al respecto. Así, después del estudio fenomenológico de las fracciones de Freudhental (1983) no queda más remedio que extender el estudio de las fracciones a lo largo de toda la enseñanza obligatoria si es que se quiere, como parece deseable, recoger toda la riqueza del concepto.

Es desde este punto de vista, consciente de la complejidad de la mayoría de los conceptos y procedimientos matemáticos, que la propuesta, desplegada más adelante, de secuencia de los contenidos expuestos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas, no debe interpretarse con la clave de linealidad que parece sugerir su presentación visual, sino más bien aceptando que la idea básica que subyace en esa secuencia es la de un tratamiento de los contenidos en espiral, tal y como fue definido por Bruner (1972), implicando una presentación en distintos momentos del tiempo, tal vez en distintos cursos y hasta en los dos ciclos de la etapa, con una complejidad creciente.

Es más, la pretensión de que los conocimientos construidos sean significativos, esto es enriquecedores de las conexiones previamente establecidas entre unos conceptos y otros, precisa, amén de la retoma periódica de los mismos temas, de una diversificación sincrónica de los contextos en que se presentan:

> *Los significados construidos por los alumnos son siempre incompletos o, si se prefiere perfeccionables, de tal manera que, a través de las reestructuraciones sucesivas que se producen en el transcurso de otras tanta situaciones de enseñanza/aprendizaje, dicho significados se enriquecen y complican progresivamente, con lo que aumenta su valor explicativo y funcional.* (Coll y Solé, (1989))

Esta conveniencia de simultáneo despliegue en vertical (a lo largo del tiempo) y en horizontal (durante el mismo curso) de los contenidos puede ser ilustrado con el tratamiento de la proporcionalidad. Durante un mismo curso se aborda su estudio desde perspectivas diferentes como la geométrica, numérica, probabilística o funcional, y a lo largo de los cursos se incrementa la complejidad del tratamiento.

De todas maneras, la planificación de las situaciones de aprendizaje en el tiempo debe ser sistemática y rigurosa, que no rígida e inamovible, contemplando, como mínimo, tres aspectos:

a) las características de los contenidos y su relación con los objetivos correspondientes:

> *Aprender contenidos no debe ser asimilado a acumular información.*
> (Coll y Solé, 1989)

b) las competencias de los alumnos y los conocimientos previos que se pueden detectar de los mismos:

> *Adaptarse al pensamiento del alumno quiere decir, en primer lugar, aceptar que existe. Que las ideas previas que posee no son fruto del azar, que Jerne negaba incluso de las células, sino el reflejo de un sistema que tiene mucha más coherencia de lo que le puede parecer a un adulto que lo contemple desde otro sistema.* (Moreno, 1986)

c) los distintos enfoques metodológicos que podrían permitir un tratamiento adecuado de tales contenidos.

7. BLOQUES DE TRABAJO

La propuesta de secuencia que se formulará más adelante incluye los contenidos del Decreto de Enseñanzas Mínimas desarrollados y agrupados en *cinco* bloques de trabajo, de títulos respectivos,

Números
Geometría
Estadística-Probabilidad
Álgebra-Gráficas.
Resolución de Problemas

epígrafes bajo los que se ha elaborado el material de trabajo para los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria.

Como ya se ha dicho, la idea básica que sobre el aprendizaje se adopta en este proyecto es que las matemáticas se aprenden matematizando *en contexto*, de modo que se ha de construir, resolver problemas, investigar, *actuar*, en definitiva, *matemáticamente*, en toda la extensión de la palabra. Tanto es así que el área de Matemáticas tiene fundamentalmente un carácter procedimental: trata de desarrollar habilidades, estrategias generales, formas de actuar y razonar.

Es por eso que el eje vertebrador del trabajo debe ser la resolución de problemas, proceso íntimamente ligado a la realización de investigaciones, construcciones y uso de materiales:

> *La resolución de problemas ha de ser el punto central de atención del curriculum de matemáticas.* (N.C.T.M. Estándares Curriculares, 1991, pág. 21).

Más aún, la resolución de problemas es

> *[...] en las matemáticas escolares, método y contenido. Como contenido supone la reflexión sobre procesos comunes en la resolución de los problemas planteados en cada parte de las matemáticas.* (Decreto 47/1992 de la G.Valenciana, DOGV 6/4/92. pág. 349)

Dando por sentada esta ubicuidad de la resolución de problemas, se ha tenido en cuenta la conveniencia de un tratamiento temporal *diferenciado* de cada bloque de contenidos en cada curso. Por ejemplo, el bloque numérico se puede y se debe trabajar con más intensidad al principio de la etapa que al final, un poco al contrario que lo que ocurre con el bloque de Álgebra. La secuencia de los contenidos procedimentales ha sido llevada a cabo conjuntamente con la de los contenidos conceptuales.

En lo relativo a la extensión temporal de cada bloque, es preciso resaltar que parece conveniente dedicar tanto tiempo como sea necesario para asimilar con tranquilidad la esencia del bloque y los procedimientos asociados, sin que esto signifique prolongarlos tanto que llegue a producir cansancio ni impedimento para el desarrollo de los otros bloques. A modo indicativo, se incluye a continuación un cuadro en el que consta el número de meses en cada uno de los cuatro cursos de la etapa que la experimentación de los materiales parece recomendar para cada una de las carpetas que desarrollan los bloques de trabajo:

CARPETAS	1º	2º	3º	4º
NÚMEROS	3	3	2	-
ÁLGEBRA- GRÁFICAS	3	3	3	3
GEOMETRÍA	1,5	1,5	2	3
PROBABILIDAD- ESTADÍSTICA	1,5	1,5	2	2
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	-	-	-	1

En los próximos capítulos se presentan los contenidos de cada uno de ellos, secuenciados tanto en horizontal (cada ciclo en conjunto) como en vertical (evolución de cada bloque a lo largo de la etapa).

CAPÍTULO IV

SECUENCIA POR CICLOS

8. CONSIDERACIONES GENERALES

La secuencia que a continuación se presenta está referida a los contenidos que desarrollan las carpetas de *materiales de matemáticas* bajo los mismos epígrafes, que se corresponden a su vez con los de los bloques de trabajo descritos en el capítulo anterior.

La secuencia se presenta distribuida por bloques y esquematizada en forma de cuadros escuetos. Comentarios extensos sobre cada uno de los bloques pueden encontrarse en el Capítulo V.

Aunque no era estrictamente necesario, se ha incluido también la secuencia correspondiente al Primer Ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria y ello por dos razones:

- porque junto con la secuencia del Segundo Ciclo aporta una visión de conjunto sucinta, y por lo tanto clara, de la etapa, que como ya se dijo es considerada como la unidad académica de referencia.

- porque algunos contenidos del Segundo Ciclo ya se introdujeron en el Primer Ciclo. Cuando es el caso, para evitar reiteraciones incómodas, se ha optado por incluirlos solamente en el listado del Primer Ciclo, dando por supuesto que cabe entender que su estudio se prolongará también durante el Segundo Ciclo.

Esto último, por otra parte, no es la excepción sino la norma puesto que el modelo de aprendizaje en espiral que se ha adoptado basa su estrategia didáctica en la revisión continua de los conceptos ya conocidos, sin caer en la ingenuidad de darlos por definitivamente aprehendidos.

Por sus especiales características no se ha esquematizado el Bloque de Resolución de Problemas, que se discute con amplitud suficiente en el Capítulo V.

9. NÚMEROS

E.S.O.	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO
NÚMEROS	Números naturales, números enteros, fracciones y decimales. Operaciones con esos números: suma, resta, multiplicación y división. Algoritmos de las operaciones. Cálculo mental. Múltiplos y divisores: números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Potencias de exponente entero. Propiedades. Números grandes y pequeños. Notación científica: comprensión y uso con calculadora. Concepto de radicación, algoritmos iterativos con calculadora. Proporcionalidad y tanto por ciento. Sistema métrico decimal. Utilización adecuada de la calculadora. Estimación numérica.	Estimación y cálculo mental. Uso correcto de la calculadora. Fracciones. Operaciones con fracciones y algoritmos de las operaciones. Relación con decimales y tanto por ciento. Proporcionalidad numérica. Potencias de exponente entero y fraccionario. Propiedades. Radicación y relación con las potencias. Notación científica. Manipulación de expresiones en notación científica. Relación con los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SMD. Los números y la medición: El Sistema Métrico Decimal, la medida del tiempo. Tanto por ciento y tanto por uno. Números no racionales. Conocimiento de su existencia.

10. GEOMETRÍA

E.S.O.	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO
GEOMETRÍA	Acercamiento al espacio y al plano y sus mutuas relaciones. Percepción espacial. Conocimiento y clasificación de cuerpos espaciales y de figuras planas. Poliedros. Elementos de los poliedros: Teorema de Euler. Polígonos. Reconocimiento de sus elementos y de algunas relaciones entre sus elementos. Teselaciones. Traslaciones, simetrías, giros. Lugares geométricos. Estimación y cálculo de longitudes y superficies. Toma de contacto con la estimación y cálculo de volúmenes. Sistema métrico decimal. Proporcionalidad geométrica. Semejanza. Tales. Uso adecuado de regla y compás. Localización de objetos en el plano dotado de un sistema de ejes coordenados.	Percepción espacial. Conocimiento del espacio y del plano. Polígonos y poliedros. Relaciones entre sus elementos. La circunferencia y otras figuras elementales. Estimación y cálculo de superficies y volúmenes. Sistema métrico decimal. Relaciones entre las unidades. Coordenadas y sistemas de referencia Proporcionalidad geométrica. Triángulos. Teorema de Pitágoras. Resolución de triángulos. (*) Trigonometría elemental. Medidas indirectas. Notación vectorial (*) Ecuación de la recta en el plano Lugares geométricos. La esfera. Geometría de la esfera. Manejos de instrumentos de medida y de representación geométrica.

11. ÁLGEBRA - GRÁFICAS

E.S.O.	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO
ÁLGEBRA GRÁFICAS	Simbolización. Establecimiento de relaciones y generalización. Obtención de fórmulas y expresiones literales. Sustitución en fórmulas. Sistemas de referencia. Representaciones gráficas. Relaciones entre dos variables. Interpretación: .Tablas de valores. .Gráficas. .Fórmulas .Descripciones textuales. Manipulación de fórmulas. Ecuaciones de primer grado. Métodos iterativos y de "ensayo y error" para la resolución de ecuaciones. Resolución de problemas por métodos algebraicos.	Sucesiones y cadencias. La calculadora. Obtención de fórmulas y expresiones literales. Sustitución en fórmulas. (*) Manipulaciones algebraicas (*) Ecuaciones de segundo grado. Resolución. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. (*) Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas Estudio de algunos modelos funcionales: Funciones lineales. Funciones cuadráticas. Funciones exponenciales. Funciones de proporcionalidad inversa. Funciones logarítmicas. Funciones periódicas.

12. PROBABILIDAD - ESTADÍSTICA - COMBINATORIA

E.S.O.	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO
PROBABILIDAD ESTADÍSTICA COMBINATORIA	Tablas de frecuencias: absolutas, relativas. Datos: discretos-continuos, simples-agrupados. Proporcionalidad: frecuencias en tantos por ciento. Distintas formas de representaciones gráficas de datos estadísticos Medidas de centralización. Diseño de cuestionarios para la recogida de datos. Encuestas Análisis de juegos de azar. Cuantificación de probabilidades en tantos por ciento y en tantos por uno. Simulaciones. Tablas de números aleatorios. Relación Probabilidad - Estadística. Sucesos dependientes e independientes. Combinatoria.	Recopilación de la información estadística en tablas y gráficos. Medidas de centralización. Interpretación. Medidas de dispersión. Interpretación. Encuestas y muestreos. Análisis crítico de la actividad estadística. Análisis crítico de la utilización de los resultados estadísticos en los medios de comunicación. (*) Regresión - Correlación. Análisis de juegos de azar. Sucesos dependientes e independientes. Cálculo de probabilidades. Sucesos contrarios, sucesos compuestos. Simulación y cálculo de probabilidades.

(*) Contenidos que requieren un tratamiento distinto en cada una de las dos opciones del último curso o que están incluidos solo en la opción B.

CAPÍTULO V

FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA DE LOS BLOQUES

13. NÚMEROS

No es concebible la cultura sin el concepto de número. Es más, es imposible la vida en sociedad sin la codificación numérica y las operaciones con números. El desarrollo numérico ha ido históricamente parejo al desarrollo cultural y científico y desde siempre ha sido un elemento configurador del pensamiento y de la cultura.

No es de extrañar en consecuencia que los números sean imprescindibles no sólo para entender aunque sea rudimentariamente el mundo físico, sino, y tal vez sobre todo, para comprender y producir *comunicación*, gran parte de la cual contiene elementos cuantitativos que encuentran en el número el medio natural de expresión que actúa como calificativo y determinativo que completa y precisa los mensajes.

Las Matemáticas son las encargadas del trabajo numérico específico, de la reflexión, unificación, sistematización, generalización de las relaciones cuantitativas, su reglamentación, su representación y su rango de aplicabilidad, posibilitando, en definitiva, establecer las comparaciones que abren la puerta a la comprensión de la realidad.

Aunque las Matemáticas son algo más que números, estos constituyen su instrumento de trabajo básico en todos sus apartados. Elemento primigenio de abstracción, los números son fuente de posteriores abstracciones por las múltiples y bellas relaciones y regularidades que presentan, propiciando un manantial de actitudes favorables hacia las Matemáticas.

Asimismo, los números generan de modo natural multitud de problemas y permiten plantear gran cantidad de investigaciones que facilitan la profundización en el conocimiento del mismo campo numérico y en la interiorización de los procedimientos de trabajo matemáticos.

Por otra parte, no se puede negar la importancia pragmática del cálculo en general, y mental y escrito en particular, en tanto que buena parte de la relación cuantitativa del individuo con el entorno social consiste en transacciones comerciales convencionales (compras, ventas, presupuestos, financiaciones,...). Del mismo modo, esencialmente el ciudadano se relaciona cuantitativamente con el medio ambiente físico a través de la medición, esto es de la cuantificación de magnitudes.

Los grandes núcleos temáticos del trabajo en el campo numérico durante la Educación Secundaria Obligatoria giran entorno a los siguientes aspectos:

* La estructura numérica decimal, sus distintas representaciones y expresiones.

* Las diversas clases de números: naturales, negativos, fraccionarios, decimales,...

* Las operaciones con los diversos tipos de números, sus propiedades y las reglas o algoritmos que las automatizan.

* La proporcionalidad numérica: fracciones y porcentajes y sus relaciones con los decimales.

* La divisibilidad numérica.

* El cálculo mental

* La calculadora.

* La estimación de cantidades y de resultados de operaciones.

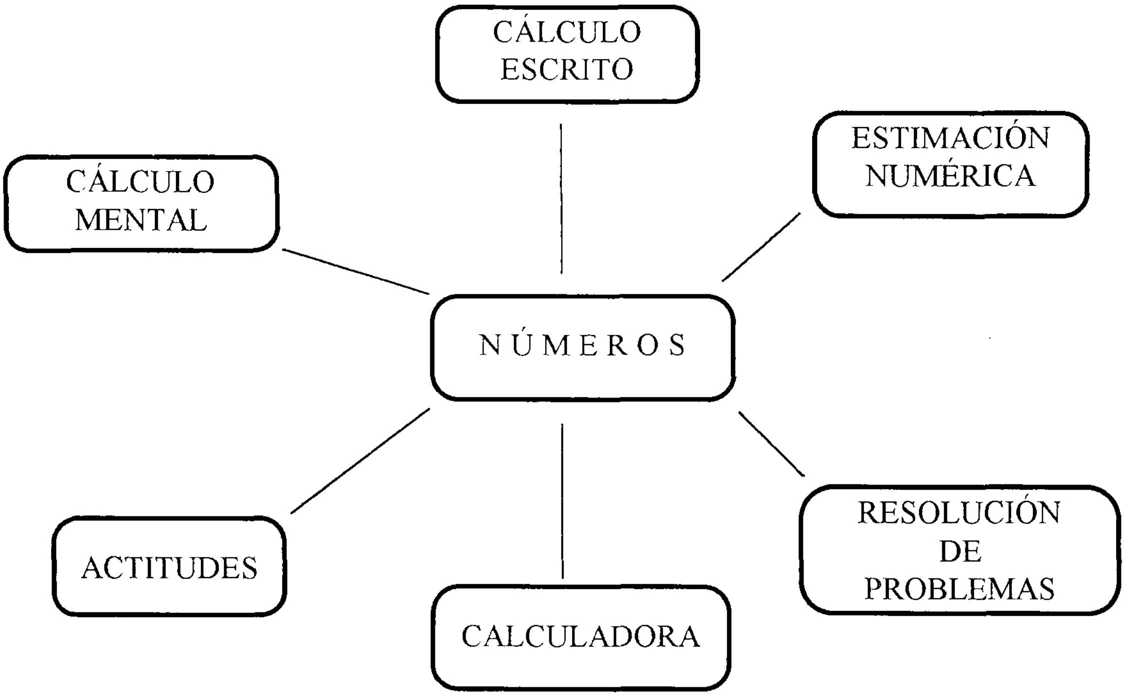
* El establecimiento de relaciones y pautas numéricas y su simbolización abstracta.

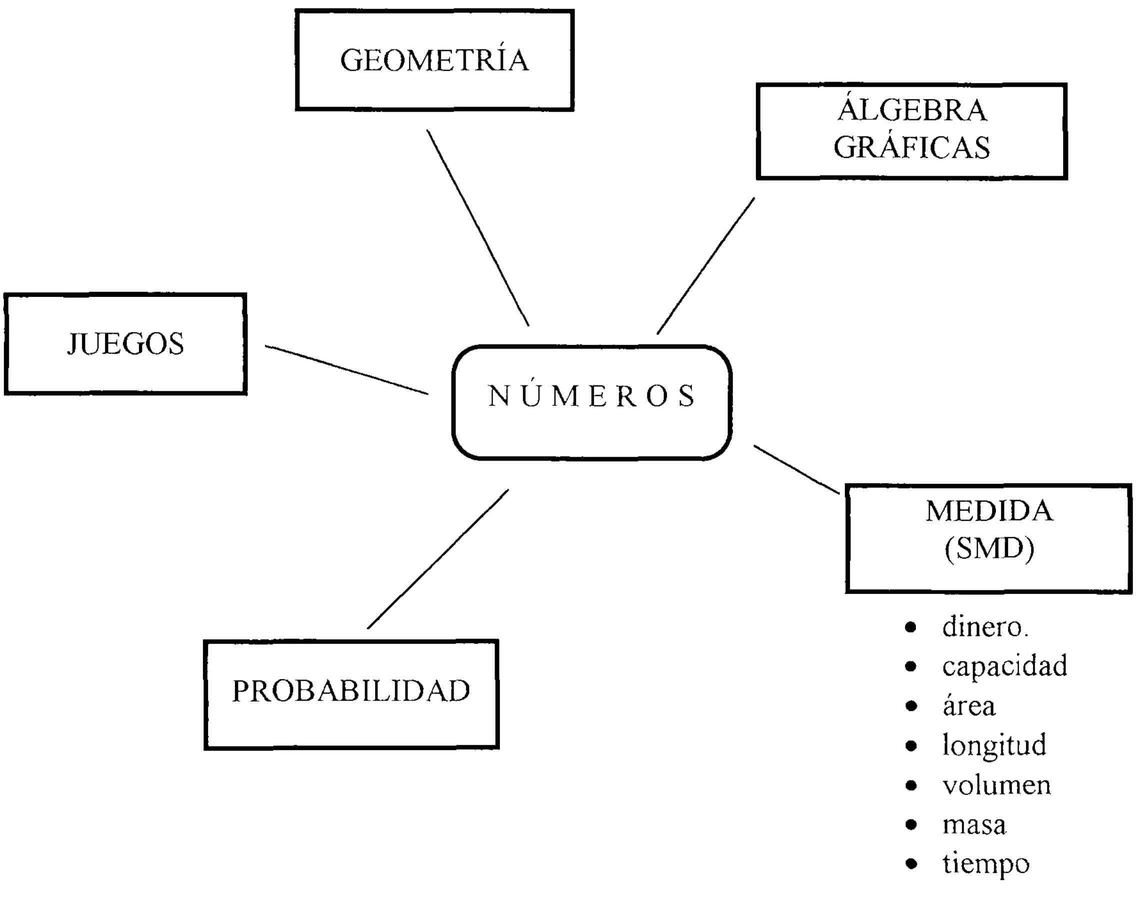
* La contextualización en el resto de las Matemáticas, en las demás áreas del currículo, en la ciencia y en la vida cotidiana.

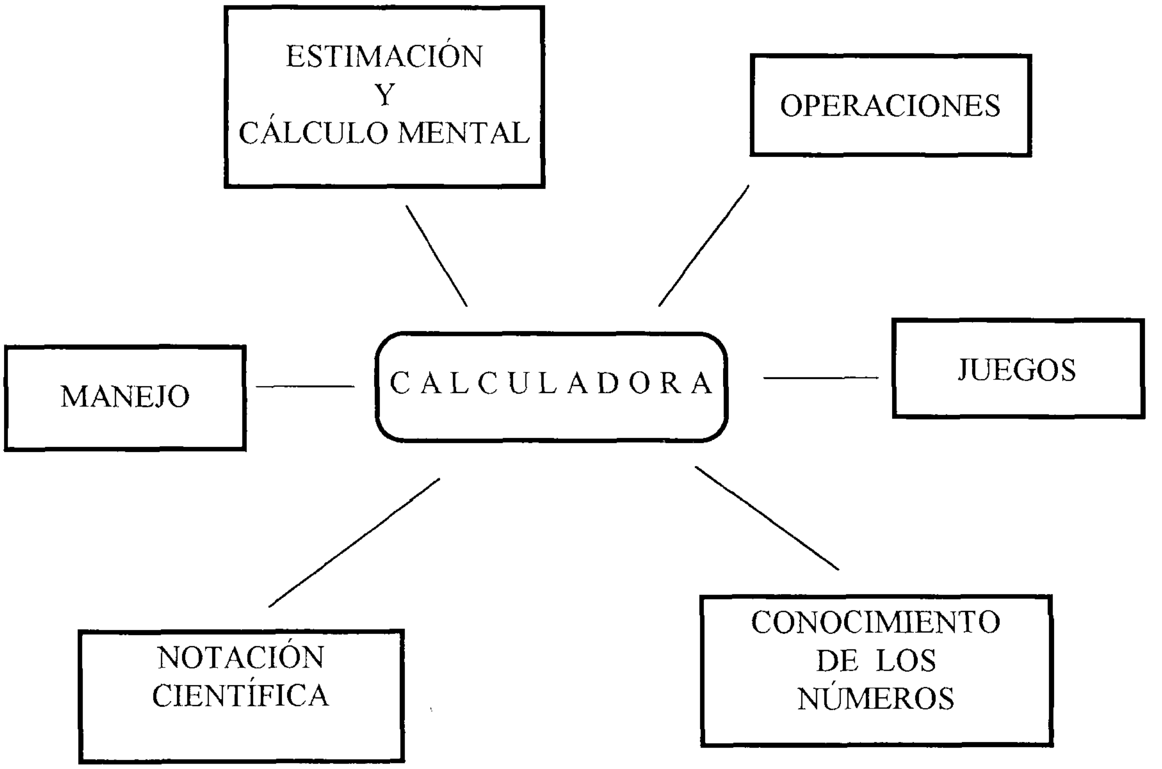
Si bien es cierto que los números aparecen de modo natural en todos los bloques del área de Matemáticas y en determinados temas de estudio de las demás áreas del curriculum, no lo es menos que la reflexión numérica requiere *un tiempo y un espacio* propio en el que en esencia la atención se centra en los números, mientras que el resto de los contenidos del área -y de las demás áreas- juegan un papel instrumental, subsidiario o auxiliar destinado a enriquecer los conceptos sujetos a estudio. No es de extrañar entonces que en los *materiales de matemáticas para los alumnos* se haya presentado el campo numérico relacionándolo intensamente, y conscientemente, con la gran mayoría de los demás campos del saber (véanse los cuadros de la siguiente página).

En consonancia con ese principio, es fundamental presentar los números en diferentes y muy variados contextos, cada uno de los cuales aporta matices que en conjunto dotan de significado a las abstracciones numéricas. Es imposible exagerar la variedad de contextos (véanse cuadros de la página siguiente) a los que se puede recurrir para estudiar los números, realizar cálculos, establecer relaciones o descubrir pautas numéricas, pues la mera observación o constatación de la existencia de diferencias conduce al establecimiento de comparaciones que, a su vez, se traducen en las cuantificaciones que constituyen una de las bases más sólidas del conocimiento humano.

Para la secuenciación de los contenidos del bloque numérico se ha tenido en cuenta, primordialmente, la necesidad de garantizar una presencia continua de los números en todos los cursos, con una profundización en los conceptos, las destrezas y, en general, el sentido numérico a lo largo de la etapa. Se ha dado un mayor énfasis al estudio específico de los números en el primer ciclo para otorgar mayor peso en el segundo ciclo a la integración instrumental de los números en los demás contenidos matemáticos.


CÁLCULO ESCRITO
CÁLCULO MENTAL
ESTIMACIÓN NUMÉRICA
NÚMEROS
ACTITUDES
CALCULADORA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS


GEOMETRÍA
ÁLGEBRA GRÁFICAS
JUEGOS
NÚMEROS
MEDIDA (SMD)
PROBABILIDAD
• dinero.
• capacidad
• área
• longitud
• volumen
• masa
• tiempo



Los contenidos numéricos básicos son muy amplios, tanto por el gran número de apartados que se pueden tomar en consideración, como por la dificultad intrínseca de las estructuras y relaciones numéricas, que distan mucho de ser triviales, tal y como ponen de manifiesto los estudios didácticos (véase, por ejemplo, en Freudenthal (1983) un exhaustivo estudio sobre la complejidad de las fracciones). Más aún, todos y cada uno de los grandes apartados de trabajo numérico se encuentra en íntima relación con los demás, de modo que en conjunto estructuran una densa red en cuya construcción es menester invertir esfuerzos, por el carácter que tiene de sustrato básico para la adquisición de conocimientos matemáticos generales.

Precisamente a causa de la complejidad de las mencionadas relaciones estructurales, debe hacerse especial hincapié en que la inclusión en el primer ciclo de algunos temas y exclusión en el listado del segundo ciclo (como por ejemplo los números enteros) no significa que se considere finalizado el estudio en el primer ciclo. La conceptualización numérica requiere una toma en consideración de todos los tipos de números y de las operaciones con ellos a lo largo de *toda* la etapa.

La estrategia didáctica que se ha diseñado para el bloque de números en el Cuarto curso requiere algunas matizaciones. De forma general, en este curso se entiende que el trabajo numérico se desarrolla al abordar el estudio de los demás bloques de contenido. En esencia, los campos numéricos han sido introducidos en los cursos previos, y en este año se trata de consolidar los conceptos y los procedimientos. Por esta razón, y porque en la carpeta de 3° se agotan todos los contenidos numéricos específicos de la secundaria obligatoria, no existe una carpeta de Números para el Cuarto curso, donde en todo caso se podrían retomar, si así se considerase, algunas de las actividades de 3°.

Entre los recursos didácticos que requieren los problemas propuestos la carpeta de Números, destaca con diferencia la Calculadora, bien científica bien gráfica, sin la que no tiene sentido ni el conjunto del bloque, ni la inmensa mayoría de las actividades seleccionadas. En algunos casos son también imprescindibles la regla, el compás y papel tramado.

14. ÁLGEBRA - GRÁFICAS

En la historia reciente, el álgebra ha sido el núcleo central de la enseñanza de las Matemáticas en los niveles equiparables a la actual Secundaria. Este hecho ha generado un comportamiento inercial tendente a equiparar *calidad* matemática con *cantidad* algebraica. Esta tendencia se ve reforzada por la demanda algebraica abusiva por parte de otras áreas de conocimiento del curriculum, especialmente la Física, que tiende ha concebir unas matemáticas meramente instrumentales y sin valor formativo propio. Lamentablemente, parte del profesorado de Matemáticas, confundiéndolos con cantos de sirena, se ha dejado embaucar por estos berridos de monstruo marino, arriesgándose a convertir sus clases en dictados de reglas sintácticas que, amén de aburrir a todo el mundo, profesor incluido, demuestran un concepto muy poco estimable de las Matemáticas y, lo que es peor, del álgebra.

Ninguna conclusión está más alejada de las anteriores consideraciones que la de deducir de ellas que el área de Matemáticas debe declinar sus responsabilidades en la formación algebraica de los estudiantes de secundaria. Más bien todo lo contrario: el álgebra merece un tratamiento didáctico serio que optimice la eficacia de su aprendizaje, que por cierto se encontraba bajo mínimos. El álgebra aparece en múltiples contextos (geométricos, probabilísticos, estadísticos,...) pero además hay que procurar que el trabajo algebraico sea desarrollado en todos los bloques y áreas del curriculum.

Son ya clásicos los numerosos estudios (consúltese Hart (1981) para un caso paradigmático, y Azarquiel (1991) para una traslación a nuestro entorno) que demuestran que todos los adolescentes del mundo escolarizado, con carácter universal, tienen las mismas dificultades con el álgebra, la formalización simbólica y la manipulación abstracta de símbolos.

El problema parece estribar no tanto en qué cantidad de álgebra se debe enseñar sino en cuánto *álgebra con significado* es posible aprender, teniendo en cuenta que la eficacia didáctica del trabajo mecánico y aislado con expresiones literales (álgebra abstracta de polinomios o de fracciones algebraicas) es tendente a cero.

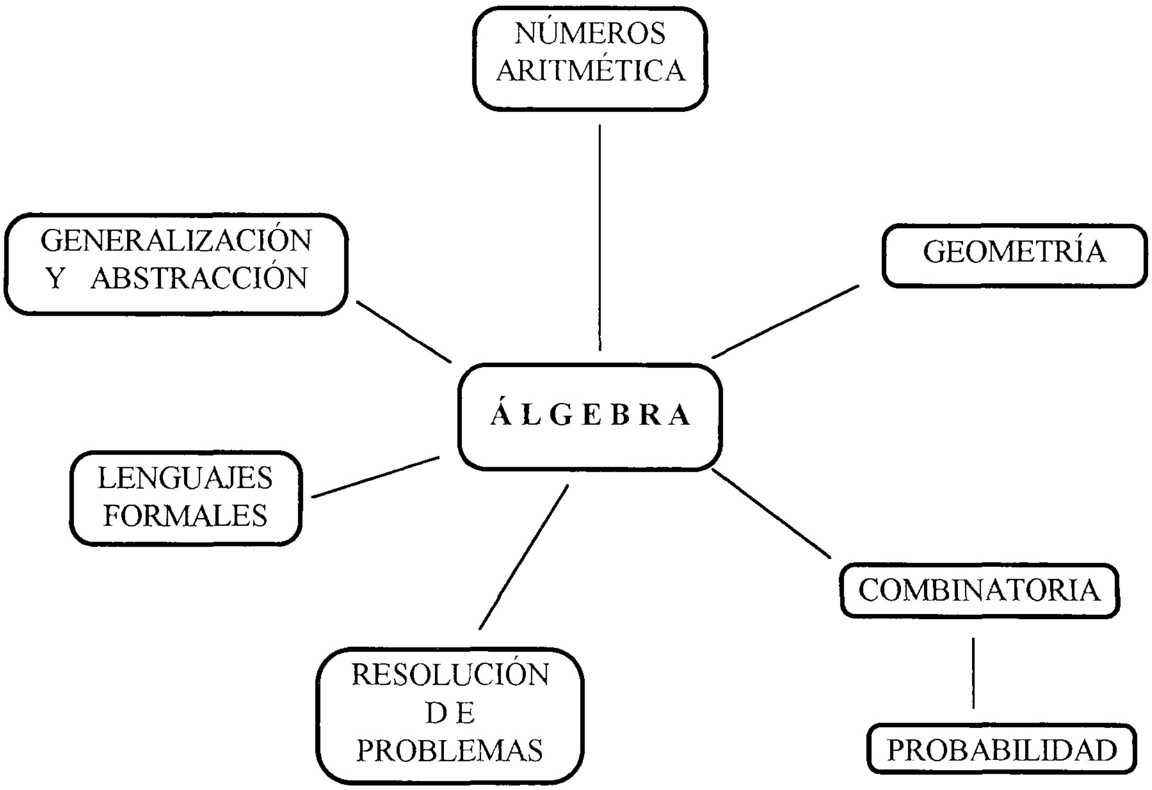
Sin embargo, el álgebra posiblemente constituye un bloque capital en el aprendizaje de las Matemáticas, pues contribuye de manera decisiva a desarrollar las capacidades necesarias para alcanzar los objetivos más ambiciosos de la Educación Secundaria, relacionados con los procesos que caracterizan al álgebra. De la observación de la realidad en bruto puede señalarse en *lenguaje natural* a veces la existencia de alguna relación entre las indefinidas variables que la describen parcialmente. El refinamiento en la descripción de estas relaciones pasa ineludiblemente por su codificación, bien *numérica*, bien *gráfica*. bien *algebraica*. Estas tres técnicas de codificación especializada de información, cada una con sus propias reglas, constituyen el máximo exponente de lenguaje abstracto y formalizado, que simplifica, condensa y permite comprender mejor las relaciones entre variables. Parte consustancial al propio lenguaje es la habilidad, que debe ser aprendida explícitamente, de traducir la información de unos a otros tipos de codificaciones. Si de entre todos ellos, el lenguaje gráfico constituye la piedra angular pues, al sustentarse en la *visualización*, favorece especialmente la creación de *imágenes mentales* que refuerzan el proceso de conceptualización.

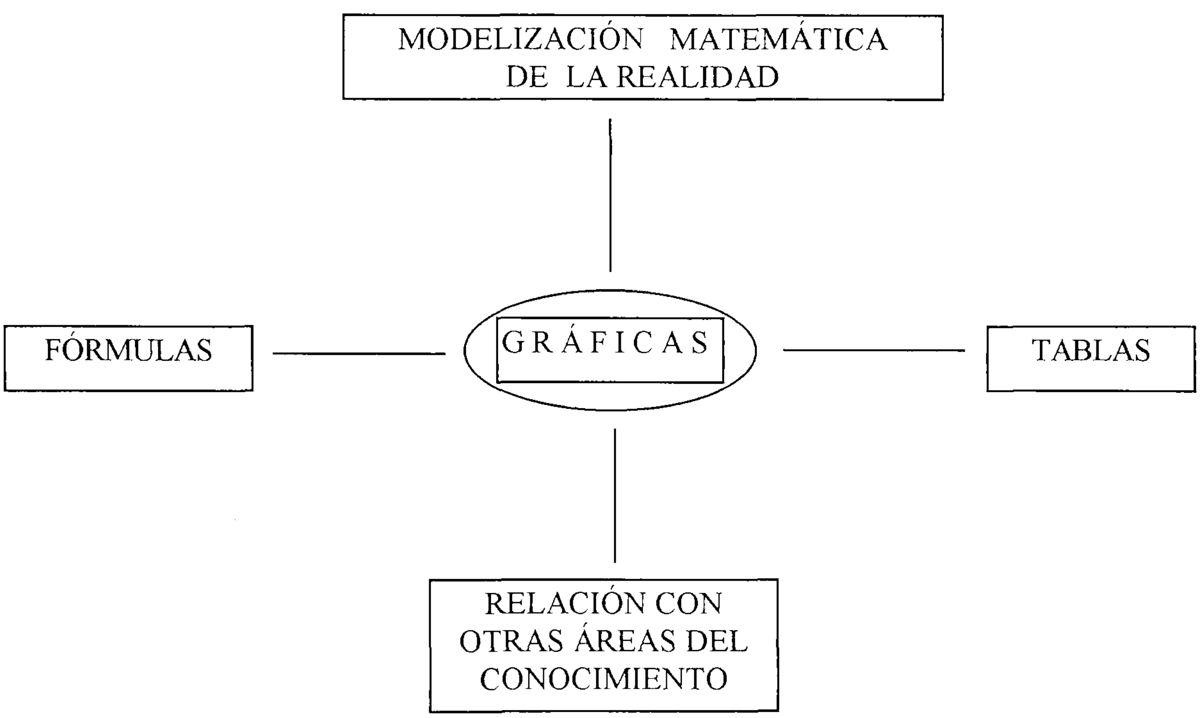
El bloque algebraico debe ser planificado para un tratamiento conscientemente muy lento y, en contra de algunas concepciones que sostienen que el álgebra debe ser postergada hasta el estadio de desarrollo formal del individuo, aquí se apuesta por una introducción lo más temprana posible, no porque no sea cierto que determinadas manipulaciones algebraicas son sólo comprensibles una vez alcanzada esa etapa formal, sino porque hay otras entradas al álgebra, más naturales y suaves, que no necesitan esperar a ese estadio formal y que contribuyen positivamente a alcanzarlo.

Otro peligro a sortear estriba en la reducción del álgebra a un tratamiento sistemático de los errores habituales y persistentes en los estudiantes. La terapéutica de los errores no puede ser el fundamento del álgebra. Por ejemplo, está catalogada como una dificultad algebraica típica la conceptualización de las letras como variables independientes, pero ese hecho incuestionable no debería traducirse en un apartado del álgebra dedicado a tratar letras como variables independientes. Otro tanto ocurre con la generalización o la simbolización, que deben ser parte del trabajo matemático cotidiano y su dominio se obtiene sólo después de mucho tiempo y no como resultado de una unidad didáctica de un mes en un curso.

El objetivo general del bloque de álgebra es conseguir que *todos* los estudiantes comprendan que determinados enunciados expuestos verbalmente pueden modelizarse matemáticamente dando lugar a gráficas, tablas y fórmulas (funciones o ecuaciones).

Para la utilización de las carpetas de álgebra es imprescindible una calculadora, papel milimetrado e instrumentos de dibujo. No es imprescindible pero sí conveniente tener acceso a software de representación de funciones (calculadora gráfica u ordenador).


NÚMEROS
ARITMÉTICA
GENERALIZACIÓN
Y ABSTRACCIÓN
GEOMETRÍA
ÁLGEBRA
LENGUAJES
FORMALES
COMBINATORIA
RESOLUCIÓN
DE
PROBLEMAS
PROBABILIDAD


MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
DE LA REALIDAD
FÓRMULAS
GRÁFICAS
TABLAS
RELACIÓN CON
OTRAS ÁREAS DEL
CONOCIMIENTO

15. GEOMETRÍA

En sus aspectos más elementales, el mundo físico en el que nos desenvolvemos puede ser descrito gracias a un proceso de abstracción de propiedades y formas que dan lugar a la geometría. Cualquier aspecto de la realidad física tiene una componente geométrica, más o menos sofisticada, pero aceptada socialmente hasta el punto que forma parte del mismo lenguaje, que resulta esencial para su comprensión.

Aunque no exclusivamente, el ser humano abstrae las formas del mundo exterior fundamentalmente a través del sentido de la vista, de modo que no es de extrañar que la propia morfología (dos ojos) permite apreciar las más elementales características geométricas (tridimensionalidad) que atribuimos al espacio. Esta capacidad de abstracción se adquiere rudimentariamente de modo natural pero se puede aprender a mejorarla sensiblemente. La educación de la percepción espacial contribuye a enriquecer las imágenes mentales y sus relaciones, facilita su creación y su análisis, en definitiva, desarrolla potencialidades que parecen relacionadas con la misma esencia del pensamiento humano y su capacidad y eficacia para influir sobre el medio.

Históricamente, la geometría ha estado íntimamente ligada al conocimiento humano, del que ha sido un motor y una de sus primeras expresiones. Es harto conocida la influencia de la geometría en la filosofía griega, el cartesianismo o la teoría especial de la relatividad. Esta influencia sostenida a lo largo del tiempo ha engendrado una *concepción geométrica* del mundo, decisiva en la consolidación de la creencia en la comprensibilidad de la realidad, la creación del método científico y sus consecuencias tecnológicas.

Gran parte de la creación artística se materializa geométricamente (forma, volumen,..). Hasta las artes menos plásticas (literatura, música, danza, cine,...) contienen indisimulables componentes geométricas o encuentran ocasionalmente en la geometría una fuente de inspiración. Grandes artistas de todos los tiempos han recurrido a ideas geométricas básicas para sus creaciones y, viceversa, algunos han contribuido al desarrollo o popularización de las ideas geométricas (Durero y la perspectiva, la geometría proyectiva, Escher y las teselaciones del plano, Picasso y el cubismo,...) y hasta a construir teorías de sustrato geométrico (Platón y la proporción áurea, Leonardo, Luca Paccioli, Le Corbusier, ...).

Muchas otras parcelas del conocimiento estudian parcialmente aspectos o aplicaciones de la geometría. Las Ciencias Sociales recurren a técnicas cartesianas para representar los accidentes geográficos (mapas cartográficos, globos terráqueos,..) o los frutos de la actividad humana (planos, rutas,..); las Ciencias Experimentales describen geométricamente muchos aspectos de los fenómenos que estudian (trayectorias, campos,...).

El concepto de medida tiene uno de sus pilares básicos en los números y el otro en la geometría, que, a su vez, propicia un mejor conocimiento y un uso más sofisticado del sistema métrico decimal, cuyas unidades más usuales tienen fundamento geométrico. Está fuera de toda duda la utilidad práctica y conceptual del cálculo y estimación de medidas en general (en particular superficies, longitudes y volúmenes), de la comprensión y uso de escalas y planos, de la confección de esquemas y croquis, del entendimiento de los husos horarios y las referencias geográficas planetarias y celestes, de la apreciación de la magnitud de tamaños y distancias del macro y del microcosmos,...

La geometría es una fuente inagotable de problemas e investigaciones matemáticas. Algunos problemas clásicos de la geometría griega (trisección del ángulo, cuadratura del círculo, duplicación del cubo, la independencia del quinto postulado de Euclides,..) no sólo tuvieron en jaque a los matemáticos durante muchos siglos, sino que permitieron abrir nuevos y fructíferos campos de desarrollo que con el tiempo han demostrado ser esenciales.

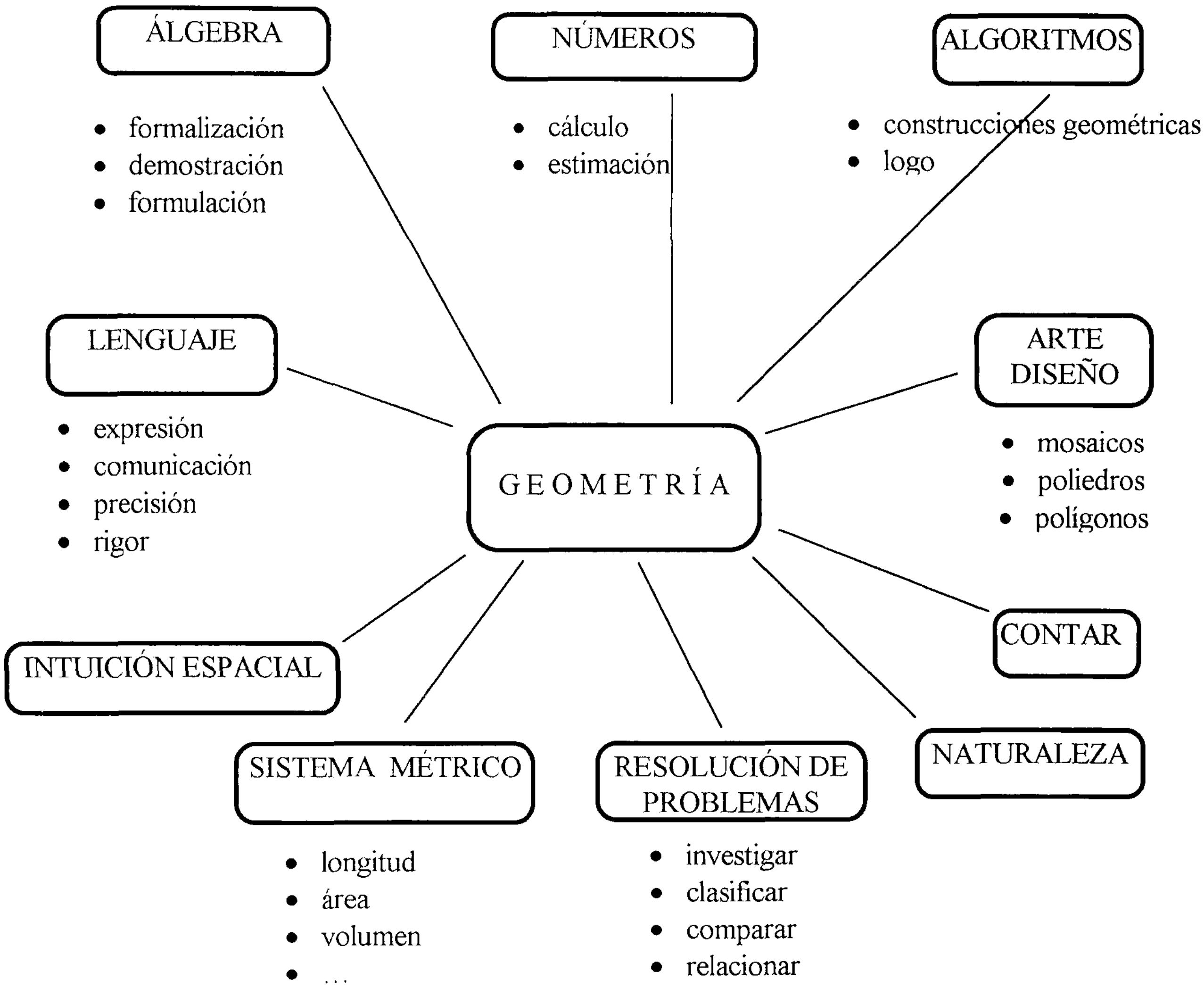
El estudio más elemental de las formas y figuras permite la observación de regularidades y pautas, la generalización y abstracción (establecimiento de relaciones numéricas y algebraicas con base geomérica), la formulación de conjeturas y leyes geométricas, la generación de destrezas algorítmicas básicas (construir, dibujar, trazar perpendiculares, paralelas, mecanismos de giros, detectar simetrías, describir movimientos,...), intentar explicitar justificaciones y demostraciones, usar instrumentos y materiales, etc. de gran valor formativo y de importancia didáctica tal que la exageración es imposible.

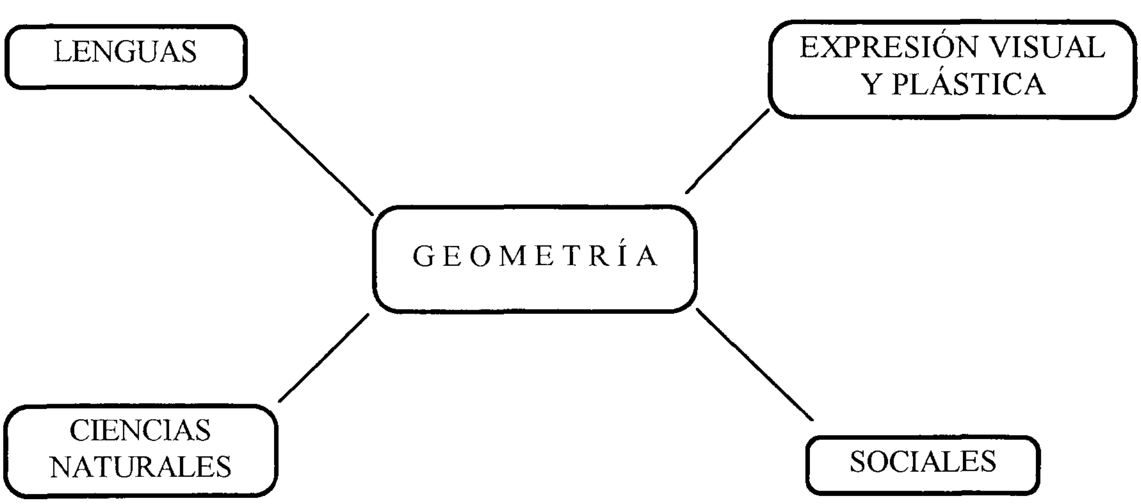
La geometría contribuye, por otro lado, a la capacitación expresiva y comunicativa de modo esencial. La potencialidad descriptiva se enriquece sustancialmente gracias al vocabulario geométrico y al conocimiento de las relaciones y propiedades características de la geometría y al papel que la geometría juega como codificador en el lenguaje icónico. Conceptos complejos de la propia matemática y de otras disciplinas (como la relación de dependencia entre variables) se comprenden mejor recurriendo al *lenguaje geométrico*.

La geometría contribuye de manera esencial a la consecución de un amplio espectro de objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria y del área de Matemáticas, entre los que cabe destacar:

* El desarrollo de la intuición espacial.
* La consecución del vocabulario, lenguaje y formas de expresión geométricas apropiadas.
* El desarrollo del sentido estético y creativo.
* La introducción a la idea de demostración de las propiedades que se observan y de justificación de los métodos que se utilizan.

La geometría se presta especialmente a la utilización de muchos y variados materiales, la construcción de cuerpos, maquetas, desarrollos,.. y la realización de mediciones; procesos que requieren invertir tiempo y que generan múltiples líneas de trabajo y profundización, que tienden un puente entre la manipulación concreta y la abstracción, sugiriendo ideas y generando conceptos y métodos. Recursos didácticas susceptibles de ser empleados en el trabajo geométrico son también el uso de transparencias, la proyección de diapositivas y videos, la programación de visitas a exposiciones o monumentos, el diseño de proyectos que involucren a todo el centro,...


ÁLGEBRA
formalización
demostración
formulación
NÚMEROS
cálculo
estimación
ALGORITMOS
construcciones geométricas
logo
LENGUAJE
expresión
comunicación
precisión
rigor
GEOMETRÍA
ARTE DISEÑO
mosaicos
poliedros
polígonos
CONTAR
INTUICIÓN ESPACIAL
SISTEMA MÉTRICO
longitud
área
volumen
...
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
investigar
clasificar
comparar
relacionar
NATURALEZA


LENGUAS
EXPRESIÓN VISUAL Y PLÁSTICA
GEOMETRÍA
CIENCIAS NATURALES
SOCIALES

16. PROBABILIDAD. ESTADÍSTICA. RECUENTOS SISTEMÁTICOS.

Dios no juega a los
dados con el Universo
A. Einstein

Dios no sólo juega a los dados,
sino que a veces los arroja
donde no podemos verlos
S. Hawking

Si Dios jugara a los dados, ganaría
I. Stewart

Una de las características básicas de la concepción moderna del mundo es el convencimiento de que la incertidumbre no sólo proviene del desconocimiento parcial o total de las variables objeto de estudio, sino que forma parte esencial de la realidad. Fenómenos tan distintos como los fisicos sociales, económicos o biológicos,... comparten la propiedad de no dejarse describir bien desde punto de vista mecanicista que supone la existencia de causas bien precisas que provocan *unívocamente* efectos.

Es notorio por otra parte que las clases de matemáticas se convierten muchas veces en transmisoras de una concepción de la ciencia de cortas miras deterministas, que acaba identificando matemático con exacto.

Es necesario que desde muy temprano el estudiante tome contacto con una amplia gama de experiencias que vayan forjando la idea de que las situaciones azarosas son también controlables en cierto sentido, en primera instancia a base de consideraciones cualitativas relacionadas directamente con la intuición y el lenguaje cotidiano (probable, incierto, imposible, seguro,... son palabras de uso común) y posteriormente cuantificando e identificando las leyes que rigen algunos fenómenos aleatorios y dotando de precisión al vocabulario probabilístico.

El entorno en el que se desarrolla la actividad diaria del estudiante contiene multitud de situaciones aleatorias que proporcionan una aproximación al concepto de incertidumbre. De hecho, los juegos de azar han constituido siempre una parte importante de la actividad social (hasta el punto de que el volumen de negocios en torno a los juegos de azar es bien respetable y que la ludopatía es una enfermedad reconocida y tratada), generando ideas intuitivas acerca del azar tan arraigadas como para atribuirle la responsabilidad de todos aquellos fenómenos o sucesos que no son explicables.

Estas ideas intuitivas se ven constantemente reforzadas debido a la presencia profusa del azar en los medios de comunicación, especialmente los audiovisuales, que incluyen invariablemente en su programación juegos, loterías, sorteos,... El mismo Estado ha intervenido reglamentando y acotando los juegos de azar, cuando no organizándolos y, en cualquier caso, administrando, vía tasas impositivas o porcentajes sobre la recaudación, los recursos que captan. En parte, esa reglamentación tiene como objeto proscribir los abusos producidos en timbas, partidas con apuestas incontroladas,..., pero al mismo tiempo conduce a la promoción y proliferación de los juegos legalizados.

Por otro lado, la mera existencia y popularidad de los juegos de azar abre las puertas al planteamiento de problemas, al menos combinatorios, estadísticos o probabilísticos, en torno a su estructura y a importantes ideas, creencias y actitudes subyacentes, que los convierten en un inapreciable recurso para el aula. No de menor importancia es la posibilidad de reflexionar y valorar críticamente la relevancia social de los juegos de azar con la intención de conseguir una actuación personal más consciente del estudiante en su relación con las apuestas y una predisposición a analizar los juegos en general.

El estudio del azar presenta la ventaja de producir recompensas inmediatas: permite controlar y comprender y hasta predecir fenómenos que a simple vista parecen estar gobernados por elementos misteriosos, arbitrarios, ocultos, fatales, irracionales o divinos, pero que empiezan a clarificarse inmediatamente si se realizan los más elementales análisis de los mismos.

Otro tanto cabe decir del estudio de la estadística que abre las puertas a la interpretación y comprensión de gran parte del volumen informativo que emiten los medios de comunicación. Las estadísticas publicadas reflejan el estado de ciertas realidades (opiniones, niveles económicos, intencionalidad de voto,...) pero al mismo tiempo influyen sobre ellas, especialmente las relativas al comportamiento social (sondeos electorales,...) y las susceptibles de ser modificadas por intervención administrativa (accidentes y sus causas, índice de precios al consumo, listas de espera en los hospitales, ..). Precisamente debido a la repetición de las observaciones, estos estudios estadísticos pueden ayudar a corregir tendencias innatas o ideas naturalmente equivocadas sobre la posibilidad de ocurrencia de los sucesos. En otros términos, la estadística conduce a la acertada idea de probabilidad de nacimiento de varón o hembra es 0'5, y al mismo tiempo, a la creencia, esta vez errónea, de que después de tres caras consecutivas es más fácil un resultado cruz en el cuarto lanzamiento.

Las técnicas de recopilación, sintetización y esquematización de datos propias de la estadística, contribuyen a ampliar las capacidades expresivas de los estudiantes, en cuanto a los procesos de comprensión, simbolización, abstracción y modelización que desencadenan.

La profusa utilización del lenguaje y las técnicas estadísticas (medios de comunicación, compañías de seguros, administración, política, control de calidad, estudios de producción y mercado,..) ha convertido en básica la necesidad de interpretar y emitir mensajes codificados estadísticamente, de modo que resulta ineludible traer a primer plano las destrezas imprescindibles para la comprensión tanto de la actividad estadística en su conjunto como de los resultados de la misma.

Tan extensa es la utilización de los recursos y resultados estadísticos que se ha convertido en moneda corriente el uso interesado, parcial o sesgado de los mismos, de manera que la interpretación de los datos elaborados debe ser complementada con una actitud crítica que permita analizarlos en todas sus dimensiones. Tal es el caso, por ejemplo, de la proliferación en períodos electorales de encuestas y sondeos, que no reducen sus pretensiones a describir determinado estado de opinión sino también a influir sobre él.

El estudio completo del proceso estadístico (la elección del tema de estudio, la selección de las variables relevantes, la eventual confección de los cuestionarios pertinentes, la recogida de información, la tabulación y el análisis de la misma, la presentación de los resultados,...) es fundamental para producir en el estudiante el convencimiento de la utilidad del método de trabajo matemático, para desarrollar capacidades básicas (análisis, síntesis, autonomía, tenacidad, responsabilidad en el trabajo, toma de decisiones individuales y colectivas), y para producir la sensación de aplicabilidad de las matemáticas en la modelización y comprensión de la realidad.

Las estadísticas proporcionan datos para definir indicadores de fenómenos más o menos complejos (calidad de vida/estatura media de los quintos, calidad de vida/consumo de calorías por persona, renta per cápita, rendimiento de una máquina, certeza de un misil,...) que abren las puertas a la cuantificación, y por lo tanto a la posibilidad de detectar regularidades y predecir el comportamiento de aspectos muy amplios de la realidad. A pesar de que, en su sentido más profundo, las ideas propias de la modelización estadística requieren un fuerte nivel de abstracción que tal vez escapa a las pretensiones de la enseñanza secundaria, un acercamiento informal a las mismas es posible, deseable y conveniente. Por ejemplo, ciertas consideraciones acerca de la normalidad de determinadas poblaciones (o de la ausencia de normalidad en otras) no sólo pueden ser formuladas aún antes de estudiar la propia distribución normal, sino que parecen ser necesarias si se quiere respetar un tratamiento de los conceptos que dirija el proceso de aprendizaje de lo simple a lo complejo y de lo concreto a lo abstracto.

Incluso en la Educación Secundaria, no se puede ocultar que muchos aspectos de la realidad requieren modelos de tipo estadístico-probabilístico, que describen relaciones no estrictamente funcionales entre variables (peso/talla, coeficiente intelectual/rendimiento académico, ... correlación) y que se utilizan cada vez más, permitiendo la incorporación del lenguaje, la abstracción y la metodología propias de las matemáticas a todas las disciplinas sociales y humanas, que de este modo quedan elevadas a la categoría de ciencias en propiedad, capaces de formular modelos y validarlos prediciendo resultados que se pueden verificar. Así, no sólo la Medicina, la Ecología o la Biología recurren a registros y técnicas estadísticas para articular sus conocimientos (evolución de las enfermedades infectocontagiosas como el SIDA, efecto invernadero, estimación de poblaciones, eficacia de los métodos anticonceptivos,...) sino que en gran medida la Psicología, Sociología, Geografía, Historia, Psicolingüística,... requieren métodos estadísticos para analiar y extraer conclusiones de los datos que recopilan.

La combinatoria o recuento sistemático de posibilidades, es especialmente apropiada para desarrollar la capacidad de análisis exhaustivo de las situaciones, para construir estrategias personales y para ejercitar la capacidad de demostrar que la técnica elegida completa efectivamente el trabajo propuesto. Íntimamente ligada al campo numérico, en tanto que trata de completar conteos, al campo algebraico, pues las relaciones que se producen son expresables -con mayor o menor dificultad- con fórmulas, y al campo probabilístico, en la medida que la asignación de probabilidades en casos finitos requiere contar casos posibles y casos favorables a la realización de un determinado suceso, la combinatoria se presta a alcanzar niveles de abstracción elevados, procesando información muy refinada, razonando a partir de datos, justificando los procedimientos elegidos, ...

La combinatoria está en la base de muchos juegos y, por extensión, de muchas situaciones de la vida real. De hecho, el vocabulario de uso común ha importado términos, normalmente mal aplicados, propios de la combinatoria al igual que de la estadística y la probabilidad. Dotar de precisión a ese conjunto de términos de uso común (combinaciones, variaciones, permutaciones, normal, término medio, seguro, probable, incierto,...) constituye uno de los objetivos básicos de este bloque de contenidos.

La combinatoria, la estadística y, sobre todo, el azar han sido frecuentemente fuentes de inspiración literaria y filosófica, de modo que no es difícil encontrar textos o narraciones en las que son protagonistas principales y que pueden ser utilizados bien como recursos para introducir o desarrollar algunos apartados, bien como elementos para reflexionar sobre acercamientos no estrictamente matemáticos a la combinatoria, la estadística o el azar.

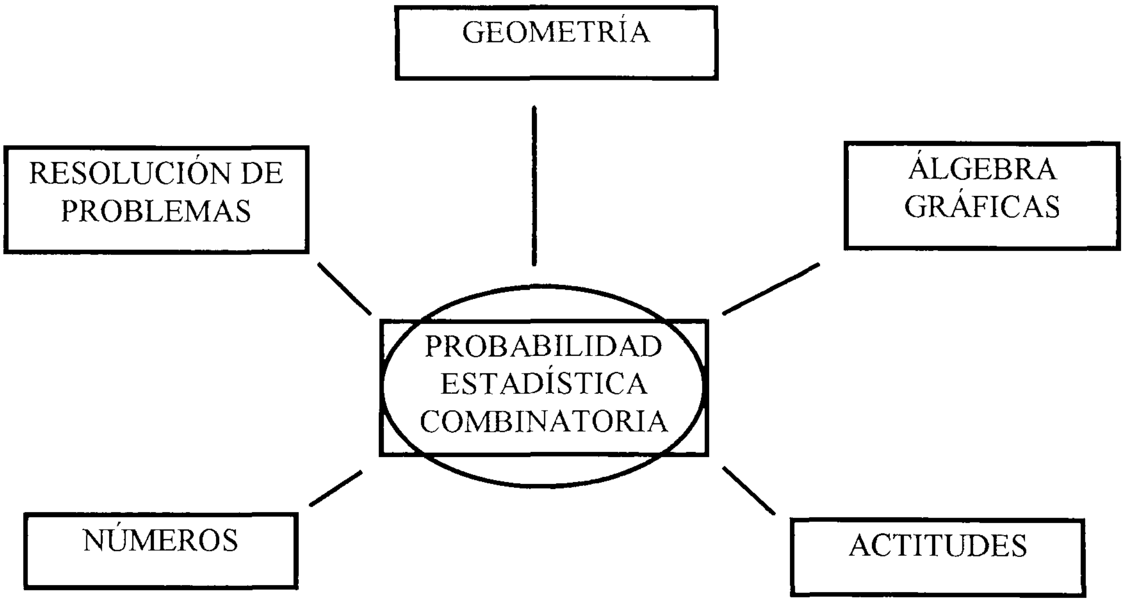
Aquí se supone que en la enseñanza primaria todos los estudiantes han tenido un contacto introductorio con el bloque, de modo que las ideas básicas no se presentan por primera vez. El trabajo del bloque es pues una continuación y profundización en el ya realizado en aquella etapa.

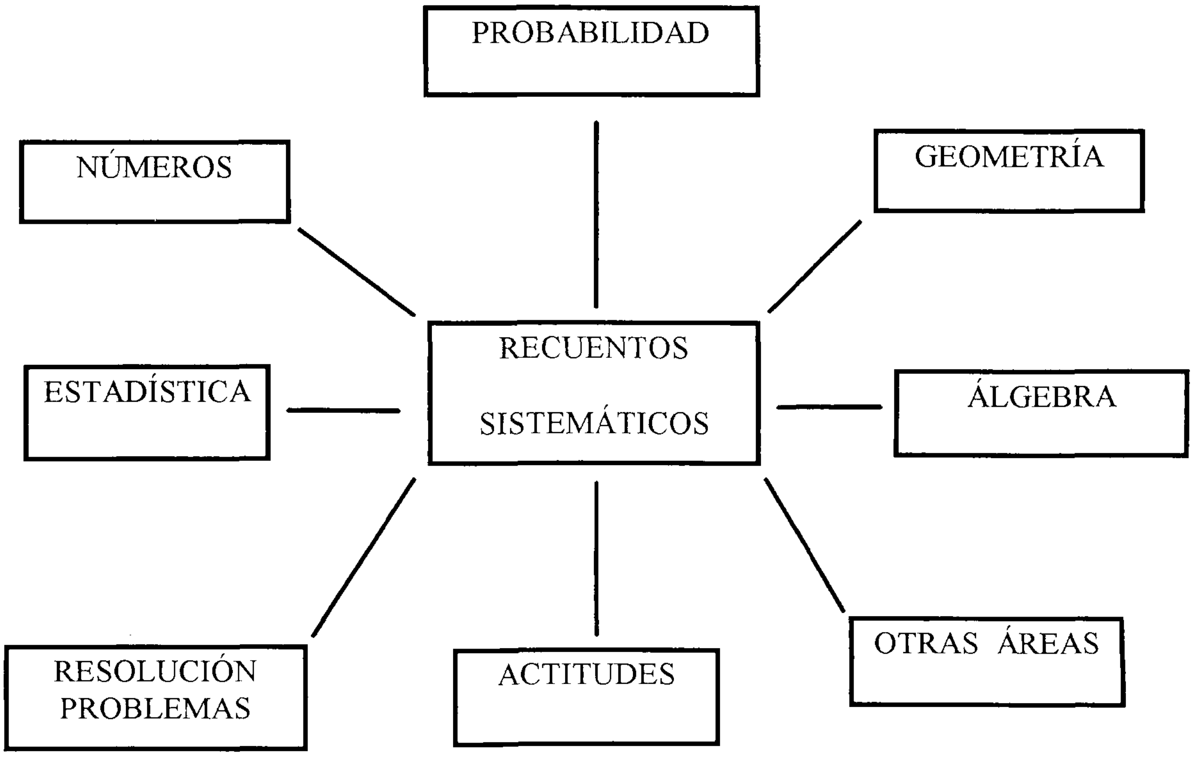
Si en general se ha postulado aquí un esquema de aprendizaje no lineal, tal que los temas sean tratados en espiral para permitir sucesivos contactos de profundidad creciente, en particular ese principio es especialmente importante en este bloque de contenidos. Así, en las carpetas para los alumnos, se propone un contacto desde el principio con una amplia gama de modelos y situaciones probabilísticas y estadísticas, de modo que aparentemente parecen no ampliarse los contenidos de un ciclo a otro. Esta circunstancia no debe interpretarse como una inexistencia de facto de progresión en el aprendizaje, puesto que el mencionado contacto amplio desde el principio no supone un agotamiento de ideas que, aunque sólo fuese por su profundidad y complejidad, son siempre matizables y perfeccionables.

Un criterio esencial para la selección de los problemas propuestos ha sido permitir el contacto de los conceptos propios de este bloque con los de los demás bloques de contenido. Por ejemplo, el apartado de proporcionalidad incluye modelos típicamente probabilísticos y, viceversa, las relaciones numéricas entre tantos por ciento, fracciones y decimales se enriquecen desde su aplicación a la medida de la incertidumbre.

Por otra parte, aunque los títulos de los apartados coincidan a veces en el primer y segundo ciclo, el nivel de abstracción de los mismos no es equiparable en cada caso. En el primer ciclo el trabajo es más comprensivo, intuitivo si se quiere, dedicado fundamentalmente a la asimilación de las relaciones que aparecen, mientras que en el segundo ciclo es factible intentar expresar esas mismas relaciones en términos más abstractos o algebraicos.

Todos los temas fundamentales del bloque se abordan a lo largo de toda la etapa, excepto tal vez el titulado *regresión y correlación*, que es especialmente atendido en el segundo ciclo, específicamente en el cuarto año, sin menoscabo de que algunas de las ideas del tema sean tratadas informalmente en los otros cursos.


GEOMETRÍA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ÁLGEBRA GRÁFICAS
PROBABILIDAD ESTADÍSTICA COMBINATORIA
NÚMEROS
ACTITUDES


PROBABILIDAD
NÚMEROS
GEOMETRÍA
RECUENTOS SISTEMÁTICOS
ESTADÍSTICA
ÁLGEBRA
RESOLUCIÓN PROBLEMAS
ACTITUDES
OTRAS ÁREAS

17. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Una de las funciones de la inteligencia humana es resolver problemas. Otra, todo hay que decirlo, es crearlos.
José Antonio Marina

La resolución de problemas es la actividad matemática más característica. Buena parte de las propias Matemáticas ha sido construida como consecuencia de los esfuerzos invertidos en la resolución de determinados problemas fructíferos, de modo que no resulta sorprendente que los aspectos esenciales de la actividad matemática queden recogidos en la resolución de problemas.

El término *problema* es aquí entendido, en un sentido amplio, como un interrogante que exija la *toma de decisiones* activa del estudiante en diversos niveles:

* Encuadrar o plantear matemáticamente la situación problemática.

* Diseñar la estrategia de actuación.

* Elegir procedimientos y técnicas adecuadas a la situación.

* Verificar la verosimilitud de la solución o de las soluciones, o de la ausencia de soluciones.

* Interpretar los resultados.

* Comunicar inteligiblemente el proceso de resolución, los resultados y su significado a otras personas.

La resolución de problemas tiene en estos materiales un carácter universal y transversal de modo que todas y cada una de las actividades que se proponen en los distintos bloques son, en un sentido más o menos estricto, *problemas* que se proponen en conexión con los conceptos y técnicas matemáticas que se estén abordando en ese bloque. Esta continua actividad de resolución de problemas es inseparable de la reflexión sobre los procedimientos y métodos empleados en la resolución de cada caso concreto. La explicitación de las distintas fases que ha supuesto la resolución de un problema y la sistematización de las *estrategias heurísticas* empleadas con éxito, constituye una ayuda y una guía para actuar ante nuevas situaciones problemáticas y para revisar críticamente los problemas ya resueltos.

No obstante, el forzoso desarrollo secuencial del curso puede mermar, y en muchas ocasiones eliminar, el esfuerzo de encuadre o planteamiento matemático que requiere una genuina situación problemática. Así, el planteamiento, la estrategia de resolución y las técnicas necesarias para atacar un problema pueden deducirse en ocasiones más o menos miméticamente de la temática o unidad didáctica que se esté en ese momento abordando. La consecuencia indeseada puede ser el empobrecimiento o anulación de parte, sino de todas, las decisiones a tomar y la mecanización o devaluación en mayor o menor grado de la actividad de *resolución de problemas* que se transforma en una actividad de *realización de ejercicios*.

La carpeta de *Resolución de Problemas* pretende crear las condiciones de laboratorio necesarias para paliar las anteriores limitaciones. Su misión es plantear algunos problemas que no se dejen fácilmente encasillar para cubrir objetivos tales como

- Reconocer problemas matemáticos en situaciones genéricas.
- Formular modelos matemáticos de situaciones *realistas*.
- Diseñar estrategias para resolver problemas.
- Tomar las decisiones necesarias para *atacar* problemas.
- Reflexionar sobre el proceso y las fases que comporta la resolución de problemas.

Los problemas propuestos constituyen, en conjunto, una selección de situaciones apropiadas para desplegar algunas de las estrategias de resolución de problemas más básicas y más generales: simplificación, analogía, particularización, generalización, inducción, razonamiento por reducción al absurdo, análisis de las posibilidades, etc.

La resolución de cada uno de ellos requiere tiempo suficiente para analizar su enunciado y formular matemáticamente la situación, elaborar conjeturas y someterlas a prueba, diseñar la estrategia de actuación y llevarla a buen término, interpretar los resultados y comunicarlos adecuadamente. Debido a este requerimiento de tiempo, tal vez sería suficiente con plantear exclusivamente dos o tres problemas en un curso a la generalidad de los estudiantes, pero este número puede ser incrementado sensiblemente si existen grupos o individuos más activos o aventajados.

Los comentarios a los problemas de la carpeta que se incluyen a continuación requieren tres advertencias previas.

La primera es relativa al estilo de los comentarios. Estos no se ciñen a las soluciones de los problemas sino que hacen hincapié esencialmente en el proceso y las fases de la resolución tal y como las desarrollaron *resolutores reales de problemas*. Se sacrifica pues la concisión que permitiría una exposición formalizada de *las soluciones* en beneficio de la riqueza que aporta la *presentación evolutiva del proceso de resolución*.

La segunda advertencia se refiere a un denominador común a todos los problemas planteados que se cita aquí de una vez por todas para evitar su repetición monótona en cada caso: todos ellos son problemas difíciles. Pero son problemas difíciles no por su complejidad técnica o el bagaje de conocimientos que presuponen sino, esencialmente, porque requieren vencer la resistencia inicial a empezar a pensar y exigen perder el miedo a adentrarse y explorar un territorio aparentemente hostil. Su dificultad es pues más actitudinal que técnica.

Finalmente cabe advertir que la *resolución de un problema* es un proceso vivo que a veces presenta vericuetos insospechados. El papel del profesor, en tanto que experto resolutor de problemas, es vital para animar la exploración de los territorios que se vislumbren interesantes y para ayudar a sortear las trampas y caminos muertos que pueblan los mundos matemáticos. Es imposible capturar en unas pocas páginas la inmensa riqueza conceptual que puede generarse en la resolución de un problema, sobre todo porque en relación simétrica con la actividad de resolver problemas se encuentra la de plantear problemas.

En efecto, existe una fuerte relación entre la capacidad de resolver problemas y la de plantearlos. Tal relación, que está bien establecida en la propia historia de las matemáticas, confiere a la actividad de plantear problemas valores formativos genuinos:

* Estimula la capacidad de resolver problemas.
* Induce un *metaconocimiento* de las matemáticas.
* Establece múltiples conexiones entre los distintos apartados de la matemática.
* Desarrolla la capacidad de comunicación.
* Fomenta la creatividad y la imaginación personal.

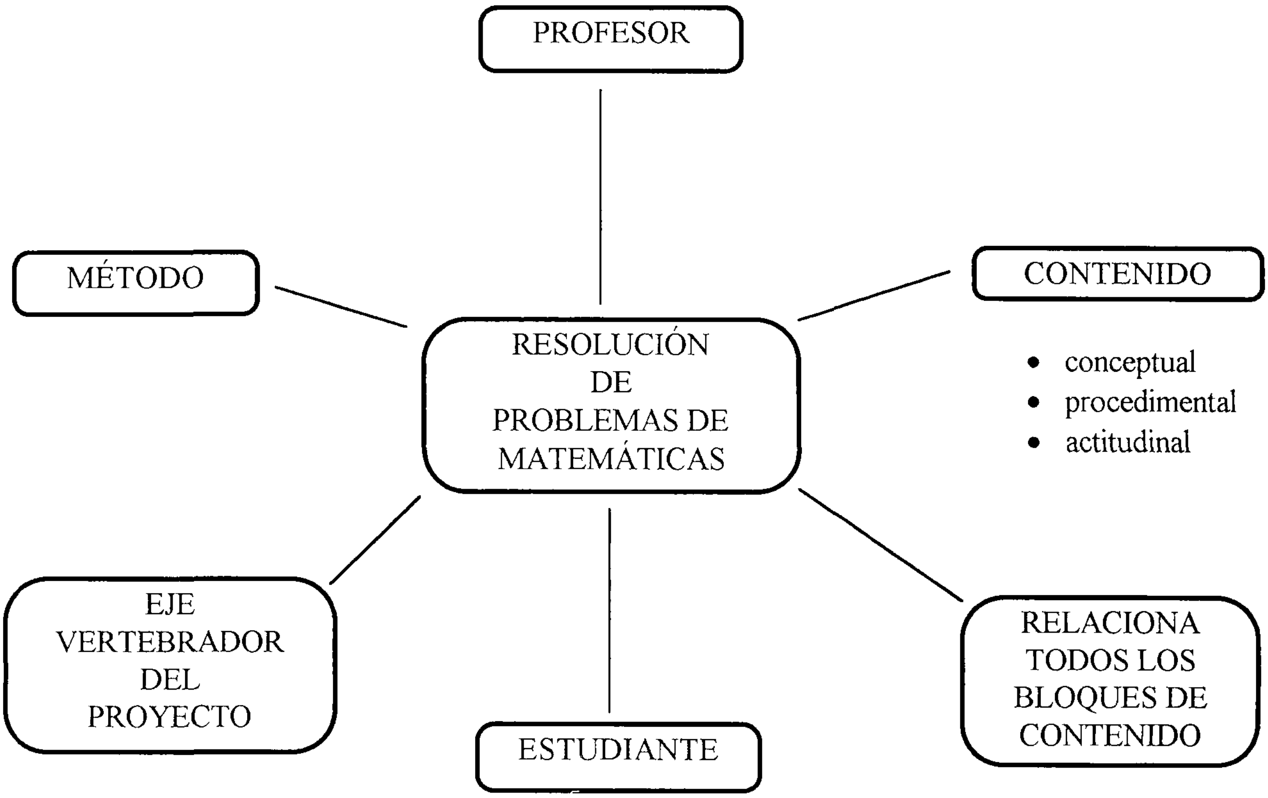
El planteamiento de problemas obliga a una continua toma de decisiones para controlar la completitud y coherencia de los datos, exige precisión lingüística y produce implicación afectiva. En definitiva, la actividad de plantear problemas constituye una importante aliada de la actividad de resolver problemas, cubriendo una serie de objetivos que, complementando, los señalados anteriormente, amplían considerablemente los valores formativos de la resolución de problemas. Entre estas ampliaciones cabe citar:

- Invertir el papel habitual del estudiante frente a los problemas.
- Controlar el alcance de las proposiciones formuladas por uno mismo.
- Analizar y elaborar en bruto información.
- Controlar sistemáticamente datos.
- Expresar con precisión las ideas propias.
- Discutir e interpretar enunciados de problemas.
- Analizar críticamente enunciados de problemas.

El binomio plantear/resolver problemas tiene un complemento natural en un tercer tipo de actividad intelectual, el *análisis de problemas resueltos* por terceras personas, especialmente indicada para desarrollar la capacidad de crítica. A este tipo de actividad está dedicada la última parte de la carpeta de *Resolución de problemas*. Allí, cada enunciado de problema viene acompañado de una o varias soluciones redactadas por estudiantes, con objeto de que puedan ser sometidas a análisis crítico.

Es cierto que para analizar un problema resuelto no es necesario resolverlo previamente porque uno mismo no necesariamente resolvería el problema atacándolo por los mismos flancos. Pero no es menos cierto que sin *estar metido* en cierta forma en el problema no es viable ningún análisis de resultados. Así pues, esta actividad analítica no es, curiosamente, intercambiable con la de resolver problemas, aunque obviamente está relacionada con ella.

En este libro no se comentarán expresamente las resoluciones que se proponen para analizar en la carpeta de *Resolución de Problemas*. Baste indicar con carácter general que han sido seleccionadas con el criterio de presentar una amplia variedad de tipologías, incluyendo distintas aproximaciones a un mismo problema -por ejemplo geométrica versus analítica-, diferentes grados de refinamiento -por ejemplo soluciones expuestas intuitivamente, otras comentadas ampliamente, algunas claramente insuficientes-, y diversas *actitudes subyacentes*, frente al problema: soluciones escuetas al enunciado, formulación de nuevos problemas, aperturas de investigaciones sugeridas por la resolución, presentación mimada de los resultados, etc.



CAPÍTULO VI

TEMAS TRANSVERSALES

Atravesando todos los bloques de contenidos descritos en el capítulo anterior, puede detectarse la existencia de determinados temas que *per se* tendrían entidad matemática suficiente como para articular en torno a ellos una estrategia didáctica propia. Tal es el caso, por ejemplo, de la medida, la proporcionalidad, la simetría, los algoritmos, los juegos o las actitudes matemáticas. En este capítulo se comenta esta pequeña, pero significativa, colección de esos grandes temas de trabajo, caracterizados por su interés intrínseco, su ubicuidad en todos y cada uno de los bloques a lo largo de toda la etapa y por la generalidad de su ámbito de aplicación.

18. LA MEDIDA

Las magnitudes sobre las que fundamentalmente se desarrolla el concepto de medida son la longitud, la superficie, el volumen, la capacidad, la masa, el ángulo y el tiempo. Sobre todas ellas los estudiantes han acumulado cierta experiencia, comparando en situaciones concretas extensiones, amplitudes o duraciones, pero ahora se plantea la necesidad de incrementar el nivel de abstracción estableciendo comparaciones más allá de los objetos concretos con representaciones de los mismos, asignando significado a las unidades y comprobando la potencia descriptiva que poseen esas mismas unidades.

Por ejemplo, de la medida directa de longitudes de objetos a la representación a escala de los mismos y viceversa hay un salto conceptual de tal grado de abstracción que no se puede esperar que se comprenda sino es a lo largo de toda la etapa.

La estimación y el cálculo de medidas son destrezas muy generales, aplicables a un gran número de situaciones, que no deben reducirse a las que provienen de la experiencia directa del *entorno familiar* del estudiante, cuyo *entorno intelectivo* puede abarcar tamaños (astronómicos o microscópicos) o duraciones (escalas geológicas o microcósmicas) fuera del rango directamente observable, pero interesantes para abrir las puertas a la comprensión científica de la realidad.

Por otra parte, las matemáticas de la Educación Secundaria contemplan la necesidad de producir una trasposición del concepto de medida a campos más refinados que los directamente geométricos o temporales, tales como el azar (medida del grado de incertidumbre, cálculo de probabilidades), las razones entre magnitudes (velocidad, pendiente de la recta), el tratamiento de datos (medidas centrales o de dispersión), o fenómenos contextualizados (efectividad en lanzamientos de baloncesto, dificultad de ...); todo ello en aras de enriquecer el concepto de medida acumulando experiencias y proporcionando imágenes mentales variadas.

La clave de esta pretensión es doble. Por una parte, las distintas ocurrencias de fenómenos sujetos a variación son susceptibles de ser comparadas entre sí, abstrayendo las características esenciales para cuantificarlas o medirlas. En la posibilidad de desplegar esta actividad intelectiva descansa parte de la aplicabilidad de las matemáticas, precisamente en el punto en que estas conectan con la concepción científica de la realidad.

Por otro lado, el uso de la medición es una constante social (compraventas, valoraciones, distribuciones horarias, cálculos de distancias y superficies, mezclas, parámetros de salud,...), de modo que es deseable aspirar a una cierta destreza en el manejo de la medida, teniendo en cuenta las múltiples situaciones prácticas en las que interviene. Entre las que figuran en las actividades de las carpetas, cabe citar:

* la realización de *mediciones* directas con instrumentos diversos: reglas, cronómetros, transportadores de ángulos, tramas planas, policubos, goniómetros, ruletas, dados, chinchetas,...

* la formulación de *estimaciones* y la realización *comprobaciones* para forjar una apropiada intuición de los tamaños de las cosas y de las unidades de medida.

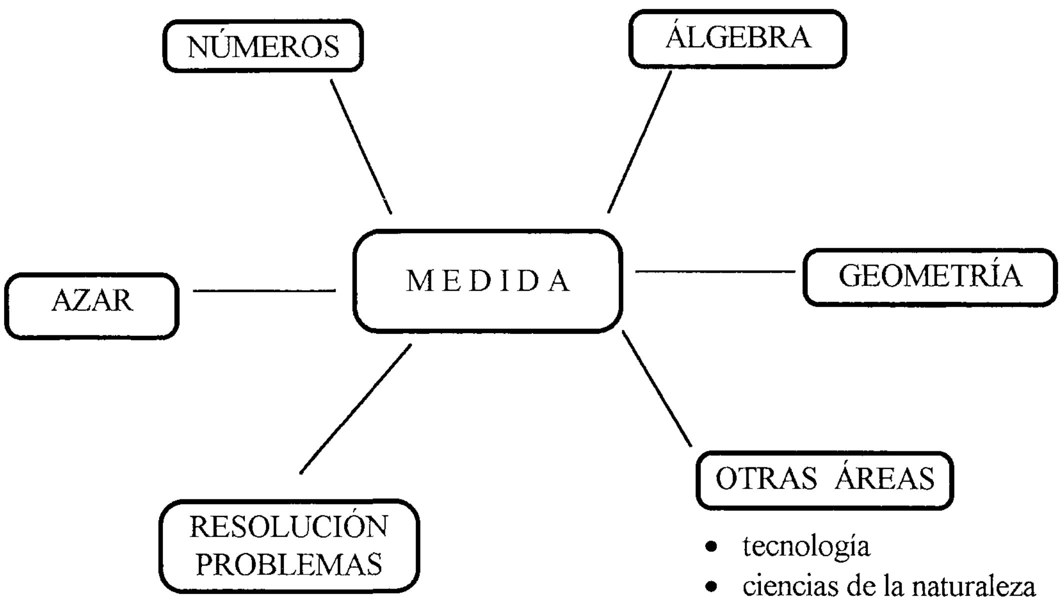
* el recurso a procedimientos indirectos de medición, incluyendo entre tales la construcción de expresiones algebraicas y su utilización para predecir.

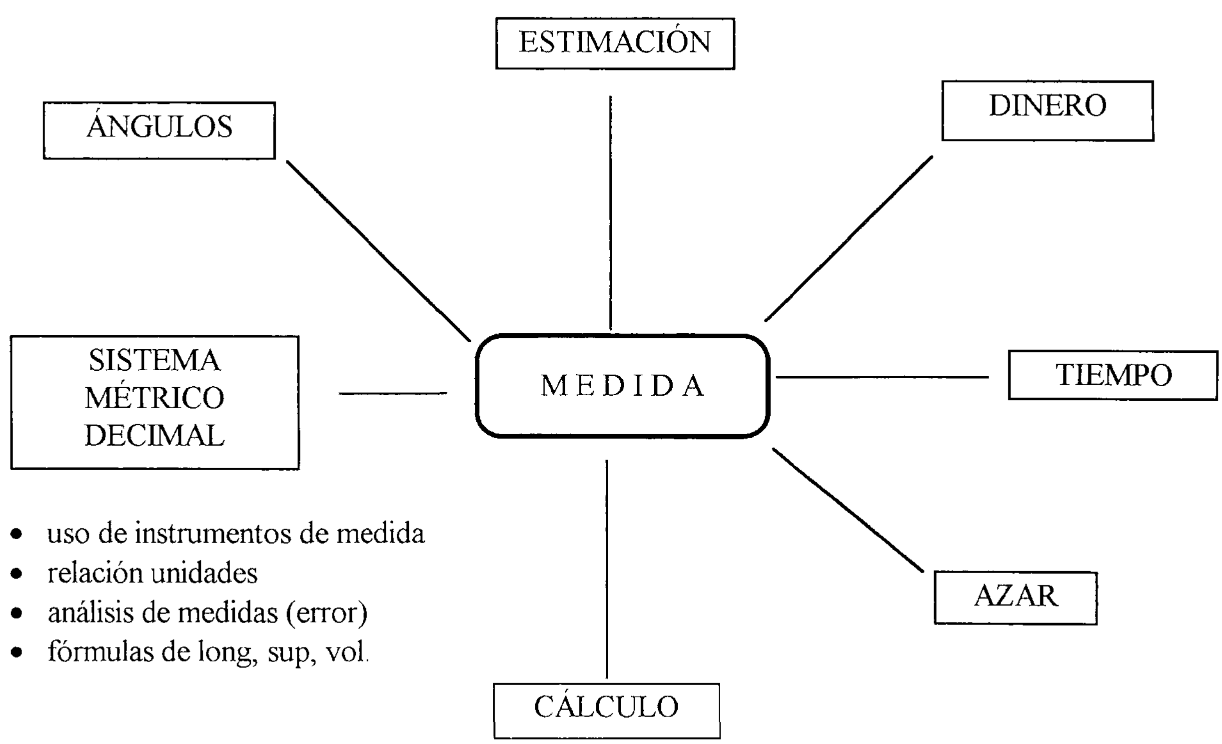
* la construcción física de determinados instrumentos de medición directa o más o menos relacionados con el proceso de medida (por ejemplo, el pantógrafo) ...

* la toma de conciencia de la imprecisión intrínseca a toda medición.

Asociado a la medida hay un vocabulario específico, con símbolos reconocidos y aplicados internacionalmente, que debe ser conocido y utilizado con profusión por el estudiante. En aquellas situaciones que así lo permitan, la especificación de las unidades en que se miden las magnitudes que intervienen debe ser uno de los objetivos explícitamente manifestados. El uso de unidades de medida construidas *sui generis* o de ámbito local no es incompatible con una estandarización progresiva que centre el interés en el sistema métrico decimal y en el sistema sexagesimal (medida de ángulos y del tiempo), en tanto que códigos ampliamente aceptados por la comunidad internacional.

Los esquemas que se incluyen a continuación resumen y describen el papel que juega la medida en las carpetas del alumno en relación con otros elementos conceptuales.


NÚMEROS
ÁLGEBRA
AZAR
MEDIDA
GEOMETRÍA
RESOLUCIÓN PROBLEMAS
OTRAS ÁREAS
• tecnología
• ciencias de la naturaleza


ESTIMACIÓN
ÁNGULOS
DINERO
SISTEMA MÉTRICO DECIMAL
MEDIDA
TIEMPO
• uso de instrumentos de medida
• relación unidades
• análisis de medidas (error)
• fórmulas de long, sup, vol.
AZAR
CÁLCULO

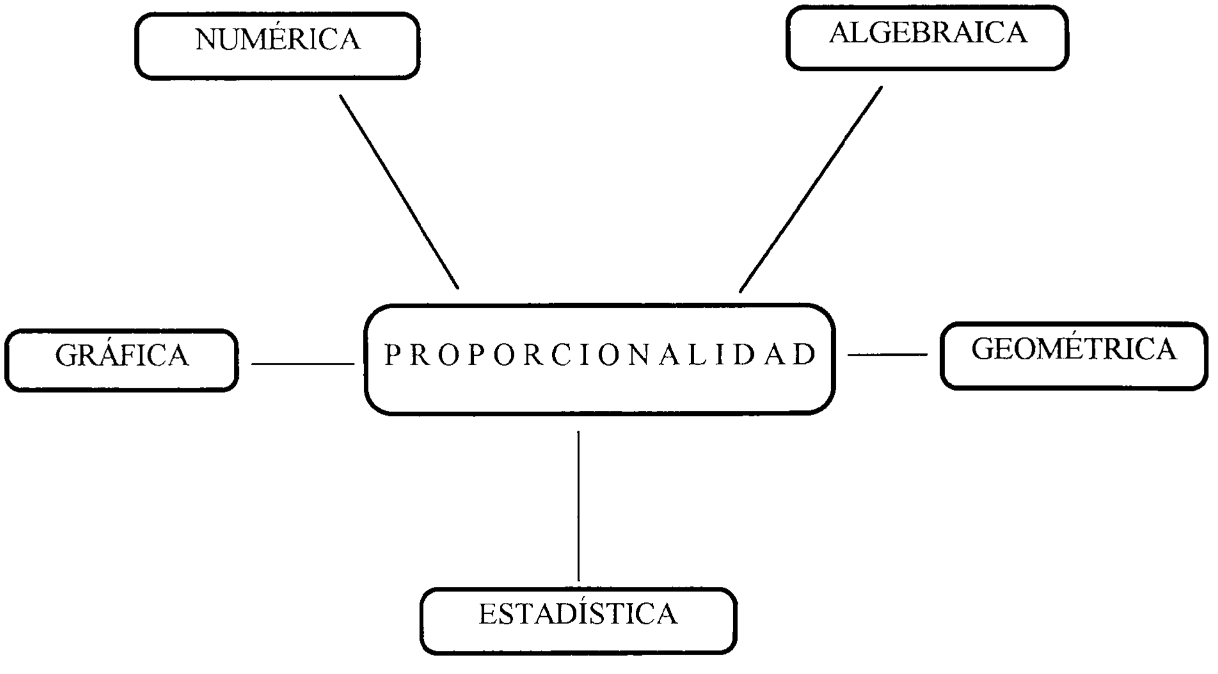
19. LA PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad es un concepto con múltiples facetas y, en consecuencia, complejo. Como ocurre con todos los conceptos complejos, su comprensión será tanto más completa cuanto más contextos distintos se analicen e integren en un esquema capaz, al menos, de disociar las situaciones susceptibles de ser analizadas en términos de proporcionalidad de aquellas que no lo son.

Íntimamente conectadas con la medida, las cuestiones de proporcionalidad se plantean de modo natural cuando se reflexiona sobre los resultados de las mediciones y sobre las eventuales comparaciones que con ellas se pueden establecer.

El estudio de la proporcionalidad admite muchos grados de complejidad dependiendo de los intereses que se persigan. En las carpetas para los alumnos se plantean problemas que abordan desde los casos más simples de proporcionalidad numérica y geométrica, hasta las aplicaciones inmediatas de la trigonometría, que son una consecuencia de la semejanza y por lo tanto de la proporcionalidad.

El papel y la relevancia que juega la proporcionalidad en todos los bloques de contenido queda puesto de relevancia en el siguiente esquema:



20. LOS ALGORITMOS

Algoritmo es todo conjunto finito de instrucciones, ordenadas secuencialmente y exentas de ambigüedades, que definen un procedimiento que resuelve un determinado problema o una colección amplia de problemas del mismo tipo.

El algoritmo que resuelve un determinado problema no es necesariamente único. Cuando un individuo se enfrenta con un problema y lo resuelve, puede generar un algoritmo *propio* capaz de ser aplicado a problemas, en cierto sentido, iguales o parecidos. Tales algoritmos propios suelen ser muy cercanos a los conceptos envueltos por el problema, muy posiblemente serán diferentes a los construidos por otras personas y generalmente son susceptibles de mejora o refinamiento.

No obstante, para poder hablar en propiedad de la existencia de un algoritmo, éste tiene que ser comunicable a los demás y, por lo tanto, con tal grado de precisión que sea hasta cierto punto *independiente* de la persona que lo ejecute, que no necesariamente tiene que comprender ni el proceso que lo ha generado, ni la razón de ser de cada una de las instrucciones que finalmente lo componen.

Sin embargo, en el aula, los algoritmos son fruto de problemas compartidos por todo el grupo y existe entonces una sintonía en torno a lo que se pretende, de modo que la comparación, comprobación y refinamiento de los algoritmos es factible y harto deseable.

La ejecución de algoritmos es una destreza de carácter muy general, hasta el punto que se puede afirmar que vivimos *algorítmicamente*. Hay algoritmos cotidianos (incluso muchos de ellos registrados por escrito explícitamente en forma de instrucciones o reglamentaciones), y otros que tienen que ver más expresamente con el ámbito matemático, por ejemplo, los que permiten la realización de cálculos, escritos o mentales, los que facilitan la realización de medidas, los que dictan la construcción de cuerpos y figuras geométricos o los que describen la estrategia óptima de un juego.

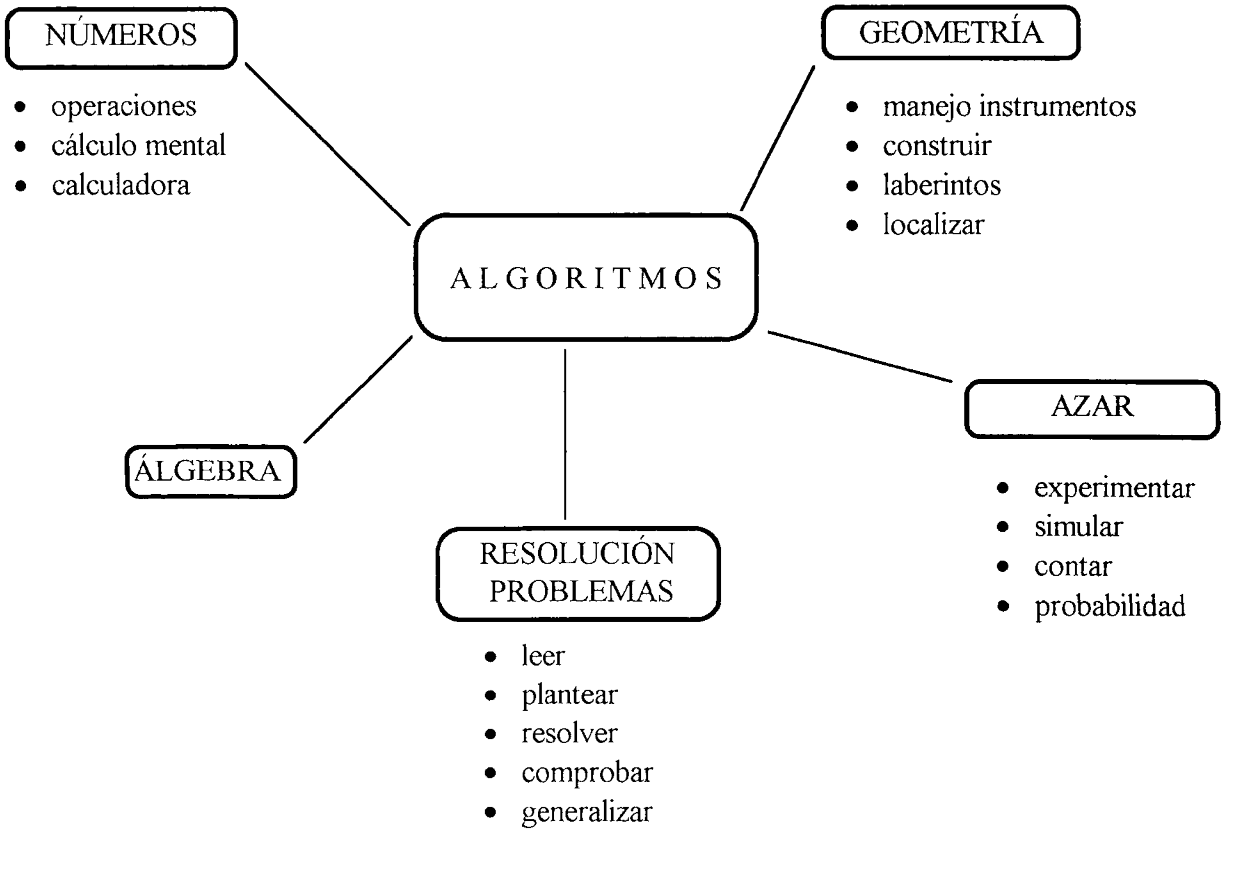
Algunos algoritmos son tan eficaces que se estandarizan, como por ejemplo los algoritmos de corte algebraica o los relativos a construcciones geométricas o cálculos aritméticos. Conviene conocer y ejecutar con destreza los más importantes de estos algoritmos, presentándolos en distintos contextos y relaciones, graduando su introducción y evitando de entrada la presentación en su fase de elaboración terminal. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que el carácter estándar de los algoritmos no es inmutable, algunos se quedan desfasados con el tiempo o caen en desuso, como ocurre por ejemplo con el cálculo de la raíz cuadrada que se puede realizar con más eficacia con calculadora, recurriendo bien a la función correspondiente de la máquina, bien, si se desea situarse en un plano más conceptual, mediante tanteo y error con la tecla de multiplicar. Otro tanto ocurre por ejemplo con los cálculos a base de tablas logarítmicas o trigonométricas que tanto tiempo ocuparon a generaciones enteras de estudiantes.

Por definición, los algoritmos tienen que estar ausentes de ambigüedad, requiriendo en consecuencia gran precisión en la descripción de las etapas que los componen. La precisión y la síntesis requeridas en los algoritmos, contribuyen a enriquecer las potencialidades expresivas y lingüísticas de los estudiantes. Para ilustrar la cuestión considérese el siguiente problema:

> *Cortar un cubo de styropor con una cuchilla de modo que la superficie del corte sea un triángulo equilátero.*

Una vez solucionado, se puede requerir a los estudiantes que comuniquen con precisión la(s) soluciones obtenidas, en otras palabras, que escriban las *instrucciones* necesarias para obtener el triángulo deseado. Este tipo de actividad algorítmica obliga a detallar muchas secuencias implícitas, cuya carencia se pone de manifiesto cuando otro intenta reproducir la solución siguiendo estrictamente las instrucciones escritas por el compañero.

Otra cosa diferente totalmente es el aprendizaje o memorización de algoritmos *de libro*. La propiedad de ser mecanizables de que gozan muchos algoritmos, especialmente los numéricos y algebraicos, resta importancia a aprendizajes que antes requerían mucho tiempo de dedicación. El ejemplo más notorio ha sido ya citado. Si la calculadora obtiene rápida y fiablemente la raíz cuadrada, ya no es necesario en absoluto aprender un procedimiento largo y complicado cuya única misión es calcular la raíz cuadrada. Este ahorro libera tiempo para centrar la atención en los conceptos y para tomar en consideración núcleos temáticos que tienen mayor utilidad práctica y mayor valor formativo, como la educación de la intuición espacial o la experimentación de la incertidumbre, que el mero adiestramiento en la ejecución de instrucciones.



21. JUEGOS

La natural tendencia del ser humano a crear juegos, jugarlos y modificar sus reglas es aprovechada en las carpetas para introducir o profundizar algunos temas matemáticos.

El sorprendente parecido entre la estructura lógica de los juegos -con sus reglas, su desarrollo y sus estrategias óptimas- y de las propias matemáticas -con sus axiomas y sus teoremas- no solo provee de un atractivo pretexto didáctico para motivar a los estudiantes, sino que brinda la posibilidad de emprender exploraciones y efectuar análisis que ayudan valiosamente a forjar conceptos y a consolidar destrezas.

Este tipo de *actividad analítica* -bivalente en el sentido de que actúa a la vez sobre el juego propiamente dicho y sobre la estructura matemática subyacente- contiene en general un intrínseco valor formativo. Por poner un caso, estudiar cómo se transforma un juego cuando se modifican sus reglas, constituye un auténtico proceso de investigación que eventualmente puede conducir a una *generalización* del juego o a una *transformación* controlada del mismo. Pero contribuir a desarrollar la capacidad de generalizar y de transformar estructuras es uno de los objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria.

Un juego es un ejercicio recreativo sometido a reglas. Éstas últimas determinan su esencia -que puede ser muy variopinta: juego de azar o determinista, de estrategia o de rol, competitivo o cooperativo, de mesa o de *calle*, de manos, de pelota, de ingenio, ...- pero el aprovechamiento didáctico de los mismos es una cuestión mucho más compleja que puede estar relacionada o no con la esencia del juego. Desde luego para que exista ejercicio recreativo tiene que haber *recreación*, esto es atracción. Pero esta es sólo una condición necesaria pero no suficiente para que un juego tenga valor matemático en un contexto temático determinado. Para ello tiene que existir una finalidad expresamente formativa que puede oscilar desde la más elemental utilización del mismo como cebo para captar la atención hasta la aspiración de contribuir a desarrollar la capacidad de crítica frente a reglas inconsistentes o pobres, pasando por el diseño de intencionalidades más específicas.

Para ilustrar qué se quiere decir, piénsese por ejemplo en el popular juego de la batalla naval sobre papel cuadriculado. Como es bien sabido, este juego puede ser utilizado como estrategia didáctica para introducir el concepto de *coordenadas cartesianas* del plano. Pero aparentemente no sería aprovechable para tratar temas de azar... *a no ser que* se planifique adecuadamente este aprovechamiento. Así, bastaría cambiar la *arbitrariedad* -es decir, en el fondo, la aleatoriedad implícita- con que cada contendiente elige sus disparos por el diseño de un mecanismo *explícitamente* aleatorio de disparo para que se puedan plantear y resolver problemas (*¿cómo elegir al azar un número natural entre 1 y 10 con un dado cúbico?*) que nada tienen que ver con la geometría cartesiana.

Así pues, la categorización matemática de los juegos es algo tan relativo como que depende, entre otros factores, del propio docente que los selecciona.

22. ACTITUDES MATEMÁTICAS

Entre los objetivos prioritarios de las *carpetas de matemáticas para los alumnos* figuran algunos de tipo actitudinal que se pueden resumir en una única proposición: es imprescindible que el grueso de los estudiantes que finalizan la enseñanza secundaria desarrollen una *actitud positiva* hacia las matemáticas.

Actitud positiva significa, por encima de todo, convicción de que el aprendizaje de las matemáticas no solo no es traumático o aburrido sino que puede llegar a ser placentero y a producir satisfacciones intelectuales. Esta convicción es, por otra parte, la resultante de muchas componentes: la apreciación de la aplicabilidad y potencia de los contenidos estudiados, la toma de conciencia del papel que juega la matemática como instrumento posibilitador del conocimiento profundo de la realidad, la constatación del poder de comunicación del lenguaje matemático, inigualable en cuanto a precisión y sintetización,...

Es obvio que la forja de esta disposición hacia las matemáticas no es una actividad que pueda ser programada para un corto periodo de tiempo, sino que tiene que impregnar los objetivos de todas y cada una de las actuaciones que se emprendan en clase.

Si bien es imposible listar una colección reducida de recetas para propiciar o conseguir este objetivo, alguno de los elementos que catalizan la reacción positiva hacia las matemáticas debe ser tenido sistemáticamente en cuenta. A saber,

* actitud positiva del propio profesor hacia las matemáticas.
* diversificación concienzuda de las exigencias matemáticas según la estimación del profesor de las capacidades de cada alumno.
* reconocimiento de los logros y progresos, aunque sean inicialmente escasos.
* mantenimiento de un clima no traumático de respeto y colaboración en clase
* valoración del trabajo en grupo y de la comunicación entre los estudiantes.
* utilización profusa de calculadoras y recursos didácticos que tiendan puentes entre el mundo de lo concreto y las abstracciones matemáticas.

CAPÍTULO VII

METODOLOGÍA

[...] debemos tener en cuenta que todos poseemos una capacidad mayor de aprendizaje cuando realmente queremos aprender. No podemos ignorar el efecto que en la calidad del aprendizaje tienen la motivación, el interés, la determinación y el deseo de triunfar.
Orton (1990)

23. FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

Sin restar importancia al papel que la selección de contenidos juega en el aprendizaje, cuando tales contenidos han sido ya fijados, el *cómo* deben presentarse y ser tratados deviene en la cuestión esencial para optimizar el rendimiento, la cantidad y la calidad, del aprendizaje. Por otra parte, es razonable que las reflexiones y las decisiones tomadas respecto al *cómo*, influyan forzosamente en la determinación de *cuándo* deben ser presentados los contenidos.

Como ya se ha confesado reiteradamente, aquí se ha supuesto que el estudiante aprende al interaccionar con el medio y tratar de comprenderlo. En buena medida la clase de matemáticas es un entorno artificial en el que las condiciones ambientales pueden ser planificadas por el profesorado para intentar que el aprendizaje matemático sea significativo, entendiendo, como afirman Coll y Solé (1989), que

> *aprender significativamente supone la posibilidad de atribuir significado a lo que se debe aprender a partir de lo que ya se conoce.*

Para dotar de significado al aprendizaje, es fundamental, en consecuencia, conocer las ideas previas que tienen los alumnos sobre el tema que se va a desarrollar. Una estrategia eficaz para conocer lo que saben los alumnos -que puede tener poco que ver con lo que creen o declaran que saben- consiste en proponer actividades motivadoras que provoquen un conflicto con lo que saben, de forma que se vean forzados a formular conjeturas, dar explicaciones, airear lo que piensan y justificar qué hacen y por qué lo hacen. En general, en el desarrollo de tales actividades matemáticas, saldrán a flote gran cantidad de concepciones erróneas, de errores sistemáticos, de fallos en el razonamiento, de deficiencias en las explicaciones, de creencias injustificadas o de métodos infundados. Todo ello, además de natural y en muchos casos previsible, debe ser considerado en su aspecto positivo desterrando cualquier acción punitiva, y debe ser utilizado como el principal motor del aprendizaje.

La atribución de significado a las actividades matemáticas, requiere determinar cuidadosamente la distancia óptima entre lo que saben los estudiantes y lo que se les propone aprender, sin que necesariamente este requerimiento implique la intención de que en todo momento se produzca un avance del conocimiento de forma gradual, paulatina o paso a paso, pues el aprendizaje también se produce mediante conflictos, rupturas o *catástrofes* cognoscitivas que provocan una remodelación o reconstrucción radical de las estructuras conceptuales.

Los *materiales de matemáticas para los alumnos* presentan situaciones que aconsejan, siguiendo las recomendaciones formuladas en el informe Cockroft (1985) prácticas metodológicas variadas que enriquezcan las clases de matemáticas. Así, es apropiada una intervención pedagógica que combine:

· La resolución de problemas matemáticos.
· La realización de trabajos de investigación.
· la realización de trabajos prácticos.
· La discusión entre el profesor y los alumnos, y de los estudiantes entre sí.
. La aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana.
· La consolidación y práctica de las destrezas básicas.
· La exposición por parte del profesor.

Por trabajos prácticos se entiende la realización de proyectos que requieran el uso de materiales y que comporten *toma de decisiones* sobre las acciones a desarrollar, los planes a establecer y su ejecución material hasta la presentación de un producto terminado. Este tipo de trabajos puede ser abordado de forma individual, pero tiene más sentido si se planifica para ser desarrollado en grupos, de modo que se propicie la asunción de responsabilidades concretas dentro de un plan colectivo, se forje el espíritu de colaboración y se busque la toma de acuerdos. Por otro lado, los trabajos prácticos constituyen un vehículo natural para la utilización y construcción de instrumentos diversos, la puesta en práctica de mediciones y la captación de la interacción de la matemática con el mundo tangible.

La discusión entre el profesor y los alumnos, y de los estudiantes entre sí, debe ser habitual en el aula. Contribuir a la capacitación para exponer y defender las ideas propias es uno de los objetivos básicos de la educación secundaria, no solo por su valor intrínseco sino porque es un procedimiento de asegurarse de que el conocimiento es compartido, de sacar a la luz los esquemas conceptuales de los estudiantes, de contrastar el grado de afianzamiento de las concepciones y de observar la capacidad de comunicar las imágenes mentales que se van forjando los estudiantes. El diálogo con el profesor es para éste una fuente inapreciable de datos.

La consolidación y práctica de las destrezas, así como la formalización de conceptos y técnicas, es más efectiva si se varían los contextos de aplicación que si se sostiene un monopolio de lo abstracto. Un ejemplo. La relación fracción-decimal-porcentaje y la visualización y representación de la relación parte-todo, es tan compleja y se presenta con tantos matices (situaciones puramente numéricas, geométricas, de medida, probabilísticas, estadísticas,...), que la consolidación de las destrezas asociadas no debe entenderse como el final de un largo proceso, que todo el mundo desearía por cierto que ya hubiese terminado cuando recibe a sus alumnos el primer día de clase, sino como el proceso mismo que arranca desde la presentación de las primeras situaciones numérico-geométricas y que no tiene fin.

La intervención del profesor para explicar constituye una estrategia necesaria desde muchos puntos de vista. La explicitación a comienzo del curso de las intenciones que se tienen para el desarrollo de las clases de matemáticas, la presentación de las actividades que se proponen, la discusión de los criterios que se utilizarán para la evaluación; constituyen explicaciones imprescindibles para crear en la clase un clima de respeto y trabajo que posibilite un acercamiento activo de los estudiantes a las matemáticas. Por otro lado, la formalización de los conceptos, la introducción de terminologías estandarizadas, en definitiva, la concordancia entre el conocimiento construido y compartido por la clase y el de la comunidad matemática, científica o social, debe ser asegurada por el profesor por medio de aclaraciones, matizaciones y explicaciones. No obstante, no siempre debe ser toda la clase la destinataria de las explicaciones, a veces se deben dirigir a grupos pequeños de trabajo o a un único interlocutor.

Si bien no es fácil determinar sin referencias concretas cuál es el momento oportuno para extenderse en explicaciones, ni qué destinatario (el individuo, el grupo o toda la clase) es el procedente, parece aplicable aquí el principio de apelar a la moderación: la explicación tiene por objeto dirigir el trabajo de los estudiantes y no debe ser confundida con un soliloquio del profesor.

La actividad en el aula debe ser planificada de modo que estas ideas previas puedan salir a flote para poder actuar sobre ellas. Para ello tienen que cumplirse varias condiciones: el estudiante debe aceptar su papel de protagonista; la interacción entre el docente y el estudiante debe generar en el aula un clima de respeto, de confianza en las propia capacitación para actuar matemáticamente, y de aceptación mutua que propicie la libre circulación de las ideas y la discusión en profundidad de las mismas. En otros términos,

> *El concepto de aprendizaje significativo pone de relieve la acción constructiva de la persona que aprende, acción que consiste en un proceso de atribución de significados mediante el concurso del conocimiento previo [...]. No es razonable esperar que los alumnos construyan de una vez por todas los significados correspondientes a un nuevo contenido de enseñanza cuando se les presenta por primera vez, aunque este se plantee y se ejecute a la perfección. [...]. Los mecanismos y estrategias que adopte la intervención pedagógica deben estar regidos por un principio general: la acción didáctica debe partir del bagaje, de los conocimientos previos del alumno, pero no debe quedarse en este punto, sino para hacerle avanzar mediante la construcción de aprendizajes significativos en el sentido que marcan las intenciones educativas.* (Coll y Solé, (1989))

El profesor debe desempeñar un papel dual, de observación sistemática, por un lado, y de intervención consciente y diferenciada por otro lado. En palabras de Kamii (1986), la misión del profesor es

"[...] animar(los) [...] a que tengan sus propias opiniones y dejar que ellos mismos decidan cuándo hay otra idea mejor. Las ideas erróneas han de ser modificadas por el(los), no pueden ser eliminadas por el maestro [...]. Debatir la superioridad de una respuesta sobre otra es bueno porque (les) anima [...] a pensar crítica y honestamente, relacionando entre sí distintas opiniones. En estos debates, [...] modifican sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra manera que es mejor."

De todo lo expuesto no debe extraerse la conclusión de que el área de Matemáticas queda reducida a una colección de orientaciones metodológicas que desplazan las Matemáticas a un rango secundario. Todo lo contrario:

Centrar la enseñanza en favorecer la evolución de los sistemas intelectuales que posibilitan el conocimiento no quiere decir olvidar los contenidos del aprendizaje, sino, por el contrario, dar un nuevo sentido a esos contenidos, planteándose la exigencia didáctica de que el alumno, lejos de adaptar los conocimientos que se le intentan trasmitir a su sistema, modifique éste para que los conocimientos puedan serle comprensibles. (Moreno (1986)).

24. MATERIALES Y RECURSOS

Por material de trabajo o recurso para el aula entenderemos todo elemento que el profesor utiliza o pone a disposición del estudiante con objeto de desarrollar una estrategia didáctica que supuestamente propiciará el aprendizaje.

Estableceremos aquí una distinción entre los materiales que denominaremos *escritos* -las carpetas para el alumno- y el resto -que no se facilita con ellas- , pero dejando por sentado que tal clasificación no refleja la multiplicidad de conexiones que hay entre uno y otro de los dos tipos: los materiales escritos se apoyan constantemente en otro tipo de materiales y, viceversa, el trabajo con determinado tipo de materiales puede iniciarse o desembocar finalmente en actividades planteadas por escrito.

Los libros destinados al estudiante articulan los contenidos en forma de problemas que tratan cíclicamente los temas, no dándose éstos por agotados en su primera presentación, graduando paulatinamente su complejidad y la densidad de las conexiones que se establecen entre unos y otros. Contienen una gran cantidad de actividades propuestas que intentan atender la diversidad de intereses, motivaciones, capacidades y formación que inevitablemente existe en las aulas. Cada profesor, dependiendo de la situación concreta del grupo para el que programe, deberá atribuir a las actividades que seleccione el papel de troncales, complementarias, de consolidación o de ampliación, tomando conciencia de la escasa eficacia didáctica que tienen los tratamientos sistemáticamente uniformes.

El material escrito para el alumno se distribuye en bloques, detallados para cada uno de los cuatro cursos de secundaria. Los bloques están concebidos de modo que permiten un trabajo significativo y plural, pero sin ser tan extensos como para producir sensación de cansancio o monotonía. La amplitud de los materiales escritos permite -y de hecho así ha ocurrido en el proceso de experimentación- programaciones distintas en centros distintos, tal y como se muestra en el anexo.

Las actividades de matemáticas propuestas en esos materiales, están indisolublemente ligadas a la utilización de una gran variedad de materiales y recursos que juegan un importante papel conceptualizador al mediar entre lo concreto y lo abstracto. El trabajo con materiales, especialmente con aquellos que son directamente manipulados, constituye la mejor forma de introducirse en los temas matemáticos y de crear una disposición activa hacia los mismos, creando un estilo de trabajo que permite al profesor la toma de decisiones para orientar el desarrollo de la clase en la dirección que apunte como más prometedora. Los materiales didácticos físicamente presentes en el aula son, por una parte, catalizadores del proceso de abstracción, que se catapulta de modo atractivo desde lo concreto y no desde el vacío; y por otra parte, máquinas generadoras de problemas y sugeridoras de investigaciones.

Con materiales manipulables, la matemática se convierte en tangible, los conceptos se visualizan y las ideas pueden ser sometidas a experimentación y contrastación. Las imágenes mentales sustentadas en experiencias de trabajo con materiales se pueden manipular mentalmente con tanta seguridad y certeza como los objetos físicos para ampliarlas, enriquecerlas, estandarizarlas y conectarlas con firmeza a otros conceptos y técnicas.

Todos los materiales requeridos para la utilización de las *carpetas del alumno* están comercializados a bajo precio o son fácilmente construibles. Habitualmente los problemas propuestos sugieren su utilización individual, pero a veces conviene un uso colectivo: por ejemplo, las trasparencias y diapositivas son materiales para compartir que no se *manipulan* con las manos sino con la vista.

Existen recursos didácticos para casi todas los temas matemáticos de la Educación Secundaria, algunos de ellos de gran versatilidad, como la calculadora o como los cubos que, sean de madera, de plástico o de styropor, sirven para estudiar y construir cuerpos espaciales, para simular sorteos o para analizar pautas y regularidades numéricas.

Es preciso advertir que el uso de materiales manipulables obliga a reservar un cierto tiempo, menos del que pueda parecer pero desde luego no nulo, para cubrir una fase imprescindible de familiarización con el recurso didáctico. Por ejemplo, el día que se llevan a clase por primera vez espejos para estudiar ángulos o simetrías los estudiantes se llevan una sorpresa. Resulta chocante contemplar un objeto tan cotidiano en un escenario tan alejado del habitual y se desencadena espontáneamente una sucesión desordenada de experiencias infantiles: mirarse, mirar a otros, pintarse los labios, jugar con el reflejo, libre juego con el espejo, dirigir el reflejo del sol a los ojos del profesor,... Esta reacción no es enfermiza sino natural y predecible: *siempre ocurre*. Incluso cuando los estudiantes son adultos. También cuando los espejos se presentan por primera vez a un colectivo de profesores de matemáticas.

El tiempo empleado en la familiarización con un recurso didáctico no es una inversión a fondo perdido: se exploran las posibilidades del recurso, se consume la capacidad de sorpresa y se asimila la ampliación conceptual supone descubrir que tal objeto va a ser utilizado para aprender matemáticas. En definitiva, se sientan los cimientos para que sea posible una conceptualización rica en imágenes

Recursos como la calculadora científica, la calculadora gráfica o el ordenador, abren la posibilidad de estudiar temas que de otro modo serían inviables o dificultosísimos, porque requerirían inversiones desproporcionadas de tiempo en cálculos o representación de gráficas. Tal es el caso por ejemplo de la Estadística, en la que el tratamiento de datos subyacente se hace verosímil solo si se recurre a medios mecánicos de cómputo, o del análisis funcional elemental.

25. INTERDISCIPLINARIEDAD

En la Educación Secundaria Obligatoria existen una serie de temas que son abordados en paralelo por distintas áreas. Como principio general, sería deseable un tratamiento simbiótico de tales temas entre todas las áreas, tratamiento que podría requerir cierta coordinación de secuencias. Este requerimiento no debe ser asumido por los docentes como una penalidad sino más bien como una oportunidad de colaboración para adquirir una visión más integral del proceso formativo de sus estudiantes y para ampliar las miras en aspectos tan importantes como las líneas de actuación metodológica y los criterios de evaluación, que superarían entonces en cierta medida el ámbito de cada área concreta

Los temas que se planifican conjuntamente desde varias áreas permiten una conceptualización mucho más completa y un enriquecimiento de contextos que supone un acercamiento amplio y no parcelado a determinados aspectos de la realidad..

Ningún tema es, por otra parte, intrínsecamente interdisciplinar o no. La interdisciplinariedad es un enfoque didáctico creado por el equipo de profesores y por lo tanto, al menos a priori, siempre es posible en algún grado. No obstante, algunos temas en especial han sido objeto de tratamientos interdisciplinares con mayor intensidad, han acumulado mayores experiencias en este sentido y admiten en consecuencia más fácilmente planteamientos plurifacéticos. Entre éstos se pueden citar:

* La proporcionalidad numérica y geométrica está presente (escalas y mapas, por ejemplo) en las Ciencias Sociales, la Tecnología y la Expresión Plástica y Visual.

* Las gráficas, funcionales o estadísticas, son utilizadas profusamente en las Ciencias de la Naturaleza y las Ciencias Sociales.

* La Geometría del plano y del espacio (uso de instrumentos de dibujo, construcciones geométricas, teselaciones,...) es también parte importante del área de Expresión Plástica y Visual.

* El texto discursivo y la argumentación lógica, la comprensión y la expresión de forma general y en contextos matemáticos en particular son también objeto de estudio en el área de Lengua (Castellana, Valenciana, etc.).

* Los procedimientos y formas de hacer de la Estadística (encuestas, índices, parámetros,...), nutren parte de las Ciencias Sociales.

26. DIVERSIFICACIÓN

Cada día está más claro que la calidad de un sistema educativo está en función de la diversidad formativa que puede ofrecer. Salvando las distancias, esa misma ley es aplicable a cada clase concreta. La escasa eficacia didáctica de un tratamiento sistemáticamente uniforme a todos los alumnos de un grupo no sólo es algo previsible sino también demostrado. La *uniformidad* acaba siendo siempre un despilfarro tanto de las energías del profesor como de las potencialidades de los alumnos.

Los materiales de matemáticas para el alumno han tenido bien presente este principio, y contienen actividades con distintos grados de dificultad técnica y de complejidad conceptual para intentar atender la diversidad de intereses, motivaciones, capacidades y formación que inevitablemente existe en las aulas.

Para finalizar, conviene dejar constancia de que, a pesar del estado incipiente de los estudios relativos a esta cuestión, parece existir un cierto consenso en torno a la caracterización de las personalidades en proceso de aprendizaje matemático en dos tipos básicos:

- el dominado por la verbalización, ducho en lenguaje, propio del razonamiento paso a paso y asociado a la actividad cerebral *levohemisférica*.

- el dominado por la visualización, la representación espacial, la totalización o concepción holística de las situaciones y asociado a la actividad cerebral *dextrohemisférica*.

Aunque puede ser prematuro aventurar qué consecuencias tendrá para la enseñanza de las matemáticas esta tipificación, no resulta arriesgado tenerla presente, aceptando que personas distintas pueden sentirse más cómodas *visualizando* que *verbalizando*, o viceversa, y que, en particular, el trabajo o representación espacial puede ser un punto de arranque apropiado para la toma de contacto con los conceptos matemáticos más abstractos, tal y como sugiere (Dickson (1991), pág. 16):

> *Los alumnos no son igual de eficientes en ambos tipos de actividad y en muchos casos encuentran más accesible y grato un enfoque espacial y que éste enfoque de pie a la introducción de vocabulario adecuado y provisto de significación, valorando el importante papel de la comunicación oral espontánea en el aprendizaje de las matemáticas.*

En consecuencia,

[...] salta a la vista que uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática habrá de ser la capacitación de los niños para expresar verbalmente sus ideas. Una

capacitación que supone la aptitud para hablar y oír hablar de matemáticas, lo mismo que para leer y escribir acerca de ellas. (Dickson (1991)).

Tercera parte

COMENTARIOS A LAS CARPETAS DE 3º

CAPÍTULO VIII

NÚMEROS

27. ORGANIZACIÓN DE LA CARPETA

El bloque de números se halla dividido en doce apartados temáticos (*La Calculadora, Cálculo mental, Potencias y raíces, Números grandes y pequeños, Propiedades geométricas de los números, Cálculo aproximado, Números enteros, Fracciones y repartos, Números irracionales, Fibonacci y Tartaglia, Los números y el dinero y Números en la prensa*) que proponen problemas adecuados para realizar aproximaciones diferentes a los distintos campos numéricos, extendiendo el conocimiento adquirido de los números y sometiendo a análisis la conceptualización que de ellos tienen los estudiantes.

Los problemas propuestos están numerados correlativamente y constituyen un extenso *banco de datos* de situaciones numéricas del que cada profesor podrá extraer la selección que considere oportuna dependiendo de la programación que haya efectuado. Esta versatilidad no debe ocultar que la única utilización posible de estos problemas que mantenga la coherencia con el diseño de conjunto de los materiales debe garantizar, con mayor o menor intensidad, el mantenimiento de las siguientes propiedades:

a) la utilización de la calculadora como instrumento de cálculo y, sobre todo, como laboratorio para introducir conceptos y reflexionar sobre ellos. Especialmente indicados para cubrir este aspecto son los apartados titulados *La Calculadora, Potencias y raíces, Números grandes y pequeños y Los números y el dinero.*

b) la utilización instrumental de los números en determinados contextos que añaden la necesidad de *comprender* a la de calcular. Actividades apropiadas se pueden encontrar en los apartados *Números grandes y pequeños, Propiedades geométricas de los números, Fracciones y repartos, Los números y el dinero y Números en la prensa*

c) el estudio de pautas y regularidades numéricas, detectando, describiendo y generalizando propiedades aritméticas. Ejemplos abundantes se proponen en *Potencias y raíces, Propiedades geométricas de los números y Fibonacci y Tartaglia.*

d) la reflexión comedida sobre la naturaleza de los números y las formas de representarlos más usuales. Véanse a este respecto los apartados *Potencias y raíces, Números grandes y pequeños, Números enteros, Fracciones y repartos y Números irracionales.*

e) la reflexión comparativa sobre los procedimientos de cálculo más utilizados, sus cualidades y sus limitaciones. Esta reflexión se deja plantear con especial facilidad en los problemas de las secciones tituladas *La Calculadora, Cálculo mental, Potencias y raíces, Números grandes y pequeños, Cálculo aproximado y Los números y el dinero.*

28. LA CALCULADORA

No cabe ninguna duda de que la calculadora es por excelencia el recurso más universalmente utilizado para realizar cálculos, sean éstos simples o complejos, cortos o largos. Su universalidad -debida tal vez a su fiabilidad y sencillez- supera con mucho a la difusión que en su día tuvieron la regla de cálculo, las tablas de logaritmos, los algoritmos de los algebristas renacentistas o el ábaco. A menos que incomprensiblemente se desee cerrar los ojos ante este hecho evidente, no se puede, ni se debe, concebir el aprendizaje del cálculo con números sin aprender simultáneamente el manejo de la calculadora en todos sus aspectos: cómo se introducen los datos y los operadores, cómo presenta los resultados, cuándo calcula exactamente y cuándo redondea. El aprendizaje de este tipo de conocimientos es responsabilidad explícita del área de matemáticas, constituyendo una de las más relevantes contribuciones de ésta a la formación cultural de los estudiantes de secundaria.

Este apartado del bloque de Números contiene un conjunto de actividades destinadas a explorar con un poco de minuciosidad la calculadora *concreta* que cada estudiante tenga. No es en absoluto necesario -en muchos casos ni siquiera es conveniente- que todos los alumnos tengan la misma marca de calculadora, exactamente por el mismo motivo que uno espera aprender en la autoescuela a *conducir* y no a conducir el modelo X de la marca de automóviles Y. De hecho una misma persona cambiará varias veces en su vida de calculadora de bolsillo y utilizará ocasionalmente las de otras personas, sin que esto tenga que suponer cada vez empezar desde cero su formación técnica en este campo.

La disposición de las teclas, las memorias, el procedimiento de borrado, los paréntesis, la prelación de los operadores, la reiteración de operaciones, la notación científica, los tantos por ciento y muchos otros *detalles* pueden variar de unos modelos a otros. Esta variación es una riqueza y no un castigo, aunque pueda producir a veces resultados *aparentemente* diferentes en los cálculos o se necesiten procedimientos de actuación *parcialmente* no coincidentes.

Si así se considera oportuno, se puede también optar por distribuir las actividades de este apartado entre las de otros apartados de este mismo bloque o de otro bloque de trabajo. Por ejemplo, el problema 12 encajaría bien entre las actividades de álgebra o en el estudio de funciones. De todos modos, está constatado que da buen resultado dedicar algo de tiempo a una familiarización explícita con la máquina. La duración y concentración de esta dedicación dependerá un poco de los hábitos preadquiridos por los estudiantes en el manejo de la calculadora científica. El objetivo no es aprenderse todo el manual de la máquina ni siquiera aprender qué hacen todas y cada una de sus teclas. Tiempo habrá en todo el curso para sacar partido creciente de este instrumento y para asentar una eficaz relación entre el hombre y la máquina en la que sea aquel el que juegue el papel dominante.

A modo de ejemplo, y con las salvedades hechas sobre la dependencia entre la solución concreta y el tipo de calculadora, presentamos a continuación un modelo de respuesta para el problema 11:

La suma de números consecutivos de 1 hasta 100 requiere pulsar sólo tres teclas distintas

$$\boxed{1} \quad \boxed{M+} \quad \boxed{+}$$

conforme a la siguiente secuencia

$$\boxed{1} \quad \boxed{M+} \quad \boxed{1} \quad \boxed{+} \quad \boxed{+} \quad \boxed{M+} \quad \boxed{M+} \quad \ldots\ldots \quad \boxed{M+}$$

Otras soluciones menos económicas en número de teclas empleadas son obtenidas con soltura por los estudiantes.

29. CÁLCULO MENTAL

El cálculo mental es el reverso de la moneda del cálculo con máquina. Todas las indicaciones didácticas que se hicieron en el apartado anterior son válidas pues para este. Concretamente, el cálculo mental, como el cálculo mecánico, no se puede acotar a un momento del tiempo, sino que se desarrollará en todo momento y en cada actividad matemática que se resuelva.

Las actividades propuestas en este apartado no agotan por lo tanto el cálculo mental, sino que reservan un poco de tiempo para reflexionar *específicamente* sobre métodos particulares de completar algunos cálculos mentales.

Hay una moraleja o conclusión general que se pretende extraer: *los procedimientos y algoritmos que se utilizan para calcular con lápiz y papel no son siempre los más efectivos para calcular mentalmente.* Lo más curioso es que los métodos de cálculo mental más eficaces son los que uno mismo inventa, del mismo modo que la regla nemotécnica más útil para recordar números -por ejemplo telefónicos- es la creada por cada individuo explotando su propia experiencia y estableciendo complejas -y a veces difícilmente justificables- asociaciones no trasferibles a terceras personas.

Otros procedimientos de cálculo mental son atajos o pequeños trucos que son usados, o pueden ser aprendidos y usados, con facilidad. He aquí algunos de entre una infinidad, formulados como lo suelen hacer los estudiantes, es decir en términos extremadamente particulares, pero fácilmente generalizables a otras circunstancias:

Para multiplicar por 5 se añade un 0 y se divide por 2
Para multiplicar por 6, se multiplica sucesivamente por 2 y por 3.

Para restar 999 se resta 1000 y se añade 1.
Para multiplicar un número por 101 se añaden 2 ceros y se suma al resultado el número.
Para dividir por 25 se divide por 100 y se duplica dos veces el resultado.
... ...

Facilitar la oportunidad de que este tipo de enunciados sean descubiertos, expuestos en la clase, justificados y practicados, es el objetivo de este apartado.

30. POTENCIAS Y RAÍCES

En este apartado se propone una toma de contacto con algunos aspectos fenomenológicos de las raíces y las potencias de exponente no natural. Esta introducción no pretende ser en absoluto exhaustiva y el profesor debe ser consciente de la complejidad conceptual que conlleva esta temática, en la que subyace continuamente el número real y el choque conceptual que supone la apariencia de la representación de los números reales (v.gr. $\sqrt{2}$) como *operaciones inacabadas*.

Entre los aspectos fenomenológicos mencionados cabe citar específicamente los siguientes:

La raíz cuadrada de los números naturales es un número representable geométricamente como la longitud de un segmento. (*problema 20*).

Las propiedades de las potencias de exponente natural permiten extender la potenciación a exponentes enteros (*problema 21*) y a exponentes racionales (*problemas 22 y 23*).

La extensión de la potenciación a exponentes decimales da lugar a una operación efectuable mecánicamente (teclas X^Y y $X^{1/Y}$ de la calculadora científica) y que proporciona un resultado de magnitud que no es arbitraria. (*problemas 23, 24 y 25*).

Las potencias son operaciones y su resultado se puede por lo tanto estimar razonando sobre el significado de la operación sin necesidad de calcularlo con precisión (*problemas 26 y 27*).

Junto a esta muestra iniciática, se plantean algunas cuestiones que requieren manejar radicales sencillos para describir medidas o pautas de regularidad. Así por ejemplo, en el *problema 20* se necesita descubrir que sólo los radios de la espiral cuyo ordinal coincide con el duplo de un cuadrado perfecto (2, 8, 18, 32, 50, ...) contienen un número entero de veces al segundo radio; y en el *problema 29* se necesita inducir por observación y comprobación que *el cuadrado de la suma de las raíces cuadradas de dos números consecutivos, coincide con el resultado de coger los dos números, sumarlos, elevarlos al cuadrado, restar una unidad y sumar la raíz cuadrada de este último número y su siguiente:*

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{(a+b)^2-1}+\sqrt{(a+b)^2}$$

O mucho más elegantemente:

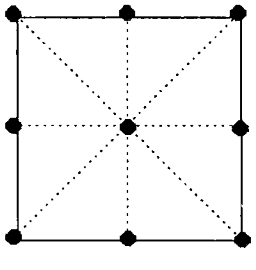
El cuadrado de la suma de las raíces cuadradas de dos números consecutivos cualesquiera es la suma de las raíces cuadradas de dos números consecutivos. Además, estos últimos números son, uno, el cuadrado de la suma de los números consecutivos iniciales y, el otro, su anterior:

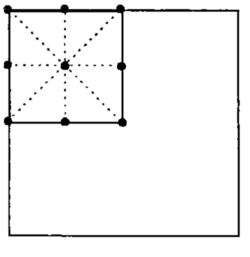
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)^2=\sqrt{b-1}+\sqrt{b}$$

con $b = (a+a+1)^2$.

Los problemas 20, 28 y 29 requieren algunas indicaciones.

El *problema 20* necesita combinar un recuento sistemático con un razonamiento métrico. La primera cuestión es inmediata: dos puntos situados en un cuadrado estarán a la mayor distancia posible ($\sqrt{2}$) si se colocan en vértices opuestos. Supónganse ya fijos esos dos puntos. Si se añade un tercer punto *simultáneamente* lo más alejado posible de los dos anteriores, deberá estar sobre la mediatriz de aquellos: en cualquier otra posición está más cerca de alguno de los dos. Así este tercer punto deberá ser colocado en uno de los vértices libres del cuadrado, de modo que la distancia entre los dos puntos más cercanos es ahora 1. Otro tanto ocurre con el cuarto punto que se coloca. El quinto claramente deberá estar en el centro del cuadrado, siendo $\sqrt{2}/2$ la distancia mayor posible entre los dos puntos más cercanos.





La reiteración de este argumento resuelve el problema para los nueve puntos que se indican en el enunciado.

El problema tiene una extensión natural. *¿Se puede decir algo acerca de esta misma situación cuando se continúa colocando puntos en el cuadrado sujetos a la misma condición?*

La respuesta es afirmativa e interesante por varios motivos. En primer lugar porque, tal y como sugieren las figuras, la situación se reproduce a escala menor, esto es admite un *análisis recursivo.* En segundo lugar porque plantea un problema comunicativo: ¿cómo describir lo que geométricamente *se ve*?. Confeccionar una tabla es una posibilidad:

distancia	√2/2	1/2	√2/4	1/4	√2/8	1/8	√2/16	....
núm. puntos	1	4	4	12	16	36	32	....

que deja traslucir la pauta subyacente, pero no la única.

El *problema 28* constituye esencialmente una referencia histórica. Numéricamente es resuelto sin dificultad por los alumnos con calculadora, dotando de significado a la *raíz cúbica*. Sin embargo, para que se entienda bien *por qué* la duplicación del cubo fue un problema conviene combinar esta actividad con la titulada *La duplicación del cuadrado* del cuaderno de Resolución de Problemas.

El *problema 30* presenta una situación planteada desde un objeto familiar, la cámara de fotos, con datos rigurosamente reales. Como en tantas otras ocasiones, el objetivo es analizar la secuencia numérica para desentrañar la pauta o ley que la rige. Se puede estar seguro de que una primera comprensión *parcial* de dicha ley se producirá con relativa premura si el profesor obliga a que cualquier observación, importante o no, sobre las propiedades de la secuencia sea comunicada y comentada. Por ejemplo, la afirmación de que los números enteros que aparecen son pares no es decisiva pero puede propiciar otros descubrimientos:

2'8 4 5'6 8 11'3 16 22'6

Estos descubrimientos pueden ser expresados de diversas maneras.

Mayoritariamente los alumnos acabarán formulando una observación crucial en términos parecidos a *cada número sombreado es el doble del anterior sombreado*. Pero a veces también se producen respuestas más elaboradas, como que *los números sombreados son potencias sucesivas de 2*.

Lo más curioso es que estas observaciones cruciales tienen un poder de convicción aplastante y arrastran tras de sí las sucesivas exploraciones que se realizan para comprobar si el resto de los números se comportan de modo parecido. Así, si primero se observó la propiedad de la duplicación, se tiende a buscar el número por el que hay que multiplicar cada término para obtener el siguiente:

2'8 x 1'42 = 4 x 1'4 = 5.6 x 1'42 = 8 x 1'41 = 11.3 x 1'41 = 16 x 1'41 = 22'6

o a comprobar, como así ocurre, si los números no sombreados verifican la misma ley de duplicación.

Por el contrario si se detectó la presencia de potencias de 2, se puede sugerir la comprobación *con la calculadora* de si son o no *todos los números* de la secuencia potencias de 2.

31. NÚMEROS GRANDES Y PEQUEÑOS

Este apartado está dedicado a la notación científica, al cálculo con números codificados en notación científica y a la estimación de magnitudes relevantemente grandes o pequeñas. Colateralmente se tocan también conceptos relacionados con la medida del espacio y del tiempo, la relación existente entre las unidades lineales, de superficie y de volumen, y la construcción de escalas prácticas para representar gráficamente magnitudes grandes. A veces de manera explícita, y siempre implícitamente, los problemas propuestos en esta sección tienen mucho que ver con la capacidad de imaginar o construir *metáforas numéricas* que ayuden a comprender cómo de grande -o de pequeña- es determinada magnitud. Por ejemplo, la cantidad de agua que cabe en el aula es mucha y se puede estimar, pongamos por caso, en 150 mil litros. *Una persona tendría agua suficiente para beber toda la vida* es una metáfora numérica.

A continuación se incluyen algunas observaciones muy particulares para alguno de los problemas:

En el *problema 35* se pueden buscar las medidas reglamentarias de un campo de fútbol, pero mejor todavía es estimarlas a partir de la imagen mental que cada uno tenga del estadio.

El *problema 36* necesita que el profesor previamente introduzca el año-luz como unidad de longitud.

El *problema 37* ofrece un buen pretexto para utilizar -tal vez para introducir- el cálculo del volumen de un cilindro.

El *problema 39* puede ser concebido como un proyecto a desarrollar en equipo. Por encima de todos los obstáculos que hay que vencer, que no son pocos (interpretación de los datos, comprensión de la proporcionalidad, asimilación de que la unidad astronómica es una *medida de* longitud *relativa*, indagación de datos necesarios, establecimiento de relaciones entre los datos, ...) destaca uno: la elección de las *escalas adecuadas* para que el croquis sea aceptable e ingeniar cómo compaginar la representación de los dos tipos de datos (diámetro ecuatorial y distancia media al sol) disponibles. Por nada del mundo debe el profesor dar indicaciones de cómo sortear este obstáculo.

32. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LOS NÚMEROS

Los problemas de este apartado suponen un primer contacto sistemático y abstracto con el *razonamiento inductivo* a través del análisis de propiedades de los números enteros más o menos simples visualizadas mediante disposiciones geométricas de losetas o cuadrados de lado unidad.

Es preciso subrayar que el objetivo es generalizar o inducir y no realizar cálculos simbólicos con expresiones algebraicas. Esto significa que no debe establecerse la preocupación prioritaria en la introducción de letras en las expresiones o la utilización de signos, como el sumatorio, para abreviar tales expresiones.

Sin excluir estas posibilidades, es preferible concentrarse en el propio proceso de generalización, manteniéndose, sí, en el terreno de los números, pero atravesando la frontera de la aritmética generalizada que es una de las puertas de acceso a la simbolización con sentido.

Aunque después de resolver y discutir algunos problemas se acelera la comprensión de lo que se está haciendo, los primeros ejercicios cuestan mucho. Concretamente, es verdaderamente notable el esfuerzo imaginativo necesario para ir construyendo la idea de equivalencia entre propiedad numérica y disposición geométrica. El profesor prestará pues especial cuidado en pausar y pautar adecuadamente la selección de problemas de esta sección. Es indispensable disponer de abundante papel cuadriculado o tramado.

33. CÁLCULO APROXIMADO

El cálculo aproximado, el cálculo mental y el cálculo mecánico son las tres patas que mantienen la estabilidad del conocimiento aritmético elemental. La ausencia o debilidad en el conocimiento o utilización de uno cualquiera de los tres hace resentirse y cojear a todo el edificio aritmético.

Este apartado se dedica a plantear algunas cuestiones en las que el interrogante fundamental está íntimamente relacionado de manera directa con el cálculo aproximado y, más indirectamente, con el cálculo mental y el cálculo automático.
En otro plano, el cálculo aproximado adquiere su más rica dimensión conceptual en relación con los números reales, y con la estimación de errores absolutos y relativos.

Así, el *problema 54* se dedica a una primera aproximación aritmético-geométrica al que es sin duda -y curiosamente, pues no se trata de un número entero, ni racional ni siquiera algebraico- el más popular de los números: π.

El resto de los problemas tratan de introducir comprensiblemente el significado de error absoluto (*problema 55*), error relativo (*problema 56*) y arrastre del error con las operaciones aritméticas (*problema 57*).

34. NÚMEROS ENTEROS

Los problemas de este apartado no se relacionan con ningún contenido nuevo. Los números enteros ya han sido introducidos y utilizados en el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria y aquí se abordan de nuevo para consolidar las ideas principales y para enriquecer los contextos. El hilo procedimental de casi todos ellos es la observación de propiedades numéricas concretas para permitir un esfuerzo de generalización aritmética. Los problemas propuestos pueden agruparse a su vez en tres subapartados temáticos:

1) Abarca problemas relativos a las propiedades fundamentales de la divisibilidad de números enteros, números primos y compuestos, concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo y sistemas de numeración no decimales. Forman parte de este subapartado los *problemas 59, 61, 62 y 68*.

Las soluciones a las dos primeras cuestiones del *problema 59* se obtienen por observación directa de lo que ocurre en algunos casos particulares. Debe aspirarse, no obstante, a formalizar una argumentación razonable que explique *por qué* ocurre lo observado. Por ejemplo, *el resto de dividir un número primo entre 6 no puede ser 2, porque los números que dan resto 2 al dividirlos por 6 (el 8, 14, 20, ...) son pares y por lo tanto no pueden ser primos, etc.* La última cuestión de este problema requiere desentrañar la pauta determinante de la última cifra de las sucesivas potencias de 2.

En el *problema 62* se necesita diseñar un algoritmo para obtener con calculadora el cociente y el resto de la división entera. Basta con que la descripción de los pasos o etapas del algoritmo sea verbal: *cojo el cociente decimal obtenido, le resto su parte entera y multiplico el resultado por el divisor.*

2) Problemas sobre descomposiciones de números enteros en sumas y productos y específicamente sobre consecuencias numéricas del teorema de Pitágoras. Forman parte de este subgrupo los *problemas con número 58, 60, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 70.*

Los problemas 64, 65, 66 y 67 tratan específicamente sobre ternas pitagóricas, es decir sobre el teorema de Pitágoras aplicado a números enteros. Todos ellos son accesibles a la destreza media de los estudiantes. Sólo el último apartado del problema 66 presenta una dificultad importante: buscar un procedimiento para generar *infinitas* ternas pitagóricas. El profesor valorará si merece la pena plantear el apartado a toda la clase o sólo a una selección de la misma. En cualquier caso debe tener en cuenta que hay muchas gradaciones posibles en la complejidad del procedimiento no necesita generar *todas* las ternas sino *sólo* infinitas de ellas: si (3 , 4, 5) es una terna pitagórica entonces (2x3 , 2x4 , 2x5) es también pitagórica y por lo tanto también (12, 16, 20) y (24, 32, 40) y (48, 64, 80) y ....

El *problema 69* es una pequeña investigación con números enteros. Unas cuantas comprobaciones son suficientes para que se enuncie una primera hipótesis de trabajo para el caso general: *si la suma de los dos números es par el máximo producto entero posible es la cuarta parte del cuadrado de dicha suma. Si la suma es impar el máximo producto es la cuarta parte del cuadrado de la suma disminuida en una unidad.*

Por experiencia puede asegurarse que esta ley numérica, descubierta con relativa facilidad para el caso par y con algo menos para el caso impar, proviene de comprobaciones empíricas que se ciñen exclusivamente a números positivos. El profesor deberá llamar la atención sobre este defecto para que se valide o no el mantenimiento de la propiedad para los números enteros negativos.

El *problema 70* es complementario del anterior y sugiere un procedimiento de organizar las comprobaciones empíricas que se han realizado para justificar que responden todas ellas, y no sólo los valores máximos que se enunciaron en forma de ley, a pautas numéricas que se pueden describir. La tabla organizada admite múltiples lecturas, todas ellas con alguna regularidad interesante: por filas, por columnas, en diagonal de izquierda a derecha, en diagonal de derecha a izquierda, ...

3) Ejercicios sobre el papel de los números negativos como código geométrico en las representaciones gráficas cartesianas. Corresponden a este tipo los *problemas número*

71, 72, 73, 74, 75, 76 y 77, que gradúan paulatinamente la complejidad de la asociación entre números e imágenes geométricas cartesianas.

35. FRACCIONES Y REPARTOS

En esta sección se persigue un objetivo general similar al del apartado anterior, pero trasplantado a los números racionales en su doble versión de fracciones y decimales: consolidar las ideas principales subyacentes, enriquecer los contextos y experiencias relativas a estos números y realizar operaciones aritméticas con ellos.

Específicamente, se presta atención al reconocimiento y codificación numérica y geométrica de la idea de *parte del total (problemas 78, 80, 81, 82, 86 y 90);* a la identificación, cuando es procedente, del total con la unidad *(problemas 78, 79, 81*; *82, 83 y 86)*; al refuerzo de la idea de fracción equivalente *(problema 81, 82, 83, 84 y 85);* a la interpretación de las fracciones con numerador mayor que el denominador (*problemas 81, 84 y 86*); a la utilización de fracciones equivalentes en las operaciones suma y resta de fracciones *(problemas 85, 86 y 87)*; al *concepto* de multiplicación y división de fracciones *(problemas 86 y 88);* al papel de las fracciones como operadores en los porcentajes y repartos proporcionales *(problemas 79, 88 y 89)* y a la identificación *conceptual y técnica* entre decimales periódicos y fracciones *(problema 91).*

36. NÚMEROS IRRACIONALES

Esta sección contiene problemas dedicados a la reflexión sobre los números irracionales, y a esbozar sus relaciones con fracciones y decimales. Habida cuenta del carácter tremendamente escurridizo del concepto de número irracional, no es recomendable que esta sección de problemas forme parte del *núcleo básico* de actividades que se propongan al conjunto de la clase.

Ahora bien, usados a discreción estos problemas constituyen una introducción directa a las propiedades que caracterizan y distinguen a los números irracionales de los racionales que será tremendamente reveladora para los estudiantes que *puedan sintonizar* con ellos y que el profesor, sin duda, sabrá detectar.

37. FIBONACCI Y TARTAGLIA

Este apartado contiene propuestas de trabajo para analizar dos estructuras de origen independiente que finalmente acaban relacionadas entre sí.

Una de ellas, las sucesiones numéricas recurrentes, se introducen a partir del clásico problema de los conejos de Fibonacci, y la otra, las tablas recurrentes, se introducen a partir del clásico triángulo de Tartaglia. Ambas estructuras están relacionadas no sólo por compartir la propiedad de la recurrencia sino porque, y este dato no deja de ser sorprendente, una está contenida en la otra.

Las propiedades de las dos estructuras son presentadas ampliamente en forma de problemas que las estudian desde múltiples los puntos de vista: el de la descripción verbal, el algebraico, el de la generalización, la particularización a casos concretos, la variación o relajación de las condiciones, etc. No obstante, el elemento dominante y el eje vertebrador de todos ellos es el numérico y el procedimiento apropiado de trabajo es el de la observación de las pautas o regularidades que presentan estas estructuras recurrentes.

En el *problema 97* se introduce históricamente el problema de los conejos de Fibonacci y se sugiere una representación para construir un esquema organizador que describa la evolución de la familia de roedores. La comprensión de este esquema organizador, que, por así decirlo, es *prenumérico,* y que responde en definitiva a una estructura en árbol, permite el seguimiento de qué ocurre al cabo de unas -pocas- generaciones, que es el objetivo propuesto en este problema.

El *problema 98* traslada el centro de atención de la estructura de árbol antes mencionada a la sucesión numérica abstracta que describe la evolución del tamaño de la población. El objetivo de este problema es incitar al estudiante a, combinado el análisis del árbol con el de los números de la sucesión, descubrir la *ley recurrente* que permite construir indefinidos términos de la sucesión sorteando el obstáculo técnico que supone una ampliación ilimitada del árbol esquemático: *cada número de la serie se obtiene sumando los dos precedentes.*

En el *problema 99* se expone otra propiedad recurrente de la sucesión de Fibonacci que necesitará a discreción indicaciones del profesor:

De la sucesión originaria

$$1 ,1, 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233 , 377 , 610 , 987, \ldots$$

se construye la sucesión de los productos indicados en el enunciado

$$2 , 3 , 10 , 24 , 65 , 168 , 442 , 1155 , 3026 , 7920 , \ldots$$

que se puede escribir como

$$1+1 ,\ 4-1 ,\ 9+1 ,\ 25-1 ,\ 64+1 ,\ 169-1 ,\ 441+1,\ 1156-1 ,\ 3025+1 ,\ 7921-1, \ldots$$

$$1^2+1 ,\ 2^2-1 ,\ 3^2+1 ,\ 5^2-1 ,\ 8^2+1 ,\ 13^2-1 ,\ 21^2+1,\ 34^2-1 ,\ 55^2+1 ,\ 89^2-1, \ldots$$

en donde reaparece la sucesión originaria

$$1, 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89\ldots$$

La reescritura de cada término de la serie 2, 3, 10, 24, 65, 168, ... en forma de binomio con un sumando cuadrado perfecto es la clave que resuelve el problema. Es en este paso donde tal vez sea más necesaria una ayuda en forma de pista o indicación que permita salir de un eventual atasco. En ese caso puede sugerirse que se compare la serie de los productos con la serie de los cuadrados de la sucesión de Fibonacci.

Otra propiedad *reproductiva* se propone en el *problema 100*. En este caso el problema consiste en *interpretar* que las parejas que nacen se obtienen restando cada termino de la sucesión de Fibonacci del anterior.

Los *problemas 102, 103 y 104* sugieren cómo se debe modificar la sucesión de Fibonacci para dar lugar a otras sucesiones recursivas que pueden *modelar matemáticamente* más efectivamente la evolución de una población, sea esta o no de seres vivos. Construir un modelo matemático es esencialmente un acto creativo, de modo que las propuestas que se formulan en estos problemas son solo muestras de otros muchos posibles.

Por ejemplo, si inicialmente hay 100 parejas de animales que tienen descendencia al cabo de dos meses con una media de cinco nuevas parejas por pareja y mes, y al cabo de tres meses por término medio muere cada animal, la evolución de la población queda descrita por la sucesión

100 , 100 , 500 , 900 , 3300 , 7300 , 22900 , ...

En el *problema 105* se inicia una serie de actividades dedicadas a la exploración inductiva *-observar y generalizar-* de algunas propiedades del triángulo de Tartaglia que se comentan brevemente a continuación:

La propiedad recursiva (*problema 105*) que define la tabla es al mismo tiempo la que posibilita su construcción completa. Si se tiene oportunidad, no debe dejarse pasar la ocasión de construir la tabla con una hoja de cálculo.

La fila tercera del triángulo contiene tres números, cada fila contiene un número más que la anterior, *luego* la fila enésima contendrá n números (*problema 106*).

Hasta la fila 4 hay 1+2+3+4 números en el triángulo; hasta la fila 7 hay 1+2+3+4+5+6+7 números en el triángulos, *luego* en la fila enésima habrá 1+2+3+ ... +n números. (*problema 106*). Obsérvese que los resultados de las sucesivas sumas 1+2+3+... aparecen en la tercera diagonal de la tabla.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

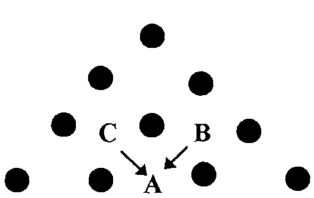
Si se suman los números de cada fila del triángulo de Tartaglia, se obtienen las sucesivas potencias de 2 (*problema 107*).

La sucesión que se obtiene si se suman todos los números que están por encima de una fila dada es 1, 3, 7, 15, 31, 63, ..., esto es una unidad menos que las sucesivas potencias de dos (*problema 108*).

Si se restan y suman alternativamente los elementos de una misma fila el resultado es siempre 0. En el caso que la fila sea par (esto es que ocupe un lugar par en el triángulo) esta propiedad es una consecuencia de la *simetría* de la tabla (*problema 109*).

Aparte de otros muchos, los números primos no figuran en ninguna fila del triángulo - exceptuando aquellas que están en una posición prima (por ejemplo las filas *tercera, quinta o séptima*)- y por lo tanto tampoco en la fila 1000. (*problema 110).*

Si se deja caer una bola por la máquina de Galton, el número de caminos que conducen hasta el punto A será la suma de los caminos que conducen hasta los puntos B y C (véase la figura) en la fila inmediatamente superior. Esta es precisamente la ley de recursividad que genera el triángulo de Tartaglia (*problema 111*). Para que esta conclusión sea obtenida con claridad, se puede indicar a los estudiantes que analicen una máquina de Galton más simple (con menos clavos) y que cuenten los caminos hasta descubrir la regla de recurrencia e identificarla con la de Tartaglia.



Si se suman los elementos de una diagonal cualquiera hasta uno dado, el resultado es precisamente el número que corresponde en la tabla a la siguiente fila en la diagonal inmediatamente inferior a la considerada (*problema 112)*

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
		↓ 4^2			

1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
		↓ 10^2									

La suma de dos elementos consecutivos de la tercera diagonal del triángulo de Tartaglia es un cuadrado perfecto (*problema 113*).

El resultado de tomar tres elementos consecutivos de la cuarta diagonal del triángulo de Tartaglia y sumar el primero, el tercero y cuatro veces el segundo, es un cubo perfecto (*problema 114*).

Si se suman los elementos de la diagonal transversa del triángulo de Tartaglia, se obtiene la serie numérica

1 , 1 , 1+1=**2** , 1+2=**3** , 1+3+1= **5** , 3+4+1= **8** ,
1+6+5+1=**13** , 4+10+6+1=**21** , 1+10+15+7+1=**34** , 5+20+21+8+1 =**55**, ...

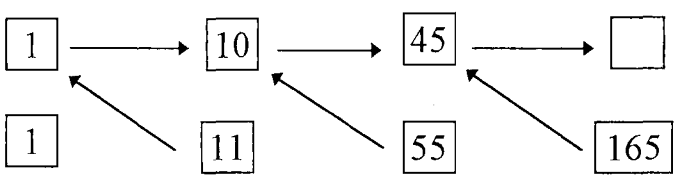
esto es, sorprendentemente, la sucesión recurrente de Fibonacci (*problema 115*). No debe dejarse que los alumnos se conformen con este descubrimiento. *¿Por qué ocurre esto?* es una pregunta obligada: cada elemento de la diagonal transversa es suma de dos elementos, cada uno de ellos miembro de las dos diagonales transversas inmediatamente anteriores. Esa es precisamente la propiedad recursiva que caracteriza a la sucesión de Fibonacci.

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Dada una fila del triángulo de Tartaglia, la anterior se obtiene conforme describe el siguiente *algoritmo*:

a) el primer elemento de la fila es 1.

b) el i-ésimo elemento de la nueva fila se obtiene substrayendo el elemento anterior de esta nueva fila al i-ésimo elemento de la fila dada. (*problema 116*)



38. LOS NÚMEROS Y EL DINERO

En este apartado se plantean algunas de las más clásicas cuestiones de proporcionalidad relacionadas con el mundo financiero. Todas ellas serán abordadas con la calculadora, que, si ya era imprescindible en otros apartados, en este es el instrumento que hará plausibles los enunciados propuestos.

El *problema 117* saca a la luz uno de los errores conceptuales relativos a la proporcionalidad más naturales y más difíciles de combatir porque se parapeta detrás de una atractiva ilusión de simetría:

Si A se incrementa en un p% para dar lugar a B, entonces un decremento del p% de B da lugar a A. Este tipo de espejismo queda brutalmente desacreditado con los datos del enunciado: *el 120% de 35 es 42, de modo que según esa regla el precio del pan debería haber sido en 1980 de -7 pesetas lo que, obviamente, es absurdo.*

Hay dos salidas posibles a este bloqueo.

La primera es propiciar un razonamiento proporcional de tipo indirecto que es esencialmente algebraico: denomínese **A** al precio desconocido del pan. Si ese precio se incrementa el 120% el resultado es 35, luego

$$\mathbf{A} + \mathbf{A} \times 1'2 = 35, \quad \mathbf{A} \times 2'2 = 35\,, \quad \mathbf{A} = 35/2'2 = 15'909090 \text{ ptas.}$$

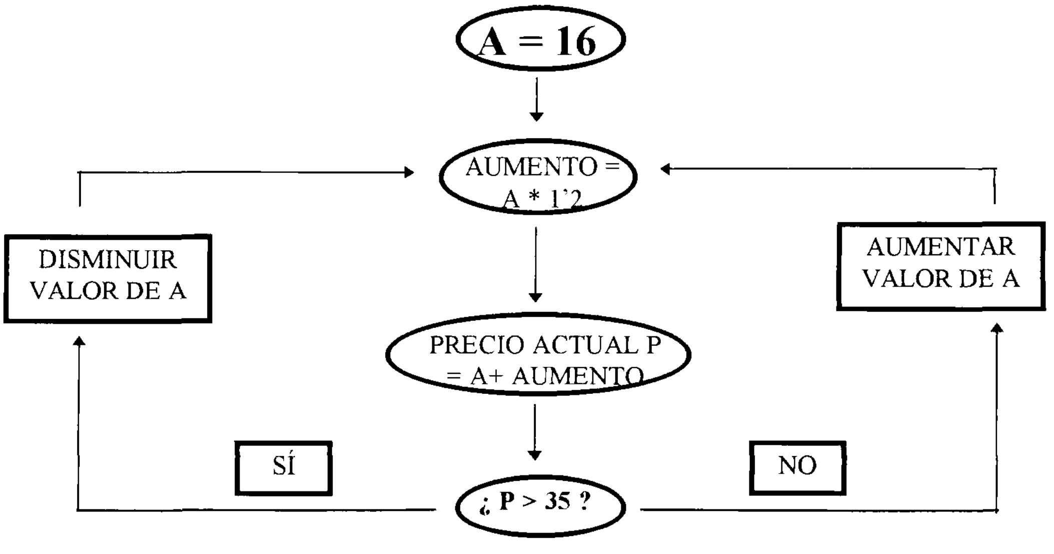
Este argumento, aunque formalmente simple, es conceptualmente muy elaborado y de hecho cala en un porcentaje muy reducido de estudiantes.

La segunda posibilidad es decantarse por el procedimiento iterativo de *ensayo y error*, puramente numérico, más directo e intuitivo y no menos eficaz que el algebraico.

La iteración tiene que empezar partiendo de un valor inicial que deberá ser estimado:

S*i el precio del pan ha subido en esos años el 120%, quiere decir que desde entonces se ha más que duplicado. En aquellas fechas su precio sería algo menor que 35/2 = 17'5.*

Escojamos 16, por ejemplo, como hipótesis inicial para el precio.



El 120 % de 16 es 19'2, cantidad que representa el aumento del precio, que en la actualidad ascendería hasta 16+19'2 = 35'2. Esta cantidad es algo mayor que 35. El precio escogido, 16, es una *sobreestimación*. Probemos con un valor menor que 16, pongamos por caso 15'5.

El 120 % de 15,5 es 18'6, cantidad que representa el aumento del precio, que en la actualidad ascendería hasta 15'5+18'6 = 34'1. Esta cantidad es algo menor que 35. El precio escogido, 15'5, es pues inferior al valor buscado, del que además ya sabíamos que no llegaba a 16. Puede probarse ahora con un valor entre 15'5 y 16, por ejemplo 15'8 ... y así sucesivamente.

La *actividad 118* plantea un problema de decisión que requiere el análisis de las dos opciones que oferta el banco para poder establecer una comparación. Se supone que el cliente preferirá aquella opción que más dinero le produzca.

Aparentemente -y esta apariencia será el punto de vista generalizado entre los estudiantes con poco o nulo conocimiento del concepto de interés bancario- las dos opciones son equivalentes: tanto da recibir el 12% anual que el 1% mensual. Y, escuetamente, así es. Lo que ocurre, y aquí es donde se produce el milagro del dinero, en la opción B una parte de los intereses se recibe *antes* y por lo tanto el cliente, *si así lo desea*, puede reinvertir esa cantidad para que le produzca más dinero. *El dinero*, decía Galbraith, *no es solo aritmética. Es además tiempo.*

El *problema 119* es complementario del anterior. Ahora para tomar una decisión es necesario cuantificar con detalle, construyendo una tabla que permita establecer las comparaciones oportunas:

	cantidad depositada				
intereses	50.000	80.000	100.000	470.000	1.000.000
VVB	0	3.900	6.500	54.600	120.350
A.A.	0	0	2.800	54.600	128.800

Como se deduce de la tabla, la preferencia por uno u otro banco *depende* de la cantidad que se vaya a depositar.

El *problema 120* es una extensión en otro contexto del problema 117. En este caso, sin embargo y a diferencia de aquel, la vía algebraica es intransitable pero no así la numérico-iterativa que, al igual que entonces, requerirá de un valor inicial estimado para el importe total del recibo, que será fijo, y del que se deducirán los demás datos necesarios. Los cálculos se pueden organizar en forma de tabla, que se va cumplimentando fila a fila.

A continuación se incluyen a modo de ilustración los cálculos correspondientes a un valor estimado inicial del recibo de 350.000 ptas., esto es, algo más de la tercera parte del dinero solicitado como préstamo. Los valores de la columna 2 se deducen directamente de los valores de la columna 1 aplicándoles el % correspondiente de intereses (el 1% mensual). Para cada fila, el valor de la columna 3 es la diferencia entre el valor de la columna 4 y el valor de la columna 2. La columna 5 es la diferencia entre la columna 1 y la columna 3. Finalmente, los valores de la columna 1 coinciden con los de la fila anterior de la columna 5.

	Capital pendiente antes del recibo	Intereses pagados en recibo	Capital devuelto con el recibo	Importe total del recibo	Capital pendiente después del pago
RECIBO 1	1.000.000	10.000	340.000	[illegible]	660.000
	1	2	3	4	5

	Capital pendiente antes del recibo	Intereses pagados en recibo	Capital devuelto con el recibo	Importe total del recibo	Capital pendiente después del pago
RECIBO 1	1.000.000	10.000	340.000	350.000	660.000
RECIBO 2	660.000	6.600	343.400	350.000	316.600
	1	2	3	4	5

	Capital pendiente antes del recibo	Intereses pagados en recibo	Capital devuelto con el recibo	Importe total del recibo	Capital pendiente después del pago
RECIBO 1	1.000.000	10.000	340.000	350.000	660.000
RECIBO 2	660.000	6.600	343.400	350.000	316.600
RECIBO 3	316.600	3.166	346.834	350.000	- 30.234
	1	2	3	4	5

La última cantidad obtenida en el cómputo, -30.234, al ser negativa, indica que con la asignación a cada recibo de 350.000 se acabaría devolviendo más dinero (exactamente 30.234 ptas.) de lo necesario. Es decir, 350.000 es una *sobreestimación* del valor del recibo.

Si éste ascendiese a 340.000, por ejemplo (*los intereses, a la vista de la tabla anterior, rondan las 20.000 ptas. que repartidas en tres plazos de aproximadamente 7000 ptas. deberán sumarse a las aproximadamente 333.333 ptas. de devolución de capital por recibo)* se obtendría:

	Capital pendiente antes del recibo	Intereses pagados en recibo	Capital devuelto con el recibo	Importe total del recibo	Capital pendiente después del pago
RECIBO 1	1.000.000	10.000	330.000	340.000	670.000
RECIBO 2	670.000	6.700	333.300	340.000	336.700
RECIBO 3	336.700	3.367	336.633	340.000	67
	1	2	3	4	5

El valor positivo de la última cantidad obtenida en el cómputo, 67, indica que un recibo mensual de 340.000 ptas. mensuales no es suficiente para devolver, con los intereses correspondientes, un millón de pesetas en tres meses. La cantidad ajustada deberá ser pues menor que 350.000 ptas. pero mayor que 340.000 ptas. Como en este último caso hay un déficit de 67 ptas., la estimación del valor del recibo debería incrementarse en alrededor de la tercera parte de 67, esto es aproximadamente en 23 ptas., pasando a ser en consecuencia de unas 340.023 ... y así sucesivamente.

39. NÚMEROS EN LA PRENSA

Que los números constituyen un elemento esencial en la comunicación es algo que está fuera de toda duda. Basta echar un vistazo a cualquiera de los *mass-media* para cerciorarse de que buena parte de la información, la opinión y la difusión *necesita* expresarse utilizando como vehículo los números. Ningún medio de comunicación escapa a esta inexorable tendencia a la cuantificación, pero donde, por sus características propias, alcanza una mayor preponderancia es en la prensa. Todas las publicaciones periódicas -incluso las aparentemente menos proclives a ello, como las *del corazón*- en todas sus secciones recurren al soporte numérico para *comunicar y argumentar*.

A diferencia de lo que pueda ocurrir en el aula, donde puede ser característica una tendencia a *domesticar* los números o, en el mejor de los casos, a presentarlos en un *espacio protegido;* los datos y números publicados están en bruto, lanzados a bocajarro con intencionalidad no siempre confesada y con consistencia no siempre garantizada de antemano. La consecuencia es bien clara: la comprensión y utilización cabal de tales números requiere un esfuerzo suplementario de comprensión del *contexto* en el que están expuestos y de *contrastación* de su verosimilitud.

Este apartado, *los números y la prensa*, contiene una selección de recortes de prensa similares a los que pueden encontrarse en cualquier publicación a diario, siempre relacionados con los números, de temática variada -deportiva, económica, política, publicitaria, recreativa, cultural, militar, artística,... - con objeto de permitir ejercitar la lectura y comprensión de la información cuantitativa que contienen. Esta lectura comprensiva genera dos tipos de actividades bien diferenciadas:

a) la lectura genérica del texto y los datos o números que contenga, poniendo en relación ambos: qué dicen los números, cómo complementan el texto, porqué se citan, ... En otros términos, se trataría de realizar un *comentario de textos numérico* rápido -que puede ser hasta verbal- generado por la primera impresión producida por la selección. Este tipo de actividad está relacionada directamente con la capacidad de estimación y con el cálculo mental. Sus elementos más caracterizadores son la rapidez, la preponderancia de los aspectos más cualitativos de la lectura numérica y la proximidad a la propia actividad que ordinariamente realizamos el común de los mortales con *la prensa*, que, no se olvide, al fin y al cabo no se estudia sino que se lee.

b) el análisis exhaustivo del texto y los datos, destripando las noticias, sacándoles todo su jugo numérico, que a veces es mucho. Esta actividad analítica es mucho más compleja que la anterior, requiere no sólo una lectura más minuciosa sino también formularse preguntas, dudar de la consistencia de los datos, buscar intencionalidades, deducir consecuencias numéricas, etc. Los enunciados que acompañan a la antología de recortes de prensa sugieren como se pueden *explotar* éstos para llevar a término análisis exhaustivos.

CAPÍTULO IX

GEOMETRÍA 3º

40. INTRODUCCIÓN

En geometría, la *visualización* es una componente de primer orden: es más complicado explicar qué es un círculo que dibujarlo; se captan más fácilmente muchas ideas mediante las imágenes/gráficas que las sustentan, que mediante cualquier otro procedimiento de descripción o definición. De todas formas, los dibujos, con ser mucho, no son *suficientes* para comprender las ideas geométricas. Es *necesario* también precisar significados, establecer, ofrecer explicaciones, desentrañar propiedades, definir elementos.

La visualización geométrica no es, por otra parte, una actividad intelectual contemplativa, sino profundamente activa que se sustenta en la realización de construcciones geométricas, en el trazado de gráficas, en el análisis del por qué y el cómo. Esta vertiente práctica, experimental, en contacto físico con los elementos geométricos (la visualización supone ya este tipo de contacto), permite conocerlos, apreciar sus cualidades, describir sus propiedades, establecer comparaciones, formular conjeturas sobre propiedades o relaciones generales, y realizar comprobaciones. No es de extrañar, consecuentemente, que en geometría sea fundamental *medir* físicamente -y manejar los instrumentos de medida-, dibujar -y manejar los instrumentos de dibujo-, construir y aprender a apreciar y valorar la cantidad y variedad de geometría que nos rodea, con la que estamos permanentemente en contacto.

El primer apartado de este bloque de Geometría incide en las construcciones geométricas y en el estudio de relaciones en el plano. Para ello, se parte de la hipótesis de que la geometría se ha trabajado algo en los estudios previos, pero se plantean situaciones muy accesibles de utilización de regla y compás con el fin de conocer las propiedades básicas de los polígonos fundamentales y de la circunferencia.

La multiplicidad de relaciones que es posible establecer al comparar distintas figuras geométricas puede favorecer su formulación con diversos grados de precisión y refinamiento, y, por lo tanto, generando variadas rutas de acceso a los procesos matemáticos de definir, comprobar, validar y demostrar. Esta multiplicidad de acercamientos posibles y de análisis plausibles convierten a la geometría en uno de los campos matemáticos más fecundos a las hora de plantear verdaderas investigaciones que son sugeridas rápida y naturalmente por casi cualquier situación geométrica que se aborde.

Otra capacidad esencial íntimamente relacionada con la geometría es la de expresión. Las formas, relaciones y propiedades geométricas pueden describirse con diferentes lenguajes (verbal, gráfico, numérico o algebraico) que requieren códigos especializados y que cubren aspectos distintos de la comunicación.

La geometría constituye en sí misma un contexto apropiado para favorecer el gran salto que supone elevarse de la observación, de la experiencia, de la práctica, del mundo físico, a la abstracción de formas y relaciones.

41. CONSTRUCCIONES E INVESTIGACIONES

REGLA Y COMPÁS

Nada más "elemental" que estudiar algunas construcciones con regla y compás. Hay muchísimas construcciones que se pueden realizar de entrada. Tantas que el problema esencial al desarrollar esta actividad consistirá en establecer acotaciones, pues en caso contrario cada alumno se lanzará a dibujar figuras sin orden ni concierto.

En una segunda fase del problema, se pide sistematización, criterios para determinar qué figuras se pueden dibujar con esos instrumentos. Si fuese necesario, por ejemplo porque faltan iniciativas interesantes entre los estudiantes, se pueden sugerir algunas indicaciones como la de *dibujar los polígonos regulares aumentando el número de lados*.

Pronto se observará que la tarea no es tan fácil como parecía a primer a vista y que es necesario proceder de modo pausado, examinando en primer lugar los casos más propicios como el hexágono o el octógono, que son asequibles a la inmensa mayoría de los estudiantes. Se puede esperar a partir de ahí la formulación de alguna regla general, por ejemplo, que se puede construir el polígono con doble número de lados que uno dado.

Otro modo diferente de abordar esta misma actividad es adoptar un punto de vista algorítmico. El profesor entrega las instrucciones que permiten dibujar algunos polígonos -los elementales y los que no, como el pentágono regular- y los estudiantes ejecutan las instrucciones reflexionando sobre ellas.

En definitiva esta es una actividad volcada en lo que será una constante en la geometría de la Educación Secundaria Obligatoria: el uso de instrumentos de dibujo para representar figuras y cuerpos geométricos. Un uso que, como el de cualquier instrumento, necesita de un período de adiestramiento que no siempre se produce con la suficiente intensidad.

Según el interés que despierte, la actividad se puede prolongar más o menos, y en ciertos casos puede suplir a algunas de las actividades que se comentan posteriormente, como por ejemplo la de dibujar polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

CIRCUNFERENCIAS

Presenta un conjunto de situaciones que pueden permitir la observación y formulación de algunas propiedades de la circunferencia, como las que se incluyen a continuación:

Por un punto pasan infinitas circunferencias (de centro cualquier otro punto del plano).

Por dos puntos pasan infinitas circunferencias. Todas ellas tienen su centro en la mediatriz del segmento que los une. La menor es la que tiene los dos puntos A y B como puntos opuestos de su diámetro.

Solo hay una circunferencia que pase por tres puntos no alineados. Encontrar esta circunferencia *circunscrita* supone trazar al menos dos de las tres mediatrices de los segmentos que unen los puntos. Por otra parte, los alumnos suelen dibujar los tres puntos "al azar", de modo que raramente aparece espontáneamente la conclusión de que no hay circunferencia que pase por tres puntos alineados.

Para cuatro o más puntos ya hay que hacer puntualizaciones similares. Esta actividad de establecer puntualizaciones o acotaciones es esencial en matemáticas y no debe sortearse: si tres o más puntos alineados no es posible trazar la circunferencia deseada (¿por qué?). En caso contrario, se toman tres de ellos, se traza la circunferencia circunscrita y se comprueba si pasa por los otros puntos.

Existen infinitas circunferencias tangentes a una recta. Dado un punto exterior, éste será el centro de una circunferencia tangente cuyo radio está determinado por la intersección entre la recta y la perpendicular a ella trazada desde el punto.

En el plano hay dos situaciones posibles de tangencia a dos rectas. Si estas son paralelas, todas las circunferencias tangentes son de igual tamaño con centro en la recta paralela a ambas que equidista de las dos. Si son secantes, las circunferencias pueden variar el tamaño, y su centro está en la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas.

LA PISTA DE BAILE

El objetivo de la actividad es analizar las distintas posiciones relativas de dos circunferencias y asignar la denominación técnica estandarizada (*tangentes externas, concéntricas, secantes o exteriores*) a cada una de ellas.

La idea intuitiva de *superficie bailable* inducirá la necesidad de conocer cómo calcular la superficie del círculo y brindará la ocasión de introducir la fórmula $S = \pi \cdot r^2$.

La superficie para bailar fuera de concurso será la resta de las superficies de los dos círculos, si bien se puede aceptar que, normalmente, cuando hay concurso no se baila fuera, y cuando no hay concurso se puede bailar por toda la superficie útil.

POLÍGONOS INSCRITOS

El problema consiste en dibujar el triángulo equilátero y el cuadrado, puesto que los otros dos polígonos que se presentan con sus nombres (no descritos simplemente) se pueden obtener a partir de los anteriores.

Esta es una buena oportunidad para practicar con los instrumentos de dibujo y para pensar con ellos. Vale la pena hacer notar expresamente cómo, al coincidir el lado con el radio, se puede inscribir el hexágono marcando los vértices sobre la circunferencia, y cómo a partir de él se puede dibujar el triángulo equilátero.

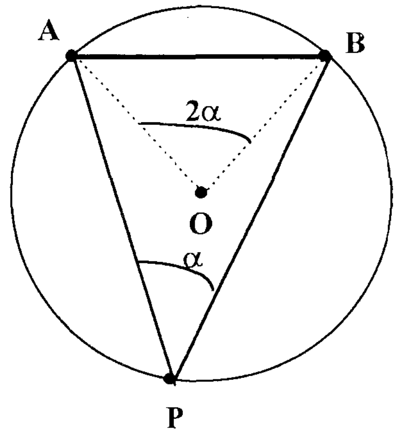
ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

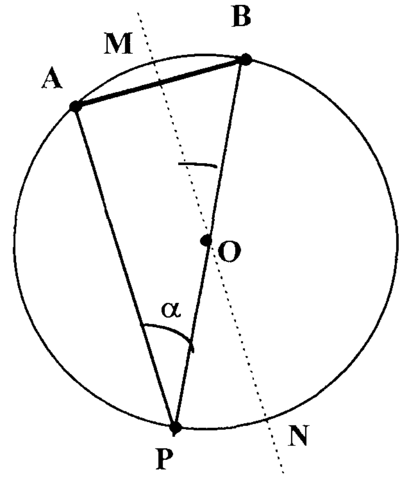
Habida cuenta de la estrecha relación entre geometría y mundo físico, el lenguaje ordinario está lleno de términos geométricos, no siempre bien empleados, de modo que el vocabulario, con no ser el objetivo esencial del estudio, es uno de los aspectos que no debe descuidarse. La geometría es el mejor baluarte para impulsar el aprecio por la precisión terminológica y la mejora del conocimiento que permite. A veces es difícil discernir si el lenguaje preciso es una consecuencia de la claridad conceptual o una de las condiciones necesarias para que se produzca.

Así, términos que aparecen en esta actividad son, entre otros, el de *cuerda* -cada segmento como PA o PB-, *radio* -segmento como OA y OB-, *ángulo central* -OB-, *ángulo inscrito* a la circunferencia -APB, que tiene su vértice en ella y los lados están sobre dos secantes.

Por otro lado, es relativamente fácil comprender que existe una relación numérica entre el ángulo inscrito y el ángulo central, que se cuantifica con doble o mitad según cómo se comparen (el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente).

No es tan intuitiva, por el contrario, la posible ampliación de estudiar qué pasa al ir variando P de lugar sobre la circunferencia, manteniendo fijos A y B para concluir que el ángulo se mantiene constante.





La demostración no es evidente y quizás requiera analizar previamente el caso en el que un lado del ángulo inscrito (PB) pase por el centro de la circunferencia (O).

En este caso, se traza una paralela a PA por O, así los ángulos APB y MOB son iguales (por correspondientes), y la medida de los arcos AM y PN es la misma, por estar comprendidos entre paralelas. PON y MOB son opuestos por el vértice, por lo tanto ,los arcos PN y MB miden lo mismo. Así, la medida del ángulo APB (α) es la mitad de la medida del arco AB, que a su vez coincide con el valor del ángulo central AOB tomando como unidad de arcos el arco correspondiente a la unidad de ángulos -lo que permite medir con el transportador arcos y ángulos centrales indistintamente. Los otros casos se reducen a este.

PERPENDICULARES

Lo importante de este problema es captar la *perpendicularidad* como algo esencialmente distinto a la *verticalidad* o al *paralelismo* a los bordes del papel. Ya se había comentado anteriormente que no es fácil trazar perpendiculares a una recta desde un punto exterior y la situación planteada va complicando los requerimientos, desde el trazado con escuadra y cartabón -simple, pero que necesita también aprendizaje-, pasando por la construcción con regla y compás, hasta el trazado mediante pliegues que no es difícil en ninguno de los casos planteados.

Una posibilidad de realizar la perpendicular a la recta desde el punto en que alcanza el borde se facilita si se realiza algún plegado por una zona media y se aprovecha este para completar el pedido.

PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Ya se debe saber trazar, si se hecho algunas de las actividades anteriores o en cursos pasados, las líneas que sirven para encontrar el incentro, el circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un triángulo. Si no, esta es una buena ocasión para hacerlo, comprendiendo esencialmente qué es una bisectriz y cómo trazarla.

El enunciado pide expresamente que la determinación de los puntos notables se realice mediante plegados. La idea es permitir una visión alternativa a la de la construcción geométrica con regla y compás, manejando triángulos recortados, tocándolos, moviéndolos y analizándolos físicamente.

DOBLANDO PAPEL

Esta actividad facilita ejemplos motivadores sobre cómo obtener distintos polígonos regulares plegando papel. Se aprovecha también la situación para diseñar los algoritmos que permiten esas construcciones. Si bien comprender la situación gráfica puede resultar más fácil en unos casos que en otros, es siempre difícil la elaboración del algoritmo que permite la construcción traduciendo las imágenes a secuencias de instrucciones que conduzcan de forma precisa a su reproducción. Y es que para comprender que instrucción de algoritmo es sinónimo de ausencia de ambigüedad se necesita entrenamiento con ejemplos concretos, comprendiéndolos, desmenuzándolos y, finalmente, produciéndolos.

Todos los estudiantes deben pasar de forma ineludible por la experiencia de presentar una propuesta de algoritmo para que los demás la interpreten, convenciéndose de que cuando lo que para él está claro puede no estarlo para otros y de que merece la pena emplear tiempo en afinar y precisar las descripciones que se hacen.

Conviene que en clase se elaboren varios algoritmos, no necesariamente muchos, con el tiempo suficiente analizarlos con tranquilidad, tomando la decisión de cuándo está un algoritmo concreto lo suficientemente detallado como para, sin instrucciones redundantes, contener información clara y exacta sobre la situación.

TANGRAM

Mucho se ha escrito sobre el tangram chino y se han diseñado muchas actividades a su sombra. La que aquí se propone consiste en trocear para reproducir con las piezas resultantes las figuras que se adjuntan. Se pretende con ello contribuir al desarrollo de la intuición espacial visualizando figuras que en principio no están visibles, pero que aparecen con pequeñas transformaciones. Debe quedar claro que las figuras que se obtienen a partir de todas las piezas del tangram tienen la misma área, pero que el perímetro puede variar.

A partir de esa observación puede investigarse qué figuras son las de mayor perímetro y cuáles las de menor.

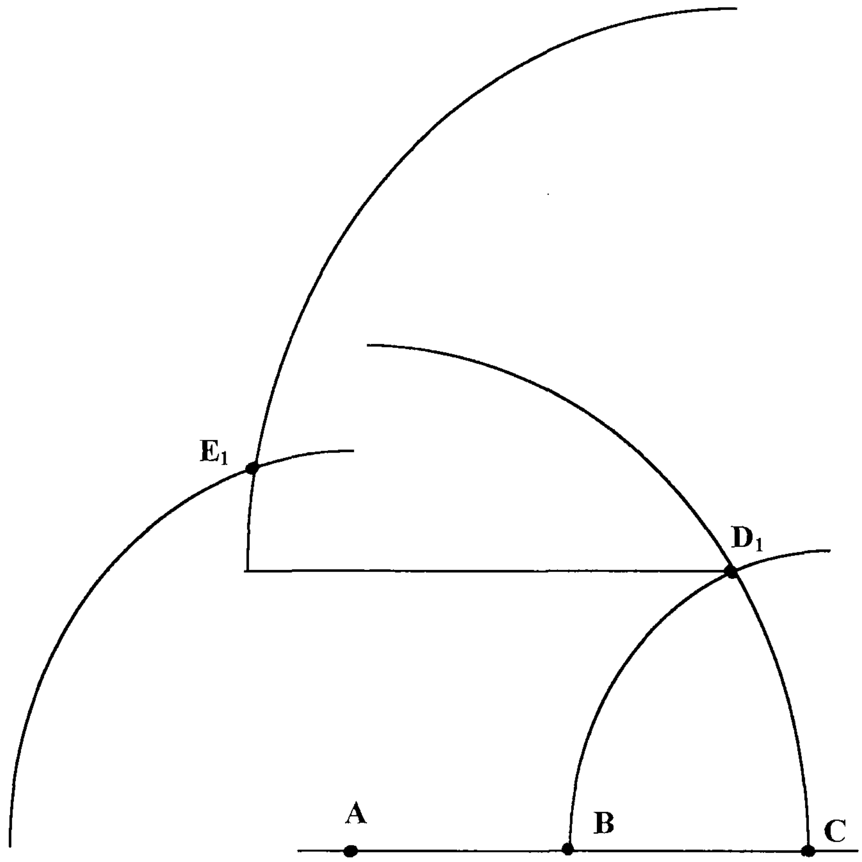
LOS PUEBLOS

Mediante circunferencias de distintos colores -el mismo para todas las que se tracen con el mismo centro- y la observación de los datos proporcionados por el enunciado, el problema se resuelve con cierta facilidad aunque requiere un poco de paciencia y atención.

Conviene llamar la atención sobre la existencia de una escala especialmente apropiada para dibujar en este caso, precisamente por las cantidades que aparecen en los datos: si representamos por 4'2 cm. la distancia de 42 km., entonces, *sin cálculos*, 8'7 cm. será la distancia correspondiente a 87 km., etc.

Como de A a B hay 42 km., de B a C hay 45 km. y de A a C hay 87 km. se deduce que los tres pueblos están alineados. Se toma para A un punto cualquiera del plano y sobre una recta cualquiera que pase por A, a distancias 4'2 y 4'7 se sitúan los pueblos B y C respectivamente.

Desde C se traza una circunferencia de radio 4'8 cm. y desde A otra de radio 8'2 cm.. En cualquiera de los dos puntos de corte debe situarse el pueblo D. Para encontrar la situación de E se pincha con el compás en D y se traza una circunferencia de radio 9'1 cm. E se encuentra en el corte entre esta y la que se traza desde A con radio 6'4 cm.. Así se obtienen dos soluciones simétricas. Una de ellas es:



OCHO LADOS

Se presenta aquí una situación apropiada para criticar soluciones "fáciles". Un buen criterio para elegir los lados de cada cuadrado, que han de dividirse en tres partes iguales, es tomar como lado la longitud de tres cuadrados de la trama. Pronto se ve que no se obtiene un octógono regular porque cuatro de los lados corresponden a hipotenusas de triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son los otros lados del octógono. El problema de obtener un octógono a partir de un cuadrado se plantea también, presentándose allí las soluciones aportadas por dos alumnas, en la carpeta *Resolución de Problemas* de 4º.

RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

El cálculo de la longitud de una circunferencia es un problema histórico, uno de los primeros problemas geométricos formulados explícitamente y el que dio lugar a la definición de π. La determinación de la naturaleza de π es muy reciente y a lo largo de los siglos precedentes la constante de la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro ha sido aproximada de muy diversas maneras. Aquí se presentan dos de ellas.

El objetivo es estudiar/cuantificar las medidas que se van integrando en el proceso de rectificación. Para evitar que el proceso resulte complicado en primera instancia, vale la pena introducir medidas concretas para el radio (1, 4, 10, ... la que se considere). Será necesario aplicar sucesivamente el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o las relaciones de proporcionalidad entre triángulos rectángulos con lados perpendiculares dos a dos.

Analicemos el primer método:

$$\text{En ABC: Si } AB = BC = r \Rightarrow AC = r\sqrt{2}$$

$$\text{En ACE: Si } CE = r \Rightarrow (AE)^2 = (r\sqrt{2})^2 + r^2 \Rightarrow AE = r\sqrt{3}$$

La longitud de la circunferencia rectificada L_r es doble de la del segmento 1-2, esto es:

$$L_r = 2\,(AE + AC) = 2\,(r\sqrt{3} + r\sqrt{2}) = 2r\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Y como se ve, se ha realizado una aproximación de π por $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Luego hay que compara este último valor $\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3'14626436994...$ con el valor dado de pi, o con el que le asigna una calculadora, y se obtiene:

$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \pi = 0'004671716...$ que ya da una idea de la magnitud del error que se comete: alrededor de un 5 ‰ para π. La aproximación es muy buena.

El error que se comete al medir la circunferencia de radio r es:

$$L_r - L = 2r\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2\pi r = 2r \cdot 0'0046...$$

En el segundo método conviene saber o establecer *ad hoc* las relaciones de proporcionalidad que cumplen los triángulos rectángulos que tiene sus lados perpendiculares dos a dos, como es el caso de la construcción que se hace. De esta manera, si AB = d y se construye una espiral en la que cada nuevo lado se obtiene a partir de los dos anteriores (cuadrado del anterior dividido por el anterior de este):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow CD = \frac{BC^2}{AB}$$

relación que se vuelve a repetir para DE y EF y que permite obtener los resultados:

$$CD = \frac{16}{9}\,d \quad , \qquad DE = \frac{64}{27}\,d\,, \qquad EF = \frac{256}{81}\,d$$

Así, EF que es la longitud de la circunferencia rectificada L_r, es aproximadamente la longitud de la circunferencia de radio r , con $\frac{256}{81}$ como aproximación de π. La aproximación no es tan buena como el método anterior, pero no necesita compás, aunque sí dividir el segmento AB en tres partes iguales.

$$\frac{256}{81} - \pi = 0'890117\ldots$$

El error, pues, que se comete al calcular L_r como longitud de la circunferencia de radio r es:

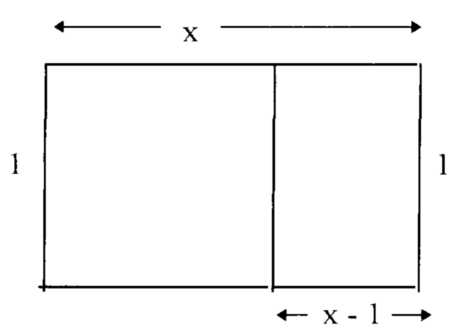
$$L_r - L = \frac{256}{81} r - \pi r = r \cdot 0'1890117\ldots$$

Queda para el lector el desarrollo del tercer método.

EL RECTÁNGULO DE ORO

Son libros enteros y extensos los que se han dedicado a estudiar la proporción áurea, su presencia en el arte, en la naturaleza, sus propiedades numéricas y geométricas, y la influencia que ha tenido en la historia de la humanidad desde que fuese objeto de culto a través de estrella de cinco puntas de la escuela pitagórica.

Si la figura siguiente es un rectángulo de oro, esto es, verifica que al quitarle el cuadrado construido con su lado el menor, el rectángulo que queda sigue siendo áureo, y tomamos como longitud del lado menor la unidad, se debe cumplir, por proporcionalidad:



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'6180339887\ldots,$$

Este último es el número de oro o proporción áurea, esto es la constante de la relación proporcional entre los lados del rectángulo -y de los rectángulos que sucesivamente se forman con esas condiciones-.

De nuevo se trata, a continuación, de analizar un algoritmo, comprobar que funciona, y de elaborar otro que permita la construcción de un rectángulo áureo. Como ya se dijo, nunca se insistirá en exceso sobre la importancia que tienen los algoritmos tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento o en la vida cotidiana, y, en consecuencia, la importancia que tiene desarrollar competencias relacionadas con su análisis crítico y su creación.

ESTRELLA PITAGÓRICA Y PENTÁGONO REGULAR

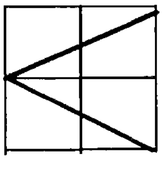
Continuando con la constatación de la extensa presencia de la razón áurea en geometría, se desea ahora considerar un pentágono interior como origen de la figura total y por tanto del pentágono exterior, para acabar detallando el algoritmo que permite pasar de un pentágono a otro (también puede hacerse a la inversa, claro). La continuación natural es aplicar el algoritmo recién diseñado a la obtención del pentágono exterior siguiente (o interior en su caso), y analizar la multiplicidad de propiedades que pueden señalarse en relación a la proporción áurea.

TRIÁNGULOS DE SUPERFICIE 1

Uno de los objetivos de esta actividad es calcular áreas de triángulos diversos y analizar las relaciones que verifican cumplen los triángulos que sobre la trama tienen la misma superficie. En esencia, la fórmula que permite calcular el área de un triángulo, base por altura partido por dos, permitirá visualizar triángulos distintos que tienen área 1, por ejemplo basta considerar los triángulos que tienen por base la longitud de dos cuadrados de cualquier fila excepto la primera, entonces, sin variar esa base (de medida 2), con el tercer vértice sobre cualquier punto de la línea superior de puntos, se obtiene un triángulo de área 1.

Al menos para algunos de estos triángulos, en los que no es tan fácil ver que su área es 1, cabría entretenerse en diseñar una justificación geométrica.

Un ejemplo: en la figura siguiente, se muestra cómo 4 triángulos iguales de lados 2 y 1, se unen de forma que ocupan 4 cuadrados, es decir, cada triángulo tiene área 1.



CUADRADOS EN UN GEOPLANO

Esta actividad tiene apartados más asequibles y otros que lo son menos, pero siempre permite avances a todo el que intente resolverla.

Antes de empezar, de forma inmediata, se ve que hay cuadrados de distintos tamaños.
Hay 9 x 9 puntos en el geoplano, esto es 81 puntos.

Cuadrados de lado 1, con área 1, son los más fáciles de analizar junto con los de tamaño 8 x 8 de área que es el más grande y solo hay uno. Hay 8 por fila, total 8 x 8 = $8^2 = 64$.

Cuadrados de lado 2 (y área 4): Hay 7 con vértice superior en la primera fila de puntos. Y 7 filas en la que poder considerar vértices con esta consideración (2 x 2). Total 7 x 7 $= 7^2 = 49$.

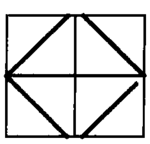
Cuadrados de lado 3 (y área 9): $6 \times 6 = 6^2 = 36$. Haciendo una tabla:

lado del cuadrado	1	2	3	4	5	6	7	8
N° de cuadrados	8^2	7^2	6^2	5^2	4^2	3^2	2^2	1

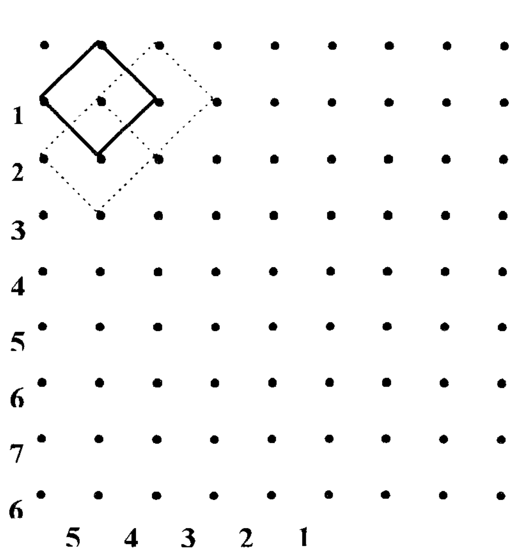
Y ya van 204 cuadrados. Estos serían los cuadrados distintos que se pueden observar en un tablero de ajedrez si se pone la condición de que los cuadrados considerados deben tener lados sobre las líneas del tablero. Aquí, al considerar los puntos y cuadrados que tengan sus vértices en ellos, el número de cuadrados se amplía.

Pero el área pasa de ser 1 a 4 cuando se pasa de lado 1 a lado 2. ¿Hay cuadrados de área 2? ¿y de área 3? ¿y de área cada uno de los números naturales intermedios a los anteriores?.

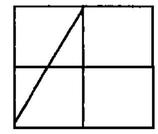
Para empezar a responder a estas cuestiones, céntrese la atención primero en la búsqueda de cuadrados con área 2. Cuando se encuentre uno, se cuentan todos los similares que haya en el geoplano. Éstos son los que tienen el lado sobre la hipotenusa del cuadrado de lado 1. Su lado -Pitágoras- mide $\sqrt{2}$. Si bien es cierto que mediante la división por las diagonales y comparación con el cuadrado de área la unidad, se puede llegar a la conclusión de que se trata de un cuadrado de área 2, como se muestra a continuación - ojo que hay muchos alumnos que no admiten los cuadrados ladeados, esto es, que no tiene sus lados paralelos a los bordes del papel o del suelo-.



Si se pone el número de cuadrados de área 2 al comienzo de cada diagonal, sale la suma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 49$. Gráficamente:



Hay otras longitudes de segmentos que tienen sus extremos en puntos de la trama. Por ejemplo:

$\sqrt{5}$: 

La lista de longitudes distintas que se pueden conseguir es extensa. Si se toma un cateto de longitud 1, el otro puede tomar los valores de 1 [se obtiene $\sqrt{2}$ (ya está visto)], 2 ($\sqrt{5}$), 3,...,8. Con un cateto de longitud 2, el otro puede tomar los valores desde 2 a 8, con un cateto 3 el otro toma los valores 3,...,8, etc.

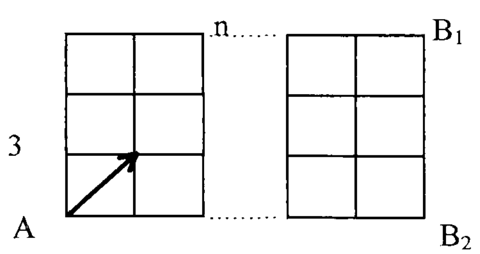
Lo que debe quedar claro es que el problema completo es muy amplio, pero si se desea se puede analizar por partes que tengan cierta completitud. Por ejemplo, se podría plantear el problema exclusivamente para el tablero de ajedrez, o sólo para cuadrados de área 2 en una trama de puntos n x n, etc.

UNA MESA DE BILLAR

En este problema conviene, en primer lugar, dar la oportunidad para de realizar pruebas libremente, para dar paso a posteriores sistematizaciones y a formular conjeturas como las siguientes:

"En las mesas 3 x n ocurre que la bola acaba siempre en uno de los agujeros B_1 o B_2. Si n es impar en B_1, y si n es par en B_2".

"Cuando n es múltiplo de 3, el número de cuadrados que se recorren es n, y si n = 3 · y, el número de bandas que toca la bola es (y- 1), mientras que si n no es múltiplo de 3, el número de cuadrados que se recorren es 3 x n".



La confección de una tabla apropiada ayudará a recopilar y organizar los datos relevantes del problema:

	Final		Cuadrados	Bandas
Mesa de billar	B_1	B_2	pasados	que toca
3 x 1	x		3	2
3 x 2		x	6	3
3 x 3	x		3	0

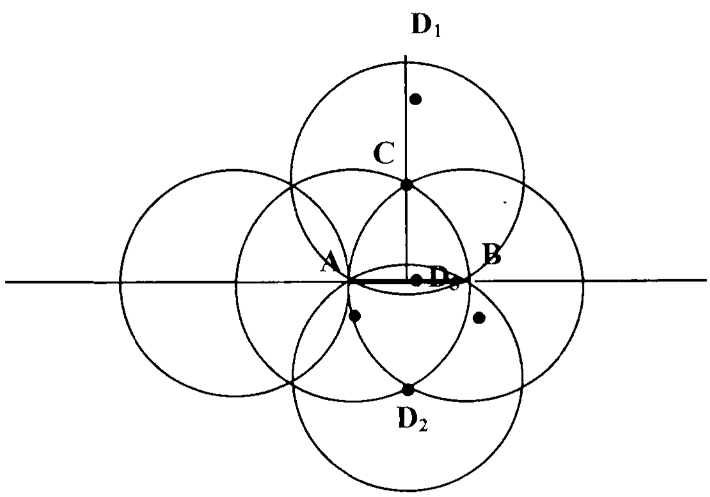
3 x 4		x	12	5
3 x 5	x		15	6
3 x 6		x	6	1
3 x 7	x		21	8
3 x 8		x	24	9
3 x 9	x		9	2
3 x 10		x	30	11
...				

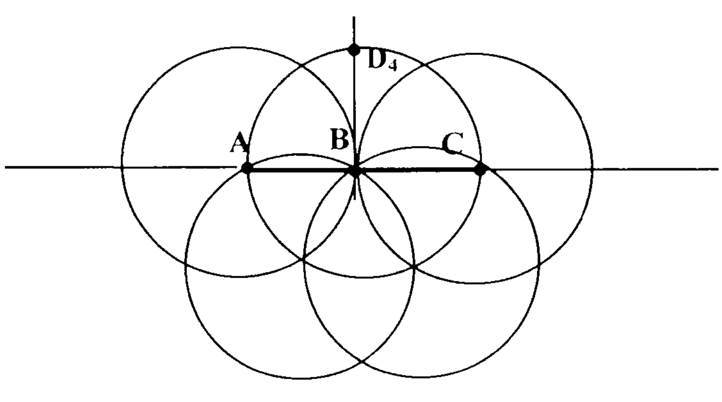
Con tablas similares a esta es más fácil establecer conclusiones, validar o desechar conjeturas e intentar justificar el por qué de las conclusiones establecidas.

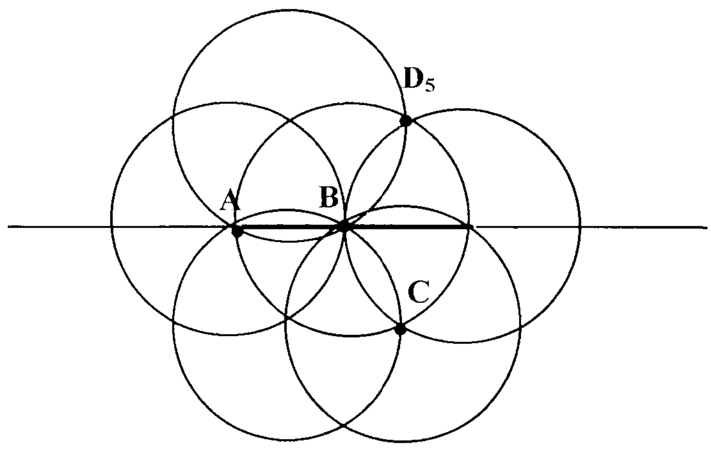
CUATRO PUNTOS

Después de unas pocas pruebas, queda claro que la solución que se facilita en el enunciado como ejemplo es la sencilla y que no es inmediato encontrar otros puntos que cumplan las condiciones requeridas. El instrumento adecuado para buscar equidistancias es el compás. El análisis cuidadoso hará el resto.

Si los tres puntos son A, B y C, se tendrá entonces:





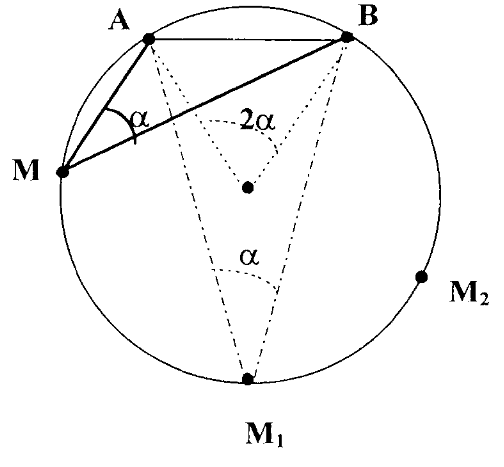


DIAGONAL 10

Si la diagonal se mantiene fija y midiendo 10, la figura que describen los vértices de los rectángulos de diagonal 10 unidos por esa diagonal, es una circunferencia que tiene el centro en el centro de la diagonal y de radio la mitad, esto es, que pasa por sus extremos. Cuesta un poco encontrar rectángulos de diagonal 10.

FÚTBOL Y GEOMETRÍA

La portería es AB. Si se traza una circunferencia que pasa por los tres puntos A, B y M, , la relación entre un ángulo inscrito y el ángulo central correspondientes al mismo arco es (véase el comentario a ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA) de 1 a 2



Esto ocurrirá para cualquier punto M, M_1, M_2,... del arco mayor de la circunferencia.

El ángulo de tiro que se tenga desde el punto N comparado con el que se tiene desde M dependerá de la situación de N respecto de la circunferencia que pasa por MAB. Si N está en esa circunferencia el ángulo será el mismo, si es interior mayor y si es exterior menor.

FIGURAS QUE DAN TUMBOS

El enunciado de este problema requerirá explicaciones por parte del profesor, pues son numerosos los estudiantes que no acaban de entender la situación. Una sugerencia que puede ser clarificadora es la de observar qué ocurre en los ejemplos que se facilitan. Otra, recortar un rectángulo, moverlo sobre una línea trazada en un folio como se indica en la figura del enunciado y analizar qué pasa.

El problema requiere tiempo. El estudio de cualquiera de las figuras propuestas necesita una fase de realización de pruebas, usando compás, regla y cartabón. Se requiere también completar el seguimiento de varios puntos en una vuelta completa para poder llegar a formular hipótesis y tratar de verificarlas y demostrarlas.

El trabajo en grupo y la comunicación entre unos grupos y otros acelerará enormemente el proceso de resolución. Los ejemplos serán más numerosos y se obtendrán más rápidamente y la discusión entre los alumnos enriquecerá el proceso y permitirá llegar más pronto a conclusiones más elaboradas.

42. ESTIMACIÓN

En este apartado se aborda la estimación geométrica. Se ilustra cómo la estimación es una necesidad social y se hace hincapié en la necesidad de aprender a estimar distintas magnitudes y a la vez a controlar el error soportable por cada medición concreta. Este aprendizaje es una cuestión eminentemente práctica: si se practica la estimación se aprende a estimar, y se desarrolla un cierto sentido del olfato que desestima la pretensión de medir la distancia Madrid-Alicante al milímetro o que induce a utilizar 30 y 25 como factores para averiguar aproximadamente el coste de un cajón de 24 botes de refresco que se anuncia a 31 pesetas/ bote.

Las situaciones que proponen atienden a un amplio conjunto de magnitudes: longitudes, superficies, volúmenes, cardinalidades, pesos, ... Siempre que sea posible, y desde luego con carácter obligatorio en algunos casos, la formulación de estimaciones debe completarse con la realización de mediciones de las magnitudes estimadas. El registro de las estimaciones y la explicitación de las justificaciones que las sustentan permitirá una cierta clase de retroalimentación a partir de las mediciones que redundará en una mejora de la capacidad de estimar.

Hacer partícipes a los estudiantes y no tener prisa en agotar el tema son las dos claves didácticas de este apartado. Para ilustrar qué se quiere decir con hacer partícipes a los estudiantes baste un ejemplo: para estimar cuántas personas caben en una plaza, concéntrese toda la clase en una parte despejada del aula y dedúzcase una superficie por persona razonable para utilizar como patrón.

Respecto al tiempo dedicado es necesario remarcar que, además de este apartado en el que se trata explícitamente, la estimación es una actividad matemática que se debe realizar con mucha frecuencia y en temas muy diversos, que abarcan desde los puramente numéricos hasta los probabilísticos, de modo el desarrollo de la capacidad de estimación no se confía en exclusiva al periodo que abarque este apartado sino que se extenderá a lo largo de toda la etapa.

43. VOLÚMENES

El tema de la medida es complicado por muchas razones.

La cantidad de magnitudes que se acaba manejando (longitudes, superficies, volúmenes, capacidades, pesos, tiempos, valores, amplitudes,...) acaba siendo considerable y con ellas se multiplican las unidades, múltiplos, submúltiplos y las relaciones que las ligan. Por otra parte coexisten sistemas distintos de medición (sexagesimal, centesimal), distintas proporcionalidades (lineal, cuadrática, cúbica), y multitud de magnitudes derivadas (velocidad) que a su vez generan relaciones que mezclan entre sí distintas magnitudes y sistemas (Km/h, longitud/tiempo, centesimal/ sexagesimal).

Por otra parte, la sistematización de la medida genera fórmulas que establecen un vínculo entre álgebra y geometría que a veces va más allá de la generalización, abstracción y manipulación de expresiones algebraicas para invadir el campo funcional o el tratamiento de datos numéricos.

A pesar de ello, o precisamente por ello, la medición es un tema clave dentro y fuera del área de matemáticas. Su importancia social es incuestionable. Los humanos nos pasamos la vida midiendo y comparando hasta cosas tan difícilmente medibles y comparables como puede ser la inteligencia, el grado de bienestar personal o la satisfacción que produce determinada música.

Tanto es así que se ha puesto especial cuidado en que los materiales de la etapa introduzcan más o menos extensamente todos los tópicos citados de la medida. Específicamente, se ha dedicado especial atención en el material de 2° a la superficie y en este de 3° al volumen.

Se ha partido aquí del supuesto, muy razonable por otra parte, de que los estudiantes tienen cierta experiencia adquirida sobre el concepto de volumen y su medición. No se va a descubrir a estas alturas qué es un litro, qué es un metro cúbico o que 33 cl. es el contenido de un bote de refresco. Cabría no obstante asegurarse de que todo el mundo ha tenido contacto con ciertas experiencias básicas que sustentan fundamentalmente la abstracción del concepto de volumen y capacidad, tales y como la observación de modelos físicos de distintos cuerpos geométricos (paralelepípedos, conos, cilindros, esferas), la construcción de policubos o el establecimiento de comparaciones de capacidades utilizando cuerpos transparentes y agua o arena.

En este apartado se centra la atención en el cálculo de volúmenes, planteando actividades que, con el formato de problemas abiertos o pequeñas investigaciones a realizar, combinan el descubrimiento de fórmulas para calcular volúmenes con la utilización de las mismas o de otras que se facilitan sin más. En el apartado de Láminas del material del estudiante de 4º, se facilita un listado de fórmulas de áreas y volúmenes de algunas figuras y cuerpos geométricos que puede usarse a discreción.

De entre todas las actividades propuestas algunas merecen un comentario específico.

RECTÁNGULOS QUE RUEDAN

Conjeturar, probar libremente y discutir en grupo son las claves metodológicas para que esta actividad tenga éxito.

Aunque se tenga acceso a la fórmula del volumen del cilindro,

V = Superficie de la base x altura

el problema no estará resuelto, pues se deben determinar la superficie de la base conociendo la longitud de la circunferencia que la delimita:

$$2\pi r = 8 \Rightarrow r = \frac{8}{2\pi} = 1.2732... \Rightarrow V = \pi \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 12 = 61.115...$$

$$2\pi r = 12 \Rightarrow r = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi} \Rightarrow V = \pi \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 8 = 91.673...$$

Una extensión sobre el problema: ¿Es posible que sea indiferente la forma de hacer el cilindro en alguna ocasión?.

EQUIPAJE DE VUELO

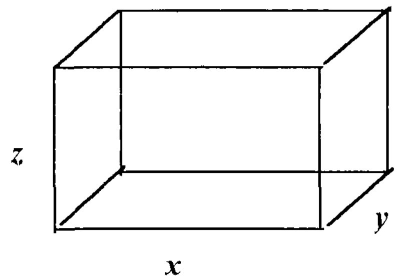
Este problema plantea la búsqueda de las dimensiones optimas de un prisma sabiendo que la suma de las tres es 1’80 m.

El procedimiento de búsqueda consistirá en confeccionar una tabla con distintas posibilidades, pero debe dejarse algún tiempo de reflexión para intentar que esta idea clave surja de los estudiantes.

Algunos detalles accesorios pueden requerir la intervención inmediata del profesor. Por ejemplo, a veces, con la sana intención de simplificar, surge la idea, en principio buena, de cambiar las unidades de metros a decímetros (18) o a centímetros (180) con lo que se hace desaparecer del dato del problema los molestos decimales. Pero esta estrategia, tiende a inducir una búsqueda de las dimensiones deseadas restringida innecesaria y fatalmente a los números naturales. Sin embargo esta trampa queda sorteada si se mantiene la estructura, incómoda es cierto pero sin dobleces, decimal inicial.

Si x, y, z son las tres longitudes buscadas, se debe cumplir: $x + y + z = 18$. Despejando una de las variables: $z = 18 - x - y$.

De todos estos valores se debe aquel o aquellos que consigan maximizar el valor del volumen.:



$V = x \cdot y \cdot z$. Esto es: $V = x \cdot y \cdot (18 - x - y) = 18\,x \cdot y - x^2 y - x y^2$.

Si se computa esta expresión para distintos valores de x y de y, resolviendo el problema -que no es solamente técnico- de inventar un procedimiento efectivo para registrar los datos, puede llegar a localizarse una buena solución al problema.

Puede evitarse que la fórmula anterior aparezca tan cargada si se particulariza para valores de una de las dos incógnitas:

y	1	2	3	4	5	...
V	$y_1 = x\,(17-x)$	$y_2 = 2x\,(16-x)$	$y_3 = 3x\,(15-x)$	$y_4 = 4x\,(14-x)$	$y_5 = 5x\,(14-x)$	...

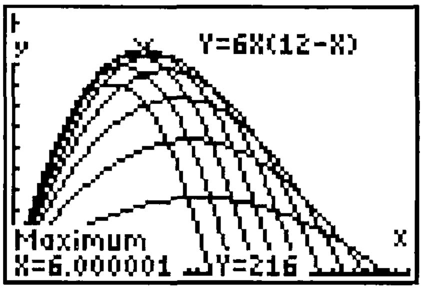
Se obtiene así para cada valor de y una función de x que da el volumen.

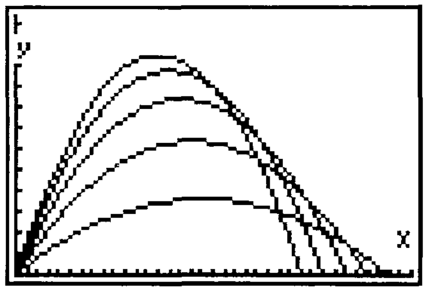
Expondremos ahora cómo representa una calculadora gráfica esas funciones, para valores de y entre 1 y 9, ($y_1, \ldots, y_9$), con los ejes entre los valores 0-18 para la x, y 0-300 para la y.

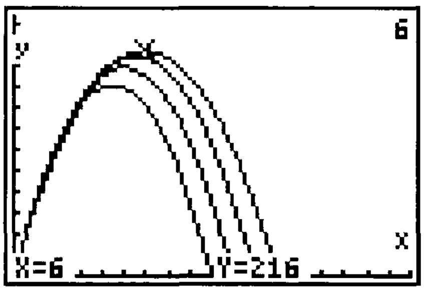
Todas juntas aparecen en la primera gráfica, por separado las cinco primeras y_1-y_5 en la gráfica que la acompaña y las cuatro siguientes en la central izquierda.

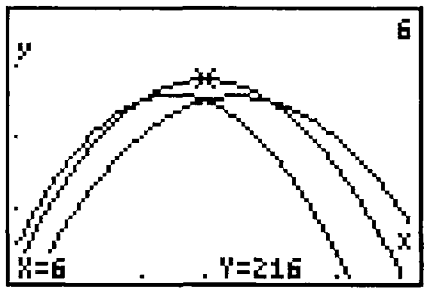
Ya en la primera se observa que el máximo se produce en $V = 6x\,(12 - x)$, de todas formas, la gráfica central derecha presenta un zoom de la zona superior de las gráficas en las que solo aparecen las $y_5 = 5x\,(13-x)$, $y_6 = 6x\,(12-x)$, $y_7 = 7x\,(11-x)$; el máximo se produce en el punto (6,216).

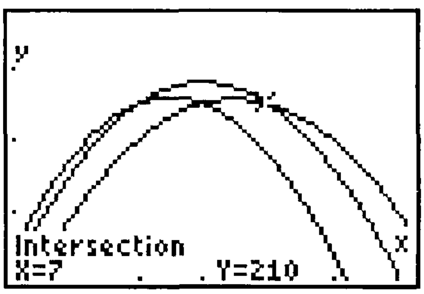
La gráfica inferior presenta la intersección de y_5 e y_6 (7, 210), que tiene un punto simétrico en la intersección de y_6 e y_7 (5,210) - el máximo y_5 se produce en (6'5, 211'25), y el de y_7 en (5'5, 211'75)-.











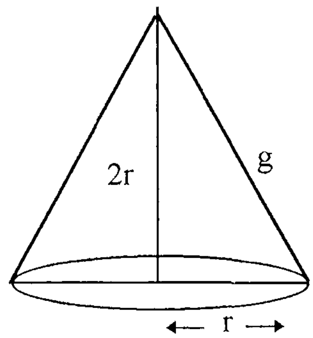
Resumiendo en una tabla algunos de los datos que se han obtenido:

y	5	6	7
x	6'5	6	5.5
z	6.5	6	5.5
V	211'25	216	211'75

Estos datos muestran que para la forma de paralelepípedo, el volumen máximo se alcanza con el cubo, cuando las tres dimensiones son iguales a 6. (Se puede ver que si en lugar de 5 y 7 se toman valores más cercanos a 6 se obtienen funciones que van acercando el valor de su máximo a 216).

LA TIENDA INDIA

En este problema se plantea una situación que combina la estimación -cuánta superficie útil de piel, para utilizarla en la construcción de una tienda, proporciona un búfalo- y el cálculo exacto que proporciona la fórmula de la superficie lateral de un cono de revolución:



$S = \pi \; r \; g = \pi \; r \cdot r \sqrt{5} = \pi \; r^2 \sqrt{5}$. puesto que: $g = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = r \sqrt{5}$

Ahora vendría la estimación: si suponemos que cada búfalo aporta, por término medio, una superficie *s*, y tenemos 25 de ellos, la superficie total será de 25 *s*. La altura será el doble de la r, que se obtiene desde:

$$25\, s = \pi \; r^2 \sqrt{5}.$$

Si estimamos que un búfalo reporta 1 m^2 de piel para la tienda,

$r^2 = \dfrac{25}{\pi\sqrt{5}} = 3.5588\ldots \Rightarrow r \cong 1{,}886\ldots$ m. $\Rightarrow$ Altura aproximada de la tienda 3.77 m.

El área habitable es la superficie de la base del cono:

$$S = \pi \; r^2 \cong 4.3 \text{ m}^2.$$

UN PEQUEÑO ERROR

Es muy llamativo que una diferencia de 1 cm. en la medida del diámetro de un depósito pueda suponer un importante desvío en la cantidad total de contenido del depósito.

La fórmula del volumen de una esfera de radio r puede introducirse ahora para aplicarla al caso que nos ocupa.

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi \; 8'35^3 = 2438.641924\ldots \text{ m}^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \; 8'36^3 = 2447.414009\ldots \text{ m}^3$$

La diferencia es $V_2 - V_1 \cong 8.772085\ldots$ m^3

Estas tres cantidades son m^3., que traducidos a litros (dm^3.) suponen una diferencia de 8772 litros, cantidad que se adivina respetable. Ahora solo falta tener en cuenta cuántos litros contiene, por término medio, una botella de butano. Según información de la propia compañía, cada bombona tiene una capacidad de 26'4 litros, se llena hasta el 85% y cada litro de gas pesa 0'572 kg. En una bombona se embotella por término medio, 22'44 litros de butano, lo que permite calcular la cantidad de botellas que se puedan llenar con los 8772 litros del error: más de 391 bombonas.

44. TEOREMA DE PITÁGORAS

Como es bien sabido el teorema de Pitágoras establece la relación numérica que deben guardar los tres lados -los dos catetos y la hipotenusa- de un triángulo rectángulo, pero también constituye un eficaz método para verificar si un triángulo dado es rectángulo o no conociendo las longitudes de sus lados.

El teorema de Pitágoras tiende pues un puente entre el concepto de perpendicularidad y el de medida. Todas las actividades de este apartado transitan por ese puente.

CONSTRUYENDO TRIÁNGULOS

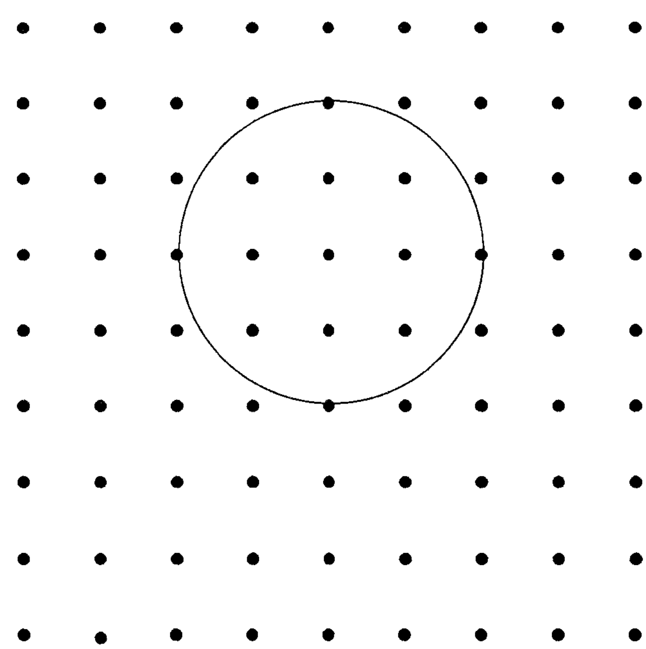
Esta actividad centra la atención en el procedimiento de construcción de triángulos cuando se conocen las longitudes de los lados, método que se aplica ahora para distinguir los triángulos rectángulos de los que no lo son.

En esa tarea se comprobará que no es suficiente con disponer de tres cantidades cualesquiera para obtener un triángulo (no existe un triángulo que tenga como medida de los lados 2, 2 y 8, por ejemplo). Se debe intentar encontrar la relación que deben guardar las tres longitudes entre sí para determinar un triángulo: todo lado mide menos que la suma de los otros dos.

El problema utiliza también el concepto de perímetro en una situación bien concreta. No aparece ningún triángulo con perímetro menor que 12. El primero aparece justo con ese perímetro y es el que tiene los lados con longitudes 3, 4 y 5 (en la figura del enunciado de la actividad).

Una ampliación del problema consiste en investigar qué ocurre cuando el perímetro es el doble o el triple, o un factor cualquiera de 12, con objeto de descubrir que los triángulos rectángulos correspondientes serían semejantes al anterior.

EQUILÁTERO



Equilátero significa que todos los lados miden igual, luego dos lados no pueden ser perpendiculares: en este caso el triángulo sería rectángulo y no equilátero. Por lo tanto si un lado discurre horizontalmente (o verticalmente) en la trama de puntos, ninguno de los otros puede hacerlo verticalmente (respect. horizontalmente). La figura muestra un segundo intento -infructuoso, por supuesto- de localizar puntos de la trama situados a una distancia entera del centro de la circunferencia y que no estén en su misma fila o columna.

Este es un buen problema en el que se debe llegar a la conclusión de que no es posible construir triángulos equiláteros *exclusivamente* con longitudes que sean múltiplos enteros de la unidad que genera la trama. Una situación similar era la planteada en la actividad de titulo CUADRADOS EN UN GEOPLANO y, como allí, la búsqueda de la figura deseada debe realizarse analizando una por una todas las longitudes no enteras que pueden construirse uniendo dos puntos de la trama.

PITÁGORAS Y LAS BALDOSAS. ROMPECABEZAS PITAGÓRICOS.

Se trata de comprender el significado del teorema mediante recortes o rompecabezas, el primero de las baldosas es el más elemental y claro. En conjunto, los rompecabezas son un recurso didáctico muy aleccionador y de éxito seguro.

¿SERÁ POSIBLE?

Se plantea aquí una aparente paradoja. Los rectángulos numerados de 1 a 4 son los mismos en las dos figuras, y unos pueden considerarse como mera traslación de los otros. Sin embargo, en una de las figuras, los rectángulos ocupan en conjunto un área de 13 x 5 = 65 cuadraditos, mientras que en la otra ocupan 8 x 8 = 64 cuadraditos. Lo cual no es posible.

Una manera de resolver el enigma consiste en observar la línea que hace de diagonal mayor del rectángulo 13 x 5 y comprobar que es única, esto es, que mantiene la misma pendiente en todos los tramos.

PITÁGORAS Y ÁLGEBRA

Con este problema se pretende llegar a la expresión algebraica que caracteriza al teorema de Pitágoras a partir de figuras que representan esa relación. Quede claro que ya antes se podía haber llevado a cabo esta tarea algebraica que tiene, al menos, el doble fin de mostrar la validez de representar algebraicamente relaciones geométricas y viceversa, y la de mostrar la generalidad del teorema, ya que las figuras geométricas a las que se aplica son triángulos rectángulos variados -isósceles y no-.

UNA DEMOSTRACIÓN DINÁMICA

Se presenta una impactante demostración geométrica del teorema de Pitágoras.

Los triángulos móviles son los que aparecen en blanco en la secuencia. Su desplazamiento se produce por los cuadrados dibujados sobre la hipotenusa y los catetos, rayados o cuadriculados en la figura.

PITÁGORAS Y EUCLIDES

Esta histórica demostración geométrica no es elemental, y para algunos estudiantes puede resultar todo un desafío interesante.

SEGMENTOS

Plantea un caso particular de CUADRADOS EN UN GEOPLANO, que ya se describió y comentó entonces. Se trata esencialmente de recurrir al teorema de Pitágoras en una de sus más típicas aplicaciones.

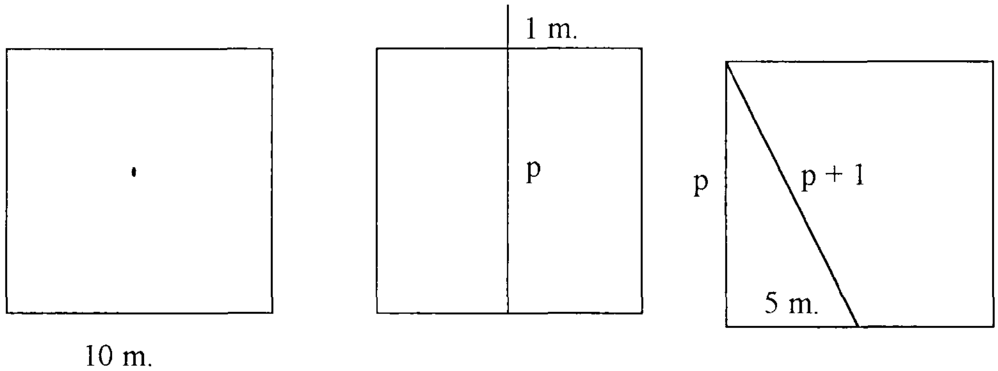
INFINITOS TRIÁNGULOS

Esta curiosa sucesión geométrica, creciente y decreciente, basada en el teorema de Pitágoras tiene dos vertientes, una geométrica, la comprensión del procedimiento, del algoritmo que genera las figuras, y otra numérico-algebraica, el cálculo de perímetros y áreas de las mismas.

CHING CHANG SUAN SHU. DIAGONALES .

En estos problemas se plantean aplicaciones diversas del teorema de Pitágoras

El problema del junco en el estanque tiende a ser resuelto en clase de esta manera:

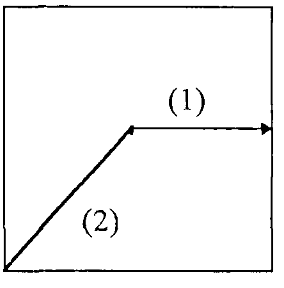


La primera figura es el estanque visto desde arriba. La segunda vista muestra un corte de forma que p designa la profundidad del estanque. En la tercera se constatan los datos relevantes de que se dispone, y se aplica el teorema de Pitágoras.

$(p + 1)^2 = p^2 + 5^5 \Rightarrow p = 12$ m. $\Rightarrow$ La altura del junco es de 13 m.

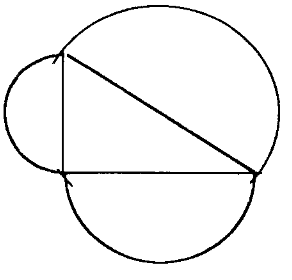
Pero, ¿qué se entiende por acercar el junco a la orilla de un cuadrado? ¿y si para que el junco quede a ras se debe acercar a la orilla pero en una esquina?...

Se ha resuelto el problema que muestra la figura adjunta, llevando el junco a la orilla de una manera equivalente a (1). Se puede pedir que consideren la manera equivalente a (2) y las intermedias, claro.



GENERALIZANDO

Como su título anuncia, esta actividad está dedicada a la generalización geométrica del teorema de Pitágoras considerando sobre los catetos y la hipotenusa no sólo cuadrados, sino cualquier otra figura, mostrando que la esencia del teorema se encuentra en la semejanza de las figuras que se construyen desde los lados del triángulo. Algunas figuras llegan a generar bellas composiciones.



45. INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

En este tercer curso se sientan bases suficientemente sólidas para comprender los fundamentos de la trigonometría, planteándose un conjunto de actividades que se inician alrededor de la medición de ángulos para pasar después a estudiar las relaciones de proporcionalidad existentes entre los lados de triángulos rectángulos semejantes.

Además se establece una primera relación entre estas proporciones y las funciones trigonométricas de la calculadora científica.

Finalmente se muestra sucintamente cómo las conclusiones obtenidas facilitan el cálculo de distancias inaccesibles conociendo determinados ángulos y determinadas distancias.

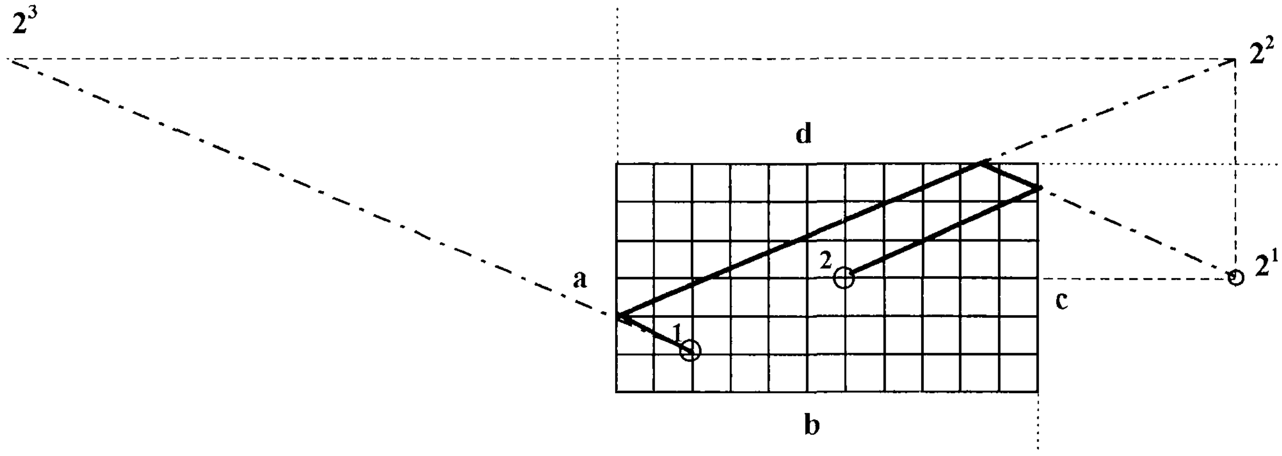
46. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

El estudio se inicia considerando algunas situaciones más o menos elementales relativos a simetrías y giros del plano, y que probablemente no resultan nuevas para los estudiantes. A continuación se pasa rápidamente a estudiar el giro con más profundidad y a explorar las posibilidades de combinación de varios movimientos. Para ello hay que tener en cuenta que el punto de partida presupuesto es la utilización de instrumentos de medida y de dibujo, y el puerto de llegada previsto es la formulación algebraica que permite describir los distintos movimientos y sus combinaciones.

BILLAR

El procedimiento es actuar desde el final, elegir la última banda en tocar la bola **1** antes de chocar contra la bola **2**, que puede ser cualquiera de las cuatro.

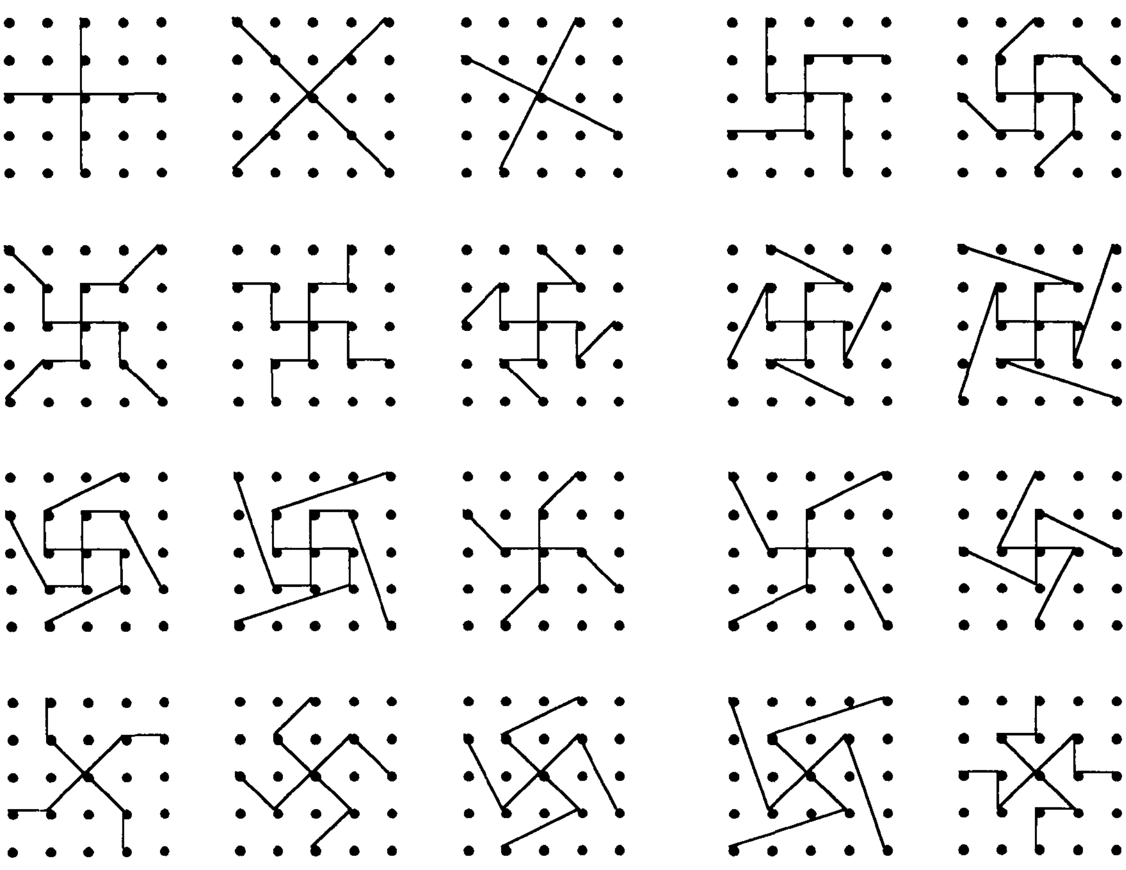
En la figura adjunta, supongamos que es **a** la última, la anterior sería cualquiera de **b** o **d.** Si es **d**, la anterior será **c**. Se trata de un problema de simetrías que se realizan sucesivamente sobre cada eje , y en orden inverso.

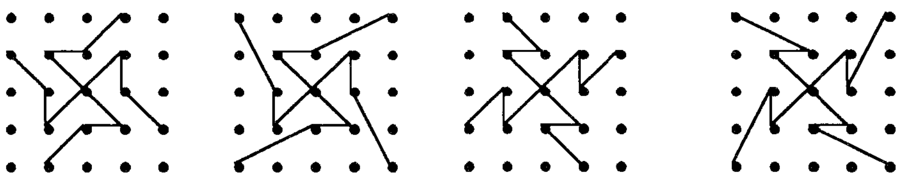


Trayectoria de la bola
Eje de simetría/Banda
Línea que llegan a simétricos respecto a los ejes
Línea que traza la trayectoria mínima

ROTACIONES EN UN GEOPLANO

Estas son las 24 soluciones:





EL JUEGO DE LAS ISOMETRÍAS

En este juego, como se indica en su presentación, intervienen simetrías, giros, traslaciones y sus combinaciones. Estos movimientos se conocen como las "isometrías del plano", y de ahí el nombre del juego.

La idea fundamental sobre la que descansa la concepción didáctica de este juego es que la consolidación y práctica de las destrezas, así como la formalización de conceptos y técnicas, es más efectiva si se ejercita en distintos contextos.

Por ejemplo, la identificación entre la ecuación de una recta y el grafo correspondiente trazado en un sistema cartesiano es una destreza particular que se convierte en especialmente dificultosa en casos específicos como las rectas de pendiente negativa o las rectas paralelas a los ejes. Así, entender que x=5 es también la ecuación de una recta, además de un número representado en el eje x, requiere una cierta especialización de las destrezas relativas a representación de rectas, al dejar de funcionar la estrategia *funcional* de calcular una pareja de valores (x,y).

Un acercamiento desde un contexto diferente al funcional consistiría en hacer entrar en juego tal tipo de rectas y de ecuaciones especiales desde el principio, con la finalidad de que la esencia de la cuestión vaya captándose con el uso *geométrico*, sorteando la secuenciación paso a paso que implica el esquema clásico desde la representación punto a punto a la construcción de tablas y, finalmente, a la representación gráfica.

Tal enfoque es el que se ha adoptado en este juego, en el que las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales intervienen como un *recurso lingüístico* que, sin duda, representa con la práctica un primer paso de abstracción y bosquejo de la destreza identificadora recta/ecuación. Como ya se dijo, se pretende la identificación de rectas verticales, horizontales, giros, traslaciones y simetrías por la vía de su uso, por los efectos que producen antes que por la introducción axiomática de los mismos.

CAPÍTULO X

PROBABILIDAD, ESTADÍSTICA, COMBINATORIA 3º

47. TABLEROS Y LÁMINAS

En el apartado **Tableros y Láminas** se presenta un material complementario que ha sido seleccionado para, en cada caso concreto:

- ser utilizado en una actividad determinada que aparece referenciada en la propuesta de trabajo homónima.
- sugerir propuestas de trabajo alternativas que cada profesor concreta en su momento y a su manera.
- disponer de material de apoyo que puede ser rentable en algún momento indeterminado.

CARRERAS DE CABALLOS, CAER AL AGUA, LAS TRES RULETAS 1 Y LAS TRES RULETAS 2

Facilitan ampliaciones de los tableros que acompañan las actividades del mismo nombre en el apartado de juegos.
Para hacer más atractivo y duradero el tablero se puede pintar, pegar sobre cartulina dura y plastificar.

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

Es necesario disponer durante el curso de una tabla de estas características, 2000 cifras aleatorias -pseudoaleatorias- agrupadas de 5 en 5 para facilitar recuentos y referencias, con el fin de utilizarlas para simulaciones probabilísticas.

LÁMINAS ESTADÍSTICAS I-V y LIGA ACB 91 / 92 I y II

Presentan material básico para estudiar estadísticas publicadas en los medios de comunicación -diarios, revistas, ...-. La muestra contiene representaciones gráficas variadas -pictogramas, diagramas de barras, diagramas de sectores, series temporales, que abundan de forma variada en los medios de comunicación, se pueden aprovechar para trabajar en clase contenidos estadísticos, con el aliciente de poder tratar temas actuales que interesan. Posteriormente se proponen actividades en dos sentidos, uno que parte de una gráfica determinada para dar pie a un trabajo específico y otro que propone un trabajo que necesita encontrar la gráfica (tabla, etc.) adecuada para poderse realizar. Se puede añadir una tercera vía de trabajo derivada del tiempo que haya transcurrido desde la publicación de la estadística hasta su utilización en clase: servir de referencia para comparar cómo ha evolucionado el tema en cuestión.

48. JUEGOS

Los materiales del segundo ciclo no son independientes de los del primero. Hay una continuidad entre los dos que hace recomendable tener en cuenta las actividades del bloque que se han desarrollado con anterioridad, dependiendo del proyecto de centro y de las programaciones llevadas a cabo, para poder recurrir, si así se considera, a aquellas que en una primera instancia fueron descartadas por una u otra razón.

El apartado de juegos, como se recomendó en el primer ciclo, contiene propuestas de trabajo que conviene considerar en conjunto para todo el ciclo, a fin de establecer un plan general de actuación que distinga las que se deben utilizar como actividades introductoras y las que pueden utilizarse durante el desarrollo de contenidos probabilísticos o estadísticos concretos. Todo ello teniendo en cuenta simultáneamente los dos cursos de la etapa, las precisiones que se adopten para cada opción de cuarto curso y las previsiones que se tengan para sobre el tratamiento de la diversidad.

CARRERAS DE CABALLOS

Plantea un problema de situaciones no equiprobables pues no se obtienen los resultados 0, 1, 2,..., 6 con la misma probabilidad. El tablero apropiado está en el apartado correspondiente, los dados y las fichas son fáciles de conseguir. La solución pasa por un recuento bien hecho, que se facilita con una tabla de doble entrada como la que muestra la Tabla I, o con un diagrama en árbol.

Tabla I

(—)		**1er dado**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	0	1	2	3	4	5
2º	**2**	1	0	1	2	3	4
d	**3**	2	1	0	1	2	3
a	**4**	3	2	1	0	1	2
d	**5**	4	3	2	1	0	1
o	**6**	5	4	3	2	1	0

A la vista de la tabla, de los 6 x 6 = 36 resultados posibles, el número de ocasiones en que se produce resta 0, 1, ... es:

0	1	2	3	4	5	6
6	10	8	6	4	2	0

Esta última tabla mide las posibilidades de avance de cada caballo, que traducidas a probabilidades son:

p (0) = 6/36 p (1) = 10 /36 p (2) = 8/36 p (3) = 6/36 p (4) = 4/36
p (5) = 2/36 p (6) = 0

En cada tirada, la probabilidad de que avance un caballo X viene dada por la probabilidad de que al lanzar los dos dados se obtenga la diferencia X. Está claro que si algún despistado ha colocado una vez su ficha en la casilla , no vuelve a repetir esta estrategia, pues se da cuenta inmediatamente de que no avanzará nunca: salir diferencia 6 es un suceso imposible. Salir 1 (diferencia 1) es lo más probable, después salir 2, después -igualados- salir 0 y salir 3, después salir 5, y lo menos probable es salir 6 que es imposible. Es posible establecer algunas comparaciones, como por ejemplo que salir 4 tiene doble de probabilidad que salir 5, y la mitad que salir 2. Será más probable que ganen los caballos que se coloquen en los números que tienen más probabilidades de obtenerse, el 1, el 2, etc., sin que esto quiera decir que no puedan ganar en una partida otros caballos, pero lo harán en muy pocas ocasiones, porque además para ganar hace falta que salga 10 veces el número propio antes que otro llegue a 10 también, lo cual es difícil.... Y mucho más si se alarga el tablero.

CAER AL AGUA

El tablero con el mismo nombre está en el apartado de Tableros y Láminas. El mecanismo del juego es similar al de **CARRERAS DE CABALLOS**, al que puede complementar o sustituir. La tabla de posibles diferencias y expectativas para cada una es la misma de aquel caso. El aspecto diferenciador es que aquí se deben estudiar todos los resultados posibles e interpretarse con vistas a establecer una estrategia de colocación de las fichas en las casillas.

Pronto se ve que no es buena la estrategia de poner todas las fichas en la casilla del 1, aunque sea este el resultado que más probabilidad tiene de producirse, y que es mejor repartirlas en varias casillas porque los resultados del lanzamiento de los dados varían. La cantidad de fichas que se pone en cada casilla debe respetar un poco la proporcionalidad con la probabilidad del número de la casilla. Así, no se pondrá ninguna en la casilla 6, pues ese resultado no saldrá nunca. Poner al juego una limitación de tiradas hace que no se eternice y le da agilidad. 30 tiradas son suficientes para apreciar qué tipo de estrategia funciona mejor y se aproxima a la óptima.

Se puede proponer a los estudiantes que por grupos discutan y elijan una estrategia de colocación de fichas con la que enfrentarse a otro grupo, y organizar un torneo. Después de haber visto varias veces cómo funciona la estrategia se puede discutir si modifican la estrategia adoptada o no y cómo saber qué estrategia es mejor (hacer una estadística sobre un determinado y amplio número de partidas jugadas, elaborar o proponer la elaboración de un programa que simule el juego en una calculadora gráfica o en un ordenador, etc.)

LAS TRES RULETAS

También tiene el tablero homónimo en el apartado correspondiente. El juego se debe practicar primero para ver qué conclusiones se extraen. Hay que examinar las ruletas dos a dos y compararlas. Y como en toda comparación se ponen en juego estrategias de análisis de semejanzas y de diferencias y de razonamiento lógico que enlacen entre sí las observaciones. Los dos juegos de ruleta propuestos permiten una buena introducción al análisis de juegos que aparentemente son justos, equiprobables o indiferentes.

En cada ruleta se produce uno de los dos resultados con igual probabilidad 1/2, por lo tanto se puede simular con un dado poniéndole a las caras esas puntuaciones con papeles adhesivos en igual proporción (A: tres cincos-tres treses, etc.), o con una moneda.

Para decidir qué ruleta es preferible, se analizarán las tres posibilidades de partida que se pueden dar:

A con B

Si en B sale 1 pierde, independiente del resultado de A, pues es 3 o 5.
Si en B sale 6 gana, pues es mayor que cualquier resultado de A.
B gana en la mitad de ocasiones y pierde en la otra mitad con respecto a A y viceversa.
Veámoslo en una tabla:

En A sale	En B sale	Gana	Gana cada ruleta
3	1	A	P (gana A) = 2/4 = 1/2 p (Gana B) = 2/4 = 1/2
	6	B	
5	1	A	
	6	B	

A con C

En A sale	En C sale	Gana	Gana cada ruleta
3	4	B	P (gana A) = 3/4 p (Gana B) = 1/4
	2	A	
5	4	A	
	2	A	

B con C

En B sale	En C sale	Gana	Gana cada ruleta
1	4	B	
	2	B	P (gana B) = 2/4 = 1/2
6	4	A	p (Gana C) = 2/4 = 1/2
	2	A	

Se puede concluir entonces que las ruletas A y B, y las ruletas B y C permiten juegos equitativos, pero no así la A y la C (no hay transitividad de la relación). La elección de la ruleta A fuerza al contrario a elegir la ruleta B para que al menos el juego sea equilibrado en cuanto a posibilidades de ganar. La elección de la ruleta C es mala, pues el contrario elegirá la A y tendrá más opciones de ganar. La elección de la ruleta B hace que sea indiferente para el contrario elegir la A o la C, ya que con ambas mantiene un equilibrio en cuanto a posibilidades de ganar.

Las ruletas que vienen en la lámina LAS TRES RULETAS 2 presentan una situación más curiosa que la anterior, pues procediendo como en el juego anterior, construyendo las tablas que permiten la comparación -o por cualquier otro procedimiento que se haga-, se llega a la conclusión que A es preferible a B, B a C, y C a A en las dobles comparaciones que se realizan.

Con lo cual, se llega a una situación en la que lo peor es elegir primero, pues el contrario puede encontrar una ruleta que le ofrezca más posibilidades de ganar.

TRES MONEDAS

Se basa en un recuento sistemático de los posibles resultados que se producen al lanzar tres monedas y asignar a cada jugador los que le son favorables. Así se consigue la probabilidad teórica y orienta en la elección de qué jugador se desea ser.

La segunda parte del problema se centra en aspectos estadísticos. De nuevo hay que prestar atención a las afirmaciones precipitadas sobre los casos posibles llamando la atención sobre la necesidad de un análisis cuidadoso mediante enumeración exhaustiva usando un diagrama en árbol o simple listado.

La descompensación es muy clara y debe ganar la ficha A en muchas más ocasiones (6:2)

EL FERIANTE

Se trata de conjeturar y probar y, luego, de justificar si ganará o no el feriante y cuánto ganará.

Parece evidente que los que ofrecen juegos lo hagan para ganar y para ello ofrecen algún premio tentador, pero el que juega debe saber qué pasa con el juego realmente y asumir riesgos.

La esperanza de ganancia del juego es de 3/6 x 4 + 2/6 x 6 + 1/6 x 12 = 6 duros. Luego, a la larga, saldrá ganando el feriante.

El razonamiento que lo justifica no es fácil, pero alguno llega a decir que como todos los resultados tienen la misma posibilidad, basta con analizar lo que ocurre en una serie de ellos -ver cómo queda cuando sale 1, 2, ..., 6- ya que luego será pura repetición; lo que conduce a los cálculos hechos, que se compara con el pago que hay que adelantar para jugar de 8 duros. El estudio estadístico se puede realizar si participa toda la clase y se conjuntan los resultados.

49. PROBABILIDAD

LA MONEDA

En experimentos aleatorios con resultados equiprobables la tendencia a considerar que los resultados, cuando se realiza un número elevado de pruebas, deben estabilizar sus proporciones de aparición, sus frecuencias relativas, conduce a olvidar que el resultado de cada prueba es independiente del resultado de la anterior. Si se piensa que se puede producir cara o cruz en el lanzamiento de una moneda pero, cuando se produce una racha de uno de los resultados, se tiende a pensar que aumenta la probabilidad de que se produzca el otro. Esta conclusión se conoce por el nombre de Falacia de Montecarlo, pues en su famoso casino los jugadores tienden a apostar rojo después e producirse una racha de negro, o viceversa.

La propuesta pretende plantear el problema y provocar que se considere, que se imagine, la situación, que los alumnos piensen y expresen sus ideas y que planteen cómo se podría estudiar de forma que, aportando datos, se llegue a alguna conclusión.

Didácticamente se puede orientar hacia la realización del experimento aleatorio que reproduzca la situación, utilizando la tabla de números aleatorios. Se estudiará si después de obtener tres resultados iguales -o cuatro- al lanzar una moneda, el siguiente resultado es diferente con mayor probabilidad. Simulado por toda la clase, el resultado estadístico debe acercar a la idea de equiprobabilidad para el cuarto lanzamiento.

Esto en teoría es así, en la práctica se ha registrado la anécdota histórica en el citado Casino de Montecarlo, en el que el resultado rojo se produjo en 32 ocasiones seguidas, siendo la causa de grandes pérdidas por parte de algunos jugadores, que pensaron debía aparecer el negro antes y apostaron fuerte (Weaver, 1950). La probabilidad teórica de que ocurra eso es de $\left(\frac{1}{2}\right)^{32}$, aproximadamente una vez en cuatro mil millones.

LOTERÍA PRIMITIVA

Plantea el problema qué combinaciones tienen mayor probabilidad de salir en el juego homónimo. Todas las combinaciones posibles, una a una, tienen la misma oportunidad de aparecer, debiéndose a preferencias personales jugar unas u otras. Pretende provocar la discusión en torno a las ideas previas sobre combinaciones que no pueden salir, porque son dificilísimas, las más sensatas, combinaciones fijas, con números relacionados con acontecimientos familiares, etc. La idea es que se llegue al concepto de juego de azar independiente de nuestra intervención.

LOTERÍA

De nuevo el tema de que ambos números son únicos y tienen la misma probabilidad de salir. Se trata de que aparezca la idea de que obtener todas las cifras consecutivas es dificilísimo, pero que obtener una secuencia predeterminada de cifras no consecutivas es igual de difícil.

BONOLOTO

Cabe observar lo mismo que en el problema anterior. Sólo jugando se tiene la posibilidad de ganar, pero, hay que insistir, el juego es en cada sorteo independiente, no tiene memoria.

SUPERSTICIONES

Es una creencia y una práctica muy extendida la de poseer objetos o realizar ciertas acciones que proporcionan buena suerte. Se puede discutir las actitudes y creencias personales de los estudiantes de la clase. Sin más comentarios.

EL DADO

Plantea la necesidad de predecir un resultado basándose en el conocimiento de qué pasa al lanzar un dado cúbico de números 1 a 6, en el que teóricamente, la probabilidad de aparición de cada cara es la misma (1/6). Una buena estimación sería esperar 5 veces cada número si el dado se lanza 30 veces. Como la mitad de las caras son pares y la otra mitad impares, una buena primera asignación cifraría en 15 las apariciones impares esperadas. La práctica mostrará, se supone, la diferencia que hay entre lo esperado y obtenido experimentalmente.

Si no se ha hecho antes, será necesario exponer previamente qué es la frecuencia relativa y calcularla.

Además, se puede reflexionar sobre las siguientes propiedades:

P(sale 6) y P(sale impar) son números comprendidos entre 0 y 1.

P(sale 6) < P(sale impar).

BARAJAS

La actividad pretende que se realicen asignaciones probabilísticas en espacios discretos con sucesos elementales equiprobables. Cada suceso simple tiene una probabilidad de 1/40 y cada suceso compuesto tiene una probabilidad que depende del número de sucesos elementales que lo componen. Merece la pena prestar atención a la forma de calcular P(no as) y explicitar que P(no as) = 1 - P(as) (y que P(as) + P(no as) = 1), así como al cálculo de los otros dos sucesos compuestos en los que, en ambos, hay intersección de sucesos no vacía.

P (caballo de copas) = 1/40 P(as) = 4/40 = 1/10

P(no salga oros) = 30/40 = 3/4 P(no salga as) = 36/40 = 9/10

P(figura o copas) = 19/40 P(par o múltiplo de 3) = 24/40 = 3/5

URNA I

Supondremos que las bolas del mismo color son indistinguibles entre sí (en caso contrario, que las distingan y que procedan de modo similar), una buena manera de proceder es modelar la situación mediante un diagrama en árbol, otra forma es mediante una tabla de doble entrada, otra, mediante asignación de áreas de un cuadrado. Otra, mediante simulación, asignando los números 1,2,3,4 para las bolas amarillas y el resto a las verdes y realizando dos extracciones (tomando una pareja de números aleatorios).

	A	A	A	A	V	V	V	V	V	V
A										
A										
A										
A										
V										
V										
V										
V										
V										
V										

Tabla de doble entrada para analizar la situación

MÁS DADOS

Se plantea reflexionar sobre el concepto de espacio muestral, reflexión que puede dirigirse a considerar otros experimentos aleatorios y su espacio muestral asociado, y, posteriormente, a la consideración de sucesos contrarios y al cálculo de su probabilidad, ideas que ya han aparecido anteriormente en la actividad BARAJAS. En este caso, el contexto es de dados, y el control de los casos es fácil. Se puede considerar la suma y la resta de fracciones en contexto y con números asequibles; así como el paso a decimales y la realización de los cálculos adecuados.

La asignación de probabilidades que se pide pretende hacer aparecer la idea de la experimentación como recurso, y la idea de regularidad y simetría, que se manifiesta en las seis caras del dado y que permite asignar "a priori" la probabilidad 1/6 al resultado de cada cara.

URNA II

Se plantea el análisis de extracciones de bolas en una urna con y sin reemplazo, para comparar los resultados entre sí. Cuando se devuelve la bola tras cada extracción no varía la probabilidad inicial para cada color, mientras que si se retiene la bola extraída, sí. Además, se plantea el problema del orden de extracción de las bolas, ya que no es lo mismo que las dos primeras sean blancas y la tercera negra que dos sean blancas y una negra (que incluye el otro caso). Un detallado diagrama en árbol facilitará la comprensión de la situación y el cálculo consiguiente.

Con reemplazo: $P(b,b,n) = 10/20 \cdot 10/20 \cdot 2/20 = 1/40$

$P(2b \text{ y } 1n) = P(b,b,n) + P(b,n,b) + P(n,b,b) = 3 \cdot 1/40$

Sin reemplazo: $P(b,b,n) = 10/20 \cdot 9/19\ 2/18 = 1/36$

y, $P(2b \text{ y } 1n) = 3 \cdot 1/36$

CLARA O SUSANA

En principio cualquier serie de resultados se puede producir, por extraña que sea, pues en cada lanzamiento puede resultar cara o cruz con la misma probabilidad. No hay por qué pensar, pues, en que ninguna ha hecho trampa. Admitiendo que la sospecha se produce por causas externas, observaríamos las series para intentar detectar la trampa, confeccionando una tabla con los unos y ceros (caras y cruces) de las series.

	Caras	Cruces
Clara	78	72
Susana	67	83

Lo que tampoco aclara nada, los dos resultados están dentro de las posibilidades *normales* de producirse. Cabe pensar que como los lanzamientos que se hacen son 150, y uno de los resultados se acerca más al intermedio se podría haber buscado intencionada y fraudulentamente este resultado, pero también se podría sospechar que el otro resultado se aleja intencionadamente de ese 75-75. Insistimos, los dos resultados, como fruto de una experiencia, son igualmente creíbles.

MESES DEL AÑO

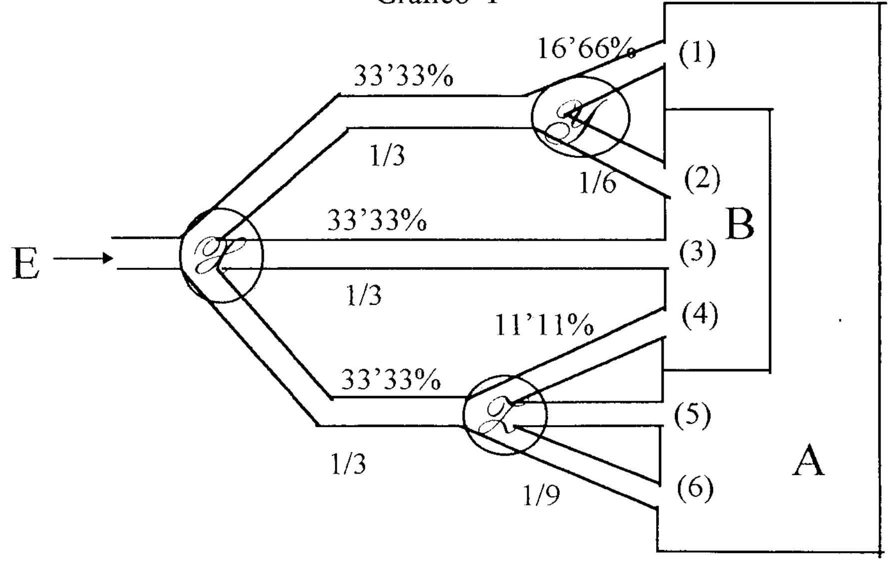
Este es otro ejemplo de cálculo de probabilidades en el que se debe en primer lugar determinar el espacio muestral, discreto, y a partir de él, realizar las asignaciones probabilísticas correspondientes. Se plantea la probabilidad de sucesos contrarios y sucesos condicionados. En este último caso, cambia el espacio de referencia, el espacio muestral: se sabe que acaba en O -se reducen a 7 los casos posibles- y se pide la probabilidad de que sea Enero, es decir, 1/7. El caso de la probabilidad condicionada requiere atención expresa. Se puede empezar a abordar el problema de la simbolización:

p (Junio) = 1/12 p (no Junio) = 11/12
p (mes de verano) = 3/12 = 1/4 (interpretar este resultado como una de las cuatro estaciones del año). p (no V) = 9/12 = 3/4.
p (Enero/termina en O) = 1/7

LABERINTO PARA CONDENA

Plantea el problema del cálculo de probabilidades condicionadas, de diagramas en árbol, en un laberinto en el que seguir por cualquiera de las ramificaciones tiene la misma probabilidad. En clase se resuelve de varias maneras, pero se debe exigir que primero se formule una estimación de la solución, para pasar a precisar, posteriormente, realizando los cálculos necesarios. Esto se hará asignando probabilidades en términos de porcentajes o de fracciones en cada rama (Gráfico I), o mediante el modelo geométrico de asignación de superficies (Gráfico II):

Gráfico I



Siguiendo el Gráfico I -adaptación de la figura del problema-, se ve qué finales de los seis que hay conducen a A y a B, y se calcula el porcentaje o la fracción que acaba en cada final. Así,

p (acaba en A) = p (1) + p(5) + p(6) = 7/18

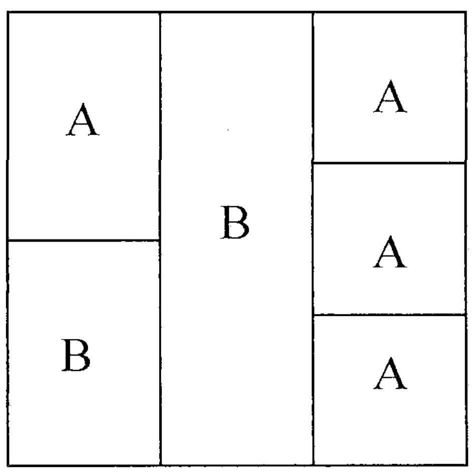
p (acaba en B) = p(2) + p(3) + p(4) = 11/18

Si se calcula con los porcentajes que le corresponde a cada rama, se obtiene:

p (acaba en A) = 38'88 y p (acaba en B) = 61'10

Con lo que la suma no totaliza el 100 %, y se puede preguntar por qué ocurre esto.

Gráfico II



La asignación geométrica se hace considerando un cuadrado de área 1 y teniendo en cuenta las ramificaciones que se producen. Hay tres franjas rectangulares iguales porque en X hay tres ramas con asignación equiprobable, lo que divide el área total en tres partes. Cada tercio tiene en cuenta sus ramificaciones propias, que evidentemente afectarán a su área. Uno de los tercios se dividirá en dos partes iguales, el otro no se dividirá y el tercero lo hará en tres partes. La letra A aparece en tres zonas y la B en otras tres, pero no ocupando la misma superficie. Sólo hay que saber calcular esas áreas -problema geométrico-, en cantidades numéricas que coinciden con las anteriores y con iguales consideraciones (porcentajes, fracciones, decimales).

Si se quiere ayudar al condenado, en el sentido de evitarle en lo posible el león, queda claro que éste se debe situar en la zona A. Resultado que, a primera vista, sin efectuar cálculos, se podía haber estimado.

Esta es actividad proporciona una buena ocasión para relacionar fracciones, decimales y porcentajes y para intentar comprender la probabilidad condicionada, pues, por ejemplo, la probabilidad de que el condenado acabe en (1) es la probabilidad de que pase por las dos ramas que conducen a (1). Esto es, p (acaba en (1)) = p (pasa hacia (1) por Y) · p (pasa hacia (Y) por X)

Para acabar, se puede proponer a los alumnos que inventen un problema que reproduzca en esencia la situación y que les sirva para analizar cómo influyen las variaciones que introduzcan.

FICHAS

La primera sensación que se produce en clase al leer el enunciado es que, si se sabe que una cara es roja, debe haber un poquito más de probabilidad de que la ficha escogida sea la que es roja por las dos caras. Pero pronto razona alguien que sólo hay dos fichas y que es cierto que se ve roja, claro, pero la de detrás igual puede ser roja -ficha roja-roja, RR- o azul -ficha RA- por lo que las probabilidades son del 50% , 1/2, o una de cada dos.

El profesor debe tener preparadas unas fichas adecuadas uniendo dos fichas relativamente grandes, del mismo color , rojas, y dos fichas del mismo tipo y tamaño, una roja y otra azul. Solo hay que poner algo en el borde de las dos dobles fichas de forma que sean aparentemente iguales pero cumpliendo las condiciones del problema. Poniéndolas en una caja saca una de cara a los alumnos y sugiere que intenten adivinar de qué color es la cara que no ven -si es roja o es azul-. Así se hace 20 veces, en las que el profesor toma nota del color de la cara que no muestra, y se hace al final el recuento. Así se puede ver cómo piensa cada uno y quién, a la vista de los resultados que se obtienen, mantiene o cambia sus ideas iniciales. La estadística es clara, mostrando tendencia a que sea doble el número de veces que aparezca la ficha RR que la ficha RA.

La explicación no es fácil, pero para intentar aclarar la situación se puede hacer un diagrama en árbol o una tabla como la siguiente:

	1ª cara	2ª cara	Resultado
Ficha RA	A	R	AR
	R	A	RA
Ficha RR	R	R	RR
	R	R	RR

que muestre cómo de los tres resultados que tienen como primera cara R, hay dos que tienen como segunda cara R y una que tiene A.

BOLAS BLANCAS Y NEGRAS

La primera parte es comprensible y asequible. Se trata de una probabilidad condicionada, se extrae una segunda bola sin devolver la primera, con lo que el cómputo se hace sobre las tres bolas que quedan.

p (2ª bola blanca/ 1ª, extraída, blanca) = 1/3.

La segunda parte es más dura, queda fuera del alcance de la primera intuición y sólo pretende que se discuta qué se podría hacer para averiguar lo que se pide. Se puede realizar una estadística entre toda la clase para observar que se acerca a 1/3. Si se hace un diagrama en árbol se puede razonar sobre el hecho de que, sin saber cuál es la primera bola, la segunda puede ser blanca o negra con igual probabilidad; pero cuando la primera es blanca, la segunda sólo lo es en proporción de 1/3 . En cambio, cuando la primera es negra la segunda es blanca en proporción de 2/3. De todas las bolas blancas que aparezcan como segunda bola, un tercio ha sido aportado cuando la primera extracción ha sido blanca y 2/3 cuando la primera extracción ha sido negra. Por lo tanto esa debe de ser la proporción pedida 1/3.

DADO ICOSAÉDRICO

Una primera idea para la resolución es hacer una estadística de los ceros y de los unos obtenidos: 43 y 77 respectivamente. Puede ayudar más si se hace la estadística recogiendo los datos por cada fila de las seis que hay. Se obtiene:

0	8	8	7	7	6	7	Total: 43
1	12	12	13	13	14	13	Total: 77

La proporción de ceros y de unos (43/120, 77/120) indica estrictamente que en una serie de 120 lanzamientos de un dado icosaédrico en 43 ocasiones se ha obtenido 0 y en el resto 1. Pensemos esto en primer lugar, que es uno de los resultados posibles al lanzar un dado de veinte caras con diez ceros y diez unos. Pero, desconociendo la proporción real, alguna conjetura se puede hacer sobre la distribución de unos y de ceros en el dado. Si el dado estuviera equilibrado en el reparto, la probabilidad de cada cifra sería la misma. Confeccionemos una tabla con distintas proporciones de ceros y de unos en ese orden y los resultados esperados para 120 lanzamientos:

	Proporción 1:1	Proporción 1:2
0	60	40
1	60	80

Sin más información, parece que las series de 20 tiradas muestran indicios de que la proporción de unos y de ceros no es la misma. Un poco más ajustado sería entonces proponer que el dado ha sido numerado en una proporción 1:2 y confeccionar una ruleta con la misma proporción para simular sus tiradas. La idea básica que implica esta actividad es la de construir un modelo que se ajuste a los datos disponibles, sin pretender más que cuestionar lo que parece evidente buscando planteamientos acordes a los datos y explicaciones posibles.

CARMEN E ISABEL

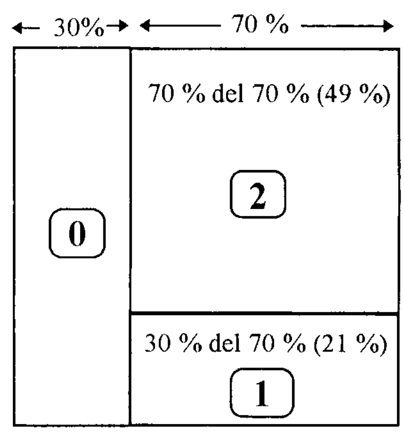
La intuición falla en muchas ocasiones. La probabilidad no es 1/2 que parece ser la primera idea que surge y la que sería correcta si cada una gana a la otra la mitad de las veces. Pero resulta que hay ocasiones en que empatan.

		Dado de Carmen					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
I	**1**	-	C	C	C	C	C
s	**2**	I	-	C	C	C	C
a	**3**	I	I	-	C	C	C
b	**4**	I	I	I	-	C	C
e	**5**	I	I	I	I	-	C
l	**6**	I	I	I	I	I	-

La probabilidad pedida, la de que la puntuación de Carmen sea superior a la Isabel es de 15/36.

BALONCESTO

Conviene realizar algún tipo de gráfico que ayude a asignar las probabilidades, bien construyendo un diagrama en árbol, bien recurriendo al modelo geométrico de superficies, por ejemplo. Se puede dibujar un cuadrado 10 x 10, para facilitar los 'repartos'.



Vayamos por apartados:

a) Que obtenga 2 puntos.
b) p (0) = 0'3 > p (1) = 0'21
c) p (1) = 0'21 < p (2) = 0'49
d) p (0) = 0'3
e) p (acertar primer lanz.) = 0'7
f) p (2) = 0'49
p (obtener 2/ acertado el primero) = 0'7
g) p (1 ó 2) = 0'7

CON DOS DADOS

La puntuación media que obtiene en 6 tiradas es la suma de los puntos de las caras para cada dado, y para 12 tiradas, el doble para los dos. Los puntos del primer dado D_1 suman 21. Los del segundo D_2 suman 22. No es justo el juego: al cabo de 12 tiradas la puntuación esperada de D_1 es 44 y la de D_2 es 42. Esa será la proporción en la que deberían apostar para que el juego fuera justo.

CON GAFAS

Trata de relacionar las estadísticas que se elaboran con la probabilidad.

Supongamos que en el centro de 400 alumnos se cumple numéricamente la estadística que afirma que el 25% de las estudiantes lleva gafas. Habría 100 con gafas. Si se consideran los datos conforme están, la probabilidad de que un alumno elegido al azar lleve gafas sería del 25% (cumpliendo la estadística). El segundo alumno, estadísticamente, tendría una probabilidad de 100/399 (si suponemos que hay 100 y no llevaba gafas el primero que se elige, quedan 100 sobre 399).

BOLAS DE COLORES

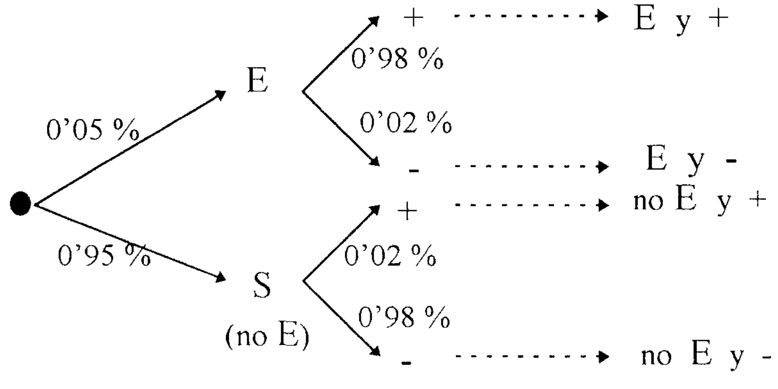
Se puede practicar primero el juego, anotando qué pasa y cómo quedamos al final de las 20 partidas. Para ver qué pasa a la larga hay que comparar lo que se paga con lo que se puede ganar, esto es, con la esperanza de ganancia del juego.

A la larga se sacará la distribución de la bolsa de bolas, es decir que de cada 8 veces que se juegue se esperará obtener 5 rojas (R), dos verdes (V) y una amarilla (A), con lo que si se paga 80 pesetas (10 pesetas por partida) se podrá ganar: $2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 = 70$ pesetas. La ganancia esperada es negativa, con lo que a la larga se perderá dinero.

EL ANÁLISIS

No es fácil interpretar lo que plantea el problema en el terreno cuantitativo. El problema es fácilmente asimilable a la posibilidad de que pase realmente. De hecho es un problema planteado socialmente y con repercusiones personales importantes, baste pensar en que a una persona concreta se le puede asegurar que padece una enfermedad incurable o *simplemente* que es portador del virus del SIDA, cuando realmente no está enfermo. Hasta que se aclare la situación mediante la repetición de análisis o el seguimiento de la enfermedad y se descubra que no está enfermo, se pueden haber causado daños físicos, debidos a la aplicación de fármacos improcedentes, y psíquicos. Estas ideas pueden animar a abordar el problema, pero no lo simplifican.

Un diagrama en árbol o una tabla, ayudan a razonar sobre la situación .



La probabilidad de que una persona elegida al azar esté enferma (E) y dé positivo (+) se obtiene multiplicando las probabilidades que tienen sus ramas. En este caso:

$p(E\ y\ +) = p(E)\ p(+/E)\ ] = 0'05 \cdot 0'98 = 0'49$

La probabilidad de que habiendo dado positivo esté realmente enfermo es

$$p(E / +) = P(E \text{ y } +) / p(+)$$

Esto es equivalente a considerar los casos favorables a que la persona esté enferma y haya dado + sobre los casos totales que dan positivo. Dan positivo dos ramas del árbol, que totalizan una probabilidad de 0'05 · 0'98 + 0´95 · 0'02 = 0'68

Luego, p (E/ +) = 0'49 / 0'68 = 0'720... Aproximadamente, el 72% de los casos que han dado positivo confirman luego la enfermedad. Desde luego es para preocuparse.

CÓLERA

Es un problema duro que trata de presentar cómo se trabaja con las tablas de contingencia y su utilidad. No es ésta una actividad adecuada para ser abordada por toda la clase. Supone conocer bien el trabajo con tablas, su funcionamiento, y disponer de ciertas destrezas algebraicas nada elementales. No obstante, mediante ensayo y error sobre una de las cantidades (por ejemplo la que aparece como 0'01x) se puede llegar rápidamente a la solución. La cuestión es resolver cómo a partir de los datos que nos dan podemos pasar a rellenar la tabla, consiguiendo los números que verifiquen las condiciones expresadas. De alguna forma, se obtendrá una tabla numérica que habría podido proporcionar las informaciones resumidas en forma de tasas.

Conviene comprobar y agrupar los datos que recoge la información, realizando los cálculos que sean necesarios para disponer de toda la información posible:

358.890 + 134.953 + 12.568 + 311 + 26 = 506.789 son los casos totales.

Los muertos son M = 16.707, por lo que los que no han muerto son: no M= 490.091

La tasa teórica de mortalidad del cólera tratado es del 1%. El 1% de 506.798 totaliza 5.068 muertes.

La tasa teórica de mortalidad del cólera no tratado es del 60%. El 60% de 506.798 significa 304.079 muertes.

Hay 16.707 - 5.068 = 9.639 muertes de cólera de no tratados.

Del mismo modo, 16.707/ 506.798 0 = 0'0329657... ó 3'29 % es la tasa global de mortalidad

Hagamos una tabla de contingencia con los datos que tenemos y hagamos valer los índices teóricos de la noticia. Llamemos x al número de personas tratadas (T)

	T	no T	Totales
M	0'01x	16707 - 0'01x	16.705
no M	0'99x	490091-0'99x	490093
Totales	x	506798 - x	506798

Si consideramos la tasa teórica de mortalidad del cólera sin tratamiento, 60% de (16705 - 0'01x),

$$0'6\ (506798 - x) = 16707 - 0'01x \quad \Rightarrow \quad x \quad 487.074$$

La tabla completa queda:

	T	no T	Totales
M	4871	11834	16.705
no M	482203	7890	490093
Totales	487074	19724-	506798

que permite pasar fácilmente a la que pide el problema.

50. ESTADÍSTICA

CALCULADORA I

Es la primera actividad específica de Estadística en este curso y trata de remarcar la importancia que tienen los medios técnicos de cálculo en su estudio; en este caso, y por a la vez que asequible de precio, eficaz, la calculadora. Es necesario conocer el funcionamiento para cálculos estadísticos de la calculadora, cómo introducir los datos y cómo interpretar los resultados que proporciona, para facilitar en gran manera la obtención de conclusiones, evitando largos y tediosos cálculos, y permitiendo la concentración de esfuerzos en entender qué se hace y para qué sirve. Realmente, los avances tecnológicos suponen un importante catalizador que facilita el estudio de la Estadística y su presencia en la sociedad.

Como actividad introductoria que es y con la finalidad antes expuesta se propone el cálculo de la media aritmética (media a partir de ahora) $\overline{x}$ realizando los cálculos intermedios oportunos y utilizando los cálculos directos que incluye la calculadora. Se trata de que los alumnos vean cómo se hacen estos cálculos y aprendan a estimar el resultado previsible, controlando los resultados de la calculadora dentro de un margen razonable, de forma que un resultado disparatado por parte de la calculadora dispare una alarma mental que avise de que lo más probable es que se hayan equivocado tecleando datos. El cálculo de la media ponderada no debe descuidarse, dado que muchos alumnos tienen tendencia a repetir los valores tantas veces como aparecen antes de considerar valores agrupados.

En este caso, CRÍAS, la media es $\bar{x} = 2.7$; y en PÉTALOS, la media es $\bar{x} = 8.173913...$ y al ser números decimales, cuando se trata de número de crías y de pétalos, que deben ser cantidades enteras, da pie a reflexionar sobre el sentido del parámetro estudiado, como medida que es de centralización, y a pensar si al introducir el dato 0 varía o no la media.

PULSACIONES

Esta actividad ya plantea un pequeño estudio estadístico alrededor de la media y su cálculo. No se facilita una tabla con valores, sino que ésta se ha de confeccionar. Para ello se ha de realizar en clase el estudio personal de la medición de pulsaciones y la recogida de datos dispersos. Se trata de una medida discreta, se necesita una tabla que recoja los registros personales y se puede hacer con números exactos puesto que los datos no son muchos y si la actividad que realizan es la misma, la variación no es excesivamente grande.

Cabría preguntarse por el sentido de "el número de pulsaciones medio de la clase" y la información que aporta sobre la pulsación de un alumno en concreto, así como sobre la pulsación de otro de otra clase del mismo nivel en las mismas condiciones de recogida de registro para la comparación. Esto da pie a realizar un estudio comparativo de clases del mismo nivel o de distinto, para ver si influye la edad, etc.

Al pedir que se realicen registros variando las condiciones y que se dé una explicación a los distintos resultados que previsiblemente se obtengan, se puede iniciar un estudio de dos variables que interesen y representar gráficamente los resultados. Por ejemplo, se puede considerar para cada alumno sus pulsaciones en condiciones normales y después de haber corrido 100 metros, y representar en un diagrama cartesiano cada par de datos. Los puntos dan una idea de la relación, no funcional, que siguen las dos variables. Se puede pedir también que tracen gráficamente la línea que se ajusta más a los puntos entrando así se ha entrado en el campo de la regresión y correlación.

SUELDOS

Pretende mostrar la cautela que se debe tener ante informaciones que utilizan el valor del parámetro media, que sólo muestra con efectividad una parte de la información, pero que, como fácilmente puede verse, puede necesitar otros datos complementarios que pueden hacer variar mucho la apreciación final: no cuesta mucho imaginar una empresa en la que un empleado cobre 50.000 pesetas cuando el salario medio es de 100.000 pesetas. Se debe insistir en que hay muchas soluciones válidas, esto es importante en Matemáticas, y en analizar cómo influye el número de empleados que intervienen para conseguir la media.

EL DÍA VERDE

Para conceptualizar lo que es la media tiene que quedar claro que no es un valor más alto que el máximo de los valores parciales que intervienen en su cálculo. Si la persona que más trajo aportó 2 kg. de tierra, la media no puede ser superior a 2 kg. y al repartirse entre todos la tierra a partes iguales no pueden tocar a 3 kg.

CLASE MODELO

Ordenados los resultados en orden creciente se tiene:

$$\underbrace{27,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 30,\ 30,\ 30}_{\text{(8 valores)}},\ \underset{\substack{\Updownarrow \\ \text{(Mediana)}}}{31},\ \underbrace{31,\ 31,\ 32,\ 32,\ 32,\ 33,\ 33,\ 35}_{\text{(8 valores)}}$$

y agrupados:

Nº de alumnos en clase	27	28	29	30	31	32	33	35
Nº de clases	2	1	1	4	3	3	2	1

Para elegir la clase más representativa -con el único dato del número de alumnos que tiene- se debe discutir qué se entiende por tal representatividad, de forma que se puede establecer distintos criterios para su selección y se obtendrá, posiblemente, clases distintas como más representativa. Lo que se plantea es un estudio de medidas de centralización y una comparación entre ellas.

Si la clase más representativa es la que más se repite se llega a la idea de moda (la que tiene 30 alumnos).

Si es la que, ordenadas de menor a mayor por el número de alumnos, ocupa la posición central, se obtiene el concepto de mediana (la de 31).

La media, calculada da un resultado de 30.647... , un poco más cerca de 31 que de 30.

MODAS MUSICALES

Plantea la situación de realizar una estadística sobre variables cualitativas, en las que tiene sentido hablar de la moda como parámetro estadístico, puesto que aunque sólo constata el valor que más se repite, en este caso no se puede hablar del resto de parámetros, no se puede calcular la media ni la mediana. Se debe insistir en la diferencia entre los dos tipos de variables, cuantitativas y cualitativas y pedir ejemplos de ambas.

LETRAS

Se trata de realizar una estadística sobre la frecuencia de aparición de cada letra del abecedario en diversos textos, de forma que se aprecie algo que es evidente: no todas las letras abundan por igual en los textos. Tal estadística ha sido utilizada en la literatura, por ejemplo en el "Escarabajo de oro", de Edgar Allan Poe, y puede aprovecharse para descifrar mensajes codificados siguiendo las proporciones de aparición de cada letra, o para codificar mensajes propios.

Como es lógico, hay que tener en cuenta el idioma de los textos, y además el tipo de textos que se elige para realizar la estadística, ya que hay algunos que están muy sesgados a temas particulares, como por ejemplo los científicos, pudiendo suponer esto una alteración de las frecuencias de aparición de cada letra.

PESÁNDOSE

Introduce el ejemplo de una variable continua, que ha de ser apreciada como tal, con la idea de analizar en este caso cómo se realiza el cálculo de parámetros estadísticos de centralización. Para empezar, la moda ya no es un valor único, sino un intervalo modal, y en este caso es el intervalo [70, 80[. Hay que aclarar qué significa intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

Sería deseable que los estudiantes ya hubiesen tenido experiencia trabajando con intervalos y hubiesen constatado la dificultad de encasillar los resultados de una variable continua y la necesidad de tomar acuerdos en la forma amplitud de cada uno si se quiere comparar resultados. Todo esto ya se sugería en la "Guía de uso de los materiales de Matemáticas" para el primer ciclo (1991), (pp. 99,100).

Kilogramos	[50, 60[	[60, 70[	[70, 80[	[80, 90[	[90, 100[
Marca de clase	55	65	75	85	95
N° de personas	8	15	21	18	8

La media, calculada con las marcas de clase y las frecuencias que dan el número de personas, es $\bar{x} = 75.428...$, y la mediana es Med = 75 (el número de personas que se ha pesado es de 70, los valores 35 y 36 -intermedios- son los dos 75, es decir están en el intervalo [70, 80[, cuando se han ordenado de menor a mayor).

COMIDA

Plantea el cálculo de una media ponderada $\bar{x} = \dfrac{12 \cdot 100 + 18 \cdot 90}{30} = 94$

la estimación previa y el sentido de su valor.

EL PADRÓN DEL 86

Edad (años)	Longitud intervalo	Marca de clase	Miles de personas
0 - 4	5?	2.5	2294
5 - 9	5	7.5	3061
10 - 14	5	12.5	3289
15 -19	5	17.5	3279
20 - 29	10	25	6127
30 - 39	10	35	4988
40 - 49	10	45	4262
50 - 59	10	55	4526
60 - 79	20	70	5717
80 o más	?	?	929

La observación de la tabla permite hacer varias consideraciones:

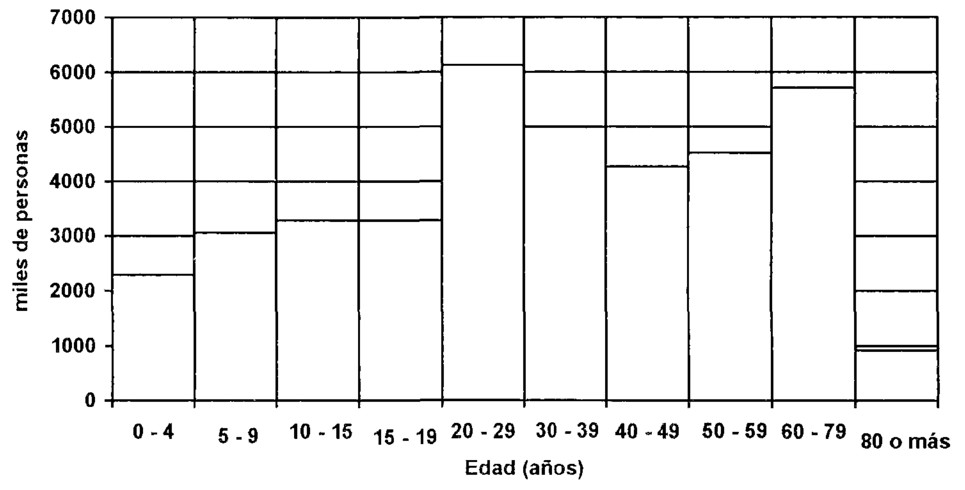
1. La longitud de los intervalos no es la misma, con lo cual la comparación es difícil. Convendría rehacer la tabla con intervalos de la misma longitud teniendo en cuenta que es más fácil agrupar resultados que separarlos (en este caso ya hay un intervalo de 20 años y aún así no acabaríamos de resolver el problema).

2. El último intervalo sólo tiene año de principio, ¿qué valor le corresponde como marca de clase?.

La lectura ligera de la tabla para dar respuesta a estas preguntas nos haría incurrir en errores, pues, por ejemplo el mayor valor de frecuencias en la edad es 6127, pero corresponde a 10 años, y si consideramos el intervalo 10 -19 la frecuencia es mayor. O, por ejemplo, la construcción de la gráfica debe cuidar que la amplitud del intervalo sobre el eje y la altura sean fiel manifiesto de lo que expresa la tabla, de manera que el área que le corresponde sea proporcional a los datos que representa.

Por ejemplo, si para base 5 del intervalo 10 -14 la altura que indica el número de miles de personas es 3289/5, para el intervalo 20 -29 la altura debe ser 6127/10. La gráfica 1 muestra una posible representación gráfica de la tabla que no tiene en cuenta sobre el eje de abcisas la longitud proporcional al intervalo que presenta, con lo que conduce a errores de apreciación.

Gráfica 1



Lo importante en este problema es la observación de todas las pegas que se presentan y la toma de conciencia de lo alerta que hay que estar para no sacar conclusiones equivocadas.

CON LA MEDIA

Se trata de proponer que se estudie la media y se observe cómo afecta al resultado la variación de los datos en función del tipo de transformaciones que se opere con ellos. Si se analiza con ejemplos concretos cómo se calcula $\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{N}$ se pueden construir razonamientos sobre las preguntas realizadas en términos generales, abstractos, o al menos algunos alumnos sí podrán. Las conclusiones a las que pueden llegar son:

Si cada dato duplica su valor, cada sumando se duplica; aparece un 2 factor común que hace que se duplique el resultado final, la media.

Si cada dato aumenta el 50%, en cada sumando aparece un factor 1.5 que influye en la media de esa forma.

Si cada dato aumenta en 10 unidades no se sabe de forma general cómo varía el resultado, hay que hacer los cálculos en cada caso.

LA MODA

Plantea de forma explícita y única la reflexión en torno a la moda, su definición, y su consideración en distribuciones cuantitativas y cualitativas. Intenta asegurar que se comparte por parte de todos ese concepto.

ESTIMANDO MEDIAS

Plantea el análisis de la media y su cálculo, de cómo afecta al resultado final la introducción de valores alejados de los que se están considerando y cómo se reparte su efecto. La petición de que primero se estime mentalmente antes del cálculo exacto es para forzar la reflexión en torno al reparto del efecto comentado.

LIGA ACB

Presenta una situación que realmente interesa más cada día en el aula debido al aumento de la práctica del baloncesto y a su presencia creciente en los medios de comunicación, con la publicación de revistas especializadas en el tema. Se plantea el trabajo sobre las gráficas que con el mismo titulo se recogen al principio del material en el apartado de Láminas. La facilidad que hay para conseguir datos actualizados hace que las láminas presentadas sean más bien modelos de lo que se puede proponer en una actividad estadística.

La actividad debe estar enfocada desde un punto de vista comunicativo, no se trata de que se hagan cálculos y análisis estadísticos, sino de que se intente comunicar a los demás el resultado y el proceso del estudio, con lo que se debe insistir en que se redacte bien, se cuide la expresión, se utilice los términos matemáticos con precisión, se realicen tablas y gráficas adecuadas a las informaciones que se transmiten, ... y en que se exponga el trabajo a los demás.

Se plantea una actividad estadística completa, que implica trabajo en equipo, con aportaciones individuales y asunciones del grupo de trabajo después de las discusiones necesarias, que propicia la puesta en común de determinados estudios realizados por distintos grupos en los que lo esencial es el método de trabajo, los cálculos realizados y la interpretación que se hace de los resultados.

Se proporcionan bastantes ideas de estudios que se pueden abordar, pero en esencia, se trata de reflexionar sobre la media, la mediana, el rango, y sobre criterios que definan "el equipo más alto", etc. Incluso se apunta la idea de que se pueden relacionar datos entre si, y para ello se inician, al menos con gráficas y cálculos aproximados/estimados, consideraciones intuitivas sobre regresión y correlación.

FOTO

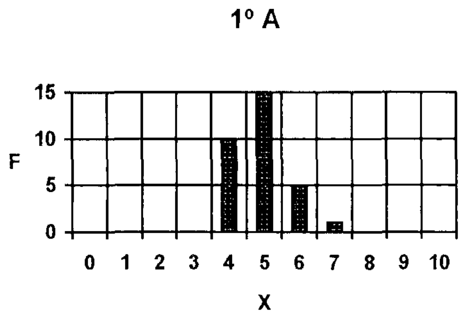
Orienta en la consideración de que al estudiar una variable discreta como es el caso del número de hijos de las familias de una ciudad, la media fácilmente puede no ser un número entero. De ahí la dificultad de hacer una foto a una familia con esa media.

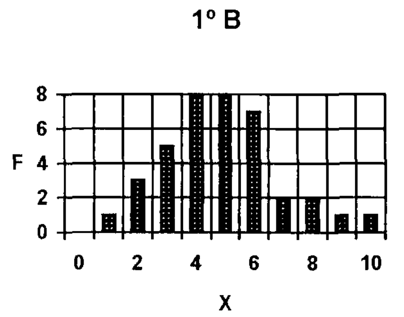
Lo mismo pasa con la mediana, aunque más dificilmente, ya que, en el caso de que el número de familias que se consideren sea par y ordenadas de menor a mayor las familias por su número de hijos, pudieran ocurrir que los dos valores centrales fuesen distintos, con lo que la mediana también sería un número decimal.

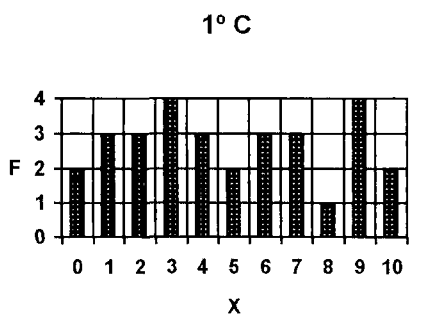
No ocurre lo mismo con la familia típica, que tiene un número de hijos que se repite con más frecuencia. En este caso sí se podría conseguir una foto.

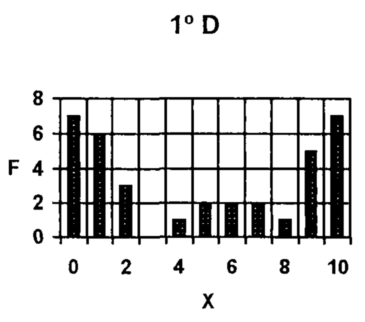
NOTAS

La ficticia situación nos introduce en cálculos de medias y comparación de distribuciones -de notas en este caso- discretas. Las calculadoras permiten no sólo comparar las medias sino otros parámetros estadísticos. Y desde luego que se ve que la media no describe suficientemente la situación de las cuatro aulas que se comparan. Por seguir el paso a paso que propone la actividad y centrar lo que pide, presentamos el diagrama de barras de cada clase:









La tabla de las medias es:

Clase	$\bar{x}$
1º A	4.903...
1º B	4.868...
1º C	4.866...
1º D	4.861...

La media es aproximadamente la misma, sin embargo, a simple vista se aprecia cuán distintas son las distribuciones de las notas en las diferentes clases. Evidentemente, la información que aporta la media es incompleta, o dicho de otra manera, necesita acompañarse de otros estadísticos. La tabla que se ha realizado con las medias de las clases ha requerido realizar las operaciones pertinentes que, hechas en la calculadora, proporcionan automáticamente los demás parámetros estadísticos. Este sería un buen procedimiento de introducir las medidas de dispersión.

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Se supone para realizar esta actividad que ya se ha tenido contacto amplio con las medidas de centralización moda, mediana y media y que se puede meditar sobre la oportunidad de cada una. Se puede sugerir a los estudiantes que propongan conjuntos de datos o tablas que muestren las ventajas y desventajas de cada una de estas medidas. Por ejemplo, en {2, 2, 3, 4, 5, 6, 400} la moda es 2, la mediana 4 y la media 60.28... Y dejar que descubran que, en algunos casos, como muestra la historieta, no tiene sentido hablar de ninguna de ellas.

TEMPERATURAS

Para establecer una comparación entre las temperaturas de las tres ciudades, según la tabla que se proporciona, se debe intentar primero hacerla observando los datos de la tabla, puesto que algunos rasgos ya se pueden establecer, como que las temperaturas de C son más extremas que las de B, o que A debe encontrarse en otro hemisferio que B y C.

Otras consideraciones se pueden hacer después de realizar una gráfica en la que se sitúan los valores de las temperaturas, por meses, de las tres ciudades, y después de realizar algunos cálculos, como la diferencia máxima de temperaturas en cada ciudad (rango), las temperaturas medias en cada caso y la dispersión con respecto a ellas de los valores mensuales (desviación media, tomando valores absolutos). y, finalmente, se puede registrar los valores que da la tecla de la desviación típica σ_x de la calculadora.

DISPERSIÓN

Esta actividad retoma, para el caso en que todavía no se haya hecho, el estudio de los datos de la actividad NOTAS y de la actividad TEMPERATURAS para calcular e interpretar medidas de dispersión de datos, en especial el rango y la desviación media.

CALCULADORA II

Proporciona una fórmula para el cálculo de la desviación típica, a la vez que pide que se comparen los resultados que se obtengan con los de la calculadora en uno de los problemas anteriores, el de NOTAS. Se trata de que después de haber calculado varias desviaciones típicas asocien su mayor o menor cuantía con una mayor o menor dispersión de los datos con respecto a la media. En realidad aporta una información valiosa que hay que aprender a usar. El rango de una distribución comunica la amplitud de la variación, el abanico que hay entre el valor máximo y el valor mínimo que alcanza.

Debe analizarse la implicación que tiene la desviación típica en una distribución apreciando la forma de su gráfica.

En Milton se define y utiliza la desviación típica muestral con la fórmula

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

que en las calculadoras se representa como σ_{n-1} o Sx.

La fórmula proporcionada en las actividades tanto de 3° como de 4°,

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i-\bar{x})^2}{N}}$$

se corresponde al cálculo de lo que aparece en las calculadoras como σ_x o σ_n -y es allí denominado desviación típica (o estándar) poblacional de x-, y que en las actividades se denotó como σ simplemente.

Casi todos los autores consultados prefieren utilizar la letra s cuando se calcula la desviación típica de una muestra y σ cuando se trata de la población.

BEBÉS

Con una tabla así es conveniente ordenar los datos de forma creciente o decreciente para no despistarse en los cálculos. Hay 20 datos y la desviación típica que se obtiene es:

$$\sigma_x = 3.255.$$

Mucho más interesante es plantear que se observen y se calculen los porcentajes de los datos que quedan dentro de los intervalos que alrededor de la media se desvían cantidades proporcionales a la desviación típica. La idea es aproximarse a la conclusión del teorema de Chebicheff.

Peso (x_i)	2'3	2'6	2'7	2'8	3'0	3'1	3'2	3'3	3'4	3'5	3'6	3'7	4'1	4'4
Frecuencia	1	1	1	1	2	2	2	3	1	2	1	1	1	1
$\bar{x}$ = 3.255 $\sigma_x \cong 0.476$														

$\bar{x} - \sigma_x = 2.779$	$\bar{x} - 2\,\sigma_x = 2.303$	$\bar{x} - 3\,\sigma_x = 1.827$
$\bar{x} + \sigma_x = 3.731$	$\bar{x} + 2\,\sigma_x = 4.207$	$\bar{x} + 3\,\sigma_x = 4.683$

Ordenados los datos de forma creciente y con los resultados anteriores se puede visualizar fácilmente los datos que quedan dentro de cada intervalo (se expresa su número entre paréntesis), sin olvidar que algunos resultados están repetidos (o se ponen todos, los 20):

2'3 2'6 2'7 2'8 3'0 3'1 3'2 3'3 3'4 3'5 3'6 3'7 4'1 4'4

$[\bar{x} - \sigma_x , \bar{x} + \sigma_x]$ (15)

$[\bar{x} - 2\,\sigma_x , \bar{x} + 2\,\sigma_x]$ (18)

$[\bar{x} - 3\,\sigma_x , \bar{x} + 3\,\sigma_x]$ (20)

Los porcentajes respectivos son, por tanto, 75% [(15/20) · 100], 90%, 100%.

Es preciso repetir este proceso con alguna distribución más para garantizar una mínima comprensión del mismo.

A VER SI ACIERTAS

Se parte del valor numérico de los parámetros $\bar{x}$ y σ de cuatro distribuciones estadísticas y se desea relacionarlos con las gráficas que se presentan, considerando a la vez el significado de cada parámetro, la concentración o dispersión de los datos y el valor numérico de la media.

Hay valores de $\bar{x}$ cercanos entre sí, y lo mismo ocurre para los valores de σ. La dos gráficas de la izquierda están más concentradas que las de la derecha, y eso indica que sus desviaciones típicas son las menores (B y C). Fijémonos en las concentradas. La superior izquierda tiene una media más baja que la inferior izquierda, por lo tanto, le asignaremos los valores de C. La inferior izquierda queda pues en correspondencia con la distribución B.

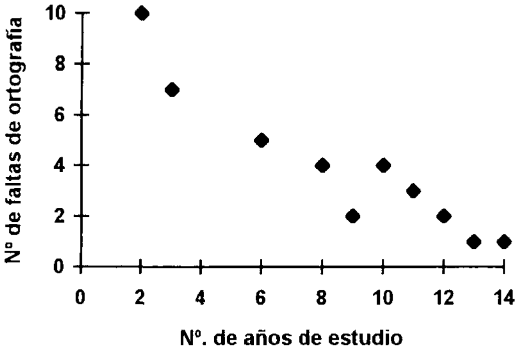
Las gráficas con mayor dispersión son las situadas a la derecha, fijándonos de nuevo en la media, la más alta es la de arriba, por lo que le corresponde la distribución D. Queda la A para la inferior derecha.

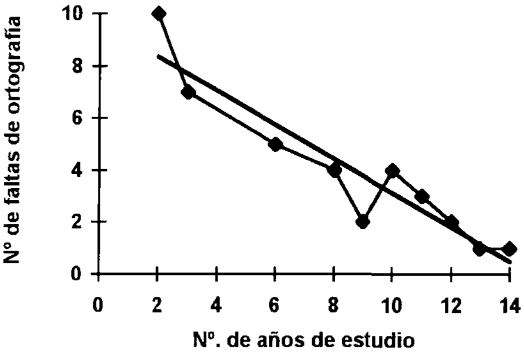
Se puede proponer también a los alumnos que elaboren gráficas de distribuciones estadísticas por grupos variando el problema, proporcionando sólo los valores de los parámetros de centralización y de dispersión con la finalidad de confeccionar gráficas que se ajusten a ellos.

DOS VARIABLES

Esta actividad entra de lleno en el estudio de la correlación y la regresión entre dos variables, mostrando cómo se pueden utilizar los datos recogidos para analizar relaciones no funcionales y para predecir resultados razonables o plausibles en el entorno de los disponibles.

Las gráficas que se realicen deben ser puntuales -se debe razonar por qué no se deben unir los puntos representados-, obteniéndose la nube de puntos de cada situación, que da una primera idea, visual, de la mayor o menor relación -correlación- que hay entre las dos variables que se intenta vincular. En la gráfica de la derecha de la figura adjunta se han unido los puntos y se ha trazado la recta de regresión lineal.



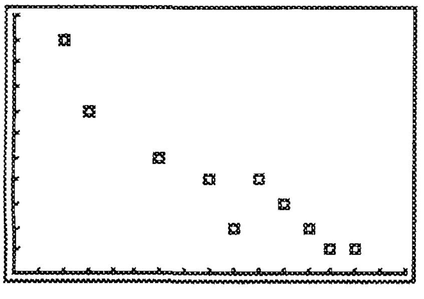


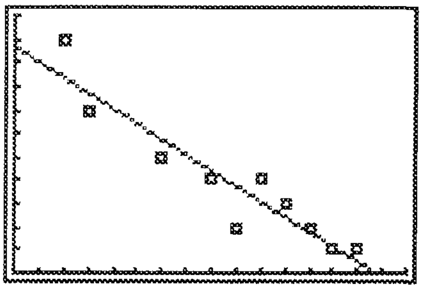
Las calculadoras gráficas, cada vez más accesibles, permiten, introduciendo los datos de la tabla, obtener la ecuación de regresión lineal, que se ha representado en la figura:

$$y = - 0'656\ x + 9'67$$

y que, a su vez permite realizar cálculos y observaciones, como por ejemplo que los primeros años de estudio influyen más en la erradicación de faltas de ortografía en las personas, que evidentemente con más tiempo de estudio llegan a conocer mejor la lengua y su funcionamiento y cometen menos faltas.

Se incluyen a continuación las gráficas de la nube de puntos y la recta de regresión anteriores tal y como aparecen en la pantalla de una calculadora gráfica (la TI-82):





Las gráficas permiten visualizar la relación que existe entre las variables y apreciar que, aunque no es funcional, se puede aproximar por relaciones lineales, proporcionando además una primera idea de cuánto se alejan los datos de la recta que los ajusta.

UNA ENCUESTA

La actividad propone la realización de una encuesta. El proceso completo de su realización supone un acercamiento intenso a la Estadística tal y como se utiliza en la práctica, necesitando poner en juego todos los contenidos que se han examinado con anterioridad aplicándolos a un estudio concreto y completo.. En muchos casos la aplicación misma sirve para ampliar y dotar de más sentido a los conceptos estadísticos ya conocidos.

Es preciso realizar algunas advertencias en relación con esta actividad. La primera y principal es que debe darse y reconocerse protagonismo a los estudiantes en las decisiones que se han de tomar para diseñar y ejecutar la encuesta. Otra, a la postre no menor, es que el cuestionario de la encuesta debe centrarse en unas pocas preguntas, pues de lo contrario el vaciado y tratamiento de las respuestas puede complicarse en exceso. La tercera advertencia es relativa a la forma de formular las preguntas del cuestionario, que debe prever la tabulación de las respuestas y al mismo tiempo no debe inducir tendenciosamente a responder una u otra cosa. Finalmente, otra observación que engloba las anteriores y a otras que se podrían añadir: vale la pena hacer un estudio estadístico completo.

51. CONTAR

RECTÁNGULOS

Este problema parece fácil pero no lo es en absoluto. Contiene las cualidades más deseables para un problema de recuento: no bloquea de entrada, esto es, permite avances a todo el que intenta el recuento y bien pronto se pone de manifiesto si estos avances son o no suficientes para resolver el problema. Son muchos los rectángulos que van saliendo en la cuenta e inmediatamente se hace patente la necesidad de disponer de algún criterio que permita contarlos todos sin repetir ninguno. Pronto surgirán en clase varios criterios que parecen llevar la cuenta bien, pero cada uno arroja como resultado un número total de rectángulos distinto y que va aumentando poco a poco a medida que pasa el tiempo y se desarrolla la discusión.

Una estrategia útil en este caso y en otros muchos problemas de recuento sistemático es la de escoger una notación y combinarla con una descomposición del problema en partes asequibles al análisis para obtener la solución total, que es 43. Como en todos los problemas de recuentos sistemáticos, lo más importante de este es desarrollar habilidades para contar que pasen por analizar qué hacer y por qué y qué estrategia -propia o de otros- es mejor, o al menos es aplicable y permite obtener éxitos en otras situaciones.

PALABRAS I

Se trata de una situación típica de permutaciones sin repetición. Suele ser resuelta por los estudiantes enumerando todas las posibilidades en un orden u otro, sobre todo cuando son más controlables las palabras por tener pocas letras. Esta actividad brinda una buena ocasión para presentar el procedimiento de recuento basado en la construcción del diagrama en árbol, que es de gran potencia en cuanto que no sólo sirve para la mayoría de las situaciones, siendo un método óptimo en muchas de ellas, sino que es además utilísimo para el cálculo de probabilidades y en general en la resolución de problemas de muchos otros campos matemáticos.

Las seis palabras que se pueden formar con letras de ISA, generadas por el diagrama en árbol, son:

I → S → A ⋯→ ISA
I → A → S ⋯→ IAS

S → I → A ⋯→ SIA
S → A → I ⋯→ SAI

A → I → S ⋯→ AIS
A → S → I ⋯→ ASI

El diagrama en árbol es muy visual, preciso, eficiente y sistemático en los todos los casos, y requiere de cierta práctica, por lo que conviene introducirlo con un número pequeño de elementos para ir aumentando el número de ramas poco a poco. El despliegue del árbol presenta no sólo el número de ordenaciones posibles, sino también el listado de estas mismas ordenaciones. Su carácter visual permite asociar rápidamente la influencia que tiene el número de ramas en el resultado final, esto es su estructura multiplicativa.

Otro aspecto que se debe destacar en esta actividad es su vertiente generalizadora. Cuando son cinco letras el resultado es 5 x 4 x 3 x 2 x 1. Cuando son seis es 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, ... y este es un momento adecuado para introducir la definición de número factorial y advertir de su presencia en las calculadoras científicas.

Está claro que para la adquisición de todos estos contenidos, si además se pretende -que se pretende- dar un salto generalizador y encontrar la expresión algebraica que permite obtener las permutaciones de n elementos, no basta con una actividad, sino que con toda seguridad se requerirá plantear varias situaciones hasta llegar a la fórmula.

Se observará que algunos alumnos son capaces de generalizar el resultado *manteniéndose siempre en un número concreto*, esto es, pueden saber que si hay 100 letras, el número de posibles palabras que se pueden formar será el resultado de multiplicar 100 x 99 x 98 x ... x 2 x 1, e incluso pueden manejar con soltura la notación 100!, pero encuentran dificultades en introducir la n y llegar a escribir n!. Es preciso reconocer que dar este salto significa introducir el problema en el mundo algebraico y se requiere generalmente para ello más paciencia y ocasiones.

La expresión algebraica de la fórmula general de las variaciones es difícil de obtener, y generalmente aparecerá antes una descripción verbal correcta de las operaciones que se deben efectuar antes que la propia fórmula, que, insistimos, no cabe esperar que se deduzca al primer intento, sino después de manipular varias situaciones que desvelen su estructura:

$$V_{m,n} = m\,(m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \quad [= \frac{m!}{(m-n)!}]$$

CÁLCULO MENTAL

Se plantea aquí otra situación de permutaciones que se limita al número concreto máximo de 5 elementos, pero que puede generalizarse en la dirección indicada en el comentario a PALABRAS 1.

En el enunciado se indica la ventaja que supone asignar a cada elemento del conjunto un símbolo fácil de manejar que lo identifique y represente. Conviene que esta ventaja de la simbolización sea descubierta por los propios estudiantes.

COMITÉS

Tiene que quedar claro que la clave del problema se encuentra en la observación de que para realizar un trabajo entre varias personas no es importante el orden en el que se escriban sus nombres sino solamente qué personas intervienen. Por lo tanto, dos grupos se distinguirán entre sí por la variación de alguno de sus componentes. En este problema cada grupo de 8 personas que se forma determina un grupo de 2 personas restantes, por lo que el número de grupos de ocho y el número de grupos de dos personas es el mismo. Sin embargo, se ha detectado que, posiblemente al controlar más rápidamente las parejas distintas, la gente tiende a creer en esta situación que son más abundantes los grupos de 2.

Esta actividad corresponde a unos de los ejemplos que describen los errores de estrategia de asignación probabilística que Shaughnessy denomina *de disponibilidad* (Ver **Díaz y otros**, pp 49). La primera impresión, la intuición, no siempre es acertada en cuestiones de recuento y de azar, como han demostrado los errores cometidos en este terreno por las mentes más privilegiadas.

GRUPO DE TRABAJO

esta es una situación de variaciones sin repetición, puesto que intervienen los cuatro elementos y se remarca la distinta función que realizarán dos de ellos. Esta diferente función es la que determina la variación exigida día a día, pues sólo se toma como referencia del grupo a las personas que tienen el papel de secretario y de portavoz.

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$ son las posibilidades de distinguir esos puestos, y por lo tanto, los días que tardan en repetirlos.

En el segundo apartado del problema se trata de relacionar la situación con propiedades numéricas y algebraicas. Cuando la clase es la del día N, y el orden el de la primera ronda, aparece la serie numérica de los restos módulo 12 como un modo de establecer la correspondencia entre el numeral del día y la distribución de funciones. Si se tiene paciencia, este modo de establecer la correspondencia será comprendido, al menos en la fase concreta, por casi todo el mundo.

PALABRAS II

Es una actividad introductoria a las variaciones con repetición. Interesa de ella fundamentalmente la reflexión que se hace sobre el diagrama en árbol que tan bien funciona para detectar los casos que son indistinguibles y para convencer de que un detenido examen puede dar la satisfacción de obtener la solución en el caso concreto.
Sólo después de varios intentos algunos estudiantes pueden atisbar la fórmula

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}$$

parcialmente. Su obtención explícita es harto complicado y está lejos de los objetivos de la enseñanza obligatoria porque no aporta nada sustancial para el tiempo que habría que dedicar a la comprensión de su estructura. Queda pues fuera de interés para la mayoría de la clase, si bien no es descartable que su deducción pueda constituir un reto para determinados estudiantes.

CONCURSO DE PINCHADISCOS

Esta es una situación de variaciones sin repetición. De las ocho canciones, se desea escoger dos (tres, etc.). Así se llegará hasta las permutaciones de las ocho canciones. Esta es otra situación más que debe intentar acabar en la obtención de fórmulas. De nuevo cabe considerar la ayuda que reporta usar el recurso de los diagramas en árbol, tal y como se comenta en PALABRAS I.

Si se desea alcanzar un éxito mayor en esta actividad, sustitúyase el disco y las canciones propuestas en el enunciado por uno de libre elección por cada estudiante.

PAGO EXACTO

Esta es una situación de permutaciones con un referente cercano en las monedas de uso cotidiano, que permite el control sobre los casos de pocas monedas y se deja generalizar con facilidad.

Si la fórmula de las permutaciones ya está asimilada, basta con aplicarla, pero en caso contrario esta es una nueva oportunidad de utilizar símbolos y diagramas en árbol desde las cuatro piezas monetarias hasta el caso más general.

CANDADO NUMÉRICO

De nuevo se ha intentado plantear la situación de recuento sistemático sobre un contexto familiar como es el del candado con clave numérica de tres o más cifras. El problema plantea intencionadamente el uso del término combinaciones en una de las acepciones más extendidas, la que asigna combinación a posibilidad o grupo de elementos en juego -de tres números, en orden adecuado- que cumplen una condición -abrir el candado-. Pero resulta que la solución es que cada combinación posible -en los términos que plantea el enunciado- es una variación con repetición de los 10 dígitos tomados de tres en tres. Son variaciones porque importa el orden en el que aparezcan las cifras en la combinación que abra el candado, y son con repetición porque se pueden repetir las cifras en esa combinación. El correspondiente diagrama en árbol orienta definitivamente la cuestión.

$PR_{m,n} = m^n \Rightarrow PR_{10,3} = 10^3 = 1000$ 'combinaciones' posibles.

Lo cual es bastante previsible, pues es el número de números de tres cifras desde el 000 al 999.

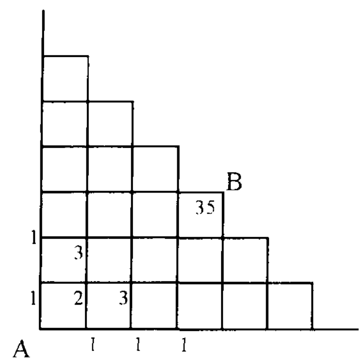
Extendiendo el razonamiento al caso general se obtiene $PR_{10,n} = 10^n$.

CAMINOS

Aquí se plantea una situación en la que visualmente puede justificarse la regla del producto (en este caso 2 caminos x 3 caminos = 6) para calcular recuentos en los que intervienen elementos de conjuntos disjuntos. 6 caminos.

CAMINOS EN UNA RED

Es un interesante problema de recuento de caminos en una trama geométrica con una orientación que la aleja de los ejes de coordenadas. Abordar directamente el recuento no es la estrategia más adecuada, siendo mucho más eficaz el proceder consistente en simplificar primero el problema, reduciendo la distancia entre B y A, y cambiando la presentación, no la esencia, de la trama. Como número de caminos que llevan desde A hasta los vértices de la trama se obtiene el Triángulo de Pascal-Tartaglia..



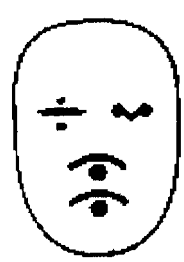
IDA Y VUELTA

El problema se resuelve fácilmente mediante enumeración simple de los caminos.

CARAS

Este problema atrae enseguida la atención de todo el mundo. Es una actividad ideal para presentarla a toda la clase proyectando la ilustración con el fin de provocar un debate sobre la cara que falta y la estrategia seguida para encontrarla. Las estrategias que afloran son variadas, según en los detalles y el orden que se haya tomado en consideración y se produce un buen ambiente para la comunicación y para valorar la importancia que tiene precisar lo que se quiere decir para que los demás lo entiendan y respetar las ideas y la forma de comunicarlas de los demás.

La cara que falta es:



CAPÍTULO XI

FÓRMULAS Y GRÁFICAS 3º

52. EL LENGUAJE GRÁFICO

EL SALTO DEL PARACAIDISTA

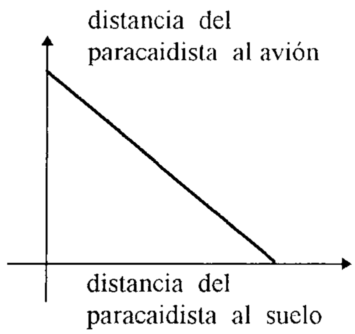
Las gráficas funcionales describen la relación existente entre dos variables y en cada situación concreta existe una infinidad de variables más o menos significativamente relacionadas. Las gráficas funcionales no se ocupan de establecer la importancia o trascendencia de esta relación sino de *describirla*. Por otra parte, esa importancia o trascendencia será siempre relativa y estará subordinada a un objetivo o punto de vista predeterminado.

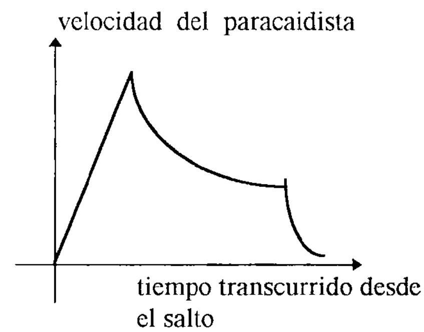
Por ejemplo, al psicólogo le podría interesar cómo evoluciona la ansiedad de un paracaidista en función de su distancia al suelo, pero el estratega militar preferiría tal vez describir la relación entre la distancia recorrida en horizontal y la altura en cada momento.

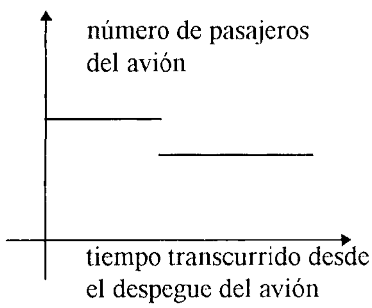
Para poder efectuar una descripción gráfica de una relación funcional se requiere identificar previamente las variables.

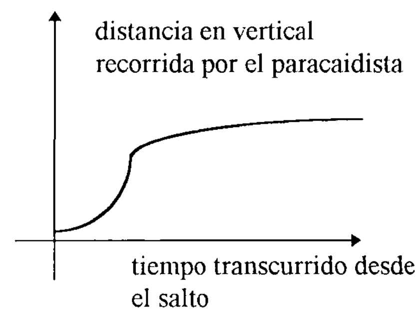
Estas son algunas variables que se pueden señalar en el salto de un paracaidista, expuestas sin preocuparse demasiado en definirlas con precisión: tiempo transcurrido, altura respecto al suelo, velocidad en vertical, distancia horizontal recorrida, distancia del paracaidista al avión, distancia del avión al suelo, edad del piloto del avión, número de tripulantes del avión, ...

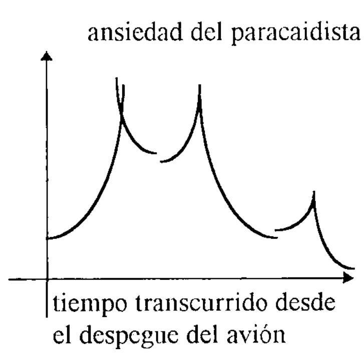
A continuación se incluye también una muestra de la infinidad de esbozos gráficos cualitativos posibles en relación con el salto de un paracaidista:

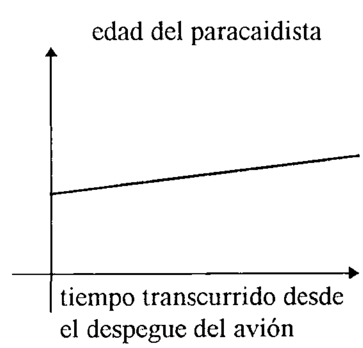


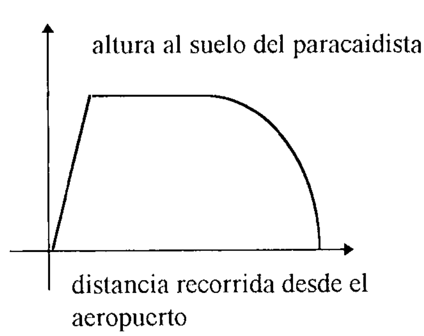


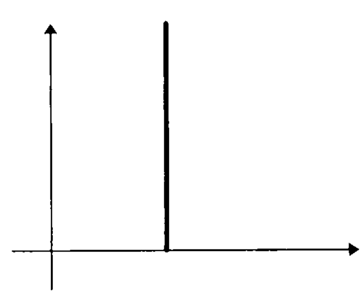












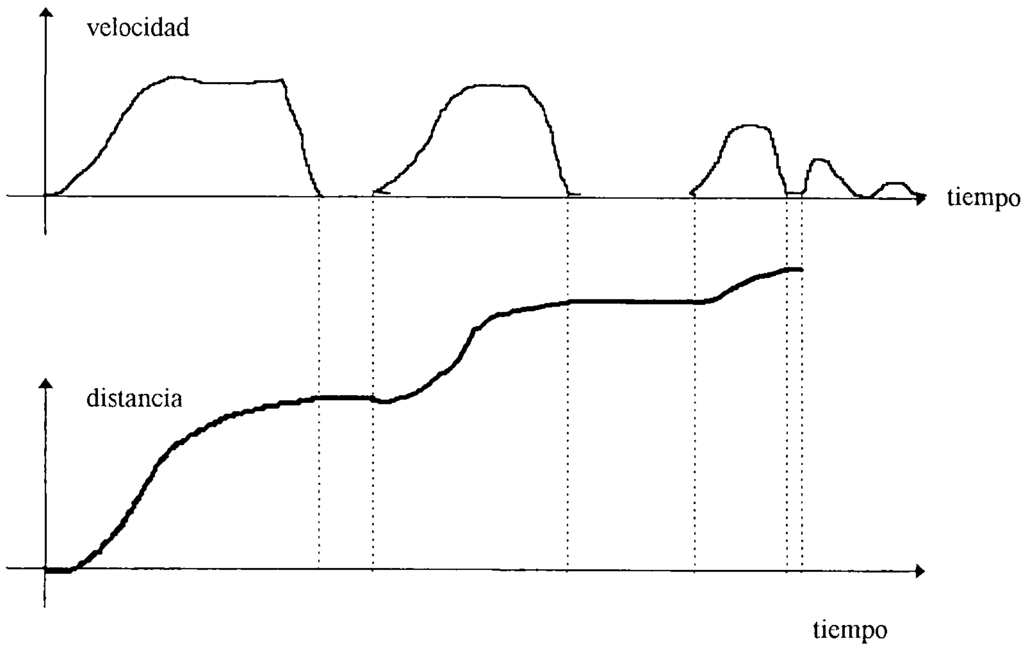
En la última figura de la derecha se ha representado un esbozo que no se corresponde con la gráfica de ningún par de variables y que, sin embargo, aparece con frecuencia como una descripción aparentemente natural de la situación, al ser habitual la confusión entre curvas que representan trayectorias, como sería el caso de esta línea vertical representante de la trayectoria del paracaidista desde el sistema de referencia del avión; y curvas que representan funciones.

EL VIAJE AL CONCIERTO

La misión de cualquier lenguaje es permitir la comunicación entre personas. El lenguaje de las gráficas no es una excepción. Las reglas sintácticas, bien determinadas, que rigen la codificación en lenguaje gráfico de la información funcional, adquieren sentido, como por otra parte ocurre con cualquier otro lenguaje aunque no sea matemático, con su *utilización en situaciones concretas,* de las que *El viaje al concierto* es un ejemplo.

Esta caracterización de las gráficas como lenguaje brinda además una orientación metodológica para desarrollar actividades como la presente: para que exista comunicación tiene que haber mensaje, emisor y receptor. Los alumnos pueden entonces intercambiar las gráficas que dibujan entre sí, y comprobar si el receptor entiende el mensaje.

Además de la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo, tiene interés también proponer el trazado de un esbozo de la gráfica que relaciona el espacio recorrido y el tiempo. Ambas gráficas, siendo distintas, están relacionadas entre sí y pueden determinarse pautas o regularidades -en definitiva *propiedades-* que deben cumplir para ser mutuamente coherentes. Por ejemplo, razonando sobre las siguientes gráficas del mismo viaje puede formularse esta *ley: los tramos que en la gráfica del espacio son rectas horizontales, se corresponden con tramos también en forma de recta horizontal en la gráfica de la velocidad.*

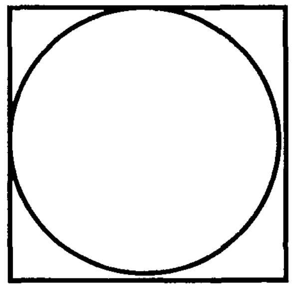


LOS DEPÓSITOS

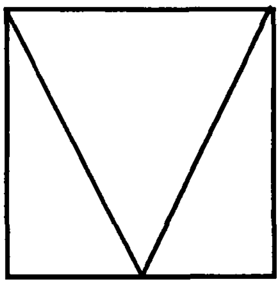
Las expresiones algebraicas se pueden ordenar de mayor a menor con relativa facilidad, comparando los factores numéricos que en ellas aparecen. Así:

$$X^3 \;>\; \pi X^3/4 \;>\; \pi X^3/6 \;>\; \pi X^3/12$$

Si se pudiera establecer una ordenación similar entre los depósitos se tendrá establecida automáticamente la relación deseada entre las expresiones algebraicas y los cuerpos. Esa ordenación se deduce comparando *geométricamente* los depósitos:

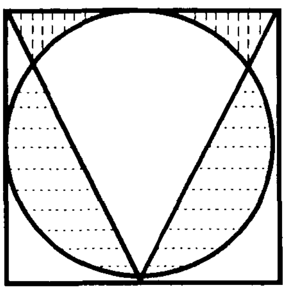


Esta vista superior demuestra que el volumen del cilindro es menor que el volumen del cubo, al estar el primero totalmente contenido en el segundo.

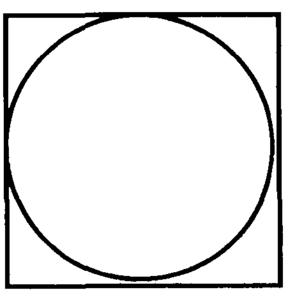


Esta vista frontal demuestra que el volumen del cilindro es mayor que el del cono.

La siguiente vista lateral demuestra que el volumen de la esfera es mayor que el volumen del cono:



Finalmente, esta vista lateral demuestra que el cilindro tiene más volumen que la esfera:

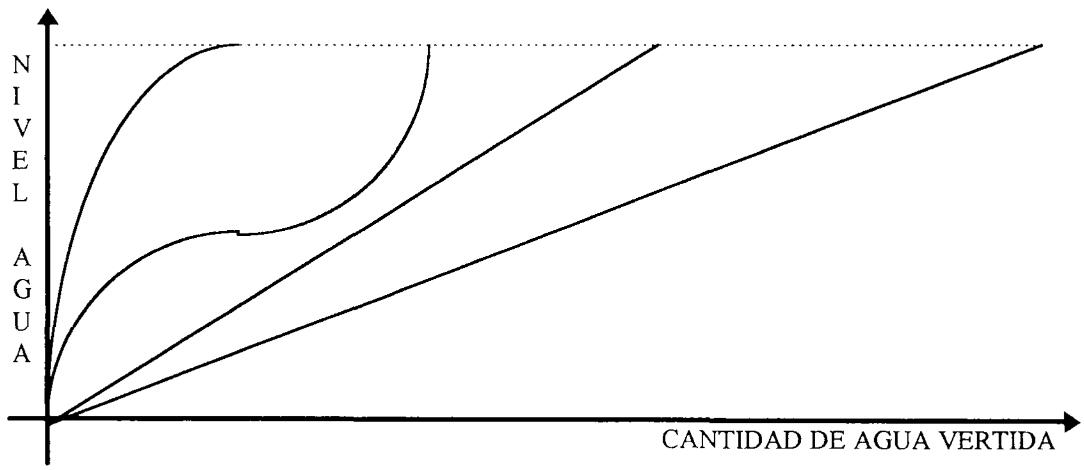


En resumidas cuentas, la ordenación de los cuerpos geométricos en cuanto a su volumen es:

CUBO > CILINDRO > ESFERA > CONO

Para responder al segundo apartado del problema, conviene empezar haciendo un análisis cualitativo para cada uno de los depósitos *por separado*. Con este análisis se trata de establecer la forma *grosso modo* que tendrá la gráfica: si es una recta o no, en caso de no serla qué se puede decir de la curva, ...

Una vez establecidas razonablemente estas formas, se puede proceder a comparar *también cualitativamente* unas con otras. Se trata ahora de incorporar la información aportada por el hecho de que los volúmenes de los depósitos están ordenados de mayor a menor, de modo que se sabe que unos depósitos se llenan antes que otros:



Finalmente es cuando se debe proceder a estimar el tiempo de llenado de cada uno de los depósitos y, si se desea, a precisar más la última gráfica comparativa introduciendo las escalas oportunas en los ejes. Este cálculo es puramente numérico y se deduce de la comparación entre las expresiones algebraicas que miden el volumen de cada cuerpo geométrico: si el cilindro tarda 2 horas en llenarse, el cono tardará la tercera parte, esto es 2/3 de hora, es decir 40 minutos. La esfera tardará en llenarse el doble que el cono, esto es 1 hora y 20 minutos, mientras que el tiempo necesario para llenar el cubo es

$$2 \times 4/\pi \text{ horas} = 8/\pi \text{ horas} \approx 2 \text{ horas } 33 \text{ minutos}$$

LAS NOTAS DE UNA CLASE

Se presenta aquí una situación que no puede codificarse en forma de gráfica funcional, con objeto de facilitar el contraste entre estas gráficas y los gráficos estadísticos.

53. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

TRÍO

La codificación algebraica, esto es la representación mediante letras de relaciones numéricas en las que intervienen cantidades desconocidas, es en gran medida una actividad de generalización consistente en abstraer las estructuras, pautas o regularidades que se observan en situaciones concretas. Este es el enfoque que conviene adoptar a la hora de proponer el presente problema.

TERNA			Número de cubos del cuadrado	Número de cubos del rectángulo	Observaciones
3	4	5	**16**	**15**	$4^2 = 3 \times 5 + 1$
6	7	**8**	**49**	**48**	$7^2 = 6 \times 8 + 1$
0	1	**2**	**1**	**0**	$1^2 = 0 \times 2 + 1$

por lo tanto ......

n	**n+1**	**n+2**	$\mathbf{(n+1)^2}$	**n (n+2)**	$(n+1)^2 = n\ (n+2) + 1$

pero también

x-1	**x**	**x+1**	$\mathbf{x^2}$	**(x-1) (x+1)**	$x^2 = (x-1)\ (x+1) + 1$

Para otros tríos

3	5	7	25	21	7-5 = 5-3 = **2**, $5^2 = 3 \times 7 + \mathbf{2}^2$
2	5	8	25	16	8-5 = 5-2 = **3** , $5^2 = 2 \times 8 + \mathbf{3}^2$

por lo tanto ......

x-p	x	x+p	x^2	(x-p) (x+p)	$x^2 = (x-p)\ (x+p) + p^2$

Se trata pues de un soporte geométrico para expresiones algebraicas.

PUNTOS DE VISTA. DIFERENCIA DE CUADRADOS. CUADRILANDIA

A partir del análisis *geométrico* de los dibujos de estas dos actividades quedan sugeridas una serie de identidades algebraicas que se trata de construir:

La figura a) ocupa la misma superficie que la figura b) y que la figura d), *por lo tanto*

$$a^2 + b^2 + a\,b = a^2 + b\,(a+b) = b^2 + a\,(a+b)$$

La figura c) sugiere por contra que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

Esta tipo de interpretación gráfica o visualización de identidades algebraicas es muy fecunda y complementa muy eficazmente el desarrollo puramente operacional de expresiones algebraicas. Tal es lo que ocurre en *Diferencia de cuadrados* y en *Cuadrilandia*

$$a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b) \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

DEMOSTRACIONES

Este problema presenta dos tipos de dificultades, una de carácter esencial y otra más secundaria. La primera de ellas, de tipo actitudinal, consiste en el rechazo innato a demostrar lo obvio. Así, la observación reiterada de que la suma de dos números pares es un número par parece ser razón suficiente para *inducir* la generalidad de esa propiedad. Y de hecho en gran medida esta es una razón muy poderosa. La segunda dificultad es de tipo técnico. La manipulación de expresiones con indeterminadas y la interpretación de los resultados que se van obteniendo es una operación intelectual muy abstracta: la multiplicación de dos números impares requiere primero reconocer que un número impar puede representarse en la forma 2n+1, segundo darse cuenta de que para manejar simultáneamente un segundo número impar se debe recurrir a una segunda indeterminada m. El producto entonces

$$(2n+1) \,.\, (2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1$$

arroja un resultado en el que se debe reconocer que los tres primeros sumandos son pares y en conjunto por lo tanto es impar.

La combinación de estas dos dificultades mencionadas hacen que este problema sea poco recomendable para ser planteado a todo el mundo, debiéndose en consecuencia reservar preferiblemente para aquellos que alcancen un estado avanzado de desarrollo algebraico. Para la generalidad, por el contrario, conviene centrar el problema en la *observación de las regularidades* que se presentan en la paridad al realizar operaciones aritméticas. Por ejemplo, podría formularse la pregunta *¿qué operaciones* (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, ...) *conservan la paridad?*

	A^B	A	
		par	impar
	par		
B	impar		

EL CARPINTERO Y LA BARANDA

Observar primero varios casos particulares e intentar generalizar después. Con tal indicación no se tardará mucho tiempo en deducir la pauta que rige el número de listones interiores, 2n. La determinación del total de metros de madera necesarios presenta el obstáculo de la tendencia a computar el valor decimal de $\sqrt{2}$, que puede ocultar una estructura bien clara si se convence uno de que le conviene tratar la $\sqrt{2}$ como un *número* y no como una operación no realizada: $2 + n + n\sqrt{2}$.

54. TRADUCCIONES Y PORCENTAJES

ROTULADORES Y CALCULADORAS. POR TANTOS, HAY TANTOS. I.V.A.

En estos ejercicios se aborda de nuevo el aprendizaje de las técnicas de simbolización algebraica, tal y como se hizo en el problema *Trío*.

La codificación algebraica, esto es la representación mediante letras de relaciones numéricas en las que intervienen cantidades desconocidas, es en gran medida una actividad de generalización consistente en abstraer el comportamiento numérico de la aritmética ordinaria, la cual a su vez sirve de banco de pruebas siempre disponible para dar pasos en firme en el manejo algebraico.

Tácitamente o no, una de las vías de acceder a la construcción de expresiones algebraicas parte de pensar qué es lo que ocurre con números concretos y razonar consecuentemente por *analogía*:

S*i 50 rotuladores nos cuestan 1000 ptas., es porque cada rotulador ha costado 1000/50 ptas. Entonces, si R rotuladores cuestan P pesetas, un rotulador costará P/R pesetas.*

Si en un instituto hay **30** profesores y por cada ***tres*** profesores hay 50 alumnos, el número de alumnos, A, será A= **30** x 50/***3*** .

En consecuencia, si en una empresa hay ***5*** secretarios por cada 24 operarias, y el número de secretarios es **S** y el de operarias es A, se verificará A = 24 **S/*5***.

LA TIENDA DE LUIS

Los porcentajes constituyen una caja de sorpresas continua. La respuesta intuitiva al problema que se formula en esta actividad es tan intuitiva y universal como falsa: si el precio de venta de un artículo en una tienda es el precio pagado en la compra incrementado en un 25%, entonces el descuento máximo que se puede hacer sin perder dinero *será del 25%*.

Y en efecto es bien fácil demostrar que esa conclusión es errónea: basta con probar con cualquier cantidad para encontrar un *contraejemplo*.

Si el precio de compra fue 1000 ptas., el de venta será 1000 x 1'25 = 1250.

Si a 1250 ptas. se le hace un descuento del 25%, esto es de 0'25 x 1250 = 312'5 ptas., entonces el precio rebajado será de 1250-312'5 = 937'50 ptas., esto es la ruina para el intermediario de la tienda. El descuento máximo posible tiene pues que ser inferior al 25%.

Determinar el descuento máximo posible (en %) significa hallar un valor P tal que al descontar el P% al precio de venta al público se obtenga como resultado el precio primitivo de compra. Razónese primero con un precio concreto, por ejemplo el de antes:

El precio de compra fue de 1000 ptas. El % de intermediación es 25, lo que supone un incremento de 1000 x 25/100.

El Precio de Venta al Público es entonces 1000 + 1000 x 25/100.

Un descuento del P% a un amigo supone un montante a descontar de

$$(1000 + 1000 \times 25/100) \times P/100$$

de manera que el precio rebajado será el precio venta al público menos esta cantidad: $(1000 + 1000 \times 25/100) - (1000 + 1000 \times 25/100) \times P/100$

Cuando este último precio es 1000, P será el máximo descuento posible:

$1000 = (1000 + 1000 \times 25/100) - (1000 + 1000 \times 25/100) \times P/100$, esto es

$$1 = (1+ 25/100)\ (1 - P/100)$$

De aquí, $P = 20$.

Este cálculo no se vería alterado si el precio de compra del producto hubiese sido cualquiera en lugar de 1000.

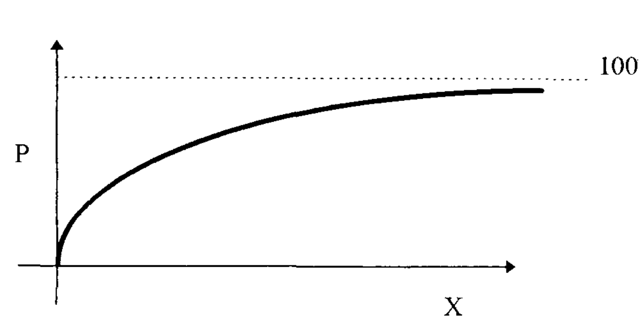
Una extensión del problema, de planteamiento algo más abstracto, pero curiosamente sin necesidad de cálculos nuevos, es el estudio de qué ocurre para otros porcentajes de intermediación distintos del 25%, pongamos por caso del X%. Bastaría sustituir en $1 = (1+ 25/100)\ (1 - P/100)$, 25 por X para tener construida la relación o *función* que permite determinar P a partir de X:

$$1 = (1+ X/100)\ (1 - P/100)$$

o explícitamente

$$P = 100\,X / (100 + X)$$

función que, representada gráficamente con una máquina, permite entender que a medida que el porcentaje de intermediación podría ser todo lo grande que se quiera, pero el descuento máximo posible nunca superará el 100%.



EL VENDEDOR ESPABILADO

El análisis de un caso particular debe bastar para sacar una conclusión general.

Por ejemplo, si Don Timador tiene un bidón con 100 litros de insecticida al 5% de materia activa, es como si dispusiese de **5** litros de insecticida pura por un lado y de 95 litros de agua por otro. Para que 5 litros de insecticida formen parte de una mezcla al 4%, se necesitará que esta mezcla totalice una cantidad L de litros que verifique 4 = 100 x 5/L, es decir L=500/4 = 125. Deberá añadir 25 litros de agua.

La regla de actuación que se deduce es entonces bien sencilla de enunciar: *para convertir una mezcla al 5% en una mezcla al 4% es necesario añadir agua pura en cantidad igual al 25% -o la cuarta parte- de la cantidad que se tiene.*

Este problema es adecuado para, como ampliación, sugerir a los estudiantes que *planteen y resuelvan* problemas similares con otros datos, con el mismo contexto de la mezcla de agua e insecticida, o con otros contextos, buscando la formulación más general posible del problema: *¿qué se debe hacer para convertir L litros de una mezcla al p% de materia activa pura en una mezcla al q%?.*

COSMÉTICA

Para tres de los cuatro artículos, los que superan las 2000 ptas. de precio, el descuento más favorable para el cliente es el de la tienda que ofrece el 10%, que identificaremos por **A**. El precio del otro artículo no alcanza las 2000 ptas. y por lo tanto resulta indiferente efectuar la compra en una u otra tienda.

Siempre hay algún generalizador incauto que, habida cuenta de las cuatro pruebas hechas, extrae la conclusión precipitada de que interesa *siempre* comprar en la tienda **A.** Pero aunque no lo hubiese, el siguiente paso a dar en el problema es la búsqueda de ejemplos, como 2900, que muestren que efectivamente existen precios para los que resulta más interesante efectuar la compra en la otra tienda, que puede ser denominada **B**.

Una vez establecido el convencimiento de que se pueden dar las dos posibilidades, tiene sentido intentar desentrañar cuándo, esto es, para qué precios, conviene comprar en una u otra tienda. Esta búsqueda puede tener muchos niveles de sofisticación y, en función de las condiciones de cada clase o de cada persona, el profesor deberá decidir si merece la pena profundizar técnicamente mucho o no.

Un *nivel suficiente* consiste en discernir si hay alguna situación para la que claramente se pueda indicar que merece la pena comprar en determinada tienda. Para ello deben compararse los dos tipos de descuentos para cualquier precio **P**:

La tienda A ofrece un descuento de 0'1 P.

La tienda B, de 0'05 P más *todo lo que exceda de los millares*. Este añadido al descuento tiene un límite: como mucho es de 1000 ptas. Así, el descuento **máximo** en B será 0'05 P + 1000.

Interesará comprar en **A** siempre que 0'1 P > 0'05 P + 1000, esto es siempre que 0'05P> 1000 , es decir cuando P > 20000 ptas.

Se tiene entonces una regla de decisión establecida:

* Si el precio es **inferior a 2000** ptas., es indiferente dónde comprar.

* Si el precio está **entre 2000 y 20000** ptas. puede interesar comprar en una o en otra tienda. En cada caso concreto hay que calcular los descuentos.

* Si el precio es **superior a 20000** ptas. conviene comprar en la tienda A.

55. ECUACIONES I

LA COMITIVA. BODAS Y BAUTIZOS.

Éstas son dos actividades clásicas de *generalización* de una expresión aritmética para convertirse en una *expresión algebraica* o fórmula.

La virtud esencial que contienen ambas es que el proceso de construcción de la fórmula admite la experimentación, es decir la posibilidad de comprobar que la expresión que se está construyendo funciona. Esta posibilidad de feedback o *retroalimentación* se apoya en los contextos formulados que permiten una observación *in vitro* de lo que ocurre en algunos casos concretos.

De nuevo en estas actividades se presentan soportes visuales para permitir la abstracción y la generalización en procesos diferentes como son la obtención de expresiones de términos generales, la sustitución en fórmulas y la variación de reglas y observación de procesos inversos. Ampliaciones que se podrían formular responderían a preguntas del tipo *¿qué pasa si hay dos filas que cierran y abren la comitiva?, ¿qué regla funciona si el máximo por fila a lo largo es de cuatro mesas?*, ...

MÁQUINAS. COMPARANDO MAQUINARIAS.

En los materiales de Primer Ciclo se introdujeron ya ejercicios de construcción de ecuaciones y sistemas de ecuaciones basados en el llamado indistintamente, según las fuentes, modelo *máquina*, modelo *chips*, modelo *circuito* o modelo *diagrama de flujo*. Este modelo es fácilmente utilizable para generar una infinidad de ejercicios, como los que se proponen en estas dos actividades, que ilustren todas las posibles categorías de ecuaciones (diagramas con una sola *salida*) y sistemas de ecuaciones (diagramas con múltiples *salidas)* que se pueden dar: compatibles indeterminadas, compatibles determinadas e incompatibles.

Este tipo de ejercicios admite también la versión recíproca, esto es partir como dato de ecuaciones o sistemas de ecuaciones para buscar el diseño de diagramas que se ajusten a su estructura.

En cualquiera de sus versiones, la recíproca o la directa, este modelo de trabajo con ecuaciones es especialmente indicado para prestar atención a la prelación con la que actúan los distintos operadores de una expresión literal. La jerarquización de las operaciones es *visible* en los diagramas, mientras está implícita en las expresiones literales que tienden a ser malinterpretadas como secuencias lineales de operaciones y leídas por lo tanto trasplantando mecánicamente los mismos convenios de lectura que se utilizan en las palabras o números.

Cabe advertir que estos modelos no son eficaces cuando los alumnos ya conocen las reglas algebraicas abstractas, aunque no las dominen. Se trata pues de modelos útiles para introducir esas reglas y no para sustituirlas.

LA SOLUCIÓN ES LA ECUACIÓN

Este ejercicio es complementario de los dos anteriores. Allí desde un diagrama de flujo se solicitaba la construcción de una ecuación o partiendo de una ecuación se deseaba diseñar un circuito que le correspondiera. En este caso es la solución la que hace de punto de partida para finalmente disponer de la ecuación (o sistemas de ecuaciones) y de las máquinas adecuadas.

FIESTA EN LA CALLE. EL BUSCA-NÚMEROS

La resolución de problemas como los aquí propuestos por métodos algebraicos requiere dos tipos de actividades bien distintas.

La primera es la *construcción del modelo matemático*, algebraico en este caso, que recoge todos los datos disponibles en el enunciado. Esta es pues una actividad creativa en la que se *traduce* un enunciado expresado verbal y numéricamente a una abstracción matemática. Esta traducción rara vez es única y las mismas ecuaciones se pueden presentar de modos distintos según como se efectúe la lectura de los datos, y en ella intervienen, en proporciones que dependen de cada situación concreta, tanto la capacidad de interpretar el texto (distinguir los datos esenciales de los accesorios, reiterativos o inútiles, intuir la mejor forma de relacionarlos, ...) como la destreza técnica de poner a punto las ecuaciones necesarias.

La segunda actividad es, por el contrario, esencialmente técnica y se resume en la habilidad para manipular ecuaciones hasta encontrar, si existe, su solución.

De las dos actividades esta última, precisamente por ser más técnica o mecánica, es más fácilmente pautable y se resume en un conjunto de reglas que hay que entender y practicar. La primera, por el contrario, es una actividad mucho más difusa, que debe poner en marcha indeterminados recursos intelectuales y que, en definitiva, es más heurística que algorítmica, siendo por consiguiente bastante más difícil de aprender y de enseñar.

A este hecho indiscutible viene a sumarse la existencia de recursos técnicos, cada vez más extendidos, capaces de resolver automáticamente ecuaciones y sistemas de ecuaciones, pero la inexistencia, en la actualidad y en el futuro próximo, de máquinas capaces de realizar la operación intelectual de construcción de ecuaciones a partir de un texto escrito en lenguaje natural.

Toda esta descripción tiene una conclusión didáctica coherente: junto a, y probablemente con preferencia a la habilidad para resolver ecuaciones debe aprenderse y practicarse la de construirlas.

En todo caso, estas actividades permiten prestar atención a la comprensión que de las ecuaciones algebraicas y de los problemas asociados tienen los estudiantes. Y eso en una doble vertiente, la individual, que permite indagar qué es lo que dice o hace cada uno, y otra colectiva, que aporta datos sobre la valoración que hace el grupo como tal de las aportaciones de cada individuo.

56. ECUACIONES II

JUGANDO CON EXPRESIONES

En este juego se trasplanta la idea de la carrera al azar de fichas que se mueven al dictado del dado, sustituyendo la puntuación directa del dado por el correspondiente valor de un polinomio.

El objetivo de esta curiosa mezcla *de álgebra y azar* es doble. Por una parte ejercitar la sustitución de letras por números en expresiones algebraicas, por otra analizar cómo influye la intervención de los polinomios en un juego en el que, sin ellos, todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar.

La metodología apropiada para el desarrollo del juego es la natural: es necesario que inicialmente se invierta algo de tiempo en jugar algunas partidas que permitan comprender bien las reglas del juego y que faciliten la experiencia y la oportunidad de detectar las pautas y regularidades que serán empleadas en el análisis.

Estas observaciones, por otra parte, producen inmediatamente el convencimiento de que no existe simetría en el juego. En efecto, la expresión x^2-6x+9 produce siempre una salida positiva para cualquier valor del dado que se obtenga en el lanzamiento, mientras que las otras tres expresiones alternan valores positivos y negativos. Estas últimas tampoco se comportan del mismo modo. x^2-5x+4 y $x^2-7x+10$ proporcionan resultados negativos con más frecuencia que x^2-4x+3. A partir de estas observaciones mucha gente saca la conclusión de que la estrategia óptima es jugar con el polinomio x^2-6x+9, que nunca obliga a retroceder a su ficha.

La disparidad de estos resultados da la pista necesaria para proceder a un análisis sistemático de la situación, listando todos los casos posibles:

X = **lanzamiento dado**	**x^2-5x+4**	**x^2-4x+3.**	**x^2-7x+10**	**x^2-6x+9**
1	0	0	4	4
2	-2	-1	0	1
3	-2	0	-2	0
4	0	3	-2	1
5	4	8	0	4
6	10	15	4	9
3'5	2'33333	4'1666666	0'66666	3'1666666
		promedios		

Los valores promedios o esperanza de cada uno de los polinomios constituyen una medida de su oportunidad de ganar el juego. En contra de lo intuido por muchos se observa (y de hecho así ocurre si se juegan unas pocas partidas) que la mayor expectativa de victoria le corresponde a **x^2-4x+3.**

Una posible extensión de este problema se puede desarrollar si se interpreta a los polinomios anteriores como una máquina que de facto ha transformado el valor del resultado del dado en otro valor distinto. En otros términos, los polinomios en este juego hacen que el dado de seis caras, en lugar de proporcionar resultados de 1 a 6, proporcione otros resultados que han posibilitado mayor variedad de movimientos, por ejemplo consiguiendo que las fichas también retrocedan y no circulen en un único sentido.

¿Será entonces posible construir una expresión polinómica para cada dado que pudiéramos imaginar, por ejemplo para uno que diese como resultados 10, 7, 4, 1, -2, -5?.

HACIENDO PRUEBAS. LA CARCASA. MATENKO

Estos tres problemas tienen como denominador común la propuesta de explorar expresiones algebraicas polinómicas por la vía de la evaluación reiterada de las mismas, o construcción de una tabla de valores.

El núcleo central de los ejercicios es pues diseñar un procedimiento lo más simple posible para que esos cálculos reiterados puedan ser ejecutados cómodamente en la calculadora. Desde el cálculo directo y desnudo de las expresiones sumando a sumando (se computa el valor de primer sumando y se introduce el resultado en la memoria, se computa el valor el segundo sumando y se añade a la memoria, y así sucesivamente) hasta algoritmos más sofisticados como el que se ilustra abajo con un ejemplo, existe una amplia gama de posibilidades que muchas veces son suficientes para alcanzar una eficacia razonable:

EVALUACIÓN DE $3'05 + 1'25\,x - 0'2\,x^2$ EN $x = 6'25$

6'25	Min	-0'2	X	MR	+	1'25
=	X	MR	+	3'05	=	

Este modo de organizar los cálculos, que funciona con carácter general para cualquier polinomio, se corresponde con una asociación oportunamente recursiva de los términos de la expresión algebraica:

$$-0'2\,X^2 + 1'25\,X + 3'05 = (-0'2\,X + 1'25)\,X + 3'05$$

$$5\,X^4 - 3\,X^3 + 6X^2 - 7\,X + 2 = \{\,[\,(5X - 3)\,X + 6\,]\,X - 7\,\}\,X + 2$$

y que en definitiva es el algoritmo inventado por Ruffini.

ECUACIONES CON CALCULADORA. LA MÁQUINA DEL CERO. MÁS SOBRE MÁQUINAS Y CEROS. EL MURAL. EL BAR. ALBERTO Y ANA. LA PISCINA DE MARTA.

Todos estos problemas son relativos a la construcción y resolución de *ecuaciones de segundo grado* en contextos variados que van desde el más abstracto o puramente algebraico (*Ecuaciones con calculadora*) hasta el de trasfondo geométrico (*El mural, El Bar, La Piscina de Marta*) pasando por los que se enuncian con pretextos numéricos (*La máquina del cero, Más sobre máquinas y ceros, Alberto y Ana*).

En algunos de ellos la ecuación de segundo grado viene directamente planteada o claramente sugerida. En otros, por el contrario, y estos *(El mural, El Bar, La Piscina de Marta)* constituyen el núcleo esencial de problemas relativos a la ecuación de segundo grado, es necesario un razonamiento que conduzca a la *construcción del modelo matemático* de la situación, que recoja todos los datos disponibles en el enunciado.

Esta es una actividad creativa en la que se *traduce* un enunciado expresado verbalmente a una ecuación matemática. En esta traducción interviene, y de ahí su riqueza formativa, tanto la capacidad de interpretar el como la destreza técnica de poner a punto las ecuaciones necesarias.

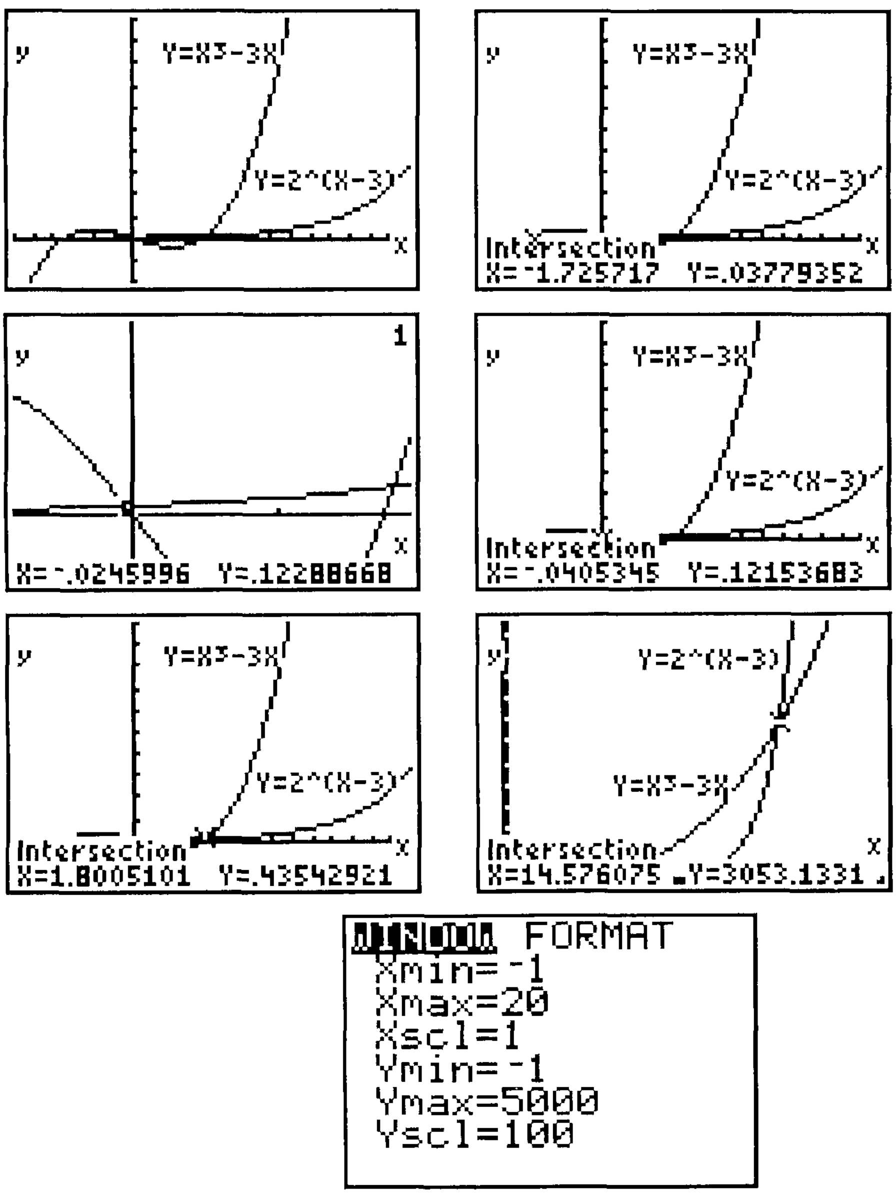
Para la resolución de las ecuaciones se debe tener en cuenta que existe una amplia gama de métodos de distinta naturaleza cada uno de los cuales tiene su propio rango de aplicabilidad y pone el énfasis en un aspecto conceptual diferente, y todos en conjunto contribuyen a dotar de sentido a la compleja idea de ecuación. Agrupándolos por categorías, estos métodos son:

a) *estimativos*: un vistazo rápido a la ecuación permite deducir sus soluciones, bien porque estas son obvias, bien porque la particular estructura de la ecuación las pone de relevancia. Este método es el que permite afirmar rápidamente que

$$X=1 \text{ es solución de } X^9 - X^8 + X^7 - X^6 + X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1 = 0$$

El elemento conceptual puesto de relevancia al tantear la solución mentalmente es el de valor numérico de una expresión algebraica, en este caso un polinomio.

b) *gráficos*: las ecuaciones señalan valores para los que se anula cierta función asociada a la ecuación. Representada gráficamente esta función con calculadora gráfica o con software adecuado, se puede *estimar* las soluciones de la ecuación interpretando la gráfica correspondiente. Por ejemplo, he aquí cómo se obtienen las soluciones de la ecuación X^3-3X=$2^{(X-3)}$ con una calculadora gráfica:



Este método pone de relevancia la relación conceptual entre ecuaciones y funciones y, en consecuencia, la visualización o interpretación geométrica que le corresponde a una ecuación.

c) *numéricos:* Tanteando *racionalmente* y con ayuda de una calculadora u ordenador, se puede ir acotando y aproximando el valor de las soluciones de las ecuaciones. El método de bipartición, por ejemplo, es conceptualmente simple y atractivamente intuitivo.

RESOLUCIÓN ITERATIVA DE $X^3 - X^2 + 2X - 1$				
Si x=	$X^3 - X^2 + 2X - 1$ vale	Si x=	$X^3 - X^2 + 2X - 1$ vale	**Conclusión**
0	-1	1	1	Hay una solución de la ecuación entre 0 y 1
0'5	- 0'125	1	1	Hay una solución de la ecuación entre 0'5 y 1
0'75	0'3593..	1	1	Hay una solución de la ecuación entre 0'5 y 0'75
0'625	0'1035..	0'75	0'3593..	Hay una solución de la ecuación entre 0'5 y 0'625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Los métodos numéricos traen a primer plano el concepto de aproximación y de iteración.

d) *algebraicos:* en *algunos* casos (ecuaciones lineales y cuadráticas casi exclusivamente) existen fórmulas o reglas explícitas y relativamente sencillas para obtener la solución. Estos métodos se centran en la manipulación algebraica y en el concepto de número real, pero están a veces bastante alejados de la intuición.

En la práctica, lo importante es que el estudiante no se vea impelido a concebir cada uno de estos métodos como un artificio inconexo de los demás, sino todo lo contrario. No deben pues introducirse como métodos aplicables a ecuaciones distintas (aunque unos funcionen más efectivamente con unas ecuaciones que con otras) sino, como ya se dijo, simultaneando unos con otros desde el principio.

57. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

EL ÁRBOL GENEALÓGICO

Aunque no se formula explícitamente en el problema, para extraer toda la riqueza formativa que se plantea en esta situación convendría atacar un problema previo que supone sólo una pequeña modificación del enunciado: *supónte que tú tienes dos hijos, que cada uno de tus hijos tiene a su vez dos, y así sucesivamente cada descendiente tuyo tiene por término medio a su vez dos descendientes. ¿Cuántos descendientes tendrías dentro de 200 generaciones?.*

Esta variante del problema es formalmente equivalente a la que se atacará luego pero es conceptualmente más simple: *si se cumplen las hipótesis* (2 descendientes por descendiente) y no hay factores añadidos que las invaliden (guerras, enfermedades, catástrofes, ...) irrebatiblemente el número de descendientes en tal generación será el calculado: *multiplicaré tus descendientes hasta hacerlos más numerosos que las estrellas,* le dijo el Dios de Israel a Abraham cuando estaba hundido en la desesperación pues su esposa Sara había cumplido los 80 años sin darle descendencia.

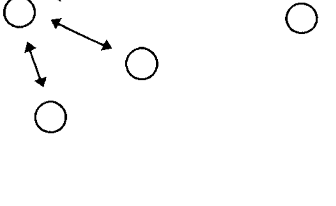
Aunque es muy difícil asegurarlo, desde Abraham hasta nuestros días han pasado aproximadamente unas 200 generaciones de modo que una pregunta resulta procedente: *¿hay en la actualidad tantos judíos como predice la hipótesis antes aceptada?. ¿habría que modificar la hipótesis? ¿de qué manera? ...*

Una vez discutidas estas cuestiones, se puede sacar el máximo partido al problema de los *ascendentes*, pues todas las preguntas que se hayan podido ir formulando y respondiendo antes son trasplantables a esta otra versión: *¿cuántos ascendentes tendría en tiempo de Abraham una persona de ahora? ¿Es eso posible?. Noé, fue, según la Biblia, el único superviviente del Diluvio Universal, nombre con el que han pasado a la historia unas formidables inundaciones sufridas en Caldea hace alrededor de unos 5000 años y en la actualidad bien documentadas arqueológicamente. Si el dato de la Biblia fuese cierto, ¿a qué* ritmo medio *habría estado creciendo la población mundial hasta nuestros días?...*

UNA Y SÓLO UNA PESA MENOS

El número de pesadas que se debe contabilizar es el *mínimo posible para que con certeza* se localice a la perla que pesa menos. Esta precisión es esencial pues se pueden diseñar múltiples métodos que no tienen la propiedad de ahorrar al máximo el número de pesadas, y de hecho así se hará en clase. Si así ocurre, aprovéchese para comparar unos con otros, construyendo en cada caso las tablas, las fórmulas y las gráficas que relacionan el número de perlas con el número de pesadas mínimo en cada método. Entre los métodos que con más frecuencia surgen, citaremos los siguientes:

a) *método de la perla pivote*: se escoge una perla cualquiera y se va pesando con todas las demás una a una. Mientras la balanza se mantiene equilibrada, cabe interpretar que la perla discordante se encuentra entre las que todavía no han sido comparadas con la que hace de pivote. De este modo una de las perlas no necesitará intervenir en el proceso pues, o bien la que pesa menos se ha detectado antes, o bien es ésa y queda delatada porque el peso de todas las demás ha coincidido con el peso del pivote.

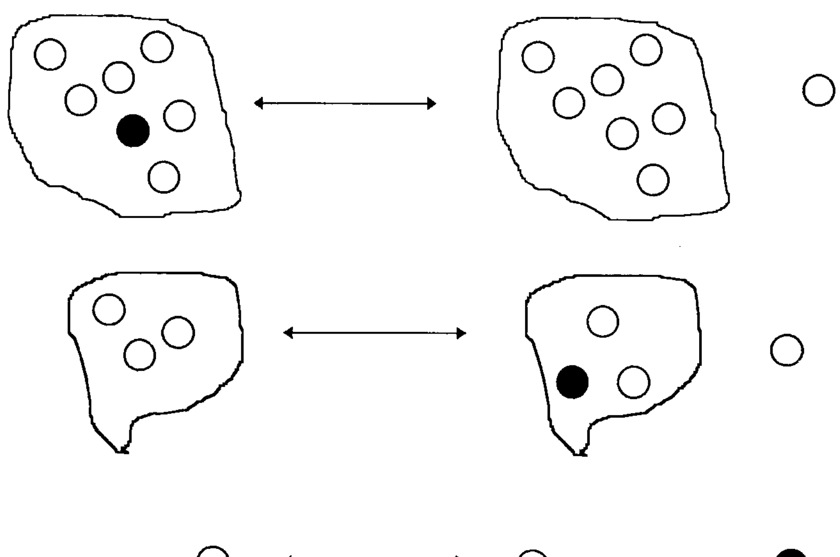


Para **n** perlas, con este procedimiento se necesita, para garantizar con total seguridad la localización de la perla defectuosa, un máximo de **n**-2 comprobaciones en la balanza.

b) *método del emparejamiento*: se empareja las perlas mientras se pueda, con dos resultados posibles, o todas están emparejadas o sobra una. En cualquiera de los dos casos, se van comparando en la balanza las perlas emparejadas hasta que se rompe el equilibrio del fiel, momento en que queda localizada la pieza buscada. si eso no ocurre en ninguno de los casos es porque el número de perlas era impar y la menos pesada ha quedado sin pareja en el reparto al azar.

Para **n** perlas, con este procedimiento se necesita, para garantizar con total seguridad la localización de la perla defectuosa, un máximo de **n**/2 comprobaciones en la balanza, si **n** es par, y de (**n**-1)/2 si **n** es impar.

c) *método de la bipartición*: se divide al conjunto de todas las perlas en dos partes iguales, de manera exacta o sobrando una perla. Se comparan entre si los dos grupos de perlas. Si la balanza arroja un resultado de equilibrio es porque el número de perlas es impar y la defectuosa es precisamente la que ha quedado fuera del agrupamiento. Si, por el contrario no ocurre eso, el fiel de la balanza señalará qué grupo de los dos pesa más, de modo que en el otro se encontrará la pieza buscada. Se coge ahora este grupo y se procede del mismo modo: se separa en dos grupos que se comparan entre sí, y así sucesivamente.



La determinación del número máximo de pesadas por este método es algo más complicada que en los casos anteriores y necesitará de una tabulación más detenida para que el análisis pueda surtir efecto:

núm. perlas	2	3	4	5	6	7	8	10	13	16	18	21	26	31	32
núm. de pesadas	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5

Así el número de pesadas máximo para garantizar el éxito en la localización coincide con el exponente de la potencia de 2 más próxima al número de entre las que son más pequeñas que este:

Si n es el número de perlas y $2^p \leq n < 2^{p+1}$, entonces el núm. de pesadas es p.

LAS BACTERIAS. PRESIÓN ATMOSFÉRICA. LA COMPAÑÍA

Cada uno de estos tres problemas permite explorar la función exponencial en distintos contextos, y pueden ser considerados en gran medida como problemas equivalentes reiterando el mismo tema. Una vez sentado dicho carácter de estudio general de la función exponencial, cabe decir no obstante que en cada uno de ellos pueden encontrarse matices, provenientes precisamente del contexto en que se enmarca la situación exponencial, que pueden resultar de interés didáctico específico.

Por ejemplo, en *Las bacterias* hay una cuestión clave, relativa al comportamiento no lineal del crecimiento exponencial, que resulta fuertemente chocante con la intuición: *si un tubo de ensayo tarda 12 horas en llenarse de bacterias que se reproducen por tripartición, no se habría llenado 1/3 de su capacidad al cabo de 12/3 = 4 horas, sino al cabo de 11 horas*. ¿Qué mayor revulsivo intelectual puede recibir una mentalidad proporcional que la comprensión del fenómeno de la *explosión demográfica* constatando que en sólo una hora cierta población crece el triple que en las 11 horas anteriores?.

Otro ejemplo. En *La presión atmosférica* se llega a establecer sin excesivas dificultades por la vía del análisis numérico el comportamiento exponencial de la relación entre presión y altitud. Así tras la construcción de una tabla como esta

altura	0	1	2	3	4	A
presión	1	0'9	$0'9^2$	$0'9^3$	$0'9^4$	$0'9^A$

se comprende rápidamente el comportamiento de algunos aspectos de la función exponencial que tiene base positiva menor que la unidad. Pero sobre todo, permite plantear de modo natural algunas cuestiones que profundizan enormemente en el conocimiento de los números:

¿Qué presión habrá a una altitud de 3'5 km.? ¿Qué puede decir la calculadora al respecto? ¿Qué significado cabe atribuir a la potencia $0'9^0$?

Obsérvese por ejemplo como a partir de una pregunta planteada en un problema pueden generarse conocimientos nuevos:

¿Qué dice la calculadora acerca de la presión que corresponde a alturas negativas?

Según la pauta que genera la tabla se tiene:

altura	-3	-2	-1	0	1	2
presión	$0'9^{-3}$	$0'9^{-2}$	$0'9^{-1}$	$0'9^{0}$	0'9	$0'9^{2}$
resultado	1'3717...	1'234...	1'111...	1	0'9	0'81

de modo que las potencias de exponente negativo tienen un valor numérico, proporcionado por la tecla X^Y de la calculadora, bien determinado. Pero todavía más, mientras se reduzca la tabla a números enteros consecutivos, el valor de la presión en cada casilla es el valor de la casilla anterior, multiplicado por 0,9. *Por lo tanto:*

$$0'9^{-1} \times 0'9 = 1 \ , \quad \text{es decir} \quad 0'9^{-1} = 1/0'9 = 1'111...$$
$$0'9^{-2} \times 0'9^{2} = 1 \ , \quad \text{es decir} \quad 0'9^{-2} = 1/0'9^{2} = 1'234...$$
$$0'9^{-3} \times 0'93 = 1 \ , \quad \text{es decir} \quad 0'9^{-3} = 1/0'9^{3} = 1'3717...$$

¡y se ha descubierto cómo actúa la calculadora para potencias con exponente negativo!.

58. SUCESIONES

TRIÁNGULOS I. TRIÁNGULOS II. TRANSFORMACIONES I. TRANSFORMACIONES II. TRANSFORMACIONES III

En todos estos problemas se aprovecha la posibilidad de *visualizar* distintos términos de una sucesión para poder analizar su estructura recursiva y para extraer consecuencias numéricas. Las posibilidades didácticas de la conexión entre geometría, números, recursión y tendencias en el estudio de las sucesiones se discuten con amplitud en el apartado *Área y Perímetro límites* de los comentarios al cuaderno *Resolución de Problemas*.

RECORTANDO PAPEL. ¿QUÉ ESCOGES?. TRAMA CUADRADA. LOS NÚMEROS PARES E IMPARES. EL DOBLE PRODUCTO. LA MEDIA ARITMÉTICA. SUMA Y DIVIDE

Cada uno de estos títulos se refiere a una situación planteada en términos descriptivos o verbales que acaba generando una sucesión cuyos primeros términos se obtienen experimentando, contando, observando o midiendo el enunciado. En ninguno de los casos la sucesión se introduce proporcionando su expresión general o fórmula generatriz.

Precisamente uno de los dos grandes objetivos de este bloque de problemas es practicar la determinación de la expresión general de las sucesiones para comprender que tales fórmulas constituyen un modo de codificar, resumiendo en unos pocos símbolos una lista infinita de números.

El otro objetivo es propiciar la observación de lo que ocurre a largo plazo con los términos de las sucesiones para ir forjando intuitivamente y nutriendo de experiencias los conceptos de convergencia, divergencia y oscilación. Ambos objetivos, construir expresiones generales y analizar tendencias, confluyen si se hace observar que en algunos casos el análisis de la fórmula que genera una sucesión puede servir de complemento, de contraste o de elemento clarificador de la observación numérica de la tendencia.

59. OTROS PROBLEMAS

LA CARRERA DE PULGAS

Para resolver con éxito el problema no es suficiente la construcción de las funciones que relacionan el **tiempo t** y la **distancia d** recorrida por las pulgas en periodos discretos de tiempo. Estas funciones son *idénticas* para cada uno de los dos animales:

$$\text{distancia}\ (\mathbf{t}) = \mathbf{t} \quad , \quad \mathbf{t} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{1}\ ,\ \mathbf{2}\ ,\ \mathbf{3}\ ,\ \ldots$$

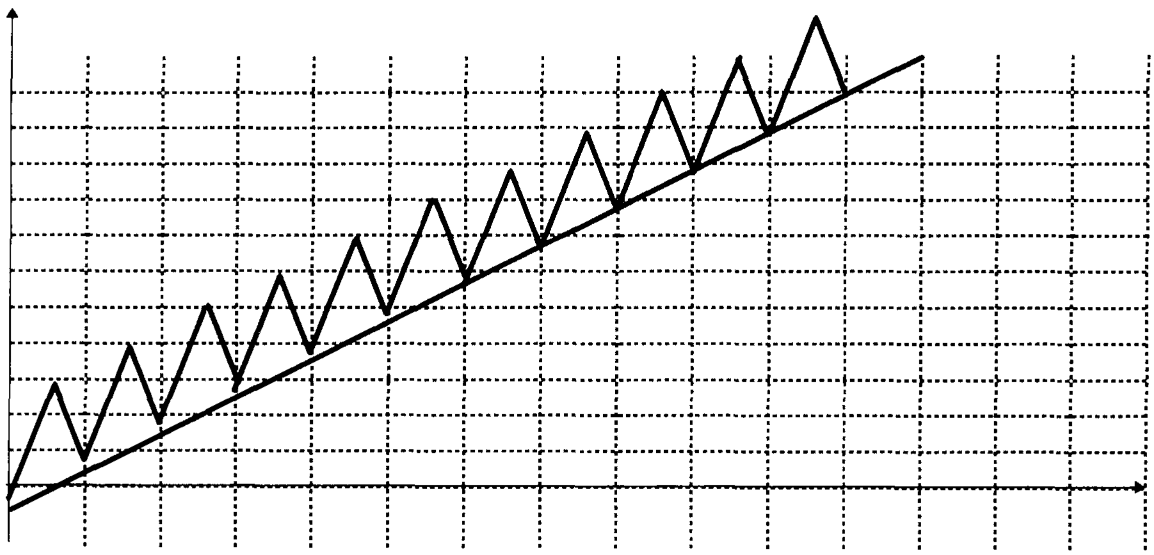
Fuera de esos valores enteros, la fórmula **d**(t) = **t**, puede describir la posición de la pulga que siempre salta hacia adelante, pero no la de la que avanza y retrocede sucesivamente. Por lo tanto esa fórmula no es suficiente siempre para decidir qué animal ganaría la carrera.

Por ejemplo, en t=5 la posición la distancia recorrida por las dos pulgas es de 5 cm. Si la meta estuviese a 5 cm. de la salida la fórmula parecería indicar que se produce un empate en la carrera.

Sin embargo, eso no es así porque una carrera es ganada por aquel corredor que atraviesa la línea de meta en primer lugar y la pulga caprichosa siempre va por delante de la otra, como queda palpablemente claro si se construye la tabla y la gráfica que describen la posición en cada momento de las pulgas. Construir la fórmula que describa satisfactoriamente la posición de la segunda pulga en todo momento no es una tarea sencilla, aunque tampoco es imposible.

DISTANCIA A LA LÍNEA DE SALIDA DE CADA PULGA

t	0’5	2/3	1	1’2	1’4	1’6	1’8	2	7/3	8/3	3	4	4’5	5	5’5	6
pulga simple	0’5	0’66	1	1’2	1’4	1’6	1’8	2	2’33	2’66	3	4	4’5	5	5’5	6
pulga caprichosa	2’5	3’33	1	2	3	4	3	2	3’66	4’66	3	4	6’5	5	7’5	6



Para otra versión de este mismo problema, véase el titulado *Las pulgas* en el cuaderno *Fórmulas y gráficas* de 4° curso.

LA CARRERA

En contra de lo que dicta la intuición, cuando la chica empieza a correr 5 metros por detrás de la línea de salida ***no** se produce un empate* en la carrera. Este hecho se puede demostrar muy convincentemente: por cada 100 metros que recorre la chica, el chico recorre 95. Así, en la segunda carrera chico y chica estarán igualados cuando el uno lleva recorridos 95 metros y la otra 100 metros. ¡Pero todavía faltan 5 metros para la meta!. La chica es más rápida, luego ganará.

Para que se produzca un empate en la carrera ambos corredores deben tardar el mismo tiempo recorriendo distancias distintas. El chico recorrerá 100 metros, la pregunta es *¿cuánto deberá recorrer la chica?* Un simple razonamiento proporcional resuelve la cuestión: si cada 95 metros del chico la chica recorre 100, mientras aquel recorra 100, ésta recorrerá 100x100/95 = 105'263... metros.

La ventaja necesaria para el empate es pues de 5'263...

LOS CAMAREROS

El tipo de errores que producen problemas como este es bien conocido y tiene su origen en la preponderancia mental de las estructuras aditivas y de la proporcionalidad directa que actúan inercialmente imponiéndose u obstaculizando otros enfoques. Como estos errores surgirán tan espontánea como inevitablemente, aprovéchese para discutirlos y para dejar patente su inconsistencia. Algunos ejemplos de este tipo de razonamientos erróneos de partida son los siguientes:

El otro camarero tardará 10 minutos, pues el primer camarero ha hecho su trabajo de siempre en los 20 minutos acostumbrados y ha tenido que complementar con 10 minutos extras que es el trabajo que realizaba el camarero ausente.

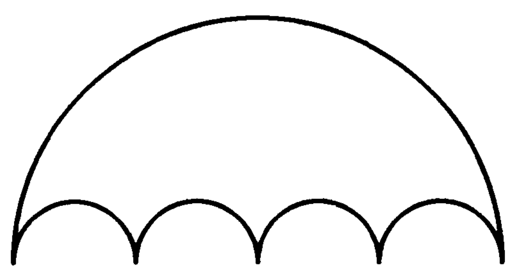
Cada camarero aislado tarda 30 minutos.

Si entre dos camareros tardan 20 minutos, la mitad de los camareros, esto es uno sólo, tardará 40 minutos.

Si entre dos camareros tardan 20 minutos, uno sólo tardará 40 minutos en promedio. *Como el que sí fue a trabajar tarda 30 minutos (10 menos que la media) el otro tardaría 40 minutos (10 más que la media).*

EL HUERTO DEL TÍO PEPE.

En este problema de decisión se requiere en definitiva una comparación entre los *secciones* de los dos diseños posibles de cubiertas de invernadero, que se ejemplifican para un caso en la figura adjunta. No desaproveche la oportunidad de plantear el problema en primer lugar como una estimación mental.



CERVEZA SIN ALCOHOL

Este problema es una variante del titulado *El reparto de los panes* que se discute con amplitud en el capítulo dedicado a comentar del cuaderno *Resolución de Problemas*.

Cuarta parte

COMENTARIOS A LAS CARPETAS DE 4º

CAPÍTULO XII

FÓRMULAS Y GRÁFICAS 4º

60. El LENGUAJE GRÁFICO

EL VIENTO

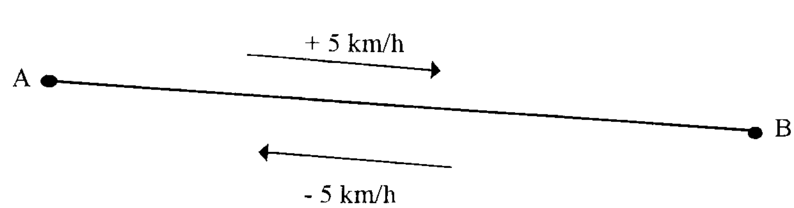
El problema puede atacarse inicialmente explotando los datos disponibles bajo la hipótesis de que no hay viento. Este tanteo previo permite una familiarización con el tipo de cálculos necesarios para obtener velocidades, tiempos y distancias.

El recorrido total, ida y vuelta, es de 4'5 h. x 32 km/h = 144 km., de modo que la distancia entre A y B es de 144/2 = 72 km. Esta conclusión deberá ser discutida porque no es obvia. La estrategia más adecuada para facilitar el *convencimiento* de que se está actuando correctamente es la construcción de un ejemplo que simule la situación:

Supongamos que la distancia entre A y B hubiese sido 100 km. y que la velocidad a la ida es de 25 km/h mientras que a la vuelta se realiza a 20 km/h. El tiempo empleado habría sido de 100/25 = 4 horas para la ida y de 100/20 = 5 horas para la vuelta. Entonces, la velocidad media habría sido de 200/9 = 22'2222... km/h.
Por lo tanto si se sabe este último dato y el tiempo empleado, su producto 22'222... x 9 = 200 es el doble de la distancia entre los dos puntos.

En ausencia de viento, la velocidad media de la ida es pues 72 km / 2 h. = 36 Km/h., mientras que la de la vuelta será 72 Km./2'5 h. = 28'8 km/h. La diferencia entre las dos velocidades es pues de 7'2 km/h.

En una segunda fase se puede pasar a calcular datos similares con una velocidad concreta del viento, por ejemplo 5 km/h. Se supone que el viento sopla a la misma velocidad y en un sentido fijo todo el viaje, lo que sin duda es una idealización. Supongamos inicialmente que el sentido es de A a B. El ciclista viajará a la ida con un impulso que le incrementará la velocidad en 5 Km/h, mientras que a la vuelta sufrirá un descenso de la misma magnitud.



La velocidad de ida es, bajo estas circunstancias, (36 + 5) km/h y la de vuelta (28'8-5) Km/h. Por lo tanto, el tiempo total empleado en el viaje es

$$t = \frac{72}{36+5} + \frac{72}{28'8-5} = 1'75609 + 3'0252 = 4'78130 \text{ horas.}$$

Más importante que el resultado numérico obtenido es la estructura de la expresión que ha permitido generarlo.

Comprender que el 5 puede ser sustituido por otros valores de la velocidad del viento significa estar, en primer lugar, en disposición de construir una tabla para distintos valores de la velocidad, en segundo lugar de, por generalización, *construir* la fórmula que relaciona el tiempo empleado en el viaje con la velocidad que lleve el viento, y, finalmente, con ayuda de recursos electrónicos, de *construir* una gráfica que describa la relación funcional.

En este problema, en definitiva, se parte de una situación descrita verbalmente, cuya interpretación genera una descripción numérica de la que se derivan descripciones numéricas estructuradas, descripciones algebraicas y, finalmente, descripciones gráficas, cuya interpretación genera a su vez nuevas cuestiones relativas a la comprensión profunda de la situación.

Representación numérica estructurada

$$t = \frac{72}{36+5} + \frac{72}{28'8-5}$$

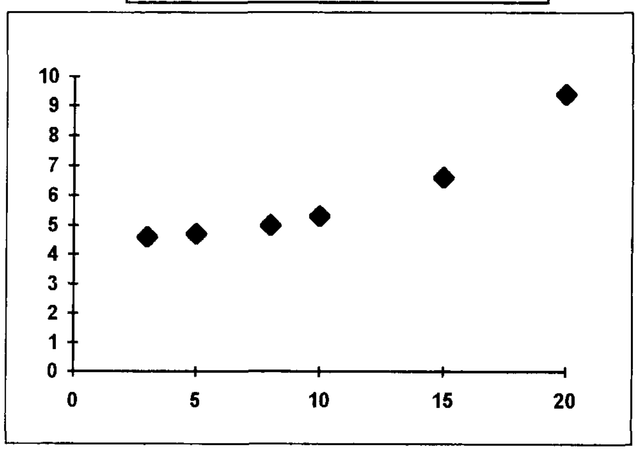
v	3	5	8	10	15	20	km/h
t	4'6	4'7	5'0	5'3	6'6	9'4	horas

Representación tabular / resumen cálculos

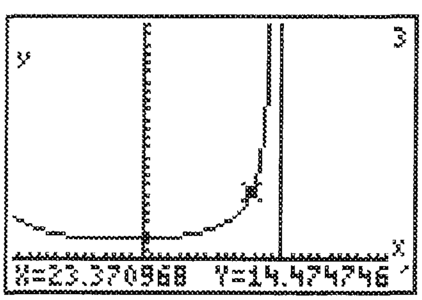
$$t = \frac{72}{36+V} + \frac{72}{28'8-V}$$

Representación analítica

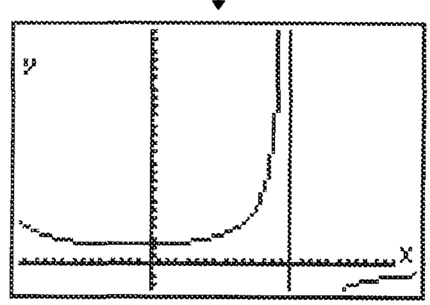
Representación punto a punto



Representación gráfica con máquina



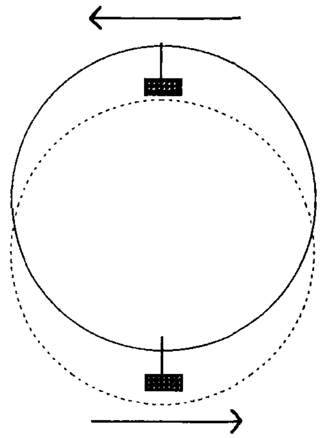
La gráfica está por debajo del eje horizontal para algunas velocidades del viento. ¿Qué significado tiene este hecho?
¿En qué condiciones meteorológicas el viaje resulta lo más breve posible?



LA NORIA

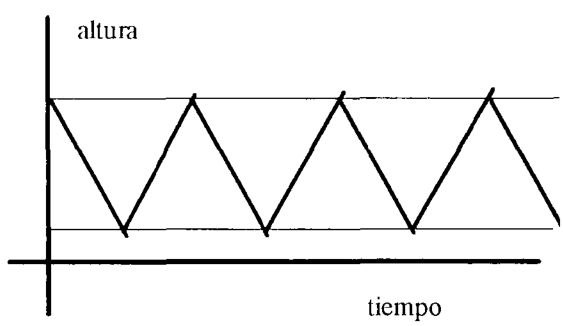
En la resolución del problema cabe distinguir dos etapas bien diferenciadas:

1) Construir un modelo geométrico de la situación:



2) Desde el anterior modelo geométrico, trazar una gráfica que esboce cualitativamente la relación existente entre altura y tiempo: lo interesante de esta fase es discutir la forma que debe tener la gráfica para ser aceptable.

Deberán exponerse argumentos convincentes para justificar que esta no es una circunferencia, pero tampoco una quebrada, que debe ser periódica y oscilar entre dos valores límite, etc.



Una descripción gráfica atractiva pero incorrecta

Una vez *convenida* la forma de la gráfica que describe eficazmente la relación entre altura y tiempo, puede pasarse a discutir, si se desea, aspectos cuantitativos más precisos como cuáles son los valores límite para la altura y cuál es el período al cabo del que se repite la gráfica.

Para responder a las dos preguntas finales del problema es preciso establecer un convenio para localizar a la cesta en la noria. Esta es una cuestión esencialmente geométrica y permite varias alternativas, por ejemplo, se puede efectuar una *localización que combine una descripción verbal con cálculos numéricos*: si en una vuelta se tarda 1 minuto, cada segundo se *baten* 360/60 = 6°. A las 12 y 42 segundos, el punto del que pende la cesta se encontrará situado sobre la circunferencia que compone la estructura de la noria a 6° x 42 seg. = 252° de la vertical en el sentido de giro de la noria. La cesta propiamente dicha se encuentra un metro verticalmente hacia abajo.

Alejándose del objetivo central del problema, se puede aprovechar el contexto que describe plantear como investigación un estudio del comportamiento del modelo funcional

$$h(t) = A + B \operatorname{sen}(C t + D)$$

que resulta eficaz para reflejar el comportamiento de fenómenos funcionales periódicos como la altura alcanzada por la cesta de la noria.

La fórmula se suministrará directamente por el profesor, indicando que A, B, C y D son constantes que deben fijarse en cada caso y que tienen un efecto sobre la gráfica de la función h(t) que se trata de averiguar haciendo pruebas con una calculadora gráfica o con ordenador. Esa exploración es *experimental* y puede organizarse comparando las gráficas obtenidas por distintas particularizaciones de las constantes hasta desvelar la influencia que ejercen aisladamente cada una de ellas. Estos son algunos de los casos por los que se podría empezar la exploración

$h(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = B \operatorname{sen} t$, $h(t) = \operatorname{sen} C t$, $h(t) = \operatorname{sen}(t+D)$, $h(t) = A + \operatorname{sen} t$

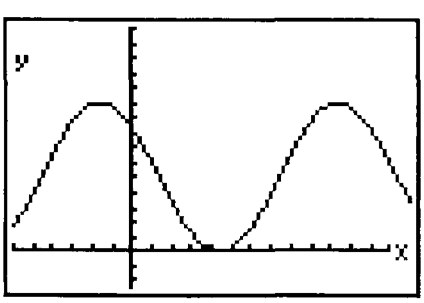
Como aplicación de los resultados de la investigación, se puede proponer una *estimación* de los valores A, B, C y D para el caso particular planteado en el problema de la noria.

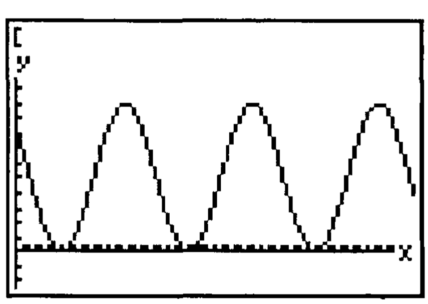
Esta estimación es particularmente interesante porque combina la comprensión alcanzada sobre el significado de A, B, C y D con el esbozo cualitativo de la gráfica que se había efectuado inicialmente.

Así, el *modelo concreto* que particulariza el comportamiento de la noria es

$$h(t) = 10 + 10 \operatorname{sen}(2\pi t/60 + 15)$$

cuya gráfica, representada en dos escalas, es:





BUSCANDO

La segunda pregunta de este problema debe ocultarse hasta que se hayan confeccionado las primeras gráficas. Hay una tendencia innata a ceñirse exclusivamente a números enteros, incluso a veces solo a números enteros positivos, cuando se trata de dar valores a una fórmula o expresión algebraica. La mencionada segunda pregunta pretende romper esta tendencia limitadora. Los números no enteros también existen.

GRÁFICAS I - GRÁFICAS II

Se busca en este problema un automatismo en la identificación de la fórmula lineal y la ubicación en el plano cartesiano de la recta que la representa gráficamente.

Se trata en este caso de ejercitar la traducción

gráfica $\longleftrightarrow$ fórmula

para una familia funcional concreta y sencilla, la lineal.

Se debe plantear el problema como una pequeña investigación cuyo objeto es establecer una clasificación de todos los casos *cualitativamente* distintos que se pueden dar, cumplimentando con los bocetos gráficos adecuados las casillas de una tabla como la siguiente:

Y = AX + B	**A<0**	**A=0**	**A>0**
B<0			
B=0			
B>0			

No habría que detenerse aquí de todos modos y debería aspirarse a introducir la idea de pendiente como medida de la inclinación, buscando poner de relevancia esencialmente el choque cognitivo que supone el comportamiento de las pendientes negativas: la idea *intuitiva* de pendiente como inclinación debe ser adaptada para que funcione *adecuadamente* con las pendientes negativas, en las que pendientes más pequeñas significan inclinaciones mayores.

También convendría llamar la atención en algún momento sobre el hecho de que, si bien todas las gráficas de la familia lineal son líneas rectas, no todas las rectas del plano cartesiano quedan representadas por la familia lineal, que no incluye a las rectas que son verticales, el tratamiento de las cuales requiere otras estrategias didácticas (véase, por ejemplo, la actividad titulada EL JUEGO DE LAS ISOMETRÍAS del cuaderno de Geometría de 4°).

UN SALTO INFINITO (I Y II)

Las dos situaciones planteadas constituyen un ejemplo típico del proceso que conduce desde la formulación de una propiedad numérica a la construcción de una tabla resumen de la misma que, ampliada y explorada convenientemente con los números adecuados, permite construir un grafo funcional:

números ⟶ tabla ⟶ gráfica

La singularidad del caso estriba en el comportamiento *perverso* del número 0 que obliga a aceptar la idea de que no es posible representar gráficamente un punto asociado a dicho número.

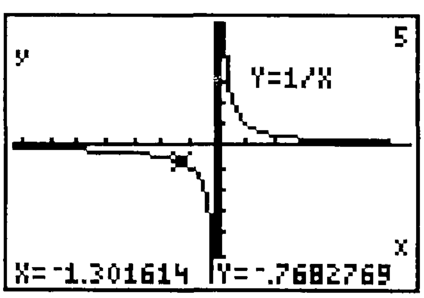
¿Qué pasa en cada caso cuando uno de los números de la pareja es muy próximo al cero? ¿Qué pasa con los números negativos? ¿Qué pareja le corresponde a un número positivo (o negativo) muy grande (o muy negativo)?

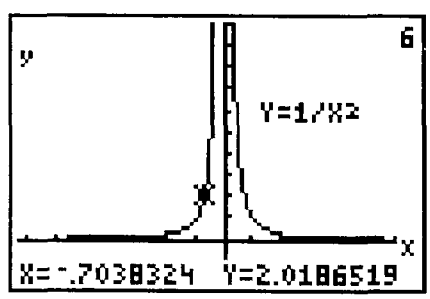
Estas preguntas y otras similares son clave para animar a los estudiantes a la exploración y para *estimar* el comportamiento gráfico aun antes de recurrir al papel milimetrado.

Aunque no se requiere una construcción explícita de la expresión algebraica que relaciona a las parejas de números que cumplen las propiedades indicadas en los enunciados, esta construcción surge espontáneamente en clase con cierta frecuencia y, a discreción, puede ser aprovechada para incitar a la representación gráfica mecánica (con calculadora gráfica o con ordenador) de la función que, complementando la otra vía, enriquecerá enormemente la discusión.

números ⟶ tabla ⟶ gráfica

números ⟶ fórmula ⟶ gráfica





EL APARCAMIENTO

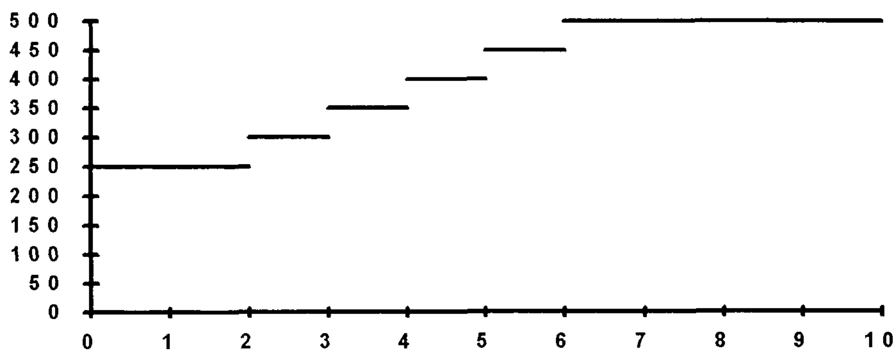
Si bien formalmente la situación responde al mismo esquema didáctico que las actividades anteriores:

descripción ⟶ tabla ⟶ gráfica

descripción ⟶ fórmula

existe ahora una conjunción de factores que hacen problemática tanto la construcción de la tabla (que requiere una *toma de conciencia* del comportamiento constante de la tarifa en cada intervalo horario) como la representación gráfica y, sobre todo, la fórmula o fórmulas que no deben fijarse como objetivo importante.

tiempo de estacionamiento (en horas)	precio de la estancia en ptas.
de 0 a 2	250
de 2 a 3	250 + 50 = 300
de 3 a 4	250 + 2 x 50 = 350
de 4 a 5	250 + 3 x 50 = 400
de 5 a 6	450
de 6 a 24	500



Se deberá, no obstante, incitar a describir con precisión los cálculos necesarios para obtener el precio de la estancia de **t** horas (enteras o no) en el estacionamiento. Esa *descripción verbal* es de hecho *la fórmula*: si **t** es 6 o más horas, el precio es 500, si **t** es inferior a 6 horas el precio es 50 veces el número entero de horas más doscientas pesetas.

Descripciones como estas pueden ser utilizadas para *descubrir* la función parte entera que, dicho sea de paso, cada vez se encuentra con mayor frecuencia entre las disponibles en las calculadoras científicas y gráficas.

Otra posible extensión del problema se puede iniciar a partir de preguntas como las siguientes: *¿Qué precio deberá pagar un auto que permanezca más de 24 horas seguidas en el aparcamiento? ¿Es razonable que pague indefinidamente la tarifa de 500 ptas.?*.

61. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

CASILLAS Y NÚMEROS

El problema puede resolverse por *tanteo numérico* y es de complejidad creciente a medida que se alejan entre si las dos casillas inicialmente ocupadas por números conocidos.

Una vía de ataque alternativa al problema consiste en buscar la notación algebraica adecuada para establecer formalmente las relaciones que existen entre unas casillas y otras. El *quid* de la cuestión estriba en que no cualquier notación es útil para representar *eficazmente* la relación.

Sin duda

1	X	$\frac{X+1}{2}$	$\frac{\frac{X+1}{2}+X}{2}$	4

es mucho menos elegante y, sobre todo mucho menos útil que

1	2X - 1	X	8 - X	4

aunque ambos son representaciones válidas de la relación, que, aplicada, a las casillas centrales proporciona la posibilidad de determinar x:

$$2\,(8 - X) - (2X - 1) = X \longrightarrow X = 17/5$$

EL CUADRADO ALGEBRAICO

El apartado a) está dedicado a afianzar el concepto de *valor de una expresión algebraica.*

La cuestión del apartado b) genera un sistema de ecuaciones cuyas soluciones (x=-1, y=2) pueden obtenerse por tanteo. Alternativamente, el apartado b) puede ser utilizado para introducir algunos métodos sistemáticos de resolución de sistemas.

El sistema que se genera en c) determina el valor y=2, dejando libre el valor de x. Es, por lo tanto, un ejemplo de *sistema indeterminado*.

Finalmente, las ecuaciones definidas por la condición d) son *incompatibles*.

PAREJAS

La inmensa mayoría de las búsquedas (de números, de objetos, de ejemplos, de ideas, ...) admiten una estructuración heurística que requiere ante todo una pauta para organizar la caza y captura ordenada de los elementos buscados. Buscamos aquí una pareja de números tales que su producto sea 12 y la suma de sus recíprocos sea 1, *o se parezca lo más posible a 1*. Disponemos para ello de una calculadora y de suficiente animosidad como para hacer algunas pruebas y establecer un cálculo organizado sacando partido a la tecla 1/X y a la memoria de la máquina.

a	b	ab	1/a	1/b	1/a + 1/b	Resultado
1	12	12	1	0'083333	1'083333	se pasa
2	6	12	0'5	0'166666	0'666667	no llega
3	4	12	0'333333	0'25	0'583333	no llega

Las pruebas realizadas *sugieren* una búsqueda más meticulosa en torno al número a=1, que tan buen resultado ha proporcionado ya de salida.

a	b	ab	1/a	1/b	1/a + 1/b	Resultado
1	12	12	1	0'083333	1'083333	se pasa
1'5	8	12	0'666667	0'125	0'791667	no llega
0'9	13'33333	12	1'111111	0'075	1'186111	se pasa
1'1	10'90909	12	0'909091	0'091667	1'000757	se pasa
1'2	10	12	0'833333	0'1	0'933333	no llega
1'12	10'7142	12	0'892857	0'093333	0'986190	no llega

NÚMEROS PARES E IMPARES

Este problema presenta dos tipos de dificultades, una de carácter esencial y otra más secundaria.

La primera de ellas, de tipo actitudinal, consiste en el rechazo innato a demostrar lo obvio. Así, la observación reiterada de que la suma de dos números pares es un número par parece ser razón suficiente para *inducir* la generalidad de esa propiedad. Y de hecho en gran medida esta es una razón muy poderosa.

La segunda dificultad es de tipo técnico. La manipulación de expresiones con indeterminadas y la interpretación de los resultados que se van obteniendo es una operación intelectual muy abstracta: la multiplicación de dos números impares requiere primero reconocer que un número impar puede representarse en la forma 2n+1, segundo darse cuenta de que para manejar simultáneamente un segundo número impar se debe recurrir a una segunda indeterminada m. El producto entonces

$$(2n+1)\,.\,(2m+1) = 4nm + 2n + 2m + 1$$

arroja un resultado en el que se debe reconocer que los tres primeros sumandos son pares y en conjunto por lo tanto es impar.

La combinación de estas dos dificultades mencionadas hacen que este problema sea poco recomendable para ser planteado a todo el mundo, debiéndose en consecuencia reservar preferiblemente para aquellos que alcancen un estado avanzado de desarrollo algebraico. Para la generalidad, por el contrario, conviene centrar el problema en la *observación de las regularidades* que se presentan en la paridad al realizar operaciones aritméticas. Por ejemplo, podría formularse la pregunta *¿qué operaciones* (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, ...) *conservan la paridad?*

		A	
	A^B	par	impar
B	par		
	impar		

ADIVINANDO CARTAS

En los primeros escarceos con el problema surge casi espontáneamente la idea de *probar* qué ocurre bajo el supuesto de que la carta escogida haya sido una determinada. Debe aprovecharse esta idea para sugerir la construcción de una tabla que recoja todos los resultados posibles:

	as	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**sota**	**caballo**	**rey**
oros	16	26	36							126
copas	17	27	37				77			
espadas	18	28	38					108		
bastos	19	29	39						119	

Buscando en la tabla el número de la contestación del jugador, la fila y la columna correspondientes desvelan la carta escogida. El descubrimiento de que los números que aparecen en la tabla no son arbitrarios no tarda en producirse: las decenas señalan unívocamente el valor de la carta y las unidades identifican el palo, con la codificación:

6 ⟶ oros , 7 ⟶ copas , 8 ⟶ espadas, 9 ⟶ bastos

10 ⟶ sota, 11 ⟶ caballo, 12 ⟶ rey

ADIVINANDO NÚMEROS

Este problema es una variación, algo más complicada, del problema anterior.

Como aquel, se puede resolver construyendo la tabla de todas las respuestas posibles y analizando las regularidades que se presentan. Conviene limitar la extensión del problema de modo que uno de los dos números tenga una sola cifra y dejar el caso más general como extensión que se planteará si procede y a quien proceda.

En el caso restringido es factible también la vía algebraica: si los números pensados son respectivamente X e Y, este último de una sola cifra, entonces las sucesivas operaciones que deben realizarse quedan codificadas algebraicamente como

$$2\,(5\,X + 7) + Y$$

o bien 10 X + Y + 14.

Esto quiere decir que para adivinar los números pensados habrá que sustraer 14 a la respuesta del jugador. Las unidades del número resultante identifican a Y, y el resto de las cifras a X.

Los problemas de *ilusionismo algebraico* como este tienen un éxito tremendo en clase y sería una pena desaprovechar el entusiasmo que suscitan sin incitar a los alumnos a diseñar sus propios trucos y definir con precisión el ámbito de aplicación de los mismos.

COINCIDENCIA

La ecuación a+b = ab es equivalente a la ecuación (1/a)+(1/b) = 1. La una se puede deducir a partir de la otra y la otra a partir de la una. El objetivo de este problema es contribuir a forjar el concepto de *equivalencia algebraica*. Las soluciones, las mismas para las dos ecuaciones, deberán cumplir igualdad a+b-ab = 0, esto es a(1-b)+b = 0, y en resumidas cuentas

$$a = \frac{b}{b-1}$$

Cada valor de b, excepto 1, engendra una solución. Por simetría, cada valor de a, excepto 1, engendra también una solución.

DOS CIFRAS

*Si **A** es la cifra de las decenas y **B** es la cifra de las unidades de un número, este número es **10A+B**.*

Esta es la indicación básica, nada evidente a pesar de que se basa en la esencia de la notación decimal, que habrá que formular para que la resolución del problema arranque.

La relación entre A y B debe ser pues 10A+B-AB = 16.

Probando con todas las cifras posibles para B, se obtiene que las únicas que están asociados a valores admisibles de A (esto es a cifras) son las correspondientes a los números 24, 37, 48 y 79.

Para la otra cuestión que se plantea, si 10A+B-AB puede ser cualquier número, constrúyase una tabla de doble entrada:

10A+B -AB	A= 0	A=1	A=2	A=3	A=4	A=5	A=6	A=7	A=8	A=9
B=0	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
B=1	**1**	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**
B=2	**2**	**10**	**18**	**26**	**34**	**42**	**50**	**58**	**66**	**74**
B=3	**3**	**10**	**17**	**24**	**31**	**38**	**45**	**52**	**59**	**66**
B=4	**4**	**10**	**16**	**22**	**28**	**34**	**40**	**46**	**52**	**58**
B=5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
B=6	**6**	**10**	**14**	**18**	**22**	**26**	**30**	**34**	**38**	**42**
B=7	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**25**	**28**	**31**	**34**
B=8	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**
B=9	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**

La tabla deja claro que no se puede obtener cualquier resultado: 21, 23, 27, 29, 33, 37, 39, ... , 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, son algunos de los números que no pueden obtenerse como resultado de restar a un número menor que cien el producto de sus dos cifras.

62. ECUACIONES Y SISTEMAS

DOS AÑOS DE AUMENTO

Para establecer un método que permita calcular la evolución de los precios existen dos aproximaciones posibles, una que pone de relevancia el cálculo numérico necesario, esto es los aspectos algorítmicos del problema, y otra que centra más la atención en las propiedades algebraicas. Ambas aproximaciones pueden explorarse alternativamente o, mejor todavía, complementariamente.

La aproximación *numérica* tiene una estructura iterativa: dado el precio de un año, el precio del año siguiente se obtiene siempre del mismo modo, añadiendo el 4%:

Precio inicial	2.000
año 1	2000 + 0'04 x 2000 = **2080**
año 2	**2080** + 0'04 x 2080 = 2163
año 3	2163 + 0'04 x 2163 = **2250**
año 4	**2250** + 0'04 x 2250 = 2340
....	....

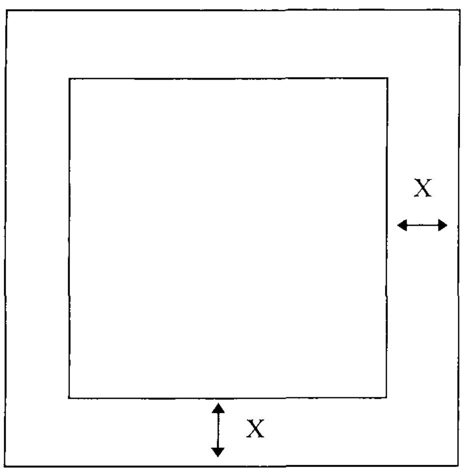
Este esquema iterativo genera al usar calculadora una secuencia fija de teclas, o pauta de actuación repetitiva:

$\boxed{2000}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{/}$ $\boxed{100}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{MR}}$

La aproximación *algebraica* fija la atención en la *estructura* de las operaciones que se realizan y no tanto en los resultados numéricos:

Precio inicial	2.000
año 1	2000 + 0'04 x 2000 = 2000 (1+0'04) = = **2000 x 1'04**
año 2	2000 x 1'04 + 0'04x(2000 x 1'04) = = 2000 x 1'04 (1+0'04) = **2000 x 1'04^2**
año 3	2000 x 1'04^2 + 0'04x(2000 x 1'04^2) = = 2000 x 1'04^2 (1+0'04) = **2000 x 1'04^3**
....	....
año n	2000 x 1'04^n

EL JARDÍN



La razón de ser de esta actividad es construir la ecuación que describe las condiciones del problema. Previa a esa construcción algebraica es la construcción del modelo geométrico que permita razonar algebraicamente:

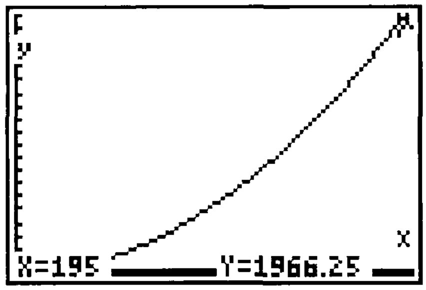
$$(6-2X)^2 = 18$$
$$6-2X = 4'24264...$$
$$X = 0'878679...$$

¡PÁRATE!

Se trata de un ejercicio de tabulación y de representación gráfica a partir de una fórmula que en parte viene dada de antemano y en parte hay que deducir de los datos que se facilitan y de las leyes de la cinemática.

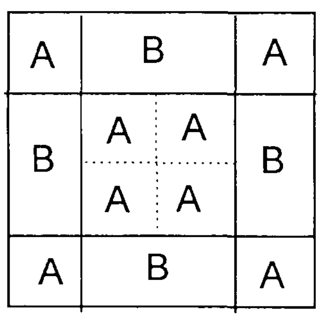
La gráfica requiere una elección cuidadosa de la escala para que resulte presentable:

Gráfica de $Y = (3V^2 + 20V) / 60$, para $0 < V < 200$, $0 < Y < 2066.66\ldots$



CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

La estrategia de actuación más instructiva para resolver el problema contiene a partes iguales álgebra y geometría. La aportación geométrica consiste en construir un modelo gráfico de la situación para razonar a partir de él:



El área total del cuadrado es la suma de las áreas parciales que lo componen:

$$8A + 4B = 1$$

La longitud del lado del cuadrado es la suma de las longitudes de los lados de las figuras en que está descompuesto:

$$4\sqrt{A} = 1 \quad (\text{o bien } 16A = 1)$$

De donde se deduce que $A=(1/16)$, y que $B=1/8$. El cuadrado central tendrá lado 1/2 y estará situado a distancia ¼ del contorno del cuadrado grande.

SUMA Y PRODUCTO

Si se realizan algunas comprobaciones para valores particulares de X y de Y, no tardan en surgir algunas observaciones cruciales:

a) puede ocurrir que la desigualdad $X+Y > XY$ sea cierta, pues $1 + 2 > 1 \cdot 2$ (*ejemplo* de la desigualdad), pero también que no: $2+3$ no es mayor que $2 \cdot 3$ (*contraejemplo* de la desigualdad).

b) puede ocurrir que la desigualdad X+Y < XY sea cierta pero también que no lo sea (el ejemplo de antes es ahora el contraejemplo y viceversa).

c) puede ocurrir que X + Y = X · Y (*ejemplo*, 2+2 = 2 · 2), pero también lo contrario (*contraejemplo*, 1+1 ≠ 1 · 1).

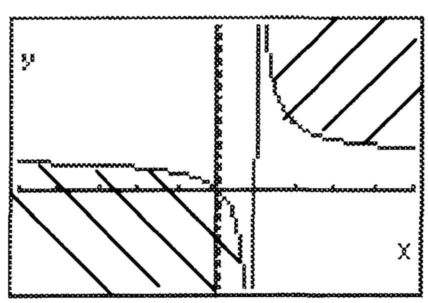
Estas observaciones demuestran que no tiene sentido responder de manera *absoluta* a la pregunta *¿qué es mayor, X+Y o XY?*, y que en todo caso la respuesta depende de cuáles sean los valores de X e Y. Este hecho no debe ocultar sin embargo que *para cada pareja concreta* de números X e Y debe cumplirse *una y solo una* de las condiciones:

X+Y = X · Y ó X+Y < XY ó X+Y > XY

Para que esto sea bien comprendido se puede recurrir a analizar una gráfica de la curva X+Y = X · Y, esto es de la función Y = X / (X-1).

Esta gráfica se puede trazar, si se dispone de ellos, con ordenador o calculadora gráfica o bien suministrarse ya pintada a los estudiantes, pues la actividad analítica propiamente dicha empieza *a partir* de la gráfica, para concluir que esta divide al plano en **tres** zonas distintas: la de los puntos que verifican X+Y = X · Y, que están representados por la curva propiamente dicha; la de los puntos que verifican X+Y < X · Y (rayada en la ilustración adjunta) y la de los puntos para los que X+Y > X · Y.

gráfica de y = x / (x-1)

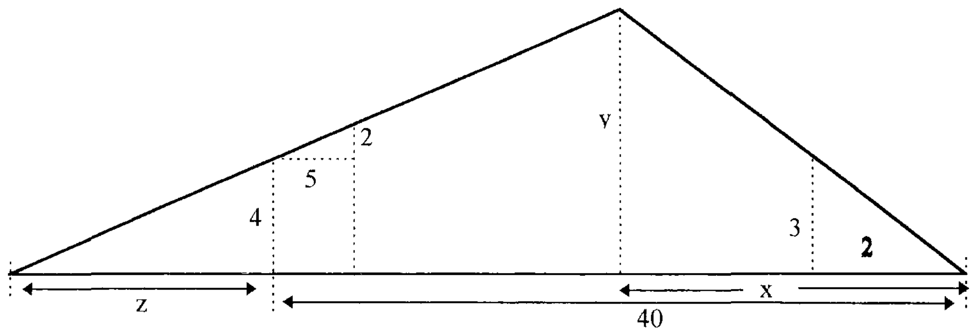


EL TÚNEL. VELOCIDAD MÍNIMA

Estos dos problemas permiten manejar ecuaciones de curvas planas en contextos más o menos relacionados con la experiencia. El objetivo es en ambos casos realizar las oportunas sustituciones de las variables por valores numéricos concretos e interpretar el significado de lo que se está haciendo. Las ecuaciones que no se incluyen expresamente en el enunciado, como es el caso de la ecuación de la circunferencia, será facilitada, si es necesario, por el profesor.

EL GLOBO

Este problema muestra una vez más cómo aparecen ecuaciones en contextos de tipo geométrico, y demuestra que para que se puedan formular explícitamente esas ecuaciones es condición necesaria *razonar geométricamente.*



La semejanza existente entre algunos de los triángulos rectángulos representados en la figura obliga a que se cumplan las siguientes proporciones:

$$2/5 = 4/z \quad ; \quad 2/5 = y/(40\text{-}x+z) \quad ; \quad 3/2 = y/x$$

de las que se deduce que x, la distancia horizontal entre Isabel y un foco en el momento en que el globo es iluminado por dos rayos es 10,256.. metros, siendo 29,473... la distancia al otro foco.

63. SUCESIONES

TRAMA CUADRADA

Este problema necesita generar dos fórmulas.

La primera se construye por generalización de la observación de la disposición geométrica de los puntos en la trama cuadrada que acompaña al enunciado: *la suma de los n primeros números impares es el cuadrado de n.*

La segunda fórmula debe describir *cuántos números impares* hay hasta un determinado número n. La generalización de la cuenta se realiza ahora por observación directa de la serie de los números naturales: hasta 8 hay 4 números impares, es decir la mitad. Sin embargo, hasta 13 hay 7 números impares, es decir la mitad de 13+1. *Por lo tanto*

Número de *números* **impares** hasta n $= \begin{cases} n/2 & \textit{si n es par} \\ \dfrac{n+1}{2} & \textit{si n es impar} \end{cases}$

Bien alternativamente, bien en coexistencia con el planteamiento algebraico de generación de fórmulas, conviene enfocar el problema también en su vertiente algorítmica, es decir buscando el diseño de una rutina para la calculadora que permita efectuar *numéricamente* sumas de números impares. El siguiente es un algoritmo para sumar números impares desde 81, por ejemplo, válido para calculadoras con posibilidad de reiteración de operaciones:

$\boxed{81}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{81}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{Mr}}$

SUMAS ITERADAS

Aquí se parte de planteamientos algorítmicos, facilitándose unas rutinas de calculadora, y el objetivo es doble: por una parte analizar numéricamente las salidas de los algoritmos; por otra describir algebraicamente el comportamiento de los mismos.

Expresado en términos ideales, se trataría de establecer (con más o menos grado de abstracción según cada persona) conclusiones como las siguientes:

$\boxed{0.5}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ ... ...

es lo mismo que

$$3 \text{ x } 0'5 + 3 \text{ x } 0'5^2 + 3 \text{ x } 0'5^3 + 3 \text{ x } 0'5^4 + \dots\dots\dots$$

o como

$\boxed{A}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{B}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{M+}}$ ... ...

es equivalente a

$$B \text{ x } (1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots\dots\dots)$$

SUCESIONES CON CALCULADORA

La sucesión que genera el algoritmo, que formalmente responde al esquema recursivo

$$a_{n+1} = 1 + (1/a_n)$$

es convergente. Cuando se estabiliza el resultado que aparecen en la pantalla de la calculadora se cumple la propiedad que se indica en el enunciado. Este valor límite cumple pues la relación:

$$L = 1 + (1/L)\,, \quad \text{esto es } L^2 - L - 1 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1'618033989\ldots \quad \text{y} \quad (1-\sqrt{5})/2 = -\,0'61803398\ldots$$

Todo el mundo habrá obtenido en la calculadora el límite positivo.

Una ampliación del problema está servida: ¿cómo es posible obtener *con el mismo algoritmo* el límite negativo?.

CONVERGENCIA. DOS TENDENCIAS

Al igual que el problema anterior, estos problemas tratan sobre sucesiones recurrentes definidas algorítmicamente y sugieren dos niveles diferentes de trabajo. El más elemental puede detenerse en la observación del comportamiento numérico de las sucesiones coligiendo si tienen límite o no, y estableciendo una equivalencia entre el algoritmo tal y como se presenta y las *operaciones numéricas* que de hecho se realizan:

$$3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots}}}}$$

El segundo nivel, mucho más sofisticado, consiste en describir formalmente la estructura recursiva:

$$a_{n+1} = 3 + \sqrt{a_n}$$

para deducir o *justificar* a partir de ella el valor límite aparecido en la calculadora.

EL SUPERCANGURO PEREZOSO. LA METALOMBRIZ.

En estos casos no se facilita *expresamente* el algoritmo que genera la sucesión, aunque del contexto se deducen los términos:

20 ; 20+10 ; 20+10+5 , 20+10+5+2'5 , 20+10+5+2'5+1'25
(*datos del* supercanguro perezoso).

Pero de esta *versión numérica* de la sucesión a una *versión algorítmica* que permita un cómputo eficaz con la calculadora media un abismo. Salvar este abismo es el objetivo fundamental de estos problemas, que podrían darse por bien finalizados en el momento que se diseñe algo parecido a la siguiente rutina (*para el supercanguro perezoso*):

$\boxed{20}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$

El nivel de *justificación* de los resultados obtenidos puede hacerse asequible adoptando el esquema que se expone a continuación con datos de la metalombriz:

$$\text{Si } \mathbf{S} = 1 + 3\,(1/2) + 5\,(1/4) + 7\,(1/8) + 9\,(1/16) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{2\,S} = 2 + 3 + 5\,(1/2) + 7\,(1/4) + 9\,(1/8) + 11\,(1/16) + \ldots\ldots\ldots$$

Restando estas dos igualdades se obtiene

$$\mathbf{S} = (2 + 3 - 1) + 1/2\,(5 - 3) + (1/4)\,(7 - 5) + (1/8)\,(9 - 7) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{S} = 4 + 2\,(1/2) + 2\,(1/4) + 2\,(1/8) + 2\,(1/16) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{S} = 4 + 2\,\{\,1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots\ldots\ldots\,\}$$

Actuando de modo parecido para $\{\,1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots\ldots\ldots\,\}$ se concluye finalmente que **S**=6.

TÉRMINO 100.000

Tras unas cuantas pruebas se establece el convencimiento de que la sucesión no converge, sino que oscila sin pauta aparente. Además, para algunos valores iniciales, como por ejemplo 1 o 1.618033989, ni siquiera tienen sentido los cálculos.
La justificación de este comportamiento divergente se deduce de la estructura recursiva de la sucesión

$$a_n = a_{n-1} - (1/\,a_{n-1})$$

que obligaría a que el límite L, de existir, verificase la ecuación $L^2 = L^2 - 1$, que no tiene solución.
La rutina de calculadora es en este caso algo más compleja que en los anteriores:

$\boxed{100}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{1/X}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ ………

64. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

CRECIMIENTO EXPONENCIAL. LA MEYOSIS

El concepto de *función exponencial*, a la creación del cual contribuyen estos problemas entre otros, se erige sobre el intuitivo concepto numérico de *potencia* como producto reiterado y consiste esencialmente en la ampliación o superación de ese concepto de potencia.

El contexto del crecimiento biológico propuesto en los problemas es especialmente adecuado para dar el salto que supone entender que si $2^2 = 2 \times 2 = 4$ y $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, *entonces*, para algún número x debe ocurrir que $2^X = 6$. La calculadora científica, disponiendo de la tecla X^Y, facilita en gran medida este salto.

Estos mismos contextos biológicos proporcionan un buen pretexto para dejar constancia de las virtudes y las limitaciones de los *modelos matemáticos*. Si bien es cierto que la función 2^X describe elegantemente el crecimiento de las bacterias, no es menos cierto que esta descripción no puede extrapolarse indefinidamente: al cabo de cuatro días el volumen que ocuparían las bacterias sería de $2^{4x24} = 2^{96} = 7'9 \,.\, 10^{28}$ cm^3 , es decir un volumen superior al del Sol.

EME-EME

Con los mismos objetivos que los anteriores, el problema se formula ahora en un contexto financiero en lugar de biológico. Parece increíble, pero es así: el dinero crece igual que las bacterias.

Complementariamente, se añade ahora el objetivo de introducir la utilización de la función logaritmo de la calculadora como recurso para computar valores inversos de la función exponencial. Esta introducción se puede realizar, sin efectos contraproducentes detectados, simultáneamente a la introducción de la función exponencial y, por lo tanto también en las dos actividades anteriormente comentadas.

EN BUSCA DE LOS LOGARITMOS

La introducción formal de los logaritmos se plantea aquí como una investigación sobre el modo de actuar de la tecla LOG de la calculadora.

El desarrollo de la actividad parte de la existencia de tal función que, *a modo de caja negra*, devuelve un número por cada uno de los números -aunque no por todos- que se introducen.

La observación organizada sobre estas *salidas numéricas*, formulando y respondiendo preguntas tales como *¿con qué números no funciona la tecla? ¿qué números dan como resultado un número entero?*; va configurando un conjunto de propiedades detectadas experimentalmente -*el logaritmo de 1 es 0, el logaritmo de una potencia de 10 es el* *exponente de la potencia, el logaritmo del cuadrado de un número es el doble del logaritmo de ese número, el logaritmo de un número positivo menor que uno es negativo, ...*- que conducidas adecuadamente pueden llevar a producir una definición de logaritmo acorde con las propiedades observadas.

PETRÓLEO

Si la mancha de petróleo tiene ahora una extensión de 3 km^2, dentro de 16 horas se extenderá sobre 3x2 = 6 km^2, al cabo de 32 horas alcanzará los 6x2 = 3x2x2 =12 km^2, ... y así sucesivamente. Claramente se puede inducir que la fórmula $3 \, . \, 2^t$ describe la extensión de la mancha contaminante. Y ésta es una solución aceptable.

No obstante, el significado de t en la fórmula anterior es un tanto antinatural: t=3 quiere decir 3 períodos de 16 horas, es decir 48 horas o 2 días. Y el hecho es que nadie mide el tiempo con esa unidad. Parecería pues razonable ajustar la fórmula anterior para que t esté medido de modo más convencional con cualquiera de las unidades de tiempo habituales: segundo, minuto, hora, día, ..

Y lo que parecía ser un problema secundario, el de las unidades, se convierte en este caso en el obstáculo esencial para descubrir que la fórmula

$$3 \, . \, 2^{1'5\,t}$$

es la que describe el tamaño de la mancha de aceite.

65. INVESTIGACIONES Y PROBLEMAS

CAMBIO DE PRECIOS

Dos tipos de errores afloran con este problema.

El primero se basa en la atracción intelectual que supone una engañosa simetría: si 1327 es el precio después de cargar un 13% de IVA al precio antes de impuestos (es decir, el resultado de añadir a una cierta *cantidad* el 13% de dicha *cantidad*), entonces tal precio será 1327-(13% de 1327) = 1115'49 ptas. Según esto, el nuevo precio del artículo debe ser 1115'49 + (1115'49 x 15/100) = 1282'8135.

El segundo tipo descansa sobre la suposición de que una modificación de la tasa impositiva del 13 al 15% equivale a un incremento del 2% sobre el precio del artículo. Así, en el ejemplo anterior, este precio debería ser 1327 + (1327 x 2/100) = 1353'54.

Estos dos errores tienen una misma fuente, conceptuar los tantos por ciento como una estructura aditiva, cuando en realidad responden a una estructura multiplicativa. Esta *ilusión aditiva* es muy persistente y no deben esperarse grandes milagros por una simple llamada de atención del profesor.

Una manera de ayudar a crear imágenes mentales que rompan esta ilusión aditiva es recurrir a ejemplos de decrementos de precios, que ponen de manifiesto más palpablemente lo absurdo de las conclusiones: *si un artículo se rebaja el 70% y sobre el precio resultante se vuelve a hacer una rebaja del 60%, el porcentaje total de descenso no es del 130% porque en ese caso tendríamos que rebajar el artículo más que su precio.*

DOS POR UNO

Esta actividad (relacionada estrechamente con **El reparto de los panes** del cuaderno *Resolución de Problemas*) tiene elevado interés por múltiples motivos: el contexto está extraído sin forzar de una situación bien cotidiana y fácilmente comprensible, el problema es tomar una decisión que *en la realidad se tomaría siempre* y se requiere una discusión sobre criterios que no son estrictamente matemáticos pero que condicionan la solución matemática del problema.

Esos criterios *metamatemáticos*, que a su vez pueden ser de categorías muy diferentes, imprimen una riqueza extraordinaria a un problema en el que la única restricción intocable es que la suma de lo que pague cada uno de los dos amigos debe ser *al menos* de 3.500 ptas. A partir de ahí, todo está abierto y depende del criterio de *justicia* que se adopte, y hay muchos entre los que elegir: el *igualitarista* (cada uno paga la mitad de la factura total, independiente del coste del artículo que se lleva), el *proporcional* (cada uno paga del total, 3500 ptas., la parte proporcional al precio de los zapatos que compra), el *social* (cada uno paga el valor real, sin descuento, de lo que se lleva, y con la diferencia se constituye un fondo común para futuros gastos), el *contable* (repartir el ahorro sobre el precio sin descuento de modo inversamente proporcional al precio pagado), etc...

LA MOTO DE ANDREA

El análisis de un caso particular debe bastar para sacar una conclusión general.

Por ejemplo, si Andrea tiene un bidón con 16 litros de mezcla al 4% de aceite, es como si dispusiese de **16 x 4/100 = 0'64** litros de aceite y de 15'36 litros de gasolina por separado. Para que 0'64 litros de aceite formen parte de una mezcla al 2%, se necesitará que esta mezcla totalice 32 litros pues **16 x 4/100 = 0'64,** es lo mismo que **16 x 2 x 2/100 = 0'64**.

La regla de actuación que se deduce es entonces bien sencilla de enunciar: *para convertir una mezcla al 4% en una mezcla al 2% es necesario añadir tantos litros de gasolina pura como litros de mezcla al 4% se tiene.*

Este problema es adecuado para, como ampliación, sugerir a los estudiantes que *planteen y resuelvan* problemas similares con otros datos, con el mismo contexto de la mezcla de gasolina y aceite, o con otros contextos, buscando la formulación más general posible del problema: *¿qué se debe hacer para convertir L litros de una mezcla al p% de aceite en una mezcla al q%?*.

SUMAS CONSECUTIVAS

Sugiérase en principio que se lleve a cabo una exploración libre con los casos más simples. Distribuyendo bien el trabajo entre toda la clase, se puede disponer rápidamente de un banco de datos abundantes para extraer algunas conclusiones en bruto.

Estas observaciones serán desordenadas, parciales y a veces contradictorias entre sí. Un proceso de debate científico sobre las mismas permitirá ir dilucidando las contradicciones, generalizando las pautas y justificando paulatinamente los comportamientos numéricos detectados. A modo de ejemplo, se incluye a continuación una pequeña antología de la formulación que pueden ir adquiriendo las regularidades reconocidas:

* Algunos números se pueden escribir de formas diferentes como sumas consecutivas. Por ejemplo, 15=7+8, y al mismo tiempo 15=4+5+6. Igualmente 15=1+2+3+4+5.

* Todos los números que se pueden escribir como suma de dos sumandos son impares.

* Todos los números impares se pueden escribir como suma de dos números consecutivos.

* Las sumas de cuatro números consecutivos es siempre un número par.

* Las sumas de cinco números consecutivos es siempre un múltiplo de 5.

* Las sumas de tres números consecutivos es siempre un múltiplo de 3.

* Todos los múltiplos de 3, excepto el propio 3, se pueden escribir como sumas de tres números consecutivos.

En algún momento de este proceso, las observaciones realizadas serán lo suficientemente numerosas y las ideas estarán lo suficientemente maduras como para que parezca natural *organizar* los datos disponibles en forma de tabla que refleje más o menos claramente las propiedades enunciadas:

núm. sumas	Primer sumando de la suma consecutiva																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	...	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	...	...	
4	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	...	...	...	
5	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	...	...	...	...	
6	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	...	...	...	...	...	

Esta tabla, o una similar a esta, debe a su vez permitir dar el salto de *inducción* que extiende y unifica todas las propiedades observadas desordenadamente con anterioridad:

La fila 2 de la tabla es la serie de los números impares.

La fila 3 es la serie de los múltiplos de 3 (desde 3x2)

La fila 4 se compone de números que se diferencian en 4 unidades con respecto al anterior. Todos ellos son dos unidades más que un múltiplo de 4 (desde 4x2+2).

La fila 5 contiene a los múltiplos de 5 (dese 5x3).

La fila 6 está formada por números que dan resto 3 al dividirlos por 6 (desde 6x3+3).

La fila 7 contiene a los múltiplos de 7 (desde 7x4)

La fila 8 contiene a los números que dan resto 4 al dividirlos por 8 (desde 8x4+4).

... ...

Si n es impar, la fila n contiene a los múltiplos de n desde nx(n+1)/2

Si n es par, la fila n contiene a los números que dan resto n/2 al dividirlos por n, desde nx(n/2) + (n/2).

Otra forma menos sistemática de acercarse a una solución proviene de una cierta construcción recursiva de los números que se pueden descomponer en sumas consecutivas:

Todos los impares se pueden escribir como suma de dos números consecutivos 101=50+51, los enteros más próximos a su mitad.

Los pares que son el doble de un impar, 202=101+101= (50+51)+(49+52) = 49+50+51+52, se podrán construir como suma de cuatro números consecutivos (con algunas limitaciones que pueden precisarse, por ejemplo el 6 es doble de un impar y no se puede escribir de este modo).

Los pares que son el doble del doble de un impar, 404 = 202 + 202 = (101+101) + (101+101) = (50+51) + (49+52) + (48+53) + (47+54) = 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54; se podrán escribir como suma de 8 números consecutivos.

Y así sucesivamente. Esta aproximación, que es complementaria a la de la tabla anterior, proporciona la pista para detectar los únicos números que no se pueden escribir como sumas consecutivas: las potencias de 2, pues son los únicos pares que no son el doble del doble del doble ... de un número impar.

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Hacer pruebas para comprender. Esta elemental máxima de la ciencia, que es la que en realidad caracteriza al método científico, constituye también una de las estrategias básicas -no la única desde luego- para resolver problemas matemáticos. Probemos pues a ver que pasaría si se mide la masa de un objeto de 1316 miligramos.

El instrumento A redondea los centigramos. Eso quiere decir que el objeto en cuestión arrojaría una medida de 132 centigramos.

El instrumento B, por el contrario, comete un error del 5% respecto al valor real, esto es para nuestro objeto, la medida que proporcionaría el instrumento B estaría entre 1250 y 1381 miligramos.

Así, para este objeto de laboratorio, el aparato A cometería un *error absoluto* de 1320-1316 = 4 mg., que representa un *error relativo* o proporción respecto al total de 4/1316 = 0'003039514 esto es, de algo más del 0'3%, casi 20 veces inferior al del instrumento B.

Ese mismo aparato B comete en la medida de tal objeto un *error absoluto* de entre 60 y 70 mg., alrededor de unas 15 veces superior al instrumento A.

Así pues, en el caso de un objeto que pese 1316 miligramos no hay duda ninguna sobre qué aparato es el idóneo.

El siguiente cuadro resume esta disquisición y otras dos realizadas con objetos de masa real distinta.

masa real en mg.	lectura del instrumento		error absoluto en mg.		% error	
1316	132	de 1250 a 1381	4	de 65 a 66	0'3	5
17	2	de 16 a 18	3	1	17'6	5
95'6	10	de 90 a 101	4'4	de 5'4 a 5'6	4'6	5

instrumento A ░ instrumento B ☐

Así pues, será preferible un instrumento u otro dependiendo de cuál sea la masa del objeto a pesar. Claro que el problema se encuentra en que el verdadero peso de los objetos es desconocido y lo conocido es la lectura del aparato de medida:

masa real en mg.	lectura del instrumento		error absoluto en mg.		% error	
P	≈ P/10	1'05 P	máximo de 5	0'05 P	500 / P	5

instrumento A ░ instrumento B ☐

Así, el instrumento A será preferible siempre que 0'05 P > 5 esto es si P>100 miligramos, esto es para los objetos de mayor masa.

Sin embargo, si P es menor de 100 puede dar mejor resultado cualquiera de los dos instrumentos, según las circunstancias particulares, tal y como queda claro en los ejemplos de laboratorio anteriores.

En la última cuestión el problema enuncia una situación tal y como se presenta en la realidad. Se mide la masa de un objeto y el instrumento A proporciona una lectura (74) y el instrumento B arroja otra lectura (699). *¿Qué información proporcionan estas dos lecturas?.*

La mayoría de la gente razona bien que 699 puede ser el resultado de añadir el 5% a una cantidad desconocida P. Es decir 699=1,05 P de donde **P=665'71**. Pero la mayoría de la gente también se olvida de que este sólo es *un* valor límite, pues existe otro que es el resultado de sustraer el 5% a la cantidad desconocida P. Si 699=P-0'05 P, entonces **P=735'78**. Entre esos dos límites se encuentra el verdadero valor de P.

En este último razonamiento solo ha intervenido la lectura del instrumento B. La lectura del instrumento A es una información añadida que indica que el verdadero valor ha sido redondeado a 74, es decir tiene que estar entre 73'5 y el propio valor 74.

La combinación de todos estos datos acota el verdadero valor de P con la información disponible: **73'5 < P < 435'78.**

LA CARRERA

Como el ciclista B es más lento deberá disfrutar de una ventaja de ciertos metros para cruzar la línea de meta al mismo tiempo que el corredor A. Eso quiere decir que este último deberá recorrer más de 500 metros, mientras que el B recorrerá menos de 500 metros.

El dato inicial de que se dispone, mientras A recorre 500 metros B recorre 495, indica que las velocidades de A y B están en la proporción 1 a 495/500, esto es de 1 a 0'988. Este dato permite construir una tabla para, por el método iterativo de ensayo y error, encontrar la solución:

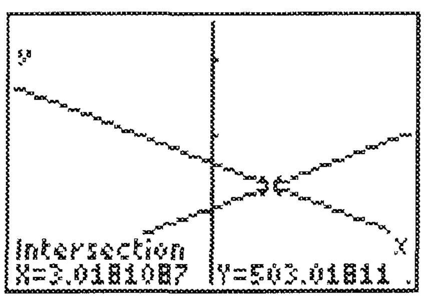
iteración	distancia A d_A	distancia B d_B	tiempo A = d_A / 1	tiempo B = d_B / 0'988	Conclusión
1	525	475	525	480'76	disminuir distancia a recorrer por A
2	502'5	497'5	502'5	503'54	aumenta distancia a recorrer por A
3	505	495	505	501'01	disminuir distancia a recorrer por A
4	503	497	503	503'03	aumenta distancia a recorrer por A
5	504	496	504	502'02	disminuir distancia a recorrer por A
6	503'5	496'5	503'5	502'53	disminuir distancia a recorrer por A
7	503'25	496'75	503'25	502'78	disminuir distancia a recorrer por A

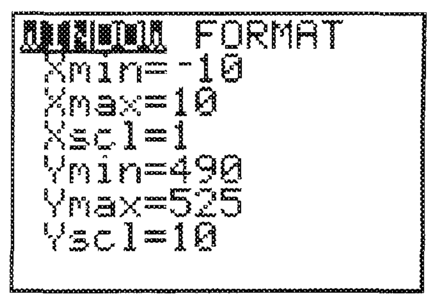
8	503'125	496'875	503'125	502'909	disminuir distancia a recorrer por A
9	503'0175	496'9825	503'0175	503'0187	Aceptable

Complementando, o más precisamente, *generalizando* el algoritmo anterior, que es puramente numérico y muy intuitivo, deben darse pasos hacia la comprensión de la estructura algebraica de la situación, que puede inducirse del modo de actuar en la tabla: el desarrollo del proceso en cada iteración es controlado buscando la igualdad entre la columna del tiempo empleado por A y la columna del tiempo empleado por B. La primera columna se computa añadiendo a 500 la cantidad desconocida que se busca 9. La otra columna en cuestión se obtiene dividiendo entre 0'988 el resultado de sustraer a 500 esa misma cantidad desconocida:

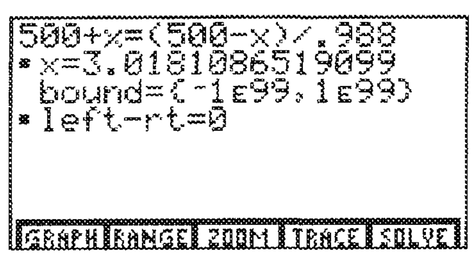
$$500 + X = (500-X) / 0'988$$

Esto es, X=3'018....





Algunas calculadoras gráficas (v.gr. la TI-85) incorporan incluso la posibilidad de resolver ecuaciones automática y directamente, tal y como se muestra en la pantalla que a continuación se reproduce:



La más que previsible disponibilidad y popularización en el futuro próximo de las máquinas de esta y de venideras generaciones técnicas, augura importantes cambios en el conjunto de destrezas básicas relacionadas con el álgebra, las funciones y todos los procedimientos relacionados, y por lo tanto de la didáctica de estos temas, que deberá forzosamente tenerlas en cuenta.

LAS PULGAS

Para resolver con éxito el problema no es suficiente la construcción de las funciones que relacionan el **tiempo t** y la **distancia d** recorrida por las pulgas. Estas funciones son *idénticas* para cada uno de los dos animales:

$$\textbf{d}\text{istancia } \mathbf{(t) = t} \quad , \quad \mathbf{t = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots}$$

Es necesario añadir una componente geométrica al modelo matemático, situando a las pulgas en un sistema de referencia adecuado y sustituyendo la variable **d** por la posición o coordenada de cada pulga en tal sistema de referencia. Así, si inicialmente la pulga de Andrés está en el origen de coordenadas y la de Lola en el punto con coordenada 12 saltando en dirección al origen se tendrán las ecuaciones siguientes que modelizan matemáticamente la situación:

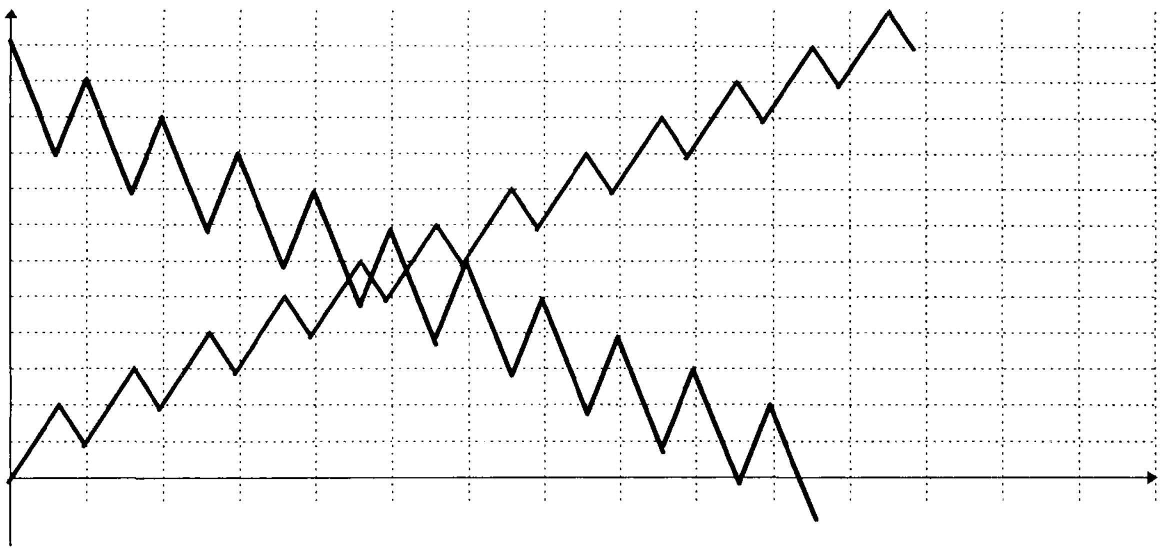
$$\textbf{P}\text{osición Pulga } \textbf{A}\text{ndrés } \mathbf{(t)} = \mathbf{t}$$
$$\textbf{P}\text{osición Pulga } \textbf{L}\text{ola } \mathbf{(t)} = 12 - \mathbf{t}$$
$$\mathbf{t = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots}$$

y que muestran con claridad que en t=6 las dos pulgas coinciden en el mismo punto.

En la anterior descripción, la condición de que **t** sea un número entero es esencial para que el modelo sea aceptable. Fuera de esos valores enteros, la fórmula **PA**(t) = **t** no indica bien dónde se encuentra la pulga. Construir fórmulas que describan satisfactoriamente la posición de las mascotas en todo momento no es una tarea sencilla, aunque tampoco es imposible. Lo que sí que resulta factible y deseable es la construcción de tablas y gráficas que esbocen ese comportamiento.

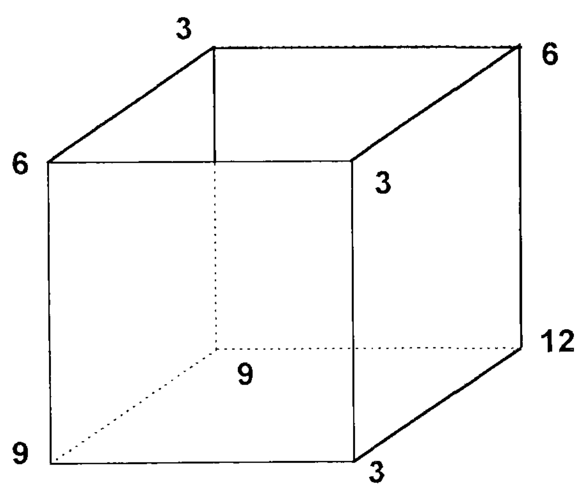
t	0'5	2/3	1	1'2	1'4	1'6	1'8	2	7/3	8/3	3	4	4'5	5	5'5	6
PA(t)	1'5	2	1	1'6	2'2	2'8	2'6	2	3	4	3	4	**5'5**	5	6,5	6
PL(t)	9'5	28/3	11	10	9	8	9	10	25/3	22/3	9	8	**5'5**	7	4'5	6

Sorprendentemente esta tabulación pone de manifiesto algo que podía haberse sospechado antes: las pulgas se encuentran *antes de transcurridos 6 segundos*.



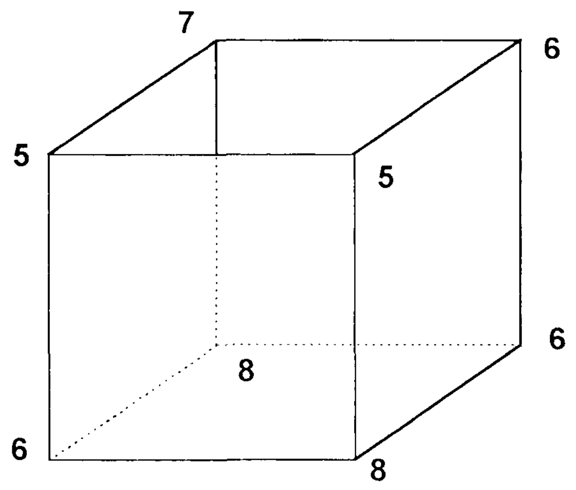
NÚMEROS OCULTOS

Esta es la solución, en la que la suma de todos los vértices da el mismo resultado que la suma de los vértices falsos del enunciado.

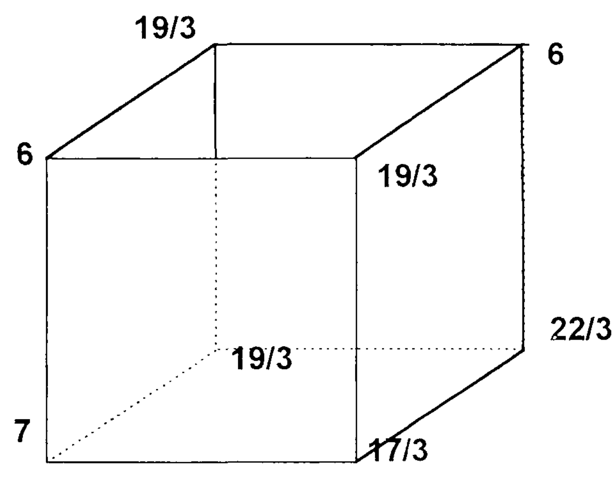


Una vez se ha obtenido la solución, este problema admite la siguiente ramificación, que tiene su origen en una observación sutil.

La relación entre los valores numéricos de los vértices del cubo inicial y final es una relación *simultánea*, se necesita cambiar a la vez todos los vértices verdaderos para obtener los valores falsos. Planteado de otro modo: si se parte del cubo de la figura y se transforman los vértices sustituyéndolos *simultáneamente* por la media aritmética de los vértices adyacentes se obtiene el cubo:



A este cubo de nuevo puede aplicársele la misma transformación para generar otro:



Y así sucesivamente.

¿Qué se podría decir entonces sobre lo que pasa *a la larga* con los valores numéricos de los vértices?.

CUADRADO NUMÉRICO

Esta es una versión plana de los **Números Ocultos**, que, siendo algebraicamente similar a aquella, presenta sin embargo una estructura geométrica diferente.

En efecto, aquí hay una asimetría consustancial en el papel que juegan las casillas, que no son intercambiables entre sí: la casilla central tiene cuatro vecinas, las casillas de la esquina tienen dos, y las laterales tres.

La consecuencia más remarcable es que ahora no se mantiene la invarianza de la suma de los números de la casilla, invarianza que sí ocurría con los vértices del cubo de

Números Ocultos. Otra consecuencia es que mientras en aquel problema la solución era única, en este caso existen múltiples soluciones.
Lo que sí se puede trasplantar del problema anterior a este es la ramificación que allí se planteaba y que se ilustra ahora con algunos ejemplos en un cuadrado numérico de dimensiones reducidas:

0	12	→	13	13	→	13	13	→	.....
14	16		13	13		13	13		

1	11	→	12	3	→	3	12	→	12	3
13	5		3	12		12	3		3	12

¿Qué se podría decir sobre lo que pasa *a la larga* con los valores numéricos de las casillas?.

CAPÍTULO XIII

GEOMETRÍA 4º

66. LÁMINAS

Este apartado contiene una recopilación de tramas con objeto de facilitar su frecuente uso, no sólo en geometría, sino también en el resto de los bloques.

Las láminas 8, 9 y 10, presentan una colección de fórmulas que permiten el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de las figuras y cuerpos elementales, que se resumen a continuación, con nomenclatura que hace referencia a las figuras que aparecen en las páginas que se indican del material del alumno.

LÁMINA 8 PERÍMETROS Y ÁREAS (pág. 13)

NOMBRE	PERÍMETRO (P)	ÁREA
Triángulo	a + b + B	$\frac{B \cdot h}{2}$
Cuadrado	4 · l	l^2
Rectángulo	2 B + 2h	B · h
Paralelogramo	2 B + 2a	B · h
Rombo	4 l	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio	a + b + c+ B	$\frac{B + b}{2} \cdot h$
Polígono regular	nº. lados · l	$\frac{P \cdot a}{2}$
Círculo	2π r	πr^2

LÁMINA 9. ÁREAS (pág. 14)

NOMBRE	ÁREA
Corona circular	$\pi (R^2 - r^2)$
Sector circular	$\frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360}$ $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360}$
Segmento	Sector - Triángulo
Sector corona	Diferencia de sectores

LÁMINA 10. ÁREAS (P = Perímetro de la base. B = Superficie de la base) (pág. 15)

NOMBRE	ÁREA LATERAL	VOLUMEN
Paralelepípedo	2ab + 2bc + 2ac	a·b·c
Cubo	$6\ a^2$	a^3
Prisma recto	2B + P + h	B · h
Pirámide regular	$B + \frac{P \cdot h}{2}$	$\frac{B \cdot h}{3}$
Cono	$B + \frac{P \cdot h}{2}$	$\frac{B \cdot h}{3}$
Cilindro	B + P · h	B · h
Esfera	$4\ \pi\ r^2$	$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

67. LA GEOMETRÍA, LA CIENCIA, EL ARTE, LA NATURALEZA Y EL DISEÑO

Cualquier manifestación de la naturaleza necesita un soporte físico, esto es, un soporte geométrico, un diseño, simple o sofisticado, una estructura, explícita u oculta. El paradigma básico de la ciencia durante muchos años ha sido suponer que la naturaleza es *economista*, en el sentido de que tiende a la simplicidad; suposición que ha animado los esfuerzos humanos destinados a desentrañar sus enigmas, asumida su necesaria regularidad, una de cuyas vertientes más significativa es la geométrica.

Por otra parte, consustancial a la humanidad ha sido la búsqueda y la creación de belleza, concepto que no siempre es sinónimo de simpleza. Una parte importante de la belleza se manifiesta plásticamente, esto es, en definitiva, en soporte geométrico. De hecho, explícitamente muchas creaciones artísticas -los mosaicos árabes, las grandes construcciones de todos los tiempos, ..- toman como punto de partida configuraciones geométricas.

No menos humana ha sido y es la necesidad económica y social de *utensilios* funcionales que solucionen problemas o faciliten la realización de tareas o trabajos. En tanto que objetos físicos, no necesariamente naturales o bellos, todos los ingenios construidos por el hombre requieren *diseño*, concepto que no equivale a geometría pero que sin duda la engloba.

El papel de la geometría como denominador común de naturaleza y arte se explota en las actividades tituladas Mosaicos I,...,VIII y PANALES. En conjunto, constituyen un esquema organizado de estudio de los mosaicos, comenzando por los regulares, pasando por los semirregulares y terminando en el descubrimiento de pautas de actuación que permiten producir algunos de los fascinantes efectos estéticos que tan bien supieron explotar los artistas árabes.

Las primeras actividades se dedican al estudio de los mosaicos regulares, desentrañando cuántos son y por qué. Después se analiza exhaustivamente el mosaico que tiene por baldosa el inolvidable *hueso* que sirve de motivo mínimo a tantas composiciones de la Alhambra. Este análisis sirve de base para establecer un protocolo de estudio de otros mosaicos, especificando cómo buscar motivos mínimos y cómo los movimientos que permiten generarlos. Posteriormente se pretende estudiar cómo producir deformaciones en los polígonos regulares para, a partir de ellas, conseguir nuevos polígonos, ya no regulares, que llenen el plano y puedan ser utilizados como motivos mínimos en la generación de nuevos mosaicos. Un amplio estudio monográfico sobre este esquema didáctico, con extensos comentarios sobre sus particularidades, puede encontrarse en los libros *Mosaicos I* y *Mosaicos II*, de J. A. Mora y J. Rodrigo (1993).

Otra línea de explotación didáctica de las relaciones entre arte y geometría se presenta en las actividades tituladas DISEÑO III y ESCHER, dedicadas al análisis de figuras imposibles, de entre las que destacan por su refinamiento las obras maestras creadas por Maurits Cornelis Escher.

Estas dos actividades son idóneas para ser abordadas en grupo, para convencer de la necesidad de la precisión en la descripción verbal, para aprender a respetar las opiniones de los demás al tiempo que se las critica y para comprender que la suma de las aportaciones que permite una discusión colectiva enriquece enormemente la visión parcial que puede alcanzar aisladamente cada individuo. La efectividad de estas actividades se incrementa sustancialmente si se pueden proyectar diapositivas con reproducciones a color de las creaciones artísticas.

Finalmente, una de las actividades está dedicada a presentar un caso concreto de relación entre geometría y diseño industrial. Así, se plantea qué forma dar a un envase con una capacidad de 33 cl., estableciéndose para ello comparaciones entre las superficies necesarias con distintos cuerpos geométricos y fijando como criterios de decisión no sólo los económicos de mínima gasto en la fabricación del envase, sino también otros como la posibilidad de minimizar el espacio de almacenaje.

68. ESPACIO - PLANO

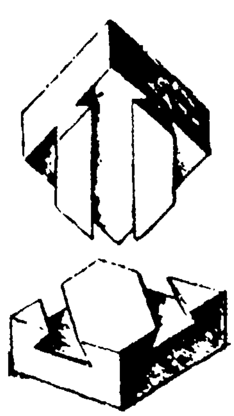
En este apartado se intenta poner de relevancia las propiedades que vinculan el plano y el espacio entre sí, aunque cada uno tenga sus particularidades y necesite un tratamiento específico complementario. De esta manera se consigue que los estudiantes adquieran una visión conjunta de las dimensiones dos y tres y, consecuentemente, del mismo concepto de dimensión.

El apartado comienza con una colección de actividades que recrean la geometría espacial refinando el conocimiento de los poliedros regulares, clasificándolos según los planos de simetría que tienen (POLIEDROS I), obteniendo unos a partir de otros mediante cortes (POLIEDROS II), estudiando los polígonos que aparecen al cortar el cubo o construyendo los deltaedros convexos (POLIEDROS III).

El conocimiento de los cuerpos espaciales está íntimamente ligado al desarrollo de destrezas de visualización de los mismos y de sus propiedades sin necesidad de tenerlos fisicamente delante. Tales destrezas de intuición espacial se desarrollan especialmente con actividades tales como EL SOMA, EL CUBO DE O'BERINE o EL CUBO DE LESK. Al menos una de ellas debería realizarse completamente, construyendo las piezas con cubitos de madera pegados -baratos y fáciles de conseguir en una carpintería o en tiendas especializadas en materiales didácticos-, y resolviendo el problema, nada fácil por cierto, de montar los cubos a partir de las piezas descritas para cada uno de ellos.

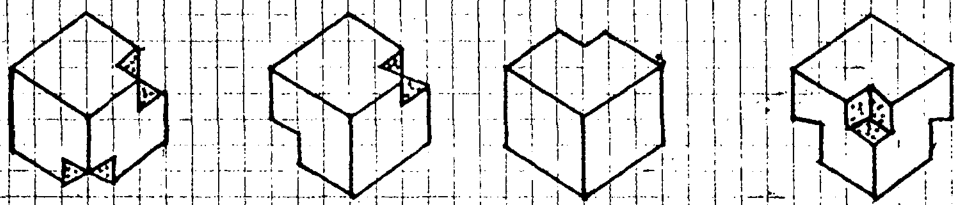
LAS ESQUINAS. ¿CÓMO ESTÁ HECHO?

La solución, que se incluye en la figura adjunta, no es evidente y llama la atención, abriendo nuevas perspectivas de observación de cuerpos geométricos.



También se incluye a continuación parte de la respuesta de un estudiante, a este problema, tal y como fue redactada por él.

LAS ESQUINAS



Son iguales la 1ª y la 4ª, porque:
el hueco cúbico que más se ve (esquina superior), en la última figura, será el hueco de la esquina superior derecha de la 1ª, luego el hueco de la esquina inferior de la 1ª coincidiría con uno de los inferiores de la última, y el que falta en la 4ª estaría en la esquina inferior que no se ve de la 1ª figura.

- La 2ª no puede ser porque faltaría un hueco situado en la esquina inferior derecha, justo debajo del único hueco superior, para que coincidiera con la 4ª figura, y aún así no coincidiría porque se quedaría en la misma esquina dos huecos, uno en la parte superior y otro en la parte inferior. Con la 3ª tampoco coincide, falta un hueco en la esquina "central" inferior. Tampoco coincide con la 1ª porque el hueco de la esquina izquierda de la 2ª, para ser igual que la 1ª, debería estar situado según la figura está situada, en la esquina "central".

- La 3ª no puede ser porque faltarían dos huecos situados

PINTANDO CUBOS

Se necesitan 5 colores distintos como mínimo para pintar un cubo de forma que cualesquiera dos caras adyacentes tengan distinto color, puesto que cada una de ellas está en contacto con cuatro más, una por cada arista de la cara. En consecuencia, se analizarán las posibilidades que hay de obtener el cubo con 5 colores distintos o con 6 colores distintos.

PUNTOS ALINEADOS

En esta actividad se abordan algunas propiedades del plano, definiendo el incentro, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro y buscando una comprobación de que en todo triángulo aparecen alineados el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

Evidentemente, si el triángulo utilizado como banco de pruebas es equilátero, se verificarán muchas más propiedades. Se trata de comprobar que la propiedad se verifica en cualquier triángulo.

RELACIONANDO POLÍGONOS REGULARES

Para atacar este problema es necesario empezar haciendo pruebas con medidas concretas e intentar luego generalizar, pues la situación se complica en demasía si de entrada se encara algebraicamente el problema.

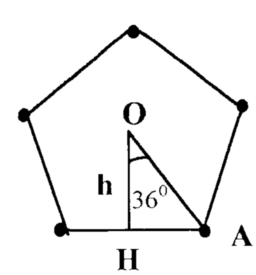
Sea P el perímetro de los polígonos regulares desde el triángulo al hexágono. Vamos a hallar el área cada uno de ellos.

Triángulo. Lado: $l = P/3$ Altura: $h = \dfrac{P\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_t = \dfrac{P^2\sqrt{3}}{36}$

Cuadrado. Lado: $l = P/4 \Rightarrow S_c = \dfrac{P^2}{16}$

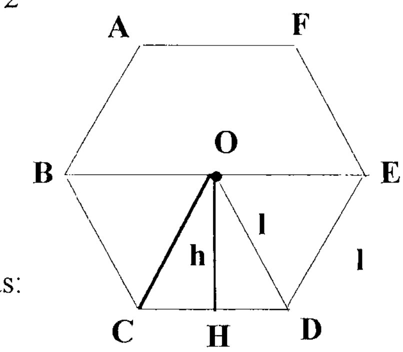
Pentágono. Lado: $l = P/5$ $S_p = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{P}{5} \cdot \dfrac{P}{10 \operatorname{tg} 36^0} = \dfrac{P^2}{20 \operatorname{tg} 36^0}$

$$\operatorname{tg} 36^0 = \frac{AH}{OH} = \frac{P/10}{h} \Rightarrow h = \frac{P}{10 \operatorname{tg} 36^0}$$



Hexágono. Lado: $l = \frac{P}{6} \Rightarrow S_h = 6 \cdot \frac{P}{6} \cdot \frac{P\sqrt{3}}{12} = \frac{P^2\sqrt{3}}{12}$

$h = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2} = l\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P\sqrt{3}}{12}$



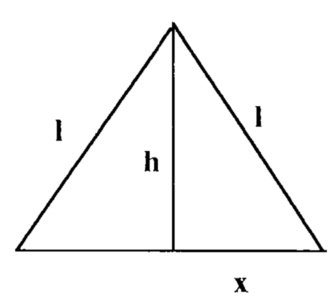
y ahora se establecen las comparaciones, que son numéricas:

$$\frac{\sqrt{3}}{36} < \frac{1}{16} < \frac{1}{20\,\mathrm{tg}\,36^0} < \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Así queda aclarada la situación, que indica que cuanto más lados tiene el polígono, mayor es el área, de modo que el área máxima se alcanzará cuando el polígono tenga infinitos lados, esto es cuando sea una circunferencia.

EL ISÓSCELES MÁXIMO

Se trata obtener el máximo de la función que obtiene el área del triángulo isósceles de lado l.

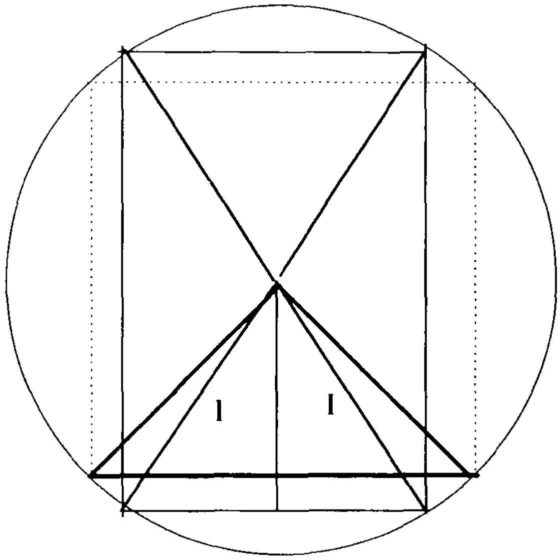


$$S = \frac{1}{2}(2\,x)\sqrt{l^2 - x^2} = x \cdot \sqrt{l^2 - x^2}$$

l es la longitud de un lado, su valor es positivo. Los valores que puede tomar x van desde 0 hasta 10, ambos excluidos. Para cada valor de l se obtiene una función distinta que se puede someter a exploración.

Se piensa con demasiada facilidad que el triángulo isósceles de área máxima será el equilátero, quizás porque esta supuesta solución es la más intuitiva geométricamente. La sorpresa numérica la obtenemos cuando para un lado concreto, l = 10 por ejemplo, l =5 no da superficie máxima, que sigue creciendo hasta un valor que puede no ser reconocido. Otras pruebas confirman lo anterior y plantean el problema de determinar la constante que debe de haber detrás de los valores con los que se alcanza el máximo. Si l =20 , x = 14’04. Si l = 8 , x = 5’67, ... En todos los casos la solución se obtiene cuando x vale la misma cantidad que el lado dividida por una cantidad constante, que aproximadamente es 1’4245... y que exactamente es $\sqrt{2}$.

Una interpretación geométrica quizás ayude a aclarar la situación:

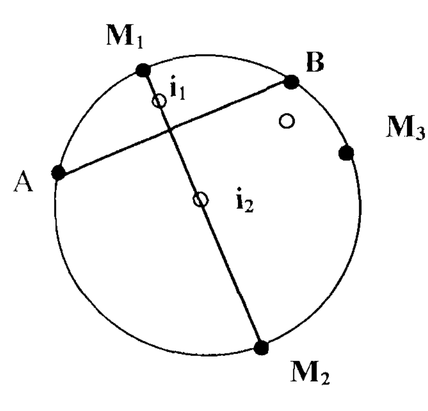


El triángulo isósceles de lado l (equilátero) forma sobre la circunferencia de radio r un rectángulo. El rectángulo inscrito en una circunferencia de área es el cuadrado, y es precisamente sobre los vértices del cuadrado sobre los que se obtiene el triángulo isósceles -de lado $\frac{l}{\sqrt{2}}$ - de área máxima.

EL PUNTO M

Para el circuncentro no debería de haber problema, incluso antes de realizar la primera prueba puede algún estudiante razonar sobre la definición de circuncentro y llegar a la conclusión de que para cualquier punto M de la circunferencia y los dos puntos fijos A y B, el circuncentro del triángulo que forman coincide con el centro de la circunferencia de referencia.

Para los incentros hay que hacer unos cuantos para empezar a ver que hay alguna regularidad. Y posiblemente se lancen hipótesis de la forma que reunirá a todos los incentros, siendo una de estas formas la de la circunferencia, además alguien sospecha que pasa por el centro, y se intenta ver que es cierto. Se prueba sobre la mediatriz del segmento AB y los puntos



Se puede comprobar que se obtiene una elipse que pasa por i_1, i_2, A y B.

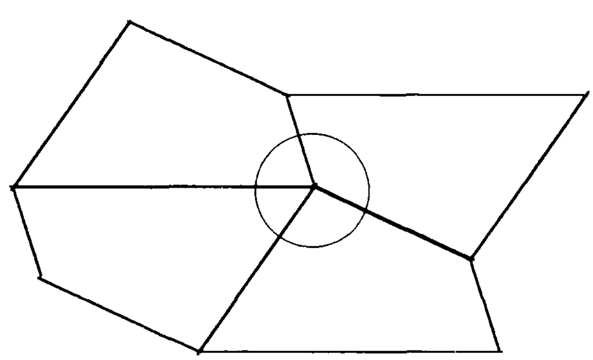
EL CINE

Ya se comentó en el material de 3° la actividad FÚTBOL Y GEOMETRÍA que presenta la misma situación geométrica en otro contexto.

ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Alguno de los términos que se presentan ya han sido introducidos anteriormente y en todos los casos hay una relación estrecha entre el término que se define y la posición del ángulo, ya que entre otras cosas lo que se pretende con esta actividad es precisamente esto, distinguir entre sí los ángulos que tienen relación con la circunferencia dependiendo de su posición respecto de ella.

LOS CUATRO CÍRCULOS



Si se gira el cuadrilátero sobre en punto medio de cada lado se obtiene la figura que se presenta, en la que se aprecia que sobre el mismo vértice coinciden los cuatro lados - muestra que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360^0. Así, la superficie de los arcos de círculo dentro de los ángulos del cuadrilátero coincide con la superficie del círculo completo, en función del radio que se determine S_r.

Para el triángulo, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0 con lo que la superficie de círculo que se consigue es de la mitad $S_r/2$.

Para los demás polígonos, al igual que en los estudiados, se determina en primer lugar cuánto suman los ángulos interiores, y en función de esa suma se calcula el área de círculo correspondiente. Para un polígono de n lados, la suma de los ángulos interiores A_n se determina dividiéndolo en triángulos, lo que conduce a :

$A_n = 180^0$ (n-2). ($n \geq 3$). Y el número de semicírculos círculos da la superficie total S_n:

$$S_n = \frac{(n-2)\cdot S_r}{2}, \quad n \geq 3.$$

CUERDAS

Es fácil y gusta en general porque muestra a los alumnos que son capaces de llegar a conclusiones que resultan acertadas: se obtiene una circunferencia que tiene por diámetro el punto A y el centro de la circunferencia dada.

Se puede preguntar qué pasa si variamos la posición del punto A, que puede pasar a estar en el interior del círculo.

LA MITAD DE RADIO

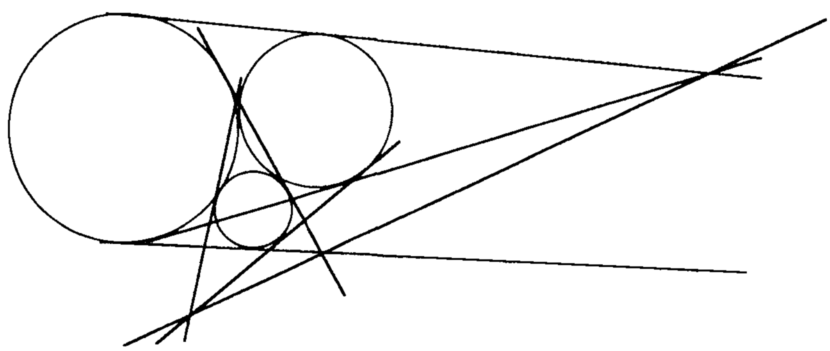
Es una actividad en la que es fundamental mostrar la relación de la geometría con el álgebra. La confección de una tabla como la siguiente favorece que se aprecien las relaciones que se establecen en función del número de orden.

Circunferencia	Radio	Longitud	Superficie
1	r	$2\pi r$	πr^2
2	$\frac{r}{2}$	$2\pi\frac{r}{2} = \pi r$	$\pi(\frac{r}{2})^2 = \pi\frac{r^2}{2^2}$
3	$\frac{r}{2^2}$	$2\pi\frac{r}{2^2} = \pi\frac{r}{2}$	$\pi\frac{r^2}{2^4}$
4	$\frac{r}{2^3}$	$\pi\frac{r}{2^2}$	$\pi\frac{r^2}{2^{2\cdot 3}}$
5	$\frac{r}{2^4}$	$\pi\frac{r}{2^3}$	$\pi\frac{r^2}{2^{2\cdot 4}}$
...	...	...	...
n	$\frac{r}{2^{n-1}}$	$\pi\frac{r}{2^{n-2}}$	$\pi\frac{r^2}{2^{2(n-1)}}$

Se puede invertir el orden en que se consideran las circunferencias y, de nuevo con la misma intención, pedir que establezcan las fórmulas pertinentes. O se puede variar la proporción que existe entre las circunferencias, haciéndolo para cuando el radio se reduce a un tercio, o cuando se triplica, etc.

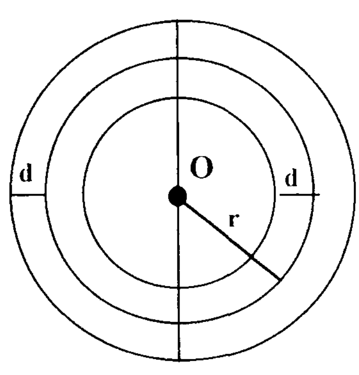
TANGENTES EXTERIORES

Cuando se hace el dibujo con tres circunferencias cualesquiera, que pueden elegir los estudiantes, suele pasar que necesiten más papel del que habían previsto, porque en unos casos dos son muy parecidas, o incluso las tres y el punto de intersección de las tangentes se aleja mucho. Se puede tomar papel adhesivo y juntar dos folios, etc. o proponer el cambio de circunferencias. El resultado que se obtiene en todos los casos es que los tres puntos están alineados. Dejamos el dibujo simple, sin indicaciones de ningún tipo.



DISTANCIA A UNA CIRCUNFERENCIA

Para la circunferencia de radio r se aporta una solución gráfica.



Para el caso de una esfera de radio r, solo hay que girar toda la figura 180^0 sobre el eje vertical dibujado y se tiene la esfera de radio r y las otras dos.

69. PLANOS Y MAPAS

Se aborda desde la geometría la necesidad de establecer códigos que representen en el plano el espacio físico, conteniendo la suficiente información -que depende esencialmente del destino que se les asigne- como para establecer una correspondencia entre los aspectos reflejados en dicha representación y la realidad.

70. MEDIDA

En el material para el alumno de los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria, no se ha considerado la medida como un tema organizador de los contenidos, otorgándosele distinta entidad que a la geometría, los números, el álgebra o la probabilidad.

Por el contrario, la medida ha sido integrada en el resto de los contenidos como un tema transversal y ubicuo, con un listado enorme de connotaciones y de aplicaciones. Lo que no es un impedimento para que, en ocasiones, alguna de las carpetas de materiales contenga apartados específicamente destinados a reflexionar sobre aspectos parciales de la medida.

Y este es precisamente el caso del apartado que nos ocupa, dedicado a la vertiente geométrica de la medida y, especialmente, a mejorar el conocimiento del Sistema Internacional como conjunto estandarizado de unidades básicas para las magnitudes más usuales. Lo que no incompatible con el conocimiento de determinadas unidades de medida tradicionales -arroba de aceite o de naranja, onza, tahúllas, gruesas, manos de papel, docenas, ...- que se emplean todavía en algunos lugares.

La medición acarrea consigo el concepto de *unidad* o referencia para comparar. La importancia de la elección adecuada de la unidad se plantea en la actividad UNIDADES DE SUPERFICIE. La importancia de realizar mediciones con instrumentos apropiados y con las unidades (grandes o pequeñas) idóneas para cada ocasión se pone de manifiesto en INSTRUMENTOS DE MEDIDA o en AÑOS LUZ. MEDIDAS DIRECTAS E INDIRECTAS, por el contrario, centra la atención en señalar que no siempre es posible, ni siquiera a veces conveniente, realizar mediciones directas.

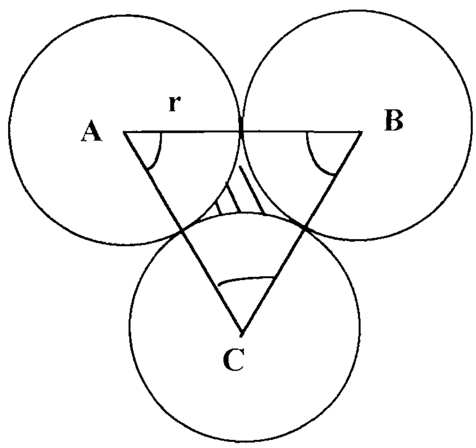
Las mediciones que se proponen en este apartado barren un amplísimo espectro de magnitudes, incluyendo las más cotidianas longitudes, superficies, volúmenes, ángulos y tiempos. Algo de atención se presta también a las mediciones sobre la superficie terrestre, que ponen de relieve las características peculiares de la geometría sobre la esfera, en la que la distancias se miden sobre meridianos y paralelos.

También hay actividades en las que se requiere *medir* directamente con instrumentos de medida y *comparar* los resultados de distintas mediciones.

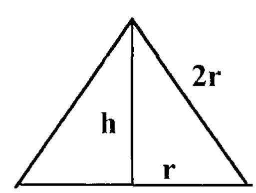
Mención explícita se hace del valor que para la medida tiene la calculadora, puesto que contribuye en aspectos tan aparentemente dispares como la comprensión de las relaciones numéricas que acompañan a las relaciones trigonométricas (CALCULADORA), la realización de cálculos que implican números complejos -con distintas unidades-, la comparación de unidades (RADIANES o LA CURVA) o la reducción a unidad única (SUMAR Y RESTAR).

ÁREA ENCERRADA

Si las tres circunferencias tienen el mismo radio no suele presentar en clase muchos problemas. Una manera de enfocarlo puede ser:



Y se calcula el área del triángulo equilátero de lado 2 r , reatándole el área de los tres sectores iguales, cada uno de 60^0.



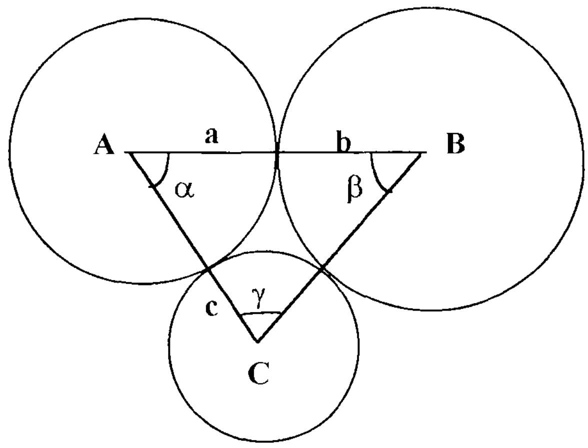
$$h = r\sqrt{3} \Rightarrow S_t = \frac{2 \cdot r \cdot r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$$

Superficie de un sector $S_s = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot 60^0}{360^0} = \dfrac{\pi \cdot r^2}{6}$

Superficie rayada pedida:

$$S = r^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{6} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

En el caso de que no sean iguales las circunferencias se procede en esencia de la misma manera, se calcula el área del triángulo y se le resta la de los tres sectores. Si los radios son **a**, **b** y **c**



Se trata de resolver un triángulo del que se conocen la longitud de sus tres lados, **a + b**, **a + c** y **b + c**. Se aplica el teorema del coseno y se obtiene los tres ángulos centrales. Y se resuelve con facilidad.

$$\cos\alpha = \frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2\cdot(a+b)\cdot(a+c)}$$ de donde se obtiene α.

Cabe comentar que la primera parte es asequible a una gran mayoría de estudiantes mientras que la segunda solo a unos pocos y guardando el planteamiento para después de ver los teoremas que permiten resolver triángulos que se presentan de forma explícita posteriormente.

EL ENGAÑO DE LOS ESPÁRRAGOS

E. Garri, uno de los autores de las memorias/programaciones que se recogen en el anexo, dice lo siguiente sobre este problema:

> Me han pasado muchas anécdotas y me han sorprendido muchas veces las respuestas de los alumnos a algunas actividades. Sobre todo la que más me sorprendió fue la actividad llamada "el engaño de los espárragos". Le borré parte del título para que quedara solamente "los espárragos" y así no darles pistas de la solución. Hubo una gran polémica en los 4 cursos sobre si hubo engaño o no, y al final, la mayoría decidió que sí que hubo engaño y que el engaño estaba en el "nudo". ¿Qué te parece?."

Está claro que los títulos de las actividades cumplen varias finalidades y, sin que sea fácil predecirlo, a veces se puede producir la situación que se acaba de describir: fue un acierto eliminar la palabra *engaño*, puesto que así se logró provocar la polémica científica que aporta alegría y viveza académica a las aulas.

Una forma de abordar el problema de los espárragos es otorgar una longitud fija al palmo, por ejemplo 25 o 30 cm., y reflexionar sobre la forma en que se atan los espárragos: se anuda la cuerda por sus dos extremos produciendo un círculo que aprieta los espárragos y permite su transporte sin peligro de que se caigan. Lo interesante es comparar la superficie que encierran los dos círculos que atan los espárragos, uno de longitud doble que el otro.

En general, si es L la longitud del palmo de referencia, la superficie que rodea (S_1) se calcula consiguiendo primero el radio (r_1) de la circunferencia máxima, de la que se conoce su longitud. (Supongamos en primera instancia que el nudo no consume cuerda. Después ya se removerá esta limitación).

$$L = 2\pi r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{L}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi r_1{}^2 = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

Si la longitud de la cuerda es doble:

$$2L = 2\pi r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{L}{\pi} \Rightarrow S_2 = \pi r_2{}^2 = \pi\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{\pi}$$

Luego $\frac{S_2}{S_1} = 4$ y el vendedor sí tiene indicios para pensar que se trata de un intento de engaño. ¡El cliente se ha llevado una cantidad de espárragos cuatro veces mayor y sólo ha pagado el doble!.

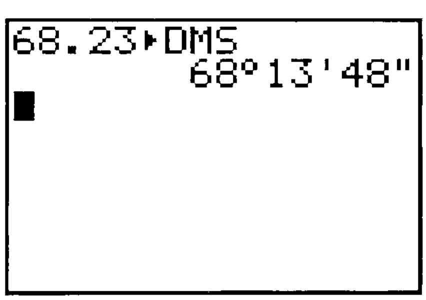
Si se supone que el nudo resta efectividad a la cuerda a la hora de conseguir superficie útil, entonces es admisible pensar que con la cuerda doble se utiliza el mismo trozo que con la cuerda simple para realizar el nudo, lo que todavía haría aumentar más la proporción entre las dos superficies.

MEDIDA DE ÁNGULOS

Se debe conocer los distintos sistemas de unidades, en especial los de uso estandarizado, sexagesimal, y el radián como unidad. Es cierto que está muy extendida la notación decimal, sobre todo desde el uso masivo de las calculadoras. Vuelve a suceder que se dedica un espacio específico a la medición de ángulos, toda vez que se ha medido con anterioridad inevitablemente.

Creemos que se debe insistir en la comprensión del significado de la expresión decimal y su relación con el sexagesimal, en el sentido de recalcar que por ejemplo, 68.5^0 son 68 grados y medio, equivalente a 68^0 30', o que en 68.2^0, 68 son los grados y 0.2 la parte decimal, que en este caso es 1/5 de la unidad y que en grados será 1/5 de 60', esto es, 12', con el fin de que se pueda controlar la sensatez de los resultados que obtenga con la calculadora.

De todas maneras lo que no se puede es estar de espaldas a la calculadora, sino todo lo contrario. Esta es la presentación de pantalla que proporciona una calculadora gráfica al transformar los 68.23^0.



SUMAR Y RESTAR

Ahonda en lo dicho en MEDIDA DE ÁNGULOS, se debe enseñar sin ocultar que la calculadora la hace facilísimo como se muestra todo seguido:

```
18'20'40'+60'50'
10'
       79.18055556
Ans▸DMS
       79°10'50"
█
```

```
15'40'6'-6'45'2'

       8.917777778
Ans▸DMS
          8°55'4"
█
```

RADIANES

La definición de radián conduce a una proporción que expresada en una de las posibles maneras es:

$$\frac{2\pi r}{360^0} = \frac{r}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 57.2957795\ldots \ = \ 57^0\ 17'\ 44.806'' \quad \text{(1 radián)}$$

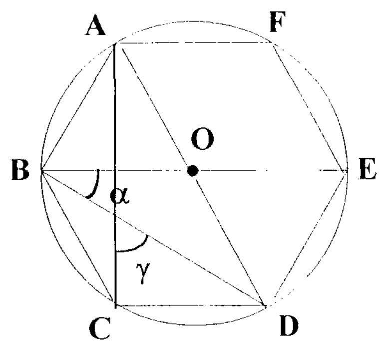
Para la segunda parte, se aprovecha la relación que se acaba de encontrar y se obtiene que 68.23^0 equivalen a 1'1908... radianes.

LA CURVA

Es un ejercicio con una simple operación inversa a la anterior. 0.75 rad. = $42.9718\ldots^0$ = 42^0 58' 18.605''.

TEOREMA DEL SENO . TEOREMA DEL COSENO.

Constituyen pequeñas investigaciones dirigidas. Respondiendo a preguntas que significan completar datos y adoptando las sugerencias que se ofrecen, se puede llegar a deducir las clásicas y conocidas fórmulas. A partir de estas dos actividades, las fórmulas que aportan pueden aplicarse a diversas situaciones (COHETES, ÁNGULOS, EL ÁRBOL, LA ESTRUCTURA, ALTÍMETRO o PUNTOS INACCESIBLES). No obstante estas situaciones pueden resolverse también sin hacer uso explícito de los teoremas del seno y del coseno. Por ejemplo y a modo de muestra, en ÁNGULOS se podrían aplicar los conocimientos sobre ángulos inscritos que se plantearon en los materiales de 3°: DBE es ángulo inscrito de una circunferencia, BE pasa por el centro (O) de la circunferencia, la medida de DBE es la mitad de la del ángulo central DOE, que por ser de un hexágono es de 60^0. Por lo tanto $\alpha = 30^0$. De otro modo,



El ángulo central es de 60^0, el triángulo AOB es equilátero (equiángulo), así el ángulo OAB mide 60^0, y ya $\beta = 120^0$. BOD mide 120^0 y en el triángulo BOD se tiene:

$$\alpha + \alpha + 120 = 180 \Rightarrow \alpha = 30^0$$

De la misma forma se llega a que $\gamma = 60^0$ de varias maneras. Por ejemplo, si nos fijamos en que el ángulo BDC mide 30^0 (como α), AC es perpendicular a CD, ...

En clase pueden seguirse algunos de estos -y otros- caminos en la resolución, lo que enriquece enormemente la perspectiva de los alumnos que así se acostumbran a comprender que la estrategia de resolución de un problema no tiene por qué ser única, sin que esto signifique que todos los caminos de resolución sean equivalentes pues unos son más intuitivos, otros más directos, algunos más elegantes, ...

EL TEOREMA DE HERÓN

Este problema aporta una nueva manera de calcular el área de un triángulo conociendo la longitud de los lados. No se trata de estudiar su demostración, que ni se insinúa, sino de conocer su existencia y aplicarla en un caso concreto.

La última parte del material se dedica a la geometría sobre la esfera, y en particular a estudiar la localización de puntos sobre la esfera terrestre. Uno de los tópicos que se abordan es de capital importancia para romper la idea de que la geometría euclídea es la única: es posible construir un triángulo esférico cuyos ángulos no sumen 180^0, o se puede construir un triángulo con los tres ángulos rectos.

CAPÍTULO XIV

PROBABILIDAD, ESTADÍSTICA, RECUENTOS SISTEMÁTICOS 4º

71. TABLEROS Y LÁMINAS

En el apartado **Tableros y Láminas** se presenta un material complementario que ha sido seleccionado para, en cada caso concreto:

- ser utilizado en una actividad determinada que aparece referenciada en la propuesta de trabajo homónima.

- sugerir propuestas de trabajo alternativas que cada profesor concreta en su momento y a su manera.

- disponer de material de apoyo que puede ser rentable en algún momento indeterminado.

ENCUENTROS (pág. 4) ayudará en la realización de la actividad del mismo nombre que aparece en la página 43. Es improductivo que los alumnos se dediquen a dibujar esas tramas cuando ese dibujo no es el objetivo del problema. Fotocopiando esta lámina si fuera necesario, habrá suficientes tramas base como para realizar cuantas simulaciones del problema sean necesarias para poder sacar conclusiones.

LAS TRES AVISPAS (pág. 5) presenta un tablero que completa el material que para el mismo problema aportan las páginas 33 y 34, en tamaño ampliado para permitir el manejo cómodo de fichas, monedas, u otro material similar que represente a cada una de las tres avispas en los movimientos que se producen en el desarrollo de la actividad. Para sistematizar los resultados que se van produciendo se hace necesario utilizar algún tipo de registro, para lo cual se puede facilitar, si se estima necesario, la tabla que presenta la página 34, pero una vez comprendido y asimilado el procedimiento que se realiza es más rápido practicarlo y contabilizarlo en el tablero.

PASTELES CON PASAS (pág. 6) visualiza la situación que plantea el problema **TORTAS CON PASAS** (pág. 42) y permite registrar la localización de las pasas y contabilizarlas rápidamente en el reparto que se produce aleatoriamente simulando el proceso con la tabla de números aleatorios. Usando distintos colores o formas de anotar los resultados (distintos símbolos, subdivisión de los cuadrados, etc.) un mismo tablero puede servir para realizar varias simulaciones.

EL SALTAMUELLES (pág. 7), **DIFERENCIA ENTRE DADOS** (pág. 10) y **LA LIBRE Y LA TORTUGA** (pág. 11), corresponden a propuestas homónimas del apartado JUEGOS y tienen la finalidad de proporcionar un material idóneo para practicar los juegos que allí se proponen con fichas u otro material adecuado. Se pueden ampliar más todavía (a DIN A3 por ejemplo), pegar sobre un cartón, colorear y plastificar, consiguiéndose un material que gana en vistosidad y presentación, y que puede volver a utilizarse en otras ocasiones.

ENCUESTA: FUMADORES EN EL CENTRO (pág. 8) pretende mostrar una encuesta elaborada sobre un tema concreto para facilitar la realización en clase de un trabajo estadístico de suma importancia. Tiene pocas variables que controlar y aún así se verá en la práctica la dificultad de recopilar los datos pertinentes y extraer conclusiones. Hay que reconocer aquí mismo que el interés de hacer una encuesta en clase es indudable y que lo es más todavía si se aborda todo el proceso, incluyendo la fase de decisión del tema de interés y la elaboración del cuestionario.

LA INCINERACIÓN UN TEMA ACTUAL (pág. 9) y **LÁMINAS ESTADÍSTICAS I-II-III-IV-V-VI** (págs. 12,...17) presentan informaciones aparecidas en distintos medios de comunicación escritos (prensa, libros, etc.) que tienen interés por el tema que abordan y/o por la misma presentación gráfica. Se pueden utilizar en clase para su análisis y estudio. Son sólo una muestra de cómo es relativamente fácil elegir temas de actualidad, con repercusión en el momento de estudiar estadística, que además de ser significativos, motiven académicamente, adecuando el tema y la presentación a las necesidades y gustos de cada profesor.

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS (pág. 18) proporciona 2.000 cifras aleatorias agrupadas de 5 en 5 con el fin de facilitar su uso en la simulación de distintos experimentos aleatorios. Muchas de las calculadoras científicas y todas las gráficas que están en el mercado están provistas de la tecla o de la función Rand , que genera números seudoaleatorios que pueden y deben sustituir a la tabla. Esta misma tabla está incluida en los materiales de 3°.

72. JUEGOS

DIFERENCIA ENTRE DADOS (pág. 20) es un juego que tiene un tablero homónimo en el apartado correspondiente que se puede ampliar, colorear y plastificar, y que permite pasar a su práctica y análisis con sólo dos dados y una ficha. Si juegan varios jugadores simultáneamente se completa rápidamente un buen número de partidas y se puede pasar pronto al análisis estadístico de los resultados.

En clase los alumnos no suelen hacer una previsión de resultado con cierta justificación porque no calibran qué va a pasar con las diferencias de dos dados, si va a ser más fácil que salga 0, 1, 2 o que salga 3, 4, 5. Una tabla de doble entrada (en este caso mejor que el diagrama en árbol, o que la enumeración sistemática de los resultados posibles para ilustrar visualmente la estructura) facilitará los recuentos necesarios:

(-)		**1er dado**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2º dado	**1**	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

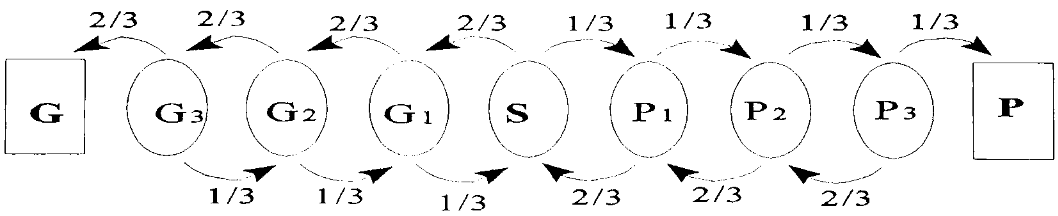
Para 0, 1, 2 salen 6 + 10 + 8 = 24 casos posibles
Para 3, 4, 5 salen 6 + 4 + 2 = 12 casos posibles.

Luego P(sale 0, 1, 2) = 24/36 = 2/3.
y, P(sale 3, 4, 5) = 12/36 = 1/3

A la vista de estas probabilidades, está claro que será más fácil ganar que perder en este juego, pero asunto bien distinto es determinar las probabilidades de ganar y de perder. Se puede realizar una asignación estadística de probabilidades recopilando los resultados obtenidos por toda la clase.

Otro procedimiento de asignación es la representación de la situación con un grafo:

En cada tirada de dados hay una probabilidad de 2/3 y 1/3 de ir hacia la izquierda o hacia la derecha respectivament. El juego acaba cuando se llega a la posición de gana (G) o de pierde (P), pudiendo eternizarse, al menos en teoría, el final del juego. Estas propiedades hacen que la situación pueda abordarse como una cadena de Markov representable con un grafo en el que las probabilidades de paso de un estado a otro son conocidas y permiten simular los recorridos que harían las fichas que se desplazaran según esas asignaciones probabilísticas.



Hay un *estado inicial S*, unos *estados intermedios* G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, con unas probabilidades de transición de unos a otros: la *probabilidades de transición* de G_2 son de 2/3 a G_3 y de 1/3 a G_1; las de P_1 son de 2/3 a S y de 1/3 a P_2,; etc., siendo *G y P estados absorventes*, por cuanto que en ellos se acaba el proceso.

En el estado S, inicial, de salida, hacen falta tres fichas para que se asignen a los estados G_1 y P_1, 2 y 1 respectivamente, siendo 2 fichas para este estado S su *carga crítica*, pues añadir una más provoca los desplazamientos obligados.

El proceso consiste en desplazar todas las fichas de cada estado cuando sea posible hasta que no se pueda desplazar ninguna ficha más de un estado a otro. Entonces se añaden las fichas necesarias en el estado inicial para iniciar de nuevo el proceso. Finalizará la simulación cuando detectemos que repetimos una situación con igual configuración que otra anterior, produciéndose un *bucle*. Se analiza el bucle que se ha producido y, a partir de ahí el proceso se repetirá invariablemente, por lo que no hace falta seguir. El bucle permite saber lo que *de forma natural* pasa en el proceso total, muestra los recorridos que deben realizar las fichas, las que acaban en cada uno de los estados absorventes, los movimientos totales que realizan las fichas que se introducen en el juego, etc., así se puede conocer las probabilidades de que el juego acabe en cada estado (número de fichas que acaban en él / número de fichas introducidas) y el tiempo medio o número de jugadas medio (número de movimientos realizados / número de fichas introducidas) que se emplea en acabar el juego.

La tabla siguiente muestra el desarrollo del proceso. En ella se han reflejado los recuentos que permiten asignar las probabilidades de acabar en Gana y Pierde. Es preciso advertir que el proceso resulta algo largo y que, como más adelante se verá, puede ser aconsejable comenzar con alguna simplificación del juego.

Nº.Fichas que entran	G	G_3	G_2	G_1	S	P_1	P_2	P_3	P	Movimientos
3					3					0
				2		1				3
3					3					
				4		2				3
			2	1	1	2				3
2					3					
			2	3		3				6
			4		3		1			6
		2	1	3		1	1			6
		2	3		1	1	1			3
		4		1	1	1	1			3
	2	1	1	1	1	1	1			3
2					3					
		1	1	3		2	1			3
		1	3		1	2	1			3
		3		1	1	2	1			3
	4		1	1	1	2	1			3
2					3					
			1	3		3	1			3
			3		3		2			6
		2		3		1	2			6
		2	2		1	1	2			3
2					3					
		2	2	2		2	2			3
3					3					
		2	2	4		3	2			3
		2	4	1	3		3			6
		4	1	4		3		1		9
	6	1	4	1	3		1	1		9
		3	1	4		1	1	1		6
	8		4	1	1	1	1	1		6
		2	1	2	1	1	1	1		3
2					3					
		2	1	4		2	1	1		3
		2	3	1	1	2	1	1		3
		4		2	1	2	1	1		3
	10	1	1	2	1	2	1	1		3
2					3					
		1	1	4		3	1	1		3
		1	3	1	3		2	1		6
		3		4		1	2	1		6
	12		3	1	1	1	2	1		6
		2		2	1	1	2	1		3
					3					
		2		4		2	2	1		3
		2	2	1	1	2	2	1		3
2					3					
		2	2	3		3	2	1		3

		2	4		3		3	1		6
		4	1	3		3		2		9
	14	1	4		3		1	2		9
		3	1	3		1	2	2		6
	16		4		1	1	2	2		6
		2	1	1	1	1	2	2		3
2					3					
		2	1	3		2	2	2		3
		2	3		1	2	2	2		3
		4		1	1	2	2	2		3
	18	1	1	1	1	2	2	2		3
2					3					
		1	1	3		3	2	2		3
		1	3		3		3	2		6
		3		3		3		3		9
	20		3		3		3		1	12
		2		3		3		1		9
		2	2		3		1	1		6
		2	2	2		1	1	1		3
3					3					
		2	2	4		2	1	1		3
		2	4	1	1	2	1	1		3
		4	1	2	1	2	1	1		3
	22	1	2	2	1	2	1	1		3
2					3					
		1	2	4		3	1	1		3
		1	4	1	3		2	1		6
		3	1	4		1	2	1		6
	24		4	1	1	1	2	1		6
		2	1	2	1	1	2	1		3
2					3					
		2	1	4		2	2	1		3
		2	3	1	1	2	2	1		3
		4		2	1	2	2	1		3
	26	1	1	2	1	2	2	1		3
2					3					
		1	1	4		3	2	1		3
		1	3	1	3		3	1		6
		3		4		3		2		9
	28		3	1	3		1	2		9
		2		4		1	1	2		6
		2	2	1	1	1	1	2		3
2					3					
		2	2	3		2	1	2		3
		2	4		1	2	1	2		3
		4	1	1	1	2	1	2		3
	30	1	2	1	1	2	1	2		3
2					3					
		1	2	3		3	1	2		3
		1	4		3		2	2		6

		3	1	3		1	2	2		6
	32		4		1	1	2	2		6
		2	1	1	1	1	2	2		3
Fichas ciclo										Movimientos ciclo
	G								P	ciclo
17	16								1	180

En el ciclo que se forma, los movimientos que se realizan son 180, las fichas que se introducen 17, de las que acaban en G 16 y 1 es la que acaba en P. Según este resumen de datos:

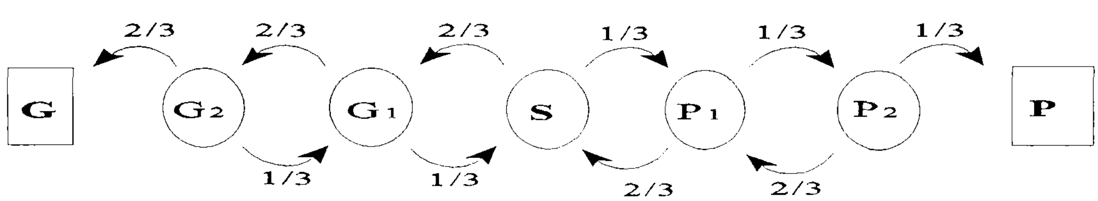
$$P(\mathbf{G}) = 16/17$$

$$P(\mathbf{P}) = 1/17$$

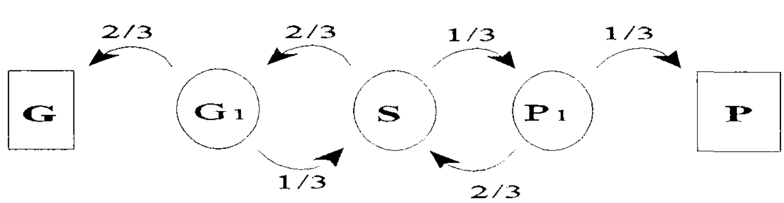
$$Tm = 180/17 = 10.588$$

El juego se puede practicar en clase y llegar a una estimación de qué es lo que pasa. Las conclusiones *normales* que se producen rápidamente son del estilo de *es más facil que acabe en **G** que en **P**, es muy raro que acabe en **P**.* Se puede solicitar que hagan una estadística de los juegos que se practiquen y que anoten también el número de jugadas que se produce antes de acabar. Los resultados de toda la clase con suficientes datos debe aproximarse a las medidas teóricas.

Es preciso reconocer que el problema que se plantea es complicado, y que, como se ha apuntado ya, tal vez valga la pena sugerir que se analice primero la situación cuando el esquema es:



O, incluso simplificar más el problema planteando el juego con la situación correspondiente al esquema:



Veamos cuál es el desarrollo en cada uno de estos casos:

Nº.Fichas que entran	G	G_2	G_1	S	P_1	P_2	P	Movimientos
3				3				0
			2		1			3
3				3				
			4		2			3
		2	1	1	2			3
2				3				
		2	3		3			6
		4		3		1		6
	2	1	3		1	1		6
		3		1	1	1		3
	4		1	1	1	1		3
2				3				
			3		2	1		3
		2		1	2	1		3
2				3				
		2	2		3	1		3
		2	2	2		2		3
1				3				
		2	4		1	2		3
		4	1	1	1	2		3
	6	1	2	1	1	2		3
2				3				
		1	4		2	2		3
		3	1	1	2	2		3
	8		2	1	2	2		3
2				3				
			4		3	2		3
		2	1	3		3		6
		2	3		3		1	6
		4		3		1		6
	10	1	3		1	1		6
		3		1	1	1		3
	12		1	1	1	1		3
Fichas ciclo	**G**						**P**	Mvtos. ciclo
9	8						1	63

Según los resultados que muestra la tabla:

P(**G**) = 8/9 P (**P**) = 1/9 Tm = 63/9 = 7

Y en el otro caso:

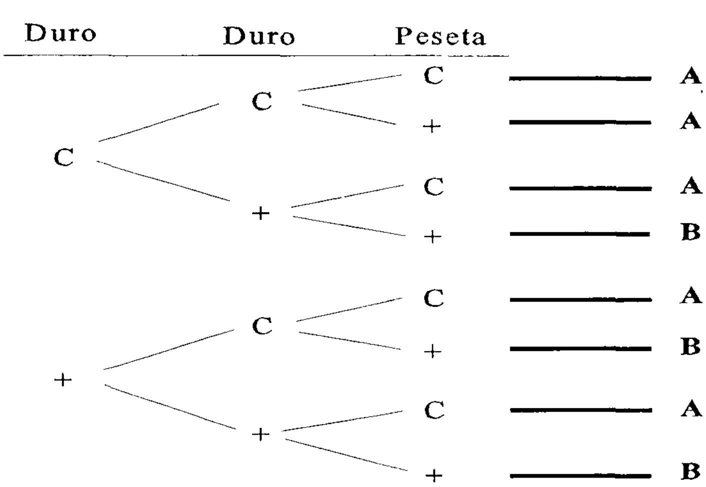
Nº.Fichas que entran	G	G_1	S	P_1	P	Movimientos
3			3			0
		2		1		3
3			3			
		4		2		3
	2	1	1	2		3
2			3			
		3		3		3
	4		3		1	6
		2		1		3
Fichas ciclo	**G**				**P**	Mvtos. ciclo
5	4				1	18

De modo que

$$P(\mathbf{G}) = 4/5 \qquad P(\mathbf{P}) = 1/5 \qquad Tm = 18/5 = 3.6$$

JUEGOS CON MONEDAS (pág. 21) presenta dos juegos en los que el procedimiento didáctico es idéntico: hacer una estimación de si el juego es justo o no basándose en una apreciación y previsión personal de los resultados que se confrontan, pasar a la práctica para corroborar o no esa apreciación, utilizar la estadística de los resultados obtenidos para establecer un nuevo juicio sobre la imparcialidad del juego (puede confirmarse o no la primera sospecha), y tratar de que algunos estudiantes establezcan el resultado teórico.

Uno de los objetivos de los juegos es analizar los casos posibles y verificar cada opción, en la que intervienen dos monedas indistinguibles, y constatar la ventaja de utilizar diagramas en árbol para realizar los recuentos, puesto que otros sistemas de recuento pueden llevar a errores fácilmente. Así, en el primer juego,



que conduce a:

P (Gana A) = 5/8

P (Gana B) = 3/8.

El juego por lo tanto no es justo.

Para el juego 2, procediendo de la misma forma, se obtiene un árbol que conduce al resultado:

P(Gana A) = 9/16, y P(Gana B) = 7/16.

Tampoco este juego es justo.

Un razonamiento ilustrativo, relativamente fácil de entender, se basa en la observación de que un jugador gana siempre que sale cara y en alguna ocasión más. Como el suceso *salir cara* se produce con probabilidad 1/2 (o del 50%, o la mitad de las veces), A tiene asegurado el 50% de los casos posibles, es decir más posibilidades de ganar que B en los dos casos, si bien precisar la proporción requiere una atención más detallada. Quizás valga la pena analizar un reparto geométrico de áreas en función del resultado de la peseta en primer lugar, siguiendo el modelo de análisis que se hace en el juego **CARA EN TRES LANZAMIENTOS**.

LAS TRES FICHAS (pág. 22), es un juego-problema que aparece con un detenido examen probabilístico y didáctico en Glaymann y Varga (1975) págs. 78-83, y en Díaz Godino y otros (1987), págs. 56-59. Se trata de encontrar la estrategia que produce, *con mayor probabilidad*, un número de aciertos más alto. La situación es muy atractiva y todos los estudiantes participan rápidamente elaborando su estrategia que, en un primer momento es bastante caótica, porque aparentemente, cuando ven uno de los colores, por ejemplo el rojo, el análisis más extendido es que la ficha sólo puede tener por la otra cara rojo o azul con la misma probabilidad. Conviene repetir anotando cada uno su estrategia y luego exponerlas todas públicamente, analizando desde la claridad de cada propuesta (habrá varias formulaciones muy ambiguas) hasta su posible eficiencia. Hay que tener en cuenta que alguno puede acertar en una ocasión un número sorprendente de veces eligiendo al azar, pero que normalmente, si mantiene su estrategia, no mantiene los aciertos.

Las estrategias que se adopten después de varias pruebas, si son distintas, deben confrontarse, de forma que se vea la más eficiente; con pocas pruebas suele ser suficiente. Es difícil llegar a comprender que se acierta con probabilidad 2/3 (y se falla, por tanto, con probabilidad 1/3) cuando se elige el mismo color que tiene la ficha que se ve y que, por tanto, una estrategia que se base en esta elección *asegura* un alto número de aciertos.

La importancia del problema de estudiar el juego según estrategias personales o consensuadas radica en todo el proceso que se genera alrededor, que permite:

- estimar la posibilidad de cada resultado para, en consecuencia, elaborar una estrategia que se debe defender ante los demás y ante las demás estrategias. Esto significa implicación del jugador en el juego.

- valorarar la importancia que tiene la expresión y la precisión de la comunicación.

- analizar estrategias, tanto las propias como las de los demás, con todo lo que significa de actitud respetuosa para las propuestas de los demás y de capacidad de crítica, con aceptación o rechazo fundamentado de las ideas que se formulen.

EL SALTAMUELLES (pág. 23) se acompaña con uno de los tableros del correspondiente apartado para que se pueda practicar con fichas, lanzando monedas o realizando experimentos aleatorios equivalentes -como utilizar la tabla de números aleatorios-.

Una de las primeras conclusiones que se obtiene es que hay que distinguir cada una de las posiciones del tablero. Llamaremos S a la cama elástica del saltamuelles, A, B, C, D a las camas elásticas de la izquierda del tablero y E, F, G, H a las de la derecha.

Pronto se llega también a la conclusión de que el saltamuelles no acaba con la misma probabilidad en todas las camas, sino que incluso hay algunas en las que no puede acabar. Asimismo se tiene que establecer un convenio sobre el sentido de salto, puesto que si el saltamuelles salta a la cama de la derecha, si es la derecha suya debe ser a la izquierda del tablero, y viceversa. Aceptemos aquí que cuando sale cara salta hacia la izquierda del tablero (D) y cuando sale cruz lo hace hacia la derecha del mismo (E). Una manera de analizar el problema es determinar todos los posibles resultados de cuatro monedas y exhaustivamente ver qué pasa en cada uno de ellos.

De los 16 resultados posibles al lanzar una moneda cuatro veces (un diagrama en árbol es idóneo para determinar los recorridos, como se muestra en el próximo problema), en A y en H se acaba en una ocasión; cuatro en C y en F; y seis en S, lo que determina las probabilidades de acabar en las camas correspondientes y las de acabar en las demás camas elásticas:

A B **C** D **S** **E** **F** **G** **H**

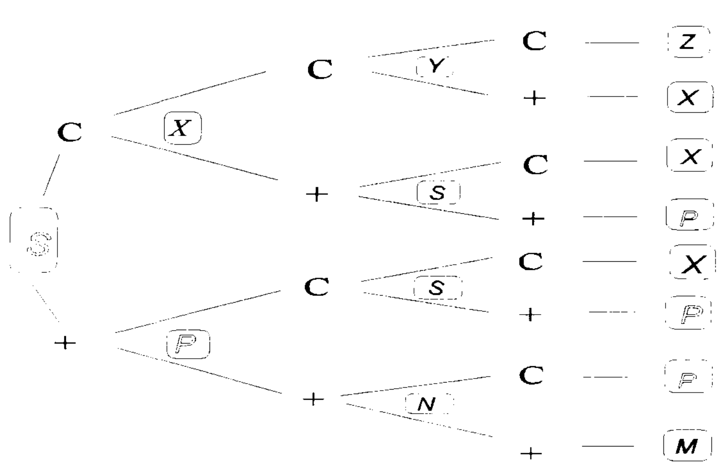
p (A) = p (H) = 1 / 16. p (C) = p (F) = 4 / 16 = 1 / 4. p (S) = 6 / 16 = 3 / 8.

p (B) = p (D) = p (E) = p (G) = 0.

LA LIEBRE Y LA TORTUGA (pág. 24) es un juego parecido al anterior que se analiza de la misma forma, con un diagrama en árbol que muestre los diferentes resultados de par o impar al lanzar un dado, experimento aleatorio equivalente a lanzar la moneda y que salga cara o cruz). Aquí la en el que dada la configuración dada es:

M N P S X Y Z

Se realiza el recuento de resultados y, para cada jugada que hace ganar o perder un punto, de los ocho resultados posibles, a Z y M les corresponde uno a cada uno y tres a X y P, respectivamente.



Con ello, las probabilidades de acabar en cada punto son:

p (Z) = p (M) = 1 / 8

p (X) = p (P) = 3 / 8

p (N) = p (S) = (Y) = 0

Ahora se puede calcular la probablidad de que gane la tortuga y de que gane la liebre:

p (Liebre) = 6 / 8 = 3 / 4 p (Tortuga) = 1 / 4

Se puede afirmar que el juego no es justo, si se desea ganar es mejor elegir jugar como Liebre, pues tiene muchas más posibilidades de ganar puntos en sus 16 jugadas (3/4 en cada una) que la Tortuga (que sólo tiene 1/4 en cada jugada). Y se puede hacer un estudio estadístico de cuántas veces gana la Liebre y cuántas la Tortuga. Entrar en otro análisis es más complicado y rebasa las expectativas del curso; sólo es abordable como ampliación para alumnos interesados y capaces o para niveles posteriores, pues, por ejemplo, que la Tortuga consiga 3 puntos y la Liebre 2 se produce con estas probabilidades:

$$p(T \text{ obtenga } 3 \text{ puntos}) = \binom{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{13} \approx 0.2087$$

$$p(L \text{ obtenga } 2 \text{ puntos}) = \binom{16}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{14} \approx 2.5\ 10^{-7}$$

La probabilidad de que L obtenga 2 puntos es pequeñísima, analizando la situación con más detenimiento, comparando las probabilidades de la Liebre y de la Tortuga se ve que es realmente muy difícil que gane la Tortuga (el cálculo exacto, entretenido por cierto, se deja para el lector curioso).

EL 12 GANA (pág. 25) es un juego en el que domina el azar en su más amplio sentido y no tiene estrategia ganadora, ni perdedora, no se puede influir en el resultado, en el desenlace del juego, más que tirando los dados, sumando las puntuaciones y siguiendo las reglas del juego. Es, tal como se presenta, un juego equitativo, justo y de resultado indiferente a la actuación humana.

Una posibilidad de desarrollo del problema es plantearse cómo variar las reglas para convertirlo en un juego de estrategia.

EL FERIANTE (pág. 26) plantea un clásico juego en el que es fundamental contabilizar las ocasiones favorables para cada jugador que participa. Al tener que analizar resultados de lanzar dos dados que cumplen ciertas condiciones, es idónea la tabla de doble entrada. Con ella, es fácil ver que, si elegimos el número que sea, por ejemplo el 3, de los 36 posibles resultados, sólo uno de ellos es el 3 doble, en 10 más aparece un 3, y en el resto, en 25 ocasiones, no aparecerá ninguno. De esta forma:

En 25 ocasiones pagaremos 100 pesetas y no recibiremos nada, produciendo unas pérdidas de 2.500 pesetas. En 11 ocasiones, como pagaremos 100 pesetas y nos darán 200, se producirá una ganancia de 1.100 pestas y cuando salen los dos treses, recibiremos 1.000 pesetas, lo que supone una ganancia de 900 pesetas. Resumiendo, a la larga necesitaremos invertir 2.500 pesetas con la esperanza de obtener 2.000, con lo cual se puede afirmar que será un negocio ruinoso. El juego no es justo porque la esperanza de ganancia no es pareja a la de pérdida, es claro que el feriante quien tiene ventaja.

OTRO JUEGO CON DADOS (pág. 26) se puede analizar rápidamente con una tabla de doble entrada con los posibles resultados de cada dado y, llamando A al jugador del primer dado y B al del segundo dado, sólo hay que anotar en cada resultado posible cuál de ellos es el ganador.

		1er dado. A					
		6	**6**	**2**	**2**	**2**	**2**
2º dado B	**5**	A	A	B	B	B	B
	5	A	A	B	B	B	B
	5	A	A	B	B	B	B
	5	A	A	B	B	B	B
	1	A	A	A	A	A	A
	1	A	A	A	A	A	A

Claramente se ve que las probabilidades de ganar de A y de B son

$$p\,(A) = 20 / 36 = 5 / 9$$
$$p\,(B) = 16 / 36 = 4 / 9$$

No es justo el juego, A tiene más posibilidades de ganar que B. Las apuestas deben hacerse de acuerdo con la proporción de ganar cada uno ellos, de forma que tengan la misma esperanza de ganancia. A y B deben apostar en la proporción 5 : 4 ; esto es, que A debe apostar 500 pesetas por cada 400 que apueste B.

PREMIO DECEPCIONANTE EN LA LOTO (pág.27) plantea en un juego socialmente muy extendido la reflexión en torno a si un resultado es más fácil que otro. Aprovechando que la gente en general ve más dificil que salga la combinación 1, 2, 3, 4, 5, 6 , por tener los seis números consecutivos que otra combinación cualquiera como la 8, 12, 20, 26, 31 y 43 , que tiene los números salteados, se pretende discutir el hecho de que ambas son combinaciones únicas, que exigen la aparición exacta de cada uno de los números que las forman y, por lo tanto, tienen la misma probabilidad de aparición. La justificación que se suele aportar ante esta creencia generalizada se basa en aducir que hay menos combinaciones que tengan sus seis cifras consecutivas que de los otros, y por lo tanto es más dificil que aparezcan.

Otra cuestión interesante para analizar es la de las noticias que se presentan y que afirman que *hay combinaciones sencillas*, en un caso para comentar que producen muchos acertantes y frustración entreellos y en el otro caso para sorprenderse de que no las haya acertado nadie. Se pretende debatir qué debe entenderse por combinación sencilla.

EL JUEGO DE LOS BARQUITOS (pág.28) trata de plantear un problema de asignación probabilística en el que aparecen las creencias personales para afirmar qué es más facil acertar, y dónde deben esconderse los barcos (razonamientos del tipo: cerca de las esquinas están más escondidos que cerca del centro).

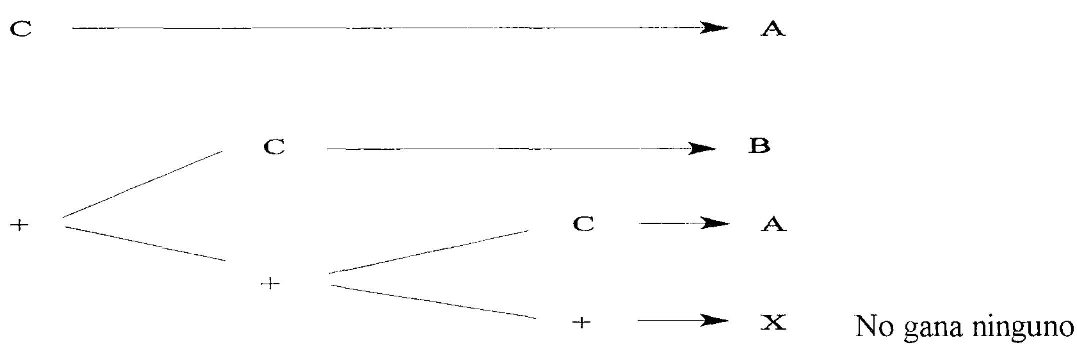
Este juego presenta un modelo de probabilidad geométrica en la que todos los cuadrados tienen la misma posibilidad de ser utilizados. Lo mismo ocurre con dos cuadrados o con tres, etc. Al practicar el juego aparece la necesidad de precisar el cuadrado que se describe para localizar el barco del contrario y el propio, con lo que se plantea el problema de localización, de asignación de referencias, de asignación de coordenadas, para el que se pueden arbitrar varias soluciones: (2, 3) (A, 2) (fila 2, columna3), etc..

Se puede modificar el juego con la intención de incrementar la influencia del diseño estrategico frente al puro azar, asignando la palabra *hundido* al acierto en la localización exacta del barco y la palabra *tocado* al acierto de una casilla contigua, con lo que se obtiene una pista acerca de la localización del barco.

CARA EN TRES LANZAMIENTOS (pág. 29) plantea el análisis de un juego en el que debe lanzarse la moneda tres veces como máximo, de forma que si aparece cara en el primer lanzamiento ya gana el jugador que ha comenzado el juego, y sólo si sale cruz en el primer lanzamiento lanza la moneda el segundo jugador, para optar a ganar si le sale a él cara y para, si no, dar otra última oportunidad al primer jugador.

Se ve rápidamente que es un juego desequilibrado en el que el que comienza tiene mucha más oportunidad de ganar. Se puede pasar a practicar el juego y realizar una asignación estadística de probabilidad, para pasar a estudiar el diagrama en árbol del juego, que recoja los resultados de los lanzamientos:

1er lanzamiento   2º lanzamiento   3er lanzamiento   Ganador

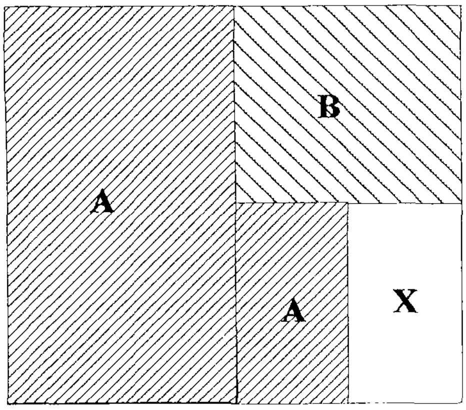


Aquí se ve que :

$$p(A) = p(C) + p(+, +, C) = 1/2 + 1/8 = 5/8$$

$$p(B) = p(+, C) = 1/4 \quad (= 2/8)$$

$$p(X, \text{no gana ninguno}) = p(+, +, +) = 1/8.$$



Alternativamente, y mejor simultáneamente, se puede introducir el modelo geométrico de reparto de porciones en una tarta, o modelo de áreas:

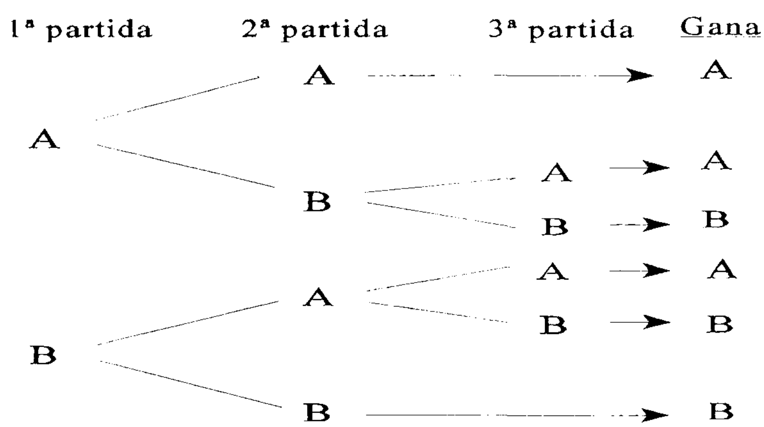
Muestra, con claridad y contundencia, y con indudable ventaja sobre el árbol, la proporción de ganar para cada jugador y la zona (X) que representa el suceso *no gana ninguno de los contendientes*.

Como se ha ido dividiendo por mitades, el trozo más pequeño tiene área 1/8 del total, y las probabilidades calculadas antes, se confirman.

73. PROBABILIDAD

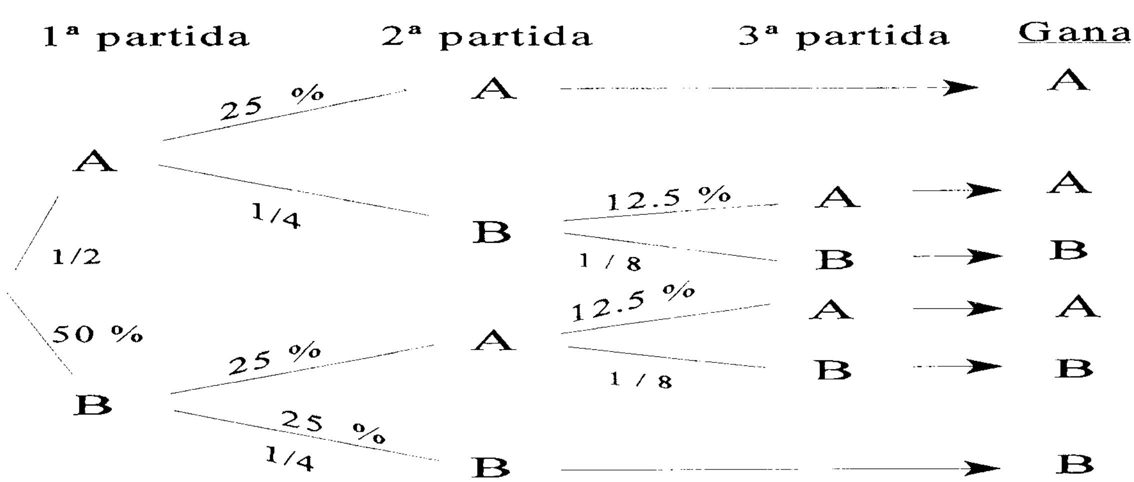
ALARGANDO PARTIDAS

Debe empezar suponiendo que las dos amigas, Ana y Berta, pueden ganar -o perder- cada partida con la misma probabilidad 1/2 (50 %, etc.) , y que quieren ganar. El problema plantea estudiar las posibles duraciones del juego, la cantidad de partidas necesarias para acabarlo, y la probabilidad de cada duración. Si convenimos en que por A entendemos que Ana gana una partida y por B que lo hace Berta, un diagrama en árbol puede ayudar a ver las posibilidades:



La mitad de las veces acaba en la segunda partida y la otra mitad en tres. No puede acabar en cuatro (antes una de las dos habrá ganado las dos veces necesarias para ganar el juego). Además, la simetría de la gráfica muestra que las dos tienen la misma probabilidad de ganar.

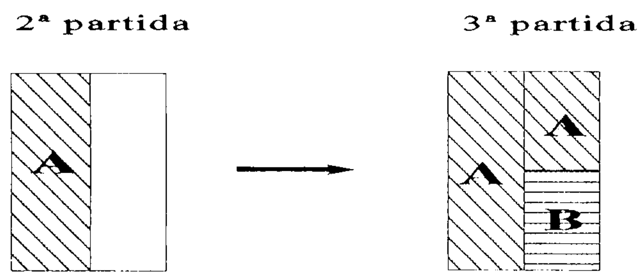
El diagrama en árbol también puede confundir si da pie a pensar que hay dos juegos que acaban en dos partidas y cuatro que lo hacen en tres. Seguro que vale la pena oír qué tipo de razonamientos invalidan esa afirmación. El problema está en las distintas longitudes de las ramas. Otra forma de aclarar la cuestión es poniendo en cada rama la fracción o el tanto por ciento que le corresponde en cada momento, a partir del inicial:



Cuando Ana gana una partida, la situación, en diagrama en árbol, pasa a seguir la primera rama del árbol anterior, con nuevas asignaciones a cada rama (50 % a las primeras y 24 % a las siguientes) y A gana la mitad de las veces más la mitad de la mitad de las veces, con lo que :

p (Gana A) = p (A) + p (B, A) = 1/2 + 1/4 = 3/4 p (Gana B) = p (B, B) = 1/4

En tantos por ciento, A gana el 50 % más el 25 %, con lo que da el 75 % equivalente a 3/4. El desarrollo del juego se puede seguir mediante asignación de áreas de la siguiente manera:



que permite visualizar perfectamente el proceso y la asignación probabilística final.

Si se alarga, después de ganar una partida Ana, hasta que una gane tres partidas, el diagrama en árbol que refleje la situación se puede obtener por simple continuación de la primera rama del diagrama anterior. Ana debe ganar dos partidas para ganar el juego y Berta tres. Así:

p (Gana A) = p (A, A) + p (A, B, A) + p (A, B, B, A) + p (B, A, A) + p (B, A, B, A) + + p (B, B, A, A) = 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/8 + 1/16 + 1/16 = 11/16

p (Gana B) = 5/16

Se puede continuar este caso mediante asignación porcentual o fraccionaria a cada rama o mediante áreas, según se hubiera hecho anteriormente.

Conforme se va alargando el número de partidas la ventaja que tiene A al haber ganado la primera partida va diluyéndose, siendo poco importante si el juego es a 5 partidas, e insignificante si es a 25.

DARDO

Se plantea un problema de probabilidad geométrica, cada punto tiene la misma probabilidad de ser alcanzado por el dardo. Esta es una buena ocasión para poner de manifiesto que el espacio muestral puede ser infinito. Los cálculos probabilísticos se hacen sobre cálculos de áreas. En el caso que nos ocupa estos cálculos tropiezan con la dificultad de que el tablero no tiene longitudes concretas en sus lados, y se intenta resolver asignando números concretos o en términos de partes del total (mitad, etc.). La solución requiere sumar fracciones, y es una buena ocasión para ejercitarse en ello.

1. p (A) = 1/8 + 1/6 = 7/24 = 0.2916666 (= 12.5 % + 16.6666 % = 29.16666 %) [= p (C)]

2. p (B) = 1/4 + 1/6 (ojo, es muy fácil que los 1/6 se presenten en forma de 1/3)

4. p (A ó B) = p (A ∪ B) = p (A) + p (B) = 7/24 + 5/12 (suma de áreas)

5. p (no C) (probabilidad del suceso contrario, se calcula directamente o como complementario a C).

Se puede proponer que los alumnos, por grupos, diseñen dianas y que se propongan, unos a otros, problemas apropiados, o que, a partir de unas asignaciones probabilísticas -en cualquiera de sus expresiones equivalentes anotadas anteriormente- diseñen dianas adecuadas.

LAS TRES AVISPAS

Este es un problema típico que muestra el alcance y potencia de las técnicas de simulación. Presenta una situación interesante cuyo estudio teórico es inabordable, pero que se puede simular y obtener una solución aproximada si se comprende su funcionamiento y se construye un modelo del mismo.

La actividad se presenta con un tablero que con el mismo nombre aparece en el apartado de Tableros, y con una hoja complementaria que ayuda a la recogida y sistematización de los resultados parciales que se van obteniendo. Esa hoja se puede evitar en principio, para ver qué métodos utilizan los alumnos, pero está claro que una vez comprendida la necesidad de recoger adecuadamente esos resultados para poder utilizarlos luego, y después de realizados diversos intentos de optimizar esa recogida de datos y los recuentos necesarios, a algunos le puede venir muy bien la hoja como idea. Se puede hacer copias de la misma o encontrar formas de reutilizarlas (colores, distintas señalizaciones, etc.).

Este problema aparece ampliamente tratado en el 2° volumen de Engel (1988) (págs. 196-201), y trata de modelizar el estudio de la reversibilidad de un sistema dinámico finito a su estado inicial (a principios de siglo se produjo un debate acerca de la posible contradicción entre la mecánica y la termodinámica, ya que ésta afirmaba que si en un recipiente con dos partes comunicadas por un agujero se ponía en una de ellas un determinado número de moléculas, el sistema evolucionaría irreversiblemente hacia el equilibrio, mientras que para la mecánica todas sus leyes son reversibles con respecto al tiempo). Como apunta el mismo libro citado, el modelo lo desarrollaron Paul y Tatiana Ehrenfest en 1907, de quienes proviene el nombre con el que se conoce (modelo de Ehrenfest).

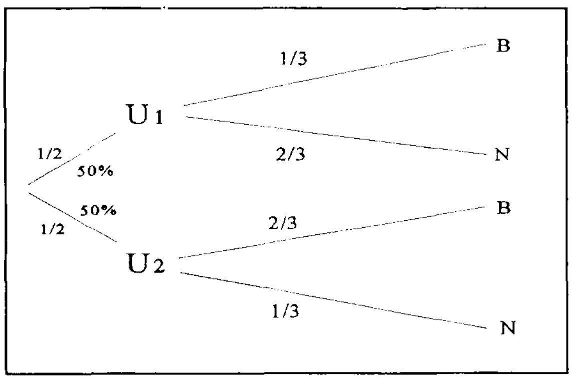
Se puede simular tomando un número aleatorio para cada avispa y manteniendo el criterio de que si la cifra es par el insecto pasa a la otra parte y si es impar no pasa. Esto se hace para las tres avispas y se observa qué hace cada una en cada instante. El número medio de tiradas (para cada una de las tres avispas) para que estén las tres en la parte de la derecha es de 8. La estadística que se realiza en clase no suele apartarse mucho de ese resultado.

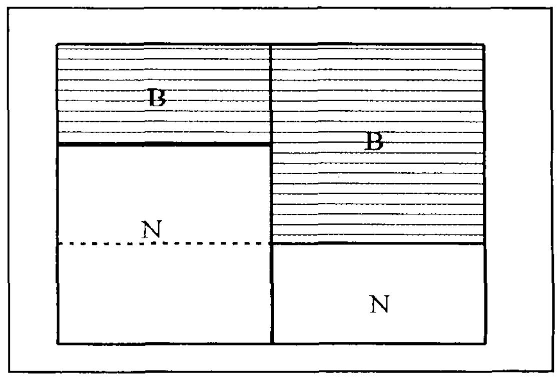
Se puede ver de la misma forma y con la misma consideración la posibilidad de que la tres vuelvan a estar juntas en la misma habitación (número medio de tiradas -múltiples- es de 8) y considerar el tema de los cromosomas y la repetición de personas iguales cuando interviene el azar. Queda mucho más claro todavía si se amplía el número de avispas a 4 (16 tiradas), etc.

LA PENA DE MUERTE EN CEFALONIA

Plantea el problema del cálculo de probabilidades en un espacio muestral finito en un modelo de urna y el de la comparación de probabilidades.

En el primer apartado es muy fácil en cada urna calcular la probabilidad de sacar bola blanca. Llamemos A a la primera urna y B a la segunda. En A es 1/3 y en B 2/3 , pero hay que pensar que la elección al azar de cada urna debe intervenir. El diagrama en árbol que modeliza la situación puede ayudar a efectuar los cálculos, lo mismo que el modelo de áreas.





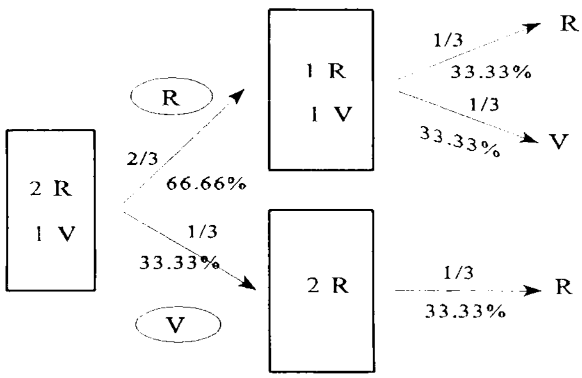
Bien los cálculos, bien un razonamiento que incluya el reconocimiento de la simetría presente, bien un simple vistazo a las áreas correspondientes a cada extracción -que no excluye el que se realicen los cálculos- , o bien un examen mixto de las anteriores posibilidades, debe conducir a que

p (A) = 1/2 y p (B) = 1/2 (la probabilidad de salvar la vida es de 1/2).

El problema no tiene una solución óptima evidente, inmediata, sino que requiere hacer varias pruebas, variar la composición de las urnas y comparar resultados. Se observa que si se deja una bola blanca en una de las urnas y el resto en la otra urna se obtiene máxima probabilidad; se puede pasar a justificar por qué sucede -se está asegurando ya el 50 % de las posibilidades de salvarse, más las que proporcione la otra urna-y si se mantiene cuando se aumenta el número de bolas en las urnas.

CON UNA URNA

Este es un problema de cálculo probabilístico con extracciones con y sin reemplazo en un modelo de urnas con espacio muestral discreto. El modelo de diagrama en árbol ayuda a entender por qué se multiplican las probabilidades intermedias, tanto cuando hay reemplazo como cuando no lo hay. Veamos solamente cómo se podría reflejar el caso de la extracción sin reemplazo; se muestra en cada camino la bola que se ha extraído, lo que por otra parte queda claro por la composición de la urna para la segunda extracción. Quedaría:



p (R, R) = 1/3
p (una de cada color) = p(R,V) + p (V,R) = 1/3 + 1/3 = 2/3
Las dos bolas salen del mismo sólo cuando son las dos rojas, y ya se ha visto antes.

Por cada rama se han puesto la probabilidad o el porcentaje que le corresponde de la probabilidad total, cada bifurcación muestra cómo canaliza la probabilidad de paso por las ramas que surgen en función de las condiciones que establece.

De nuevo, lo importante es que se vea que afecta al resultado, que se debe tener en cuenta si se reemplazan los elementos que intervienen o no y cómo se realizan los cálculos, ya que, por ejemplo, en la rama superior derecha se ha puesto directamente 1/3, pero el razonamiento que lo justifica es variado, puede ser expresado como la mitad de dos tercios que es un tercio, o si se piensa que a cada rama le corresponde probabilidad 1/2 puesto que en la urna hay una bola de cada color, como $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ -multiplicación de las probabilidades de cada rama consideradas independientemente.

BARAJA

Presenta una situación propicia para que se estudie cómo varía la asignación probabilística al cambiar la referencia en que se establece. Se trata de probabilidades condicionadas. La baraja es la misma todo el tiempo, y en el primer apartado es la referencia obligada:

p (sale el caballo de copas) = 1/40

Al tener la información de que la carta es una figura, el espacio de referencia se modifica, para pasar a contener exclusivamente las 12 cartas que son figura:

p (sale caballo de copas / sale figura) = 1/12
(/ representa a: condicionado a lo que se sabe, en este caso que la carta es una figura).

Si se sabe que la carta es un caballo, el espacio muestral se reduce más todavía:

p (sale caballo de copas / sale caballo) = 1/4

Para continuar el estudio de probabilidades condicionadas se puede pedir en clase que sean los mismos estudiantes los que propongan problemas similares, utilizando el mismo contexto de la baraja, o que sitúen los problemas en otros contextos.

AUTOPISTA

Aquí se plantea un problema de probabilidad geométrica. El espacio muestral es infinito, constituido por todos los puntos que están en el segmento de extremos A y E. Introduce la medida de la probabilidad como cociente de medidas de longitudes de segmentos implicados. Es preciso notar la diferencia que hay entre esta asignación probabilística y la que se basa en recuentos de casos posibles y favorables. Aquí, la probabilidad de que un accidente ocurra en un punto concreto es nula, puesto que su medida es cero.

p (accidente entre B y D) = 11/18 [= (medida BD / medida AE)

TRES DADOS

Se propone ahora la reflexión sobre dos problemas aparentemente idénticos. En clase se plantea que se determine el modelo teórico del lanzamiento de dos dados -que en general se habrá visto en más de una ocasión- y se hace la simulación del lanzamiento de tres dados, retirar el de la puntuación más alta (uno si hay más de uno), llevando a cabo una estadística de los resultados. Se puede practicar con dados reales, numéricos de 1 a 6, con perinolas, etc, al menos un rato, y si se ve que ya se controla el juego, se puede pasar a simularlo utilizando la tabla de números aleatorios) o la tecla RAND de la calculadora. Para la simulación con tabla, se toman ternas de números aleatorios del 1 al 6, que representan los resultados de los tres dados, despreciando las otras cifras. Se representan las frecuencias relativas en cada caso y se ve rápidamente que los resultados experimentales se alejan del modelo teórico de los dos dados.

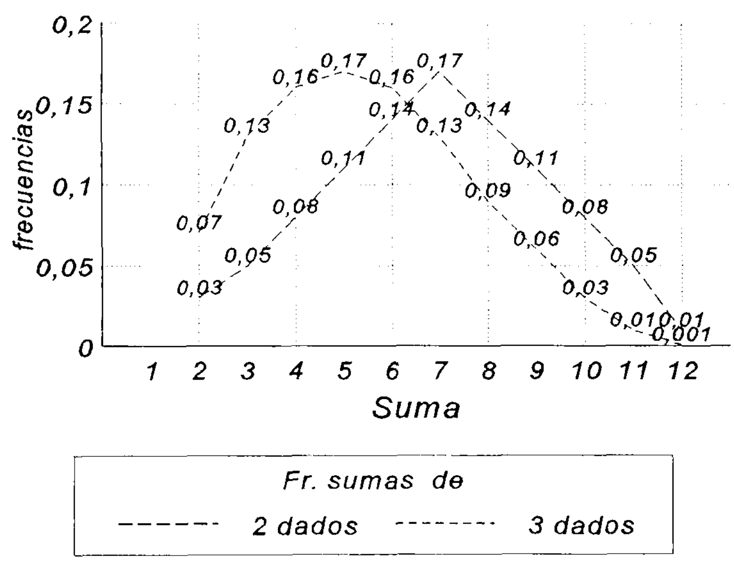
El problema es plantearse si el modelo no es adecuado sobre todo si repetidamente los datos experimentales se alejan de los que se deberían producir.

Si se abordar el problema del lanzamiento de tres dados teóricamente se obtiene la tabla comparativa siguiente, que es suficientemente explicativa:

FRECUENCIAS (TEÓRICAS) EN EL LANZAMIENTO DE DADOS											
SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
DOS DADOS	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36
TRES DADOS	16	27	34	36	34	27	19	12	7	3	1	216

El resultado es bastante sorprendente, pues no es intuitivo.

Si se pasa a frecuencias relativas que permiten comparar, se aprecia que son dos modelos bastante diferentes. Mucho más claro queda todavía si se hace una representación gráfica como la que se presenta a continuación, en la que se comparan los dos modelos teóricos (calculadas las frecuencias relativas):



EL BLUES DEL REVÓLVER

Esta actividad quiere poner en primera línea la continua presencia de las Matemáticas en nuestro entorno. Del azar y de la probabilidad se habla en la calle -con poca propiedad muy frecuentemente- y se escribe, desde los registros y estadísticas en los diversos medios de comunicación -incluidos los que tratan sobre premios y circunstancias aledañas de la abundante suerte de sorteos públicos-, hasta su transposición al mundo que a menudo refleja la realidad, o al menos se inspira en ella, cual es el caso de las artes en su más amplia gama (literatura, cine, pintura, etc.).

El blues del revólver es un pequeño relato en serie negra -trama policíaca- que forma parte de un libro breve de la Biblioteca de El Sol, con una selección de cuentos publicados por el autor, Pedro Zarraluqui, en sus libros *Galería de enormidades* y *Retrato de familia* (Anagrama). Ya la cita, de John G. Kemeny, con la que comienza "*Si estamos parados en un cruce de un retículo infinito mientras nuestro amigo vaga sin rumbo por la red de calles, podemos tener la certeza práctica de acabar reuniéndonos con él, siempre y cuando estemos dispuestos a esperar tanto como haga falta*" es lo suficientemente sugerente como para invitar a reflexionar sobre su significado y su alcance. El personaje -un inspector de policía- es consciente de la presencia del azar y de la influencia que tiene sobre él y sobre su destino. En un diálogo con Lucy se dicen:

- ... *Sí, creo que fue aquella noche cuando empezaron mis problemas con el azar.*
- *El azar, cuando es adverso, tiene siempre un nombre -gruñó Lucy-. Para mí se llama Bugs... Y para ti se llamaba Vera.* ....

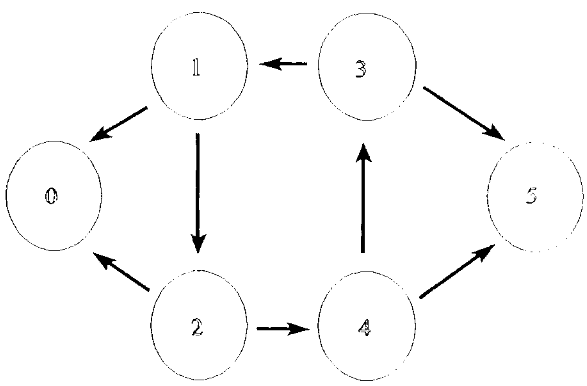
El azar ¿hace? que la pistola que le apunta dispuesta a acabar con su vida reviente y mate al agresor cuando este dispara. Y la vida sigue.

Es más frecuente de lo que parece la presencia del azar y de la probabilidad en la literatura, esta actividad es sólo un ejemplo -bonito a nuestro juicio- que pretende remarcar dicha presencia e insistir en que merece la pena utilizarla didácticamente.

EL JUGADOR DESESPERADO

Se presenta de nuevo una situación en la que el cálculo de probabilidades teórico se facilita construyendo el grafo que representa a la correspondiente cadena de Markov.

En cada jugada, el jugador apuesta la cantidad que más le acerca al objetivo de ganar 5 millones: cuando tiene un millón lo apuesta; si gana tiene dos, que volverá a apostar; con cuatro millones apostará sólo uno y con tres millones, dos. En teoría, el juego puede eternizarse, puesto que hay bucles que así lo permiten. Representando por **1** el estado en que el jugador tiene un millón, **2** cuando tiene dos millones, y así sucesivamente, se tiene que los estados **0** y **5** son absorventes, en ellos se acaba el juego. El grafo de la figura muestra las distintas posibilidades de posesión de dinero en las que se puede encontrar el jugador:



La probabilidad de paso de cada estado a los destinos posibles es de 1/2. En los comentarios al problema titulado **EL SALTAMUELLES** se detalló con minuciosidad el método de asignación de probabilidades basado en la utilización de fichas que recorren el grafo.
Las probabilidades de acabar en **O** y en **5** son respectivamente, 4/5 y 1/5.

TORTAS CON PASAS

Este es otro problema en el que el estudio teórico es complicado, fuera del alcance del nivel elemental. La simulación de la situación permitirá por el contrario la asignación de probabilidades. Para hacer posible la simulación se necesita comprender el mecanismo de reparto de las pasas para reconstruirlo con un modelo matemático.

Esta actividad se acompaña de una tabla, incluida en la página 6, de doble entrada y dimensiones 10 x 10 que determina 100 cuadrados iguales, 100 casillas perfectamente identificadas por coordenadas. La simulación se puede realizar tomando pares de cifras aleatorias de la tabla correspondiente que indicarán las casillas en las que se deposita cada pasa. Repitiéndose 100 veces el proceso se repartirán 100 pasas, se hace un recuento y se elabora una estadística de los pedazos en los que no ha caído ninguna pasa, de los que contienen una, etc.:

Número de pasas	0	1	2	3 ó más
frecuencia				
frecuencia teórica	37	37	18	8

Según Glaymann y Varga (1975), págs. 189-192, el número de pedazos con x pasas, *N(x)*, viene dado por la fórmula:

$$N(x) = 100 \binom{100}{x} \left(\frac{x}{100}\right)^{x} \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{100-x}$$

que proporciona los valores teóricos que se incluyen en la tabla anterior.

ENCUENTROS

Este problema se puede abordar desde distintos niveles de formalización. Para comenzar hace falta aclarar el enunciado, pues se presta a múltiples interpretaciones que hacen necesario un consenso. Se podría entender que los dos amigos se lanzan al encuentro y cuando llegan al extremo opuesto de la red de calles se dan la vuelta y se inicia otra tentativa de encuentro, o simplemente, que pueden retroceder en cada vértice. Es claro que en cualquiera de esas dos opciones antes o después los dos amigos se encontrarán (ver comentario de EL BLUES DEL REVÓLVER), pero también está claro que ese encuentro se puede tardar muchísimo en producirse. Una alternativa sería convenir que *ir al encuentro del otro* desde A -por ejemplo- significa acercarse en cada movimiento a B, y eso deja ya poco margen de maniobra: seguir el sentido de las flechas que aparecen en el Gráfico I; de modo que los amigos sólo se pueden encontrar en los puntos remarcados en la diagonal. Se ha colocado en cada vértice de la trama el número de los posibles caminos que se pueden seguir desde A a ese vértice. Se llega solamente hasta la diagonal porque si en uno de esos puntos no se encuentran, ya no lo harán porque no hay que olvidar que ambos amigos avanzan a la misma velocidad. De esta manera se contabilizan 8 maneras diferentes de llegar -desde A- hasta la diagonal y lo mismo ocurre desde B.

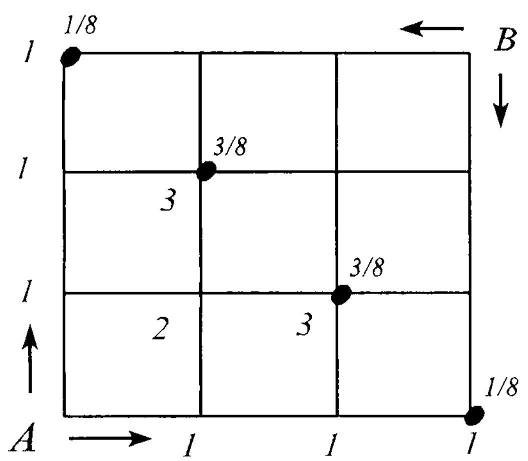


Gráfico I

La probabilidad de que A pase por el vértice superior izquierdo es 1/8, y otro tanto la de que B pase por ahí: la probabilidad de que se encuentren en el vértice superior izquierdo es por lo tanto $1/8 \cdot 1/8 = 1/64$. El razonamiento y el cálculo vale para el otro vértice inferior derecho, mientras que para cualquiera de los puntos centrales, como la probabilidad de llegar desde A y desde B son 3/8 en cada caso, la probabilidad de que se encuentren allí es de $3/8 \cdot 3/8$. En resumen:

$$\text{p (se encuentren)} = 1/8 \cdot 1/8 + 3/8 \cdot 3/8 + 3/8 \cdot 3/8 + 1/8 \cdot 1/8 = 20/64 = 5/16$$

$$\text{p (no se encuentren)} = 11/16$$

Esta actividad debe iniciarse pidiendo a los estudiantes que formulen una estimación del resultado, para continuar simulando la situación, lanzando monedas, dados, eligiendo números aleatorios de una tabla, ya que en cada vértice cada una de las dos personas sólo tiene dos opciones de continuación. Se puede también construir una tabla como la que se propone en el Gráfico II para ir registrando los resultados sucesivos de la estimación y la simulación.

	Probabilidad esperada (antes de simular)	Probabilidad esperada (después de simular 10 veces)	Probabilidad esperada (después de simular total de clase veces)	Probabilidad teórica
Se encuentran				
No se encuentran				

Después de unas pruebas, cuyos resultados pueden recoger en una tabla como la que sigue,

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	Total
Se encuentran											
No se encuentran											
											10

los alumnos suelen darse cuenta de que no es fácil que se produzca el encuentro. Una recopilación de los resultados obtenidos en toda la clase en una tabla como:

					Proporción
Se encuentran					
No se encuentran					
Nº Simulaciones	10	50	100	(Total)	

facilita la asignación de probabilidades por el método de Monte-Carlo.

Como extensión, se puede estudiar el mismo planteamiento en redes de distinta dimensión, 1x1, 2x2, ..., para analizar cómo varía la probabilidad de encuentro:

En 1 x 1, p (encontrarse) = $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2$
En 2 x 2, p (encontrarse) = $1/4 \cdot 1/4 + 2/4 \cdot 2/4 + 1/4 \cdot 1/4 = 6/16 = 3/8$

Si bien no con carácter general, se puede pedir a algunos alumnos que traten de encontrar la fórmula general para una trama de cuadrados n x n:

$$p\ (se\ encuentren) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}^2 \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Claramente, al aumentar la trama de cuadrados disminuye la probabilidad de que se encuentren.

EL JARDÍN DE LAS DELICIAS

De nuevo estamos ante otro problema en el que el estudio teórico es complicado pero no una aproximación estadística razonable, obtenida mediante modelización y simulación. Asignamos un número a cada perro, del 1 al 6, y tomamos de la tabla de números aleatorios tiras de 7 cifras -rechazando 8,9,0- que indicarán para cada pulga el perro elegido. De esta forma, la serie 2561135 nos indicará que sólo se ha librado de pulgas un perro, el 4. Ya se aporta una tabla en el mismo enunciado del problema que se puede utilizar para abordarlo. Debe servir para poner de manifiesto la conveniencia de realizar un número alto de simulaciones para llegar a una asignación probabilística relativamente fiable, pudiendo utilizar tablas similares a las del problema anterior:

	Perros que se libran					
	0	1	2	3	4	5
Probabilidad esperada (antes de simular)						
Probabilidad esperada (después de simular 10 veces)						
Probabilidad asignada (después de simular total de clase veces)						

INTERPRETA LA SOLUCIÓN

Esta actividad plantea un problema de cálculo de probabilidades en el modelo de caminos o bifurcaciones que es fácil resolver, con asignaciones expresadas mediante porcentajes o mediante fracciones. En este problema, además se busca como objetivo que los alumnos razonen y justifiquen una propuesta de resolución recurriendo al modelo de asignaciones de áreas.

A parte de un modelo de solucionar un problema sobre el que pensar, esta actividad ofrece la posibilidad de operar con fracciones, porcentajes y decimales.

DIBUJA EL LABERINTO

Se ofrece aquí la posibilidad de analizar un problema desde una perspectiva creadora: conociendo la solución, diseñar el laberinto que la origina, que desde luego no es único.

Las posibilidades del segundo apartado son amplísimas: dar la solución en cualquier forma de expresión numérica -decimales, porcentajes, fracciones, mezcladas-; proponer datos incompletos (1/2, 1/5, -) o inventar datos que hagan el laberinto imposible.

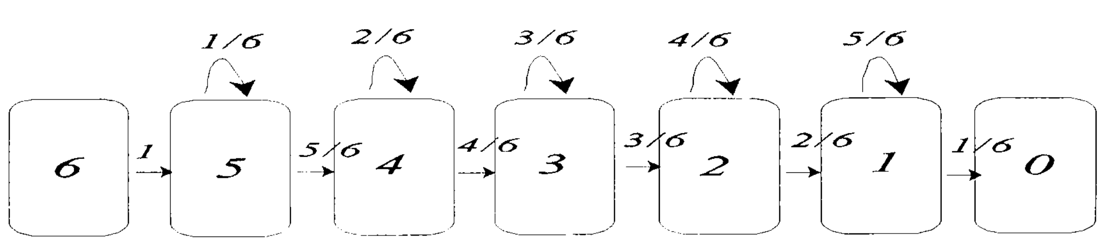
Diseñar -individualmente o en grupo- un laberinto y proponer un problema a los demás no sólo es tremendamente motivador, sino que además hace aflorar las concepciones erróneas y malentendidos sobre la asignación y el cálculo de probabilidades.

EL CHOCOLATE CON PREMIO

Se plantea estudiar el número necesario de extracciones de fichas numeradas del 1 al 6 para obtener una colección completa -al menos una de cada número, aunque de algunas tengamos más de una- de fichas.

Se puede empezar reduciendo el número de fichas distintas a 2, 3, o 4, y analizar qué pasa en esesos casos más simples y cómo aumenta el número de fichas necesarias para asegurar una colección completa. Es preciso observar que si las extracciones son al azar y hay infinitas fichas, pueden producirse ciclos sin fin.

La simulación se reealiza mediante la extracción de números aleatorios y la recopilación estadística de los resultados. El estudio puede realizarse también a través del grafo adjunto, en el que , al esquema en el que el estado inicial es **6** y el estado absorvente es el **0** con las probabilidades de paso de un estado a otro que se han consignado. Para hacer un estudio teórico como se hizo en EL SALTAMUELLES es preferible simplificar al caso de 2 o tres fichas.



74. ESTADÍSTICA

Las primeras actividades plantean el cálculo y la interpretación de la media, en contextos en los que predominan situaciones concretas, inmediatas o más o menos familiares. El cálculo de la media se sugiere tanto para poner de manifiesto cómo transmite información relevante, aunque posiblemente incompleta, como para reflexionar en torno a sus propiedades, intentando clarificar su sentido y sus limitaciones.

MEDIA CON DADOS

La media de las puntuaciones que pueden obtenerse al lanzar un dado cúbico, de parchís, numerado del 1 al 6 en sus caras, es

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 21/6 = 3'5$$

Conseguir que un dado tenga una media de puntuación distinta pasa por cargar el dado o variar las puntuaciones otorgadas a sus caras. Para que la media sea de cuatro puntos, siguiendo la última posibilidad apuntada, hay varias posibilidades (sólo se va a considerar la asignación entera de puntos), que van desde la más simple, colocar 4 en todas las caras a realizar una tabla con todas las asignaciones que cumplan la condición. Y eso sin entrar en si además se distinguen las puntuaciones asignadas mediante colores, cambiando posiciones en el dado u otros efectos. Una observación importante es que la suma de todas las puntuaciones debe totalizar 24.

A continuación tabulamos algunas de las posibilidades existentes pero sería interesante que en clase se confeccionase ellistado exhaustivo de todas las posibilidades.

Posibilidad	Puntuaciones en las caras
1	4-4-4-4-4-4
2	4-4-4-4-3-5
3	4-4-4-4-2-6
4	4-4-3-3-5-5
5	4-4-2-2-6-6
6	3-1-5-5-5-5
...	...

MÁS CON LA MEDIA

La idea que se persigue es que se intime con la forma de calcular la media y cómo afecta al resultado la variación de los datos.

Se plantea el caso especial de añadir un cero a los datos porque plantea problemas singulares y porque permite cálculos rápidos. Un proceso normal en clase, no exclusivo puesto que hay alumnos que no necesitan ejemplos concretos para generalizar, es pasar por experimentar en situaciones concretas el efecto de introducir valores iguales a la media para obtener la conclusión de que la media no varía.

Si se introduce un cero en un conjunto de valores, la media queda afectada, pero ojo, no siempre disminuye que es la primera conclusión tentadora que se saca: disminuye el resultado sí, pero en valor absoluto, lo que en el caso de que la media sea negativa, significa aumento. Vale la pena poner ejemplos.

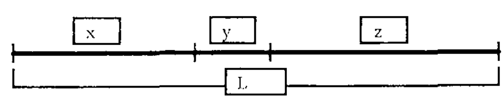
La misma consideración cabe hacer en el caso de que se introduzcan más de un cero. Al aumentar el número de ceros se puede observar que la media converge a cero (tanto en positivo como en negativo).

MEDIA CON TIRA DE PAPEL

Este problema no es fácil. Requiere conseguir una imagen de qué es la media y qué puede significar en longitudes concretas. Y lo peor es que al mismo tiempo que uno no encuentra ninguna solución, el enunciado sugiere que hay infinitas.

Lo cierto es que para que la longitud de uno de los trozos (x) sea la media de las longitudes de los otros dos (y, z), tendrá que ocurrir que la suma de sus longitudes y + z sea doble que la del primer trozo x. Luego, con dividir el segmento en tres partes iguales es suficiente.

Pero aún mas, el trozo que mide 2/3 de la longitud total se puede dividir de múltiples maneras en dos trozos posibles, dado que su semisuma será siempre 1/3 de la longitud total.



En la gráfica, L es la longitud total del trozo -en clase se prueba con valores concretos como 10,100, etc.- x, y, z las longitudes de las divisiones que se hace.

$$x = \frac{y+z}{2} = \frac{L-x}{2} \Rightarrow 2x = L - x \Rightarrow 3x = L \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

de los otros dos trozos no se puede afirmar más que la suma de sus longitudes es 2L.

Una vez resuelta la primera parte, la segunda resulta más fácil, aunque tampoco evidente. Juntando los dos trozos para ver su longitud total y procediendo como antes, buscando un trozo que sea la tercera parte de la longitud total, quedan los otros dos determinados.

Y MÁS CON LA MEDIA

Aquí se presenta una interesante propiedad: la suma de las diferencias entre los datos y la media aritmética es cero. Con ella, se sigue intentando conocer la media. Esto implica que las diferencias con respecto a la media no aportan información sobre la dispersión de los datos, para ello hará falta considerar otras medidas como los valores absolutos de las diferencias, los cuadrados de las diferencias, etc.

AQUÍ PASA ALGO RARO

En principio el razonamiento parece evidente, lógico y rotundo: "*No puede ser cierto que siendo inferior la media de pasas por tarta que pone Elena con respecto a Juan, por la mañana y por la tarde, el conjunto dé superior. La media de las dos medias (mañana y tarde) de cada uno mantienen su relación*".

Sin embargo, en el cálculo de la media de las medias importa el peso de cada una, el número de elementos que intervienen en total, y puede darse la situación que se considera. Pongamos un ejemplo:

	Mañana (M)	Media (M)	Tarde (T)	Media (T)	Media del día
Juan	6, 8, 9, 7, 4, 3, 6, 5	6 (48/8)	3, 2, 4, 3, 5, 7, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 2	3'333...(50/15)	4'26 (98/23)
Elena	4, 5, 7, 6, 4, 8, 3, 6, 7, 9, 4, 3, 5	5'46 (71/13)	3, 3, 4, 2, 1	2'2 (11/5)	4'55 (82/18)

LA PENA DE MUERTE

Con ésta se inicia una serie de actividades que se centran en el análisis, la crítica y la explotación de informaciones de prensa o de otros medios de comunicación, con contenido estadístico, en forma de gráficas, tablas, encuestas, etc. que en la mayor parte de los casos pueden ser actualizadas en el momento en que se propongan las actividades. La finalidad más importante es mostrar la potencia educativa de los medios de comunicación en cuanto a que proporcionan actividades de trabajo actualizadas en diversos campos, y de forma particularmente exuberante en Estadística.

Se muestra, además, las diferentes orientaciones que se pueden dar a las actividades, según las características que se quieran remarcar. LA PENA DE MUERTE se orienta de forma que se pueda recoger la opinión del centro realizando una encuesta, manifestando de forma individual las reacciones u opiniones que la noticia provoca en los alumnos (artículo individual para revista escolar), y en cualquier caso utlilizando la noticia para extraer datos relevantes, como por ejemplo, que es un tema abierto y polémico, puesto que no todos los estados aplican la pena de muerte.

La pregunta sobre la probabilidad de que un preso condenado a muerte sea ejecutado, pretende abrir un debate sobre qué significa o cómo se podría calcular esa probabilidad. Para ello los estudiantes deberán fijarse con detenimiento en las gráficas y descubrir que la información relevante para este asunto la podemos encontrar en el diagrama de barras inferior derecho, interpretando los datos que se ofrecen. En la línea superior de esa tabla aparece el número de ejecutados en cada estado que ha aplicado la pena de muerte. Se puede apreciar que la proporción de ejecutados con respecto a los que están condenados a muerte es diferente de un estado a otro y, si esa proporción va a dar una idea de la probabilidad pedida, no está claro si es representativo hacer el cómputo total de unos y otros estados y utilizar el resultado o si sólo se puede hablar de probabilidad por estado.

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Se presentan para su interpretación tres gráficas, una de sectores típica, otra que utiliza la gráfica de sectores encadenada, y una tercera de puntos. Las tres proporcionan datos de interés para todos y la más difícil de interpretar es, sin duda, la central.

En la tercera gráfica se puede describir cómo está construida cada una de las tres líneas y se puede comentar su forma. La segunda gráfica presenta un aspecto cuantitativo interesante pero complicado, permitiendo obtener unos resultados que se pueden comparar con las informaciones que ofrecen las otras dos gráficas.

Se pueden formular preguntas acerca de cómo presentar la información que da la gráfica central de forma que sea más fácilmente comprensible, ya que extraer datos de ella requiere un trabajo árduo y no es fácil resumir la información que contiene. Para ello se puede proponer su desglose en varias gráficas más independientes, manteniendo la referencia del total de la población, etc..., y valorar si con ellas se pierde cierta conexión que sí muestra perfectamente la representación dada.

EN LAS LÁMINAS I, II y III

Se presentan actividades que pueden realizarse en clase a partir de informaciones diversas que, en primera instancia, deben ser localizadas para responder a las preguntas que se formulan. En una segunda fase esas mismas informaciones deben interpretarse y aprovecharse para extraer conclusiones.

Una alternativa interesante es prescindir de las preguntas formuladas en la actividad, para que sean los propios alumnos los que aprendan a formularlas.

En la lámina II se encamina la actividad hacia su vertiente probabilística, una de las posibles vías de ataque al problema, mientras que la lámina III se orienta hacia el cálculo de parámetros estadísticos, el estudio de la desviación típica y su interpretación.

MENSAJE CODIFICADO

La estadística de las frecuencias de aparición de las letras en un idioma ha sido utilizada para codificar mensajes. Edgar Allan Poe lo hace en su famosa obra *El escarabajo de oro*, de aplicación didáctica inmediata. Hay un mensaje que descifrar y se conoce el camino para hacerlo, o al menos se cree que es el camino; se requiere completar una estadística que resuma la aparición en los textos de las letras del abecedario. Es una buena ocasión para plantear que hay distintos tipos de textos y que algunos deben ser descartados. La participación y colaboración de todos en la empresa es lo primero que se hace patente, pues la estadística no debe provenir de un solo texto y como es laboriosa debe repartirse el trabajo de seleccionar la fuente, elegir unos cuantos renglones (5 ó 6 son suficientes), proceder al recuento y aportar los datos para, junto con los del resto de compañeros, realizar la estadística que nos acerque al objetivo.

Está claro que las vocales se repiten bastante, y que alguna lo hace más que otra. Algunas pruebas en las letras con frecuencias relativas más cercanas deben aproximarnos a la solución.

Como extensión, se puede proponer que los propios alumnos elaboren un mensaje y que lo codifiquen para hacerlo llegar a otros grupos o a otra clase.

En Arzarquiel (1982) puede encontrase un completísimo estudio didáctico sobre este problema. En ese mismo libro aparece la siguiente estimación sobre la frecuencia de aparición de las letras en el idioma castellano:

a, e	más del 10% (y menos del 15%)
o, i, s, r, n	entre el 6% y el 10%
l, c, t, d	entre el 3% y el 6%
b, p, u, f, g	entre el 1% y el 3%
resto	menos del 1%

y la frecuencia empírica de los signos del mensaje de Poe:

Signo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
Frecuencia absoluta	9	14	6	5	6	5	2	9	2	1	2
Frecuencia relativa (%)	8'1	12'6	....								

Signo	/	(	)	[	]	+	-	>	=
Frecuencia absoluta	2	5	9	1	2	6	14	1	10
Frecuencia relativa									

TOMANDO MEDIDAS

Este problema entra en el terreno de la correlación o grado de relación que hay entre dos variables y en cómo establecer una asociación razonable entre ellas que facilite la toma decisiones.

A modo de ejemplo, analizamos la tabla que trata sobre zapatos, describiendo al mismo tiempo cómo se puede utilizar una calculadora gráfica para el análisis.

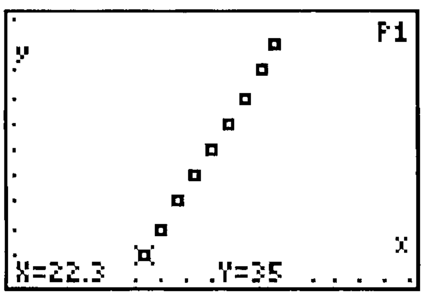
Primero, para visualizar el tipo de relación que existe, si existe, entre las variables, se introducen los datos y se dibujan la nube de puntos de la distribución y la recta de regresión lineal.

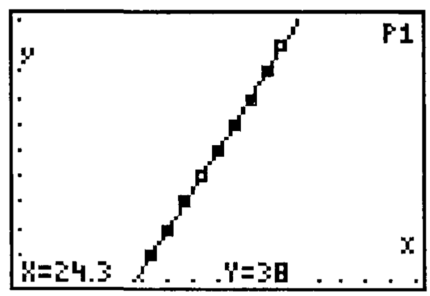
La tabla es:

cm	22'3	23	23'6	24'3	25	25'6	26'3	27	27'6
Talla	35	36	37	38	39	40	41	42	43

La ecuación de la recta de regresión que facilita automáticamente la calculadora es y = 1.5 x + 1.465 y el coeficiente de correlación r = 0.999877.... Esto último dato indica que la relación entre las variables es muy fuerte, casi linealmente funcional, conclusión que parece lógico dadas las dos variables en estudio (talla y longitud del pie).

Las gráficas de la nube de puntos y de la recta de regresión son:





Está claro *visualmente* que la relación es casi lineal.

Calculada sobre la recta de regresión, a la talla 44 le correspondería una longitud de pie de 28'29 ≅ 28'3 cm.

EL TABACO Y EL CÁNCER

En este problema se trata de analizar una información estadística presentada en una tabla en la que hay que saber hacer la lectura de datos con doble entrada (hay 35 personas que participan de las características, ser no fumadoras y tener cáncer, el total de fumadores es 140 + 64.860 = 65.000, etc.); fijarse en los totales por filas y por columnas y comparar los datos parciales con esos totales.

La tabla es insuficiente, pues no aporta circunstancias o referencias del estudio (sobre qué muestra se ha hecho, etc.), por lo que hay que ceñirse a los datos de que se dispone y establecer las conclusiones a partir de ellos; por ejemplo, de los 175 que presentan cáncer, 140 son fumadores, con lo que se podría inferir que ser fumador aumenta el riesgo de acabar con un cáncer, sin embargo, se podría considerar también que hay casi el doble de fumadores que de no fumadores en la muestra del estudio, con lo que habría que afinar más comparando de nuevo.

El otro rasgo importante del problema es que presentados los datos en una tabla es fácil dar el salto de la estadística a la probabilidad, salto para el que es fundamental interpretar correctamente la tabla. Así,

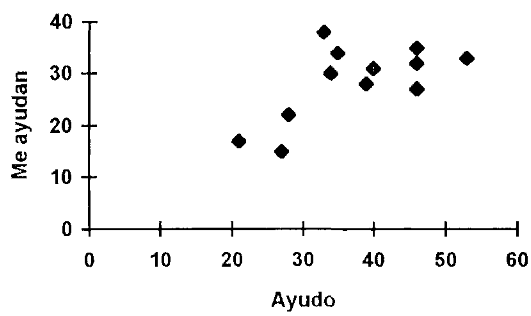
p (tiene cáncer/ es fumadora) = 140/65.000
p (es fumadora/tiene cáncer) = 140/175

DEPORTES Y EL CENTRO

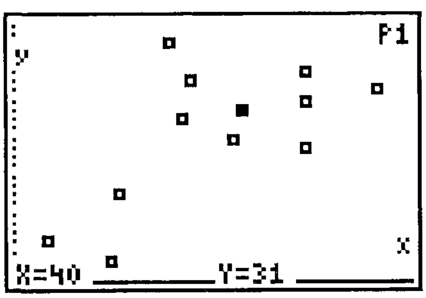
Se trata de un estudio que se puede hacer rápidamente en clase. Es equivalente a la realización de una encuesta de tema limitado a los deportes.

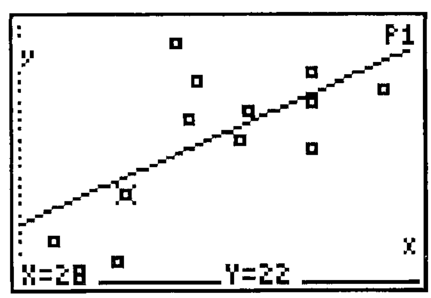
AYUDO Y ME AYUDAN

Se puede hacer un comentario a la vista de la tabla ya que esta es lo bastante ilustrativa para expresar, por ejemplo, que mayoritariamente 'ayudo más que me ayudan'; pero es mejor todavía dibujar la gráfica (nube de puntos) para mostrar visualmente la relación existente entre las dos variables.



Una cierta relación sí se aprecia. La calculadora aporta la ecuación de la recta de regresión lineal $y = 0.49\,x + 10.19$ y el coeficiente de correlación $r = 0.646$, que confirma la idea de que habiendo relación, no es estrecha. Se incluyen a continuación las gráficas que proporciona la calculadora gráfica con estos datos.





SE ME DAN LAS MATES

Lo dicho anteriormente se puede aplicar en este caso, remarcando que el objetivo es realizar el trabajo con una calculadora gráfica o un ordenador, pero que en caso de indisponibilidad de estos recursos, bastaría con realizar un estudio cualitativo, representando la nube de puntos y observando la intensidad de la relación entre las variables.

ALTURA Y PESO

Es una actividad típica y tópica que funciona para mostrar que las dos variables, altura y peso, mantienen una estrecha relación -estadística, no funcional-. Lo mejor de la actividad es que se trata de realizar el estudio en la clase y los protagonistas son los alumnos con datos sobre ellos mismos. Ésto les motiva a participar con interés.

En el caso de que el ajuste se haga manualmente y no mecánicamente, se debe vigilar la recta de regresión que se dibuja estimativamente sobre la nube de puntos para que sea lo más precisa posible y tengan éxito las predicciones que a partir de ella se formulen partiendo desde datos parcialmente ocultos (sólo se facilita la altura o el peso) y que pueden provenir de recopilaciones hechas por estudiantes de otras clases.

ALTURAS

Si se realiza la actividad que sirve de referencia y se dibuja la gráfica, se puede observar que la altura es una variable continua que se distribuye según el modelo de la normal. Se trata de que se llegue, después de la discusión pertinente, a establecer unos límites para los porcentajes de las alturas que más o menos estarán en correspondencia :con la media y la desviación típica:

$$[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] \quad [\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma] \quad [\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$$

El objetivo es clarificar, después de varios ejemplos, que los datos se concentran alrededor de la media, que la desviación típica da información sobre el grado de dispersión de los datos, que se refleja en el hecho de que en cada uno de los intervalos anteriores había un porcentaje alto de los datos, que aumentaba con el coeficiente de σ .

Al estudiar las alturas, por ejemplo, la altura normal puede quedar alrededor del primer intervalo, los altos o bajos alrededor del segundo y los muy altos o muy bajo alrededor del tercero.

Es suficiente por ahora saber que lo que han detectado con los ejemplos tiene un referente teórico: para la distribución normal, según el teorema de Chebycheff, se tiene

$$p(|x - \bar{x}| \leq \sigma) = 0.6826; \quad p(|x - \bar{x}| \leq 2\sigma) = 0.\ 9544$$

$$p(|x - \bar{x}| \leq 3\sigma) = 0.9974$$

PISANDO LOS TALONES A LOS HOMBRES. MARCAS EN 1500m

Se inician ahora una serie de actividades centradas en el estudio de la correlación entre dos variables, y en la comprensión (iniciada al menos en tercero) de que el conocimiento del grado de dependencia de las variables permite estimar resultados de una de las variables a partir de un valor conocido de la otra.

Se aprovecha un artículo de prensa y se aporta una tabla con registros olímpicos de varias pruebas atléticas a lo largo de la historia. No hay más que dibujar la nube de puntos de cada prueba de la que se hace afirmación y siguiendo el proceso analizado anteriormente se comprueba si las afirmaciones realizadas tienen o no atisbos de ser ciertas. Debe someterse a discusión los motivos de que haya casillas en blanco.

Hay un detalle que es clave en las competiciones con registros: por mucho que se rebajen las marcas, no se llegará nunca a ciertas cotas (por ejemplo recorrer 100 metros en 0 segundos). Cada vez será más dificil batir los registros.

ANUARIOS

Se vuelve a insistir aquí en las consideraciones necesarias para establecer criterios que permitan decidir si una medida está dentro de lo "normal" o no. Para ello se aporta la media $\bar{x}$ = 1'75 y la desviación típica σ = 0'15.

$\bar{x} + \sigma$ = 1'90 $\Rightarrow$ la persona que mida hasta 1'90 tiene una estatura *normal*.
$\bar{x} - \sigma$ = 1'60 $\Rightarrow$ la persona que mida desde1'60 tiene una estatura *normal*.

VELOCIDAD

La carrera que se utiliza como contexto en esta actividad fue importante y durante días se habló y escribió sobre ella. Aquí se introduce para, entre otras cosas, analizar la relación que existe, la correlación, entre tiempos y distancias recorridas. Ya se han comentado anteriormente actividades planteadas con estos mismos objetivos. Se añade ahora la idea de someter a consideración la validez de la predicción echa para el tiempo de recorrido de 200 metros, teniendo en cuenta que la nube de puntos se ha dibujado con datos inferiores a 100 metros, esto es bastante alejados de aquel.

ALUMNOS TELEVISIVOS. CADENA DE SUPERMERCADOS

Ambas abundan en la cuestión de la correlación y la regresión entre dos variables que ya se ha comentado suficientemente.

PIENSA

Se plantea la reflexión en torno al grado y la forma de relación que se da entre dos variables. Cuando hay correlación alta, las variables dependen una de la otra en gran medida, se influyen mutuamente. Esa idea debe servir de base para establecer el grado de relación de las parejas de variables que se enuncian.

75. CONTAR

Los contextos en los que se presentan las actividades de recuento sistemático de 4° curso son, fundamentalmente, numéricos y geométricos. Ya se comentó brevemente este tipo de problemas en el apartado dedicado a las actividades de recuento sistemático de 3°.

CAMINOS

Este problema tiene como objetivo reforzar la estrategia multiplicativa y aplicarla a lo que se llama la regla del producto, válida para aquellas situaciones en las que el número de ramas en cada nudo de la representación en árbol es constante en cada nivel del árbol.

Así, en este problema, el número de caminos del primer caso es 3 x 3 = 9, y 2 x 4 = 8 en el segundo.

TERNAS MÍNIMAS

Se busca el número de ternas mínimas que hay entre los números de tres cifras, del 000 al 999. El recuento se puede hacer contando cuántas ternas mínimas existen en función de la cifra central:

Cifra central	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ternas mínimas	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

El recuento en cada caso se realiza con el mismo esquema. Si la terna es

	x	

por cada una de las cifras inferiores que se puedan colocar en la casilla izquierda se pueden colocar otras tantas -las mismas- en la casilla derecha, y además de manera independiente. Por lo tanto, es válida la regla del producto. De otro modo si x = 4, por ejemplo, a su izquierda, para formar ternas mínimas, puede colocarse 0, 1, 2 ó 3, es decir 4 cifras, y las mismas o la derecha, en total 4 x 4 = 16 posibilidades distintas.

Un diagrama en árbol visualiza bien la situación multiplicativa.

En resumen, existen 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 285 ternas mínimas, y por lo tanto, la probabilidad de que al extraer un número de tres cifras al azar se obtenga uno que sea terna mínima es de 0'285 y la probabilidad de que no sea terna mínima será 1- 0'285 = 0'715.

En las actividades B de CONTAR de 1° aparecía una actividad equivalente a esta, titulada TERNAS MÁXIMAS, que se comentó en la Guía de uso de los materiales de Matemáticas del primer ciclo.

CAPICÚAS

El contexto numérico en el que se sitúa el problema intenta desarrollar estrategias de recuento sistemático y, además, mejorar el conocimiento de los números, sus propiedades y su significación social (la palabra capicúa proviene de cap-i-cúa, cabeza y cola, en catalán). Un número es capicúa si se lee igual (si resulta el mismo número) de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Según esta definición, son capicúas los números naturales de una cifra -1, 2, ..., 9- y los que tienen las dos cifras iguales -11, 22, ..., 99-. No puede haber más, por lo que en los primeros 100 números naturales hay 18.

Para encontrar los que sean capicúa en los 1.000 primeros números naturales analizaremos qué ocurre desde 001 a 1.000.

Si el 4. por ejemplo, es la primera cifra, entonces la cifra central puede se cualquiera de las diez cifras, mientras que la cifra final obligatoriamente debe ser un 4. Así:

Cifra inicial	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº. capicúas	18	10	10	10	10	10	10	10	10	10

También se puede realizar el análisis partiendo de la cifra central, como se ha hecho en TERNAS MÍNIMAS. Ahora para cada cifra central posible, *distinta de cero*, las otras dos deben de ser iguales, incluida la cifra en cuestión (número capicúa con tres cifras iguales) pero *excluido* el cero. Tomemos como cifra central el 4, por ejemplo. Habrá entonces 9 números capicúas, desde el 141 al 949. La cifra central 0 requiere atención especial: genera un capicúa por cada una de las otras cifras, por lo tanto nueve en total.

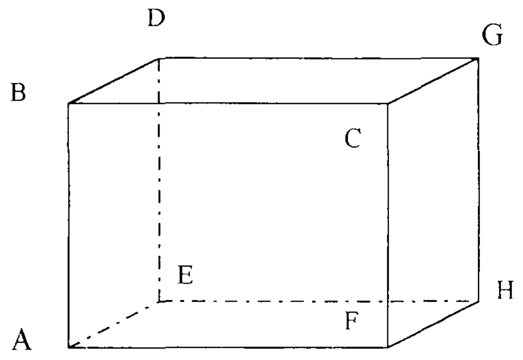
Cifra central	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº. capicúas	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Así pues, si se ha extraído un número y es capicúa, la probabilidad de que contenga un 5 es 20/ 108, ya que examinando la tabla anterior, para cada cifra central distinta de 5 hay uno, totalizando 9, cuando la cifra central es 5 hay 9 casos más, a los que hay que añadir uno (el 5 es capicúa de una cifra) y otro de dos cifras (55).

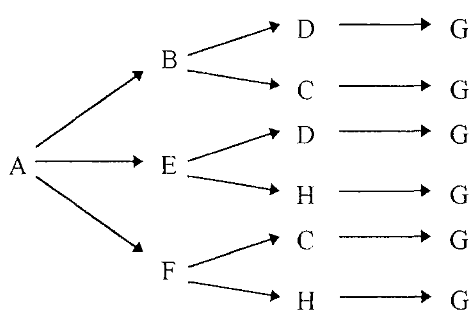
Este es un problema que requiere mucha concentración y propicia un mejor conocimiento de los números naturales. Es preciso aquí llamar la atención sobre el aspecto significativamente diferente que presentan las dos tablas anteriores, generadas por dos estrategias distintas de recuento, ambas igualmente naturales. Comprender que las dos trasmiten la misma información requiere una prometedora discusión en clase que no será ajena a la tendencia existente a atribuir a la situación estructuras de proporcionalidad (si con una cifra hay 9 números capicúas, con dos cifras habrá 2x9 y con tres cifras 3x9) inexistentes.

EL REPTADOR DE CUBOS

El problema trata de recorridos sobre las aristas del cubo, contexto geométrico que permite conocer mejor ese poliedro de seis caras y su carácter tridimensional. Conviene identificar cada vértice con un símbolo, numérico o no es lo de menos, y codificar cada recorrido realizado con una sucesión de esos símbolos, como por ejemplo ABDG.



Es preciso matizar qué significa que el reptador vaya *directamente* desde A hasta G. Una interpretación posible es que el recorrido se realiza por el camino más corto posible.
El árbol que representa todas las posibilidades es:



de modo que el número de caminos es 3 x 2 x 1 = 6.

CAMINOS DE IDA Y VUELTA

Este es otro problema de caminos. En este, partiendo de A hay tres posibles caminos iniciales que llegan a puntos M, N y P desde los que se se llega B por el camino más corto. Desde M a B hay dos caminos igual de cortos recorriendo 2 lados de cuadrado. Para ir de N a B hay un recorrido único de menor longitud -2 lados de cuadrado- . Para ir de P a B hay -véase problema CAMINOS EN UNA RED de 3°- 6 caminos de recorrido mínimo -4 lados de cuadrado-. Para ir de A a B hay por tanto 2 + 1 + 6 = 9 posibles caminos diferentes.

Si la vuelta de B a A la hace con el mismo criterio, debe ir por un camino de mínimo recorrido hasta uno de los puntos M, N o P y desde él acceder a A. El recorrido mínimo para llegar a uno de los puntos de referencia es de dos lados de cuadrado, pero pueden conducirle a M (2) o a N (1), con lo cual tiene tres caminos mínimos de B a A.

Como por cada camino de ida se puede tomar uno cualquiera de los de vuelta sin que la elección esté condicionada por el recorrido de la ida, el número total de caminos distintos que se puede realizar de A a B y vuelta, con las condiciones señaladas, es de 9x 3 = 27.

NÚMERO DE NÚMEROS CON NÚMEROS

Presenta una situación de contar números de dos cifras utilizando 0, 1 y 2.

Lo primero que cabe notar es que importa el orden en el recuento, pues la posición de las cifras define un número u otro. Además, las cifras se pueden repetir.

El problema resulta difícil pues la posibilidad de que el 0 sea una cifra inicial rompe el convenio de representación de los números. Las soluciones son

$$3^2 - 2^1 = 7 \text{ (para dos cifras)}$$
$$3^{10} - 2^9 = 58537 \text{ (para números de 10 cifras, con 0, 1 2).}$$

El problema puede aprovecharse, si así se considera oportuno, para formalizar la fórmula de las variaciones con repetición $VR_{m,n} = m^n$.

ACERAS

Supongamos que la acera está adosada a una pared o tiene una referencia que permite saber si las baldosas tienen una orientación u otra.

La dimensión de la baldosa rectangular base es 2 x 1.

Hay dos modos de rellenar una acera de 2 x 2, poniendo las dos baldosas horizontales o verticales.

Cuando la baldosa es 2x3 se razona a partir del resultado anterior, contabilizándose 3 casos Del mismo modo, para 2x4 se totalizan 5 posibilidades. Sorprendentemente, la sucesión numérica que se obtiene es 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , es decir la serie de Fibonacci, que tiene una ley de formación fácil de formular en términos recurrentes:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \text{ y } \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2 .$$

TRIÁNGULOS EN TRIÁNGULOS

La finalidad del problema es doble, por un lado realizar el recuento bien y por otro mejorar el conocimiento de los triángulos, aprovechando que los que aquí aparecen son atípicos.

TARJETAS BANCARIAS

Este es un caso de variaciones con repetición de 10 elementos -las cifras 0, 1, ...,9- tomados de cuatro en cuatro. Como se indicó anteriormente en otro caso, la actividad puede ser también aprovechada para formalizar la fórmula de las variaciones con repetición.

El problema no es difícil, las estrategias eficaces que se emplean en el recuento son muy variadas, desde el diagrama en árbol hasta la ennumeración correlativa hasta inducir que se trata de un total de 10.000 = 10^4 distintos (sí vale el 0000, el 0001, ...).

Es importante establecer la ligazón del problema de recuento con el del cálculo de probabilidades, porque se contribuye así al convencimiento de la aplicabilidad de las matemáticas. En este caso, decir que la probabilidad de que se acierte al azar el código secreto es 1/10.000, esto es 0'0001, equivale a cuantificar la dificultad de violar una tarjeta o, simétricamente, medir la seguridad en de su uso. Otro asunto es si tanta información codificada sobre los ciudadanos, accesible a entidades públicas o privadas y a los gobiernos, puede ser -como se anuncia en la literatura de ciencia-ficción al menos- un riesgo para el individuo. Este bien pudiera ser un tema de debate o una idea para realizar una encuesta de opinión.

En resumidas cuentas, en este problema se asocia la actividad de contar con una de sus principales aplicaciones, el cálculo de probabilidades.

En clase despierta mucho interés el calculo de la probabilidad de que se acierte en el segundo intento cuando se falla en el primero, que es 1/9.999 -descartando la primera combinación utilizada, que falló-, y de acertar a continuación 'a la tercera', 1/ 9.998. Los resultados siguen otorgando seguridad razonable a las tarjetas codificadas, puesto que en cada intento de los tres permitidos la probabilidad de acertar es muy baja.

Tal como está planteado, el problema puede dar lugar a dos interpretaciones.

Una, la computada antes, que demanda la probabilidad de acertar en el tercer intento (eso es suponiendo que se han fallado el primero y el segundo).

Otra, más acorde con la realidad, consiste en admitir que para acertar la clave se supone que hay un primer intento y sólo si no se acierta se pasa al segundo, y se llegará al tercero sólo si no hay más remedio. Se trata en definitiva, de la distinción que existe entre acertar *en tres intentos* y acertar *al tercer intento*).

$$\text{p (acertar la clave al primer intento)} = \frac{1}{10.000} = 0'0001$$

p (acertar la clave en dos intentos) = p (acertar en el primer intento) +
p (acertar en el segundo intento/no se ha acertado en el primer intento) =

$$= \frac{1}{10.000} + \frac{1}{9.999} = 0'00020001\ldots$$

p (acertar la clave en tres intentos) = p (acertar la clave al primer intento) +
+ p (acertar en el segundo intento/no se ha acertado en el primero) +
+ p(acertar en el tercer intento/no se ha acertado en el primero y no se ha acertado en el segundo) = $\frac{1}{10.000} + \frac{1}{9.999} + \frac{1}{9.998} = 0'00030003\ldots$

Esta distinción resulta muy confusa para la mayoría de los alumnos.

RECTÁNGULOS Y TENIS

La idea es simple, contar los rectángulos que se aprecian en el esquema de algo tan familiar como es una pista de tenis.

El número de rectángulos totales, 21, es muy elevado y algunos de ellos no son fáciles de ver. Una buena notación (números, letras, ...) ayudará a encontrarlos todos.

DOBLES EN TENIS

Considerando los números del 1 al 18 se puede razonar de diversas maneras. Por enumeración exhaustiva, en columna, por ejemplo, o mediante diagramas en árbol. Conviene en ambos casos empezar a probar con números bajos de participantes: la estrategia de empezar por caso más simples es una buena estrategia para resolver problemas.

El orden en que se producen los emparejamientos no importa para determinar la pareja, sólo influyen los jugadores que aparecen. Hay, en consecuencia,

$18 \cdot 17 / 2 = 153$ formas distintas de emparejar a los 18 jugadores

.

Las preguntas que se formulan pretenden pautar la obtención de la fórmula general de las combinaciones a partir de los resultados, y la forma de obtener estos cuando el número de participantes va creciendo.

Los partidos necesarios para dilucidar la pareja ganadora cuando son n parejas, se pueden deducir analizando de nuevo qué pasa en casos concretos, e induciendo el resultado general: para eliminar a n-1 parejas hacen falta n-1 partidas, pues cada pareja es eliminada en un partido.

EL PROBLEMA DE 1.000!

Ingenuamente, los alumnos recurren a la tecla que calcula n! en la calculadora.. Se comprueba con ella que 1000! tiene que ser un número grandísimo por los resultados que se obtienen para entradas relativamente muy pequeñas.

Comprendida la magnitud del número y la inutilidad de la calculadora, el quid de la cuestión es observar los números, reconocer propiedades sobre la multiplicación, descubrir cuándo al multiplicar se obtiene un cero como cifra final.

Simplificar el problema vuelve a ser una estrategia útil. ¿En cuántos ceros acaba 10! ?. Para ese número podemos contar con el resultado de la calculadora para contrastar. Está claro que cuando se multiplica por 10 se obtiene uno, pero la pantalla de la máquina arroja un cero más ¿por qué?. No es fácil darse cuenta de que es al multiplicar por 5 cuando aparecen los ceros y que se trata por tanto de controlar cuántas veces aparece el 5 como factor en el producto total. 1000! termina en 243 ceros.

CONTANDO LÓGICAMENTE

Contar bien no es fácil, y no es la primera vez que se dice aquí, pero si además entra en acción la intención de comunicar el resultado con claridad la complicación es todavía mayor. Este problema motiva en clase. Todo el mundo lo intenta y cree tener el resultado correcto y el porqué. Es una buena actividad para propiciar -de forma individual, en grupo y para toda la clase- la expresión oral y el razonamiento, para analizar si se falla en la argumentación, dónde o por qué se falla, para inducir a completar las explicaciones pertinentes con ayuda de gráficos o esquemas.

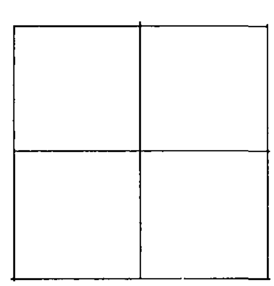
Una buena estrategia didáctica es solicitar por escrito la descripción del proceso que se lleva a cabo en la sala y que conduce a la solución: el presidente era mentiroso y había 40 personas.

RECTÁNGULOS Y FÚTBOL

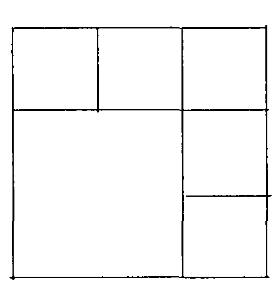
Es un complemento o un sustituto de RECTÁNGULOS Y TENIS. Hay algunos rectángulos más en el segundo caso que en el primero, pero sólo se trata de contar con atención en los dos.

CUADRADOS EN UN CUADRADO

La solución más sencilla está representada en la figura que acompaña al enunciado del problema



Para obtener más cuadrados se requiere recurrir a estrategias no tan evidentes:



Ahora el cuadrado original se ha divido en 6 cuadrados más pequeños.

CAPÍTULO XV

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

76. ÁREA Y PERÍMETRO LÍMITES

Los números naturales y las figuras intuitivas atañen a toda la matemática, hasta el punto de que el paradigma básico de toda la matemática elemental es la suposición de que estructuras abstractas o *complejas* -como la que se propone *analizar* en este problema- pueden describirse en último extremo con *números* y *formas*.

El punto de arranque de cualquier intento de solución del problema es la *observación directa*: cada figura se obtiene de la precedente *reduciéndola* 1/3 y *reproduciéndola* 5 veces, concatenando adecuadamente sus elementos.

La elaboración de las observaciones debe permitir detectar el *esquema recursivo* de la figura, esto es las reglas que rigen su construcción etapa a etapa. Éstas reglas se dejan describir de diversas maneras. He aquí, por ejemplo, una en la que números y letras juegan un papel meramente descriptivo-geométrico:

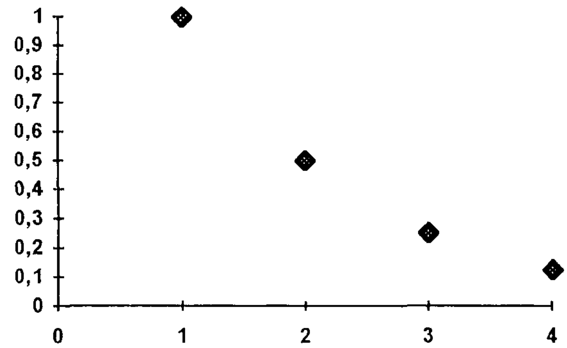
		1/3 A	
A:	1/3 A	1/3 A	1/3 A
		1/3 A	

Una vez determinada la estructura del objeto geométrico se pueden abordar los cómputos necesarios para discernir el comportamiento del área y del perímetro en las sucesivas etapas de la construcción. Analicemos en primer lugar el caso del área:

Etapa	Área	
0	1	= 1
1	1/9 x 5	= 5/9
2	5/9 x 1/9 x 5	= $(5/9)^2$

El cómputo directo sugiere un esquema recursivo que puede ser descrito con diversos lenguajes, v. gr.:

Gráfico:

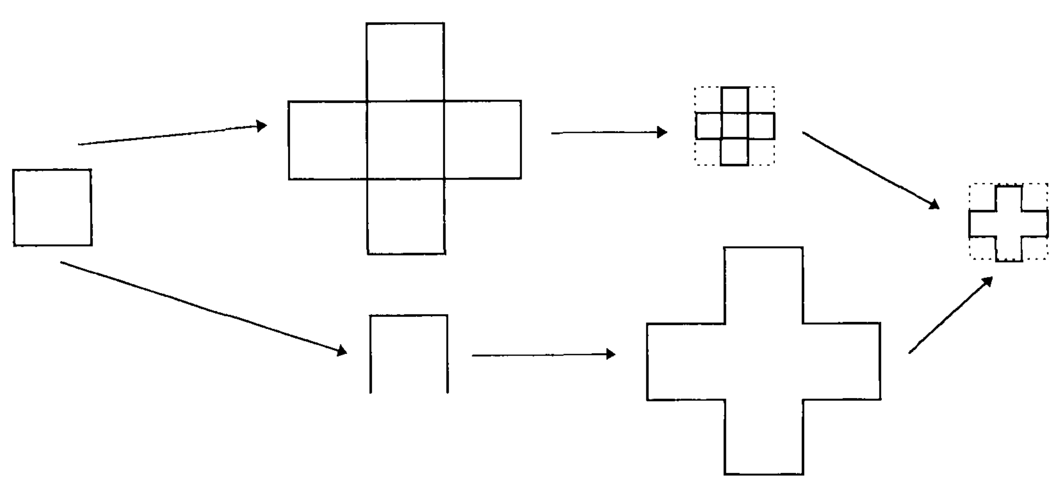


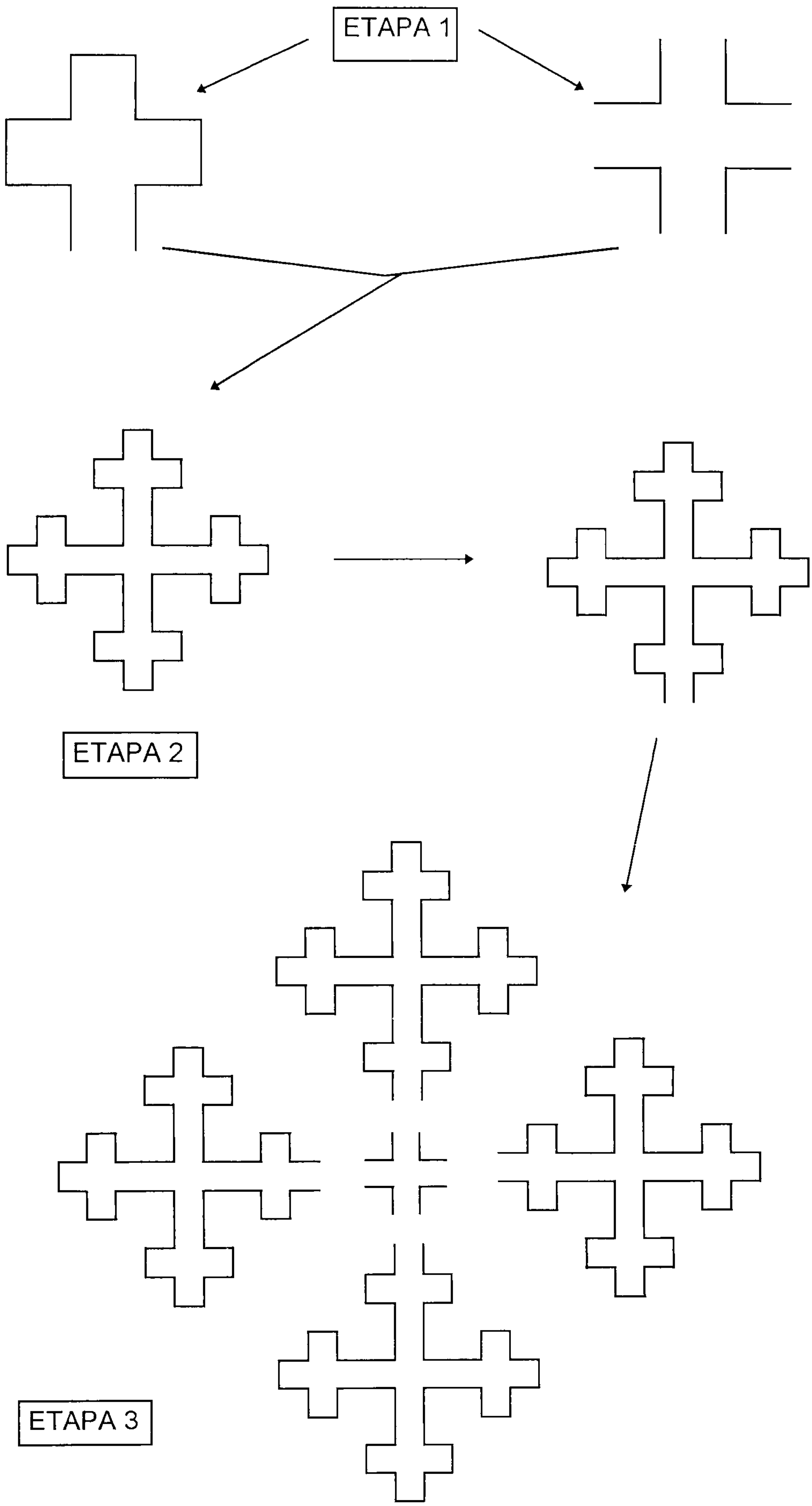
Verbal: El área en cada etapa se obtiene de la anterior dividiendo por 9 y multiplicando por 5.
Numérico: la tabla anterior extendida tanto como haga falta.
Algebraico (versión recursiva): $A_{n+1} = A_n \times 1/9 \times 5$
Algebraico (versión explícita): $A_n = (5/9)^n$

La expresión algebraica recursiva es relativamente fácil de obtener y es suficiente para el cálculo mecánico del área encerrada por las sucesivas figuras. Más difícil es la descripción explícita pero como contrapartida transparenta mejor la tendencia al infinito que se desea analizar. La determinación del perímetro es sustancialmente más compleja. La estrategia anterior no funciona ahora o al menos no funciona directamente porque la sucesión o serie numérica que se genera es aparentemente más incomprensible.

Se requiere de hecho una comprensión profunda de la estructura recursiva no tanto de la figura en su conjunto como de su contorno o *frontera* y una contabilidad detallada del número de segmentos o líneas que contiene. Para ir haciendo pruebas a la búsqueda de la mencionada estructura, que se estiliza cada vez más de etapa en etapa, es imprescindible utilizar papel tramado. La cuestión clave es cómo se genera -y no tanto *qué perímetro* tiene- una figura partiendo de la correspondiente a la etapa anterior. El análisis eficiente del perímetro es, en primera instancia, geométrico y no numérico. A su vez, este examen geométrico admite diversas versiones según dónde se focalice la atención:

ETAPA 0 ETAPA 1




ETAPA 1
ETAPA 2
ETAPA 3

Un avance sustancial, por no decir definitivo, en la resolución del problema se produce cuando se descubre la estructura de la construcción ejemplificada en la página anterior. Como se observa, esta estructura se basa en módulos que se reproducen adecuadamente. El conteo directo del número de segmentos que componen cada figura permite -aunque hay que dejar constancia de que no siempre se llega espontáneamente a ello- la siguiente conclusión:

El número de segmentos de cada figura es superior a cuatro veces el número de segmentos de la figura de la etapa anterior.

Como de una etapa a otra la contracción o reducción del segmento unidad es de 1/3, los perímetros de las sucesivas figuras cumplen

$$P_n > P_{n-1} \times (4/3)$$

Esta desigualdad ya demuestra que el perímetro es infinito, pero se pueden encontrar otras muchas variantes de la relación entre los perímetros, según el discurrir que tenga el análisis:

$$P_{n+1} = 5 \times P_n - 8$$

$$P_4 = 5 \times P_3 - 8 = 5\,(5\,P_2 - 8) - 8 = 5^2\,P_2 - 5 \times 8 =$$
$$5^4 . 4 - 8 . (5^3 + 5^2 + 5 + 1)$$

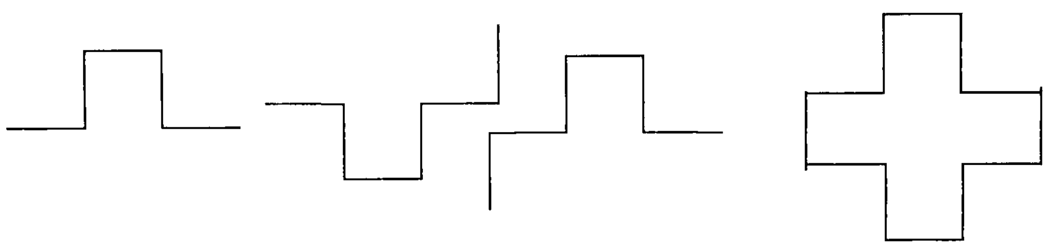
$$P_n = 5^n \times 4 - 8. (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5^2 + 5 + 1)$$

$$P_n = 4 \times 5^n - 2\,(5^n - 1) = 2\,(5^n + 1)$$

Existe en cada caso una estrecha vinculación entre la estructura algebraica de estas fórmulas y la interpretación geométrica de la que provienen. Por ejemplo, en la última expresión se puede realizar la siguiente interpretación:

La figura inicial es el cuadrado.

Cada segmento se divide de modo preciso en 5 segmentos, el resultado se le añade un segmento de enlace y el conjunto se duplica para dar lugar a la figura con una contracción de 1/3.



Esta extraña simetría puede servir de base para determinar exactamente la longitud del perímetro en la etapa n:

$$P_n = 2\left((5/3)^n + (1/3)^n \right)$$

Esta expresión permite a su vez extraer la conclusión de la tendencia del perímetro a infinito. Este último no es sin embargo el único análisis posible. He aquí otro que centra la atención en el número de segmentos de la figura:

$$N_0 = 4$$
$$N_1 = (N_0 - 1) \times 4 + (N_0 - 4) = 5\,N_0 - 8 = 12$$
$$N_2 = (N_1 - 1) \times 4 + (N_1 - 4) = 5\,N_1 - 8 = 52$$
$$N_3 = (N_2 - 1) \times 4 + (N_2 - 4) = 5\,N_2 - 8 = 252$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

de donde se deduce que el perímetro propiamente dicho está regido por la siguiente expresión recurrente

$$P_{n+1} = (5\,P_n - 8)\ \ (1/3)^{n+1}$$

Sea cual sea el discurrir del análisis, la piedra angular de este problema es el establecimiento de la relación existente entre las imágenes geométricas y las expresiones aritméticas o algebraicas que se puedan deducir. En el aula cabe esperar mucha variedad en el establecimiento de tales relaciones, no debiendo constituir un objetivo *exclusivo* la construcción de fórmulas explícitas. Así, una descripción que demuestra *comprender* la estructura de las figuras puede ser meramente verbal, sin demérito matemático alguno:

Cada figura se obtiene desde la anterior quitando el segmento horizontal inferior (la base de la figura), *copiando 4 veces el resultado con giros sucesivos de 90° y añadiendo un enlace que es una cruz a la que se le han quitado los 4 cierres:*

En resumidas cuentas, los polos de interés geométrico del problema son, pues, la recursión, la generalización y en menor medida la inducción. Estos procesos son los que pueden permitir entender cómo interviene el *infinito* en geometría dando lugar a objetos bien definidos que habitan en la mente humana, que se pueden *ver* con la imaginación sin construirlos explícitamente porque su construcción es imposible de realizar.

El establecimiento de la propiedad del límite nulo de potencias de exponente creciente con base más pequeña que la unidad está en la base de los aspectos cuantitativos del problema.

77. EL REPARTO DE LOS PANES

Disponemos de 8 monedas y 8 panes. Existe una tendencia innata a adjudicar o establecer una correspondencia uno a uno entre monedas y panes. Sin embargo esta tendencia engañosa tiende una trampa sutil. Solucionar el problema en este caso consiste en desembarazarse de este prejuicio engañoso.

Cada uno de los personajes de la historia comió 8/3 de pan y consumió 8/3 de moneda, pero el precio del pan no tiene por qué ser la unidad monetaria. De hecho interesa desde el principio distinguir entre *tres* magnitudes distintas cuya relación, desconocida, es la que soluciona el problema jurídico planteado.

Aportaciones			
	panes	monedas	valor
Ben Adán	3	0	?
Ben Barnés	5	0	?
Forastero	0	8	8
Total	**8**	**8**	**?**

Si Ben Adan aportó 3 panes y se comió 8/3 de pan, quiere decir que le sobran, o más precisamente, que aportó netamente a,la comunidad un total de 3 - 8/3 = 1/3 de pan. En cambio Ben Barnés aportó 5 - 8/3 = 7/3 de pan.

Así a Ben Adán le corresponden 7 veces más monedas que a su amigo.

Esta solución ha sido obtenida por un razonamiento puramente numérico, pero también se puede atacar el problema algebraicamente: si 1 pan tiene un valor equivalente a X monedas., entonces cada uno de los tres amigos ha comido por un valor de 8/3 X. El forastero ha pagado 8 monedas, luego el precio justo de los panes en ese mercadillo local es de 8/3 X = 8, es decir de 3 monedas por pan. Así:

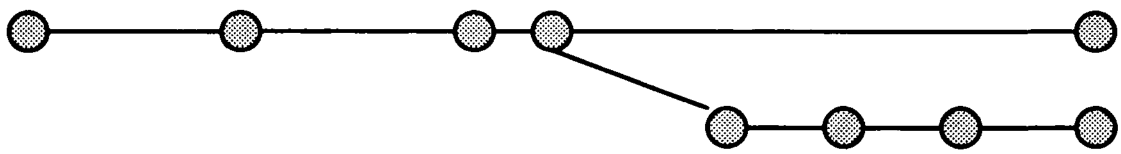
> El valor de lo aportado por Ben Barnés es 5 x 3 = 15 monedas.
> El valor de lo aportado por Ben Adan es 3 x 3 = 9 monedas.

Si los tres hubiesen aportado 8 monedas, que es en dinero a lo que tocan, le sobrarían pues a uno 15-8 = 7 monedas y a otro 9 -8 = 1 moneda.

He aquí una extensión natural del problema: los protagonistas de esta historia son **dos** amigos, **un** forastero, **ocho** panes, **ocho** monedas y **un** juez. Pero, ¿son esenciales o accesorios los números que intervienen? ¿cómo se vería afectado el resultado si varía el número de protagonistas de la historia?. Este tipo de preguntas (¿qué pasaría si ...?) caracteriza la actividad de *investigación* que en este caso se puede abordar con muchas variantes, desde el simple intercambio de los números iniciales por otros, hasta la resolución del problema en una versión más general, interviniendo, por ejemplo, A amigos, cada uno de los cuales trae bajo el brazo un número distinto de panes y F forasteros, cada uno de los cuales trae en el bolsillo un número distinto de monedas.

78. BILLETES

Traza un esquema. Haz algunas pruebas. Tantea la situación. Parte de un caso concreto. Este es el tipo de indicaciones que procedería formular para *empezar* a atacar este problema.



La siguiente fase podría ser una discusión para adoptar ciertas hipótesis simplificadoras que acoten la complejidad del problema. Por ejemplo, inicialmente convendría adoptar la limitación de que la red ferroviaria sea *conexa*, dejando de lado o posponiendo el caso de las redes no conexas.

Asumamos también la suposición de que desde cada estación se pueden expedir billetes a todas las demás, excepto a ella misma.

Razonando inductivamente se puede encontrar una expresión general para el número de billetes que se deben expedir en una red ferroviaria cualquiera de las anteriores características:

Si tiene 5 estaciones, el número de billetes necesarios es 5 x 4 = 20.
Si tiene 10 estaciones el número de billetes necesarios será 10 x 9 = 90
... .
Con n estaciones se requiere un número de billetes que asciende a n x (n-1)

Con esta misma estrategia -analizar casos particulares e *inducir* el caso general- se puede intentar determinar el número de billetes necesarios cuando la red se amplía:

Si una red de 5 estaciones se amplía hasta 7, los billetes necesarios pasarían de 5 x 4 = 20 hasta 7 x 6 = 42. Así pues harán falta 7x 6 - 5 x 4 = 42 -20 = 22 nuevos billetes.

Cuando una red de ***n*** estaciones se incrementa con ***p*** nuevas estaciones, será necesario imprimir ***(n+p) (n+p-1) - n (n-1) = p (2n+p-1)*** billetes nuevos. Por lo tanto debe ocurrir que ***p (2n+p-1) = 120.***

Como ***p*** y ***n*** son números naturales, la ecuación diofántica anterior admite un número reducido de posibles soluciones pues tanto p como (2n+p-1) deben ser divisores de 120. Es factible en consecuencia analizar uno por uno todos los casos que se pueden presentar:

120 nuevos billetes.

120 =	p	2n+p-1	2n = 2n+p-1-p+1	n
1 . 120	1	120	120	60
2 . 60	2	60	59	imposible
3 . 40	3	40	38	19
4 . 30	4	30	27	imposible
5 . 24	5	24	20	10

6 . 20	6	20	15	imposible
8. 15	8	15	8	4
10 . 12	10	12	3	imposible
12 . 10	12	10	-1	imposible

Este razonamiento, que combina la simplificación algebraica con el análisis numérico, resulta demasiado abstracto para la mayoría de los estudiantes y conviene disponer de una aproximación a la resolución del problema que no pase *obligatoriamente* por esta vía, e incluso que la complemente aun en el caso de que esta sea posible para algunos alumnos más o menos aventajados.

Esa vía alternativa es la exploración numérica o *tabulación directa* de la expresión ***(n+p) (n+p-1) - n (n-1)*** para todos los valores de n y de p hasta dar con la solución:

nuevos billetes *(n+p) (n+p-1) - n (n-1)*																				
n / **p**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
2	6 ·	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82
3	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	
4	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116							
5	30	40	50	60	70	80	90	11	110	120										
6	42	54	66	78	90	102	114													
7	56	70	84	98	112															
8	72	88	104	120																
9	90	108	126																	
10	110																			

La construcción de esta tabla requiere paciencia, organización y una calculadora. Sin embargo, constituye un auténtico placer aprender a construir tablas como esta con herramientas más sofisticadas, como una hoja de cálculo. Si se tiene oportunidad de ello, no debe privarse a los alumnos de comprobar la sencillez y rapidez con que efectúa los cómputos la hoja de cálculo.

Otra oportunidad que no debe desaprovecharse es la de explorar las pautas o patrones que presenta la tabla anterior. La exploración de estas pautas permite comprender las leyes que rigen su estructura. Cada fila, cada columna, cada diagonal, diestra o siniestra, oculta una ley numérica relativamente sencilla cuyo descubrimiento permite completar la tabla en cualquier dirección sin necesidad de realizar cómputos complicados.

Aunque esta última técnica sistemática para encontrar la solución es más tosca que la primera, permite, sin embargo y curiosamente, abordar mejor la siguiente cuestión planteada en el enunciado: *¿qué números no pueden jugar el papel del 120 en este problema?*

La respuesta, los números impares, *es obvia por observación directa de la tabla*, pero requiere manipulaciones e interpretaciones algebraicas mucho menos intuitivas si se ataca formalmente:

número de nuevos billetes de una red que se amplía de ***n*** a ***n+p*** estaciones =
$p\ (2n{+}p{-}1)$

Si p es par $p\ (2n+p-1)$ es un número par.

Si p es impar, $p-1$ es par y $(2n+p-1)$ también, de modo que a su vez $p\ (2n+p-1)$ será par. Así $p\ (2n+p-1)$ es *siempre* par. Además, cuando $p=1$, el número de nuevos billetes necesarios es $2n$, por lo que cualquier número par puede aparecer como solución del problema.

Una extensión de este problema es la siguiente: El número 120 genera 4 soluciones distintas. ¿Cuántas soluciones tendría el problema si se ha necesitado imprimir K billetes?. Por ejemplo, si K = 80

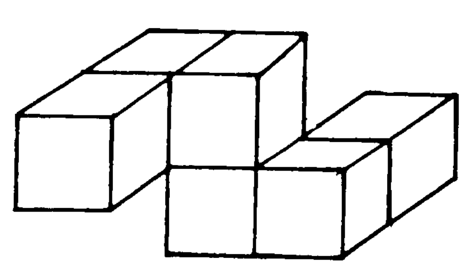
nuevos billetes 80				
80 =	p	2n+p-1	2n	n
1 . 80	1	80	80	40
2 . 40	2	40	39	imposible
4 . 20	4	20	17	imposible
5 . 16	5	16	12	6
8. 10	8	10	3	imposible
10 . 8	10	8	-1	imposible

y existen 2 soluciones distintas al problema.

La respuesta -tantas como divisores impares tenga el número K- es bien curiosa porque se deja describir con facilidad en lenguaje natural, pero no así en lenguaje algebraico. Por ejemplo 1234 =1 . 2 . 617, luego hay dos *únicos* modos de ampliar una red que una vez ampliada requiera 1234 billetes nuevos.

79. El DIVINO POLICUBO

Éste es el único policubo *divino*:



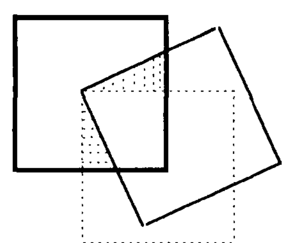
80. ÁREA

Para que la situación sea comprensible resulta conveniente recomendar una simplificación inicial que más tarde se irá removiendo. Esta simplificación debe ser formulada por el *resolutor* del problema, *nunca* debe ser dictada por el profesor. Uno de los posibles procedimientos de resolver este problema es precisamente darse cuenta de que una simplificación del mismo aporta información sustancial sobre el problema originario. Si se da hecha esta simplificación, se está asesinando el problema.

He aquí un ejemplo de replanteamiento simplificado del problema:

Se dispone de dos cuadrados iguales. Uno de ellos tiene un vértice fijo en el centro del otro cuadrado, pero cambia de posición girando sobre su vértice fijo.
¿Qué se puede decir acerca del área común a los dos cuadrados?

Para estudiar lo que ocurre se puede incitar a establecer una comparación geométrica entre las áreas de una posición del cuadrado y la resultante tras un pequeño giro.



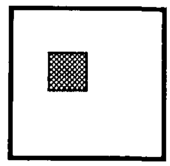
El razonamiento geométrico comparativo concluye que ese área es siempre la misma, independientemente de la posición del cuadrado que gira, es decir la cuarta parte del total del cuadrado móvil que, en esta versión simplificada, es un duplicado del fijo.

La siguiente fase consistiría en intentar extender este resultado a otras situaciones más generales. Se pueden facilitar sugerencias en forma de pregunta:

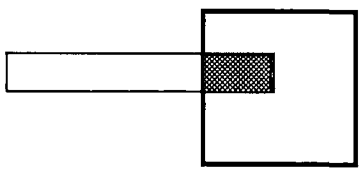
¿Hay situaciones distintas para las que la conclusión anterior siga siendo válida aunque la figura que gira no sea un cuadrado sino un rectángulo?.

Parece obvio que sí. Si la base o la altura, o ambas simultáneamente, del cuadrado móvil crecen la conclusión seguirá intacta. ¡De un caso particular se ha *deducido* la solución para *infinitos* casos!.

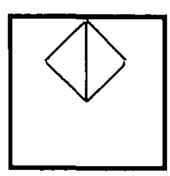
El problema se plantea ahora cuando se acortan la base o la altura, o ambas simultáneamente, del cuadrado móvil. Con la experiencia que se tiene después de estos tanteos no debe ser complicado descubrir algunos ejemplares para los que la respuesta es obvia:



a partir de los cuales de nuevo puede razonarse por extensión de la base o de la altura:



Deviene ahora importante otra cuestión, la de los *límites* de validez de cada una de las situaciones que se ha ido caracterizando hasta ahora. Por ejemplo, este gráfico:



demuestra que la zona sombreada coincide con el área del rectángulo móvil siempre que la diagonal de éste sea menor que la mitad del lado del cuadrado.

Una vez en este punto puede construirse una tabla que recoja todas las situaciones posibles para asegurarse de que no se queda ninguna sin tratar.

Nada obliga a que la descripción del área se haga en términos cuantitativos exactos (aunque puede hacerse). Una solución proporcionada en los términos de la anterior tabla debería ser considerada más que suficiente.

Esta clasificación está basada en descripciones verbales. Pueden hacerse intervenir los números (y deben en algunos casos para dotar de significado a los radicales que aparecen), pero esa es más una cuestión métrica relativamente simple que un verdadero problema.

El objetivo del problema no es tanto completar dicha clasificación exhaustiva, que de todos modos con paciencia se puede obtener, como efectuar *observaciones parciales* que, formuladas en términos descriptivos o de geometría simpléctica, constituyan una especie de teoremas que, de ser completados con cuidado minucioso, podrían conducir a una clasificación exhaustiva que no es del todo necesaria. A continuación se incluyen dos ejemplos.

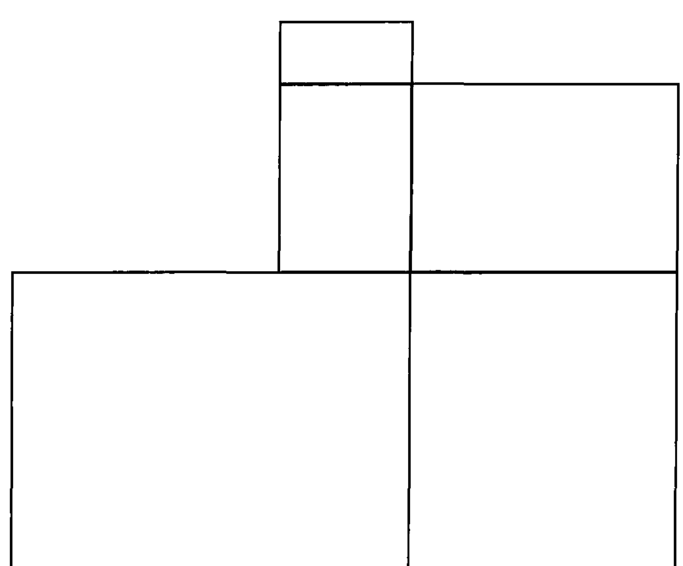
***Teorema ejemplo 1*:**
Si la diagonal del rectángulo móvil es menor que la mitad del lado del cuadrado fijo, entonces el área sombreada coincide con el área del rectángulo.

***Teorema ejemplo 2*:**
Si un lado del rectángulo móvil es mayor que media diagonal del cuadrado y el otro es más pequeño que la mitad del lado, entonces el área sombreada varía entre un valor mínimo (que coincide con el valor de la longitud del lado pequeño y que se alcanza cuando los lados del rectángulo son paralelos a los del cuadrado) hasta un valor máximo (que se alcanza cuando la diagonal del rectángulo coincide con la diagonal del cuadrado).

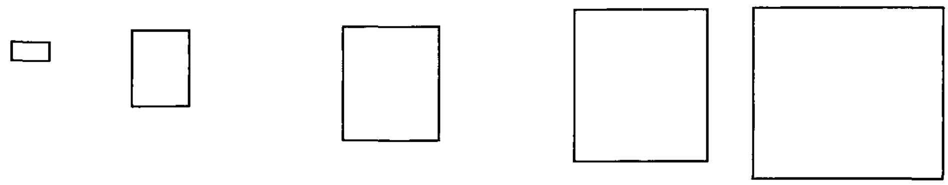
81. FRANK LLOYD WRONG ARCHITECTO

Los problemas genuinos se caracterizan por desconcertar inicialmente a las personas, generando una fuerza de repulsión o resistencia a ser resueltos. Vencer esta resistencia es la primera dificultad que debe ser resuelta al atacar un problema como el que aquí se propone. Por este motivo es de capital importancia que el profesor insista hasta obligar a los estudiantes a diseñar *una* casa, aunque cumpla solo parte de los requerimientos exigidos por el cliente de Frank Lloyd. Estos primeros intentos o pruebas sucesivas permitirán vencer la mencionada resistencia

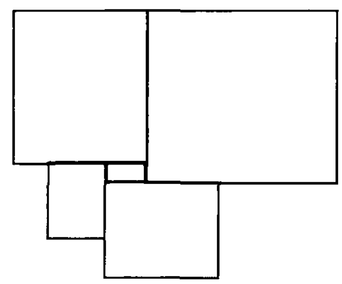
He aquí un primer diseño trazado sin atender más que a las condiciones elementales, con habitaciones de dimensiones 1x2, 2x3, 3x4, 4x5, y 5x6.



Estas primeras aproximaciones se mejoran rápidamente ciñéndose paulatinamente a las condiciones necesarias. Por ejemplo, el propio ayudante de Frank sugiere unas posibles dimensiones para el diseño que podrían iniciar una segunda tanda de tanteos más finos: 1x2, 3x4, 5x6, 7x8, 8x9, 9x10

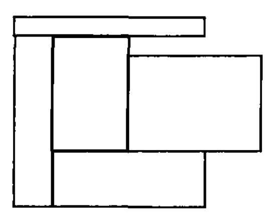


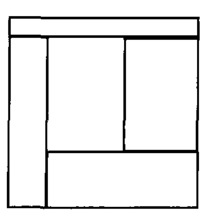
que generan composiciones sensiblemente mejores a las iniciales:



y que demuestran que *tantear es una buena estrategia* que sugiere nuevas ideas: combinando las medidas grandes con las pequeñas *a lo mejor* se compensan las diferencias existentes y se mejora el diseño.

1x10 , 2x9 , 3x8 , 4x6 , 5x7 →





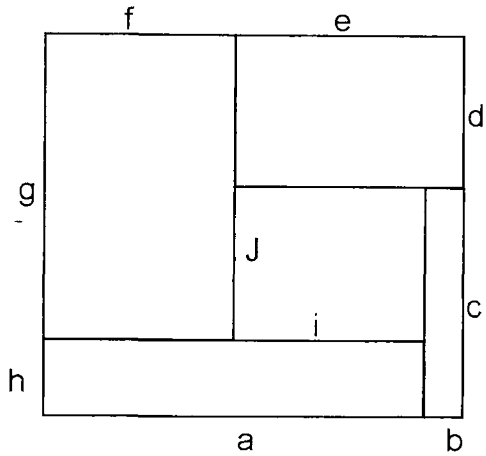
← 1x10 , 2x9 , 3x8 , 4x6 , 4x6

Este último diseño, en el que la pieza 5x7 ha sido sustituida por una segunda habitación 4x6, es particularmente interesante. Cumple el requisito geométrico (está contenida en un cuadrado mínimo) pero no el aritmético (se repiten dimensiones). La diferencia con el diseño deseado es tan pequeña que da pena..., pero sobre todo da pistas.

¿Qué propiedades o relaciones entre las medidas de los lados podrían señalarse si se dispusiese de un diseño solución?.

Supongamos por ejemplo que el diseño cabe dentro de un cuadrado 10x10 (es imposible que la casa quepa en un cuadrado de menor lado) y que tiene la misma estructura que tenía el último diseño construido. Entonces, forzosamente dos rectángulos deben tener un lado en común. Esta observación descarta toda posibilidad de que exista una solución que verifique *todas* las condiciones requeridas y que esté completamente contenida en un cuadrado 10x10.

Examinemos ahora si es posible encontrar soluciones para un cuadrado de lado 11, manteniendo el último diseño básico y dejando indeterminadas las longitudes de los lados.



Salvo movimientos del plano triviales, forzosamente tendrán que verificarse las condiciones $a=10$, $b=1$, $c+d=11$, $e+f=11$, $g+h=11$, $f+i=10$, $d+j+h=11$

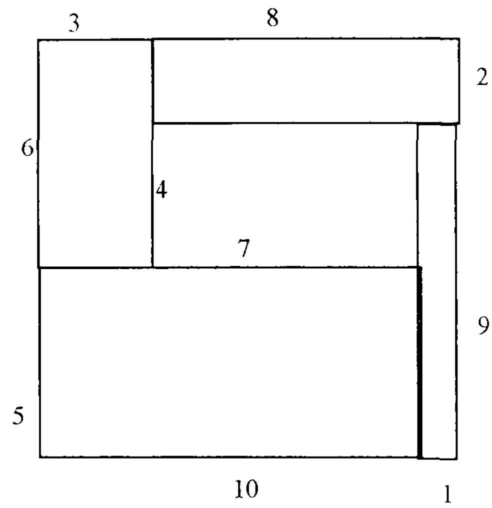
El quid de la cuestión es pues buscar números *enteros* c, d, e, f, g, h y, j que satisfagan las anteriores igualdades, es decir en definitiva se trata de analizar las maneras posibles de sumar ternas y duplas de manera que el resultado sea 11. Cuando se produce este descubrimiento, el problema puede darse por encarrilado. A partir de ahora cabe solamente exigirse un esfuerzo sistematizador para la búsqueda de las soluciones, pero ahora con una estructura que garantiza una indagación con orden y concierto, sustancialmente diferente a los tanteos ciegos del principio. En otros términos, el interés de este problema es *llegar a establecer* la equivalencia existente entre los posibles diseños de la casa y las descomposiciones aditivas de ciertos números.

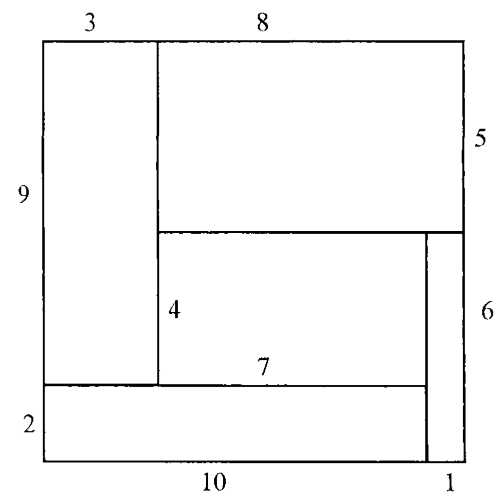
La sistematización del análisis admite muchas técnicas. Una de ellas la de la tabulación secuencial, en la que se van barriendo todas las posibilidades numéricas controlando que se cumplen las condiciones y que no se repita ninguna medida:

c	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**
9	2	8	3	7	4	7	
9	2	8	3	6	5	7	4
9	2	8	3	4	7	7	
9	2	7	4	6	5	6	
9	2	3	8	7	4	2	
...	...	...	...	...	...	...	...
8	3	7	4	6	5	5	
8	3	7	4	6	5	6	
...	...	...	...	...	...	...	...
6	5	8	3	9	2	7	4
...	...	...	...	...	...	...	...
2	9	8	3	7	4	7	
...	...	...	...	...	...	...	...

Hay una correspondencia entre cada fila de la tabla anterior y un diseño para la casa que responde *parcialmente* a las condiciones establecidas.

Las que corresponden a soluciones del problema dan lugar a los siguientes diseños distintos:

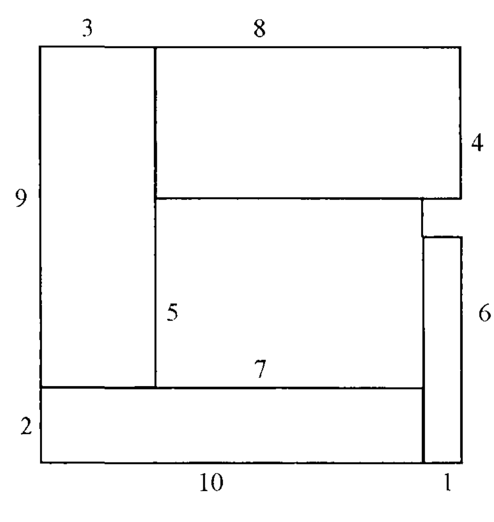




En el proceso de construcción de la tabla anterior se puede observar que existen algunas posibles adjudicaciones de valores numéricos a las longitudes de los lados de los rectángulos que satisfacen *casi* todas las especificaciones. Por ejemplo:

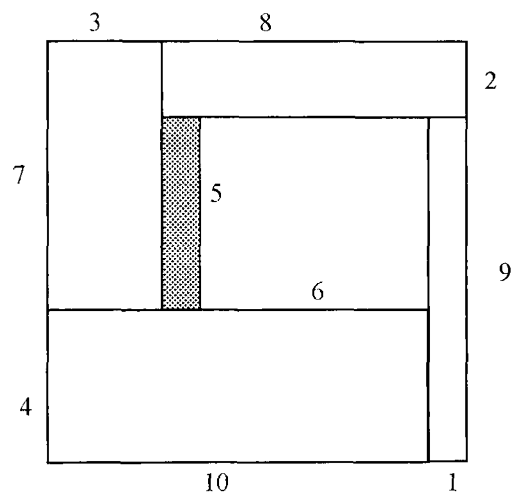
c	d	e	f	g	h	i	j
6	4	8	3	9	2	7	5

da lugar a la casa



que está contenida en un cuadrado de lado 11, que tiene cinco piezas rectangulares y cuyos 10 lados miden exactamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; pero que, y aquí es donde se encuentra la diferencia con las dos soluciones ya señaladas, *no llena* el cuadrado.

Pero una relectura detallada del enunciado del problema debe convencer que no se obliga en ningún momento a que este *relleno* se produzca: en sentido estricto el cliente no excluye la posibilidad de que existan *huecos* (pasillos, armarios empotrados, vestíbulos,...) en la planta de la casa, bien en el borde, como antes, bien en su interior, como en este otro caso:



La responsabilidad de que soluciones de este tipo se hayan perdido se encuentra en la formulación demasiado rígida de las condiciones numéricas

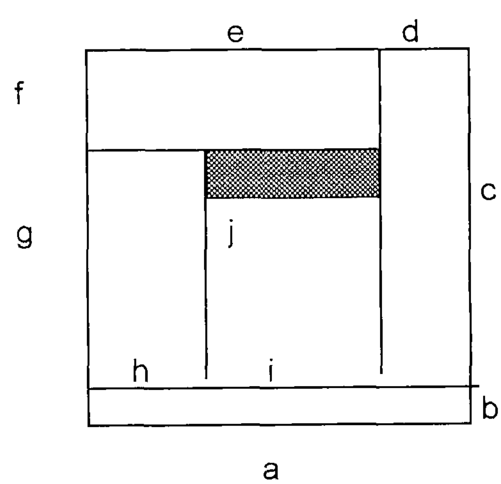
$$a=10,\quad b=1,\quad c+d=11,\quad e+f=11,\quad g+h=11,\quad f+i=10,\quad d+j+h=11$$

que podían haber sido relajadas:

$$a=10,\quad b=1,\quad c+d \le 11,\quad e+f \le 11,\quad g+h \le 11,\quad f+i \le 10,\quad d+j+h \le 11$$

Esta observación abre a su vez una duda retrospectiva: *¿existirá alguna solución con huecos que quepa en un cuadrado de lado 10?*

$a = 10$
$b = 1$
$d+e \le 10$
$f+g \le 9$
$h+i+d \le 10$
$f+j \le 9$



82. SUMA INFINITA

La conclusión, *S no puede ser ningún número* y por lo tanto la suma planteada no tiene resultado, es tan chocante con la experiencia numérica de los estudiantes de secundaria que la tendencia natural al enfrentarse con este problema es suponer que en el razonamiento expuesto se esconde algún error o trampa aritmética que produce el resultado paradójico. Para romper esta suposición es necesario dar un salto conceptual del que solo unos poquitos alumnos están en condiciones de dar y de aprovechar.

$$S = \tfrac{1}{2} + 1/3 + \tfrac{1}{4} + 1/5 + \mathbf{1/6} + 1/7 + \mathbf{1/8} + 1/9 + \mathbf{1/10} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\, S = \tfrac{1}{4} + 1/6 + 1/8 + 1/10 + \ldots$$

$$(S - \tfrac{1}{2}\, S) = \tfrac{1}{2} + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + \ldots$$

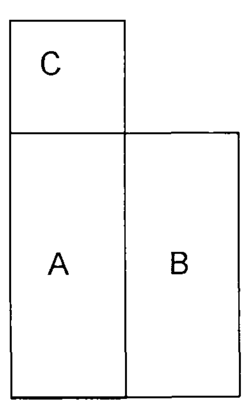
Así:

½ S =	¼	+	1/6	+	1/8	+	1/10	+	1/12	+	1/14	+	1/16	+	...
½ S =	½	+	1/3	+	1/5	+	1/7	+	1/9	+	1/11	+	1/13	+	...

El segundo número de cada columna es siempre mayor que el primero,
S no puede tener asignado *ningún valor* numérico.

83. A PLENO SOL

Sugiérase para este problema que se establezca una comparación entre la vela mayor y la menor, construyendo un modelo *geométrico* :



Razonando sobre este modelo y teniendo en cuenta cómo están relacionadas las medidas de las velas entre sí, puede obtenerse la solución por diversos caminos. Por ejemplo:

$$13 = (\text{superficie vela mayor}) - (\text{superficie vela menor}) = A+B - (A+C) = B - C$$

Como los perímetros de las dos velas son iguales, la base del rectángulo B debe medir lo mismo que la altura del rectángulo C. Esta medida es un número entero. En consecuencia, debe ser un divisor de 13.

84. TABLEROS

La intención del problema es someter *delante del ordenador* a los propuestos a un sucesivo proceso de generalización con la introducción de variables, experimentando con las modificaciones que se producen y buscando una visualización del *concepto* de variable.

El problema se puede resolver, no obstante, sin ordenador, analizando *formalmente* la estructura de los procedimientos, pero lo suyo es hacerlo con alguna versión de LOGO. En el primer caso se puede prescindir del formalismo de la sintaxis del lenguaje de programación y convenir uno cualquiera.

Las sucesivas preguntas que se formulan en el enunciado constituyen un lento proceso de generalización cuyo objeto es familiarizar al usuario con los parámetros de los procedimientos que hay que ir cambiando para adaptarlos a las circunstancias demandadas en el problema.

A continuación se presentan dos de las soluciones requeridas:

*Tablero de **:F filas** y **:C columnas***
*con casillas rectangulares de **base :B** y **altura :A**.*

```
SEA RECTÁNGULO :A :B
REPITE 2 [AVANZA :A  DERECHA 90 AVANZA :B DERECHA 90]
FIN

SEA FILA :A  B:  :C
REPITE :C  [RECTÁNGULO :A :B DERECHA 90 AVANZA :B
IZQUIERDA 90]
IZQUIERDA 90 AVANZA :C * :B  DERECHA 90
FIN

SEA  TABLERO :A  :B  :C  :F
REPITE :F [FILA :A  :B  :C  RETROCEDE :A]
AVANZA :F * :A
FIN
```

*Tablero de **:F filas** y **:C columnas** con casillas **TRIANGULARES** de **base :B** y **altura :A**.*

```
SEA TRIÁNGULO :L
REPITE 3 [AVANZA :L  DERECHA 120]
FIN
```

```
SEA FILA :L  :C
REPITE :C  [TRIÁNGULO :L  DERECHA 120 AVANZA :L IZQUIERDA
120]
IZQUIERDA 120 AVANZA :L*:C  DERECHA 120
FIN

SEA TABLERO :L  :C  :F
REPITE :F [FILA :L  :C  RETROCEDE :L]
AVANZA :F * :L
FIN
```

85. BORGES Y EL LADRÓN SOÑADO

La interpretación del enunciado conduce con relativa facilidad a plantear la cuestión en términos numéricos: el número soñado es el *producto de dos números naturales que suman 398*. El desconcierto se produce cuando se empieza a comprender que hay muchas parejas de números -exactamente 399- que cumplen tal condición y por lo tanto hay muchos posibles números soñados por Borges. Este desconcierto proviene de la creencia sólidamente establecida implícitamente, probablemente como consecuencia de la experiencia adquirida, de que los problemas tienen que tener solución y ésta tiene que ser única.

Otra cosa es que, de entre todos los números posiblemente soñados - 0, 397, 792, 1185, 1576, 1965, 2352, 2737, ...- pueda haber alguno con propiedades especialmente relevantes.

En efecto, uno y sólo uno de ellos, el 39601, habría permitido a Borges saber *con precisión* qué volumen robó el ladrón, el 200.

Claro que, los que conocemos algo de Borges y su obra, no podemos dejar de descartar la posibilidad de que el universal argentino soñara -en realidad tuviera pesadillas- con 1965, número ordinal de un año en que nada publicó. Y eso aun a costa de *saber* que un ratero *sabría* el número soñado por el gran Borges, mientras que él tendría que conformarse con la duda, insufrible para un enciclopedista, de si el ladrón se llevó el volumen VI o el volumen CCCXCIV.

86. INVESTIGA CON LA CALCULADORA

El objetivo básico de este problema es analizar un algoritmo del que se desconoce su misión. La investigación puede desarrollarse en varias fases.

La *primera* de ellas, accesible a *todos los estudiantes*, es la exploración o realización de pruebas con números particulares para acumular datos sobre su funcionamiento. La estrategia más eficaz para atacar esta fase exploratoria consiste en distribuir a la clase en parejas, cada una de las cuales lleva a cabo comprobaciones con valores de N y M variados, de modo que en relativamente poco tiempo se puede disponer de un banco de datos respetable. Los principales obstáculos a vencer en esta fase son la comprensión de las instrucciones del algoritmo -especialmente la vuelta atrás de la etapa 7-, la organización de los cálculos para que se puedan ejecutar con rapidez y seguridad, y la toma de decisión que comporta parar los cálculos porque nuevas *iteraciones* ya no aportan nada.

1	2	3	4	5
N	M	N/M	2 + 3	4/2
100	200	0'5	200'5	100'25
	100'25	0'9975	101'247	50'62
	50'62	1'97	...	...

La *segunda* fase consiste en la observación concienzuda de los resultados obtenidos en la primera fase, esto es, en definitiva de las ternas (N,M,R) en donde R es el valor de la columna 5 *cuando se estabiliza*. Esta es la primera y más importante de las observaciones que cabe realizar de la aplicación del algoritmo: *después de algunas iteraciones, el valor de la columna 5 se estabiliza*. La exploración de estas ternas a la búsqueda de alguna pauta o comportamiento numérico reseñable debe realizarse mediante una puesta en común de los cálculos efectuados en cada grupo. Comporta también un problema de organización de datos, es decir de estructuración de los resultados para aumentar la eficacia de la observación. La técnica aplicada en concreto -una tabla de doble entrada, una lista de los cálculos con el mismo valor de N ordenada para valores de M o cualquier otra- puede dejarse al arbitrio de la creatividad del grupo. El caso es que permita la formulación, como consecuencia de la observación, de hipótesis sobre qué hace el algoritmo. Por ejemplo:

El resultado R no depende del valor M que influye sólo en que la estabilización se produzca más o menos pronto.

La *tercera* fase consistiría en la comprobación con nuevos cálculos de la consistencia de las hipótesis de trabajo formuladas en la segunda fase, que serían refutadas definitivamente o confirmadas *experimentalmente*.

Alcanzar esta tercera fase, desentrañando qué hace el algoritmo, sería suficiente para la mayoría de los estudiantes. Unos pocos, sin embargo, podrían abordar una *cuarta fase* más profunda, tratando de *justificar*, con las indicaciones que considere oportunas el profesor, *por qué* hace lo que hace, que se supone ya ha sido descubierto. El argumento a desgranar sería un desarrollo más o menos del siguiente: Si se produce estabilidad en el valor de M es porque después de algunas iteraciones $M + N/M = 2M$, de modo que $N=M^2$.

Una extensión del problema, es decir una *quinta fase* de desarrollo de la investigación, sería la exploración del algoritmo relajando alguna de las condiciones que explícita o implícitamente se hayan asumido en las fases anteriores. Por ejemplo, se puede dar por seguro que, sin declararlo explícitamente, las cuatro fases anteriores se desarrollarán calculando y razonando con *números positivos*. ¿Qué ocurrirá entonces con R cuando alguno, o ambos, de los valores N y M son negativos?.

87. LA GENÉTICA DE LOS APELLIDOS

El contexto presentado en este problema es una adaptación de la *ley genética de Hardy-Weinberg* (véase ENGEL (1988), Vol. II, pág. 135 y siguientes para una amplia discusión sobre esta ley). Después de la lectura detenida del enunciado, sugiérase inmediatamente la construcción de una versión simplificada sobre la que se pueda razonar con mayor comodidad, posponiendo la versión integra hasta después de encontrar alguna pista.

Esta actividad de simplificación forma parte del problema y debe ser orientada, pero nunca dictada, por el profesor. Si bien estas versiones simplificadas pueden diferir de unos grupos a otros, una formulación que se puede aspirar a alcanzar -lo bastante *simple* como para que sea atacable, lo bastante *compleja* para que no se pierda la esencia del problema- oscila generalmente alrededor de la siguiente idea:

En la generación 0 habrá muchos individuos con dos y solo dos tipos de apellidos, varones o hembras, en la misma proporción. Por ejemplo, tenemos personas que se apellidan **A**B y personas que se apellidan **C**D (en negrita el primer apellido). ¿Qué pasará en sucesivas generaciones con los apellidos de la población?.

Para realizar el estudio, puede recomendarse que se analice generación a generación la evolución de los apellidos. Las tablas de doble entrada son las estructuras más cómodas para organizar los datos:

Generación 1

		PADRE	
	HIJOS	**A**B	**C**D
	AB	**AA**	**CA**
MADRE	**C**D	**AC**	**CC**

Así los apellidos en la primera generación se distribuyen a partes iguales entre **AA**, **AC**, **CA** y **CC**. Algunas combinaciones de apellidos desaparecen y aparecen otras nuevas que no existían inicialmente.

Generación 2

		PADRE			
	HIJOS	AA	AC	CA	CC
MADRE	AA	AA	AA	CA	CA
	AC	AA	AA	CA	CA
	CA	AC	AC	CC	CC
	CC	AC	AC	CC	CC

Así los apellidos en la *segunda* generación se distribuyen a partes iguales entre **AA**, **AC**, **CA** y **CC**. Esto es, la distribución es la misma que en la primera generación y será ya la misma en adelante. Esta es la ley (versión simplificada) de *Hardy-Weinberg*.

Esta conclusión se puede obtener con casi la misma sencillez razonando inductivamente para cualquier colección de nombres de partida en la generación 0, siempre que estén equidistribuidos los primeros apellidos.

Hasta aquí se obtiene una solución razonablemente completa del problema. Si se desea una investigación más profunda se puede repetir el estudio, removiendo la hipótesis de equidistribución de apellidos en la población inicial. Se supondrá ahora que las personas con apellido **AB** están en la proporción **p** y que las personas **CD** alcanzan una proporción **1-p** en la población, independientemente de su sexo. Como ejemplo, se incluye ahora la tabla que correspondería al análisis de la segunda generación que, claro está, presupone realizado el estudio en la primera generación:

Generación 2

		PADRE			
	HIJOS	AA p^2	AC $p\,(1-p)$	CA $p\,(1-p)$	CC $(1-p)^2$
MADRE	AA p^2	AA p^4	AA $p^3\,(1-p)$	CA $p^3\,(1-p)$	CA $p^2\,(1-p)^2$
	AC $p\,(1-p)$	AA $p^3\,(1-p)$	AA $p^2\,(1-p)^2$	CA $p^2(1-p)^2$	CA $p\,(1-p)^3$
	CA $p\,(1-p)$	AC $p^3\,(1-p)$	AC $p^2\,(1-p)^2$	CC $p^2(1-p)^2$	CC $p\,(1-p)^3$
	CC $(1-p)^2$	AC $p^2\,(1-p)^2$	AC $p\,(1-p)^3$	CC $p\,(1-p)^3$	CC $(1-p)^4$

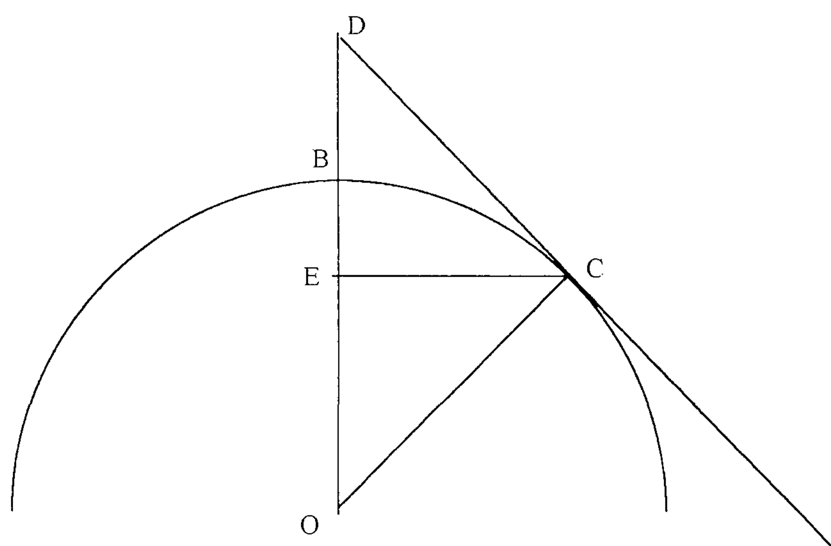
Así, por ejemplo, el apellido **AA** aparecerá en la segunda generación en una proporción igual a

$$p^4 + p^3\,(1-p) + p^3\,(1-p) + p^2\,(1-p)^2 = p^2\;\left(p^2 + 2\,p\,(1-p) + (1-p)^2\right) = p^2$$

es decir, también en este caso más general se verifica la ley de mantenimiento de la distribución de las frecuencias a partir de la segunda generación y para siempre.

Finalmente, si se desea, se puede remover la hipótesis de equidistribución de los apellidos por sexos. Las conclusiones son invariantes.

88. LA LÍNEA DEL HORIZONTE



Construir un modelo geométrico. Razonar sobre triángulos rectángulos y sobre la circunferencia. Buscar figuras semejantes. Establecer relaciones entre las longitudes de los lados de triángulos. Búsqueda de datos sobre medidas significativas como el diámetro de la Tierra. Estos son los procedimientos básicos que pueden utilizarse para resolver el problema.

La distancia buscada puede interpretarse de dos modos diferentes.

El primero, como distancia visual desde el ojo del observador hasta el horizonte, en la figura el segmento CD. El segundo, como la longitud del arco BC. La determinación de ésta última es técnicamente algo más compleja, pero la otra está al alcance del estudiante medio:

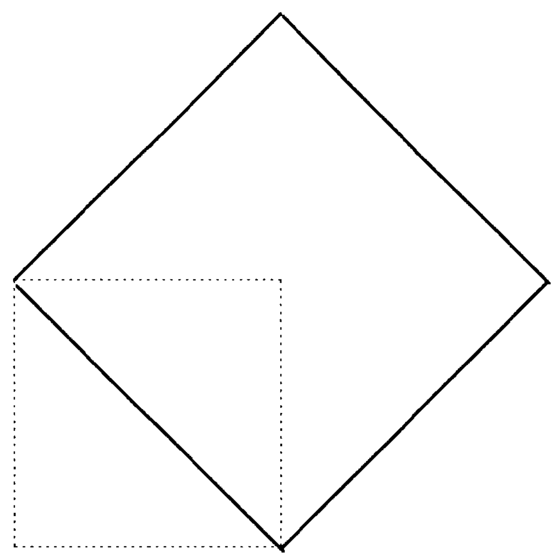
C es un ángulo recto. Entonces OCD es un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras entonces,

$$CD^2 = OD^2 - OC^2$$

OC es el radio de la Tierra. OD es esa misma longitud añadiendo la altura de la persona que mira al horizonte. Ambos, pues, datos conocidos a partir de los que se determina la distancia máxima *en visual* al horizonte. La conclusión más sorprendente, el horizonte no está a la misma distancia de todo el mundo. Está más cerca de los bajitos.

89. LA DUPLICACIÓN DEL CUADRADO

Déjese actuar al estudiante sin ninguna, absolutamente ninguna, indicación. Y téngase paciencia.



Quinta parte

EJEMPLOS DE PROGRAMACIONES

90. INTRODUCCIÓN

En esta parte presentamos una colección de memorias que describen cómo y con qué criterios han sido utilizados los materiales de matemáticas por distintos profesores en diversos centros que imparten Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana.

Estas memorias se transcriben tal y como fueron redactadas como colofón a la fase de seguimiento de un curso de orientación destinado a los centros que impartían por primera vez las nuevas enseñanzas de la LOGSE. Hemos considerado conveniente la inclusión de una selección de las mismas en este libro del profesor por varios motivos:

- Este es un libro para el profesor y no hay nada profesionalmente más interesante para un profesor que la oportunidad de examinar cómo explotan otros profesores unos materiales determinados.

- Sugieren modelos de distintas interpretaciones y adaptaciones del mismo cuerpo de materiales para el alumno.

- Ejemplifican, en algunos casos, las virtudes de sustituir el concepto de programación de curso por el de programación de ciclo, añadiendo grados de libertad y flexibilidad a la utilización de los materiales.

- Presentan valoraciones generales sobre los propios materiales y sobre los resultados concretos que se han obtenido en los grupos donde han sido utilizados.

- Exponen en la práctica cómo han diseñado profesores concretos sus propias estrategias en asuntos tan relevantes como la metodológia, la evaluación o el uso de recursos didácticos.

- Describen en algún caso los contextos educativos (circunstancias del Centro de Enseñanza, características del Seminario o Departamento de Matemáticas, acuerdos adoptados por los equipos docentes, ...) que directa o indirectamente han influido en la puesta en práctica de los materiales.

- Traslucen cómo se altera sutilmente el equilibrio entre todos los factores del proceso educativo (la toma de decisiones, la planificación, la fijación de criterios de evaluación,...) como consecuencia de la utilización de unos materiales que presuponen una diversificación de los métodos de trabajo en clase, una atención a todas las posibilidades expresivas de los estudiantes y una ampliación de los instrumentos necesarios para la evaluación y el control del proceso educativo.

A la hora de examinar las memorias seleccionadas, el lector debe tener en cuenta algunas de sus características que, de no ser tenidas en cuenta, podrían alterar parcial o totalmente su significación. A saber:

- Son transcripción directa de un trabajo que, cuando fue realizado por sus autores, no estaba destinado a la publicación. En consecuencia, el estilo podría haber sido refinado y el contenido completado si se hubiese dado la oportunidad de hacerlo. No obstante, hemos preferido la frescura del estilo directo que exhiben.

- Suficientemente informativa, de otras muchas y muy variadas presentadas como requisito del curso de formación ya mencionado. En todo caso abarcan unos modelos relevantes de trabajo que parecen sugerir los materiales para el alumno.

- Originariamente las memorias contenían reproducción de cuadernos de trabajo de uno o dos alumnos. A pesar de el enorme interés -pues muestran el trabajo en el aula con todas las características observables en un cuaderno: la expresión escrita, y su evolución, los trabajos y los aprendizajes de los alumnos- de esos cuadernos, no es este el lugar más adecuado para incluirlo.

- Una de ellas es una memoria valorativa de todo el primer ciclo de la ESO, conteniendo las programaciones del primer y segundo curso de la etapa.

- Otra abarca conjuntamente el tercero y cuarto curso programado por el mismo mismo profesor en el mismo centro en dos años sucesivos.

- Hay también una de tercero y una de cuarto redactadas por distintos profesores pertenecientes a distintos centros.

- Hay una de tercero y otra de cuarto redactadas por profesores diferentes del mismo centro en cursos consecutivos. Una de ellas viene completada con una muestra del trabajo de los alumnos.

Finalmente, los autores de este libro queremos dejar constancia de la consideración positiva que nos merecen todas las memorias que hemos seleccionado aunque no necesariamente compartimos todo lo que se dice en todas y cada una de ellas. En conjunto muestran el fruto que pueden dar de sí, o al menos el que han dado bajo unas circunstancias concretas, los materiales que se comentan en este libro del profesor.

Dejamos para los lectores la extracción de valoraciones y de comentarios más detallados de unos textos que son densos en ideas y, sobre todo, que están muy próximos a la realidad cotidiana del aula.

91. VALORACIÓN GLOBAL DEL PRIMER CICLO

MATEMÁTICAS : PRIMER CICLO DE E. S. O.

VALORACIÓN GLOBAL

NÚCLEO DE ALICANTE. JUNIO 1991

Mª. Isabel Amengual Ruiz. C.P. "Lucentum". Alicante.
Mª. Cruz Pascual Gimeno. C.P. "Monte Benacantil". Alicante

PLANTEAMIENTO PREVIO

EN EL EQUIPO DE TRABAJO:

- Como equipo nos planteamos en común:
. La elección de los objetivos de aprendizaje.
. La toma de decisiones acerca de los métodos de trabajo y la elección de las actividades.
. El enfoque sobre la evaluación y coevaluación de todo el proceso.

CON LOS ALUMNOS:

- Al comienzo del curso realizamos una sesión informativa sobre:
. Los objetivos de aprendizaje.
. Nuevos métodos de trabajo.
. Presentación de las actividades.
. Aclaraciones sobre evaluación: Aspectos que se van a evaluar y procedimientos que se van a seguir para llevar a cabo esta evaluación.
. La autoevaluación y su importancia.
- Se plantea la necesidad de conocer los preconceptos que aporta cada alumno para, si son correctos ir construyendo a partir de ellos, y si son erróneos ir modificándolos desde los propios errores. También comienzan con una carga de hábitos, actitudes, procedimientos, etc., que es necesario saber. Por todo esto el primer paso será una EXPLORACIÓN INICIAL con suficiente amplitud para que nos proporcione toda la información necesaria. Utilizamos para ello las actividades del bloque "PARA COMENZAR".
A la vez realizamos la exploración estas actividades sirven para iniciar a los alumnos en la nueva dinámica de la clase.

PROCESO DE TRABAJO

- Una vez situados los alumnos en la realidad propia y del grupo, comenzaron el proceso activo mediante el cual han ido construyendo su propio aprendizaje. Para lograrlo han tenido que analizar, enfrentar y relacionar cada nuevo contenido con los anteriores

elementos que figuran en su propia estructura cognoscitiva: matizarlos, ampliarlos y formularlos.
El proceso de construcción llevado a cabo ha sido activo e interrelacionado. Para lograrlo hemos elegido previamente, mediante un análisis de las mismas, y utilizando después las actividades que hemos considerado más idóneas del bloque A.
- A lo largo del proceso, cada alumno debía tener elementos de juicio suficientes para analizar, en cualquier momento, cual era su situación dentro de su aprendizaje personal. Esta información la han ido obteniendo a través de: los informes y comentarios, orales o escritos, que les proporcionamos en la revisión de sus trabajos; la coevaluación y la autoevaluación. Es quizás este uno de los aspectos que, por su importancia, más nos preocupa y mayor novedad representa para nuestros alumnos. Les ha costado mucho convencerse de que las evaluaciones que ellos hacen de sus actividades son tenidas en cuenta, aceptadas en sus autoevaluaciones, y comentadas y analizadas en las sesiones de coevaluación. El enfrentarse a su realidad les hace aceptar mejor, y hasta solicitarlas en algunas ocasiones, las soluciones que se les ofrecen en situaciones de necesitar algún tipo de esfuerzo.
Una vez analizada la situación personal de cada alumno y vista su realidad, se negociaba con ellos una propuesta de actividades distintas, enfocadas a las necesidades de afianzamiento en unos y a cubrir expectativas en otros. Estas actividades han sido seleccionadas del bloque B y su realización es individual y gradual.

DIFICULTADES ENCONTRADAS EN TODO EL PROCESO:

- Fuerte arraigo en los alumnos de planteamientos matemáticos encaminados a la búsqueda de soluciones numéricas; restando importancia al análisis del planteamiento y al proceso general.
- Pobreza de vocabulario, lo que conlleva dificultades en la comprensión de enunciados y en la expresión de las propias conclusiones o en la explicación de un proceso.
- Problemas de adaptación a la dinámica de la clase con escasa participación en un principio, presentándose como típicas las siguientes situaciones:
. Bloqueo ante una actividad al no encontrar una respuesta inmediata.
. Falta de seguridad al defender los propios criterios.
. Problemas para expresar las conclusiones a las que se llegan en la realización de una actividad.
. Escasa habilidad para trasladar los resultados concretos a un marco más amplio.
.Igual situación se presenta al intentar aplicar los conocimientos adquiridos en clase a otros contextos.

TRATAMIENTO DADO A LAS DIFICULTADES PLANTEADAS:

La dinámica seguida en clase, por nuestra parte, para superar las dificultades planteadas, se centra en los siguientes objetivos:
. Valorar los aspectos activos y la participación tanto en el seguimiento diario de la clase como en los procesos de evaluación y coevaluación.
. Encaminar la clase hacia una dinámica que favorezca la expresión y la participación.
. Fomentar las actitudes encaminadas a superar las dificultades.
. Trabajar continuamente la lectura comprensiva.
. Demostrar la necesidad de una utilización adecuada del vocabulario con actividades que han puesto de manifiesto esta necesidad.

. Hacer hincapié en la expresión escrita u oral de procesos seguidos y conclusiones a las que se ha llegado.
. Afianzar la seguridad de que lo importante es intentar encontrar un camino hacia la solución, más que dar inmediatamente con ella.
. Asegurar la creencia de que varios enfoques o criterios pueden llevar a una solución.
. Contribuir a la dinámica integral y participativa de todos los miembros de un equipo, valorando las distintas intervenciones.

En general, crear en la clase un ambiente acorde con la metodología a seguir y a los objetivos propuestos.

DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA SEGUIDA:

- Aspectos en que se basa:
. La metodología se centra principalmente en la actividad del alumno.
. Parte de los conocimientos que el alumno posee.
. Estos conocimientos permiten la adquisición de nuevos aprendizajes mediante planteamientos concretos.
. Modifica el enfoque tradicional de las matemáticas, centrado en la obtención de resultados, y se fija en el proceso.
. El trabajo se encamina más hacia el aprendizaje de habilidades de tipo general, aplicable a varias situaciones, que a las que solo son válidas para un caso concreto.
. Se hace hincapié especial en el vocabulario específico y en la expresión tanto oral como escrita de todo el proceso.
. Se fomenta la participación, mediante la discusión y el debate tanto de las opiniones, como de las estrategias y resultados.
. Se presta especial atención a la adquisición de habilidades y hábitos de trabajo.

- Realización práctica:
Aunque la metodología aplicada ha sido distinta según la actividad, hay aspectos comunes:
. Lectura individual y silenciosa de la actividad.
. Preguntas y aclaraciones en gran grupo sobre la lectura.

Dos son las líneas metodológicas más utilizadas:

a) . Juegos por parejas, equipo o gran grupo.
. Al finalizar emitir conclusiones.

b) . Hipótesis individuales.
. Discusión en el equipo.
. Comprobaciones.
. Conclusiones en el equipo.
. Puesta en común.

VALORACIÓN DE LA METODOLOGÍA:

Consideramos que los aspectos en que se basa la metodología son positivos en sí mismos ya que recogen todos los fundamentos de la enseñanza activa basada en un modelo de

aprendizaje constructivista centrado en los intereses y necesidades de los alumnos, favoreciendo la cooperación grupal y la elaboración y defensa de los propios criterios en los debates.
Es precisamente la gran riqueza que se puede extraer de esta forma de trabajo la que nos lleva a constatar el mayor de todos los problemas con que nos enfrentamos: la falta de tiempo. Tiempo para que los alumnos puedan llegar a sacar conclusiones, después de un análisis en profundidad de las distintas actividades. Con sólo tres sesiones semanales es del todo imposible lograrlo. Son muchas las veces que han de dejar un proceso mental inacabado con la consiguiente pérdida de su valor o tienen que acelerarlo por lo que lo único que se consigue es que se acepte, sin más, la primera solución que se aporte. Para que esta metodología sea del todo positiva es necesario que se respete el ritmo y el proceso mental de los alumnos, con el fin de poder concretizar, en logros matemáticos, el amplio abanico de posibilidades que se abren con las distintas actividades.
Hasta ahora se trabajaba el automatismo como principal objetivo, con lo cual no estamos de acuerdo. Pero ahora consideramos que ese automatismo no llega a lograrse. Es totalmente falso partir de la base de que los alumnos hayan adquirido en 6º el dominio de, por ejemplo, los números decimales y fracciones: ni su significado, ni su cálculo, ni su utilización en las distintas operaciones. Esto se pone de manifiesto continuamente cuando no consiguen resolver una actividad, no porque no sepan qué hacer sino porque no saben cómo se hace. Algo similar ocurre con los fundamentos básicos de la resolución de ecuaciones y sistemas en Álgebra. Está clara la necesidad de afianzar esos automatismos, pero se continúa con el problema de la falta de tiempo.
Esta metodología favorece el proceso de los alumnos con más amplias capacidades, permitiéndoles desarrollarlas de forma individual y participativa. Aquellos alumnos que se van quedando rezagados el problema con el que se enfrentan es la acumulación de fichas y la necesidad de un tratamiento individualizado; para que ese tratamiento sea efectivo es necesario un seguimiento de cada alumno y de las carencias que tiene hasta que consiga superarlas. Este seguimiento es muy difícil de llevar al no disponer de un horario más amplio.
Estamos convencidos de que una vez logremos superar estos primeros años y teniendo ya un conocimiento más profundo de las posibilidades que encierra esta forma de trabajo, los logros serán mucho más alentadores.
Lo que sí es cierto es que los alumnos han logrado cambiar por entero el concepto que tenían de que las matemáticas son aburridas, por el de aprender entreteniéndose. El trabajo realizado en equipo, ha fomentado el concepto de grupo y ha permitido que se desarrollasen muchas capacidades que nunca habrían aflorado en el ambiente tradicional: investigación, análisis, debates, defensa de las propias ideas, contraste de opiniones, comprobaciones.

MATERIALES

PARA EL PROFESOR:

En los "Comentarios para el Profesor" hemos echado en falta una mayor claridad y profundidad a la hora de marcar los objetivos que se intentaban conseguir con las distintas actividades. Gracias a las reuniones de seguimiento con el Asesor y del trabajo en equipo, muchas dudas han quedado aclaradas y la planificación se ha realizado en base a pautas y criterios comunes. Pero esto no habría sido posible si hubiéramos contado tan solo con los "Comentarios" escritos. Algo similar nos ha ocurrido con las soluciones de

algunas de las actividades, al no tener claro el objetivo hemos intentado hallar las soluciones que creíamos más adecuadas encontrándonos en ocasiones en callejones sin salida porque había algún error en el planteamiento, lo que habríamos detectado previamente si hubiéramos tenido clara la meta.
Sugerimos que se perfeccionen estos "Comentarios para el Profesor" sobre todo frente a esa segunda fase obligatoria en la que tiene que tomar parte todo el profesorado y no se va a contar con un asesoramiento directo.

PARA LOS ALUMNOS:

- En cuanto a la recepción de los materiales ha sido muy distinta la situación de este curso respecto al anterior. Durante el curso pasado el material del alumno llegaba después de haber tenido que utilizarlo y eso hacía que el profesorado tuviera que ir fotocopiando, sobre la marcha, aquello que necesitaba. La dificultad de tener que hacer las fotocopias, con la consiguiente pérdida de tiempo, se veía agravada con el costo de las mismas y el problema adicional de que en los centros no disponemos de la maquinaria adecuada para realizar, en condiciones óptimas, tan amplias tiradas. Todo lo cual hacía que se intentara escatimar el número de fichas uniendo en una misma hoja varias actividades con lo que el alumno se limitaba a la hora de plasmar opiniones o trazar distintas estrategias.
Este problema ha sido subsanado este curso con el envío del material correspondiente al 2° de E.S.O. en su momento, y el almacenaje efectuado el curso anterior del concerniente al 1° de E.S.O. Permitiéndonos así el poderlo analizar y experimentar en su formato original.

- ANÁLISIS FORMAL:

Las actividades presentadas a los alumnos para el desarrollo de la programación de Matemáticas de los niveles de 1° y 2° de E.S.O. constituyen, en su conjunto, un material atractivo y bien acogido por los alumnos y alumnas, ya que ofrece unas características que, tradicionalmente, no han tenido los textos y actividades empleados para la enseñanza de las Matemáticas.
Tiene una presentación atractiva, ilustrada de forma sencilla que, en ocasiones, resulta hasta graciosa y conecta muy bien con los intereses de los alumnos de esta edad y rompe con la imagen de seriedad mal entendida que acompañaba a esta materia.
En la misma línea de ruptura de estereotipos que han acompañado a las Matemáticas, este material ofrece una dimensión lúdica y divertida, liberándola de la consideración de materia pesada y aburrida.
Deberían cuidarse mucho más la expresión y el vocabulario en los enunciados de las actividades. A veces resulta mucho más difícil la comprensión de los mismos que su resolución. Es cierto que el nivel de comprensión lectora de nuestros alumnos es algo bajo pero, precisamente por eso hemos de intentar que les resulte sencillo entender lo que se les quiere decir para no terminar convirtiendo la clase de Matemáticas en sesiones de lectura comprensiva.
El hecho de que las actividades planteadas tengan una resolución breve bien delimitada, limitada a una sola hoja, confiere al material un carácter concreto y práctico, permitiendo al alumno/a, captar rápidamente el sentido de aquello que está aprendiendo; sentido práctico que se acentúa y que permite una buena secuenciación de la programación y una buena distribución del tiempo en clase.

La estructura formal del material, favorece la adquisición de unos determinados hábitos de trabajo, que no tienen por qué caer en la rutina, al poderse alternar con otras propuestas lúdicas o proyectos de grupo.
El carácter práctico de las situaciones planteadas, recogidas en muchos casos de momentos de la vida cotidiana y, en otros, de utilidad ciudadana, permite al alumno captar rápidamente el sentido de aquello que está aprendiendo.

- ANÁLISIS DEL CONTENIDO:

Creemos que, en su gran mayoría, potencia la discusión en equipo, la diversidad de estrategias para hallar una solución, la defensa de los propios descubrimientos. En definitiva influye, positivamente, en el desarrollo de las capacidades del pensamiento lógico y crítico.
Favorece la comprensión de aquello que está aprendiendo, no siendo ya prioritario, el estudio de las matemáticas como aplicación sistemática de algoritmos.
El aspecto anterior, teniendo una vertiente muy positiva, ofrece también una faceta negativa, y es el hecho de que determinados objetivos, relacionados con el desarrollo de destrezas y habilidades, que requieren repetición para su logro, no se adquieren porque las actividades que las trabajan no son numéricamente suficientes. Creemos muy necesario el reforzar esta faceta sobre todo para aquellos alumnos que se van quedando rezagados por tener un ritmo más lento o menor nivel.
Algunas de las actividades son excesivamente largas a la hora de su resolución y sin embargo poco ricas en cuanto a potenciar la discusión o llegar a conclusiones generales. Otras, por el contrario, insisten en objetivos fáciles de conseguir pero difícil de evaluar, a nivel concreto e inmediato, la calidad de sus logros. Aunque sea posible que a medio o largo plazo, hayan servido para el logro de objetivos más amplios.
En el apartado de conocimientos, el carácter práctico del material, permite al alumno encontrar el sentido de los que aprende pero, en ocasiones, no se le provee o no quedan asegurados los conocimientos previos que la actividad requiere, con lo que el alumno queda frustrado al encontrar muchos obstáculos para llegar a resolver la cuestión planteada.

- LA SECUENCIACIÓN:

En cuanto a la secuenciación sabemos que el material se nos presenta agrupado en bloques pero que las fichas no están secuenciadas. Esto tiene la gran ventaja de que nos permite, una vez analizadas, elegir las actividades, en número y orden, que creemos más conveniente para que, el grupo de alumnos que tenemos en esos momentos, pueda adquirir el objetivo que perseguimos. Es quizás en estos momentos cuando más se necesita que los "Comentarios para el Profesor" sean claros y precisos. De otra manera, hasta que conozcamos más a fondo el material, es fácil dejarse llevar por una primera elección y que esta resulte equivocada o por lo menos no sea la más adecuada. Sobre todo si tenemos en cuenta que alguna de las actividades abarca, en sí misma, muchos objetivos y en otras, sin embargo, son muchas las que pretenden lograr un mismo objetivo, con lo que la duda está en cuáles y cuántas coger o dejar. Este ha sido uno de los principales problemas que hemos tenido durante la experimentación: trabajar un número de actividades superior al que nos permitía el tiempo de que disponíamos para cada bloque.

La estructura del material en bloques distintos no le da un carácter aislado e inconexo a cada uno de ellos, siendo muy positivo, el hecho de que, un mismo objetivo de conocimiento, se puede lograr o reforzar en bloques distintos, dándole al aprendizaje de las Matemáticas, en sus diferentes apartados, un carácter cíclico y no aislado.
Un factor importante a tener en cuenta, por los problemas que ocasiona a los alumnos, es la falta de coordinación y los diferentes niveles de exigencias entre las áreas de Matemáticas - Física y Química - Tecnología.

EVALUACIÓN.

La evaluación resulta fácil para aquellos alumnos que evolucionan positivamente en todos los aspectos a evaluar, pero entraña gran dificultad cuando el proceso seguido, no le lleva a alcanzar las metas propuestas, y esos resultados se tienen que expresar en forma de calificación.
El mayor problema que tenemos cuando hemos de plasmar en una nota el resultado de aspectos tan diversos como: el proceso personal, el nivel de conocimientos, las actitudes, etc. Esto afecta, sobre todo, a los alumnos que se van quedando rezagados y que al no tomar parte de la dinámica general ven cada vez más deteriorada su propia evolución participativa y por lo tanto su calificación global.
La amplitud de facetas a evaluar tienen un aspecto positivo y es el de permitir que algunos alumnos, que no llegan a la adquisición de ciertos conocimientos, puedan desarrollar estrategias que le permitan seguir adelante sin bloqueo ante las nuevas situaciones, al reconocérsele: actitudes, hábitos habilidades y destrezas que antes no se evaluaban.

N Ú M E R O S   1º y 2º de E.S.O.

ANÁLISIS FORMAL

PRESENTACIÓN:

La presentación de las actividades en fichas individuales permite que el profesor pueda tener una gran movilidad a la hora de programar y secuenciar las mismas.
Deja al alumno espacio suficiente para realizar cuantas estimaciones, tanteos, operaciones y estrategias se le puedan ocurrir con lo que proporciona, a la hora de una evaluación, multitud de datos y una información muy completa sobre el proceso que ha seguido para resolverla.
Los dibujos hacen menos árida la visión de las actividades y amenizan la presentación. Sin embargo, hay que cuidarlos un poco más porque pueden inducir a error. Ejemplo: pág. 37 "Observando la Naturaleza".
Lo mismo ocurre, algunas veces, con las expresiones de algunas operaciones. Ejemplo: pág. 22 "Las operaciones".

REDACCIÓN

Es quizás la parte que necesitaría una visión más a fondo. Los alumnos tiene un vocabulario bastante escaso y muy poco concreto. Están además acostumbrados a que se les den las cosas muy aclaradas por el profesor. Todo esto hace que al enfrentarse a las actividades la mayor dificultad que encuentran sea la comprensión de lo que ha de hacer, del planteamiento de la propia actividad. Ejemplo: pág. 23 "Papilla".

ERRORES:

Algunas actividades contienen errores que hacen que los alumnos se decepcionen porque, después de haber intentado varias veces resolverla, se llega a la conclusión de que no tiene solución porque el planteamiento y el ejemplo en el que se fijaban no eran correctos. Ejemplo: pág. 16 "Cruce de sumas".

ANÁLISIS DEL CONTENIDO

- "Para comenzar" les hace tener una visión de lo que va a ser nuestro trabajo. Se enfrentan de forma muy amena a la nueva metodología. Les permite romper algunas estructuras muy arraigadas, como es el llegar a la resolución de un problema por distintos métodos y sin utilizar cálculos numéricos. Les sirve para hablar y discutir sobre las distintas estrategias que se les van ocurriendo y aprender a defender sus propias ideas, a intentar convencer a los demás de ellas y a aceptar los propios errores sin frustraciones.
- "Números naturales, fracciones y decimales" contienen algunas actividades que nos permiten llegar a conocer el nivel de conocimientos que poseen los alumnos y los errores conceptuales o de cálculo que tienen. Ejemplo: "Cruces", "Colorear". Sin embargo sería necesario contar con actividades que, una vez conocido el nivel de los alumnos, permitieran subsanar esas deficiencias.

La mayor novedad consiste en el uso de la calculadora. Son muchos los alumnos que, ya en cursos anteriores, han utilizado la calculadora en casa para resolver el cálculo. Pero es para ellos una novedad el tenerla en clase y poder utilizarla. El descubrimiento de las múltiples posibilidades que tiene les hace considerarla como un instrumento indispensable y hay que tener cuidado de que esto no les lleve a utilizarla siempre, con el consiguiente deterioro del cálculo mental. Por eso hemos procurado utilizar la calculadora más en las facetas de investigación y comprensión de conceptos y propiedades y en la de comprobación de estimaciones y cálculos aproximados. Ejemplo: "Acercarse a un número".

Se ha trabajado, sobre todo en el segundo curso, la relación y las equivalencias entre los números decimales y las fracciones. Ejemplo: "Períodos", "Gráficos".

El presupuesto de partida es erróneo, los alumnos no vienen con el bagaje que se les supone y se van descubriendo distintos fallos debidos, sobre todo, a la no adquisición de destrezas suficientes para enfrentarse a las distintas situaciones. Sería necesario insistir en reforzar los conceptos básicos que les permitan adquirir la soltura imprescindible a la hora del cálculo fraccionario o el significado de los distintos órdenes de decimales. Todo esto se pone de manifiesto en actividades como "Noticias" y "Test".

- "Divisibilidad". El tratamiento que se le da a la divisibilidad es ameno y muy eficaz. Son muchas las distintas clasificaciones que son capaces de hacer los alumnos lo que les lleva a realizar un análisis del significado de los distintos números y de las relaciones entre ellos. Se llega al descubrimiento de los múltiplos y divisores comunes y de las distintas propiedades de números y operaciones. Una de las actividades más amena y completa ha sido "Colores".

- "Potencias y raíces" presenta una serie de actividades que, en su conjunto, son excesivamente complicadas y largas dejando sin concretizar, en varios casos, los objetivos que pretendían lograr. Demasiado esfuerzo para muy escaso logro. Las mejores son las de uso de la calculadora que ponen de manifiesto nuevas estrategias para la resolución del cálculo de potencias y les hace llegar a descubrir las equivalencias entre los términos de la potencia y la raíz, "Con calculadora". Resulta también interesante la actividad de "Cálculo" porque permite llegar a enunciar reglas generales partiendo de un trabajo de investigación y análisis.
- "Números enteros": En el primer curso los alumnos se han enfrentado a conceptos que les cuesta mucho comprender como es el número negativo. Para facilitar esa comprensión es una actividad muy buena la de "Los 40 Principales", sobre todo porque los alumnos dominan las clasificaciones y además les resulta muy amena la discusión de las mismas. Hay que tener cuidado porque tiene un error en su enunciado.

El concepto de número entero positivo es el de "algo" que se debe. La suma de positivos aumentará lo "poseído", la suma de números positivos y negativos se ve como "reducción o suspensión" de la deuda. Las estrategias más utilizadas han sido: la resta numérica en la que la suma se representa como un avance o retroceso de posiciones; y la supresión de deudas, sobre todo al trabajar la resta. "Las tarjetas" es una actividad muy entretenida y que les proporciona una visión bastante clara, "Tarjeta II" y "El saldo" afianzan destrezas.

De todas formas consideramos que harían falta actividades que fueran encaminadas a conseguir automatismos.

En le segundo curso el mayor problema que se plantea es lograr que los alumnos sean capaces de llegar a efectuar correctamente las distintas operaciones comprendiendo su significado, y el posterior automatismo de las mismas. El planteamiento de las actividades y su realización requiere mucho tiempo para su ejecución y no se logra plenamente el resultado que se persigue. Son pocas las actividades y se insiste poco en las resolución de operaciones sobre todo con paréntesis.

- "Proporcionalidad": Presenta una gran cantidad de actividades que permiten elegir aquellas que más se adapten al grupo con el que se está trabajando. Algunas de estas actividades tienen gran dificultad de comprensión como "Señales" y "Carreteras". Otras sin embargo, con mucho menos esfuerzo, dan lugar a una gran cantidad de estrategias personales para llegar a resolverlas, proporcionando así una gran riqueza en las discusiones y favoreciendo la comprensión, como ocurre con "La escuela" y "El escaparate". Entre estas dos actividades el proceso de búsqueda de un método más sencillo y rápido se da con gran claridad. Mientras que en "La escuela" hace aflorar distintas estrategias, "El escaparate" les hace buscar entre estas las más sencillas de aplicar, llegando a plantearse, aunque no con algoritmo formal, la regla de tres.

La relación entre el porcentaje y las fracciones se ve con mucha claridad sobre todo en "Cuadraditos".

En el segundo curso se ha insistido más en la relación entre los números decimales, fracciones y porcentajes. A la hora de resolver problemas de descuentos e incrementos, se ha utilizado la estimación de resultados y la comprobación con la calculadora.

La proporcionalidad se empleará en todos los bloques, aunque en éste se aborda el estudio desde el punto de vista numérico, no debe olvidarse el gran número de conexiones que tiene con los otros aspectos de las Matemáticas.

CONCLUSIONES

Este bloque proporciona a los alumnos los medios necesarios para el desarrollo de las capacidades de investigación y análisis, fomentando en ellos el logro de estrategias personales y la discusión de las mismas hasta llegar a planteamientos generales.
Deja sin afianzar los automatismos, por lo que no logran conseguir seguridad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones numéricas.
Haría falta más tiempo con el fin de poder, por un lado, realizar con tranquilidad el proceso personal deductivo de sus propias estrategias, y, por otro, las actividades que les permitan reafirmar automatismos y consolidar destrezas.

GEOMETRÍA — 1º y 2º de E.S.O.

MATERIAL DEL ALUMNO:

El material ha sido suficiente, las actividades proporcionadas han sido variadas pero han resultado un poco dispersas. Creo se debiera profundizar más en algunas cuestiones que son tratadas con una o dos actividades cuando para adquirir ciertas destrezas sería necesario alguna más. Creo que no basta con que después se vuelva a retomar el tema con alguna actividad suelta.
Algunas de las actividades tienen los enunciados poco claros, e incluso algunas con errores. En cuanto al material del alumno, (me refiero al que él debe de aportar) ha sido bastante difícil conseguir que se adquiriera.
El material de láminas y tramas ha dado bastante buen resultado y en cuanto a material manipulable como troquelados etc. muy bueno, pero no se ha dispuesto del suficiente para todos los alumnos.

MATERIAL DEL PROFESOR:

Las orientaciones para el profesor, aunque algunas llegaron con retraso, las consideramos como buenas pero hay que tener en cuenta que en algunas no se tiene claro el objetivo que se pretende alcanzar con el alumno.

ÁLGEBRA — 1º y 2º de E.S.O.

CONTENIDOS

- Codificar y decodificar.
- Simbolizar
- Generalizar
- Resolver problemas mediante procedimientos algebraicos
- Resolución de ecuaciones

ACTIVIDADES DEL ALUMNO:

Las actividades proporcionadas han sido suficientes. Se han utilizado, concretamente, 30.

Creemos que en general son buenas pero para adquirir las suficientes destrezas en cuanto a resolución de ecuaciones y problemas ha sido escasas las que han hecho.
Hemos mezclado las actividades del grupo A con las del B, con la finalidad que hicieran una en la clase y otra de parecidas características en casa con la finalidad de que pudieran adelantar en los trabajos.
Algunas de las actividades propuestas han resultado un poco pobres, dado que encontrando la solución rápidamente, el alumno no profundiza más y se conforma con haber encontrado la solución.
En cuanto a los resultados obtenidos nos da la impresión que las destrezas adquiridas han quedado "prendidas con alfileres".
En la resolución de problemas hay que destacar una vez más, las dificultades que el alumno tiene para interpretar el texto.
El material manipulable prácticamente no ha sido utilizado en la parte de Álgebra. Lo único que sí se ha utilizado ha sido la calculadora.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 1º y 2º de E.S.O.

ANÁLISIS FORMAL.-

El bloque de probabilidad y estadística constituye, en su conjunto, uno de los más atractivos del programa: por el carácter novedoso de su contenido y por el hecho de que muchas de sus actividades sean propiamente, o contengan un cierto carácter lúdico.
Otro aspecto positivo de este bloque, es que en él, se recogen a través de láminas o de actividades, informaciones de prensa de interés general, que dan a su estudio, un carácter actual y práctico.

REDACCIÓN.-

La mayoría de actividades presentan un hecho muy concreto pero, en algunos casos, el planteamiento de la actividad, no indica claramente qué es lo que el alumno debe reflejar por escrito como respuesta a la actividad (caballos 1, pintar un dado).
Esta libertad de organización en la respuesta, hace que los alumnos comodones o menos capaces, den una respuesta demasiado escueta, o no encuentran salida por sí solos.

CONTENIDO.-

El contenido de este bloque gira en torno a unos cuantos objetivos básicos, que permiten al alumno familiarizarse con el tema, sin precisar la nomenclatura de los estudios que está haciendo. La dificultad que esto entraña, es que, cuando el alumno se enfrenta a la actividad, no se encuentra, en muchos casos, una estrategia organizada o sistematizada, con lo que, tiene que ser el profesor, con su intervención, el que encauce la actividad, lo que marca un determinado dirigismo y merma creatividad en la respuesta, ejemplo, la actividad "encuesta", requiere una organización de trabajo que no se indica directamente en la misma, y, que muchos alumnos, por sí solos, no son capaces de intuir.
Los modelos gráficos, recogidos en algunas de las actividades, no les dan recursos para elaborar modelos propios de tablas de frecuencias, histogramas, pictogramas y otros tipos de gráficas.

RELACIÓN ACTIVIDADES-OBJETIVOS A CONSEGUIR

Este bloque pone claramente de manifiesto la relación entre distintas partes de las matemáticas: geometría, fracciones, porcentajes,... Esto hace, que alumnos que hayan conseguido los objetivos de estos temas, se enfrenten más seguros con los problemas que aquí se les plantean; también ayuda a que se refuercen otros no superados.
En cuanto a una relación directa de las actividades con los objetivos a conseguir, es de destacar, en este bloque, el gran número de actividades encaminadas a unos mismos logros, y que siendo presentadas en el curso 1°, vuelven a aparecer con alguna modificación o ampliación en 2°. Tal es el caso de:
- el estudio de objetos generadores de azar
- la comparación de probabilidades
- la asignación de probabilidades a un hecho
- forma de expresar la probabilidad de un suceso
- estrategias de recuento
- ...

También se da el caso de que una sola actividad acumule mucho contenido, ejemplo "pies y zapatos", donde trabajamos:
- variables estadísticas discretas y continuas
- variables estadísticas cualitativas y cuantitativas
- límites de intervalos
- la moda cualitativa y cuantitativa
- iniciación a las medidas de dispersión.

92. PROGRAMACIÓN DEL PRIMER CICLO

PROGRAMACIÓN 1er CICLO.	CURSO 91-92
Mª. Isabel Amengual Ruiz	C.P. "Lucentum". Alicante.

La programación se ha basado, sobre todo, en la experimentación de los materiales de 1er. ciclo de Secundaria.

La propuesta de estos materiales es muy amplia y por eso la elección de aquellos que se iban a utilizar ha sido muy difícil, pues cada una de las actividades tiene su importancia y transcendencia.. Quizás haya sido esta la razón que haya hecho que se eligieran demasiadas actividades para cada bloque. Unido esto a la metodología constructivista y a las características propias del grupo de alumnos ha hecho que no fuera posible cumplir totalmente todas las programaciones.

En este caso ha sido el bloque "Probabilidad y Estadística" el que ha quedado mermado por la falta de tiempo.

La solución puede estar en una temporalización más homogénea en la programación de los bloques con el fin de conseguir una mejor distribución del tiempo entre ellos. También se podría intentar realizar una interrelación entre los distintos bloques para que todos y cada uno de los temas sean tratados.

De todas formas, la falta de tiempo es un problema sin solución. Las tres o cuatro sesiones de cincuenta minutos semanales (si se refiere a 1° o 2°) son totalmente insuficientes cuando de lo que se trata es de que los alumnos analicen, descubran, comprueben, en definitiva creen su propio conocimiento y saquen sus conclusiones después de discutirlas con los otros.

Otro problema es el punto de partida. Se da por supuesto el dominio de unas destrezas fundamentales, en cuanto a cálculo, vocabulario específico etc., que los alumnos no poseen y a la consecución de las cuales hay que dedicar mucho esfuerzo y tiempo.

El conseguir que el cuaderno sea un buen instrumento de evaluación donde el alumno refleje sus procesos evolutivos es quizás el mayor de los retos.

C. P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA: MATEMATICAS — BLOQUE: NUMEROS — NIVEL: 1º curso de E.S.O. — CURSO: 1.991-92 — FECHA: 1er Trimestre

CONTENIDOS: CONOCIMIENTOS y PROCEDIMIENTOS

1. NUMEROS QUE YA CONOCES:

- NUMEROS NATURALES, DECIMALES y FRACCIONES
  - · Cálculo mental: Estrategias personales
  - · Operaciones: +, −, x y : {Utilización / Algoritmos
  - · Descubrir algunas de las propiedades de las operaciones mediante el uso de las mismas.
  - · Resolución de problemas mediante estrategias personales
  - · Explicación de los procesos seguidos
  - · Estimación, aproximación y redondeo
  - · Uso de la calculadora: Investigación de su utilidad
  - · Representación en la recta.

2. PROPORCIONALIDAD:

- PROPORCIONALIDAD y TANTO POR CIEN
  - · Investigación del significado de la proporcionalidad
  - · Utilización de diferentes procedimientos para el cálculo de proporcionalidades.
  - · Cálculo mental. Estimaciones.
  - · Identificación de situaciones de proporcionalidad.
  - · Relaciones sencillas: 1/2 = 50% ; 1/4 = 25%

3. NUMEROS CON SIGNO:

- NUMEROS ENTEROS: POSITIVOS y NEGATIVOS:
  - · Comprensión y uso de los números enteros {Necesidad / Significado / Escritura
  - · Representación en la recta
  - · Operaciones: + y −
  - · Resolución de problemas sencillos. Utilización de estrategias personales
  - · Explicación de los procesos seguidos

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTOS / PAG

		Pag
• PARA COMENZAR:		
- Cuadrados	G	5
- Pasar el río	I	6
- Atrapados	Parejas	7
- Descifrar	I	8
- Espejos	Parejas	9
- Suerte	I	10
- Operación oculta	G. G	11
- El montón	Parejas	12
- Razonamiento de la edad	I	13
* Control - Repaso		
• NUMEROS: NATURALES FRACC. DECIMALES		
- Cruce de sumas	G	16
- Faltan cifras	I	17
- Ruedas	I	18
- Inventa problemas	I	19
- Faltan signos	I	20
* Control repaso	I	
- Colorear	G	21
- Las operaciones	G	22
- Pulsando una vez	I	23
- Memorias	I	24
- Acercarse a un número	Parejas	25
- Libretas	I	26
- Cruce de multiplicaciones	I	27
- Desafío	Parejas	28
* Control-repaso		
- Cartas	I	
- Estimación I	G	29
- Con el I	I	30
- Estimación II	I	31
* Control - repaso	I	32
• PROPORCIONALIDAD y %		
- Exámenes	I	45
- Lanzamientos	I	46
- Vacaciones	G	47
* Control	I	
- La escuela	G	50
- Lanzamiento del dado	Pareja	52
- Escaparate	G. I	53
- De cabeza	I	54
- Cuadraditos	I	55
- I.V.A.	I	56
* Control - repaso	I	
• NUMEROS ENTEROS		
- Los 40 principales	G	34
- Temperaturas	G	35
- Norte - Sur. Este - Oeste.	I	36
- Observando la Natu.	I	37
* Control - repaso	I	38
- Juego de la oca	Pareja	39
- Las tarjetas I	G	40
- Las Tarjetas II	G	41
- Huecos	I	43
- El saldo	G	42
- Helados	G	44
* Control - repaso	I	

MATERIALES

- Trama de puntos
- Fichas
- Espejos
- Monedas
- Calculadora
- Palillos
- Dados
- Fichas
- Tarjetas

PROCESOS

EN GRUPO
- Lectura individual de la actividad
- Aclaraciones de duda
- Discusión en equipo
- Conclusiones del equipo
- Puesta en común de las conclusiones y discusión y defensa de las mismas
- Conclusiones de la clase

INDIVIDUAL
- Lectura y análisis de la actividad
- Estrategias personales para su resolución
- Conclusiones
- Análisis de la actividad y el proceso

GRAN GRUPO
- Lectura y análisis de la actividad individualmente.
- Puesta en común, discusión y conclusiones

TEMPORALIZACION

• PARA COMENZAR		
16 - 20	Sept.	4
23 - 27	Sept.	4
TOTAL SESIONES: 8		
• NUMEROS: NATU. FRAC. DEC.		
30 - 4	Oct.	4
7 - 11	Oct.	2
14 - 18	Oct.	4
21 - 25	Oct.	4
TOTAL SESIONES: 14		
• PROPORCIONALIDAD		
28 - 31	Oct.	3
4 - 8	Nov.	4
11 - 15	Nov.	4
18 - 22	Nov.	4
TOTAL SESIONES 15		
• NUMEROS ENTEROS		
25 - 29	Nov.	4
2 - 5	Dic.	3
9 - 13	Dic.	4
16, 17, 18	Dic.	2
TOTAL SESIONES: 13		

TOTAL de SESIONES NUMEROS 50

ORIENTACIONES

- Utilizar "Para comenzar" para que los alumnos tengan una visión de lo que va a ser la nueva metodología.
- Cambiar la concepción que se tiene de las Matemáticas.
- Sentar las bases del enfoque del trabajo.
- Comprobar los conocimientos que el alumno posee < ciertos / erróneos
- Partir de ellos para continuar
- Potenciar:
  - · El cálculo mental
  - · Las estimaciones de resultados
  - · Las estrategias personales para resolver problemas
  - · Las explicaciones Orales / Escritas de los procesos seguidos
  - · El trabajo y la discusión en grupo.

EVALUACION:

El proceso de evaluación será continuo, partiendo de la realidad del alumno se irá analizando su evolución personal y el logro de los objetivos marcados.

Los medios que se utilizarán para esta evaluación serán:

- · La observación directa del alumno en clase y en el equipo.
- · La revisión de su trabajo personal a través del cuaderno donde figura el seguimiento de su propio proceso
- · Algunas actividades - control donde el alumno se encuentra solo
- · La autoevaluación

La CALIFICACION será el compendio de su situación en estos aspectos

C.P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA : MATEMATICAS   BLOQUE : GEOMETRIA   NIVEL : 1.er curso de E.S.O   Curso 1991-92
FECHA : 2.º Trimestre

CONTENIDOS : CONOCIMIENTOS y PROCEDIMIENTOS

1. ESPACIO ⟷ PLANO
- Descubrir las relaciones entre los cuerpos espaciales y sus componentes planos.
- Del espacio al plano. Desarrollos planos de cuerpos geométricos
- Del plano al espacio : Construcción de cuerpos geométricos partiendo del plano.
- Desarrollo de la intuición geométrica.
- Superficies y volúmenes : Distinción y comparación de magnitudes.

2. CONSTRUCCIONES :
- "Puntos importantes : Circuncentro, incentro
- Líneas : Perpendiculares, Paralelas, Mediatriz. Bisectriz.
- Cómo dibujarlas y utilizarlas para resolver o averiguar situaciones y posiciones.
- Utilización de las escalas.

3. POLIGONOS :
- Angulos : Clases, propiedades. Angulo < Interior / Central
- Triángulos : Elementos. Clases. Propiedades.
- Cuadriláteros : Elementos. Clases. Propiedades.
- Estimación de superficies.

4. SIMETRIAS y GIROS :
- Apreciación de figuras simétricas
- Construcción de figuras simétricas

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTO / PAG.

ACTIVIDADES	AGRUPAMIENTO	PAG.
ESPACIO – PLANO		
- Troquelados y gomas	G	16
- Imagina y corta	G	17
- Tapones	G	18
- Cortes		19
- Edificios	G	20
- Tertulias	G	21
- Maquetas	G	22
- Vistas	H	23
- Poliminos	H	24
* Paralelepípedos	I	25
- Desarrollo I	I	26
- Rotaciones I	G	27
- Rotaciones II	G	28
- Policubos	G	29
- Superficies y volúmenes	G	30
CONSTRUCCIONES		
- El camino	I	31
- Bisectriz	G	34
- Circuncentro	I	33
- Incentro	I	35
- El centro del pueblo	G	37
- Angulos ≥ X F	I	38
- Angulos en un triángulo	I	39
- Barcos I	G	40
- Localización	G	41
- Tortugas	G	42
- El triángulo de	I	43
- Descríbelo	G	44
POLIGONOS		
- Proposiciones	G	46
- Mosaicos	G	47
- Mosaicos con triángulo	I	48
- Tres carpinteros	I	50
- Espejos: ángulos, distancias	G	51
- Espejos: repeticiones	G	52
- Polígonos regulares	G	53
- Angulo central e interior	G	54
- Prisenos	I	55
- Los polígonos		56
- Vidrieras	G	59
- Vistas aéreas	G	61
- Campos	I	63
- Ampliaciones y áreas	G	62
SIMETRIAS		
- Dibujar reflejos	I	65
- Líneas de simetría	G	66
- Alfabeto	I	67
- Figuras	G	68
- Movimientos I	G	70
- Movimientos II	G	71
- Movimientos III	G	72
- Logotipos	I	75

MATERIALES

- Troquelados y gomas
- Estirenor y cutex
- Cubos de madera
- Tramas
- Tijeras y pegamento
- Cuerpos geométricos
- Reglas < Escuadra / Cartabón
- Compás
- Semicírculo graduado
- Espejos
- Libros de espejos
- Transparencias
- Retro proyector.
- Geoplano.

PROCESOS

EN GRUPO
- Lectura individual
- Discusión y conclusiones
- Puesta en común
- Conclusiones de la clase

INDIVIDUAL
- Lectura y análisis
- Estrategias personales para su resolución
- Análisis de la actividad y el proceso

GRAN GRUPO
- Lectura y análisis de la actividad individualmente.
- Puesta en común, discusión y conclusiones.

TEMPORALIZACION

ESPACIO – PLANO		
7 – 10	Enero	4
13 – 17	Enero	4
20 – 24	Enero	4
TOTAL SESIONES : 12		
CONSTRUCCIONES		
27 – 31	Enero	4
3 – 7	Febrero	4
TOTAL SESIONES : 8		
POLIGONOS		
10 – 14	Febrero	4
17 – 21	Febrero	4
26-27-28	Febrero	3
TOTAL SESIONES : 11		
SIMETRIAS y GIROS		
2 – 6	Marzo	4
9 – 13	Marzo	4
16-17-18	Marzo	3
TOTAL SESIONES : 11		

TOTAL SESIONES GEOMETRIA 42

ORIENTACIONES

- Comprobar los conocimientos que el alumno posee < ciertos / erróneos
- Partir de ellos para continuar.
- Potenciar :
  - El desarrollo de la intuición geométrica.
  - La utilización adecuada de los instrumentos de medida y las técnicas para dibujar en el plano los desarrollos de los cuerpos geométricos.
  - Conocimiento de los elementos que caracterizan una configuración geométrica tanto plana como espacial.
  - El estudio de algunas de las propiedades de las figuras.

EVALUACION :

El proceso de evaluación será continuo. Partiendo de la realidad del alumno se irá analizando su evolución personal y el logro de los objetivos marcados.

Los medios que se utilizarán para esta evaluación serán :
- La observación directa del alumno tanto individualmente como en equipo.
- La revisión de su trabajo personal a través del cuaderno donde figura el seguimiento de su propio proceso.
- Algunas actividades-control donde el alumno se encuentra solo.

La CALIFICACION será el compendio de su situación en todos los aspectos.

C. P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA : MATEMATICAS BLOQUE : ALGEBRA-GRAFICAS NIVEL : 1º de E.S.O.

CURSO : 1991-92
FECHA : 3er Trimestre

CONTENIDOS : CONOCIMIENTOS y PROCEDIMIENTOS

• ALGEBRA

· Significado y uso de las letras para representar números, ecuaciones, fórmulas

· Desarrollar y simplificar expresiones algebraicas sencillas

· Escritura y resolución de expresiones algebraicas aplicadas a problemas sencillos.

· Obtención de valores numéricos de una expresión algebraica

· Traducción a expresiones algebraicas de enunciados sencillos.

· Resolución de ecuaciones sencillas de primer grado y una sola incógnita.

• GRAFICAS

· Descripción de gráficas

· Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de datos o expresiones algebraicas

· Construcción de gráficas a partir de tablas o enunciados sencillos.

NOTA : El bloque de gráficas se trabajará por parejas y se hará una puesta en común a toda la clase para su análisis.

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTOS / Pag

Actividades	Agrupamientos	Pag
• ALGEBRA		
Cruces de números	G	15
· Traducciones	I	16
· Adivina mi número	G.G	17
· Sillas	G	19
· Máquinas	G	21
· Secuencias	I	22
· Trenes	G	24
· Sucesiones	G	23
· Fotografías	G	25
· Herencia	G	27
· Asignación semanal	G	28
· Fiesta	G	30
· La valla	G	29
· Nº consecutivos	G	31
· Historias	I	32
· Chips I	G	35
· Equilibrio	G	36
· De cabeza	I	37
· Con calculadora	G	38
· Con balanza	G	39
· Areas del rectángulo	I	34
· Memory algebraico	G	5,6
· Juego de sustitución	Parejas	
• GRAFICAS		
· Comprar el diario	Pareja	48
· Evolución del peso	"	49
· El depósito del agua	"	50
· La carrera	"	52
· La ebullición	"	53
· La panadería	"	54
· Trabajando	"	55
· El depósito del retrete	"	56
· La carrera accidentada	"	85
· El hielo descongelándose	"	86

MATERIALES

- Dados
- Retroproyector y transparencias
- Cartas (memory)
- Calculadora

PROCESOS

GRUPO
- Los juegos permiten que se analice el significado del lenguaje algebraico
· Discusión en el equipo.
· Conclusiones.

INDIVIDUAL
- Lectura y análisis de la actividad.
· Estrategias personales para resolverlas
· Conclusiones

GRAN GRUPO
- Lectura y análisis de la actividad
· Puesta en común discusión y conclusiones.

TEMPORALIZACION

Fechas	Mes	Sesiones
23 - 27	Marzo	4
30 - 3		4
6 - 10	Abril	4
13,14,15		2
4 - 8	Mayo	4
11 - 15		4
18 - 22		4
25 - 29		4

TOTAL SESIONES 30

ORIENTACIONES

· Es la primera vez que se enfrentan al lenguaje algebraico.
· Comenzar con los juegos para analizar la composición de esta simbología.
· Las traducciones del lenguaje ordinario al algebraico se deben utilizar muy amenudo.
· Es importante que logren interpretar las gráficas.

EVALUACION :

El proceso de evaluación será continuo. Se tendrá en cuenta que los alumnos toman contacto con este tema por vez primera. Se irán analizando el logro de los objetivos marcados y su evolución personal.
Los medios que se utilizarán para la evaluación serán los mismos que los empleados en los anteriores bloques. Será muy importante el trabajo en equipo.

C. P. LUCENTUM

ALICANTE. AREA: MATEMATICAS BLOQUE: PROBABILIDAD y ESTADISTICA NIVEL: 1er curso de E.S.O.

Curso: 1991-92

FECHA: 3er Trimestre

CONTENIDOS: CONOCIMIENTOS y PROCEDIMIENTOS

• PROBABILIDAD

- Descubrimiento de los fenómenos aleatorios
- Resultados más o menos probables
- Realizar juegos y simulaciones.
- Analizar resultados
- Realizar tablas, diagramas de árbol, etc para decidir la decisión certera.
- Utilizar diversos procedimientos para el cálculo de la probabilidad de un suceso.

• ESTADISTICA

- Interpretación del lenguaje gráfico
- Utilización del lenguaje gráfico
- Interpretación de tablas numericas y su representación gráfica
- Formulación de congeturas ante el estudio de una gráfica o datos estadísticos.
- Hallar la media como resumen de un conjunto de datos estadísticos.

• CONTAR

- Averiguar y potenciar las estratégias personales para contar.
- Descubrir los fallos e intentar corregirlos

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTO / Pag.

ACTIVIDADES	AGRUPAMIENTO	Pag.
· Generadores de azar	I	19
· Positivos y negativos	Parejas.	30
· El juego justo	"	26
· Comparación de pro.	G	31
· " " " II	I	55
· Animales y patas	Pareja	73
· Una moneda	G G	20
· Baraja 1		35
· Baraja II		36
⊙ Barcelona 92 ingre.	I	38
⊙ " " gasto	I	39
· Sietes	I	42
· Caras	I	44
· Pastel gratis	I	47

⊙ Trabajo de análisis hecho fuera de clase.

MATERIALES

- Dados de varios tipos
- Tableros
- Fichas
- Palillos
- Chinchetas
- Monedas
- Ruletas
- Calculadoras

PROCESOS

EN GRUPO

- Lectura individual de la actividad.
- Planteamiento de hipótesis.
- Discusión en el equipo.
- Análisis y comprobación.
- Conclusiones.

GRAN GRUPO

- Aportación de cada equipo de sus conclusiones al resto de los compañeros
- Discusión y conclusiones en general.

INDIVIDUAL

- Investigación y conclusi

TEMPORALIZACION

1-5	Junio	4
8-12	Junio	4
15-19	Junio	4

TOTAL SESIONES 12

ORIENTACIONES

- Para lograr llegar al concepto de probabilidad se partirá de experimentos aleatorios ya familiares como el lanzamiento de una moneda o de un dado.
- Mediante juegos se iniciará este estudio procurando que se diferencien los sucesos posibles de los imposibles.
- En este bloque más que en otros es necesario llegar a conocer los propios errores y modificarlos a partir de ellos mismos.
- Potenciar: El conteo, construcción de tablas, análisis de los resultados, etc.

EVALUACION

El proceso de evaluación será continuo. Los alumnos es la primera vez que toman contacto academico con este tema, pero están inmersos en él por lo que es conveniente partir de sus propios conceptos, erroneos o no, y valorar su evolución personal.

Los medios que se utilizarán para su evaluación serán: La observación directa en clase, El cuaderno, etc.

Será muy importante el trabajo en equipo.

C.P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA: MATEMATICAS BLOQUE: NUMEROS NIVEL: 2º Curso de E.S.O.

Curso: 1991-92
FECHA: 1er Trimestre

CONTENIDOS: CONOCIMIENTOS, PROCEDIMIENTOS

1. DIVISIBILIDAD:

- Divisores de un número
- Clasificaciones de números: Primos / Compuestos / Muchos otros
- Representación de los divisores de un número mediante el diagrama de árbol.
- Divisores comunes de dos o más números.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo sin utilizar el algoritmo

2. NUMEROS DECIMALES y FRACCIONES

- Equivalencias: Fracción – Decimal
- Paso de fracción a decimal y de decimal a fracción
- Operaciones: +, −, × y : Decimales / Fracciones. Utilización calculadora
- Resolución de problemas. Estrategias personales.

3. PROPORCIONALIDAD:

- Relación: Fracciones – Decimales – %
- Cálculo mental
- Uso de la calculadora
- Resolución de problemas de descuento e incremento

4. NUMEROS ENTEROS: POSITIVOS y NEGATIVOS

- Su representación en la recta
- Operaciones: +, −, × y : Utilizarlas sin algoritmo escrito formal.
- Resolución de problemas. Estratégias personales.

5. POTENCIAS y RAICES

- Potencias como multiplicación reiterada.
- Notaciones con la calculadora científica.
- La radicación como operación inversa a la potenciación.
- Cálculos con la calculadora.

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTOS / PAG

Actividades	Agrupamientos	Pag
· DIVISIBILIDAD		
- Papel cuadriculado	G	5
- Clasificando Nº	G	6
- Verdadero o falso	G	7
- Descomposición	G	8
- Relojes de arena	I	9
- Barriles	I	10
- Colores	I	49
* Descomposición	I	52
· NUMEROS: DECIMALES, FRACCIONES		
- Juego del siete y medio	Parejas	19
- Urna	I	20
- Ciclismo	I	22
- Ratio prof/alumnos	I	24
- Gráficos	I	26
- Periodos	G	25
- Noticias	I	21
* Test	I	69
- Interpretación	I	61
- Comparación	I	62
- Iguales	I	64
- Pequeño juego	G	65
- Decimales con calcu.	G	66
- Fracciones con calcu	G	67
- Suma	I	
- Escribe	I	
· PROPORCIONALIDAD		
- Calificaciones	G	42
- Consumo de gasolina	I	40
- El refresco	G	41
- El tendero	G	39
- Escalas I	I	58
- Escalas III	I	60
- Escalas IV	I	61
- Numeros primos	G	
- Planos I	I	50
- El ratón gigante	G	44
· NUMEROS ENTEROS		
- Coordenadas	I	12
- Tablas	G	13
- Productos	G	14
- Cálculo mental	G	15
- Circuito	Parejas	17
- Sucesiones	G	58
- Signos perdidos	I	59
- A la casa del –	G	
- La bolsa	I	16
- Descifrar	G	57
· POTENCIAS y RAICES		
- Copo de nieve	I	29
- Amebas	G	31
- Con calculadora	G	32
- Cálculo	I	35
- Diagramas	I	77
- Requeterraiz	I	33

MATERIALES

- Tramas
- Calculadora
- Dados
- Fichas
- Proyector
- Transparencias

PROCESOS

EN GRUPO:

- Lectura individual de la actividad
- Aclaración de dudas
- Discusión en equipo
- Conclusiones del equipo
- Puesta en común de las conclusiones y discusión y defensa de las mismas
- Conclusiones de la clase.

INDIVIDUAL

- Lectura y análisis de la actividad.
- Estrategias personales para su resolución.
- Conclusiones
- Opinión personal sobre la actividad y su desarrollo.

GRAN GRUPO

- Lectura y análisis individual de la actividad.
- Puesta en común, discusión y conclusiones.

TEMPORALIZACION

· DIVISIBILIDAD

Días	Mes	Sesiones
16-20	Sep	3
23-27	Sep	3
TOTAL SESIONES		6

· Nº: DECIMALES, FRAC

Días	Mes	Sesiones
30-4	Oct.	3
7-11	Oct.	1
14-18	Oct.	3
TOTAL SESIONES		7

· PROPORCIONALIDAD

Días	Mes	Sesiones
21-23	Oct.	3
28-31	Oct.	2
4-8	Nov.	3
TOTAL SESIONES		8

· Nº: ENTEROS

Días	Mes	Sesiones
11-15	Nov	3
18-22	Nov	3
25-29	Nov	3
TOTAL SESIONES		9

· POTENCIAS, RAICES

Días	Mes	Sesiones
2-5	Dic	3
9-13	Dic	3
16, 17, 18	Dic	1
TOTAL SESIONES		7

TOTAL de SESIONES NUMEROS 37

ORIENTACIONES

- Comprobar los conocimientos que el alumno posee: ciertos / erroneos
- Partir de ellos para continuar.
- Potenciar:
  - El cálculo mental
  - La estimación de resultados.
  - Las estrategias personales para resolver
  - Las explicaciones: orales y escritas de los procesos seguidos.
  - Las relaciones y equivalencias entre las diferentes clases de números
  - El analisis de las propiedades de los números.

EVALUACION:

El proceso de evaluación será continuo. Partiendo de la realidad del alumno se irá analizando su evolución personal y el logro de los objetivos marcados.

Los medios que se utilizarán para esta evaluación serán:

- La observación directa del alumno individualmente y en el equipo
- La revisión de su trabajo personal a través del cuaderno donde figura el seguimiento de su propio proceso.
- Algunas actividades-control donde el alumno se encuentra solo.
- La autoevaluación.

La CALIFICACION será el compendio de su situación en estos aspectos

C. P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA : MATEMATICAS BLOQUE : GEOMETRIA NIVEL: 2º curso de E.S.O.

Curso : 1991 - 92
FECHA : 2º Trimestre

CONTENIDOS : CONOCIMIENTOS, PROCEDIMIENTOS

1. ESPACIO ⟷ PLANO
- Reconocer, manejar y describir figuras y configuraciones planas y espaciales.
- Sus elementos fundamentales
- Construir cuerpos mediante procedimientos manipulativos.
- Dibujar en el plano objetos tridimensionales
- Deducir la fórmula de Euler.
- Utilización de las relaciones entre el plano y el espacio para la resolución de problemas.

2. PLANOS y ESCALAS
- Manejo de instrumentos : Escuadra, cartabón, transportador de ángulos, compás, etc.
- Adquirir destrezas en la representación de planos
- Utilización de la escala en la interpretación de planos, mapas, etc.
- Resolución de problemas en los que aparecen semejanzas y escalas.

3. SUPERFICIES
- Comprensión del concepto de medida. Sus unidades y relaciones entre ellas.
- Resolución de problemas cuyos datos sean unidades de superficie.

INVESTIGACIONES y PROYECTOS
- Realización, en equipo, de dos de las actividades propuestas elegidas libremente.

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTOS PAG

ACTIVIDADES	AGRUPAMIENTOS	PAG
• ESPACIO ⟷ PLANO		
- La cinta de Moebius	Indiv.	29
- Proyecciones	Grupo	30
- Vistas I	G.	31
- Botellas	G.	32
- Vistas II	G.	33
- Vistas III	G	34
- Vistas Y	I	36
- Pliegues I	I	37
- Cortes I	G	38
- Tapar el roto	I	39
- Cuerpos de revolución	G	40
- Angulos poliédricos	G	41
- Poliedros regulares	G	42
- Fórmula de Euler	G	43
- Poliedros semirregulares	I	44
- Poliedros y cubos	I	45
• PLANOS, ESCALAS		
- Planos I y II	G	50-51
- El metro	G	52
- Descubrir las calles	G	53
- La medida Maratón	I	54
- El plano de la ciudad	G	55
- Triángulos	G	56
- Altura del árbol	G	57
- Escalas I	I	58
- Escalas II	I	59
- Escalas III	I	60
• SUPERFICIES		
- Cuadro de unidades	G	64
- Máquinas de cambio	G	65
- Máquinas I	G	66
- Máquinas II	G	67
- Diagramas I	G	68
- El área de polígonos	G	69
- Area de triángulos	I	71
- Area de figuras	I	72
- Polígonos inscritos	G	73
- Areas sobre tramas	G	75
- Area del círculo	G	76
- Area máxima	G	77
- La ciudad de Valencia	I	78
- Estimar superficies.	I	79

MATERIALES

- Cubos de madera
- Troquelados y gomas
- Tramas
- Cartulinas
- Pegamento
- Tijeras
- Escuadra
- Cartabón
- Transportador
- Compás
- Láminas
- Planos
- Mapas
- Calculadora
- Regla graduada

PROCESOS

EN GRUPO
- Lectura individual
- Aclaraciones de dudas
- Discusión y conclusiones
- Puesta en común y conclusiones de la clase

INDIVIDUAL
- Lectura y análisis de la actividad.
- Estrategias personales para su resolución.
- Conclusiones
- Opinión personal sobre el proceso seguido y la actividad

GRAN GRUPO
- Lectura y análisis individual de la actividad
- Puesta en común discusión y conclusiones.

TEMPORALIZACION

• ESPACIO ⟷ PLANO		
7 - 10	Enero	3
13 - 17		3
20 - 24		3
27 - 31		3
TOTAL SESIONES: 12		
• PLANOS, ESCALAS		
3 - 7	Febrero	3
10 - 14		3
17 - 21		3
TOTAL SESIONES = 9		
• SUPERFICIES		
26-27-28	Febrero	1
2 - 7		3
9 - 13	Marzo	3
16-17-18		2
TOTAL SESIONES : 9		

TOTAL SESIONES GEOMETRIA 30

ORIENTACIONES

- Comprobar los conocimientos que el alumno posee / ciertos / erróneos
- Partir de ellos para continuar.
- Potenciar :
  - El desarrollo de la intuición geométrica
  - La utilización adecuada de los instrumentos de medida y las técnicas para dibujar en el plano los desarrollos de los cuerpos geométricos.
  - El descubrimiento de las fórmulas mediante la manipulación de los cuerpos y figuras geométricas

EVALUACION :

El proceso de evaluación será continuo. Partiendo de la realidad del alumno se irá analizando su evolución personal y el logro de los objetivos marcados.

Los medios que se utilizarán para esta evaluación serán :
- La observación directa del alumno tanto individual como en equipo
- La revisión de su cuaderno de trabajo donde figura el seguimiento de su propio proceso personal.
- Algunas actividades - control donde el alumno se encuentra solo
- La autoevaluación.

La CALIFICACION será el compendio de su situación en todos aspectos

C. P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA : MATEMATICAS   BLOQUE : ALGEBRA   NIVEL : 2º de E.S.O.

CURSO : 1991 - 92
FECHA : 3er T

CONTENIDOS : CONOCIMIENTOS Y PROCEDIMIENTOS

- ALGEBRA
- Utilización de letras que sustituyen a objetos
- Simbolizar cantidades mediante letras
- Simbolizar relaciones mediante fórmulas y ecuaciones
- Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas sencillas.
- Expresar algebraicamente algunos enunciados.
- Desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas : paréntesis, factor común.
- Leer y manipular fórmulas.
- Explicación de los procesos seguidos.
- Resolución de problemas sencillos por medios algebraicos.
- Resolver sistemas sencillos de ecuaciones con dos incógnitas (método de sustitución).
- Representación gráfica de ecuaciones sencillas de primer grado.

ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTOS / Pág.

Actividades	Agrupamientos	Pág.
ALGEBRA		
· Ficha resumen	I	
· Traducciones II	I	15
· Edades	I	
· Números en celdillas	G	14
· La solución es...	G	65
· Edades II	I	16
· Rectángulos	I	17
· Máquinas	G	19
· Pintar cubos	G	20
· Secuencias	G	22
· Sucesiones	G	23
· Lápices	G	24
· Las vacas lecheras	G	26
· El monstruo del...	I	27
· El error	G	28
· Un problema de edades	I	29
· La granja	G	30
· Chips	G	32
· Calculadora	G	33
· Medicamentos	G	34
· Paréntesis	I	35
· Factor común	G	36
· Ecuaciones y sistemas	G	37
· Controles	I	
GRAFICAS		
· El pie y el palmo	G	39
· El aterrizaje	G	40
· El paracaidista	I	41
· Viajes	G	43
· El aparcamiento	G	44
· Carrera accidentada	G	45
· El precio gasolina	I	46

MATERIALES

- Dados
- Retroproyector y transparencias
- Calculadora

PROCESOS

GRUPO
- Lectura, análisis, discusión en equipo y conclusiones.

INDIVIDUAL
- Lectura y análisis de la actividad.
- Estrategias personales para resolverlas
- Conclusiones.

GRAN GRUPO
- Lectura y análisis de la actividad.
- Puesta en común discusión y conclusiones.

TEMPORALIZACION

Fechas	Mes	Sesiones
23 - 27	Marzo	3
30 - 3		3
6 - 10	Abril	3
13, 14, 15		2
4 - 8	Mayo	3
11 - 15		3
18 - 22		3
25 - 29		3

TOTAL SESIONES
23

ORIENTACIONES

- Comenzar con una ficha de análisis y resumen del lenguaje algebraico que recuerdan del curso anterior.
- Analizar los errores para, a partir de ellos ir construyendo los nuevos conocimientos.

– Potenciar :
- La utilización de las expresiones algebraicas
- El cálculo y resolución de las ecuaciones

EVALUACION.

El proceso de evaluación será continuo. Se irán analizando la evolución personal y el logro de los objetivos marcados.
Los medios que se utilizarán para la evolución serán los mismos utilizados en los bloques anteriores.
Se valorará sobre todo el trabajo en equipo.

C. P. LUCENTUM
ALICANTE

AREA : MATEMATICAS BLOQUE : PROBABILIDAD y ESTADISTICA Curso . 1991-92

NIVEL : 2° curso de E.S.O. FECHA : 3er Trimestre

CONTENIDOS : CONOCIMIENTOS y PROCEDIMIENTOS	ACTIVIDADES / AGRUPAMIENTO / Pag.	MATERIALES	TEMPORALIZACION	ORIENTACIONES
• PROBABILIDAD · Potenciar y reafirmar el trabajo realizado el curso anterior. · Realizar juegos y simulaciones con planteamiento de hipótesis sobre las probabilidades. · Utilizaciones de tablas para representar datos y estudiarlos. • ESTADISTICA · Aplicación de la estadística en la probabilidad · Elaboración de encuestas y formularios. · Hallar la media en diferentes situaciones. · Presentación de la información mediante: gráficas, diagramas de barras, etc.	· Con tres monedas 14 · El juego justo 15 · Positivos y negativos 16 · Probabilidades con robot 17 · Contrarios en la baraja 18 · Extraciones en la baraja 20 · Dominó 22 · La cueva 51 · Gráfica 28 ⊙ Encuestas 29 ⊙ De esta ficha cada alumno ha elegido un tema. Ha elaborado, realizado y comentado su encuesta.	· Dados de varios tipos · Tableros · Fichas · Palillos · Chinchetas · Monedas · Ruletas · Calculadoras. PROCESOS EN GRUPO · lectura individual de la actividad. · Planteamiento de hipótesis. · Discusión en el equipo. · Análisis y comprobación. · Conclusiones GRAN GRUPO · Aportación de cada equipo de sus conclusiones al resto de los compañeros · Discusión y conclusiones en general INDIVIDUAL · Investigación y conclusiones personales	1-5 Junio 3 8-12 Junio 3 15-19 Junio 3 TOTAL SESIONES 9	- Comprobar los conocimientos que el alumno posee ciertos / erroneos - Partir de ellos para continuar. - Potenciar: · El interés por el estudio estadístico. · El uso de la información que se puede obtener a través de prensa, revistas, etc · El análisis crítico y la comparación entre las informaciones que recibe sobre un mismo suceso a través de distintos medios de comunicación.

EVALUACION

El proceso de evaluación será continuo. Partiendo de la realidad de cada alumno y teniendo en cuenta su evolución personal y el grado de logro de los objetivos marcados.

Los medios utilizados para esta evaluación serán:

· La observación directa del alumno; la revisión de su cuaderno; sobre todo su participación en los trabajos de análisis tanto a nivel personal como en el grupo.

93. PROGRAMACIÓN DE CICLO DE UN CENTRO

MEMORIA DE 3° DE E.S.O.

Antonio Box Cartagena

I.F.P. Callosa de Segura

Introducción

La asignatura de Matemáticas en el 3er curso de E.S.O. se imparte durante 3 horas semanales y abarca 4 unidades didácticas que son: Números, Geometría, Álgebra y Probabilidad-Estadística.
La programación del curso inicialmente reparte el tiempo a partes iguales entre las 4 unidades didácticas, aunque nosotros aconsejaremos una temporalización distinta.
El material de trabajo es amplio y diverso en cada una de sus partes, lo que permite que el profesor decida mediante qué actividades quiere llegar a alcanzar los objetivos que se ha planteado.
La gran cantidad de material no implica que este se tenga que dar todo, sino que el profesor dentro de cada unidad debe seleccionar los temas a impartir, eligiendo en ellos las actividades a realizar para alcanzar sus objetivos.
Es más interesante sacarle el máximo provecho a una actividad que hacer varias, aunque si vemos que una determinada actividad no funciona en alguna clase debemos terminarla pronto y por medio de otra actividad volver a intentarlo, si lo creemos conveniente.
Tenemos que tener claro que debemos dar a lo largo del curso las 4 unidades y por tanto tenemos que repartirnos bien el tiempo y no llegar a final del curso sin haber tocado las 4 unidades en mayor o menor medida.
En 4° curso de E.S.O. también se imparten 3 horas semanales de Matemáticas por lo que si se quedara en alguna unidad cosas interesantes por dar siempre se podrían al año siguiente.

NÚMEROS

Justificación

Esta unidad temática es la base para todo el curso de Matemáticas y también es la base para otras asignaturas. Por ello es la primera con la que se aborda el curso.

Ubicación en la programación

El tiempo que inicialmente tiene programado esta unidad es de 8 semanas, al repartir el contenido del curso en 4 partes iguales.
Pero mi recomendación es tomar una duración de todo el 1er trimestre (unas 11 semanas) y las razones para ello son las siguientes:

- Es la base para todo el curso, un mal trabajo en esta parte nos repercutiría durante todo el curso.
- Al ser un trimestre entero, cierra un bloque en el tiempo y no deja dos semanas con otra unidad a la que, al haber exámenes en esas fechas, le sacaríamos poco resultado.

- Trabaja actividades relacionadas con las de otras unidades.
- Es el comienzo del curso y necesitaremos tiempo para trabajar el funcionamiento de los grupos en la asignatura.

NOTA: Es de señalar que en 4° curso de E.S.O. también existe una unidad didáctica de números con una programación de 4-6 semanas, por lo que si nos quedasen cosas por ver no importaría tanto, con lo que no es conveniente alargarse mas de un trimestre con esta unidad.

Condiciones para su desarrollo

Recomiendo empezar las primeras actividades con un grupo de 4 o 5 actividades pequeñas, o con actividades en las que se puedan repartir la tarea de modo que cada uno de los alumnos del grupo se vaya responsabilizando en una tarea y pueda empezar a formarse la estructura interna del grupo (Líder, Secretario, Portavoz, etc.).

Contenidos específicos de la unidad

- La calculadora.
- Cálculo Mental.
- Potencias y raíces.
- Números grandes y pequeños.
- Propiedades geométricas de los números.
- Cálculo aproximado.
- Números enteros.
- Fracciones y repartos.
- Números irracionales.
- Fibonacci y Tartaglia.
- Los números y el dinero.
- Números en la prensa.

Objetivos de aprendizaje

1. Saber operar con los distintos tipos de números, con la calculadora y/o manualmente y/o mentalmente.
2. Descubrir y comprender el sentido relativo y absoluto del tamaño de un número. Analizar algunas de sus propiedades e incorporar al lenguaje cotidiano formas de expresión matemática.
3. Aprender a buscar estrategias para la resolución de problemas bien haciendo cálculos exactos o aproximados.
4. Analizar los datos que aparecen a nuestro alrededor para poder comprender mejor sus mensajes e identificar los elementos matemáticos que en ellos aparecen.
5. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que nos permitan identificarla mejor.

Plan general de actuación

El orden de abordar la unidad didáctica podría ser el siguiente:

1º) Grupo "La calculadora" o "Cálculo Mental".

2º) Grupo "Cálculo Mental" o "La calculadora".

Uno a continuación del otro. Las razones para elegir estos grupos como primero y segundo en cuanto al orden a seguir son:

- Por una parte la calculadora da mucha actividad y rapidez al grupo; permite incluso a los mas flojos a tomar confianza en sí mismos y sobre todo es que para la mayoría de los alumnos va a ser algo desconocido, y lo desconocido siempre atrae.
- El cálculo mental también permite tener confianza y darse cuenta de propiedades de los números y trucos con los que impresionar a los demás, y eso, siempre gusta.
- Ambas crean competencia en el grupo y una buena discusión y debate.

3º) Grupo "Potencias y raíces".

Este grupo permite seguir descubriendo la calculadora, y a su vez aprender a operar con potencias, descubriendo sus propiedades y valorando el tamaño de una potencia.

4º) Grupo "Números grandes y pequeños".

En este grupo se intenta que el alumno descubra el sentido relativo y absoluto de un número y que sea capaz de dimensionar y cuantificar las cosas.

5º) Grupo "Números enteros".

La elección de este grupo a continuación es porque los dos grupos anteriores "Propiedades geométricas de los números" y "Cálculo aproximado" se pueden ver en otro momento sin entorpecer al desarrollo del trabajo e incluso en caso de falta de tiempo podríamos prescindir de ellos.

En este grupo, uno de los más extensos de la unidad, veremos actividades que nos permitirán trabajar los siguientes conceptos:
- Números Primos y compuestos.
- Múltiplos y Divisores.
- Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.
- Representación gráfica de los números enteros.
- Operar con números enteros, descubriendo curiosidades.
- Teorema de Pitágoras.

6º) Grupo "Fracciones y Repartos".

Este grupo también es uno de los que considero imprescindibles, en él podremos abordar los siguientes conceptos:
- Operar con fracciones.
- Concepto de fracción e interpretación geométrica.
- Fracciones equivalentes.
- Reducción de fracciones a común denominador.
- Repartos proporcionales.
- Conversión de números fraccionarios a decimales y viceversa.

7º) Grupo "Los Números y el Dinero".

En este grupo se tratan los porcentajes y las reglas de tres simples. Este grupo se podría dar en cualquier otro momento también.

8º) Grupo "Números en la Prensa".

Este grupo contiene una serie de actividades propuestas a través de recortes de prensa en las cuales en unas tendremos que aplicar los instrumentos matemáticos conocidos para resolver las cuestiones que nos planteen y en otras tendremos que analizar y cuantificar otros datos.

Las actividades de este bloque convendría ir introduciéndolas a lo largo de los otros grupos de modo que nos sirvan para completar y aplicar lo aprendido con los otros grupos.

9º) Grupos Varios.

En esta unidad he dejado aparte 4 grupos de actividades pues considero que estas son de las que deberíamos de prescindir en caso de que nos faltase tiempo en esta unidad. Estas son:

- Propiedades geométricas de los números.
Este grupo contiene una serie de actividades que nos permiten explorar:
  - El cuadrado de un binomio.
  - Potencias.
  - Series y Sucesiones.
- Cálculo Aproximado.
Este grupo intenta obtener resultados aproximados tomando modelos de semejanza válidos que estén a nuestro alcance, y darse cuenta que algo aproximado es mejor que nada y que las aproximaciones muchas veces son suficientes.
- Números Irracionales.
En este grupo se trabajan los números irracionales y se ven los conceptos de "mayor", "menor" y "límite". También se tratan los decimales enteros y periódicos.
- Fibonacci y Tartaglia.
En este grupo se analizan las sucesiones de Fibonacci y las propiedades. del triángulo de Tartaglia.

Proceso evaluador

El método evaluador que he llevado en las 4 unidades que componen el curso, constaba de 4 partes de las que cuantificaba una nota Y después hallaba su media.
Los 4 aspectos en los que me basaba a la hora de evaluar eran los siguientes:
1°) Hábito de trabajo en clase y comportamiento.
Estos aspectos los cuantificaba poniendo positivos cuando el grupo conseguía realizar la actividad bien en clase o en sus casas, o incluso cuando veía que un determinado grupo se había esforzado mucho aunque no lo hubiera conseguido; y poniendo negativos para penalizar el comportamiento y la desidia por el trabajo del grupo.
El resultado de los positivos menos los negativos me cuantificaban la nota poniendo un 10 al alumno con mejor resultado y a los demás directamente proporcional a su resultado.
Con esta nota intento premiar el trabajo en grupo y penalizar el comportamiento individual.
2°) Cuaderno de clase.
El cuaderno de clase es uno de los elementos fundamentales en el desarrollo de la asignatura pues en él debe de quedar constancia de lo trabajado en la asignatura y de cómo lo hemos trabajado. Un buen trabajo en el cuaderno de clase permite al alumno tener un apoyo en la asignatura al no disponer de un libro de texto específico.
Corregir el cuaderno de clase de todos los alumnos, de todos los cursos a los que se imparte la asignatura es muy pesado, por lo que sólo los he corregido una vez al final de cada evaluación. Al principio del curso cuando llevábamos realizadas tres actividades, también los recogí para corregir los defectos en la forma de realizar el cuaderno; esto es bueno y por lo tanto necesario aunque creo que sería suficiente con corregir un cuaderno de cada grupo en profundidad y después que el resto del grupo se evalúe y corrija su cuaderno.
La nota del cuaderno la sacaba al analizar en éstos los siguientes aspectos:
- Limpieza y presentación del cuaderno.
  Observaba si respetaban los márgenes en el bloc, si comenzaban cada actividad en una hoja nueva, si la actividad estaba bien estructurada en cada una de sus partes, si estaba limpio y ordenado.
- Desarrollo y explicación de las actividades.

Valoraba si habían llegado a un buen análisis de la actividad o simplemente se habían dedicado a copiar de la pizarra la puesta en común. Si tenían figuras o notas explicativas durante el desarrollo de la actividad. Si habían encontrado alguna manera original de resolver la actividad.

- Comentarios y reflexiones del alumno sobre la actividad.

En este apartado valoraba si el alumno había sacado una buena reflexión acerca de lo visto en la actividad, y si había conseguido otros caminos para resolver la actividad, o si planteaba nuevos alicientes y dudas para el desarrollo de la actividad. También valoraba si había hecho cualquier tipo de ampliación de la actividad o la relacionaba con alguna otra o la aplicaba a algún otro caso real.

Con esta nota intento evaluar el grado de aprovechamiento y análisis del alumno sobre las actividades de la unidad didáctica, algo que sería conveniente hacerlo con más frecuencia pero que en mi opinión es muy difícil por el tiempo que necesita.

<u>3º) Exámenes de grupo</u>

Está claro que a los alumnos se les motiva más a trabajar si al final tienen un premio o nota que los recompensen y que no sea un simple positivo. Por lo que para favorecer el funcionamiento en el grupo y hacerles repasar cada cierto tiempo un grupo de bloques, les realizaba unos exámenes que tenían que resolverlos con los mismos grupos que trabajaban en clase.

La media de las notas de estos exámenes en grupo era la nota con la que evaluaba este apartado, la cual era la misma para todos los componentes del grupo.

La finalidad de esta nota es motivar el trabajo y funcionamiento del grupo y premiar la solidaridad en el grupo. Como esto nos supondría corregir 6 o 7 exámenes por clase, podríamos hacer un par de ellos en cada evaluación. Mi experiencia es que dan buen resultado.

<u>4º) Examen individual</u>

Para evaluar y distinguir las capacidades individuales de los alumnos fuera y dentro del grupo, les realizo una prueba por unidad didáctica de la que obtengo la última nota para evaluar.

<u>Finalidad de las sesiones. Material.</u>

<u>*Grupo "La calculadora."*</u>

<u>Actividad 1</u> : Empezar a conocer cosas de la calculadora.

Ejercicios: (2) Números negativos y decimales. (5) Tecla "A" y "AC". (6) Tecla "Min" y "MR" (7) La Operación constante. (4) Preferencia en las operaciones.

<u>Actividad 2</u> : Hacer cosas con la calculadora.

Ejercicios: (3) Teclas de Memoria. Operar con la memoria.

(10) Trabajar los %. (8) Explorar los números grandes. (9) Explorar otras teclas como "1/X" y “X^2”. (12) Agilidad en el manejo de la calculadora.

<u>Material</u>: calculadora.

<u>Planificación</u>: La duración de este grupo no debería de sobrepasar las 5 horas de clase. Son las primeras actividades y por tanto el profesor tendrá que llevar atención en que el trabajo en grupo empiece a formarse. Podemos darles con este conjunto de actividades la posibilidad de que entre ellos se repartan las tareas mas fácilmente, sin que esto implique que cada alumno se encargue de uno solo de los ejercicios sin preocuparse de los otros.

<u>*Grupo "Cálculo Mental"*</u>

<u>Actividad 1</u> : Descubriendo reglas de cálculo.

Ejercicios: (15) y (16)

<u>Actividad 2</u> : Practicando reglas de cálculo.

Ejercicios: (17) y/o (18) y/o (19)
Material: Papel y lápiz.
Planificación: La duración de este grupo no debe de sobrepasar las 4 horas. Vuelvo a insistir e n l a e s p e c i a l atención del profesor sobre el funcionamiento del trabajo en los grupos, corrigiéndoles errores y explicándoles como realizar el cuaderno.
Grupo "Potencias y raíces"
Actividad 1 : Producto y cociente de potencias de exponente entero.
Ejercicios: (21) Hay que ampliar el cociente de potencias.
Actividad 2 : Producto y cociente de potencias con exponente cualquiera.
Ejercicios: (22) y (23) Como ampliación podemos dar el concepto de raíz como potencia de exponente fraccionario y potencia de una potencia.
Actividad 3 : operar con potencias en la calculadora. (Puede ser substituta de la anterior).
Ejercicios: (24) y (25) Potencias de exponente fraccionario. (26) y (27) Descubrir cosas de las potencias.
Actividad 4 : Curiosidades.
Ejercicios: (20), (28) y (30) Permiten trabajar los conceptos anteriores de un modo más divertido.
Material: Calculadora, Regla, Escuadra, Cartabón, Dados de potencias de dos.
Planificación: La duración de este grupo debería de ser de unas 4 horas, más tiempo no es conveniente ya que nos meteríamos en mitad del primer trimestre habiendo visto sólo 3 grupos de los 12 que componen la unidad de números.
Menos tiempo, si queremos ver un poco bien las potencias y raíces, es prácticamente imposible. Yo recomendaría hacer la primera actividad y después elegir entre la segunda y la tercera, teniendo la cuarta actividad como recurso ante algún grupo más adelantado.
En este grupo el agrupamiento de ejercicios es más variable dependiendo lo
que queramos alcanzar. Para conseguir resultados algo satisfactorios deberíamos tener ya un poco de hábito de trabajo en grupo aunque perdamos una hora en ello.
Grupo "Números grandes y pequeños"
Actividad 1 : Dimensionar las cosas.
Ejercicios: Se podrían elegir 2 o 3 ejercicios para introducirlos en una actividad, dependiendo de lo que queramos conseguir. Los ejercicios (32), (34), (35) y (41) me dieron buenos resultados.
Material: Calculadora, papel, tijeras.
Planificación: A este grupo no le dedicaría más de 2 horas y lo vería detrás de las potencias pues las vuelve a trabajar.
Grupo "Números enteros"
Actividad 1 : Múltiplos y Divisores.
Ejercicios: (59), (61), (62) y (63). Se podrían ampliar los conceptos de máximo común divisor Y mínimo común múltiplo.
Actividad 2 : Pitágoras y ternas pitagóricas.
Ejercicios: (64), (65), 66) y (67). A elección.
Actividad 3 : Representación gráfica de los números enteros.
Ejercicios: (71), (72), (73), (74), (75), (76), (77). A elección.
Actividad 4 : Operar con números enteros, descubriendo estrategias y curiosidades.
Ejercicios: (60), (68), (69) y (70). A elección.
Material: Calculadora, regla, compás, escuadra, cartabón, barajas, barras de meccano.

Planificación: La duración que podríamos programar para este bloque sería de unas 4 horas. Conceptos como el teorema de Pitágoras y la representación gráfica también se tratan el la unidad de geometría..

Grupo "Fracciones y Repartos"

Actividad 1 : Concepto de fracción. Interpretación geométrica.
Ejercicios: (78), (79), (82) y (83). A elección.
Actividad 2 : Equivalencia de fracciones.
Ejercicios: (81),(84) y (85). A elección.
Actividad 3 : Operar con fracciones.
Ejercicios: (86),(87) y (88). A elección.
Actividad 4 : Repartos proporcionales.
Ejercicios: (78), (79) y (89). A elección.
Actividad 5 : Conversión de números fraccionarios en decimales y viceversa.
Ejercicios: (90) y (91). A elección.
Material: calculadora, regla, escuadra, cartabón, compás, dominós, barajas, fracciones de figuras geométricas, cartulinas.
Planificación: Todos sabemos que una de las cosas con las que más se atragantan los alumnos, es con las fracciones; por ello deberemos dedicarle tiempo si queremos conseguir resultados.
Este grupo cuenta con mucho material para trabajar, por lo que antes de abordarlo tendremos que planificarnos en mayor medida, lo que queremos conseguir. La duración para este grupo no debería de ser mayor de 6 horas.
Debemos hacer una selección de actividades, y substituir alguna con juegos de barajas y dominós en clase.

Grupo "Los Números y el Dinero.

Actividad 1 : Porcentajes y reglas de tres simples.
Ejercicios: (117), (118) y (119). A elección.
Material: Calculadora.
Planificación: La duración de este grupo podría ser de unas 2 horas. Los porcentajes y las reglas de tres suelen ser fáciles para los alumnos.

Grupo "Números en la Prensa".

Las actividades en este grupo, como ya se comentó, convendría introducirlas dentro de cada uno de los otros grupos anteriores, para completar, reforzar y mostrar la utilidad de lo que los alumnos trabajan en clase.
La duración que podríamos planificar para este grupo podría ser de unas 6 horas.

Grupo "Propiedades geométricas de los números".

Actividad 1 : A elección, 2 o 3 ejercicios de este grupo en una actividad.
Material: calculadora, escuadra, cartabón, regla, compás, cartulinas, tijeras, cubos de pórex, barajas.
Planificación: A este grupo, en caso de elegirlo, yo le dedicaría unas 3 horas. También se puede dar este grupo en la unidad de geometría sin problemas.
Este grupo abarca muchas cosas, por lo que su elección debe ir dirigida a un concepto concreto.

Grupo "Cálculo Aproximado"

Actividad 1 : A elección, uno o dos ejercicios en una actividad.
Material: Calculadora, Regla, Compás.
Planificación: A este grupo, en caso de elegirlo, yo no le dedicaría más de una o dos horas. Simplemente buscaría que los alumnos entendiesen que la realidad es hacer cálculos aproximados.

Grupo "Números Irracionales"
Actividad 1 : Decimales exactos y periódicos.
Ejercicios: (94) y (95). A elección.
Actividad 2 : Trabajar con números irracionales en la calculadora.
Ejercicios: (92), (93) y (96).
Material: Calculadora.
Planificación: A este grupo en caso de darlo, no le dedicaría mas de 2 o 3 horas. Este sería uno de los grupos que yo no daría.
Grupo "Fibonacci y Tartaglia"
Actividad 1 : La sucesión de Fibonacci.
Ejercicios: (97) o (104).
Actividad 2 : Propiedades de la sucesión de Fibonacci.
Ejercicios: (98), (99), (100) y (102). A elección.
Actividad 3 : El triángulo de Tartaglia.
Ejercicios: (105),(106),(107) y (108). A elección.
Actividad 4 : Aplicación del triángulo de Tartaglia.
Ejercicios: (111).
Material: calculadora, binostato.
Planificación: A este grupo podríamos, en caso de darlo, tener una previsión de unas 4 horas.

Reflexión y crítica de la unidad
Con lo novatos que éramos tanto los alumnos como yo, en esta nueva manera de trabajar; la verdad es que ha sido difícil. Muchas veces me he quedado con la sensación de que se perdía mucho el tiempo y no se daban en profundidad los temas que tocaba. Aunque poco a poco, con una mejor planificación y experiencia soy optimista en cuanto a los resultados que se pueden obtener.
Uno de los caballos de batalla con los que siempre me he topado, ha sido con el tiempo. Aún eliminando algún grupo de actividades y alargando el tiempo inicialmente programado en 3 semanas, siempre llegas al final del trimestre faltándote un montón de cosas por dar. En esta planificación los grupos que considero más importante los he dado antes y los restantes, dependiendo del tiempo se darán o no.
Una de las cosas que creo mas importante es la de conseguir un buen nivel de trabajo de grupo con las actividades y una buena realización del cuaderno. A la larga esto nos permite ir mas deprisa aunque hayamos perdido tiempo corrigiendo defectos en otros momentos.

GEOMETRÍA

Justificación
Esta unidad temática tiene como finalidad el desarrollo de la "capacidad espacial" con el fin de resolver problemas relacionados con el mundo geométrico.

Ubicación en la programación
El tiempo que inicialmente tiene programado esta unidad es de 8 semanas, al repartir el contenido del curso en 4 partes iguales.
Pero mi recomendación es tomar una duración de unas 6 semanas, y las razones para ello son las siguientes:

- En la primera unidad ya he alargado el tiempo inicial de programación, y por tanto ese tiempo hay que quitárselo a otras unidades.
- Los contenidos que se tratan en esta unidad, también se tratan en gran parte en la asignatura de dibujo, por lo que ideal sería no repetir en las dos
asignaturas actividades parecidas; poniéndonos de acuerdo con el profesor de dibujo en las actividades a realizar.
- El contenido de esta unidad también es muy amplio e incluso con el doble de tiempo no lo podríamos ver con la suficiente profundidad como para quedarnos satisfechos. Por lo que debemos de seleccionar aquellos apartados que queremos impartir.

NOTA: Es de señalar que en 4° curso de E.S.O. también existe una unidad didáctica de geometría con una programación de 6-8 semanas, por lo que si nos quedasen cosas por ver no importaría tanto.

Condiciones para su desarrollo

Los alumnos deben de tener la posibilidad de ver e incluso tocar los objetos sobre los que trabajan, bien directamente o a través de representaciones simples. La utilización de representaciones del espacio real (mapas, planos, esquemas...), así como de objetos geométricos constituyen una gran herramienta en la resolución de problemas.
Es necesario que los alumnos traigan a clase todo el material necesario para la realización de cada actividad, por lo que deberemos de avisarles con anterioridad.

Contenidos específicos de la unidad

- Construcciones e Investigaciones.
- Estimación.
- Volúmenes y raíces.
- Teorema de Pitágoras. Aplicaciones.
- Introducción a la Trigonometría.
- Movimientos en el plano.

Objetivos de aprendizaje

1. Identificar las características de las formas planas y descomponerlos en las figuras elementales que los forman.
2. Estimar la medida de superficies de espacios y objetos, y calcularla cuando se trate de formas planas limitadas por segmentos y arcos de circunferencias. Saber calcular también algunos volúmenes sencillos.
3. Interpretar representaciones planas sencillas de espacios y objetos y obtener información sobre algunas de sus características.
4. Utilizar la relación de proporcionalidad numérica y geométrica para obtener cantidades y figuras proporcionales a otras.
5. Conocer y utilizar los conceptos de ángulos, movimientos, semejanzas, distancias, en el estudio de representaciones geométricas y problemas gráficos.

Plan general de actuación

1º) Grupo "Construcciones e Investigaciones".

Este grupo de actividades trabaja muchos conceptos y aspectos de la geometría. Inicialmente existen unas actividades que permiten descubrir al alumno distintas construcciones con distintos tipos de materiales y medios. otras actividades trabajan la composición y descomposición de unas figuras

geométricas en otras. También se investiga la resolución de problemas mediante la utilización de medios geométricos así como el estudio de ciertas
propiedades notables geométricas.

2º) Grupo "Estimación".

En este grupo de actividades se pretende que el alumno sea capaz de estimar las magnitudes de longitudes, áreas y volúmenes de objetos y espacios que se encuentren a su alrededor, sabiendo valorar el tipo de modelo o estrategia a seguir y analizando la suficiencia o no de la exactitud del resultado obtenido. valorando el tamaño de una potencia.

3º) Grupo "Volúmenes".

Este grupo trabaja el cálculo de algunos volúmenes sencillos analizando la influencia que tienen cada una de los par metros que la describen.

4º) Grupo "Teorema de Pitágoras. Aplicaciones".

En este grupo veremos una serie de actividades que nos permiten trabajar los siguientes conceptos:

- Segmentos y ángulos.
- Descomposición de unas figuras geométricas en otras.
- Series y proporcionalidad en figuras geométricas sencillas.
- El teorema de Pitágoras y el teorema de Thales.

5º) Grupo "Introducción a la Trigonometría".

Este grupo puede considerarse como una aplicación del grupo anterior , en el vamos a volver a trabajar los ángulos y los segmentos y a estudiar sus relaciones y propiedades en los triángulos rectángulos. También se abordaran las razones trigonométricas SENO, COSENO y TANGENTE.

6º) Grupo "Movimientos en el Plano".

En este grupo se trabajan los distintos movimientos en el plano (Traslaciones, Giros, Simetrías) inicialmente se introducen con figuras geométricas sencillas y posteriormente mediante juegos y divertidas actividades.

Finalidad de las sesiones. Material

Grupo "Construcciones e Investigaciones"

Actividad 1 : Construcciones y propiedades geométricas.

Ejercicios: A elección de entre todas las actividades de este grupo.

Actividad 2 : Resolución de problemas geométricos.

Ejercicios: A elección de entre las varias actividades de este grupo.

Material: compás, escuadra, cartabón, semicírculos, regla, cartulinas, papel de colores, geoplanos, juego de cálculo de áreas.

Planificación: La duración de este grupo no debería de sobrepasar las 4 o 5 horas de clase aunque parezca increíble. Esta unidad es muy extensa y nos podemos perder si nos planteamos dar muchos contenidos en ella.

Podemos intentar repartir distintas actividades a un mismo grupo de modo que las actividades las realicen entre cada dos o tres alumnos del grupo y después se comenten los distintos resultados en la puesta en común, ya que la realización de estas actividades al ser de mucho trabajo manual requiere tiempo y por lo tanto tienen que hacer gran parte del trabajo en casa; de este modo les es más fácil reunirse.

Grupo "Estimación".

Actividad 1 : Haciendo estimaciones y deducciones.

Ejercicios: A elección podemos introducir en esta actividad un par de ejercicios que despierten en el alumno el buscar estimaciones de las cosas cuando no se pueden obtener exactamente y discutir la aproximación de esa estimación.
Material: reglas, metros, calculadora.
Planificación: La duración de este grupo no debe de sobrepasar las 2 horas. La intención esta clara y bien concretada por lo que pienso que con sólo una actividad tendríamos suficiente.
Grupo "Volúmenes"
Actividad 1 : Cálculo de algunos volúmenes sencillos.
Ejercicios: A elección se podrían elegir también un par de ejercicios para este grupo.
Material: calculadora, cartulinas, reglas, juego de figuras geométricas.
Planificación: La duración de este grupo debería de ser de unas 2 horas. Por esta época ya debemos de ir con retraso respecto a la programación inicialmente realizada.
Grupo "Teorema de Pitágoras. Aplicaciones"
Actividad 1 : Construcciones.
Ejercicios: Se podrían elegir 2 o 3 ejercicios para introducirlos en una actividad, dependiendo de lo que queramos conseguir.
Actividad 2 : Aplicaciones del Teorema de Pitagoras.
Ejercicios: Existe un buen conjunto de actividades con las que se pueden trabajar el teorema de Pitágoras, e incluso se pueden plantear actividades al aire libre o con los espacios y objetos de la clase para trabajar este grupo de actividades.
Material: calculadora, papel, tijeras, cartulinas, compás, escuadra, cartabón, ordenador.
Planificación: A este grupo no le dedicaría más de 4 horas, un poco de tiempo ya le dedicamos en el bloque de números.
Grupo "Introducción a la Trigonometría"
Actividad 1 : Trabajando los ángulos.
Ejercicios: Podemos elegir entre la variada clase de actividades, dos o tres que nos permitan trabajar los ángulos e introducir relaciones entre los lados de triángulos rectángulos.
Actividad 2 : Las razones trigonométricas.
Ejercicios: En esta actividad podríamos plantear varios ejercicios que nos permitan trabajar el SENO, COSENO y TANGENTE.
Material: calculadora, regla, compás, escuadra, cartabón, semicírculo.
Planificación: La duración que podríamos programar para este grupo es de unas 4 horas.
Grupo "Movimientos en el Plano"
Actividad 1 : Giros y Simetrías de figuras planas.
Ejercicios: Existen un conjunto de ejercicios que nos permiten introducir de una manera clara estos dos tipos de movimientos en el plano y que nos darán la base para plantearles en la siguiente actividad unas actividades mas generales.
Actividad 2 : Practicando movimientos en el plano.
Ejercicios: Ahora tenemos que decidirnos por trabajar la actividad de la cueva del tesoro o por trabajar el juego de las isometrías. Mi experiencia fue más favorable hacia la cueva del tesoro, pues el juego de las isometrías me llevó mucho tiempo prepararlo y después resultó demasiado dificultoso sobre todo alguno de los movimientos de la baraja.
Material: regla, escuadra, cartabón, espejos, compás, cartulinas.
Planificación: Aunque al principio les costó a los alumnos comprender los distintos movimientos, después resultó bastante ameno el trabajo con estas actividades, quizás fueron las más amenas para los alumnos de todo el bloque de geometría.
Yo le dedicaría a este grupo unas 4 o 5 horas si el tiempo lo permitiese.

Reflexión y crítica de la unidad

Esta unidad a mi parecer plantea demasiados conceptos para poder ser vistos una pequeña parte con cierta claridad. También es verdad que los alumnos con los que me he encontrado no habían trabajado antes apenas nada de geometría por lo que me resultó una unidad bastante incómoda; ya que intenté abordar mucho y por tanto apretar poco y me llevó mucho tiempo de dedicación que después lamenté, pues ya me había comido bastante mas de la mitad del curso.

Una cosa muy importante en esta unidad es ponerse en concordancia con el profesor/a de dibujo, pues algunas de las actividades que trabajé (por ejemplo: construcciones geométricas y simetrías) ya las habían trabajado en esta asignatura por lo que repetimos lo mismo en las dos asignaturas. Esto se podría haber tenido en cuenta antes de elaborar el material para esta unidad.

Otra cosa que también puede resultar interesante es la que ya comenté anteriormente de que realicen distintas actividades los diferentes grupos por parejas o tríos y después hacer una gran puesta en común de la clase, al tratarse de una unidad que se manipula mucho con las manos requiere un tiempo adicional que en clase desgraciadamente no disponemos de él.

FÓRMULAS Y GRÁFICAS

Justificación

Esta unidad temática tiene como finalidad la elaboración de estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del analisis de los resultados.

Tambien fomenta la exploración sistemática de alternativas, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

Ubicación en la programacion

El tiempo que tiene programado esta unidad es de 8 semanas, al repartir el contenido del curso en 4 partes iguales y se impartiría a continuación del bloque de geometría ya que el aspecto gráfico de esta unidad, se puede apoyar en la unidad anterior.

NOTA: Es de señalar que en 4° curso de E.S.O. tambien existe una unidad didáctica de álgebra con una programación de 6-8 semanas, por lo que si nos quedasen cosas por ver no importaría tanto.

Condiciones para su desarrollo

A estas alturas del curso ya debemos de haber conseguido un buen funcionamiento de los grupos, pues esto será fundamental para que el grupo intente la busqueda de estrategias y no se limite a encontrar un resultado y pararse; por lo que este será uno de los aspectos que el profesor deberá de fomentar y valorar en la realización de las actividades por parte de los alumnos.

Contenidos específicos de la unidad

- El lenguaje gráfico.
- El lenguaje algebraico.
- Traducciones y Porcentajes.
- Ecuaciones I.

- Ecuaciones II.
- La función exponencial.
- Sucesiones.
- otros problemas.

Objetivos de aprendizaje

1. Utilizar las gráficas (continuas) para obtener y comunicar información en fenómenos y situaciones conocidas.
2. Interpretar fórmulas sencillas que describan fenómenos o relaciones conocidas y obtener valores a partir de ellas.
3. Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que existan en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado.
4. Actitud positiva hacia el lenguaje simbólico como una potente herramienta para expresar diversas situaciones y para resolver problemas.

Plan general de actuación

El orden de abordar la unidad didáctica podría ser el siguiente:

1º) Grupo "El lenguaje gráfico".

Este grupo aborda la representación por medio de gráficas, de diferentes situaciones y fenómenos de la vida cotidiana.

2º) Grupo "El lenguaje algebraico".

En este otro grupo se pretende el empleo de la simbolización y la incorporación del lenguaje algebraico a situaciones que se puedan presentar.

3º) Grupo "Traducciones y Porcentajes".

Este grupo intenta que el alumno resuelva problemas que ocurren en la vida cotidiana y llegue a ser capaz de generalizar estos problemas mediante expresiones algebraicas.

4º) Grupo "Ecuaciones I".

En este grupo se plantean una serie de actividades en las que se vuelve a fomentar la introducción del lenguaje algebraico para representar y expresar diversas situaciones, mediante la generalización de algunos casos particulares.

5º) Grupo "Ecuaciones II"

En este grupo se intenta fundamentalmente la obtención de valores concretos mediante la interpretación de expresiones algebraicas que interpretan situaciones que s producen en la realidad. También pretende el planteamiento y resolución de problemas en los que aparecen ecuaciones de primer grado.

6º) Grupo "La función exponencial".

Este grupo trabaja una serie de actividades en las que se utilizan ejemplos en los que interviene la función exponencial.

7º) Grupo "Sucesiones".

En este grupo se tratan actividades en las que se trabajan las sucesiones, inicialmente a partir de desarrollos geométricos y posteriormente aritméticos.

8º) Grupo "otros problemas".

Este grupo contiene una serie de actividades propuestas que proponen la resolución de problemas mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado. Las actividades de este grupo se pueden introducir en otros grupos para reforzar o complementar los contenidos dados.

Finalidad de las sesiones. Material.

Grupo "El lenguaje Gráfico"

Actividad 1 : Representar mediante gráficas distintas situaciones de la vida real.
Ejercicios: (1) El salto del paracaidista. (2) El viaje al concierto. (3) Los depósitos. (4) Las notas de una clase. A elección.
Material: Papel cuadriculado.
Planificación: La duración de este grupo no debería de sobrepasar las 2 horas de clase. Estas actividades intentan que el alumno pueda reconocer y expresar diversas situaciones mediante la interpretación de gráficas.
Grupo "El lenguaje Algebraico"
Actividad 1 : Descubriendo los binomios. Simbolizando.
Ejercicios: (5) Trío. (6) Puntos de vista. (7) Diferencia de cuadrados. (8) Cuadrilandia. A elección
Actividad 2 : Generalizando.
Ejercicios: (9) El carpintero y la baranda.
Material: Papel, Cartulinas, Tijeras.
Planificación: La duración de este grupo no debe de sobrepasar las 3 horas. La generalización de situaciones particulares y la simbolización se emplean en toda esta unidad.
Grupo "Traducciones y Porcentajes"
Actividad 1 : Formalizando cosas relacionadas.
Ejercicios: (11) Rotuladores y Calculadoras. (13) Por tantos...hay tantos. A elección
Actividad 2 : Utilizando los Porcentajes. Generalizando.
Ejercicios: (12) La tienda de Luis. (14) I.V.A. (15) El vendedor espabilado. (16) Cosmética. A elección
Material: Calculadora.
Planificación: La duración de este grupo debería de ser de unas 4 horas; mi experiencia es que estos grupos de actividades suelen hacerlos rápidamente y les gusta.
Grupo "Ecuaciones I" y "Ecuaciones II"
Actividad 1 : Representando ecuaciones. Ecuaciones equivalentes.
Ejercicios: (19) y (20).Las maquinas.
Actividad 2 : Planteando ecuaciones. Resolviéndolas.
Ejercicios: A elección (17) La comitiva. (18) Bodas y Bautizos. (22) Fiesta en la calle.
Actividad 3 : Profundizando en las ecuaciones.
Ejercicios: (21) La solución es la ecuación. (23) El busca-números.
Actividad 4 : operando con ecuaciones.
Ejercicios: A elección. (24) Jugando con expresiones. (25) Haciendo pruebas. (26) La carcasa. (27) Matenko. (28) Ecuaciones con calculadora. (29) La maquina del cero. (33) Alberto y Ana.
Actividad 5 : Planteando y resolviendo ecuaciones.
Ejercicios: A elección (31) El mural. (32) El bar. (34) La piscina de Marta.
Material: Calculadora.
Planificación: A este grupo le podríamos dedicar unas 6 horas, podemos en muchas actividades profundizar un poco en ellas y sacar consecuencias y conclusiones que se plantean mas claramente en otras actividades de estos grupos.horas y lo vería detrás de las potencias pues las vuelve a trabajar.
Grupo "La función Exponencial"
Actividad 1 : Estudiando y planteando funciones exponenciales.
Ejercicios: A elección (35) El árbol genealógico. (36) Una y solo una pesa menos. (37) Las bacterias. (38) Presión Atmosférica. (39) La compañía.
Material: Calculadora, Papel cuadriculado.

Planificación: La duración que podríamos programar para este grupo sería de unas 3 horas; si queremos que entiendan un poco y sepan construir e interpretar las gráficas que resultan en los distintos casos.
Grupo "Sucesiones"
Actividad 1 : Sucesiones geométricas.
Ejercicios: (40), (41), (42), (43), (44), (45) y (47). A elección.
Actividad 2 : Sucesiones numéricas.
Ejercicios: (46), (48), (49), (50) y (51). A elección.
Material: Calculadora, Regla, Escuadra, Cartabón,
Planificación: En este grupo, podríamos hacer una actividad de cada con 1 o 2 ejercicios en cada una de ellas con lo que podríamos dedicarle unas 4 horas.

Reflexión y crítica de la unidad.
Esta unidad didáctica tengo que decir que es la que más me pedían los alumnos desde el principio del curso. Ellos querían hacer y resolver ecuaciones, lo otro decían que no servía para nada o que no eran matemáticas. Ahora que ya ha pasado el curso tengo que decir que es la unidad en la que mejor ha ido el funcionamiento de los cursos, muchas veces me sorprendía la rapidez con la que hallaban la solución varios grupos en cada clase.
En los dos exámenes por grupos que realicé, les planteé actividades de la unidad y fueron excelentes los resultados que obtuvieron, trabajaban ya casi como grupos bien organizados, ya se empezaban a recoger los frutos del resto del curso.
Esta unidad la vimos mucho más rápida de lo que inicialmente había previsto, tanto es así que no creía que podríamos ver la unidad de probabilidad y al final me quedó casi un mes para verla aunque fuese un poco por encima. De todos modos vuelvo a insistir en llevar un severo control con el tiempo para ver cada unidad y no dejarse ninguna unidad sin ver.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Justificación
Esta unidad temática me parece que está bien enfocada su temporalización al final del curso pues se trata de actividades bastantes amenas y divertidas con la que podemos trabajar muy distintos tipos de materiales y plantear a los alumnos problemas que cotidianamente están ocurriendo a nuestro alrededor. Como estamos ya al final del curso el conseguir que los alumnos, ya cansados de llevar gran parte del curso a cuestas, estén animados a trabajar y no entren en una pasividad contagiosa es un objetivo a conseguir y por lo tanto pienso que esta unidad nos lo permite.

Ubicación en la programación
El tiempo que inicialmente tiene programado esta unidad es de 8 semanas, al repartir el contenido del curso en 4 partes iguales. Nosotros tenemos claro que el tiempo que le dediquemos es el que nos quede para finalizar el curso, y que normalmente será bastante menos.

Contenidos específicos de la unidad
Al no tener aún los materiales de trabajo para esta unidad y al haber utilizado unos que provisionalmente se prepararon, más que separar los contenidos de la unidad por grupos concretos, voy a comentar una serie de contenidos que serán los que trabajemos Pero sin diferenciar en actividades.

- Sucesos Aleatorios.

- Juegos y Simulaciones.
- Números Combinatorios.
- Tratamiento del azar.
- Recogida y analisis de datos.

Objetivos de aprendizaje

1. Hacer predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso a partir de información obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades.
2. Interpretar y obtener gráficas estadísticas sencillas, correspondientes a distribuciones discretas de datos con pocos valores diferentes.
3. Aprender a valorar los datos presentados en forma de probabilidad y analizarlos cuando aparecen en los medios de comunicación.
4. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que nos permitan identificarla mejor.

Plan general de actuación

El orden de abordar la unidad didáctica podría ser el siguiente:

1°) Grupo "Juegos y Simulaciones".

En este grupo se tienen un buen número de actividades que nos permiten analizar las probabilidades de determinados sucesos a la vez que experimentar los propios alumnos con diversos materiales para llegar a descubrir que la probabilidad es lo esperable en el analisis de un suceso. También permite al alumno desarrollar una intuición sobre lo incierto, permitiendo razonar sobre el posible resultado de los fenómenos o experiencias en las que interviene el azar.

2°) Grupo "Probabilidad y Estadística".

En este otro grupo también se trabajan las probabilidades pero además empiezan a adentrarse dentro de la estadística mediante la recogida de datos sencillos sobre los propios compañeros de la clase, o situaciones familiares a su entorno. También se puede empezar a analizar resultados presentados en términos de probabilidad o mediante gráficas estadísticas.

3°) Grupo "Contar".

Este grupo permite trabajar el estudio de las distintas posibilidades que pueden presentarse en un determinado suceso aleatorio, así como el trabajar con los números combinatorios.

Finalidad de las sesiones. Material.

En cualquiera de los grupos de esta unidad existen multitud de actividades para trabajar los conceptos de esta unidad. Es conveniente que los alumnos experimenten distintas situaciones y vean como realmente al aumentar

el número de veces que experimentamos un suceso, la probabilidad de éste se acerca cada vez más a la teórica. También resulta interesante que sean capaces de recoger y analizar los datos que ellos pueden tomar de diversas situaciones reales que existen a su alrededor.

El material que se puede utilizar para esta unidad es muy diverso: barajas, dados, ruletas, monedas, fichas de colores figuras geométricas, etc.

Reflexión y Crítica de la unidad.

Esta unidad llegue a trabajarla poco debido como siempre a la falta de tiempo, y sólo se realizaron unas 5 actividades de toda la unidad; de todas formas resultó una unidad bastante amena y divertida y que a los alumnos les gustaba y obtenían resultados bastantes satisfactorios.

A veces la clase se convertía en un verdadero infierno de sonidos de monedas y dados, pero esto no nos debe importar puesto que una cosa que si me quedó clara es que razonan mejor y lo comprenden más si son ellos mismos los que experimentan y se comportan como elementos indispensables para la realización de la actividad.

MEMORIA DE CUARTO DE E.S.O.

Instituto "Santiago Grisolía"
Callosa de Segura (Alicante)

EDUARDO GARRI CARRILLO

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Matemáticas en el 4° curso de E.S.O. se imparte durante 3 horas semanales y abarca 4 unidades didácticas que son: Fórmulas y Gráficas, Probabilidad-Estadística-Combinatoria, Geometría y Resolución de Problemas.
La programación del curso, inicialmente, repartía el tiempo de la siguiente forma:
Probabilidad-Estadística-Combinatoria ....3 meses.
Fórmulas y Gráficas ....3 meses.
Geometría ....2 meses.
Resolución de Problemas ....1 mes.
Sin embargo, por los motivos que expondré mas adelante quedó de esta otra:
Probabilidad-Estadística-Combinatoria .... 5 meses.
Fórmulas y Gráficas....................................... 2 meses y medio.
Geometría y Resolución de Problemas ....1 mes y medio.
He de señalar que es la primera vez que he impartido Reforma y que he tenido 4 cursos de 4° de E.S.O.,donde, además, las opciones A y B estaban mezcladas en los cuatro cursos, lo que, en la práctica, ha hecho que no se diferenciaran en nada las dos opciones. Además, las previsiones que hay para el próximo curso 93-94 son las mismas, debido a la dificultad que hay de confeccionar los horarios con tantas asignaturas optativas y a que el instituto se ha quedado pequeño, por lo tanto tendremos este problema durante varios cursos hasta que se amplíe el instituto.

CONTENIDOS

1. PROBABILIDAD-ESTADÍSTICA-COMBINATORIA.
Empecé por esta unidad porque como en tercero se quedó para el final, casi no se había dado. De hecho, algunos alumnos habían dado algo y otros nada, dependiendo del tercero del que provenían. Es por ello por lo que empecé con actividades de 1°,2°,3° y 4° de E.S.O., para ir introduciéndolos poco a poco en la Probabilidad.
Las actividades seleccionadas para dar a los alumnos fueron:
CAER AL AGUA (pág. 9, 1° E.S.O.).
PAR O IMPAR I (pág. 12, 1° E.S.O.)

PAR O IMPAR II (pág. 13,1° E.S.C.)
TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS (pág. 11, 1° E.S.O., pág.. 8, 3° E.S.O.)
LA MONEDA (pág. 22,3° E.S.O.)
LOTERIA PRIMITIVA (pág. 22, 3° E.S.O.)
LOTERÍA (pág. 22,3° E.S.O.)
EL JUEGO JUSTO (pág. 26, 1° E.S.O.)
BARAJA I (pág. 35, 1° E.S.O.)
BARAJA II (pág. 36, 1° E.S.O.)
MESES DEL AÑO (pág. 27, 1° E.S.O.)
CON LA RULETA (pág. 21, 2° E.S.O.)
LABERINTO PARA CONDENA (pág. 27,3° E.S.O.)
LA PENA DE MUERTE EN CEFALONIA (pág. 35, 4° E.S.O.)
ALARGANDO PARTIDAS (pág. 31, 4° E.S.O.)
LA CAZA DE PATOS (pág 22, 4° E.S.O.)
LAS TRES FICHAS (pág. 22, 4° E.S.O.)
ENCUESTA I (pág. 59, 4° E.S.O.)

Para exámenes individuales y en grupo seleccioné las actividades:
CANALES TV (pág 43, 3° E.S.O.)
LA CUEVA (pág.51, 2° E.S.O.)
URNA II (pág. 26, 3° E.S.O.)
CLARA O SUSANA (pág 26, 3° E.S.O.)
CARMEN E ISABEL (pág 29, 3° E.S.O.)
BALONCESTO (pág 29, 3° E.S.O.)
CON UNA URNA (pág 36, 4° E.S.O.)
que, en general, me dieron buen resultado.

El problema surgió con la actividad ENCUESTA I. La acogieron con entusiasmo y seleccionaron los siguientes temas (uno por curso): EL S.I.D.A., LA SEXUALIDAD, RELACIONES SERIAS ENTRE PAREJAS y LA REFORMA.
El formular las preguntas, recoger los datos, hacer el recuento e ir al aula de informática a meter los datos les gustó mucho, sobre todo el ver los distintos tipos de gráficos que habían en el programa y el ver el gráfico que les salía conforme iban metiendo los datos, pero para mí fue un calvario, porque todos te llamaban al mismo tiempo y no podías estar en todas partes. Por si faltaba algo, el programa que creíamos que nos pasaba los números de votos a %, no lo hacía y tuvimos que sacar los gráficos con números de votos, en vez de tantos por ciento.
Para el próximo curso recomiendo hacer solamente una encuesta; usar otro programa para hacer las gráficas y meter uno mismo los datos y sacarlos por impresora (si no, luego, te toca repasarlos uno a uno).También recomiendo subirlos al aula de informática para que vean distintos tipos de gráficos. Esto nos llevó mucho tiempo y trabajo, por lo que estuvimos cinco meses, en vez de los tres previstos con esta unidad y no nos dio tiempo a ver la estadística a fondo.
Al final les pedí un comentario con % sobre los resultados obtenidos en la encuesta, tuvieron dos meses para hacerlo y los resultados fueron muy interesantes (y practicaron la redacción).

2. FÓRMULAS Y GRÁFICAS.
Las actividades seleccionadas fueron:

CASILLAS Y NÚMEROS
GRÁFICAS I
GRÁFICAS II
ADIVINANDO CARTAS
EL APARCAMIENTO
UN SALTO INFINITO I
CAMBIO DE PRECIOS
EL SUPERCANGURO PEREZOSO
TRAMA CUADRADA
DOS POR UNO
EL CÍRCULO
LOS LOGARITMOS
BUSCANDO

Y como exámenes individuales y en grupo:
DOS AÑOS DE AUMENTO
EL JARDÍN
CAMBIO DE PRECIOS
DOS POR UNO

3. GEOMETRÍA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
Las actividades seleccionadas fueron:
MEDIDA DE ÁNGULOS
SUMAR Y RESTAR
RADIANES
CALCULADORA
EL ENGAÑO DE LOS ESPÁRRAGOS
LA RAÍZ CUADRADA DE LA FELICIDAD
BORGES Y EL LADRÓN SOÑADO
EL OCTÓGONO REGULAR DESDE EL CUADRADO
LA DISTANCIA MÁS CORTA ENTRE DOS PUNTOS ES...
Y como exámenes:
LA CURVA
LATITUDES
LA TIERRA Y LA PELOTA
Debido a que el curso se estaba acabando tuve que darlo todo como una sola unidad.

OBJETIVOS A CONSEGUIR

Los objetivos a conseguir eran:
- Utilización de métodos empíricos y de recuento para asignar probabilidades.
- Cálculo de probabilidades teóricas usando la regla de Laplace.
- Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas sencillas.
- Actitud positiva hacia las informaciones dadas en términos de probabilidad.
- Procedimientos de obtención y manejo de datos estadísticos referidos a variables continuas o discretas.
- Actitud positiva y crítica ante las informaciones estadísticas.
- Que supiesen el trabajo que conlleva realizar e interpretar los resultados de una encuesta.

- Que supiesen manejar la calculadora.
- Utilización correcta de las relaciones de proporcionalidad.
- Que usasen el lenguaje algebraico.
- Que interpretasen alguna representación gráfica.
- Tratamiento algebraico de relaciones funcionales simples.
- Que supiesen qué es un angulo, cómo se mide y en qué unidades, y supiesen pasar de unas unidades a otras con calculadora o sin ella.
- Que diferenciasen entre longitud de la circunferencia y área del círculo.
- Que supiesen explicar cómo resuelven un problema y se diesen cuenta que no siempre tiene solución única, sino que, a veces, tiene varias soluciones o ninguna.
- Precisión en el manejo de la medida.

PROCESO EVALUADOR

El método evaluador que he llevado en las 3 unidades en que he dividido el curso, constaba de partes de las que cuantificaba una nota y después hallaba su media.
Los 4 aspectos en los que me basaba a la hora de evaluar eran los siguientes:

1. Hábito de trabajo en clase y comportamiento.

   Estos aspectos los cualificaba poniendo positivos cuando el grupo conseguía realizar la actividad bien en clase o en casa, o incluso cuando veía que un determinado grupo se había esforzado mucho aunque no lo hubiera conseguido y poniendo negativos para penalizar el comportamiento y la desidia por el trabajo en grupo.

   El resultado de los positivos menos los negativos me cuantificaba la nota poniendo un 10 al alumno con mejor resultado y a los demás directamente proporcional a su resultado.

2. Cuaderno de clase.

   El cuaderno de clase es uno de los elementos fundamentales en el desarrollo de la asignatura, pues en él debe de quedar constancia de lo trabajado en la asignatura y de cómo lo hemos trabajado. Un buen trabajo en el cuaderno de clase permite al alumno tener un apoyo en la asignatura al no disponer de un libro de texto específico.

   Corregir el cuaderno de clase de todos los alumnos, de todos los cursos a los que se imparte la asignatura es muy pesado, por lo que sólo los he corregido una vez al final de cada evaluación. Al principio del curso cuando llevábamos realizadas tres actividades, también los recogí para corregir los defectos en la forma de realizar el cuaderno, esto es bueno y por lo tanto necesario, aunque creo que sería suficiente con corregir un cuaderno de cada grupo en profundidad y después que el resto del grupo se evalúe y corrija su cuaderno.

   La nota del cuaderno la sacaba al analizar en éstos los siguientes aspectos:

   - Limpieza y presentación del cuaderno.

     Observaba si respetaban los márgenes en el bloc, si comenzaban cada actividad en una hoja nueva, si la actividad estaba bien estructurada en cada una de sus partes y si estaba limpio y ordenado.

   - Desarrollo y explicación de las actividades.

     Valoraba si habían llegado a un buen análisis de la actividad o simplemente se habían dedicado a copiar de la pizarra la puesta en común, si tenían figuras o notas explicativas durante el desarrollo de la actividad y si habían encontrado alguna manera original de resolver la actividad.

- Comentarios y reflexiones del alumno sobre la actividad.

  Valoraba si el alumno había reflexionado sobre la actividad, si había encontrado otras formas de resolver la actividad, si planteaba dudas sobre el desarrollo de la actividad o si ampliaba la actividad o la aplicaba a un caso real.

Con esta nota intento evaluar el grado de aprovechamiento y análisis del alumno sobre las actividades de la unidad didáctica, algo que sería conveniente hacerlo con más frecuencia pero que, en mi opinión, es muy difícil por el tiempo que necesita.

3. Exámenes de grupo.

Está claro que a los alumnos se les motiva más a trabajar si al final tienen un premio o nota que los recompensen y que no sea un simple positivo. Por lo que para favorecer el funcionamiento del grupo y hacerles repasar cada cierto tiempo un grupo de bloques, les realizaba unos exámenes que tenían que resolverlos con los mismos grupos que trabajaban en clase.

La media de las notas de estos exámenes en grupo era la nota con la que evaluaba este apartado, la cual era la misma para todos los componentes del grupo.

La finalidad de esta nota es motivar el trabajo y funcionamiento del grupo y premiar la solidaridad en el grupo.

4. Examen individual.

Para evaluar y distinguir las capacidades individuales individuales de los alumnos fuera y dentro del grupo, les realizo una prueba por unidad didáctica de la que obtengo la última nota para evaluar.

LOGROS DE LOS ALUMNOS

En general, se han conseguido muchos de los objetivos propuestos, pero fundamentalmente, creo que han aprendido:

- Que antes de apostar deben saber si es justo el juego o si los están engañando y que, a veces, no todo es suerte.
- Que no todo es proporcional, y, por lo tanto, no siempre se puede usar la regla de tres.
- Que la realización de una encuesta y la i'nterpretación de los resultados conlleva mucho trabajo.
- Que no sirve de nada llevar una buena calculadora si no saben para qué sirve cada tecla.
- A tratar de explicar, escribiéndolo correctarente, cómo han resuelto un problema.
- Que en una representación gráfica no siempre los puntos se unen el línea recta, y a veces, no se unen.
- A dialogar y discutir entre ellos las posibles soluciones de los problemas.

VALORACIÓN DE LOS MATERIALES

Me han parecido muchos y muy buenos, siendo imposible darlos todos en un curso. Lo difícil ha sido seleccionar cuál das y cuál no ya que, como no los has experimentado nunca y no hay ningún comentario de cada actividad ni de lo que se pretende (objetivos, soluciones,etc., no sabes por dónde te van a salir los alumnos, ni si hay otra actividad que sea más adecuada para conseguir el mismo objetivo.

Por lo tanto ha faltado tiempo para dar todo el material que consideraba necesario.

Creo que el curso de 4° de E.S.O. mejorará con la experiencia ya que, al curso que viene se podrán corregir los errores de éste.

VALORACIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

Creo que, en general, ha sido positiva, aunque hay diversos problemas a solucionar. Por ejemplo:
Cuesta mucho hacerles comprender a los alumnos que lo importante no es, sólamente, que la libreta esté bonita, con colores, limpia, con márgenes, etc.. sino que lo importante es el contenido.
Los alumnos al pasar las actividades a limpio quitan todo lo que creen que está mal, y al final, sólo dejan la solución o la puesta en común, y casi siempre explicado con el menor número de palabras posibles.
Para evitar esto, en algunas actividades les he dicho que me las iba a llevar a casa y, cuando las han tenido hechas les he dicho que las pegaran en la libreta tal como estaban o que las copiaran en la libreta. También les he devuelto los exámenes para que los pegaran o copiaran en la libreta y de esta forma han mejorado un poco las primeras conclusiones, aunque cuando saben que las tienen mal, son reacios a ponerlas.
Por tanto he de revisar la forma de calificar las libretas.
Otro problema ha sido el que, constantemente, los profesores de Física se escudan en la cantidad de alumnos que suspenden su asignatura porque no saben Matemáticas y, sin embargo, ellos no cambian sus contenidos ni su metodología.
También los alumnos comparan constantemente con las matemáticas del instituto de BUP de al lado y eso les tira la moral al suelo, porque los del otro instituto se ríen del tipo de actividades que están dando.

COMENTARIO PERSONAL

Como nunca había dado E.S.O., al principio tenía un poco de miedo porque no sabía como iba a resultar. Sin embargo, conforme ha ido avanzando el curso me he encontrado mejor, he aprendido otra forma de dar las matemáticas, he disfrutado mucho y, sobre todo, he entendido mejor lo que piensa un alumno a esa edad.
Me han pasado muchas anécdotas y me han sorprendido muchas veces las respuestas de los alumnos a algunas actividades. Sobre todo la que más me sorprendió fue una actividad llamada "el engaño de los espárragos". Le borré parte del título para que quedara solamente "los espárragos" y así no darles pistas de la solución. Hubo una gran polémica en los 4 cursos sobre si hubo engaño o no, y al final, la mayoría decidió que sí que hubo engaño y que el engaño estaba en el "nudo". ¿Qué te parece?. Léelo en las libretas (aunque no está en todas).
Después de esa respuesta no sabes si reirte o llorar, pero ¡ a que fue ingeniosa !.

94. PROGRAMACIÓN DE TERCER CURSO

MEMORIA DEL CURSO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. 3º E.S.O.

I.F.P. FAITANAR de Quart de Poblet

María Nieves Corretjé Aznar

*DATOS PERSONALES Y PROFESIONALES:

María Nieves Corretjé Aznar, licenciada en Ciencias Matemáticas, en situación provisional con destino en el I.F.P. FAITANAR de Quart de Poblet. Imparte matemáticas en 3er curso de E.S.O. por segundo año consecutivo, primero en este instituto.

*DATOS DEL DEPARTAMENTO:

Forman parte del mismo cuatro miembros todos ellos implicados en Secundaria Obligatoria o Bachilleratos. Respecto a la relación de acuerdos que influyan en la planificación docente adjuntamos documento que recoge los criterios de evaluación. Los distintos aspectos de la programación didáctica aparecerán recogidos a lo largo de toda la memoria, dado que ésta se basa en gran parte en aquella.

*PROGRAMACIÓN Y DESARROLLO DE TERCERO DE E.S.O.

Los contenidos, tanto de carácter conceptual, como procedimental y actitudinal, de las matemáticas de tercer y cuarto curso de Secundaria Obligatoria son los que se han diseñado para el Proyecto Curricular de Centro y que parten de los bloques de contenidos del DCB de la Comunidad Valenciana: NÚMEROS, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, ANÁLISIS, ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. Estos bloques de contenidos se contextualizan en la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS como medio apropiado en el que desarrollar la enseñanza de las matemáticas y como fin, es decir, en el que aprender el complejo proceso de la resolución de problemas.

Dado que la metodología propuesta contiene un enfoque de la enseñanza claramente en espiral, los bloques de contenidos que se impartirán en los curso tercero y cuarto serán tratados según este enfoque, lo que supone que un bloque de contenidos, cualquiera que sea éste, inicia su tratamiento en el tercer curso y no se da por finalizado hasta que se vuelve a tratar en el cuarto curso. El ascenso en la verticalidad no debe suponer un salto cognitivo demasiado fuerte que impida al estudiante del último curso su comprensión, por lo que deberá estar fuertemente anclado en los conocimientos previos adquiridos en el curso tercero.

Por otra parte, la componente horizontal de la espiral obliga a que el tratamiento de los contenidos esté contextualizado en la realidad más inmediata al estudiante. Los contextos dónde los conceptos matemáticos tienen diferentes significados y diferentes usos para los alumnos, deberán servir para que con posterioridad pueda desarrollarse la componente vertical.

1.- NÚMEROS.

El tratamiento de los números deberá contar con el uso de la calculadora. El paso de la calculadora no científica a la calculadora científica es un motivo más para estudiar ciertas relaciones entre números y la propia estructura de la Aritmética. Se tratarán en este segundo ciclo de la enseñanza secundaria los siguientes contenidos:

a) Representación de las diferentes clases de números:
- Significados, usos y funciones.
- El carácter posicional de las cifras.
- Relaciones entre sistemas numéricos.
- Desbordamientos en las calculadoras: la notación científica.

b) Algoritmos alternativos.
- Operaciones que se desbordan en la calculadora.
- Operaciones con números que no caben en la calculadora. Operar con bloques.
- Obtención de decimales que exceden a la capacidad de la calculadora.

c) El cálculo mental y la calculadora.

d) Jerarquía de operaciones: calculadoras jerárquicas y no jerárquicas. Uso del paréntesis.

e) Diferentes usos y significados de las fracciones:
- La relación parte-todo.
- La fracción como razón.
- La fracción como cociente.
- La fracción como operador.

2.- ÁLGEBRA Y ANÁLISIS.

Los bloques Álgebra y Análisis se ha decidido considerarlos juntos al tomar la opción de estudiarlos como procesos de traducción entre los diferentes modos de representación en matemáticas. Considerando que el tratamiento de la relación de dependencia entre dos variables puede ser visto desde cuatro modos de representación: numérico, tablas, algebraico y gráfico, vemos la posibilidad de integrar en este bloque las diferentes relaciones entre los cuatro modos de representación, lo que nos permite establecer la siguiente tabla que da cuenta de las diferentes traducciones que se pueden realizar así como de los nombres que les damos. Dentro de cada modo de representación, no hablaremos de traducciones sino de transformaciones en un modo de representación.

DE \ A	MODO GRÁFICO	MODO ALGEBRAICO	MODO TABLAS	MODO VERBAL
MODO GRÁFICO		Modelizar	Lectura puntual	Interpretación
MODO ALGEBRAICO	Representación		Valor numérico	Interpretación
MODO TABLAS	Representación puntual	Algebraizar		Interpretación
MODO VERBAL	Esquematizar	Algebraizar	Valores numéricos	

3.- AZAR Y PROBABILIDAD.

El azar, será objeto de estudio en las matemáticas de Tercer Curso. Introduciremos con ello:

1.- Situaciones aleatorias.

2.- La simulación de situaciones aleatorias. Grado de incertidumbre.

3.- La probabilidad como medida del grado de incertidumbre. Asignación subjetiva de la probabilidad de un suceso aleatorio.

4.- Sucesos simples y compuestos.

5.- Sucesos dependiente e independientes.

6.- Asignación de probabilidades: La ley de Laplace.

7.- Leyes de la probabilidad.

8.- Contar: un método necesario para el cálculo de probabilidades. De lo informal al recuento sistemático.

Conviene puntualizar que el estudio de la probabilidad no deberá hacerse desde la óptica del formalismo. En este sentido, las leyes de la probabilidad, por ejemplo, deberán establecerse empíricamente, como una conclusión lógica después de diferentes simulaciones de carácter aleatorio.

4.- GEOMETRÍA.

La geometría se tratará desde el punto de vista de la exploración del entorno más próximo al alumno. Esto supone una exploración fenomenológica del espacio que rodea al estudiante. Por tanto, la propuesta de esta programación didáctica pasa por diferenciar entre dicha exploración fenomenológica a realizar en el Tercer Curso y la exploración de las propiedades que nos permiten organizar el entorno físico desde la Geometría.

1.- Reconocimiento de formas en una, dos y tres dimensiones.

2.- Reconocimiento de las isometrías y las transformaciones en el plano y en el espacio.

3.- La medida en el contexto geométrico: El proceso, la unidad de medida y el resultado de medir.

Los materiales didácticos se vuelven imprescindibles para el estudio de la geometría. De este modo, no se pretende un desarrollo deductivo de la geometría, sino más bien al contrario. El método inductivo que pasa por la exploración, descripción y análisis de propiedades, nos parece la base inicial para una posterior iniciación al método deductivo que se desarrollará en cursos posteriores.

. . . .

Para finalizar, debemos recordar que es una opinión generalizada que el aprendizaje de las matemáticas adquiere significado en tanto en cuanto se desarrollen en un contexto de resolución de problemas. Este será el contexto habitual en el que se presenten los contenidos antes mencionados.

Por otra parte, la resolución de problemas entendida como un proceso también es un contendido a impartir en nuestras clases. No se trata de un contenido de carácter conceptual sino más bien procedimental y que será desarrollado a lo largo de los dos cursos.

*SECUENCIACIÓN.

Octubre: CALCULADORA. Planteamiento general y conocer la calculadora.

Noviembre: Jerarquía de las operaciones y operaciones con desbordamientos.

Diciembre: NÚMEROS. Aproximación experimental a conocimientos anteriores: Cartas, El tesoro, Colorear, Cuadritos, Sombrear...

Enero: Los 40 principales, Temperaturas, Ordenación, Observando la Naturaleza, Huecos. Síntesis teórica de los distintos conjuntos numéricos.

Febrero: Diversas hojas de cálculo para refrescar la operatoria en general.

Marzo: ÁLGEBRA. Trio, Puntos de vista, Diferencia de cuadrados, Rotuladores y calculadoras.

Abril: La comitiva, I.V.A., Por tantos..., Bodas y bautizos, El busca-números.

Mayo: JUEGOS. La carrera de caballos, Caer al agua, Las tres monedas, El feriante. AZAR Y PROBABILIDAD. Loterías, La moneda, Dados, Barajas.

Junio: Urna I y urna II, Clara y Susana, Meses del año, Laberinto para condena.

La Geometría no ha habido tiempo de trabajarla.

*ESTRATEGIA DOCENTE.

La palabra metodología lleva entre los profesionales de la enseñanza a diferentes interpretaciones. Para unos, metodología significa, fundamentalmente, método de trabajo delante de los alumno/as sin tener en cuenta a éste, para otros, significa observar como aprenden los alumnos/as y actuar en consecuencia. Ello no significa que se pueda polarizar las concepciones entre estas dos sino que éstas son las más corrientes entre los enseñantes. En consecuencia, puede que existan otras maneras de entender la metodología que ocupen posicionamientos entre estas dos.

Nosotros entenderemos por metodología didáctica como el método de llevar a cabo la enseñanza de los conceptos matemáticos y sus relaciones en función de como aprenden las matemáticas los alumnos. Esto significa planear la instrucción de modo que se garantice un verdadero aprendizaje.

Durante la última década, los diferentes cambios curriculares habidos en todo el mundo han centrado el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas. Este será pues, un modo de organizar la instrucción. Se plantearán a los alumnos/as situaciones didácticas en las que tengan que aportar conocimientos previos adquiridos en etapas anteriores pero insuficientes para su resolución de tal modo que, en su intento por resolverlas, tenga que producirse nuevos aprendizajes en conexión con los ya existentes. De este modo los conceptos nuevos se relacionarán con los ya existentes de manera que el aprendizaje sea significativo para el estudiante.

El nivel de enseñanza al que corresponde esta memoria de programación didáctica (alumnos de 14 a 16 años) hace que el uso de los materiales didácticos sea más limitado. De algún modo sus modos de hacer matemáticas están más ligados al razonamiento que a la manipulación de materiales y, por tanto, las situaciones didácticas previstas deben contemplar estos modos de hacer. Ello no quiere decir que las matemáticas que se les presenten lo sean de un modo formal, al contrario, se potenciará el razonamiento inductivo frente al deductivo, aunque, en la medida de lo posible, no se olvide éste.

Será de uso corriente la calculadora. Uso racional de la misma se entiende y como instrumento didáctico para la ayuda en el aprendizaje. Los cálculos largos y tediosos no serán objeto de atención para nuestros alumnos/as.

Por otra parte, y tal como recomienda el Informe Cockroft y otras organizaciones internacionales dedicadas al desarrollo curricular, en nuestras clases se tendrán en cuenta las siguientes pautas metodológicas:

Trabajos individuales y en grupos.

Exposiciones por parte de los alumnos/as.

Discusiones entre los alumnos/as y entre los alumnos/as y el profesor.

Puestas en común entre toda la clase.

Exposiciones por parte del profesor.

A continuación se detallan algunas de las actividades trabajadas en el aula durante este curso 93/94. Comentaremos respecto a ellas los aspectos que didácticamente nos han parecido de más interés.

Esquema general de trabajo:

1.- Se reparten las fotocopias y demás materiales a utilizar.

2.- El alumnado está agrupado en equipos de tres o cuatro personas.

3.- En la pizarra se anotan los títulos y fechas del día para encabezar el cuaderno.

4.- Establecemos la distribución del tiempo para:

a) La lectura individual y comentario en grupo con las aclaraciones pertinentes por parte de la profesora.

b) Realización de la actividad y anotación de los resultados del grupo.

c) Puesta en común en gran grupo.

d) Elaboración de conclusiones individuales. A veces esta parte se deja para casa pero es corriente que la traigan sin hacer.

Por bloques:

CALCULADORAS: Por ser el primer bloque, la distribución del tiempo era más desigual. Costó tiempo y esfuerzo regularizar el trabajo en grupo y la dinámica del cuaderno. Empezaron escribiendo "Lo que hemos aprendido."

En clase reflexionábamos sobre:

- Diferencias entre calculadoras.
- Estrategias diferentes.
- Para qué usos conviene...etc.

NÚMEROS: Tenía la desventaja de ser un tema muy familiar para ellas y ellos pero bastante deficitario en su manejo. Como objetivo nos planteamos fundamentar mejor el cálculo.

- Alternábamos actividades con hojas de cálculo.
- Programamos muchas pruebas individuales.
- Muchas clases se dedicaron a corrección de las mismas.
- Se dieron más clases teóricas que en los demás temas:

Naturales, Enteros y Racionales.

ÁLGEBRA: Materiales muy creativos y bien pensados. Se agilizó mucho la dinámica dentro de clase.

- Las puestas en común eran más largas y entusiastas.
- De cada actividad salían muchas implicaciones.
- Cada una de las actividades ha llevado un seguimiento muy exhaustivo.
- Se desarrolló en una época del curso en el que el alumnado estaba más centrado.

PROBABILIDAD: introduce la novedad de los juegos y el azar. Es un tema muy desconocido y lleno de tópicos de la cultura popular.

- Se sigue el esquema base con bastante agilidad.
- Centramos el interés en la elaboración de conclusiones: vocabulario específico, expresión, formalización, matematización...

* RELACIÓN DE ACTIVIDADES COMENTADAS:

CALCULADORAS

1. Estimación 1
2. La nave Voyager.

NÚMEROS

3. Los 40 principales- Temperaturas.
4. El tesoro.- Colorear.
5. Fracciones.
6. Puntos de vista.

ÁLGEBRA

7. Por tantos...hay tantos.
8. Máquinas 1 y 2.
9. El busca-números.

AZAR Y PROB.

10. Caer al agua.
11. Tres monedas.
12. Más dados.

Geometría, Estadística y estudio de gráficas han quedado fuera del alcance del tiempo disponible. Seguramente se podría haber reducido el tiempo en algún bloque, pero evaluamos como necesario el desarrollo llevado a cabo para alcanzar la madurez requerida en cada tema. Finalmente, para acabar el apartado de estrategia docente, señalar que la falta de soltura de la profesora en el manejo de materiales, como por ejemplo los de geometría, ha influido en el tipo de actividades seleccionadas. También añadir que los materiales de NÚMEROS de 3° resultan arduos de introducir a esta edad.

* LA EVALUACIÓN.

La evaluación es un proceso que debe formar parte de otro proceso, el de aprendizaje de los alumnos/as. En este sentido, una evaluación que castigue o premie con un dato numérico o un dato cualitativo no puede ser tenida en cuenta. Por otra parte, una evaluación debe tener carácter formativo en tanto que va describiendo si el proceso de aprendizaje que se está siguiendo es o no el apropiado. Eso implica tanto al alumno/a como al profesor, tanto a los contenidos enseñados como a la institución en la que se enseña, tanto al sistema educativo como a los objetivos que persigue. En consecuencia, en una evaluación, todas las variables que forman parte del sistema educativo deben ser evaluadas.

Pero, siendo realistas, el proceso real de evaluación que se lleva a término en los centros educativos sólo contempla la evaluación de los estudiantes a través de pruebas escrita, trabajos de clase etc. No se tienen en cuenta las diferencias individuales entre los alumnos/as, el nivel de conocimientos previos, su evolución personal y cognitiva, etc. De ningún modo se evalúa el profesor, ni los contenidos, ni los objetivos ni el centro y su proyecto curricular, aspectos éstos que deberían tenerse presentes cada vez que se produzca la evaluación.

Dentro del proceso evaluatorio tendremos en cuenta los siguientes aspectos de carácter general:

1.- Conocimientos previos de los alumnos/as.

El profesor, por los medios que considere oportunos, determinará qué conocimientos previos posee el alumno/a al iniciar el aprendizaje de una unidad didáctica. Con ese conocimiento, podrá determinar qué actividades son apropiadas y qué otras no lo son. Eso dará lugar a una:

2.- Individualización de la evaluación, en el sentido que debe evaluarse desde donde cada alumno/a parte con sus conocimientos iniciales. Si se produce un progreso en el aprendizaje, la evaluación será positiva y si no se produce será necesario revisar el método, el contenido y el propio proceso de evaluación.

3.- La evaluación como proceso de continuidad.

El área de Matemáticas aplicará los criterio que subyacen en toda evaluación continua. Si el aprendizaje es un proceso continuo, carece de sentido evaluar de forma parcelada. Por ello, la evaluación empezará con el inicio de curso y finalizará cuando éste acabe. Nunca un alumno/a será evaluado positiva o negativamente hasta que su proceso de aprendizaje se dé por concluido.

4.- Instrumentos de evaluación.

No pueden fijarse unos instrumentos de evaluación para los criterios que se están proponiendo. Por tanto, los profesores del área de Matemáticas serán libres de utilizar cualquiera que le sirva para sus propósitos, aunque ninguno de ellos podrá ser definitorio por sí mismo.

Sólo en casos excepcionales y cuando las circunstancias así lo requieran, la evaluación podrá ser realizada con un único examen. Este caso se producirá en aquellos estudiantes que no puedan seguir una evaluación continua.

5.- Promoción de los alumnos/as.

En Educación Secundaria Obligatoria, la promoción de los estudiantes se producirá en tanto que hayan obtenido una evaluación positiva. No se hará hincapié en si progresan, sino en si no progresan, las razones de esta falta de progreso y por qué se ha producido. Por tanto, el no progreso de un alumno/a estará ampliamente fundamentado por aquellos criterios en los que el alumno/a ha podido fallar.

Los tres ejes sobre los que gira la evaluación de alumnos/as en la asignatura son:

1.- La asistencia a clase.

2.- El trabajo en grupo.

3.- El cuaderno de actividades.

Será el trabajo llevado a cabo por medio de dichas actividades el que nos mostrará cual ha sido la evolución individual de cada uno/a y cómo se ha desarrollado dicha evolución.

\- - - - - - - -

Clasificaremos el tipo de aprendizaje producido atendiendo a las categorías anteriormente mencionadas de: Actitudes, Procedimientos y Valores.

Actitudes:

- Puntualidad.
- Educación en el trato.
- Disponibilidad para el trabajo.
- Espíritu de colaboración.
- Gusto por la asignatura.

- Participación.
- Respeto hacia todas las opiniones.
- Aceptación del error como parte del aprendizaje.

Procedimientos:

- Comprensión de un texto escrito.
- Interpretación autónoma del mismo.
- Estrategia de trabajo en grupo.
- Manipulación de materiales.
- Diseño de la anotación de resultados, gráficas, tablas...
- Redacción de conclusiones.
- Desencadenar procesos de inducción, elaboración de conjeturas, síntesis y formalización de los resultados, descripción, encontrar analogías,...etc.
- Utilización de vocabulario específico.

Valores:

- Disposición positiva frente a la asignatura. Constancia en el trabajo. Reconocimiento del trabajo bien hecho.
- Curiosidad, ganas de investigar, creatividad e imaginación.
- Importancia de las aportaciones ajenas. Contraste de opiniones y puntos de vista diferentes.
- Aprendizaje por el error. El camino y la meta.
- Colaborar, escuchar, proponer.
- El orden y la limpieza forman parte del proceso mental.
- Toma de decisiones, elección de método, alternativas...
- Las matemáticas como lenguaje y vehículo de expresión.
- Las conclusiones deben expresar lo más exactamente posible los pensamientos.

Además:

Algunas pruebas escritas tanto de carácter operatorio, como tipo test, como la realización de una actividad de manera individual y en un tiempo más limitado, permiten al alumnado no perder de vista su responsabilidad final al margen de otros apoyos que habitualmente se utilizan.

Consideramos tercer curso de Secundaria más un nivel obligatorio evaluable en términos generales que como un curso de gran alcance en cuanto a conocimientos. Nos interesa sobre todo que funcione bien la detección y recuperación de posibles deficiencias, así como la aceptación de una nueva manera de acercarse a las matemáticas.

Evaluación de las clases y el profesorado:

Basadas en un cuestionario pasado al final del curso a los grupos que cursaron la asignatura, llegamos a las conclusiones siguientes:

a) El grado de satisfacción respecto a lo que se ha aprendido y cómo se ha aprendido es alto.

b) Valoran muy positivamente la posibilidad de trabajar en grupo y opinan que mejora los resultados.

c) La puesta en común es el momento de la actividad diaria que más entusiasmo despierta.

d) No les gusta escribir conclusiones porque les cuesta mucho expresarse y están poco acostumbrados/as.

e) El tema de calculadoras les interesó mucho así como los juegos.

f) Encontraban las clases aburridas.

g) Se quejaron de la presión ejercida por parte de la profesora para que se desarrollaran muchas actividades.

h) Otros aspectos de trabajo personal como pruebas objetivas, hojas de cálculo, cuaderno,...etc, también fueron objeto de queja.

95. PROGRAMACIÓN DE CICLO DE UN PROFESOR

MEMORIA 3° DE E.S.O. CURSO 91-92

I.F.P. NOVELDA

Juan P. Rizo Vicedo

NÚMEROS

A este bloque le hemos dedicado 31 clases. Con él se pretendía que los alumnos conociesen:
-Las operaciones.
-Calcular.
-Estimar.
-Las propiedades de las operaciones.
-Utilizar gráficas.
-Números fraccionarios y números decimales. Relación entre ambos.
-Potencias de exponente natural, entero y fraccionario.
-Números primos.

Se realizó una prueba inicial y las siguientes actividades.
-Las operaciones.
-Faltan cifras y operaciones.
-Esta calculadora está estropeada.
-Estimar y calcular.
-Propiedades de los números.
-Añadir uno.
-Aproximaciones decimales.
-Fracciones y decimales.
-Potencias de exponente negativo y cero.
-Raíces y potencias.
-Aproximar la raíz.
-Números primos.
-Tres divisores.
-Números felices.
-Trenes numéricos.

GEOMETRÍA

A este bloque le dedicamos 25 clases. Y pretendíamos:
-Estudiar figuras y cuerpos geométricos.
-Dibujar y construir algunas figuras y cuerpos geométricos.
-Analizar las definiciones de algunos elementos geométricos.
-Medir y calcular.
-Sistema métrico decimal.
-Teorema de Pitágoras.

Se han realizado las siguientes actividades.
-Circunferencias.
-La pista de baile.
-Ángulos en una circunferencia.
-Perpendiculares.
-Puntos y rectas notables de un triángulo.
-El tangram
-Los pueblos.
-Triángulos de superficie uno.
-Una mesa de billar.
-Fútbol y geometría.
-Figuras que dan tumbos.
-El gigante.
-Un millón de pasos.
-Construyendo triángulos.
-Pitágoras y álgebra.
-Ching Chang Suan shu.

ÁLGEBRA

Al álgebra le hemos dedicado 20 clases. Y se pretendía:
-Profundizar en el lenguaje gráfico.
-Conocer el lenguaje algebraico y su utilidad en la resolución de problemas.
-Traducir del lenguaje ordinario al algebraico y de este al ordinario.
-Generalizar.
-Resolver ecuaciones por distintos m,todos, algebraicos y gráficos.
-Proporciones. Tantos por ciento.
-Productos notables.

Se realizaron las siguientes actividades.
-El salt del paracaigudista.
-El viatge al concert.
-Trio.
-Punts de vista.
-Retoladors y calculadores.
-Per tants hi ha ... tants.
-Cosmetica.
-La comitiva.
-Noces y batejos.
-Maquines.
-Comparant maquines.

PROBABILIDAD

A este bloque sólo le dedicamos 10 clases, y pretendíamos:
-Distinguir entre modelo determinista y aleatorio.
-Experimentar con generadores de azar.
-Revisar nuestras creencias en los modelos de azar.
-Simular con la tabla de números aleatorios.

-Asignar probabilidades.
-Intuir la ley de los grandes números e interpretar la información obtenida de las experiencias realizadas.

Se realizaron las siguientes actividades:
-La carrera de caballos.
-Sorteos.
-Una moneda.
-Tabla de números aleatorios.
-Par o impar.
-Generadores de azar.

EVALUACIÓN

Periódicamente se recogía una actividad para evaluar, algunas de ellas después de haberlas puesto en común en clase, y otras realizadas individualmente por los alumnos en casa. Al final de cada bloque se ha realizado una prueba de evaluación.
Los criterios seguidos son los siguientes:
-Utilizar y operar con números enteros, decimales y fraccionarios.
-Prioridad en las operaciones.
-Operar con potencias.
-Representar gráficamente.
-Números primos.
-Conocer las definiciones de algunos objetos geométricos y dibujarlos.
-Proporciones.
-Calcular superficies.
-Teorema de Pitágoras.
-Resolver problemas por métodos algebraicos o numéricos (ensayo-error).
-Calcular tantos por ciento.
-Identificar y descubrir regularidades en conjuntos numéricos.
-Utilizar la tabla de números aleatorios. Simular sorteos.
-Considerar la información proporcionada por los experimentos realizados.
-Expresarse de forma lógica.

Las *pruebas de evaluación* realizadas son las siguientes:

PRUEBA INICIAL. NÚMEROS

1.- Coloca estos decimales por orden de menor a mayor, el más pequeño primero: 0.3 0.1 0.7 0.6
2.- ¿Cuántas veces es 0.1 más grande que 0.01?
3.- ¿Qué número es 10 veces 0.5?
4.- Pon estos decimales por orden de mayor a menor. El más grande primero: 0.07 0.23 0.1
5.- El número que es uno menos que 2010 es:
6.- Escribe en cifras cuatrocientas mil setenta y tres.
7.- 6231 El 2 significa 2 cientos.
623100 El 2 significa 2 ....
8.- Escribe el número que va en la caja:

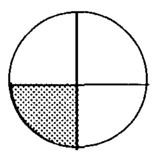
$$\frac{4}{10} = \frac{\boxed{}}{5} \qquad \frac{6}{15} = \frac{\boxed{}}{5} \qquad \frac{7}{\boxed{}} = \frac{21}{24}$$

9.- 1/6 de 3/4

10.- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

11.- $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

12.- Raya 1/6 de la parte punteada de este disco. ¿Qué fracción del disco total has rayado?.



13.- Hoy un dólar vale 158 pts. y ayer valía 159 pts. ¿Cuánto ha bajado el dólar?.

14.- Pongo 500 gr. de mermelada en un tarro que pesa 160 gr. ¿Cuánto pesa en total?.

15.- Tenía 200 pts. Hay ahora 375 pts. ¿Cuánto se ha añadido?.

16.- Se ha comprado una camisa por 1115 pts. que se ha vendido después a 2335 pts. ¿Cuánto se ha ganado?.

17.- Un autocar, a la salida ha cargado 5 personas, en una primera parada 3 personas, en la segunda parada 6 personas, en al tercera parada 7 personas, en la última parada 2 personas. ¿Cuántas veces se ha parado el autocar?.

18.- Una granjera va al mercado y vende 3 pares de pollos al precio de 600 pts. el par. Con este dinero compra 2 cacerolas al precio de 170 pts. cada una. Sabiendo que tenía 300 pts. en su monedero al salir y que el viaje le ha costado 120 pts. ¿Con cuánto dinero vuelve a su casa?.

19.- Me gasto 13 pts. por la mañana y 26 pts. por la tarde. ¿Cuánto he gastado?.

20.- Inventa un problema cuya pregunta sea: ¿Cuál es el beneficio de los 6 litros de aceite?.

21.- Una granjera va al mercado con 185 pts. en su bolso. Vende un conejo a 290 pts., un pollo a 310 pts. y un pato. Compra 582 pts. de tela y paga 75 pts. por el billete del tren al final le quedan 423 pts. ¿Cuál es el precio del pato?.

22.- Si se sabe que un libro y un cuaderno cuestan juntos 35 pts. ¿Qué número hay que conocer para calcular el precio del cuaderno?.

PRUEBA DE EVALUACIÓN. NÚMEROS.

1.- Representa gráficamente la siguiente sucesión y estudia su tendencia.

1, 5/4, 7/5, 9/6, ...

2.- Calcular:

a) $3\,(8 - 2 \cdot 3) + (5 - 3 : 3 + 3) - 2 =$

b) $2^3 - (8-3)^2 + (5-2)^{-3} =$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) =$

d) $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-1} + \frac{1}{3} : \frac{2}{5} =$

3.- Pasar a número fraccionario.
a) $8.\hat{3}$
b) $0.2\widehat{3}$
c) 12.23
4.- ¿Qué es un número primo?.
Di si los siguientes números son primos, y si no lo son di por qué: 18, 71, 101, 86, 93, 118, 57.

PRUEBA DE EVALUACIÓN. GEOMETRÍA.

1.- ¿Qué es la altura de un triángulo?.
Dibuja un triángulo y sus alturas.
¿Cómo se llama el punto donde se cortan?.
2.- Calcula la superficie de un círculo de 30 m. de diámetro.
3.- ¿Qué es un triángulo rectángulo?.
Construye uno cuyo perímetro sea 12.
Calcula su área.
4.- Tenemos una escalera de 10 m. de longitud y la apoyamos a 6 m. de la pared. ¿Qué altura alcanzará?.

PRUEBA DE EVALUACIÓN. ÁLGEBRA.

1.- Cada vez que un jugador gana una partida percibe 7 pts. y cada vez que la pierde paga 3 pts. Al cabo de 15 partidas ha ganado 55 pts. Hallar el número de veces que ganó.
2.- Tenemos la siguiente receta para hacer roscos de semana Santa:

Huevos.................................. 12
Harina..3 Kg.
Miel..0.25 l.
Aceite..0.5 l.
Azúcar..1.5 Kg.
Canela y raspadura de limón...............al gusto.

Pero mi familia es pequeña y sólo me interesa hacer la receta para 6 huevos, así que échame una mano y completa la siguiente tabla:

Huevos 12
Harina 3 Kg.
Miel 0.25 l.
Aceite 0.5 l.
Azúcar 1.5 Kg.

Bueno, ahora tengo 3 Kg. de azúcar. ¿Qué cantidad de los otros ingredientes necesito para emplear todo el azúcar haciendo roscos?.
3.- En una tienda compras un artículo por valor de 800 pts. ¿Qué prefieres que apliquen primero un 10 % de descuento y después el 12 % de I.V.A. o al revés, primero el I.V.A. y después el descuento? ¿Por qué?.

PRUEBA DE EVALUACIÓN. PROBABILIDAD.

1.- Una clase de matemáticas tiene 14 chicos y 16 chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. se colocan todos los trozos de papel en sombrero. El profesor coge uno sin mirar. Marca la respuesta correcta:
A) Es más probable que se trate de un chico que de una chica.
B) Es más probable que se trate de una chica que de un chico.
C) Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico.
D) No lo sé.
2.- Se lanza una moneda cinco veces y siempre sale "cara". Marca la respuesta correcta:
A) La vez siguiente lo más probable es que salga cara de nuevo.
B) La vez siguiente lo más probable es que salga cruz.
C) La vez siguiente es igual de probable que salga cara que cruz.
D) No lo sé.
3.- Cuando se lanza un dado ordinario de seis caras, ¿qué número es más difícil de obtener, o es lo mismo para todos?
Respuesta:
4.- Se lanzan juntas una moneda de 2 pesetas y otra de 10 pesetas. Uno de los resultados posibles es: cara en la moneda de 2 pesetas y cruz en la de 10, ya ha salido.
Escribe todos los resultados posibles, indicando cara mediante H y cruz mediante T.
5.- En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y aterrizan sobre una mesa. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuál de los resultados siguientes se producirá más a menudo?
A) 2 caras y 10 cruces.
B) 5 caras y 7 cruces.
C) 6 caras y 6 cruces.
D) 7 caras y 5 cruces.
E) Hay la misma posibilidad de que aparezca cualquiera de los resultados anteriores.
6.-¿Cuál de los siguientes resultados es más probable?
a) Que de los 10 primeros bebés nacidos en un hospital haya 7 ó más niños.
b) Que de los 100 primeros bebés nacidos en un hospital haya 70 ó más niños.
¿Por qué?.
7.- ¿Cómo simularías el lanzamiento de dos dados con una tabla de números aleatorios?.

METODOLOGÍA Y CONSIDERACIONES FINALES

La metodología empleada ha consistido en la realización de actividades por parte de los alumnos, la mayoría de ellas en grupo a excepción de algunas realizadas individualmente. Mientras las realizaban iba solucionando las dudas que surgían en los diferentes grupos, dando consejos para dirigirles al fin, que consideraba, iban dirigidas las actividades, así como asesorarles en el camino emprendido por ellos mismos en la realización de la actividad. En esto ha resultado bastante interesante el asesoramiento recibido, debido a que siempre viene bien recoger las ideas de otros compañeros acerca del enfoque dado a las actividades. Una vez terminada la actividad o que consideraba que el tiempo dedicado a ella era suficiente, pasábamos a exponer los resultados obtenidos por cada grupo y a analizar las diferentes ideas surgidas durante su realización.
En general el curso ha ido bien, quizás ha fallado no haberles hecho a los alumnos una prueba inicial en cada bloque para sondear sus conocimientos y errores, lo que hubiese

permitido orientar la programación de las actividades de una forma más efectiva, a acrecentar a unos y subsanar a los otros.

En cuanto al material me ha parecido muy extenso para poderlo ver en un solo curso. Algunas actividades me han parecido bastante difíciles para este nivel, además que deberían haber actividades de consolidación de las tareas estudiadas.

MEMORIA 4° DE E.S.O . CURSO 92-93

I.F.P. NOVELDA

Juan P. Rizo Vicedo

OBJETIVOS

- Convivencia.
- Respeto por todos los seres.
- Puntualidad y asistencia a la clase.
- Cuidado del material tanto del centro como el del alumno.
- Limpieza.
- Traer el material de clase.
- Organizar perfectamente el cuaderno.
  Fichas, resúmenes, fechado y paginado.
- Autoevaluación.
- Participar con interés y exigirse cada vez un mayor nivel.
- Observarse durante la resolución de los ejercicios, para ir superando errores de razonamiento y actitudes negativas frente al trabajo.
- Actitud crítica frente a la información que reciben.

METODOLOGÍA

- En cuanto a los objetivos predicar con el ejemplo y en cuanto a los contenidos mediante la resolución de problemas, primero los alumnos, en grupos o individualmente según la actividad, y después puesta en común en la clase.
- Algunas actividades se propondrán para resolverlas los alumnos interesados en ellas.
- Se propondrán otras actividades de repaso y recordatorio de los tema ya vistos.

CONTENIDOS.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.

Actividades propuestas.
- Un dado y el cinco. (1° de ESO 23)
- El dado. (3° de ESO 22)
- En clase I y II. (1° de ESO 27 y 28)
- La carrera de caballos I. (1° de ESO 5)

Ampliación.
- La carrera de caballos II. (1° de ESO 6)
- Carreras de caballos (3° de ESO 17)

Contenidos.
- Tablas de frecuencia.
- Noción frecuencial de probabilidad.
- Axiomas I y II de la probabilidad.
- Escala ordinal de probabilidades.
- Comparación de probabilidades.
- Muestreo de un elemento de una probabilidad finita conocida.
- Sucesos simples equiprobables y no equiprobables, sucesos compuestos.
- Realización de encuestas.

Actividades propuestas.
- Más dados. (3° de ESO 23)
- Comparación de probabilidades II. (1° de ESO 35).
- Baraja I. (1° de ESO 35)
- Contrarios en la baraja. (2° de ESO 18)
- Chinchetas. (1° de ESO 33 y 2° de ESO 50)

Ampliación
- Dominó. (2° de ESO 22)

Contenidos
- Asignación de probabilidades a sucesos elementales.
- Sucesos compuestos, frecuencia relativa de sucesos compuestos.
- Axiomas I, II y III de la probabilidad.
- Suceso contrario.
- Regla de Laplace.
- Estabilidad de las frecuencias relativas.
- Dependencia e independencia de sucesos.
- Escala de probabilidades. (Ordenar números).

Actividades propuestas.
- Con la ruleta. (2° de ESO 21)
- La ruleta. (1° de ESO 37).
- Las tres ruletas. (3° de ESO 18)

Ampliación.
- El feriante. (3° de ESO 18)
- El dardo. (4° de ESO 18)

Contenidos .
- Cálculo de probabilidades en un contexto geométrico (cálculo de áreas).
- Axiomas de la probabilidad.
- Sucesos simples no equiprobables.
- Operaciones con sucesos (unión, intersección y contrario).

Actividades propuestas.
- Lucía y Juan han inventado un juego con las siguientes reglas:

Lanzan dos monedas al aire consecutivamente.
Si las dos monedas son caras, Lucía gana un punto.
En otro caso gana un punto Juan.
Se repite 20 veces el lanzamiento y gana el que consiga más puntos.
¿Crees que es un juego justo?
¿Qué jugador prefieres ser Juan o Lucía?

- Con tres monedas.
  Juan y Carla deciden jugar lanzando tres monedas acordando que ganará Juan cuando salgan las tres iguales y Carla cuando sean distintas.
  ¿Con quién te aliarías en el juego?
  ¿Cómo deberían se las apuestas para que el juego sea justo?
- El juego justo.
  Si apuestas 100 ptas. a:
  a) "Sale múltiplo de dos" en un dado cúbico.
  b) "Sale múltiplo de tres" en un dado cúbico.
  c) "Sale un número menor que cuatro" en un dado octaédrico.
  d) "Sale suma siete" al lanzar dos dados cúbicos.
  ¿Cuánto debes recibir en cada caso, para que el juego sea justo?

Ampliación.

- Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
  Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
  Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces Carmen gana una ficha.
  Si resulta una diferencia de 3, 4 ó 5 es Daniel quien gana una ficha.
  Comienza el juego con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan fichas.
  ¿Te parece que este juego es equitativo?. Si tuvieras que jugar, qué jugador preferirías ser?.
- Dos hijos.
  Una pareja piensa tener dos hijos, ¿qué es más fácil:
  a) tener VM o tener VV?
  b) tener un niño y una niña o tener dos niñas?
  c) enumera todos los sucesos posibles y asígnales probabilidades.
- Tres hijos.
  Una pareja piensa tener tres hijos. ¿Qué es más fácil:
  a) tener dos niñas y un niño o tener tres niños?
  b) tener VMV, VVM o VMM?
  c) Escribe todas los sucesos posibles y asígnales probabilidades.
  d) Asigna probabilidades a los sucesos:
  A = "0 niñas"
  B = "1 niña"
  C = "2 niñas"
  D = "3 niñas"

Contenidos.

- Espacio muestral, probabilidad a priori y frecuencial.
- Variable aleatoria, distribución de probabilidades.
- Esperanza matemática. Criterio de decisión Bayes.

- Espacio producto; suceso compuesto y cálculo de probabilidades de sucesos compuestos.
- Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles.
- Probabilidad del suceso contrario.
- Muestreo con reemplazamiento. Variaciones con repetición.

Actividades propuestas.
- Tortas con pasas. (4° de ESO 21)
- Chocolate con premio. (4° de ESO 22)

Contenidos.
- Simulación con tablas de números aleatorios.

Hacer notar que a lo largo de todo este bloque de estadística y probabilidad se ha intentado que la estadística sea el paso previo al calculo de probabilidades mediante el cálculo de frecuencias, medias, gráficas..., y siempre que se ha podido (por falta de material para efectuar las actividades) se ha estado simulando con la tabla de números aleatorios.

FÓRMULAS Y GRÁFICAS

Actividades propuestas.
- El vent. (4° de ESO 4)
- Buscant. (4° de ESO 6)
- Gràfiques I (4° de ESO 6
- Un salt infinit. (4° de ESO 9)
- L' aparcament. (4° de ESO 10)

Ampliación
- Gràfiques II. (4° de ESO 8)
- Un salt infinit II. (4° de ESO 9)

Contenidos.
- Representaciones gráficas.
- Interpretación de gráficos.
- Variables que se relacionan.
- Tablas de valores.
- Escalas en los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Gráficas continuas y discontinuas.
- Límites laterales.
- Significado de las discontinuidades.
- Funciones lineales.
- Funciones cuadráticas.
- Funciones de proporcionalidad inversa.

Actividades propuestas.
- Caselles i nombres. (4° de ESO 12)
- El quadrat algebraic. (4° de ESO 13)
- Parells (4° de ESO 14)
- Nombres parells i imparells. (4° de ESO 14)

- Endevinant cartes. (4° de ESO 15)
- Dos anys d'augment. (4° de ESO 18)
- Quadrats i rectangles. (4° de ESO 20)

Ampliación
- Endevinant nombres. (4° de ESO 16)
- El jardí. (4° de ESO 18)
- Suma i producte. (4° de ESO 20)
- Unas hojas con ecuaciones.

Contenidos.
- Simbolización de números y cantidades.
- Fórmulas y ecuaciones.
- Lectura y escritura de expresiones algebraicas.
- Sustitución en expresiones algebraicas.
- Operaciones con expresiones algebraicas.
- Ecuaciones de l° grado.
- Ecuaciones de 2° grado.
- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Interpretación de soluciones.
- Relaciones funcionales lineales.
- Relaciones funcionales exponenciales.

En este bloque se ha intentado que a partir de la repetición de los mismos cálculos en la resolución de los problemas se llegue a ver la necesidad de las expresiones algebraicas y su utilidad a la hora de resolver los problemas. En todo momento se ha hecho hincapié en las tablas de valores para ver las relaciones entre las diferentes variables que intervienen en la actividad, así como en la representación gráfica de estas tablas.

GEOMETRÍA

Actividades propuestas.
- Relacionando polígonos. (4° de ESO 32)
- El isósceles máximo. (4° de ESO 32)
- Sistema internacional de unidades. (4° de ESO 47)

Ampliación.
- Unidades locales. (4° de ESO 48)

Contenidos.
- Cálculo de áreas de figuras planas.
- Perímetros de figuras planas.
- Aproximación al área del círculo mediante polígonos regulares con más lados cada vez.
- La figura plana con mayor área a igual perímetro.
- Problemas de maximización.
- Teorema de Pitágoras.
- Semejanza de triángulos.
- Conversión de unidades de un sistema a otro.
- Sistema métrico decimal, unidades de longitud, área y volumen.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En cuanto a este bloque no hemos hecho ninguna actividad, ya que a lo largo del curso los contenidos se han ido viendo mediante la resolución de problemas. Sí hacer notar la importancia de la autoobservación a la hora de resolver un problema y mientras se resuelve, ya que nos permite conocer que es lo que no sabemos, para poder estudiarlo o buscar la información que se necesite en ese momento, como razonamos, y con qué actividad debemos enfrentarnos al próximo problema para poder resolverlo.

EVALUACIÓN

A principios de curso nos pasamos unas cuantas clases hablando de la evaluación, cómo evaluar y qué evaluar, hasta que se llegó al siguiente acuerdo:
- puntuar las actividades con un 30% de la nota,
- el trabajo de clase con un 40% de la nota,
- la puntualidad con un 10 % ,
- traer el material de clase con un 10 % y
- el comportamiento en clase con el 10%.
- Si se tenían a lo largo de la evaluación 5 faltas sin justificar automáticamente se evaluaba negativamente ésta.

En las actividades se evaluaría:
- el planteamiento (con el 30% de la nota de este apartado), ideas para resolver el ejercicio, así como buscar al información necesaria para entender lo que se tenía que hacer, un esquema o un planing de cómo se iba a resolver el ejercicio, hipótesis y creencias de los alumnos respecto a los contenidos, etc.
- el desarrollo (con el 30 %); aquí se evaluaría el uso de los contenidos
- las conclusiones (con el 30 %); donde comprobábamos las hipótesis del inicio y se revisaban las soluciones obtenidas para ver si eran correctas o no y se decidía si se empezaba de nuevo con el ejercicio o ya lo teníamos resulto.
- la presentación (con el 10 %); donde se evaluaba la expresión, la coherencia y las faltas de ortografía tanto matemáticas como del lenguaje.

En el trabajo de clase se evaluaría:
- las salidas a la pizarra (con el 20 % de la nota de este apartado); así como la participación en las puestas en común de las actividades, que las aportaciones a estas puestas en común sean coherentes con lo que se está hablando en ese momento y se respete el turno de palabra.
- los hábitos de trabajo (con el 30%); donde se evaluaría la constancia en el trabajo y en el estudio, así como si se realizan las actividades de ampliación.
- la libreta (con el 30%);
- la actitud frente al trabajo y a las matemáticas (con el 20 %)

Aquí los alumnos tomarían nota de su trabajo, de sus observaciones, de sus actitudes...; en fin, de su trabajo de clase y ellos mismos se evaluarían.

VALORACIÓN DEL CURSO

En cuarto a los contenidos creo que los bloques de álgebra y geometría se han, quedado un poco cortos. Al bloque de geometría sólo le hemos dedicado dos semanas, la causa de haberle dedicado tan poco tiempo ha sido que lo hemos dedicado a los otros bloques,

más que nada al de estadística y probabilidad que se programa demasiado extenso, ya que en 3° no se llegó a verlo, he insistido demasiado en algunos conceptos de la probabilidad y no se llegaron a ver todos los contenidos de estadística ya que al tratarse de matemáticas de la opción B también se debería haber visto algo de variables bidimensionales y de correlación. En el bloque de álgebra ha faltado un poco de tiempo para insistir más en la resolución de ecuaciones y en las operaciones con expresiones algebraicas, temas que siempre cuestan mucho a los estudiantes y después en los bachilleres notamos estas lagunas, así como en las operaciones.
Los materiales dan mucho juego y se pueden ver contenidos en una misma actividad incluso de otros bloques, conforme se va trabajando se van encontrando nuevas soluciones y nuevos enfoques muchos de ellos sugeridos por los propios alumnos. Lo que más he encontrado a faltar ha sido no tener una visión global de todo este segundo ciclo de la E.S.O., en el sentido de no haber confeccionado una programación que abarque a los dos cursos, para repartir mejor los contenidos y no tener que insistir en un solo curso con determinados conceptos, que se podrían haber visto en el curso anterior y en este con un recordatorio creo que se hubiese tenido suficiente.

96. PROGRAMACIÓN DE CUARTO CURSO

MEMORIA 4° DE ESO

I.F.P. Canastell. San Vicent del Raspeig

Leandro Tortosa Grau

ÍNDICE DE LA MEMORIA

1.- NÚCLEOS DE CONTENIDO

<u>1.- Bloque de Probabilidad- Estadística-Contar</u>.
La relación de actividades que he trabajado en algunas o todas las clases que he impartido de 4° ESO son las siguientes, por orden:
1. DEBATE

2. CAER AL AGUA
3. PAR O IMPAR
4. MONEDAS
5. EL JUEGO JUSTO
6. LABERINTO PARA CONDENA
7. PASTEL GRATIS
8. EL JUEGO DE LAS FICHAS DE COLORES
9. PISANDO LOS TALONES A LOS HOMBRES
10. EN LAS LÁMINAS
11. CARMEN E ISABEL
12. ALARGANDO PARTIDAS
13. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES
14. MESES DEL AÑO.
15. BARAJAS
16. CON GAFAS

Comentario:
El objetivo más importante que yo me he propuesto al dar este bloque ha sido que entendieran la idea de probabilidad, desterrando algunas ideas falsas e incorrectas, pero muy extendidas no sólo a los alumnos sino a todo el mundo en general. Como ejemplo, me refiero a la idea que parece bastante extendida de que la probabilidad de que llueva mañana es 1/2 porque puede llover o no llover. Este gran "amor" que nuestros alumnos le tienen al 0,5 ó al 50% porque las cosas pueden ocurrir o no ocurrir, es una de las ideas que más he intentado hacerles comprender que es falsa. Para ello les preguntaba que cuál era la probabilidad de que al jugar a la lotería nos lleváramos algún premio, a esto siempre alguien respondía que 50%, entonces yo les comentaba que si eso era así cada dos días nos debería tocar la lotería con lo cual el que no es millonario es que es tonto, ante este razonamiento, el que lo entendía a la primera, quedaba bastante convencido, y se daba cuenta de su error. Estas son las ideas que he tratado de modificar en ellos, también está por en medio la idea de "azar" como explicación a todo aquello que no entienden. Están convencidos de que todo sucede por el azar o por "la suerte".
Para ver esto me han venido muy bien un par de actividades. La primera de ellas fue la primera: "debate". Esta actividad en que se pregunta sobre la probabilidad de que llueva mañana y de que haya vida en otros planetas es muy interesante para empezar porque uno puede ir dándose cuenta de sus razonamientos, ya que no es necesario hacer muchos números, sino que lo fundamental es la explicación que ellos dan a esos fenómenos. Esta actividad aparentemente inocente puede ayudamos para hacerles ver que detrás de fenómenos tan extraños como estos en los que las probabilidades son muy difíciles de dar a priori ", podemos utilizar el sentido común y la lógica para tratar de buscar un resultado, y nunca apoyar éste en la suerte de que se produzca o no se produzca.
La segunda actividad que desarrollamos también me ayudó bastante para engancharlos al tema ya que era un juego y en principio todo el mundo prefiere jugar. Era la de "caer al agua". Resultó muy interesante porque en principio colocaron las fichas como les dio la gana, posteriormente se dieron cuenta de que las cifras centrales eran las que más salían, lo que les llevaba a modificar su estrategia. Luego ya comprendieron perfectamente por qué unas salen más que otras. También me sirvió la actividad para repasar estrategias de contar mediante símbolos para luego sumar deprisa. También repasamos las representaciones de barras ya que les hice representar gráficamente los resultados.

Después desarrollamos algunas actividades para trabajar con diagramas en árbol. Yo creo que deben de saber desarrollar los problemas mediante diagramas en árbol, ya que es un modo mucho más intuitivo, menos formal y se razona mucho más.
También hicimos en clase el juego de las fichas de colores pero con tapones de corcho pintados por sus lados. Resultó muy curioso comprobar que la gran mayoría de los alumnos decían el color que primero les venía a la mente, lo que ellos consideran al azar, pocos tenían estrategias significativas y mucho menos adivinaron cuál era la mejor estrategia, pero resultó divertido.
En cuanto a las gráficas comentamos la de "Pisando los talones a los hombres", también les propuse que hicieran en casa las de las láminas de los accidentes y de los incendios forestales.
Por último también les hice en clase un problema que hay en el libro de probabilidad del Engel que trata sobre unas muchachas que se quieren casar y no les dejan a menos que construyan una circunferencia con cintas de colores. Yo hice este problema en clase con 6 cintas, sacaba a alguien para que anudara las cintas dos a dos como quisiera y luego comprobábamos si habían quedado todas anudadas. En una de las clases sí que salió la circunferencia. Me parece un problema muy interesante para hacerlo en clase ya que les gusta mucho toda la historieta.
También hablamos algo sobre encuestas, pero por falta de tiempo no se concretó en ninguna encuesta a nivel general del instituto. Sí les leí la famosa encuesta sobre la incineración del Ayuntamiento de Madrid como ejemplo de lo que no debe ser una encuesta.

2.- Bloque de Álgebra-Gráficas

Las actividades que desarrollamos fueron las siguientes:
1. Repaso de resolución de ecuaciones de 1er. grado
2. Repaso de ejercicios de despejar incógnitas de ecuaciones.
3 . Buscando
4. El aparcamiento
5. Un salto Infinito 1 y 2
6. El cuadrado algebraico.
7. Párate .
8. Dos cifras
9. ¿Qué elegirías?
10. Trama cuadrada.
11. La matelombriz.
12. La recta.

Comentario:
Comencé por efectuar un repaso de resolución de ecuaciones de primer grado. Pude comprobar que buena parte de los alumnos no saben operar correctamente con fracciones y suelen equivocarse en las mismas operaciones que se vienen equivocando durante años y años. Parece como si todos los años en los que han resuelto ecuaciones no sirvan para nada.
Quizá este año en el bloque de álgebra a lo que le he dado una mayor importancia ha sido al tema de la manipulación y sustitución numérica de las ecuaciones para extraer conclusiones. Para conseguir esto hemos desarrollado una serie de actividades que las encuentro muy interesantes como son la de "Buscando" y las de "Un salto infinito".

Lo que más me ha gustado de ambas actividades ha sido que nos ofrecen la posibilidad de trabajar con ecuaciones no lineales, manipularlas para despejar una de las incógnitas y luego ir dando valores numéricos a una variable y obtener la otra, además luego representamos todo esto gráficamente y podemos así extraer conclusiones sobre lo que resulta. En el caso de Un salto infinito es interesante que los alumnos prueben con diferentes valores de a que pueden ser 1 y 10,que representen y así se den cuenta de las diferencias en la función al cambiar ese parámetro. También resulta interesante comparar los resultados de la gráfica $x\,y = a$ con la de $x^2\,y = 1$ e intentar encontrar la explicación al cambio sustancial en la gráfica.
La actividad de "Párate" les resultó bastante complicada.
La de la trama cuadrada no tuvieron dificultades.
Por último estuvimos unos cuantos días estudiando las rectas. No me detuve en las distintas formas de escribir la ecuación de la recta, le di más importancia a la representación gráfica, a la idea de pendiente de la recta y al cálculo de los puntos de cortes con los ejes una vez representada. También vimos como obtener la recta que pasa por dos puntos, así como en la idea de paralelas a los ejes coordenados.

3. Bloque de Geometría

Las actividades desarrolladas han sido:
1. EL ENGAÑO DE LOS ESPÁRRAGOS
2. LA TIERRA Y LA PELOTA
3. AÑOS LUZ
4. EL TAMAÑO DE LA TIERRA
5. LA FUNCIÓN LOGÍSTICA

Comentario:
Debido a que ha sido el último bloque y que el tiempo se ha echado encima, este bloque sólo lo he podido tratar parcialmente ya que me hubiera gustado hacer alguna actividad más. Me he centrado fundamentalmente en actividades que tenían más que ver con las esfera y la circunferencia que en otras. Tanto las actividades del engaño de los espárragos como la de la tierra y la pelota tienen conclusiones un tanto desconcertantes para ellos porque no es lo que ellos esperan que suceda, sin embargo, una vez las van resolviendo se dan cuenta de que algo raro pasa, creo que es muy importante hacerles comprobar que no se trata de relaciones lineales en estos casos, ahora las cantidades que manejamos se elevan al cuadrado o al cubo y por lo tanto no son operaciones lineales.
La de años luz la propuse para que trabajaran con unidades de medida que no conocen y que se den cuenta de las distancias grandes requieren unidades especiales, deben darse cuenta de que las unidades de medida es algo muy relativo y que nosotros modificamos para trabajar más cómodamente.
El tema de la función logística está puesto como tema final. Lo que yo pretendía era terminar con algún problema general y largo que fuera un poco de aplicación de las matemáticas a "otra cosa". Pretendía que se dieran cuenta de que las matemáticas se usan para resolver los problemas más dispares, como el caso de la función logística. Este tema es el que trata de aproximar, mediante una función simple como es la logística, el problema de predecir el desarrollo y evolución de una población de animales con el tiempo.
Se trata de los apuntes que te pasé. Lo que ocurre es que no he dispuesto de ordenadores para trabajar esto por lo que he limitado este estudio a la primera parte. Lo

que hemos hecho ha sido que ellos entendieran claramente el problema que se planteaba y la herramienta matemática que disponíamos para resolverlo en una primera aproximación, que es la función logística. También he insistido bastante en explicarles el significado de lo que es una ecuación iterativa y en qué consiste eso de iterar. Para mi resultaba fundamental que comprendieran esto y además que pudieran realizar iteraciones con esta ecuación a partir de diferentes valores iniciales, extrayendo luego conclusiones sobre los resultados que se van obteniendo.

Eso es lo primero que hicieron: efectuar iteraciones con la calculadora a partir de diferentes valores iniciales. Los resultados se interpretaban como la evolución de la población con el tiempo.

Pero esto era el primer paso. El segundo paso que hicimos fue el de explicarles el significado de la iteración gráfica: se trataba de hacerles ver que lo mismo que habían hecho con la calculadora lo íbamos a hacer ahora de una manera más rápida utilizando únicamente una regla y un lápiz. Pero el paso previo a esto era el de aprender a representar las parábolas. Llegamos a la conclusión de que la función logística nos llevaba a la parábola, y por tanto tendríamos que saber representarlas.

Yo les di tres casos particulares de la función $y = ax(1-x)$ que fueron para los valores $a=1$, $a=1'6$, $a=3'2$. Con estos valores les pedí que primero representaran las parábolas correspondientes en papel milimetrado y después que realizaran la iteración gráfica para los valores iniciales 0'2 , 0'5 , 0'8, con estos valores debían extraer conclusiones sobre la evolución de la población con los años.

Después de esto ya no hubo tiempo para más, me hubiera gustado poder seguir haciendo cosas con la función logística pero ya no pudo ser.

La valoración que yo hago de este tema final es bastante positiva ya que a una mayoría de los alumnos creo que les pareció interesante

2. PRUEBAS REALIZADAS PARA EVALUAR

Lo primero que debo decir es que no he hecho exámenes para evaluar. La razón es que la experiencia de los años en que sí ponía exámenes era bastante nefasta, ya que luego el examen me servía muy poco a la hora de evaluar.

Lo que sí he tenido en cuenta a la hora de evaluar han sido un par de actividades que solía poner en cada trimestre para que las hicieran de manera individual. Al final de la clase las recogía y podía ver cómo razonaban esas actividades todos los alumnos. Las notas que ponía en estas actividades me servían para la evaluación pero no eran definitivas de las notas. Tenía en cuenta otros factores como son:

- nota de la libreta
- notas de clase
- notas de grupo

Para mí las notas de clase son muy importantes porque son las notas del trabajo diario. Ponía notas de clase a un alumno cuando daba ideas positivas para realizar una actividad o cuando no hacía nada en clase, o cuando su trabajo en grupo era bueno, cuando hacía bien una actividad, etc. Procuraba tomar el mayor número de notas de cada uno. Cuando de algún alumno no tenía notas le pedía que me explicara cómo resolver alguna actividad, o le corregía alguna actividad propuesta.

Las notas en grupo consistían en que cuando salía algún miembro de un grupo a resolver alguna actividad, la nota que yo les ponía iba a parar a todos los miembros del grupo. Con esto intentaba evitar que en los grupos hubiera gente que no se enteraba de nada.

Las actividades que escogí para proponerlas en esa especie de controles que realizaba son:

1ª EVALUACIÓN,

----PASTEL GRATIS

----CARMEN E ISABEL

2ª EVALUACIÓN

----DOS CIFRAS

----¿QUÉ ELEGIRÍAS?

3ª EVALUACIÓN

La nota de la 3ª, que era la final, ha sido una mezcla de las notas de las otras evaluaciones, he tenido en cuenta las notas de clase de la 3ª y también he corregido en profundidad la libreta a todos los alumnos y también les he corregido el trabajo desarrollado con la función logística.

3. APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS

Las ideas básicas que yo creo que han aprendido los alumnos son:

1.- La probabilidad de que un suceso ocurra se puede abordar matemáticamente, los juegos los podemos analizar también matemáticamente para conocer cuáles son las mejores estrategias para ganar

2. -Trasladar enunciados de probabilidad a diagramas en árbol.

3.- La estadística es algo que está por todas partes, en la prensa , en la televisión , etc.

4.- Los números se pueden representar en gráficas .

5.- Las ecuaciones las podemos manipular para obtener propiedades, además estas ecuaciones se pueden representar gráficamente, obteniéndose curvas de diferentes formas.

6.- Las ecuaciones representan problemas físicos cotidianos que podemos plantearnos.

7.- Las matemáticas nos sirven para resolver problemas aparentemente no matemáticos.

8.- La geometría euclídea no me sirve para explicar por ejemplo las formas o conjuntos que se aprecian en la naturaleza.

4.- VALORACIÓN DE LOS MATERIALES.

Comentario:

Los materiales me parecen bien en conjunto, creo que están en la línea de los materiales que hemos utilizado en 3° ESO, esto me parece importante ya que de este modo no hay una ruptura de un año a otro y en 4° ya están más o menos familiarizados con las actividades.

Lo que pienso también es que en los tres bloques, pero especialmente en el de Geometría hay bastantes actividades excesivamente complicadas para que las trabajen los alumnos, creo que tampoco han dado tanta geometría como para darles estas actividades, quizás lo más conveniente es comenzar con unas cuantas actividades de 3° como una buena introducción.

También debo decir que el bloque de Geometría es el que menos me atrae a mí. Por esta razón he variado un poco la estructura de actividades y he añadido el bloque de la función logística. No estaba convencido de que en tan poco tiempo el bloque de geometría quedara con una cierta coherencia.

Veo muy acertado el bloque de Problemas. Es un bloque que se echaba de menos. El problema que ha habido es que quizá ha salido un poco tarde y, yo al menos, no lo he podido mirar con detenimiento, para ver lo que sacaba.
También me gustaría que pudiera salir algún bloque con sugerencias para las actividades, porque creo que de cualquier actividad se pueden sacar muchas ideas y quizá no las explotamos lo bien que se pudiera. Ya dicen que muchos ojos ven más que dos.

5. COMENTARIO SOBRE EL CURSO

El curso me ha parecido muy bien. (Menos mal que hay veces que las reuniones sirven para algo). Creo que es interesante reunirse los que experimentamos estos materiales y estos grupos para comentar los materiales o cómo nos va. Considero oportuno que se sigan realizando estos cursos porque creo que para la gente que de la Reforma y no haya oído hablar de ello o no conozca los materiales, puede ser básico. Pero creo que también es muy beneficioso para los que ya llevamos algún año dándola.

6 .- COMENTARIO GENERAL

Creo que el curso ha sido muy positivo en cuanto a la posibilidad de poner en común la experimentación y analizar materiales.
Como comentario muy particular me gustaría resaltar que me parece muy positivo que estos materiales que utilizamos sean abiertos en el sentido de que uno tiene libertad para extraer las actividades que más adecuadas le parezcan dentro de un abanico de posibilidades. Me parece bien que se puedan añadir cosas, quitar partes, o que se le pueda dar más importancia a unos conceptos que a otros.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, CL. BURGUES, C. FORTUNY, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis. Madrid.

APÈRY. R. y otros.(1988). *Pensar la matemática*. Tusquets. Barcelona.

ASPIN, V. *Working Investigationally*. ATM. Nelson Lancs..

AZCÁRATE, C. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis. Madrid.

BELL, A.M. (1984). *Estudios de enseñanza por diagnóstico*. Enseñanza de las ciencias. Vol (4), 1.

BELL, A. M. (1986). *Enseñanza por Diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros*. Enseñanza de las Ciencias. Vol 4, 3.

BOREL, E. (1971). *Las Probabilidades y la vida*. Oikos-Tau. Barcelona.

BRUNER, J. (1972). *El proceso de la educación*. Uteha. México.

CABALLERO, S. y otros. (1991). *Guía de uso de los materiales de Matemáticas. 1^er^ ciclo de la E.S.O.* Generalitat Valenciana. Valencia.

CACUMEN (Revista). Varios números. (Zugarto Ed.:Madrid).

CASTELNUOVO, E. (1963). *Geometría intuitiva*. Labor. Barcelona.

COCKCROFT, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. M.E.C. Madrid.

COXETER,H. (1971). *Fundamentos de Geometría*. (Limusa: México).

CUNDY, H.M. et ROLLET, A.P. (1978). *Modèles Mathématiques*. CEDIC. Paris.

CWIRKO, J. *Mathematical Activities from Poland*. A.T.M.

DAVIS, P. y HERST, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Labor. Barcelona.

DAVIS, P. y HERST, R. (1989). *El sueño de Descartes*. Labor. Barcelona.

DEPARTAMENT OF EDUCATION AND SCIENCE. (1985). *Mathematics from 5 to 16*. H.M.S.O. London.

DIAZ GODINO y otros. (1987). *Azar y Probabilidad*. Síntesis. Madrid.

DICKSON, L. y otros. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor. Barcelona.

ENGEL, A. (1988). *Probabilidad y estadística*. (2 vols.). Mestral. Valencia.

FIELKER, D. (1986). *Rompiendo las cadenas de Euclides*. M.E.C. Madrid.

GARDNER, M. (1983). *¡AJA Paradojas!*. Labor. Barcelona.

GARDNER, M. (1980). *Carnaval matemático*. Alianza. Madrid.

GARDNER, M. (1983). *Circo Matemático*. Alianza. Madrid.

GARDNER, M. (1984). *Festival Mágico-Matemático*. Alianza. Madrid.

GARDNER, M. (1981). *Inspiración ¡ajá!*. Labor. Barcelona.

GATTEGNO, C. (1967). *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Aguilar. Madrid.

GHYKA, M. (1978). *El número de oro*. (2 vols.). Poseidón. Barcelona.

GREEN, D. (1982). *Probability concepts in 11-16 year old pupils. Report of research.* University of Technology. Loughborough. England.

GRUPO AZARQUIEL. (1982). *Curso Inicial de Estadística de Estadística en el Bachillerato*. ICE de la Univ. Autónoma. Madrid.

GRUPO AZARQUIEL. (1991). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Síntesis. Madrid.

GRUPO AZARQUIEL. (1985). *Regresión y Correlación. Una Introducción Intuitiva.* ICE de la Univ. Autónoma. Madrid.

HARDY, T. y otros . *Points of departure*. A.T.M.: Nelson.

HART, K. (1981). *Children's undrestanding of Mathematics: 11-16*. John Murray. London

JOINT MATRICULATION BOARD & SHELL CENTRE. (1990). *Problemas con pautas y números*. Cop-Pat Txurdinaga. Bilbao.

KAMII,C. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Visor. Madrid.

KLINE, M. (1976). *El fracaso de la Matemática Moderna*. Siglo XXI. Madrid.

KLINE, M. (1985). *Matemáticas. La perdida de la certidumbre*. Siglo XXI. Madrid.

KRULIK, S. y RUDNICK, J. (1980). *Problem Solving. A handbook for teachers*. Allyn & Bacon. Boston.

KÜCHEMANN, D.E. (1981). *Álgebra*. En K.HART. Children's understanding of mathematics 11-16. John Murray. London.

LOCKHEAD, J. y MESTRE, J. (1988). *From Words to Algebra. Mending Misconceptions*. En.

MALBA TAHAN (1982). *El hombre que calculaba*. Antalbe. Barcelona.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona.

MATZ, M. (1979). *Towards a process model for high school algebra errors*. (Working paper 181). Cambridge MA. Massachusets Institute of Technology, Artificial Inteligence Laboratory.

MORA, J.A. y RODRIGO, J. (1993). *Mosaicos I y II*. (2 vols). Proyecto Sur. Granada.

NCTM. (1993). Conexiones matemáticas. S.A.E.M. Thales. Sevilla.

NCTM. (1981). *Teaching Statistics and Probability*. Yearbook.

NCTM (1988). *The Ideas on Algebra*. Yearbook.

NCTM. (1972). *Recopilación, organización e interpretación de datos*. Trillas. México.

NCTM. (1988). *Geometric Probability*. North Carolina School of Science and Mathematics

NEWMAN, J.R. (1969). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. 6 Vols. Grijalbo. Barcelona.

NOVACK, J.D. (1988). *Constructivismo humano: un consenso emergente*. Enseñanza de las Ciencias. 6 (3).

ORTON, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. MEC-Morata. Madrid.

PACIOLI, L. (1987). La divina proporción. Ediciones Akal. Madrid.

PAPERT, S. (1982). *Desafío a la mente*. Galápago. Buenos Aires.

PEDOE, D. (1979). *La Geometría en el arte*. Gustavo Gili. Barcelona.

PERELMAN, Y. (1978). *Álgebra Recreativa*. Mir. Moscú.

PERELMAM, Y. (1983). *Problemas y experimentos recreativos*. Mir. Moscú.

POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México.

ROSNICK, P. (1982). *Student Conceptions of Semantically Laden Letters in Algebra*. Technical Report. Cognitive Development Project (University of Massachusets).

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Inc. Florida.

SCIENTIFIC AMERICAN. (1974). *Matemáticas en el Mundo Moderno*. Blume. Barcelona.

SHELL CENTRE. El lenguaje de funciones y gráficas. MEC-Universidad del País Vasco. Bilbao.

WALTER, M. (1988). *Geometría*. M.E.C. Madrid.

WELLS, D. *Mathematics through problem solving*. (2 vols). Basil Blackwell Ltd. Oxford.

WEYL, H. (1975).*La simetría*. Promoción cultural. Barcelona.

WOOD, L.E. (1987). *Estrategias de pensamiento*. Labor. Barcelona.

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR

Dirección General de Renovación Pedagógica

Centro de Desarrollo Curricular