EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN

Materiales para la preparación de la prueba de maturita

MATEMÁTICAS

Secciones Bilingües de Eslovaquia

educacion.es

MATERIALES PARA LA PREPARACIÓN DE LA PRUEBA DE MATURITA

Matemáticas

Secciones Bilingües de Eslovaquia

Bratislava 2009

MATERIALES PARA LA PREPARACIÓN DE LA PRUEBA DE MATURITA. MATEMÁTICAS

Secciones Bilingües de Eslovaquia

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Agregaduría de Educación, Embajada de España en Bratislava

Autores: *Armas Gómez, Sonia Margarita*
Fernández Fontenla, Emilio José
Gil Guerra, Luis
Gómez Aguilar, Lidia
González Pérez, Juan Carlos
Puente López, Silvia
Soto Mouriño, María del Pilar

Coordinadores: *Fernández Fontenla, Emilio José*
González Pérez, Juan Carlos

Director: *Luis Pardiñas Béjar*

Publicación en papel reciclado *Impact*

Impreso en Bratislava, República Eslovaca

Fecha de publicación: *2009*

Imprime: AnaPress Bratislava

N.I.P.O. 820-09-438-0

ISBN 978-80-89137-60-2

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

El programa de formación del profesorado del Ministerio de Educación ha propiciado esta nueva publicación, ***Materiales para la preparación de la prueba de Maturita. Matemáticas. Secciones Bilingües de Eslovaquia***, realizada de manera coordinada con el propósito de facilitar a la enseñanza de las Matemáticas en las Secciones Bilingües de Eslovaquia un instrumento de homogeneidad con vistas, especialmente, a las pruebas de Bachillerato.

Esta publicación forma parte del plan de la Agregaduría de Educación en Eslovaquia para suministrar al profesorado y al alumnado textos y materiales pedagógicos de utilidad básica, que compaginen las exigencias de los currículos eslovacos y españoles en este modelo de enseñanza integrada que son las secciones bilingües.

Nuestra felicitación a los autores por la voluntad expresada en este libro de clarificar las cuestiones prácticas a las que el estudiante eslovaco se enfrenta durante su aprendizaje bilingüe de las Matemáticas; y por la capacidad que han tenido de trabajar coordinadamente en grupo, salvando las dificultades que impone la distancia y aprovechando con solicitud y eficacia los recursos de los nuevos sistemas de comunicación a través de internet.

Bratislava, diciembre de 2009

INTRODUCCIÓN

Una de las características más llamativas del sistema educativo eslovaco es la prueba de madurez que realizan los alumnos al finalizar sus estudios. Es una prueba oral en la que los estudiantes son examinados de todos los contenidos cursados durante sus estudios en la sección bilingüe.

Para obtener el título de bachillerato español, los alumnos de las secciones bilingües deben examinarse, además de Lengua y Literatura españolas, de por lo menos una de las asignaturas de ciencias impartidas en español, (Biología, Física, Matemáticas y Química), siendo matemáticas una de las más elegidas por los estudiantes.

Los profesores españoles de ciencias deben seguir el currículo eslovaco. Esto hace que los libros de texto en español no se adapten totalmente a este currículo. Para preparar la prueba de madurez los alumnos tienen la opción de matricularse en un seminario de matemáticas en el último curso donde se repasan todos los temas que entran en la prueba de madurez.

Por este motivo, los profesores de matemáticas vimos la necesidad de crear este material que sirva de ayuda, tanto a alumnos como a profesores, para preparar esta prueba. Hemos recopilado en este libro una colección de ejercicios representativos de cada uno de los temas que pueden aparecer en la prueba de madurez.

En cada uno de los temas se enumeran los conceptos más importantes que deben dominar los alumnos, seguidos de una colección de problemas representativos, unos resueltos detalladamente y otros en los que sólo se indica la solución.

Se ha hecho un esfuerzo porque todos los contenidos de las diferentes secciones bilingües estén recogidos en este libro. Ya que en cada sección bilingüe tiene un cierto margen a la hora de elaborar su propio currículo.

AGRADECIMIENTOS

Los profesores participantes en este grupo de trabajo desean dar las gracias:

- A la Agregaduría de Educación de la Embajada de España en Eslovaquia por hacer posible este proyecto y su publicación.
- Al Instituto de Formación del profesorado, Investigación e Innovación Educativa del Ministerio de Educación de España, por financiar este proyecto.
- A todas las SS.BB. de Eslovaquia y en particular a sus directores, por facilitar la participación de los diferentes profesores en el grupo de trabajo.
- Al IES Valdehierro, de Madridejos, por su colaboración.
- A RNDr. Juraj Opačitý, por las facilidades concedidas para poder terminar el libro lo antes posible.
- A Antonio Cascales Vicente, por iniciar este proyecto y la ayuda prestada.
- A Ana Korbašová, por los dibujos del los temas 23 y 24.
- A Margarita Rodríguez Fernández, por su ayuda prestada.
- A Tamara Gómez Rozados, por sus ayuda en la revisión final de esta obra.
- A todos a quienes les hemos robado tiempo para poder dedicarlo a elaborar esta obra.

Tema 1

Lógica proposicional

CONCEPTOS BÁSICOS

- Proposiciones. Valor de las proposiciones.
- Operadores lógicos. Proposiciones compuestas.
- Fórmulas con proposiciones.
- Tautología, contradicción e indeterminación.
- Cuantificadores.
- Leyes de la lógica.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Estudia mediante una tabla de verdad si la siguiente proposición es tautología, contradicción o indeterminación:

$$[(p \to q) \wedge q'] \to p'$$

Solución:

Construimos la tabla de verdad teniendo en cuenta que tendrá $2^2 = 4$ filas y aplicamos las distintas operaciones entre proposiciones.

p	q	p'	q'	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q'$	$[(p \to q) \wedge q'] \to p'$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

En la última columna, la que corresponde a nuestra proposición, observamos que hemos obtenido valores de verdad para cualesquiera que sean los valores de las proposiciones de partida, por lo que nos encontramos con una tautología.

2. Si p:"Hoy es martes" y q:"Mañana es jueves" son proposiciones, determinar los días de la semana en que son verdaderas las proposiciones siguientes:

a) $q \vee p$

b) $p \to q$

.

Solución:

Comenzamos estudiando los valores de verdad y falsedad de las proposiciones compuestas propuestas en los apartados a) y b), a partir de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones que las conforman. Para ello realizamos la tabla de verdad.

p	q	$q \vee p$	$p \to q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

Observamos que la proposición $q \vee p$ es verdadera si lo es una de las proposiciones p o q o ambas. La proposición p es cierta sólo si es martes. La proposición q es cierta si es miércoles. De este modo, la proposición $q \vee p$ sólo es cierta cuando una de ellas es cierta, puesto que no pueden serlo simultáneamente. Por tanto, la proposición es cierta si es martes o miércoles.
En el caso de la segunda proposición es cierta en todos los casos, salvo cuando la proposición p es cierta y la proposición q es falsa. Esto sólo ocurre si estamos en martes. Por tanto, la proposición es cierta cualquier día de la semana excepto el martes.

3. Dadas las proposiciones:

a) Existen números enteros cuya raíz cuadrada es cero.
b) Todos los números enteros son menores que uno.

Escríbelas simbólicamente y niega las expresiones obtenidas.

Solución:

a) Empezamos escribiendo de forma simbólica la proposición:

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \sqrt{x} = 0$$

Ahora, procedemos a negarla. Literalmente, que no existan números enteros cuya raíz cuadrada es cero equivale a decir que ningún número entero tiene raíz cuadrada cero. Para trasladar este hecho de forma simbólica debemos recordar que la negación de un “existe” es un “para todo” y que también hay que negar la proposición “la raíz cuadrada es cero”. Así, tenemos:

$$(\exists x \in \mathbb{Z} : \sqrt{x} = 0)' \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : \sqrt{x} \neq 0$$

b) De nuevo comenzamos escribiendo simbólicamente la proposición:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x < 1$$

Procedemos ahora a negarla. De forma semejante al apartado anterior, que no todos los números enteros son menores que uno equivale a decir que existe un número entero mayor o igual que uno. Simbólicamente:

$$(\forall x \in \mathbb{Z} : x < 1)' \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : x \geq 1$$

4. Escribe la recíproca, contraria y contrarrecíproca de la implicación: “Si un número es par entonces su cuadrado es par”

Solución:

Si llamamos p a la proposición “Un número es par” y q a la proposición “El cuadrado de un número es par”, podemos representar la implicación por $p \to q$. A partir de ella podemos establecer otras implicaciones:

- Recíproca: $q \rightarrow p$, que literalmente sería: "Si el cuadrado de un número es par entonces dicho número es par"
- Contraria: $p' \rightarrow q'$, que en lenguaje común sería: "Si un número es impar entones su cuadrado es impar"
- Contrarrecíproca: $q' \rightarrow p'$, que podemos expresar como: "Si el cuadrado de un número es impar entonces dicho número es impar".

5. Averigua quienes toman té, sabiendo que:

a) Si Stanka toma té, Miro también.
b) Pueden tomar té Miro o Beata.
c) O Stanka o Miro toman té, pero no ambos.
d) Miro toma té, si y solo sí lo toma Beata.

<u>Solución:</u>

Vamos a utilizar una tabla de verdad para deducir el resultado. Llamamos p a la proposición "Stanka toma té", q a la proposición "Miro toma té" y r a la proposición "Beata toma té" y escribimos las cuatro condiciones utilizando los distintos conectores lógicos. Tenemos entonces:

a) $p \rightarrow q$; b) $q \vee r$; c) $(q \vee p) \wedge (q \wedge p)'$; d) $q \Leftrightarrow r$

Ahora, creamos una tabla de verdad donde recojamos cada una de estas proposiciones en una columna:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \vee r$	$(q \vee p) \wedge (q \wedge p)'$	$q \Leftrightarrow r$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F

Observamos que en la quinta fila todas las proposiciones son ciertas y esto sólo ocurre cuando q y r son verdaderas. Por tanto, podemos concluir que Miro y Beata son los que toman té.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Estudia mediante una tabla de verdad si la siguiente proposición es tautología, contradicción o indeterminación:
$$[(p'\vee q)\wedge(p\vee r)]\to(q\vee r)$$
2. Si p:"Hoy es viernes" y q:"Mañana es domingo" son proposiciones, determinar los días de la semana en que son verdaderas las proposiciones siguientes:
   a) $p\Leftrightarrow q$
   b) $p'\wedge(p\vee q)$
3. Dadas las proposiciones:
   a) El cuadrado de todo número real es mayor que 2,
   b) Existen enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente.

   Escríbelas simbólicamente y niega las expresiones obtenidas
4. Escribe la recíproca, contraria y contrarrecíproca de: $x^2-5x+6\geq 0\Rightarrow x\leq 2\vee x\leq 3$

SOLUCIONES

1. Es una tautología
2.
   a) Todos los días, menos el viernes y el sábado.
   b) El sábado
3.
   a) $\forall\, x\in\mathbb{R}:x^2>2$; $\exists x\in\mathbb{R}:x^2\leq 2$
   b) $\exists x\in\mathbb{Z}:x^3+1=(x+1)^3$; $\forall\, x\in\mathbb{Z}:x^3+1\neq(x+1)^3$
4. Recíproca: $x\leq 2\vee x\leq 3\Rightarrow x^2-5x+6\geq 0$

   Contraria: $x^2-5x+6<0\Rightarrow x>2\wedge x>3$

   Contrarrecíproca: $x>2\wedge x>3\Rightarrow x^2-5x+6<0$

Tema 2

Teoría de conjuntos

CONCEPTOS BÁSICOS

- Conceptos básicos: elemento, cardinal, relación de pertenencia.
- Inclusión. Subconjunto.
- Conjunto universal. Conjunto vacío. Partes de un conjunto.
- Diagramas de Venn.
- Operaciones: unión, intersección y complemento. Propiedades. Operaciones derivadas.
- Leyes de Morgan.
- Partición de un conjunto
- Conjuntos numéricos y relaciones entre ellos.
- Intervalos de la recta real: nomenclatura, representación y operaciones

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sean U = { 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25}, A = { x ϵ U / x es múltiplo de 3 }, B = { x ϵ U / x es múltiplo de 5 }. Comprobar las leyes de Morgan.

<u>Solución:</u>

Comenzamos especificando los dos conjuntos A y B, escribiéndolos por extensión. Así:

A = { 3, 9, 15, 21} y B = { 5, 15, 25}

Las leyes de Morgan para conjuntos son:

a) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

b) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Así, debemos determinar los conjuntos contrarios de A y B, para proseguir con las uniones e intersecciones indicadas.

A' = { 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25 }

B' = { 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23 }

Pasemos a comprobar la primera ley. Para ello debemos verificar que los conjuntos $A' \cup B'$ y $(A \cap B)'$ están constituidos por los mismos elementos :

$A' \cup B'$ = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25}

$(A \cap B)$ = { 15} $\rightarrow$ $(A \cap B)'$ = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25}

Luego $A' \cup B' = (A \cap B)'$

Comprobemos ahora la segunda ley. Ahora tenemos que verificar que los conjuntos $A' \cap B'$ y $(A \cup B)'$ tienen los mismos elementos:

$A' \cap B'$ = { 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 }

$(A \cup B)$ = { 3, 5, 9, 15, 21, 25} $\rightarrow$ $(A \cup B)'$ = { 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 }

Luego $A' \cap B' = (A \cup B)'$

2. Sea el conjunto S = { 1, 2, 3}. Determina el conjunto de las partes de S, es decir, $\wp(S)$

Solución:

Denotamos por $\wp(S)$ al conjunto de las partes de S, es decir, al conjunto formado por todos los subconjuntos de S. El cardinal de este conjunto $\wp(S)$ es 2^n, donde n es el cardinal del conjunto S. Así, debemos determinar 2^3 = 8 elementos.
En primer lugar especificamos todos los conjuntos unitarios:

{1} , {2}, {3}

Ahora todos los conjuntos de 2 elementos:

{1, 2} , {1, 3}, {2, 3}

Finalmente debemos recordar que todo conjunto tiene dos subconjuntos impropios: el conjunto vacío $\emptyset$ y el propio conjunto S.
Así, tenemos que:

$\wp(S)$ = { $\emptyset$, {1} , {2}, {3}, {1, 2} , {1, 3}, {2, 3}, S }

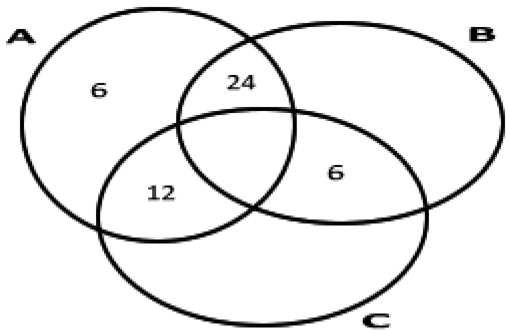
3. Una orquesta está compuesta por 180 músicos de los cuales:

- 6 no tocan más que el violonchelo
- 24 tocan el violonchelo y el violín, pero no la viola.
- 12 tocan el violonchelo y la viola, pero no el violín.
- 6 tocan el violín y la viola pero no el violonchelo.

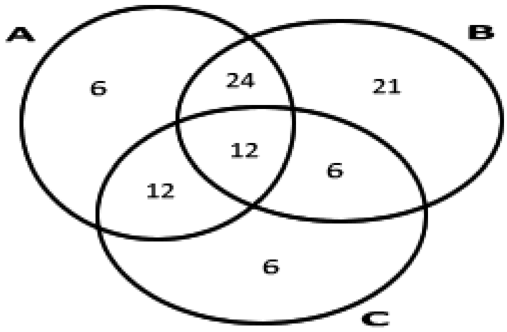
Además sabemos que 63 músicos tocan el violín, 54 el violonchelo y 36 la viola.
¿Cuántos músicos no tocan ninguno de los tres instrumentos?

Solución:

Vamos a llamar A al conjunto de chelistas, B al conjunto de violinistas y C al conjunto de violas. Sabemos que |A| = 54, |B| = 63 y |C| = 36.
Por los datos también sabemos que:
$|A\cap B'\cap C'| = 6$; $|A\cap B\cap C'| = 24$; $|A\cap B'\cap C| = 12$; $|A'\cap B\cap C| = 6$;
Si reflejamos toda esta información en un diagrama de Venn tenemos:



De esta forma vemos claramente que $|A\cap B\cap C| = 54 - (6 + 24 + 12) = 12$ y podemos completar todos los cardinales restantes:
$|A'\cap B\cap C'| = 21$; $|A'\cap B'\cap C| = 6$
Gráficamente:



Por tanto, podemos determinar claramente el número de músicos que no tocan ninguno de los tres instrumentos (chelo, viola o violín):180 - (6 + 24 + 12 + 12 + 21 + 6 + 6) = 93

4. Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 3}, C = {2, 4} y D = {5}. Estudia si B, C y D forman una partición de A.

Solución:

Los conjuntos B, C y D forman una partición de A si verifican:

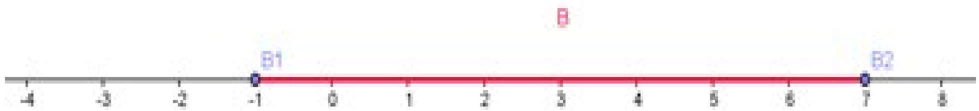
- Son no vacíos.
- Son disjuntos dos a dos
- Su unión es A

Observamos en primer lugar que $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ y $D \neq \emptyset$.
Por otra parte, $B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ y $C \cap D = \emptyset$
Finalmente, $B \cup C \cup D = \{1, 3, 2, 4, 5\} = A$

5. Si A = < -3, 4 > y B = < -1, 7 >. Determina $A \cap B$

Solución:

Representamos gráficamente los intervalos A y B.



En el caso del intervalo A, como aquellos valores reales comprendidos entre -3 y 4; en el caso de B, como aquellos valores reales comprendidos entre -1 y 7.
Esto nos permite observar claramente que la intersección de estos dos intervalos está formada por todos los números reales que se encuentran entre -1 y 4, incluyendo estos dos valores.
Así, tenemos: $A \cap B$ = < -1, 4>

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea U={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} el conjunto universal, y sean A = { x ϵ U / x es múltiplo de 3 }, B = { x ϵ U / x es múltiplo de 4}. Comprobar las leyes de Morgan con A y B.
2. En una clase de música con 73 alumnos hay 52 que tocan el piano, 25 el violín, 20 la flauta, 17 tocan piano y violín, 12 piano y flauta, 7 violín y flauta y sólo hay 1 que toque los tres instrumentos. ¿Hay algún alumno que no toque ninguno de los tres instrumentos?
3. Si A = (< -3, 6) U (8, + ∞)) y B = (- ∞ , 12 >. Determina $A \cap B$
4. Sean A = {las vocales del alfabeto español}, B = {a,e,o} y C = {i,u}. Estudia si B y C forman una partición de A. Halla también $\wp(B)$

SOLUCIONES

1. $A' \cup B' = (A \cap B)'$ = {2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 18, 20}
   $A' \cap B' = (A \cup B)'$ = { 2, 10, 14}
2. 11
3. < -3, 6) U (8, 12 >
4. B y C forman una partición de A.
   $\wp(B)$ = { Ø , {a}, {e}, {o}, {a, e}, {a, o}, {e, o}, B }

Tema 3

Números enteros y racionales

CONCEPTOS BÁSICOS

- Números naturales y enteros.
- Divisibilidad. Números primos.
- Criterios de divisibilidad.
- Máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.)
- Números racionales.
- Representación decimal de números racionales.
- Fracciones generatrices.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestra que: $6|n^3+5n$

Solución:

Vamos a demostrarlo utilizando el método de inducción:
Para n = 1 $1^3+5\cdot 1=6$, luego 6 | 6
Para n = 2 $2^3+5\cdot 2=18$, luego 6 | 18

Supongamos que es cierto para un valor n, es decir, ¿es cierto para n + 1?
$(n+1)^3+5(n+1)=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1+5\cdot n+5=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+5\cdot n+6$
Agrupando adecuadamente, tenemos:
$(n+1)^3+5(n+1)=(n^3+5\cdot n)+3\cdot n(n+1)+6$, que resulta ser un múltiplo de 6, puesto que el primer sumando, (n^3+5n), lo es por la hipótesis de inducción, el segundo sumando, $3\cdot n(n+1)$, contiene un factor 3 y un factor 2 (por contener dos números consecutivos, uno de ellos debe ser par) y el último sumando es un 6.
Por tanto, es un múltiplo de 6.

2. Expresa en forma de fracción irreducible:

a) 1,324 b) $2,3\hat{5}$ c) $5,\widehat{53}$

Solución:

a) En este caso tenemos un número decimal exacto. Su expresión como fracción será:

$$\frac{1324}{1000}=\frac{331}{250}$$

b) Aquí hay un número decimal periódico mixto.

N = 2,355555....
10 · N = 23, 55555....
100 · N = 235,5555...

Restando 100 · N – 10 · N = 212 → 90 N = 212 → N = $\frac{212}{90} = \frac{106}{45}$

c) Este es un número decimal periódico puro.
N = 5,53535353...
100 · N = 553,53535...

Restando 100 · N – N = 548 → 99 · N = 548 → N = $\frac{548}{99}$

3. Di cuál es la vigésima cifra decimal de estos números cuando los expresamos como decimales:

a) $\frac{123}{999}$ b) $\frac{123}{990}$

Solución:

En primer lugar expresamos ambos números mediante decimales. Tenemos entonces:

a) $\frac{123}{999} = 0,\widehat{123}$ decimal periódico puro.

La vigésima cifra decimal $(20 = 6 \cdot 3 + 2)$ coincidirá con la que ocupa la segunda posición; en este caso, el 2 .

b) $\frac{123}{990} = 0,1\widehat{24}$ decimal periódico mixto.

La vigésima cifra decimal coincidirá con la primera cifra del periodo ($20 - 1 = 19$ y $19 = 9 \cdot 2 + 1$) ; en este caso, el 2 .

4. Un campo rectangular de 36m de largo y 150m de ancho, está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de estas parcelas es la mayor posible. ¿Cuál es la longitud del lado de cada una de la parcelas cuadradas? ¿Cuántas parcelas cuadradas obtenemos?

Solución:

Buscar la longitud del lado de las parcelas cuadradas equivale a buscar el valor que permite dividir cada una de las dos dimensiones en partes enteras. Además, esa longitud es la misma para ambas y debe ser la mayor posible para conseguir el área más grande, por lo que tenemos que buscar el máximo común divisor de las dos cantidades. Es decir:

l = m.c.d. (36, 150)

Así, lo primero que debemos hacer es factorizar los dos valores:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto, $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

El máximo común divisor se compone de aquellos factores comunes a los dos números, con su menor exponente. Así:

m.c.d. (36, 150) = 2 · 3 = 6

Luego debemos hacer cuadrados de longitud 6 m para conseguir dividir el rectángulo en partes iguales con el mayor área posible (36 m^2).
Para calcular el número de parcelas sólo debemos determinar el número de partes en las que se divide cada una de las dos dimensiones. El largo se divide en 6 partes mientras que el ancho se divide en 25. Por tanto, tenemos $6 \cdot 25 = 150$ parcelas cuadradas de 36 m^2 cada una.

5. Buscar las cifras que faltan para que el número 251*8473* sea divisible por 15.

<u>Solución:</u>

Para que el número 251*8473* sea divisible por 15 deber serlo por los factores que lo constituyen , es decir, 3 y 5.
Así, para ser divisible por 5 debe acabar en 0 ó 5.
Para ser divisible por 3, la suma de las cifras debe ser múltiplo de 3. Como precisamente las cifras de las que disponemos suman 30, podemos tomar como cifras desconocidas cero.
Luego el número sería:

251084730

Pero tenemos muchas más soluciones. Así, si el número acaba en 0, las cifras 3, 6 y 9 pueden ocupar la cuarta posición. Por tanto, tenemos también como soluciones:

251384730
251684730
251984730

Si decidimos que el número acabe en 5, las cifras 1, 4 y 7 podrían ocupar la posición cuarta, por lo que también sirven como solución:

251184735
251484735
251784735

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demuestra que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \text{si}\ 4|n^2 \Rightarrow 2|n$
2. ¿Cuáles de los siguientes números pueden expresarse como fracción?:
$$3{,}45\,;\,1{,}00\hat{3}\,;\sqrt{2}\,;2{,}131131113...;\ \pi;\ \ 1,\widehat{142857}$$
Escribe la fracción que representa a cada uno en los casos posibles.
3. Un viajante va a Sevilla cada 18 días, otro va a Sevilla cada 15 días y un tercero va a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido en Sevilla. ¿Dentro de cuantos días volverán a coincidir en Sevilla?
4. Averigua por que cifra hay que sustituir * para que el número 68072959*3 sea divisible por 11.

SOLUCIONES

1. Se comprueba de forma rápida mediante reducción al absurdo.
2. $3{,}45=\frac{345}{100}\,;1{,}00\hat{3}=\frac{301}{300}\,;1,\widehat{142857}=\frac{8}{7}$
3. Dentro de 360 días.
4. Sólo puede ser la cifra 1.

Tema 4

Potencias y raíces

CONCEPTOS BÁSICOS

- Potencias con exponente natural, entero
- Propiedades de las potencias. Operaciones con potencias
- Radicales. Potencias con exponente racional. Operaciones con radicales. Racionalización
- Comparación de potencias y de radicales
- Ecuaciones e inecuaciones irracionales

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Ordena los números : a) $(4{,}8)^{-4}$ y $(4{,}9)^{-4}$ b) $(-4{,}8)^{-4}$ y $(-4{,}9)^{-4}$

<u>Solución:</u>

Si tenemos en cuenta la gráfica de la función $f: y = x^{-4}$, observamos que es decreciente en el intervalo $(0,+\infty)$ y es creciente en $(-\infty, 0)$.

a) Los números reales 4,8 y 4,9 pertenecen al intervalo $(0,+\infty)$ y $4{,}8 < 4{,}9$; por tanto $f(4{,}8) > f(4{,}9)$, es decir $(4{,}8)^{-4} > (4{,}9)^{-4}$.

b) Los números reales $-4{,}8$ y $-4{,}9$ pertenecen al intervalo $(-\infty, 0)$ y $-4{,}9 < -4{,}8$; por tanto $f(-4{,}8) < f(-4{,}9)$, es decir $(-4{,}8)^{-4} < (-4{,}9)^{-4}$.

2. Simplifica la expresión $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}}$

<u>Solución:</u>

Las raíces que aparecen en el numerador pueden ser expresadas como potencias: $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$

El resultado de dicho producto es otra potencia de base a y exponente igual a la suma de los exponentes de los factores, esto es $a^{\frac{13}{6}}$.

Procedemos de forma análoga con el subradicando del radical que aparece en el denominador y obtenemos que $a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Así obtenemos que $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}} = \dfrac{a^{\frac{13}{6}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}}$

El denominador $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}$, expresado como potencia, es $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Pero el resultado de esta potencia es otra potencia con la misma base, cuyo exponente es $\frac{1}{3}$ que es el resultado de multiplicar los exponentes $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Teniendo en cuenta que la división de dos potencias con la misma base es otra potencia, con igual base, cuyo exponente es la resta del exponente de la potencia del numerador menos el exponente de la potencia del denominador, de lo que resulta:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{13}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{11}{6}}=\sqrt[6]{a^{11}}$$

Como el exponente del subradicando es mayor que el índice de la raíz, podemos extraer facrtores de dicho radical. Para ello basta tener en cuenta que $11=6+5$, con lo que $a^{11}=a^{6+5}=a^6\cdot a^5$. De lo expuesto, se deduce que $\sqrt[6]{a^{11}}=\sqrt[6]{a^6\cdot a^5}=a\sqrt[6]{a^5}$.
Evidentemente, las operaciones anteriores son válidas si imponemos la condición $a>0$.

3. Calcula $\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}$ y simplifica al máximo.

<u>Solución:</u>

Tenemos que averiguar si los distintos sumandos son semejantes. Cada uno de los tres primeros términos se puede expresar como cociente de radicales que pueden ser racionalizados, esto es, pueden expresarse equivalentemente por cocientes en los que el divisor no contiene radicales:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}+\sqrt{8x}.$$

Como $8=2^3$, extrayendo factores del radical, obtenemos que $\sqrt{8x}=2\sqrt{2x}$.
Sabemos que las fracciones de números reales no se alteran, si multiplicamos el numerador y el denominador por la misma cantidad. Hemos de multiplicar y dividir cada fracción por un factor adecuado para que no aparezcan radicales en los distintos denominadores. Así, elegiremos como factor para la primera fracción $\sqrt{2}$ para que quede en el denominador $\left(\sqrt{2}\right)^2$, para la segunda elegiremos $\sqrt{x}$ y para la tercera $\sqrt{2x}$:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}+2\sqrt{2x}.$$

Efectuando operaciones, tenemos:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}=\frac{\sqrt{2x}}{2}+\frac{\sqrt{2x}}{x}-\frac{\sqrt{2x}}{2x}+2\sqrt{2x}.$$

Como $\sqrt{2\mathrm{x}}$ es un factor común a todos los sumandos, podemos escribir:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}+2\right)\sqrt{2x}.$$

Al efectuar las operaciones que aparecen entre paréntesis, tenemos:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}-\sqrt{\frac{1}{2x}}+\sqrt{8x}=\left(\frac{5x+1}{2x}\right)\sqrt{2x}.$$

La operaciones anteriores son válidas, siempre que $x>0$.

4. Racionaliza y simplifica: a) $\frac{6}{\sqrt[4]{54}}$ b) $\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$

<u>Solución:</u>

Como indicamos en el anterior ejercicio, hemos de multiplicar y dividir cada fracción por una cantidad adecuada para que no aparezcan radicales en el denominador.

a) La descomposición de 54, en factores primos, es $3^3 \cdot 2$, con lo que $\sqrt[4]{54}=\sqrt[4]{3^3 \cdot 2}$. Si multiplicamos $\sqrt[4]{3^3 \cdot 2}$. por $\sqrt[4]{3 \cdot 2^3}$, obtenemos $\sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4}$, que es un número entero. Así:

$$\frac{6}{\sqrt[4]{54}}=\frac{6}{\sqrt[4]{3^3 \cdot 2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3 \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{3 \cdot 2^3}}=\frac{6\sqrt[4]{24}}{\sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4}}=\frac{6\sqrt[4]{24}}{3 \cdot 2}=\frac{6\sqrt[4]{24}}{6}=\sqrt[4]{24}.$$

b) Para racionalizar, nos interesa multiplicar el numerador y el denominador por una cantidad tal que dé como resultado, en el denominador, radicales en los que los subradicandos sea potencias de exponente dos. Teniendo en cuenta el producto notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, vemos que nos conviene como factor $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}$. En consecuencia podemos escribir:

$$\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}=\frac{\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}.$$

El numerador es el cuadrado de una suma, así, haciendo uso de la identidad $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, tenemos que:

$$\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}\right)^2=(3\sqrt{5})^2+2(3\sqrt{5})(5\sqrt{3})+(5\sqrt{3})^2=9\cdot 5+30\sqrt{15}+25\cdot 3=$$
$$=120+30\sqrt{15}=30(4+\sqrt{15})$$

Procediendo de la misma forma con el denominador, obtenemos:

$$(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{3})^2=9\cdot 5-25\cdot 3=-30$$

Así, $\dfrac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}=\dfrac{30(4+\sqrt{15})}{-30}=-(4+\sqrt{15})=-4-\sqrt{15}$.

5. Resuelve la ecuación: a) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}=5$ b) $\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{(x^2+12)^{-1}}=\dfrac{5}{2}$

Solución:

Las ecuaciones dadas son irracionales porque la incógnita aparece en al menos uno de los subradicandos.

a) Intentaremos encontrar una ecuación polinómica que, aunque no sea equivalente a la dada tenga entre sus raíces a las soluciones de la ecuacion irracional considerada, para lo cual aislamos en el primer miembro uno de los radicales, por ejemplo el primero, $\sqrt{3x+1}=5-\sqrt{x-4}$, elevamos al cuadrado ambos miembros y sumamos los términos semejantes, con lo cual obtenemos: $3x+1=x+21-10\sqrt{x-4}$.

Aquí tenemos que hacer una observación que justifica la afirmación anteriormente hecha acerca de la posibilidad de que la ecuación obtenida sea no equivalente a la dada:

la función $f: y=x^2$ no es inyectiva ya que es posible encontrar valores x_1 y x_2 de la variable x, que, no siendo iguales, cumplan $x_1^2=x_2^2$.

Así, podría ocurrir que obtenemos soluciones de la ecuación $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-4}\right)^2$, que no son solución de la ecuación $\sqrt{3x+1}=5-\sqrt{x-4}$.

Como la ecuación $3x+1=x+21-10\sqrt{x-4}$, sigue siendo irracional, aislamos el radical en el segundo miembro ($2x-20=-10\sqrt{x-4}$), simplificamos por 2 y elevamos, nuevamente, los dos miembros al cuadrado, obteniéndose así la ecuación de segundo grado $x^2-45x+200=0$, cuyas raíces son $x_1=5$ y $x_2=40$. Ambos valores pertenecen a los dominios de definición de las funciones $y=\sqrt{3x+1}$ e $y=\sqrt{x-4}$, pero únicamente la primera cumple la ecuación dada en el enunciado. Por tanto la solución de la ecuación es $x=5$.

b) Si practicamos el cambio de variables $x^2+12=p^4$ convertimos la ecuación irracional $\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{(x^2+12)^{-1}}=\dfrac{5}{2}$ en la ecuación racional $p+\dfrac{1}{p}=\dfrac{5}{2}$, que tiene sentido si $p \neq 0$.

Si multiplicando ambos miembros por $2p$, nos queda la ecuación de segundo grado $2p^2+2=5p$, cuyas raíces son $p=2$ y $p=\dfrac{1}{2}$.

c) Si sustituimos dichos valores en $p^4 = x^2 + 12$, obtenemos que las posibles soluciones de la ecuación dada son las raíces de $x^2 + 12 = 16$ o de $x^2 + 12 = \frac{1}{2}$. La segunda ecuación no admite soluciones reales, mientras que las soluciones de la primera son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. No es difícil comprobar que ambos números son soluciones de la ecuación dada en el enunciado.

6. Resuelve en el conjunto de los números reales la ecuación paramétrica $\sqrt{x^2 - a} = a - x$, con parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Si seguimos el mismo procedimiento que el descrito en el apartado a) del anterior ejercicio, obtenemos la ecuación paramétrica de primer grado $2ax = a^2 + a$.

Para despejar x, tenemos que suponer que $a \neq 0$. En estas condiciones $x = \frac{a+1}{2}$. (Se ha podido simplificar a ya que hemos supuesto que es dicho parámetro es distinto de cero).

Si sustituimos dicho valor en la ecuación irracional dada, obtenemos la igualdad $\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}} = \frac{a-1}{2}$, que se cumple sólo en el caso en el que el segundo miembro sea positivo o cero, es decir, si $a \geq 1$.

Si $a = 0$, tenemos la ecuación irracional $\sqrt{x^2} = -x$, que es equivalente a la ecuación $|x| = -x$, cuya solución es cualquier número real negativo o cero.

En resumen, las soluciones de la ecuación dada son:

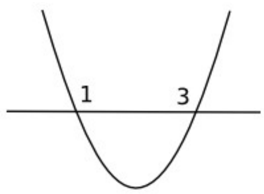
- Si $a \geq 1$, la ecuación tiene por solución $x = \frac{a+1}{2}$.
- Si $a \neq 0$ y $a < 1$, la ecuación no tiene solución real.
- Si $a = 0$, la solución es cualquier número rea $x \leqslant 0$.

7. Resuelve la inecuación irracional $\sqrt{x+1} > x - 1$.

Solución:

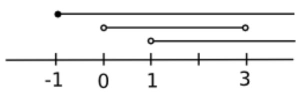
Puesto que el primer miembro tiene asignado signo positivo, la inecuación tiene sentido si $x > 1$. Elevar al cuadrado los dos miembros es la mejor forma de eliminar la raíz del primer miembro, para lo cual tenemos que analizar si dicha operación va a conservar la desigualdad. Como ambos miembros son positivos y la función $f : y = x^2$ es creciente para valores positivos de la variable, podemos afirmar que $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 > (x-1)^2$, obteniéndose así la inecuación $x^2 - 3\text{x} < 0$.

La función $f : y = x^2 - 3x$ representa a una parábola convexa que corta al eje OX en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 3$, por tanto, los puntos de ordenada negativa tienen sus abscisas en el intervalo abierto $(0,3)$.



El dominio de definición de $\sqrt{x+1}$ es el conjunto de puntos que cumplen $x \geqslant -1$.

Si representamos la situación en la recta real:



De lo anterior concluimos que la solución de la inecuación es cualquier número real x que pertenezca al intervalo abierto $(1,3)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Averigua si se verifica $\left(3\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}\right)^{3\sqrt{3}}$.

2. Si $10^{2x}=16$, calcula el valor de $10^{-0,5x}$.

3. Calcula la media aritmética de los números $\dfrac{3}{3^{10}\cdot 5^{8}}$ y $\dfrac{3^{-9}}{5^{6}}$.

4. Expresa como potencia de base 2 y como radical el valor de la expresión $\left(\dfrac{0,25^{-2}\cdot 4^{\frac{1}{4}}}{2^{-0,75}}\right)^{0,4}$.

5. Averigua qué términos del desarrollo del binomio $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{12}$ son números enteros.

6. Racionaliza: a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{9}}$ c) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y}}}$

7. Calcula: a) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{-1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{2}}:\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{4}}}$ b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^{2}$ c) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}-\sqrt{\dfrac{10}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{10}}+\sqrt{\dfrac{2}{15}}-\sqrt{\dfrac{15}{2}}$

d) $\dfrac{b}{0,3}\sqrt{\dfrac{0,18a}{b^2}}+\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{18b^2}{a}}+2c\sqrt{\dfrac{2a}{c^2}}-\dfrac{2}{ac^2}\sqrt{\dfrac{a^3c^4}{0,125}}$

8. Resuelve las ecuaciones: a) $x^{0,\bar{3}}+x^{0,\bar{6}}=72$ b) $\left(\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)^{-3}$

c) $\sqrt{x^2+49}-3\sqrt[4]{x^2+49}=10$ d) $\left(x+\sqrt{x}+5\right)\left(x+\sqrt{x}+3\right)=99$

9. Resuelve las ecuaciones: a) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$ b) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$

c) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-7}=2\sqrt{x}$ d) $\sqrt{16x^2-\sqrt{8x+5}}+1=4x$ e) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}-1=x$

10. Resuelve en el conjunto de los números reales la ecuación paramétrica $\sqrt{x^2-a^2}=a-x$, con parámetro $a\in\mathbb{R}$.

11. Resuelve las inecuaciones: a) $\sqrt{16-x^2}\leqslant 5$ b) $\sqrt{2x+3}-1\geq\sqrt{x+1}$

12. Calcula:

a) $\dfrac{3y}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}+\dfrac{2y^2-x}{x-y^2}$ b) $\left(\dfrac{a\cdot\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}-\dfrac{3\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}}-\dfrac{18}{\sqrt{a^2-9}}\right):\sqrt[4]{(a^2-9)\cdot(a-3)}$

SOLUCIONES

1. Se verifica.
2. $\dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{13}{3^9 \cdot 5^8}$
4. $2^{\frac{21}{10}}$, $4\sqrt[10]{2}$
5. Son el 1º, 7º y 13º.
6. a) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}-3}{2}$ b) $2\sqrt[5]{27}$ c) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x^2$
7. a) $\dfrac{4}{25}\sqrt[6]{2000}$ b) $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{3}{5}\sqrt{30}$ d) $2\sqrt{2a}$, $a>0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$
8. a) 512, – 729 b) $\sqrt[5]{16}$ c) 24, – 24 d) 4
9. a) 20 y 4, b) 3, c) 4, d) $\dfrac{1}{2}$, e) 0 y 2
10. Si $a<0$, $x \in \varnothing$; si $a=0$, tiene infinidad de raíces, vale cualquier $x \leq 0$; si $a>0$, $x=0$.
11. a) $-4 \leqslant x \leqslant 4$ b) $x \geqslant 3$
12. a) $\dfrac{5y\sqrt{x}}{x-y^2}$, $x \geqslant 0, x \neq y^2$ b) $\sqrt[4]{a+3}$, $a>3$

Tema 5

Demostraciones matemáticas

CONCEPTOS BÁSICOS

◆ Hipótesis. Tesis. Axioma, postulado, teorema, lema, corolario
◆ Refutación de una afirmación
◆ Métodos de demostración: directa, por equivalencia, por el contrarrecíproco, por reducción al absurdo, por inducción.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar la regla de divisibilidad por tres: "si un número natural es tal que la suma de sus cifras es divisible por 3, entonces dicho número es divisible por 3".

<u>Solución:</u>

Como cada teorema, la afirmación está dada mediante una proposición compuesta condicional. El antecedente de la misma recibe el nombre de hipótesis, y el consecuente es denominado tesis. La hipótesis nos señala las condiciones que deben cumplirse para que se verifique la afirmación hecha en la tesis. El método que seguiremos para demostrar este teorema será el directo, esto es, partiremos de las hipótesis, las desarrollaremos y haciendo uso de ellas y de otras afirmaciones matemáticas que son ciertas, concluiremos que la afirmación de la tesis también es cierta.

Según las hipótesis, debemos considerar un número natural N tal que la suma de sus cifras sea divisible por 3. Si representamos por "a" a la cifras de las unidades, por "b" a la cifra de las decenas, por "c" a la cifra de las centenas, etc., entonces podemos escribir que $N = \ldots dcba$, y se ha de verificar $3|a+b+c+d+\ldots$
Si expresamos dicho número como suma de potencias de 10, obtenemos :

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + \ldots$$

Por otra parte, 10=9+1, 100= 99+1, 1000=999+1, con lo que, sustituyendo en la expresión anterior, nos da:

$$N = a + (9+1)\,b + (99+1)\,c + (999+1)\,d + \ldots$$

Si efectuamos las multiplicaciones y reordenamos los términos obtenidos, queda:

$$N = (a+b+c+d+\ldots) + 9\,(b+11\,c+111\,d+\ldots)$$

Como, según la hipótesis, $3|a+b+c+d+\ldots$, tenemos expresado N como suma de dos cantidades divisibles por 3, con lo que podemos afirmar que $3|N$.

2. Realiza las siguientes demostraciones:

a) Demuestra que si el cuadrado de un número natural es divisible por 3, entonces dicho número también es divisible por 3.

b) Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

c) Demuestra $\forall\, n \in \mathbb{N}, (n | n^2+6 \Rightarrow 5 \nmid n)$.

Solución:

a) Aquí valen los comentarios previos hechos en el anterior ejercicio. Dado que la demostración de esta afirmación mediante un método directo resulta complicada, decidimos proceder por el método de reducción al absurdo que está basado en que afirmar que la proposición $P \Rightarrow Q$ es cierta es equivalente a afirmar que la proposición $P \wedge \neg Q$ es una contradicción ($\neg Q$ representa simbólicamente a la negación de Q).
El enunciado que se nos pide demostrar se puede expresar, con símbolos matemáticos, de la siguiente manera:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, (3 | n^2 \Rightarrow 3 | n),$$

Así nosotros demostraremos que de la afirmación " n es un número natural tal que $3|n^2$ y $3 \nmid n$ " es absurda. En efecto, supongamos que n es un número natural tal que $3|n^2$ y $3 \nmid n$, entonces existen sendos naturales p y q tales que $n^2=3p$ y , o bien $n=3q-1$ o bien $n=3q-2$.

Aquí es preciso remarcar que el cero no se considera número natural y que los números que no son divisibles por 3, difieren en una o dos unidades de los que son divisibles por 3.

- Si suponemos que $n=3q-1$ y lo sustituimos en $n^2=3p$, obtenemos $(3q-1)^2=3p$. Efectuando las operaciones del primer miembro, pasando todas las variables al segundo y extrayendo 3 como factor común, tenemos $1=3(p+2q-3q^2)$, de lo que se deduce que $3|1$, lo cual es absurdo.
- Si ahora suponemos que $n=3q-2$, procediendo de forma similar a como se hizo antes, concluimos que $4=3(p+4q-3q^2)$, de lo que se deduce que $3|4$, lo cual es también un absurdo.

b) También haremos por reducción al absurdo la demostración de que $\sqrt{3}$ es un número irracional. Es decir, supondremos que $\sqrt{3}$ es racional, entonces existirá una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ de números naturales tales que $\frac{p}{q}=\sqrt{3}$. Si elevamos ambos miembros al cuadrado y los multiplicamos por q^2, obtenemos $p^2=3q$, de lo que se deduce que $3|p^2$.

Teniendo en cuenta la afirmación demostrada en el apartado a), deducimos que $3|p$. Por tanto, existirá un número natural m tal que $p=3m$. Sustituyendo en $p^2=3\mathrm{q}$, obtenemos $9m^2=3q$, que, al simplificar por 3, se convierte en la igualdad $3m^2=q$, de lo que se deduce que $3|q$, es decir, $q=3n$, siendo n algún número natural.
De todo lo anterior, concluimos que la fracción $\frac{p}{q}=\frac{3m}{3n}$ es reducible ya que se puede simplificar por 3, lo cual contradice lo dicho al comienzo de la demostración (se imponía que la fracción fuera irreducible).

c) En general, cuando se pretende probar que de una hipótesis se deduce la negación de una sentencia, resulta más sencillo el hacer la demostración por reducción al absurdo. Así, demostraremos por dicho método la afirmación "Si n es un número natural tal que $n|n^2+6$, entonces $5 \nmid n$, es decir, supondremos que n es un número natural tal que $n|n^2+6$ y $5|n$, entonces existen sendos números naturales p y q tales que:

$$n^2+6=pn \text{ y } n=5q$$

Si sustituimos la segunda igualdad en la primera, pasamos las variables al segundo miembro y extraemos 5 como factor común, obtenemos que $6=5(pq-5q^2)$, de lo que se deduce que $5|6$, lo cual es absurdo.

3. Demuestra la siguiente afirmaciones:

a) $\forall n\in\mathbb{N}: 2\nmid n^3-6n^2+2\mathrm{n}-10 \Rightarrow 2\nmid n$

b) $\forall n\in\mathbb{N}: 7|2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}$

c) $\forall n\in\mathbb{N}, (2|n \Leftrightarrow 2|n^2)$

<u>Solución:</u>

a) Se trata de demostrar que de la negación de una proposición, se deduce la negación de otra. En este caso, es conveniente hacer la demostración por el método del contrarrecíproco que está basado en que la proposición $\neg P \Rightarrow \neg Q$ es equivalente a $Q \Rightarrow P$. Por tanto demostraremos que "si n es un número natural tal que $2|n$, entonces $2|n^3-6n^2+2n-10$ " siguiendo el método de demostración directo.
Partimos del supuesto $2|n$, entonces existe un número natural p tal que $n=2p$. Calculemos ahora, sustituyendo n por $2p$, el valor de la expresión $n^3-6n^2+2n-10$:

$$n^3-6n^2+2n-10=8p^3-24p^2+4p-10$$

Si extraemos 2 como factor común en el segundo miembro obtenemos:

$$n^3-6n^2+2n-10=2(4p^3-6p^2+2p-5)$$

de lo que se deduce que efectivamente, tal como se quería demostrar, $2|n^3-6n^2+2n-10$.

b) Hay varios caminos a seguir para demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}: 7|2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}$ (los dos puntos se leen "se verifica"). Optaremos por un método directo, por lo que calcularemos el valor de dicha expresión, teniendo en cuenta las igualdades $2^{n+2}=2^2\cdot 2^n$, $3^{2\mathrm{n}}+1=3\cdot 9^n$ y $9=7+2$. En efecto,

$$2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}=2^2\cdot 2^n+3\cdot(7+2)^n$$

y haciendo uso del binomio de Newton:

$$2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}=4\cdot 2^n+3\cdot\left[\binom{n}{0}7^n+\binom{n}{1}7^{n-1}\cdot 2+\binom{n}{2}7^{n-2}\cdot 2^2\ldots+\binom{n}{n-1}7\cdot 2^{n-1}+\binom{n}{n}2^n\right]$$

No hay que olvidar que n es un número natural mayor que cero y que el desarrollo de $(7+2)^n$ tiene al menos 2 sumandos, concretamente tiene $n+1$ sumandos.

Si quitamos los corchetes y tenemos en cuenta las igualdades $\binom{n}{0}=1$ y $\binom{n}{n}=1$, entonces:

$$2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}=4\cdot 2^n+3\cdot 7^n+3\cdot\binom{n}{1}7^{n-1}\cdot 2+3\cdot\binom{n}{2}7^{n-2}\cdot 2^2\ldots+3\cdot\binom{n}{n-1}7\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n$$

Al sumar los términos semejantes, nos queda:

$$2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}=7\cdot 2^n+3\cdot 7^n+3\cdot\binom{n}{1}7^{n-1}\cdot 2+3\cdot\binom{n}{2}7^{n-2}\cdot 2^2\ldots+3\cdot\binom{n}{n-1}7\cdot 2^{n-1}$$

Como 7 es un factor común a todos los términos del segundo miembro, podemos escribir:

$$2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}=7\cdot\left[2^n+3\cdot 7^{n-1}+\ldots+3\cdot\binom{n}{n-1}\cdot 2^{n-1}\right]$$

de lo que se deduce que $7|2^{n+2}+3^{2\mathrm{n}+1}$, tal como se quería demostrar.

c) La afirmación $\forall n\in\mathbb{N}, (2|n \Leftrightarrow 2|n^2)$ es una equivalencia, por tanto, para demostrar su veracidad tendremos que probar que son ciertas las implicaciones $\forall n\in\mathbb{N}, (2|n \Rightarrow 2|n^2)$ y $\forall n\in\mathbb{N}, (2|n^2 \Rightarrow 2|n)$.

Veamos que $\forall\, n\in\mathbb{N}, (2|n \Rightarrow 2|n^2)$. Partimos de las hipótesis $n\in\mathbb{N}$ y $2|n$. Entonces existe un número natural p tal que $n=2\,p$. Teniendo en cuenta la última igualdad, resulta que $n^2=(2\,p)^2=4\,p^2=2\cdot 2\,p^2$, por lo que podemos afirmar que $2|n^2$.
Nos queda por demostrar que la segunda implicación, $\forall\, n\in\mathbb{N}, (2|n^2 \Rightarrow 2|n)$, es cierta, pero el proceso a seguir es el mismo que en I'.a), poniendo 2 en lugar de 3.
Esta parte se deja como ejercicio para el lector.

Nota: La demostración de b) se puede hacer también por el método de inducción ya que es una propiedad que depende de los números naturales.

4. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) $\forall\, n\in\mathbb{N}: 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\forall\, n\in\mathbb{N}: 3|2^{2n}-1$

Solución:

Puesto que la propiedad depende de los números naturales, puede ser demostrada por el método de inducción. Este método, apoyado en lo que se conoce con el nombre de "Axiomas de Peano", consiste en:

- 1º) comprobar que la afirmación es cierta para $n=1$,
- 2º) suponer que existe un cierto número natural k tal que, para cualquier natural $n\leq k$, y en particular para k, se verifica la propiedad a demostrar
- 3º) demostrar que la afirmación es cierta para el siguiente de k, que es $k+1$.

a) Para claridad del proceso, sean $P(n)=1^2+2^2+...+n^2$ y $Q(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- 1º) Veamos que para $n=1$ es $P(1)=Q(1)$. En efecto, como el primer miembro tiene tantos sumandos como indica el valor de n, $P(1)=1^2=1$.
  Por otra parte, $Q(1)=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\dfrac{6}{6}=1$,
  con lo que hemos comprobado que la igualdad se verifica en el caso en el que n valga 1.
- 2º) Supongamos que existe un número natural k tal que, para cualquier natural $n\leqslant k$, se verifica la igualdad. Entonces, en particular, se cumple $P(k)=Q(k)$, es decir,
  $$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
- 3º) Veamos que $P(k+1)=Q(k+1)$, para lo cual calcularemos por separado cada uno de los miembros:
  $$P(k+1)=1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
  Si efectuamos la suma de fracciones:
  $$P(k+1)=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$
  Si sacamos factor común $k+1$ y efectuamos:
  $$P(k+1)=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
  Calculemos ahora el segundo miembro:
  $$Q(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Si efectuamos el producto de los dos últimos factores del numerador, obtenemos que:

$$Q(k+1)=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

Por lo tanto, efectivamente se cumple $P(k+1)=Q(k+1)$.

b) La afirmación dada se podría hacer directamente, sin embargo, dado que depende de los números naturales, la demostraremos por el método de inducción.
Sea $P(n)=2^{2n}-1$ entonces:

- 1º) Para $n=1$, tenemos que $P(1)=2^{2\cdot 1}-1=4-1=3$, así $3|P(1)$.
- 2º) Supongamos que existe un número natural k tal que, para cualquier natural se verifica $3|P(n)$. Entonces, en particular, se cumple $3|P(k)$, es decir $3|2^{2k}-1$, por tanto existe un número natural q tal que $2^{2k}-1=3q$, o equivalentemente $2^{2k}=1+3q$.
- 3º) Veamos que $3|P(k+1)$, para lo cual calcularemos $P(k+1)$.

$$P(k+1)=2^{2(k+1)}-1=2^{2k+2}-1=2^{2k}\cdot 2^2-1=4\cdot 2^{2k}-1.$$

Sustituyendo 2^{2k} por el valor obtenido anteriormente, tenemos :

$$P(k+1)=4(1+3q)-1=4+12q-1=12q+3=3(4q+1),$$

de lo que podemos concluir que $3|P(k+1)$.

5. Demostrar o refutar la siguiente afirmación: “Si un número natural es divisible por 4 y por 6, entonces dicho número es divisible por 24”.

<u>Solución:</u>

Refutar una expresión es comprobar que dicha expresión es falsa a través de un ejemplo. Tal ejemplo recibe el nombre de contraejemplo.
Evidentemente, la afirmación es falsa ya que el número 12 es divisible por 4 y por 6 y sin embargo no es divisible por 24.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demuestra la regla de divisibilidad por 11 : "Si un número natural es tal que, la diferencia que hay entre la suma de las cifras que ocupan lugar par, y la suma de las cifras que ocupan lugar impar, es divisible por once, entonces el número es divisible por once".

2. Realiza las siguientes demostraciones:

a) Demuestra que si el cuadrado de un número es divisible por 5 , entonces dicho número también es divisible por 5 .

b) Demuestra que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

3. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3 | n^2+1 \Rightarrow 6 \nmid n,$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7 | n \Leftrightarrow 7 | n^2,$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}: 3 \nmid n^3+6n^2+2n+6 \Rightarrow 3 \nmid n,$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}: 9 | 10^{2n}-1,$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$

f) $\forall\, n \in \mathbb{N}: 3 | 10^{n+1}+10^n+1 .$

4. Demuestra o refuta la siguiente afirmación: "El producto de dos números irracionales es irracional".

SOLUCIONES

El proceso a seguir en las demostraciones es muy similar al de los ejemplos resueltos.
La afirmación hecha en el 4º ejercicio es falsa. Por ejemplo $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son números irracionales y, sin embargo, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$, que no es un número irracional.

Tema 6

Sucesiones de números reales

CONCEPTOS BÁSICOS

- Sucesiones: término general
- Sucesiones recurrentes
- Propiedades de las sucesiones. Límite de una sucesión.
- Progresiones aritméticas.
- Progresiones geométricas.
- Matemática financiera: fórmula del interés simple y compuesto.
- Series. Serie geométrica.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Indica que tipo de sucesión es - 8, -5, -2, 1, … y suma sus diez primeros términos

Solución:

Mediante una observación de la sucesión propuesta comprobamos que la diferencia entre términos consecutivos de la misma es un valor constante d = 3. Por tanto, nos encontramos ante una progresión aritmética. Su expresión general será:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1)$$

$$a_n = -8 + 3 \cdot (n - 1) = -8 + 3n - 3 = 3n - 11$$

Pasamos ahora a calcular la suma de sus diez primeros términos. Para ello recurrimos a la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Así, tenemos:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-8 + 19}{2} \cdot 10 = \frac{11}{2} \cdot 10 = 55$$

2. Calcula el lugar que ocupa el número $\frac{3}{128}$ en la sucesión 3, 3/2, 3/4, 3/8, … y la suma de sus infinitos términos.

Solución:

Mediante una observación de la sucesión propuesta comprobamos que el cociente entre términos consecutivos de la misma es un valor constante $r = \frac{1}{2}$. Por tanto, nos encontramos ante una progresión geométrica, que podemos expresar del siguiente modo:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Como el término $\frac{3}{128}$ se puede expresar como $\frac{3}{2^7}$, tenemos que n = 8, por lo que este término es el octavo de la sucesión.

Por otra parte, como la sucesión es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2} < 1$, podemos calcular la suma de sus infinitos términos utilizando la siguiente expresión:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Así, tenemos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

3. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

<u>Solución:</u>

Las filas de soldados que se quieren siguen la siguiente sucesión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, es decir, forman una progresión aritmética de diferencia d = 1, cuya expresión general es $a_n = n$. Dicha expresión podemos deducirla del siguiente modo:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1) = 1 + 1 \cdot (n-1) = 1 + n - 1 = n$$

Por otra parte, la suma de todas las filas que hagamos debe darnos el total de soldados de los que disponemos, esto es, 5050. De este modo, si hacemos k filas tendremos que la suma desde la primera fila hasta la fila k será:

$$S_k = 5050$$

Si utilizamos la expresión que permite calcular S_k, tenemos que:

$$\frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k = 5050$$
$$\frac{1+k}{2} \cdot k = 5050$$
$$k + k^2 = 10100$$
$$k^2 + k - 10100 = 0$$

Resolvemos ahora esta ecuación de segundo grado:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10100)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+40400}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{40401}}{2} = \frac{-1 \pm 201}{2}$$

Y de aquí, tenemos dos soluciones:

$$k_1 = \frac{-1+201}{2} = \frac{200}{2} = 100 \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{-1-201}{2} = \frac{-202}{2} = -101$$

La segunda no tiene sentido, por lo que el número de filas que se tienen que hacer son 100.

4. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla dichos números.

Solución:

Sean x, y, z los tres números. Como están en progresión geométrica de razón r, podemos nombrarlos de la siguiente manera:

Primer número: x;

Segundo número: $y = x \cdot r$;

Tercer número: $z = y \cdot r = x \cdot r^2$

Por otra parte sabemos que:

$$y = 32 + x$$
$$z = 96 + y$$

Así que:

$$\begin{cases} x \cdot r = 32 + x \\ x \cdot r^2 = 96 + x \cdot r \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema, encontramos como solución $r = 3$ y $x = 16$, por lo que los números buscados son 16, 48 y 144.

5. El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?

Solución:

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que el interés anual del 6% se paga mensualmente, luego tenemos un interés mensual de $\frac{6}{12}$ % = 0,5 %.

Así, para calcular lo que vale cada mes nuestro dinero debemos multiplicarlo por 1,005. Por tanto, tenemos:

Al finalizar el primer mes: $5000 \cdot 1{,}005$ €

Al finalizar el segundo mes: $5000 \cdot (1{,}005)^2$ €

…

Al finalizar los 12 meses: $5000 \cdot (1{,}005)^{12}$ € ≈ 5.308,39 €

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En una progresión geométrica de razón positiva, la suma del tercer término con el cuarto es 240 y la suma del quinto con el sexto es 3.840. Calcular la razón y formar la progresión.
2. En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?
3. El segundo y cuarto término de una progresión aritmética suman 22; y el tercero y sexto término suman 34. Hallar el valor de las incógnitas.
4. Durante 5 años depositamos en un banco 2 000 € cada año al 4% de interés anual, con pago anual de intereses. ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?

SOLUCIONES

1. Para r = 4, a_n = 3, 12, 48, 192, …
   Para r = - 4, a_n = 5, 20, -180, 320, …
2. En la fila 17
3. $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_6 = 23$
4. 11.265,95 €

Tema 7

Matrices

CONCEPTOS BÁSICOS

- Definición de matrices.
- Suma y producto por escalares.
- Producto de matrices. Propiedades.
- Matriz inversa.
- Ecuaciones matriciales.
- Rango de una matriz.
- Teorema de Rouche-Fröbenius.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, efectúa el siguiente producto (-5) · A.

Solución:

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica el número por cada término de la matriz.

$$(-5) \cdot A = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -15 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las siguientes matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula las siguientes operaciones:

a) A·B c) A + B
b) B·A d) B + C

Solución:

a) Para que dos matrices A y B puedan multiplicarse es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el numero de filas de la segunda. El producto es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada vector fila de la primera matriz por cada vector columna de la segunda matriz, y su posterior suma.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+2\cdot(-1)+5\cdot 0 & (-6)\cdot 2+1\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ 2\cdot(-2)+2\cdot 1+5\cdot 1 & (-6)\cdot(-2)+1\cdot 1+0\cdot 1 \\ 2\cdot 5+2\cdot 0+5\cdot 4 & (-6)\cdot 5+1\cdot 0+0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 13 \\ 30 & -30 \end{pmatrix}$$

b) El producto B·A no es posible de realizar, ya que la primera matriz no tiene tantas columnas como filas tiene la segunda.

c) Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso se suman término a término.
La suma de las matrices A y B no se puede realizar por que no tienen las mismas dimensiones.

d) B+C = $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & (-6)+0 \\ 2+(-1) & 1+3 \\ 5+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

3. Comprobar la propiedad asociativa para: A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y C= $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solución:

(A·B)·C= $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 & 21 \\ -1 & 10 & 4 & 12 \\ 4 & 0 & 16 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 203 \\ 151 \\ 204 \end{pmatrix}$

A·(B·C) = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 203 \\ 151 \\ 204 \end{pmatrix}$

Vemos que la matriz resultante en los dos casos coinciden, con lo que se cumple la propiedad asociativa.

4. Comprobar con algunos ejemplos que el producto de matrices no es conmutativo.

Solución:

- Si A es de orden 3x2 y B es de orden 2x4, puede efectuarse A·B , pero no puede realizarse el producto de B·A., ya que no cumplen la condición necesaria del producto de matrices.

- Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, puede efectuarse A·B y B·A, pero A·B es de dimensión 3x3 y B·A es de dimensión 2x2.

- Si A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, entonces A·B = $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$ y B·A = $\begin{pmatrix} 30 & 36 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, por lo que no son matrices iguales, confirmando que no cumple la propiedad conmutativa.

5. Calcula la matriz inversa de la siguiente matriz usando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para aplicar el método de Gauss se coloca la matriz identidad del mismo orden junto a la matriz que se quiere buscar su inversa, transformando la matriz 3x3 en una de 3x6, de tal modo que nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora se realizan operaciones entre las filas de tal manera que las tres primeras columnas nos queden como la matriz identidad, 3x3.

$$\begin{array}{c} (1^a) \\ (2^a)-(1^a) \\ (3^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-3(1^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (1^a) \\ (2^a)=(3^a) \\ (3^a)=(2^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (1^a)-(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (1^a)+3(3^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (1^a) \\ (2^a)-3(3^a) \\ (3^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Una vez conseguida la matriz identidad en las tres primeras columnas, las tres últimas corresponden con la matriz inversa de la inicial, así nos queda como solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: Para comprobar el resultado podemos multiplicar la matriz problema por la matriz solución y el resultado debe ser la matriz identidad.

6. Resuelve la ecuación A X + B = C, donde: A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos la X:

$$A\,X+B=C \rightarrow A\,X=C-B \rightarrow A^{(-1)}A\,X=A^{(-1)}(C-B) \rightarrow X=A^{(-1)}(C-B)$$

Hallamos C -B : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y A^{-1}= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Calculamos el producto y obtenemos: $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

7. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-3y=A \\ 2x+3y=B \end{cases}$ siendo A= $\begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}$ y

B = $\begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y las incógnitas x e y matrices de orden $2x2$.

Solución:

Resulta favorable aplicar el método de reducción, para ello sumamos miembro a miembro las dos igualdades.

$$3x = A + B \rightarrow 3x = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la primera ecuación :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3y = A \rightarrow -3y = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -21 & -9 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

8. Calcula el rango de la siguiente matriz usando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$$

Solución:

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes .
También se define el rango de una matriz como el número de filas no nulas que obtenemos después de triangularizar la matriz con el método de Gauss.

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a)+17\cdot(1^a) \\ (3^a)-37\cdot(1^a) \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 53 & 130 & 62 & 0 \\ -106 & -260 & -124 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)+2\cdot(2^a) \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 53 & 130 & 62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora está claro que $ran(M)=2$.

9. Estudia el rango de la matriz M según los valores de a .¿Existe algún valor de a para el que sea $ran(M)=1$?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Transformamos la matriz M para hacer todos los ceros posibles en ella :

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a)-(1^a) \\ (3^a)-a\cdot(1^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-2a\cdot(2^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Hacemos $1-a2=0 \rightarrow a=1 , a=-1$

- Si $a=1$, M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(M)=2$
- Si $a=-1$, M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(M)=2$
- Si $a^2-1\neq 0$,es decir, si $a\neq 1$ y $a\neq -1$, $ran(M)=3$
  El rango de M no puede ser 1 para ningún valor de a , porque las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier valor de a .

10. Discute aplicando el teorema de Rouche-Fröbenius y resuelve, si es posible, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de coeficientes *A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *como* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ ≠0,

$ran(A)=2$

Hallamos el rango de la matriz ampliada A´= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ ≠0,

$ran(A')=3$

Como $ran(A)\neq ran(A')$, el sistema es incompatible.

b) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix}$, $|A|$ = m^2-m=m(m-1),

$|A|$ =0 para $m=0, m=1$.

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$, $ran(A)=3=ran(A')$ .El sistema es compatible determinado.Para cada valor de m distinto de 0 y de 1, tenemos un sistema con solución única:

  $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2-m}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2-m}$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m^2-m}$

  Solución : $\left(\dfrac{m}{m-1}, \dfrac{-1}{m-1}, \dfrac{m}{m-1}\right)$

- Si $m=0$ → $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ≠0 → $ran(A)=2$, como en A´hay dos filas iguales, $ran(A)=2=ran(A')$,por lo tanto el sistema es incompatible inderteminado.
  Para resolverlo , tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos x al segundo miembro: $x=\lambda, y=1-\lambda, z=0$.

- Si $m=1$ → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ≠0 → $ran(A)=2$, A´= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ ≠0 → $ran(A')=3$.

  Como $ran(A)\neq ran(A')$, el sistema es incompatible.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la matriz inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Estudia el rango de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Estudia y resuelve los sistemas, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x+4y+3z+2t=0 \\ x+7y+7z+4t=0 \\ 2x+2z+t=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \\ 2x+y+z=11 \end{cases}$

4. Determina los valores de *m* para los cuales son incompatibles estos sistemas:

a) $\begin{cases} mx-y-z=m \\ x-y+mz=m \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x+y+z=3 \\ x+2y+mz=4 \\ x+my+2z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y-z=m-4 \\ (m-6)y+3z=0 \\ (m+1)x+2y=3 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $ran(A)=3, ran(B)=2, ran(C)=2, ran(D)=4$

3. a) $x=-1/3, y=2/3, z=-1/3$ b) Incompatible c) $x=(3/8)\lambda, y=(1/4)\lambda, z=-(7/8)\lambda, t=\lambda$

4. a) $m=-1$ b) $m=2, m=3$ c) $m=-3$

Tema 8

Determinantes

CONCEPTOS BÁSICOS

- Concepto de determinante de orden n.
- Regla de Sarrus.
- Concepto de menor de orden n y menor complementario.
- Concepto de rango de una matriz.
- Matriz inversa.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Solución:

Para calcular este determinante de orden cuatro debemos hacer ceros, podemos hacer ceros en la segunda columna (para ello "jugamos" con filas)

$F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1,\ F_4 \rightarrow F_4 - F_1.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ -11 & 0 & -4 & 27 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Ahora desarrollamos por la segunda columna multiplicando cada elemento por su adjunto, quedando el derminante reducido a uno de orden 3, el cuál calculamos mediante la regla de Sarrus.

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -11 & -4 & 27 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(-108-162+16-297) = 551$$

2. Calcula el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -6 & 3 \\ 6 & -3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Nos aseguramos de que arriba a la izquierda haya un menor de orden 2 distinto de cero y lo orlamos con la fila inmediatamente inferior y las sucesivas columnas de la derecha. El primer menor de orden tres que se forma es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

como sale nulo pasamos a la siguiente columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el rango de la matriz es 3 (el orden del menor no nulo de mayor orden)

3. Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -a \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero es resolver el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -a \end{vmatrix} = -2a^2 - 3 + 1 + 2 - 3a + a = -2a^2 - 2a = -2a(a+1)$$

a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$ y Rango de $A = 3$

b) Si a = 0, siempre podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo y entonces el rango es 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Si a = -1, también podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo y el rango es por tanto 2.

4. Calcula el valor del parámetro m para que la siguiente familia de vectores de R^3 sea una familia ligada:

$$\{(-1,2,1),(5,-3,0),(m,1,5)\}$$

Solución:

Ponemos los vectores en un determinante de orden 3, cuando este determinante sea nulo la familia es ligada, es decir sus vectores son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 5 + 3m - 50 = -30 + 3m$$

De donde se deduce que si m = 10, el determinante es nulo y la familia es ligada (sus vectores son linealmente dependientes) y si m ≠ 10 ,el determinante es no nulo y la familia es libre (sus vectores son linealmente independientes).

5. Calcula el valor del parámetro k para que la siguiente matriz sea singular (es decir, para que su determinante valga cero). Para k = 0, calcula la inversa de A y también A^n.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

<u>Solución:</u>

Para que esta matriz sea singular, su determinante debe ser cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}=0\Rightarrow -1-k^3=0\Rightarrow k=\sqrt[3]{-1}=-1$$

Para k = 0, la matriz queda de la siguiente forma.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su determinante es $|A|=-1$

Aplicamos ahora la fórmula del cálculo de la matriz inversa: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(\text{Adj}A)^t$

primero calculamos los adjuntos A_{ij} de cada elemento a_{ij} de la matriz A: $A_{ij}=(-1)^{(i+j)}.\alpha_{ij}$ en donde α_{ij} es el menor complementario del elemento que está en la fila i y en la columna j (a_{ij})

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0, A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0, A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0, A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1, A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1, A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0, A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

C on lo que la matriz adjunta de la matriz A (Adj A) queda de la siguiente forma:

$$(\text{Adj}\,A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la traspuesta de la adjunta $(\text{Adj A})^t$:

$$(\text{Adj}\,A)^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para comprobarlo multiplicamos las matrices A y A^{-1} y debe salir la matriz unidad (I)

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la inversa coincide con la propia matriz A y por lo tanto:

$A^2 = A \cdot A = I$,
$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$,
$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$,
$A^5 = A^4 \cdot A = A$,
....
Es decir, $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Halla el valor o valores del parámetro a para los que la matriz A no tiene inversa. Halla A^{-1} para a = 2.

3. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

4. Calcula el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. 4a + 1.

2. La matriz A no tiene inversa si a = 1 ó a = -1. Si a = 2 la inversa es $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$.

3. -4.

4. El rango es 2.

Tema 9

Expresiones algebraicas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Variables y constantes. Expresiones algebraicas y sus tipos. Valor numérico de una expresión algebraica. Dominio de una expresión algebraica.
- Monomios, binomios y polinomios. Elementos de un polinómio. Valor numérico de un polinomio. Operaciones algebraicas con polinomios. Identidades notables. Descomposición en factores de un polinomio.
- El triángulo de Pascal y su relación con las potencias de binomios. El binomio de Newton.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Descomponer en el mayor número de factores, con coeficientes enteros, los siguientes polinomios: a) $3x^2+5x-2$, b) $a^6-a^4+2a^3+2a^2$, c) $m^3-m^2n-mn^2+n^3$, d) $12x^3+20x^2+x-3$.

Solución:

a) El polinomio dado es de segundo grado. Para descomponerlo en factores, es suficiente averiguar los valores de x que lo anulan, ya que es conocido el hecho:

"Si x_1 y x_2 son las raíces de un polinomio de segundo grado ax^2+bx+c, entonces:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\text{ ”}.$$

Por tanto hemos de resolver $3x^2+5x-2=0$.

Haciendo uso de la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado, tenemos que los valores de x que anulan dicho polinomio son $x_1=\dfrac{1}{3}$ y $x_2=-2$, con lo que:

$$3x^2+5x-2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)=3\left(\frac{3x-1}{3}\right)(x+2)=(3x-1)(x+2).$$

Por tanto la descomposición pedida es $3x^2+5x-2=(3x-1)(x+2)$.

b) a^2 es un factor común en la expresión $a^6-a^4+2a^3+2a^2$, por tanto

$$a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^2(a^4-a^2+2a+2).$$

El segundo factor es un polinomio de cuarto grado. Para descomponerlo en factores, es conveniente averiar sus raíces y, como es de cuarto grado, las buscaremos a través del método de Ruffini. Las posibles raíces enteras se han de encontrar entre los divisores del término independiente. Los divisores de 2 son el 2, -2, 1 y -1. El único número con el que obtenemos cero en el lugar del resto es el 1. En efecto:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ \mathbf{-1} & & -1 & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Esto significa que $(a^4-a^2+2a+2):(a+1)=a^3-a^2+2$, es decir:

$$a^4-a^2+2a+2=(a^3-a^2+2)\cdot(a+1).$$

Repitiendo el mismo razonamiento para a^3-a^2+2, obtenemos que:

$$a^3-a^2+2=(a^2-2a+2)\cdot(a+1).$$

Por lo que concluimos que

$$a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^2(a^4-a^2+2a+2)=a^2\cdot(a^3-a^2+2)\cdot(a+1)=a^2\cdot(a^2-2a+2)\cdot(a+1)\cdot(a+1)$$

Como el discriminante de a^2-2a+2 es $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$, el polinomio a^2-2a+2 no se puede descomponer en factores con coeficientes reales, así la descomposición en factores pedida es $a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^2\cdot(a^2-2a+2)\cdot(a+1)^2$.

c) Para descomponer $m^3-m^2n-mn^2+n^3$, se puede proceder como en el anterior apartado siempre que hagamos unos pequeños arreglos. Podemos escribir

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=n^3\cdot\left(\frac{m^3}{n^3}-\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}+1\right)$$

imponiendo la condición $n\neq0$ para hacer el cambio de variables $p=\frac{m}{n}$, con lo que nos queda $m^3-m^2n-mn^2+n^3=n^3(p^3-p^2-p+1)$ y, siguiendo el mismo proceso que en el apartado a) , obtenemos que

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=n^3(p-1)^2(p+1)$$

Deshaciendo el cambio de variables, obtenemos:

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=n^3\left(\frac{m}{n}-1\right)^2\left(\frac{m}{n}+1\right)$$

Efectuando las operaciones en el interior de los paréntesis y simplificando, se tiene la descomposición pedida.

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=(m-n)^2(m+n)$$

No es difícil comprobar que para $n=0$ sigue siendo válida la igualdad.

Para resolver este ejercicio se puede proceder de forma más rápida, extrayendo m^2 como factor común de los dos primeros términos y $-n^2$ de los dos últimos:

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=m^2(m-n)-n^2(m-n)$$

Nuevamente $m-n$ es un factor común y así:

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=(m-n)(m^2-n^2)$$

pero $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$, con lo que obtenemos el mismo resultado:

$$m^3-m^2n-mn^2+n^3=(m-n)^2(m+n)$$

d) Al ser $12x^3+20x^2+x-3$ de tercer grado, podemos intentar la descomposición en factores por el método de Ruffini. Las posibles raíces enteras deben pertenecer al conjunto de los divisores del término independiente, esto es al conjunto $\{-1,1,-3,3\}$, sin embargo, al hacer las divisiones según el método de Ruffini, no obtenemos en ningún caso el resto cero, por tanto dicho polinomio no admite raíces enteras.

Las raíces fraccionarias no enteras deben pertenecer al conjunto de números racionales no enteros que se obtienen de dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente del término de mayor grado, esto es, deben estar en el conjunto que resulta de dividir los divisores de -3 entre los divisores de 12 que son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6$ y ± 12. Este conjunto es:

$$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{1}{12},\frac{1}{12},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}.$$

Al probar con el primer número, obtenemos en el lugar del resto un cero

	12	20	1	-3
$-\frac{1}{2}$		-6	-7	3
	12	14	-6	$\boxed{0}$

De esto se deduce que:

$$12x^3+20x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)(12x^2+14x-6)=2\cdot\left(\frac{2x+1}{2}\right)(6x^2+7x-3)$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son $\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$, por lo que la descomposición de éste es $6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-3)(3x+1)$. Así, la descomposición en factores pedida es:

$$12x^3+20x^2+x-3=(2x+1)(2x-3)(3x+1).$$

2. Simplifica: a) $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x+\frac{1-2x^2}{x-1}+1\right)$, b) $\frac{1-x^2}{3x^2-x-2}$

Solución:

a) Antes de simplificar, debemos efectuar las operaciones encerradas entre paréntesis:

$$\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x+\frac{1-2x^2}{x-1}+1\right)=\left[\frac{1-1(1-x)}{1-x}\right]:\left[\frac{x(x-1)+1-2x^2+1(x-1)}{x-1}\right]$$

Operando en los numeradores:

$$\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x+\frac{1-2x^2}{x-1}+1\right)=\frac{1-1+x}{1-x}:\frac{x^2-x+1-2x^2+x-1}{x-1}=\frac{x}{1-x}:\left(\frac{-x^2}{x-1}\right)=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x-1}{(-x^2)}$$

Multiplicando y simplificando, obtenemos:

$$\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x+\frac{1-2x^2}{x-1}+1\right)=\frac{x(x-1)}{-x^2(1-x)}=\frac{-(x-1)}{x(1-x)}=\frac{1-x}{x(1-x)}=\frac{1}{x}$$

Por supuesto, todas estas operaciones son válidas para aquellos valores de x que hagan no nulos los distintos denominadores, esto es para $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) Para simplificar la expresión dada es preciso descomponer, tanto el numerador como el denominador, en factores.

Teniendo en cuenta los productos notables, $1-x^2=(1-x)(1+x)$.

El denominador es un polinomio de segundo grado, por tanto, tal como ya se indicó en el primer ejercicio, tenemos que averiguar sus raíces, resolviendo la ecuación $3x^2-x-2=0$.

Dichas raíces son $-\frac{2}{3}$ y 1, con lo que:

$$3x^2-x-2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=(3x+2)(x-1)$$

Ahora podemos escribir: $\frac{1-x^2}{3x^2-x-2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(3x+2)(x-1)}$

La división de $1-x$ entre $x-1$ es -1, ya que $1-x$ es el opuesto de $x-1$. Así:

$$\frac{1-x^2}{3x^2-x-2}=\frac{-(1+x)}{(3x+2)}=\frac{-1-x}{3x+2}.$$

Razonando de la misma forma que en el apartado anterior, $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.

3. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $2x^3-x^2-8x+4$ y x^3-4x^2+4x.

Solución:

Denotemos respectivamente por $P(x)$ y $Q(x)$ a los polinomios $2x^3-x^2-8x+4$ y x^3-4x^2+4x. Para calcular el máximo común divisor (mcd) y el mínimo común múltiplo (mcm) de varios polinomios, se procede de la misma forma que para el caso de números enteros, esto es, se descomponen en el máximo número de factores y, como el mcd debe ser el polinomio de mayor grado que divida a los polinomios dados, éste, el mcd, será el producto de los factores comunes con su menor exponente. Por otra parte, como el mcm es el polinomio de menor grado que sea divisible por cada uno de los polinomios dados, el mcm será el producto de los factores comunes y los no comunes con su mayor exponente.

Para descomponer en factores el primer polinomio, podemos proceder como en el ejercicio 1. b) o bien según el segundo método propuesto en 1. c). Optaremos en este caso por este último, así sacaremos factor común x^2 de los dos primeros términos y -4 de los dos últimos:

$$2x^3-x^2-8x+4=x^2(2x-1)-4(2x-1)=(2x-1)(x^2-4)$$

Teniendo en cuenta los productos notables, $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Por lo tanto

$$2x^3-x^2-8x+4=(2x-1)(x-2)(x+2).$$

Podemos sacar factor común x en el polinomio x^3-4x^2+4x, con lo que

$$x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)$$

Pero nuevamente, teniendo en cuenta los productos notables, $x^2-4x-4=(x-2)^2$. Así:

$$x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2,$$

obteniéndose: $mcd(P(x),Q(x))=x-2$ y $mcm(P(x),Q(x))=x(2x-1)(x+2)(x-2)^2$.

4. Efectúa la división $(2x^3-5x^2-2x+3):(3x^2-1)$

Solución:

El proceso a seguir es similar al seguido en la división de números reales, las únicas diferencias son que hay que dividir término a término y que los coeficientes que aparezcan en el divisor pueden ser racionales no enteros o irracionales.

Así tenemos que averiguar un monomio que multiplicado por el primer término del divisor nos de $2x^3$, ese monomio es $\frac{2}{3}x$, que multiplicado por el divisor nos da $2x^3-\frac{2}{3}x$. Como no es fácil calcular mentalmente el resto, colocamos el producto cambiado de signo debajo del dividendo y calculamos el resto

$$\begin{array}{lllll}
2x^3 & -5x^2 & -2x & +3 & :(3x^2-1) \;=\; \frac{2}{3}x \\
-2x^3 & & +\frac{2}{3}x & & \\
\hline
 & -5x^2 & -\frac{4}{3}x & +3 &
\end{array}$$

Al ser iguales los grados del resto y del divisor, podemos continuar la división procediendo de la misma manera, averiguando el monomio que multiplicado por $3x^2$ nos de el primer término del actual resto; claramente, el monomio buscado es $-\frac{5}{3}$, que multiplicado por $(3x^2-1)$ nos da $-5x^2+\frac{5}{3}$. Colocamos el opuesto de este binomio debajo del resto anteriormente obtenido y nos queda :

$$\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & -5x^2 & -2x & +3 & :(3x^2-1) = \frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\
-2x^3 & & +\frac{2}{3}x & & \\
\hline
 & -5x^2 & -\frac{4}{3}x & +3 & \\
 & 5x^2 & & -\frac{5}{3} & \\
\hline
 & & -\frac{4}{3}x & +\frac{4}{3} &
\end{array}$$

Y la división está acabada, ya que el resto es un polinomio de grado menor que el grado del divisor y se pretende obtener en el cociente un polinomio. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{2x^3-5x^2-2x+3}{3x^2-1}=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}+\left(\frac{-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}}{3x^2-1}\right).$$

5. Desarrollar el binomio $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4$.

<u>Solución:</u>

Para obtener el desarrollo, utilizaremos la fórmula de Newton:

$$(a\pm b)^n=\binom{n}{0}a^n\pm\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\pm\ldots\pm\binom{n}{n}b^n.$$

en la que los números combinatorios que aparecen en los coeficientes corresponden, respectivamente, a los números que aparecen en la fila n del triángulo de Pascal.

Los elementos que aparecen en la cuarta fila del triángulo de Pascal son 1, 4, 6, 4 y 1. Así

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4-4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3\frac{2}{\sqrt{x}}+6\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2-4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3+1\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4.$$

Efectuamos cada una de las potencias:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{x^4}{2^4}-4\cdot\frac{x^3}{2^3}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}+6\cdot\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{2^2}{\sqrt{x^2}}-4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{2^3}{\sqrt{x^3}}+\frac{2^4}{\sqrt{x^4}}.$$

Pero $\sqrt{x^2}=x$, $\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$ y $\sqrt{x^4}=x^2$, por tanto:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{x^4}{2^4}-4\cdot\frac{x^3}{2^3}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}+6\cdot\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{2^2}{x}-4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{2^3}{x\sqrt{x}}+\frac{2^4}{x^2}.$$

Podemos simplificar en algunos términos, y queda:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{\sqrt{x}}+6x-\frac{16}{\sqrt{x}}+\frac{16}{x^2}.$$

Racionalizamos el segundo y cuarto término, multiplicamos el numerador y el denominador de las fracciones por las cantidades convenientes para que finalmente no queden raíces en los denominadores.

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{x^4}{16}-\frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}+6x-\frac{16\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}+\frac{16}{x^2},$$

así, el desarrollo pedido es $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{x^4}{16}-\frac{x^3\sqrt{x}}{x}+6x-\frac{16\sqrt{x}}{x}+\frac{16}{x^2}$.

6. Calcula el término independiente de x del desarrollo $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^{15}$

Solución:

Denotemos por T_k al k-ésimo término. Si observamos la fórmula de Newton, vemos que cada término tiene un número combinatorio tal que en la parte superior tiene el mismo número que el exponente, y en la parte inferior tiene un número que es una unidad menor que el número que indica la posición del término. Así, en este caso, el número combinatorio que aparece en el T_k es $\binom{15}{k-1}$. En consecuencia podemos escribir que

$$T_k=\binom{15}{k-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{15-(k-1)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^{k-1}.$$

El término independiente de x es el que no contiene a x entre sus factores, o, equivalentemente, el que contiene a x^0, y, según esto, lo único que nos interesa del T_k es el exponente de x.

Para las potencias se verifican las siguentes propiedades:

$$(x^p)^q=x^{p\cdot q},\ \frac{x^p}{x^q}=x^{p-q} \text{ y } \sqrt[p]{x^q}=x^{\frac{q}{p}}.$$

En la expresión de T_k escrita anteriormente, el exponente de x es $2[15-(k-1)]-\frac{k-1}{2}$.

Igualamos a cero dicha expresión y, resolviendo la ecuación resultante, obtenemos que $k=13$, por lo que podemos afirmar que el término independiente de x es el 13º.

Nos queda por calcular dicho término:

$$T_{13}=\binom{15}{12}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^{12}=\frac{15!}{12!\cdot 3!}\cdot\frac{x^6}{4^3}\cdot\frac{\sqrt{2^{12}}}{\sqrt{x^{12}}}.$$

Como $15!=15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!$ y $3!=3\cdot 2\cdot 1$, según las propiedades de las potencias anteriormente mencionadas, podemos escribir

$$T_{13}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{12!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{x^6}{4^3}\cdot\frac{2^6}{x^6}.$$

Por otra parte $4^3=(2^2)^3=2^6$. Simplificando, obtenemos que $T_{13}=5\cdot 7\cdot 13=455$, que efectivamente es independiente de x.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Descomponer en factores, con coeficientes enteros, los siguientes polinomios:
a) $3x^3-2x^2-3x+2$, b) $a^3+2a^2b-ab^2-2b^3$, c) $18x^3-15x^2-x+2$.

2. Simplifica: a) $\left(\frac{r+s}{r-s}-\frac{r-s}{r+s}\right):\left(1-\frac{r^2+s^2}{s^2-r^2}\right)$, b) $\frac{4-x^2}{3x^2-4x-4}$

3. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $8a^3-1$, $6a-3$, $2a^2+a-1$.

4. Efectúa la división $\left(3x^3-2x^2-3x+3\right):\left(5x^2-2\right)$

5. Desarrollar el binomio $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^4$.

6. Calcula el término que contiene a x^{10} en el desarrollo $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x^3}{\sqrt[3]{4}}\right)^7$.

SOLUCIONES

1. a) $(x+1)(x-1)(3x-2)$ b) $(a+2b)(a-b)(a+b)$ c) $(2x-1)(3x+1)(3x-2)$
2. a) $\frac{2s}{r}$, siendo $r\neq\pm s$, $r\neq 0$ b) $\frac{-x-2}{3x+2}$, siendo $x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}$.
3. $mcd=2x-1$, $mcm=2(2x-1)(x+1)(4x^2+2x+1)$
4. $(3x^3-2x^2-3x+3):(5x^2-2)=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}+\frac{\left(-\frac{9}{5}x+\frac{11}{5}\right)}{5x^2-2}$
5. $\frac{x^8}{16}-x^4\sqrt[4]{x^3}+6x^2\sqrt{x}-\frac{16}{x}\sqrt[4]{x^3}+\frac{16}{x^3}$
6. Se trata del quinto término y su valor es $15\sqrt[3]{2}\,x^{10}$.

Tema 10

Ecuaciones lineales y cuadráticas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Ecuaciones equivalentes. Manejo de ecuaciones.
- Ecuaciones lineales con una incógnita.
- Ecuaciones con valor absoluto.
- Ecuaciones con raíces.
- Ecuaciones cuadráticas. Discriminante.
- Ecuaciones bicuadradas.
- Ecuaciones con parámetros.
- Inecuaciones de primer grado.
- Inecuaciones de segundo grado.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determina tres números enteros consecutivos cuyos cuadrados sumen 77.

Solución:

Llamamos al más pequeño de los número por la incógnita x, entonces los tres números consecutivos serán $x, (x+1)\, y\, (x+2)$. Así podemos plantear una ecuación para resolver el problema, para ello escribimos los cuadrados de los tres números, los sumamos e igualamos la suma a 77 que es el resultado que nos dice el enunciado. Es decir: $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=77$

Para resolver la ecuación, primero desarrollamos los cuadrados del primer miembro, después operamos y por último agrupamos todo los términos en el primer miembro, entonces llegamos a: $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=77$, de aquí: $3x^2+6x-72=0$, dividimos entre 3 para simplificar la ecuación: $x^2+2x-24=0$.

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la conocida fórmula: $x=\dfrac{-2\mp\sqrt{4+96}}{2}=\dfrac{-2\pm 10}{2}$, vamos a tener dos posibles soluciones, $x_1=4\, y\, x_2=-6$. Podemos ver que con la primera solución los número son 4, 5 y 6; mientras que con la segunda los números serían -6, -5 y -4.

Comprobamos una de las soluciones: $2^2+5^2+6^2=16+25+36=77$. La otra solución se comprueba igual.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadrada y racional:

a) $x^4-29x^2+100=0$

b) $\frac{4x}{x-4}+x-4=\frac{16}{x-4}$

Solución:

a) En las ecuaciones bicuadradas las resolvemos con un cambio de variable, se sustituye la incógnita al cuadrado por una nueva incógnita, de esta forma tenemos una ecuación cuadrática que ya podemos resolver fácilmente. En nuestro caso haremos el cambio de variable $x^2=t$, entonces la ecuación que tendremos será: $t^2-29t+100=0$.

Resolvemos ahora esta ecuación de 2º grado:

$$t=\frac{29\mp\sqrt{(-29)^2-400}}{2}=\frac{29\pm\sqrt{841-400}}{2}=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{29\pm 21}{2}.$$

Las soluciones para t son entonces: $t_1=25\ y\ t_2=4$. Para conocer las soluciones de la incógnita original x debemos deshacer el cambio hecho al principio, es decir $x^2=25\ y\ x^2=4$, llegamos así a las cuatro soluciones que son $x_1=2, x_2=-2, x_3=5\ y\ x_4=-5$. Comprobamos una de las soluciones (las otras se hacen igual): $2^4-29\cdot 2^2+100=16-29\cdot 4+100=0$.

b) Las ecuaciones racionales son las que tienen fracciones algebraicas. Se resuelven eliminando los denominadores y después se obtienen las soluciones de la ecuación polinómica resultante. En algunas ocasiones aparecen soluciones nuevas que no son soluciones de la ecuación original, por lo que es necesario comprobar las soluciones en la ecuación inicial. En nuestro caso, tenemos la ecuación $\frac{4x}{x-4}+x-4=\frac{16}{x-4}$, para eliminar los denominadores simplemente multiplicamos la ecuación por el denominador $(x-4)$, obtenemos entonces: $4x+(x-4)^2=16$, desarrollando llegamos a la ecuación $4x+x^2-8x+16=16 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=4$. De estas dos soluciones sólo es válida $x=0\ ;\ x=4$ no es válida porque anula los denominadores de la ecuación inicial. Veamos que $x=0$ es solución: $\frac{0}{-4}+0-4=\frac{16}{0-4} \Leftrightarrow -4=\frac{16}{-4} \Leftrightarrow -4=-4$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales y de valor absoluto:

a) $\sqrt{16x^2-\sqrt{8x+5}}=4x-1$

b) $|x^2-3x+1|=1$

Solución:

a) Las ecuaciones irracionales son aquellas en las que la incógnita aparece en algún radical. Se resuelven aislando los radicales, elevando a la potencia adecuada para eliminar el radical y después resolviendo la ecuación polinómica que aparece; en ocasiones la operación de aislar y eliminar los radicales hay que realizarla más de una vez. Se debe comprobar que las soluciones obtenidas lo son de la ecuación inicial ya que en ocasiones aparecen soluciones nuevas no válidas.

En nuestro caso ya está aislado el radical, así que elevamos la ecuación al cuadrado y obtenemos:

$$\left[\sqrt{16x^2-\sqrt{8x+5}}=4x-1\right]^2 \Rightarrow 16x^2-\sqrt{8x+5}=(4x-1)^2 \Rightarrow 16x^2-\sqrt{8x+5}=16x^2-8x+1,$$

ahora agrupamos los términos y simplificamos, dejando otra vez el radical en el primer miembro y volvemos a elevar de nuevo al cuadrado, teniendo finalmente una ecuación cuadrática:

$$\left[-\sqrt{8x+5}=-8x+1\right]^2 \Rightarrow 8x+5=64x^2-16x+1 \Rightarrow 64x^2-24x-4=0 \Rightarrow 16x^2-6x-1=0.$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:
$x=\frac{6\mp\sqrt{36+64}}{2\cdot 16}=\frac{6\pm\sqrt{100}}{32}=\frac{6\pm 10}{32}$; las soluciones son: $x_1=\frac{1}{2}\ y\ x_2=-\frac{1}{8}$.
Debemos comprobar las soluciones, sustituimos en la ecuación inicial:
$\sqrt{16\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^2-\sqrt{8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+5}}=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)-1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{4}-2}=-\frac{1}{2}-1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{4}-2}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{-\frac{7}{4}}=-\frac{3}{2}$,
podemos ver que $x_2=-\frac{1}{8}$ no es una solución válida. La solución $x_1=\frac{1}{2}$ si es válida.

b) Las ecuaciones con valores absolutos se resuelven eliminando los valores absolutos, de esta forma nos aparecerán dos o más ecuaciones (según el número de términos con valor absoluto) que debemos resolver por separado, para finalmente comprobar la soluciones.

De nuestra ecuación $|x^2-3x+1|=1$ vamos a obtener las siguientes dos ecuaciones: $x^2-3x+1=1\Rightarrow x^2-3x=0$ y $-(x^2-3x+1)=1\Rightarrow x^2-3x+2=0$. La primera tiene solución inmediata: $x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x_1=0\ y\ x_2=3$. Resolvemos la segunda:
$x=\frac{3\mp\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow x_3=2\ y\ x_4=1$.
Sustituimos una de las soluciones para comprobarla (las otras se comprueban igual):
$|2^2-3\cdot 2+1|=1\Leftrightarrow|-1|=1$.

4. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y segundo grado:

a) $3x-7\leq 5x+\frac{1}{2}$

b) $x^2+3x-10>0$

Solución:

a) Las inecuaciones de primer grado se resuelven operando hasta despejar la incógnita. Debemos tener cuidado al operar con el signo de la desigualdad. En nuestra inecuación $3x-7\leq 5x+\frac{1}{2}$ lo que haremos en la primera operación será multiplicar por 2 para eliminar denominadores, quedando entonces $6x-14\leq 10x+1$. Ahora agrupamos los términos en los dos miembros y tenemos $6x-10x\leq 1+14\Rightarrow -4x\leq 15$, para finalizar despejamos la incógnita x pero debemos cambiar el sentido de la desigualdad ya que dividimos entre un número negativo: $x\geq -\frac{15}{4}$. Se puede representar la solución en la recta real para visualizar mejor la solución; también se puede escribir en forma de intervalo: $x\in\left[-\frac{15}{4},+\infty\right)$.

b) Para resolver la inecuación de grado 2, lo primero es factorizar el polinomio asociado, para ello resolvemos la ecuación asociada $x^2+3x-10=0$; $x=\frac{-3\mp\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow x_1=2\ y\ x_2=-5$. Entonces la factorización es: $x^2+3x-10=(x-2)\cdot(x+5)$, ahora construimos una tabla con 3 columnas y 3 filas, arriba en las líneas de separación escribimos los valores $-\infty, -5, 2, +\infty$ y a la izquierda de las filas los factores separados y su producto final, en las casillas de la tabla ponemos el signo del factor de la izquierda, o del producto de los factores, según el intervalo que nos marcan los símbolos escritos arriba. En nuestro caso el resultado sería el siguiente:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,2)$	$(2,+\infty)$
$x+5$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$(x+5)(x-2)$	+	-	+

La solución se puede representar de forma gráfica, nosotros la escribimos en forma de intervalos;mirando la última fila de la tabla, vemos que hay dos intervalo en los que el polinomio es positivo, estos serán nuestra solución: $x\in(-\infty,-5)\cup(2,+\infty)$.

Nota: Es importante señalar que todas las inecuaciones de grado mayor que 2 se pueden resolver con este método, primero se factoriza el polinomio (o polinomios si es un cociente de polinomios) y después se crea una tabla de la misma manera que lo hemos hecho en este ejercicio, y finalmente se seleccionan los intervalos solución.

5. Resuelve en IR la siguiente ecuación cuadrática según el valor del parámetro m :
$m x^2-2 m x+x+m+1=0$.

Solución:

Lo primero que haremos es ordenar los términos para identificar los coeficientes a , b y c de la ecuación de segundo grado: $mx^2+x(1-2\mathrm{m})+(m+1)=0$. Entonces los coeficientes son: $a=m$, $b=1-2\mathrm{m}$ y $c=m+1$. Tenemos entonces dos opciones iniciales: $m=0, m\neq 0$, estudiaremos los dos casos por separado.

- $\underline{m=0}$. En este caso la ecuación se reduce a $x+1=0$ cuya solución única es $x=-1$.
- $\underline{m\neq 0}$. Ahora tendremos una ecuación de segundo grado completa, para resolverla calculamos el discriminante que nos permitirá determinar las posibles soluciones: $\Delta=b^2-4\mathrm{ac}=(1-2\mathrm{m})^2-4\mathrm{m}(m+1)=1-4\mathrm{m}+4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}=1-8\mathrm{m}$. Según el valor del discriminante tendremos una solución, dos soluciones o ninguna:
    - Dos soluciones: $\Delta>0\Rightarrow 1-8\mathrm{m}>0\Rightarrow m<\frac{1}{8}$
    - Una solución: $\Delta=0\Rightarrow 1-8\mathrm{m}=0\Rightarrow m=\frac{1}{8}$
    - Sin solución: $\Delta<0\Rightarrow 1-8\mathrm{m}<0\Rightarrow m>\frac{1}{8}$

Resolvemos la ecuación con la conocida fórmula: $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$. En nuestro caso tendríamos: $x_1=\frac{2\mathrm{m}-1+\sqrt{1-8\mathrm{m}}}{2\mathrm{m}}$ y $x_2=\frac{2\mathrm{m}-1-\sqrt{1-8\mathrm{m}}}{2\mathrm{m}}$. Resumimos en una tabla las soluciones obtenidas según el valor del parámetro m :

m	0	$\left(\frac{1}{8},+\infty\right)$	$\frac{1}{8}$	$\left(-\infty,\frac{1}{8}\right)-\{0\}$
Solución	$\{-1\}$	Ø	$\left\{\frac{2\mathrm{m}-1}{2\mathrm{m}}\right\}$	$\left\{\frac{2\mathrm{m}-1\pm\sqrt{1-8\mathrm{m}}}{2\mathrm{m}}\right\}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla un número tal que el doble del mismo sea igual a su cuadrado menos su mitad.
2. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadrada y racional:
   a) $x^4-13x^2+36=0$
   b) $\frac{6x+1}{x^2-4}=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x}{x-2}$
3. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales y de valor absoluto:
   a) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$
   b) $|x-5|-|x+2|=-x+7$
4. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y segundo grado:
   a) $2\cdot(2x-1)\leq 7-3\cdot(1+2x)$
   b) $\frac{x^2+x-6}{x-8}\leq 0$
5. Resuelve en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación cuadrática según el valor del parámetro *k*:
   $(2-x)(x+1)=k$.

SOLUCIONES

1. $x=\frac{5}{2}$
2. a) $x_1=3, x_2=-3, x_3=2, x_4=-2$

   b) $x_1=3, x_2=-\frac{1}{2}$
3. a) $x=2$

   b) $x=14$
4. a) $x\in[-3\ ,+\infty)$

   b) $x\in(-\infty\ ,-3]\cup[2\ ,8)$
5. En forma de tabla:

k	0	$\left(\frac{9}{4,}+\infty\right)$	$\frac{9}{4}$	$\left(-\infty\ ,\frac{9}{4}\right)$
Solución	$\{2\ ;-1\}$	Ø	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\left\{\frac{1\pm\sqrt{9-4k}}{2}\right\}$

Tema 11

Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

CONCEPTOS BÁSICOS

- Concepto de sistema de ecuaciones lineales. Tipos. Forma matricial.
- Existencia de soluciones. Teorema de Rouché-Frobenius.
- Metodos de sustitución, igualación y reducción.
- Sistemas de Cramer,regla de Cramer.
- Método de Gauss.
- Sistemas homogéneos.
- Concepto de inecuación.
- Sistema de inecuaciones con una incógnita.
- Sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resuelve el siguiente sistema según el valor del parámetro k y da una interpretación geométrica de lo obtenido

$$\left.\begin{array}{r} -x+ky=1 \\ 2x-5y=-5 \end{array}\right\}$$

Solución:

Aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando ambas ecuaciones luego:

$$\left.\begin{array}{r} -x+ky=1 \\ 2x-5y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow (2k-5)\,y=-3 \Rightarrow y=\frac{-3}{2k-5}$$

Sustituyendo y en la ecuación de abajo, por ejemplo, podemos calcular el valor de x:

$$2x+\frac{15}{2k-5}=-5 \Rightarrow 2x=-5-\frac{15}{2k-5}=\frac{-10k+25-15}{2k-5}=\frac{-10k+10}{(2k-5)} \Rightarrow x=\frac{(-5k+5)}{(2k-5)}$$

Vemos que la solución depende del valor de k y que cuando k = $\frac{5}{2}$ (cuando el denominador es nulo) no existe. Es decir cuando k = $\frac{5}{2}$ el sistema es incompatible y cuando $k \neq \frac{5}{2}$ el sistema es compatible determinado.

Cada ecuación del sistema es de primer grado y es la ecuación de una recta en el plano. Para k = $\frac{5}{2}$ el sistema no tiene solución y por lo tanto las rectas no tienen puntos en común y serán paralelas. Para $k\neq\frac{5}{2}$ el sistema tiene una única solución y las rectas tendrán un único punto en común es decir serán secantes.

2. Discute aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius y resuelve, si es posible, aplicando la regla de Cramer

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y+3z=7\\4x-y+z=-2\\7x-3y+z=8\end{array}\right\}$$

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes A, la matriz ampliada A* y calculamos sus rangos.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\4 & -1 & 1\\7 & -3 & 1\end{pmatrix},A^{*}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3 & 7\\4 & -1 & 1 & -2\\7 & -3 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

Vemos que el rango mínimo de A es 2, ya que podemos encontrar al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\4 & -1\end{vmatrix}=-9$$

Para ver si es tres debemos resolver el determinante de A.

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\4 & -1 & 1\\7 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-18 & 11 & 0\\-3 & 2 & 0\\7 & -3 & 1\end{vmatrix}=-3\neq0\Rightarrow RagA=3$$

y por lo tanto el Rag A*= 3 también ya que el menor de orden 3 anterior también está en A* y esta no tiene cuatro filas. Como el número de incógnitas también es 3 el sistema será compatible determinado.

Calculamos la solución por Cramer (el sistema es evidentemente de Cramer)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & 2 & 3\\-2 & -1 & 1\\8 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\4 & -1 & 1\\7 & -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-17 & 11 & 0\\-10 & 2 & 0\\8 & -3 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-76}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 7 & 3\\4 & -2 & 1\\7 & 8 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{\begin{vmatrix}-18 & -17 & 0\\-3 & -10 & 0\\7 & -3 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{129}{-3}=-43$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 7\\4 & -1 & -2\\7 & -3 & 8\end{vmatrix}}{-3}=\frac{\begin{vmatrix}11 & 0 & 3\\4 & -1 & -2\\-5 & 0 & 14\end{vmatrix}}{-3}=\frac{169}{3}$$

3. Discute, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el siguiente sistema según los valores del parámetro m.

$$\left.\begin{array}{r} x+my+4z=1 \\ 10x+y-z=2 \\ x+3y+z=0 \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

Primero escribimos las matrices A y A*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m & 4 \\ 10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & m & 4 & 1 \\ 10 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente vemos que el rango mínimo de A es dos, ya que podemos encontrar al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=-41$$

Para ver si puede o no puede ser 3 resolvemos el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+120-m-4+3-10m=120-11m$$

De aquí deducimos que si

$$m=\frac{120}{11}\Rightarrow |A|=0\Rightarrow \text{Rango de A es 2}$$

$$m\neq\frac{120}{11}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow \text{Rango de A es 3}$$

Ahora vamos por partes:

a) Si $m\neq\frac{120}{11}\Rightarrow \text{Rango de } A=3\Rightarrow \text{Rango de } A^{*}=3=\text{número de incógnitas}$

y por lo tanto el sistema será compatible determinado.

b) Si $m=\frac{120}{11}\Rightarrow \text{Rango de } A=2,$ sustituimos m en la matriz A* y calculamos su rango orlando el menor (distinto de cero) que está en la esquina superior izquierda.

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{120}{11} & 4 & 1 \\ 10 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El primer menor que sale es el determinante de A que sabemos que vale cero. El segundo menor debemos calcularlo, si sale cero el rango es 2 y si sale distinto de cero el rango es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{120}{11} & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{120}{11} & 1 \\ 9 & \frac{-109}{11} & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$$

Luego el rango de A* es 3 y el sistema será incompatible para este valor de m.

4. Estudia y resuelve en caso de compatibilidad, por el método de Gauss, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4y+2z=2 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Escribimos la matriz ampliada y hacemos ceros debajo de la diagonal principal utilizando las operaciones que no modifican el rango.

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \sim F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \sim F_2 - 5F_1,\, F_3 \sim \frac{F_3}{2} - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \sim 2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Volvemos a escribir el sistema con los nuevos coeficientes y términos independientes (hemos obtenido un sistema equivalente)

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -2y+9z=-3 \\ -z=-1 \end{array}\right\}$$

Ahora vamos sustituyendo de abajo a arriba:

$$z=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x=-4$$

5. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\left.\begin{array}{r} 4x-5>-3+2x \\ -6x+5\geqslant 1-x \end{array}\right\}$$

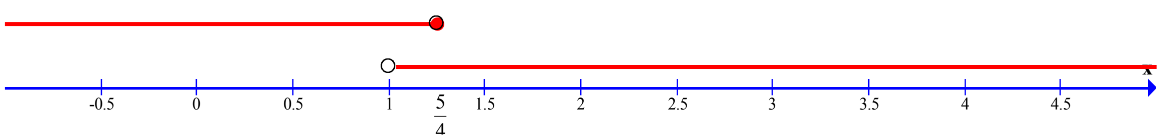
Solución:

Primero resolvemos cada inecuación por separado

$$\begin{array}{c} 4x-5>-3+2x \\ 4x-2x>-3+5 \\ 2x>2 \\ x>1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -6x-5\geqslant 1-x \\ -6x+x\geqslant 1-5 \\ -5x\geqslant -4 \\ 5x\leqslant 4 \\ x\leqslant \frac{5}{4} \end{array}$$

La solución es la intersección de ambas soluciones, es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ / \ 1<x\leqslant \frac{5}{4}$$



6. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y>1 \\ x+2y\leq 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Resolvemos cada inecuación por separado.

$3x-y>1 \Rightarrow 3x-1>y$, la solución son puntos (x, y) del plano y vemos que la coordenada y de cada punto está por debajo de las coordenadas y de los puntos de la recta y = 3x – 1 con la misma x. Luego la solución de esta inecuación son todos los puntos del plano que están por debajo de la recta y = 3x – 1.

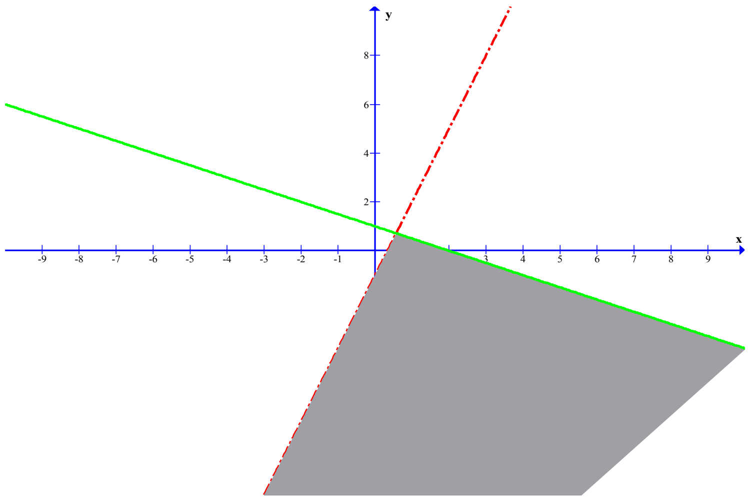
Representamos esta recta y dibujamos dicho semiplano. Como los puntos de la recta no son solución ésta la dibujamos punteada.

De igual forma procedemos con la segunda inecuación:

$$x+2y\leqslant 2 \Rightarrow 2y\leqslant 2-x \quad \text{y por tanto} \quad y\leq\frac{2-x}{2}$$

La solución son todos los puntos por debajo de la recta $y=\dfrac{2-x}{2}$ incluidos los puntos de la recta.

La solución del sistema es la intersección de ambas soluciones (la parte coloreada del dibujo)



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de a, y resuelve en su caso.

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=0 \\ (a+1)x+y-az=0 \\ x+(a+1)y=0 \end{array}\right\}$$

2. Resuelve el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+3z=2 \\ 4x-3y+z=-1 \\ x+5y-6z=5 \end{array}\right\}$

3. Estudia, según los valores de a y b, el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x-y-2z=b \\ x+y+z=5 \\ 4x-5y+az=-10 \end{array}\right\}$.

4. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones con una incógnita $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}-\frac{3x+1}{5}\leqslant 2-\frac{x}{5} \\ \frac{-x+2}{3}+\frac{2x-1}{2}<3x-\frac{1}{3} \end{array}\right\}$

SOLUCIONES

1. Si a ≠ 0 y a ≠ -1 el sistema es compatible determinado, x = 0, y = 0, z = 0 (solución trivial). Si a = 0 el sistema es compatible indeterminado, $x=t, y=-t, z=t$ con $t\in\mathbb{R}$. Si a = -1 el sistema es compatible indeterminado, $x=0, y=-t, z=t$ con $t\in\mathbb{R}$

2. x= 1, y = 2, z = 1.

3. Si a ≠ - 8 y b cualquiera, el sistema es compatible determinado, si a = -8 y b ≠ 0, el sistema es compatible indeterminado.

$\forall x\in\mathbb{R}/\frac{3}{14}<x\leqslant 22$

Tema 12

Funciones

CONCEPTOS BÁSICOS

- Definición. Formas de expresar una función.
- Operaciones. Composición de funciones.
- Gráfica de una función.
- Características de las funciones (monotonía, simetría, periodicidad,acotamiento,...)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Escribe la expresión analítica de la función f que asigna a cada número real el triple de su cuadrado , disminuido en una unidad. Calcula la imagen de 1 en f y las antiimágenes de -4 por f.

Solución:

La expresión analítica de la función es : $f(x)=3x^2-1$.
Para calcular la imagen de $x=1$ sustituimos x por 1 en la expresión analítica de f:
$f(1)=3\cdot 1^2-1=2$
Para calcular las antiimágenes de $y=-4$ debemos sustituir $y=f(x)$ por -4 y despejar x en la expresión $f(x)=3x^2-1$. Se tiene: $-4=3x^2-1\rightarrow 3x^2=-3\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\notin\Re$.
Luego -4 no tiene ninguna antiimagen real . Escribiremos : $f^{(-1)}(-4)=\emptyset$

2. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x-2$, calcula la función suma $f+g$, la función diferencia $f-g$, la función producto $f\cdot g$ y la función cociente $\frac{f}{g}$, y halla el dominio de cada una de ellas.

Solución:

Para hallar la expresión analítica de $f+g$ sumamos la expresiones analíticas de las funciones f y g : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{x^2-2x+1}{x}$

Efectuamos de forma análoga para $f-g$, $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-(x-2)=\frac{1}{x}-x-2=\frac{1-x^2+2x}{x}=\frac{-x^2+2x+1}{x}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x}\cdot(x-2)=\frac{x-2}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{(x-2)}=\frac{1}{x(x-2)}=\frac{1}{x^2-2\text{x}}$$

Para hallar el dominio de $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$ determinamos primero el dominio de f y g : $D(f)=\Re-\{0\}$ $\quad D(g)=\Re$

luego los dominios que pide el enunciado serán:

$$D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\Re-\{0\}$$
$$D(f-g)=D(f)\cap D(g)=\Re-\{0\}$$
$$D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)=\Re-\{0\}$$
$$D\left(\frac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x\in\Re/g(x)=0\}=\Re-\{0,2\}$$

3. Para prevenir los efectos de la sequía el Ayuntamiento de un pueblo decidió un aumento drástico de las tasas ,esperando disuadir a los habitantes del pueblo del consumo excesivo de agua. La tasa mensual fijada fue de 0,75€ por cada metro cúbico de los primeros 1,2 metros cúbicos gastados , 6€ por metro cúbico de agua de los 12 siguientes metros cúbicos y 30€ por metro cúbico de ahí en adelante.
Expresa la factura mensual de agua como una función de la cantidad de agua.

Solución:

Sea f la función que expresa la factura del agua y x el consumo de agua en m^3 ; el importe de la factura será : $y=f(x)€$

Veamos un esquema de la situación para encontrar la fórmula de $f(x)$:

m^3 gastados	0 a 1,2	1,2 a 12	12 a más
Precio por m^3	0,75 €	6,00 €	30,00 €

Buscamos algunas imágenes para ver regularidades:

$f(0)=0\cdot 0{,}75$ $\qquad$ $f(2)=1{,}2\cdot 0{,}75+(2-1{,}2)\cdot 6$

$f(1)=1\cdot 0.75$ $\qquad$ $f(7)=1{,}2\cdot 0{,}75+(7-1{,}2)\cdot 6$

$f(1{,}2)=1{,}2\cdot 0{,}75$ $\qquad$ $f(12)=1{,}2\cdot 0{,}75+(12-1{,}2)\cdot 6+(14-1{,}2)\cdot 30$

Observamos que hay valores que son constantes y un valor que va variando. Éste último será la variable independiente x. En cada tramo la fórmula es diferente, por tanto $f(x)$ es una función definida a trozos.

$si\ 0\le x\le 1{,}2\rightarrow f(x)=0{,}75\,x$

$si\ 1{,}2<x\le 12\rightarrow f(x)=1{,}2\cdot 0{,}75+(x-12)\cdot 6=6\text{x}-6{,}3$

$si\ x>12\rightarrow f(x)=1{,}2\cdot 0{,}75+(12-1{,}2)\cdot 6+(x-12)\cdot 30=30\text{x}-294{,}3$

donde x son los m^3 de agua consumida y $f(x)$ el importe total de la factura. La función queda así:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}75\,x\rightarrow 0\le x\le 1{,}2 \\ 6\text{x}-6{,}3\rightarrow 1{,}2<x\le 12 \\ 30\text{x}-294{,}3\rightarrow x>12 \end{cases}$$

4. Considera las funciones $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\frac{(x-1)}{(x+3)}$ y $h(x)=\sqrt{x}$. Calcula las funciones compuestas que se indican a continuación:

a) $g\circ f$
b) $f\circ g$
c) $h\circ g\circ f$
d) $h\circ g$
e) $f\circ h$
f) $g\circ h\circ f$

Solución:

a) La expresión analítica de la función compuesta $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+5)=\frac{(x^2+5)-1}{(x^2+5)+3}=\frac{x^2+4}{x^2+8}$$

b) La expresión analítica de la función compuesta $f \circ g$ es:

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2+5=\frac{x^2+1-2\mathrm{x}}{x^2+9+6\mathrm{x}}+5=$$

$$=\frac{x^2+1-2\mathrm{x}}{x^2+9+6\mathrm{x}}+5=\frac{x^2+1-2\mathrm{x}+5x^2+45+30x}{x^2+9+6\mathrm{x}}=\frac{6x^2+28x+46}{x^2+9+6\mathrm{x}}$$

c) La expresión analítica de la función compuesta $h \circ g \circ f$ es:

$$(h \circ g \circ f)(x)=h(g(f(x)))=h(g(x^2+5))=h\left(\frac{x^2+4}{x^2+8}\right)=\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+8}}$$

d) La expresión analítica de la función compuesta $h \circ g$ es:

$$(h \circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}$$

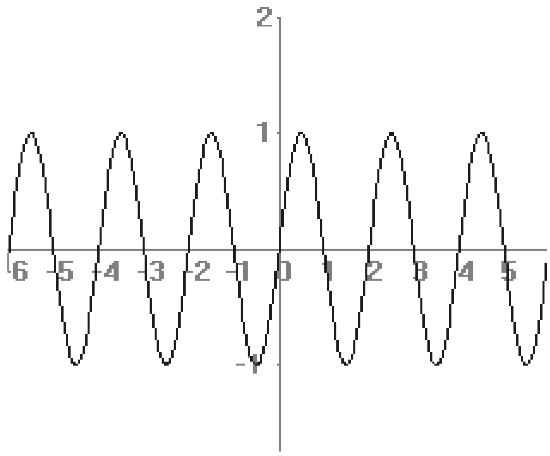
e) La expresión analítica de la función compuesta $f \circ h$ es:

$$(f \circ h)(x)=f(h(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+5=x+5$$

f) La expresión analítica de la función compuesta $g \circ h \circ f$ es:

$$(g \circ h \circ f)(x)=g(h(f(x)))=g(h(x^2+5))=g\left(\sqrt{x^2+5}\right)=\frac{\sqrt{x^2+5}-1}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

5. Observando la siguiente gráfica, determina:



a) Rango o recorrido
b) Dominio
c) Continuidad
d) Monotonía
e) Simetrías
f) Periodicidad
g) Acotamiento

Solución:

a) Observando la gráfica podemos ver que sólo son imágenes por la función los valores comprendidos entre 1 y -1, por lo tanto : $R(f)=[1,-1]$

b) Los valores que toma x en la función , si consideramos que la gráfica es continua, se pueden expresar de la siguiente forma: $D(f)=[-\infty,+\infty]$

c) No existe ningún valor de x que no le corresponda una imagen, por lo que la función es continua.

d) Los intervalos de crecimiento que se observan en la gráfica son:
$$(-6,-5.5),(-4.5,-3.5),(-2.5,-1.5),(-0.5,1.5),(1.5,2.5),(3.5,4.5)$$
y los intervalos de decrecimiento son :
$$(-5.5,-4.5),(-3.5,-2.5),(-1.5,-0.5),(0.5,1.5),(2.5,3.5),(4.5,5.5)$$

e) La función es simétrica con respecto al origen de coordenadas, luego es una función impar.

f) La función es periódica con periodo 2.

g) La función tiene una cota superior en 1 , ya que no existe ninguna imagen de mayor valor y una cota inferior en -1, ya que no existe ninguna imagen de menor valor.

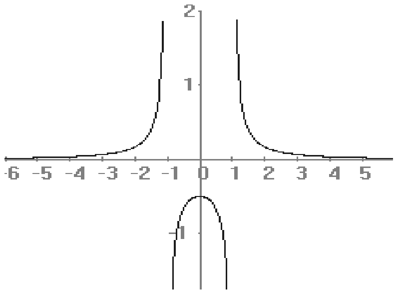
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En algunos países se utiliza un sistema de medición de la temperatura distinto a los grados centígrados que son los grados Farenheit. Sabiendo que 10 °C = 50 °F y que 60 °C = 140 °F, obtén la ecuación que nos permita traducir temperaturas de °C a °F.

2. Representa la siguiente función $f(x)=\frac{x^3}{(x^2-1)}$

3. Dadas las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2-1$, calcula la función compuesta $g\circ f$ y su dominio.

4. Observando la gráfica adjunta, determina:

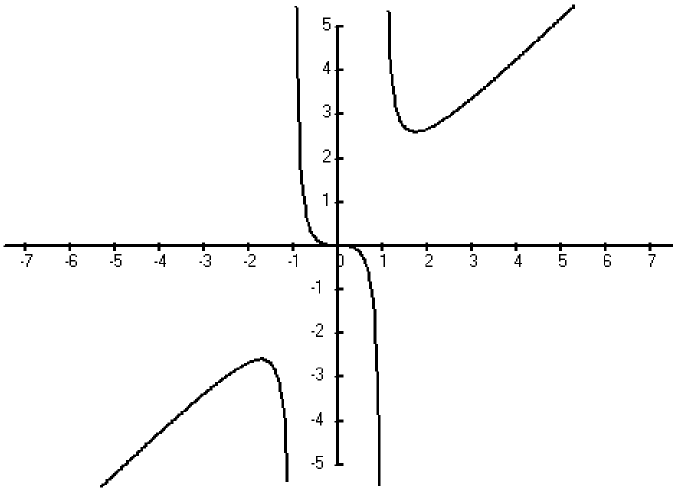


a) Rango o recorrido
b) Dominio
c) Continuidad
d) Monotonía
e) Simetrías
f) Periodicidad
g) Acotamiento

SOLUCIONES

1. $^oF = (9/5)\,^oC + 32$

2.



3. $(g\circ f)(x) = x^2 + 6x + 8$; $D(g\circ f) = \Re$

4. a) $R(f) = [-\infty, -0.5] \cup [0, +\infty]$ b) $D(f) = \Re$ c) continua
d) intervalos de crecimiento $(-\infty, 0)$ intervalos de decrecimiento : $(0, +\infty)$ e) simetría par
f) no es periódica g) no está acotada

Tema 13

Funciones elementales

CONCEPTOS BÁSICOS

- Las funciones constantes, lineales y afines.
- La función cuadrática.
- Función de proporcionalidad inversa.
- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Representar gráficamente la función $f(x)=x^2+1$ y a partir de ella las funciones $y=f(x)+k$ siendo k = 2 y k = -3.

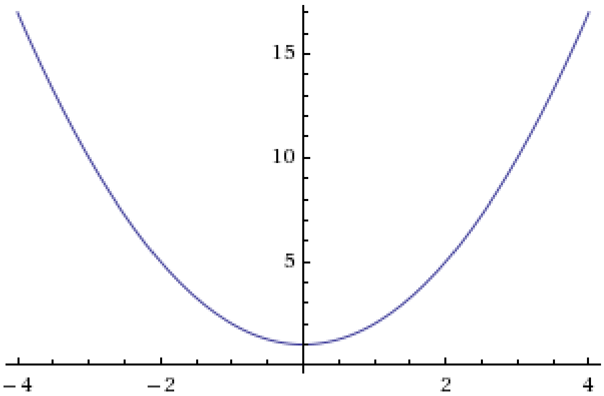
Solución:

La función $f(x)=x^2+1$ es una parábola que podemos comparar con la forma general $f(x)=ax^2+bx+c$ donde x_o = -b/2a es la coordenada x del vértice de la parábola, pudiendo calcular inmediatamente la coordenada y:

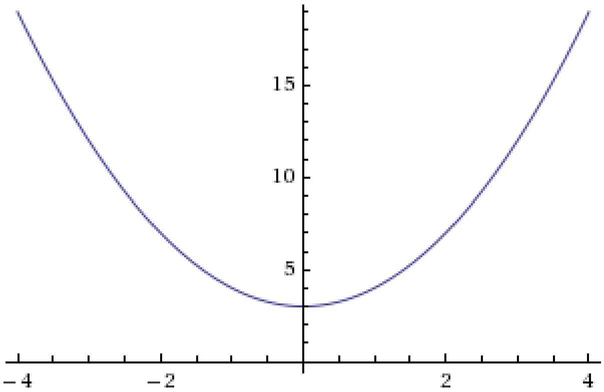
x_o = -0/2 = 0   Si x_o = 0 sustituyendo en la función y_o = 1

Por ser a > 0 las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba.

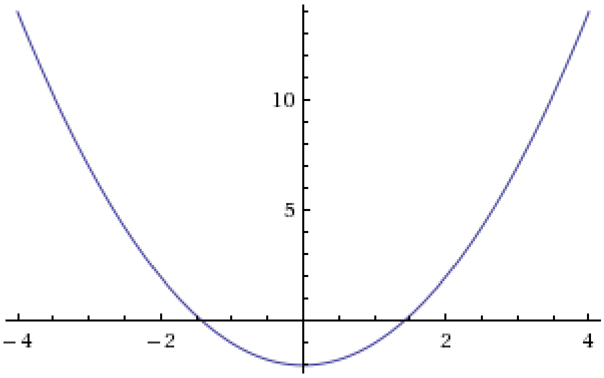
La función es simétrica respecto del eje Y.



La función $y=f(x)+k$ es una función similar a $f(x)$ pero su vértice está desplazado en el eje Y, k posiciones. Si k = 2 entonces la función que queremos representares $f(x)=x^2+3$, que es similar a la anterior, pero el vértice está en el punto (0,3),desplazado hacia arriba en 2 posiciones:



Del mismo modo la función $f(x)=x^2+1-3=x^2-2$, es otra parábola similar a la primera pero desplazado hacia abajo en el eje Y, 3 unidades, es decir, el vértice estará en el punto (0,-2):



2. Comprobar si las siguientes parejas corresponden a una función y a su inversa.

a) $y=2\mathrm{x}\,;\,y=\dfrac{x}{2}$

b) $y=3(x-1);\,y=\dfrac{(x-3)}{3}$

c) $y=x^2-7\,;\,y=\dfrac{1}{(x^2+7)}$

<u>Solución:</u>

La función inversa se obtiene a partir de la función inicial, intercambiando las variables x e y para posteriormente despejar la y. Ese resultado será la función inversa.

a) $y=2\mathrm{x}\rightarrow x=2\mathrm{y}\rightarrow y=\dfrac{x}{2}\rightarrow f^{-\mp 1}(x)=\dfrac{x}{2}$

La primera pareja corresponde a una función y a su inversa

b) $y=3(x-1)\rightarrow x=3(y-1)\rightarrow x=3\mathrm{y}-3\rightarrow x+3=3\mathrm{y}$

$y=\dfrac{(x+3)}{3}\rightarrow f^{\mp 1}(x)=\dfrac{(x+3)}{3}$

No corresponde a una función y a su inversa.

c) $y=x^2-7\rightarrow x=y^2-7\rightarrow x+7=y^2$

$y=\pm\sqrt{(x+7)}\ \rightarrow\ \ f^{\mp 1}(x)=\pm\sqrt{(x+7)}$

La última pareja no corresponde a una función y su inversa.

3. Dados los puntos A=(0,1); B = (1,0) y C = (2,3). Comprobar si estos puntos están o no alineados y en el caso en que no lo estén, calcular una función cuadrática que pase por ellos.

Solución:

Para que los puntos estén alineados deben pasar por la misma recta. Calculando la recta que pasa por los puntos A y B, luego podemos comprobar si el punto C pertenece o no a dicha recta.
La ecuación de una recta es una función lineal que puede darse de diversas formas, por ejemplo en forma punto pendiente: $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta y n la ordenada en el origen.
Sustituimos los valores de los puntos en la ecuación de la recta para calcular los parámetros m y n:
A = (0, 1) → $1=n$
B = (1,0) → $0=m+n=m+1 \rightarrow m=-1$
La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es $y=-x+1$.
Para que el punto C = (2, 3) esté alineado con los dos primeros, debe cumplir la ecuación de esta recta:
$3\neq-2+1$, luego C no está alineado con los puntos A y B.
Calculamos una función cuadrática que pase por los tres puntos, que tendrá la forma
$y=ax^2+bx+c$. Esta ecuación corresponde a una parábola.
Calculamos los parámetros a, b y c escribiendo un sistema de ecuaciones donde la ecuación de la parábola debe ser compatible con cada uno de los puntos dados:
A = (0, 1) → $1=c$
B = (1, 0) → $0=a+b+1$
C = (2, 3) → $3=4\mathrm{a}+2\mathrm{b}+1$
Multiplicando a la segunda de las ecuaciones por (-2) y sumándola a la tercera obtenemos:
$3=2\mathrm{a}-1 \rightarrow a=2$
Por último sustituimos y despejamos para obtener el parámetro b:
$0=2+b+1 \rightarrow b=-3$
Por tanto la ecuación cuadrática correspondiente a una parábola tiene la forma:
$y=2\mathrm{x}^2-3+1$

4. Las fuerzas eléctricas que se dan entre dos cargas son funciones proporcionales al valor de las dos cargas que intervienen e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que hay entre ellas. Si tenemos dos cargas positivas de valores 3 μC y 2 μC, separadas entre sí una distancia de 10 cm y la fuerza que aparece entre dichas cargas es de 5,4 N, calcular cuál será la constante de proporcionalidad.

Solución:

Si la fuerza es proporcional a las cargas entonces debe cumplir que sea igual al producto de las cargas por una constante:

$$F=cte\cdot q_1\cdot q_2$$

Si es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entonces :

$$F=\frac{cte}{r^2}$$

Para que ambas cosas se cumplan simultáneamente:

$$F=cte\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$$

Por tanto una vez que tenemos la función, sustituimos por los datos proporcionados en el problema para calcular dicha constante:

$$5{,}4\,N = cte \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0{,}1^2}$$

De donde obtenemos el valor de esta constante que no es otro que el valor de la constante k perteneciente a la ecuación de Coulomb y que en el vacío y en el aire vale:

cte = k = $9 \cdot 10^9$ $N \cdot m^2/C^2$

5. Calcular el dominio de las siguientes funciones y representar la función correspondiente al apartado c).

a) $y = \sqrt{x-2}$

b) $y = 5x + 7$

c) $y = \dfrac{2}{x-2}$

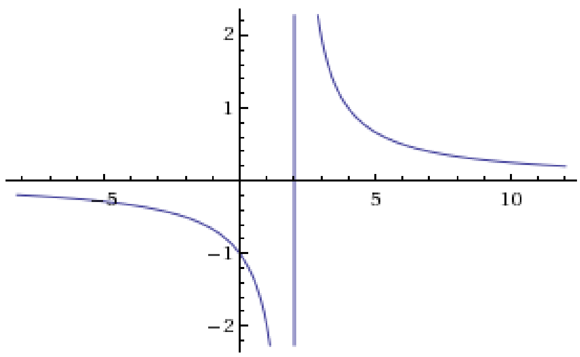
<u>Solución:</u>

El dominio de la función, es el conjunto de valores de x para los cuales la función existe, es decir, para los cuales está definida.

a) La función está definida por una raíz por lo que sólo pertenecen al dominio de la función los valores de x que permitan al radicando ser un número igual o mayor que 0, ya que en caso contrario el resultado no pertenece a los números reales.
Por tanto $x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$
El dominio de la función está definida por todos los números reales que abarcan el intervalo definido desde x = 2 hasta ∞.
D = [2, + ∞)

b) La función $y = 5x + 7$ es una función lineal, que está definida para todos los números reales, por lo tanto el dominio de la función va desde $-\infty$ hasta ∞ D = (- ∞ , ∞)

c) La función de este apartado corresponde a una función de proporcionalidad inversa, que no está definida para todos los números reales, ya que aquellos valores que anulen el denominador, harán que la función tome el valor ∞ . $y = \dfrac{2}{x-2}$ Los valores que hagan x – 2 = 0 , es decir x = 2 no definen la función.
La función está definida para todos los números reales excepto para x = 2.
D = R – {2} = (- ∞ ,2) U (2, ∞)
Esta función corresponde a una hipérbola, que son funciones que se ciñen a dos asíntotas, una vertical que coincide con el valor para el cual no está definido el dominio, es decir x = 2 y otra horizontal correspondiente a la recta y = 0, es decir el eje x. La función posee simetría de punto respecto al punto de corte de ambas asíntotas:



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En física hay muchas funciones proporcionales e inversamente proporcionales. Por ejemplo la 2º ley de Newton relaciona la masa, la aceleración y la fuerza. Si queremos representar la fuerza en función de la aceleración para una determinada masa, ¿qué tipo de función tendremos? ¿y si representamos la masa en función de la aceleración para una fuerza dada?

2. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=3x^2-2x+1$

b) $y=2x-7$ definida en el intervalo [1,6]

c) $y=\frac{2x}{x^2-3}$

3. Un pescador se desplaza con su barco por un río desde su pueblo hasta el pueblo vecino. La velocidad del barco es de 36 km/h, y el pueblo está a 12 km. Tarda 30 minutos en llegar al pueblo, ya que va contra corriente. ¿Cuál será la velocidad de la corriente? Determinar una función que permita calcular el tiempo que invierte en ir hasta el pueblo vecino y regresar.

SOLUCIONES

1. La fuerza en función de la aceleración para una masa determinada es una función lineal que queda representada a través de una recta, mientras que la aceleración y la masa para una fuerza dada, vienen dadas por una función inversamente proporcional, cuanto mayor sea una de las variables más pequeña será la otra, y se representa a través de una hipérbola.

2.

a) La función está de definida para todos los números reales: D = (- ∞ , ∞)

b) D = [1,6] ya que es el intervalo de definición que marca el enunciado

c) $D=(-\infty,-\sqrt{3})U(-\sqrt{3},\sqrt{3})U(\sqrt{3},+\infty)$

3. v = 12 km/h

$$t=\frac{432}{1296-x^2}$$

Tema 14

Funciones exponenciales y logarítmicas

CONCEPTOS BÁSICOS

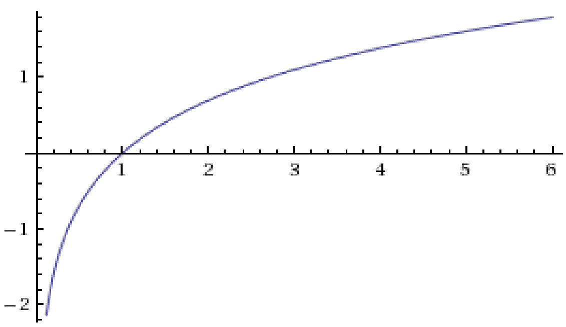
- Función logarítmica y exponencial.
- Logaritmos. Propiedades.
- Sistemas de logaritmos.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

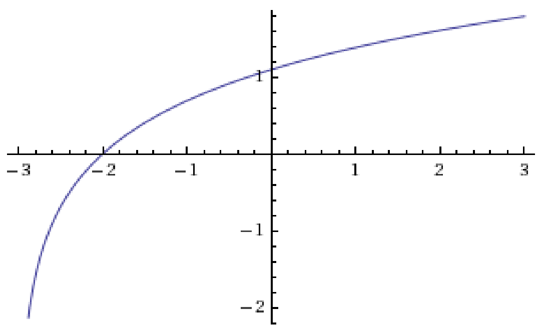
PROBLEMAS RESUELTOS

1. A partir de las gráficas de $f(x)=\log x$ y $g(x)=2^x$; determina las gráficas de las funciones:
a) $h(x)=\log(x+3)$ b) $i(x)=2^{x-1}+2$

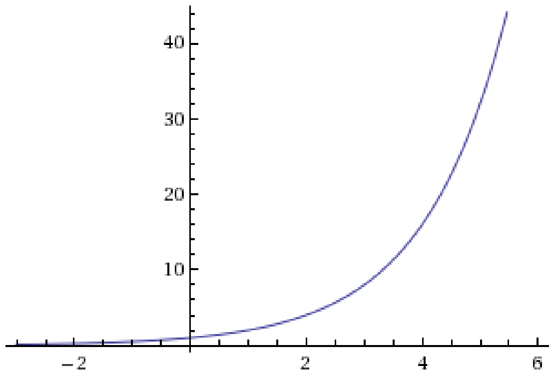
Solución:

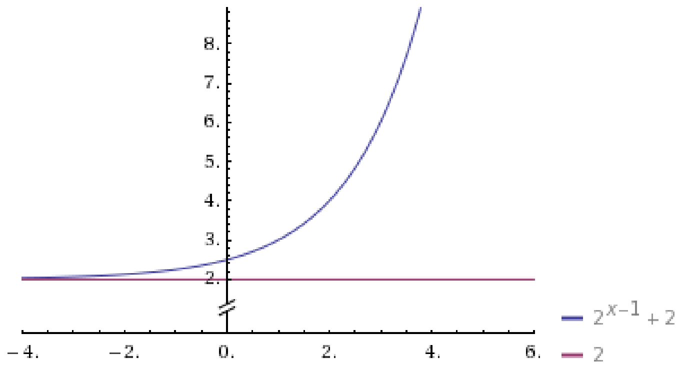
a) Primero buscamos el dominio de la función. Sabemos que el logaritmo está definido para valores mayores que cero del argumento, es decir: $x+3>0 \Rightarrow x>-3$, en forma de intervalo de definición sería $x \in (-3,+\infty)$. Sabemos también que en el punto $x=-3$ hay una asíntota vertical por la derecha hacia menos infinito.
También es conocido que la función logaritmo, de cualquier base, pasa por el punto $(1,0)$. Buscamos entonces el valor que hace que el argumento tenga valor 1: $x+3=1 \Rightarrow x=-2$, es decir, que la función de trabajo pasa por el punto $(-2,0)$.
Ya podemos representar la función. A la izquierda tenemos la gráfica de $f(x)=\log x$, y a la derecha nuestra función $h(x)=\log(x+3)$. Vemos que $h(x)=\log(x+3)$ es igual a la función logaritmo pero desplazada 3 unidades hacia la izquierda.





b) El dominio de la función va a ser toda la recta real al estar definida en todo $\mathbb{R}$ la función exponencial, la unidad y el argumento de la exponencial. Cuando la variable *x* tiende hacia menos infinito, la exponencial tiende hacia cero y entonces la función tiende hacia 2, es decir, tenemos en la recta $y=2$ una asíntota horizontal hacia menos infinito.
Un punto importante en las funciones exponenciales es el punto de corte con el eje y, que ocurre cuando $x=0$, en nuestro caso: $i(0)=2^{0-1}+2=2^{-1}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$, es decir, la función pasa por el punto $\left(0,\frac{5}{2}\right)$. Sabemos también que en la función exponencial, de cualquier base, al anular el argumento, la función vale 1. Buscamos entonces el valor que hace que el argumento de la función tenga valor 0: $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Al valer cero la exponencial, sumamos la constante 2 y entonces nuestra función pasa por el punto $(1,3)$.





A la izquierda vemos la función $g(x)=2^x$ y a la derecha está representada $i(x)=2^{x-1}+2$. Vemos que $i(x)=2^{x-1}+2$ es igual a la función exponencial de base 2 pero desplazada 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba (debido a tener que sumar la constante 2).

2. Responde a las siguientes preguntas:

a) Calcula el dominio y la función inversa de la función $l(x)=3+\log(x-2)$

b) Si $\log a=3$, $\log b=-5$ y $\log c=4$, calcula $\log(a^2 \cdot b \cdot \sqrt{c})$

c) Escribe mediante un sólo logaritmo $3\log 5+\frac{1}{2}\log 9-3\log 3-\log 25$

<u>Solución:</u>

a) Para calcular el dominio sabemos que la función logaritmo está definida para los valores del argumento que son mayores que cero, es decir, $x-2>0 \Rightarrow x>2$ (*3* es una constante numérica que no afecta al dominio). En forma de intervalo sería: $x \in (2,+\infty)$.
Para calcular la función inversa primero escribimos la ecuación sustituyendo el nombre de la función por la incógnita *y*: $y=3+\log(x-2)$.
Ahora cambiamos las variables, es decir, en vez de *y* ponemos *x*, y en vez de *x* ponemos *y*:

$$x=3+\log(y-2)$$

Por último operando despejamos *y* para tener la función inversa:

$$x=3+\log(y-2) \Leftrightarrow \log(y-2)=x-3$$

Eliminamos el logaritmo con la potencia de base 10 y exponente los dos miembros de la ecuación:

$$10^{\log(y-2)}=10^{x-3} \Leftrightarrow y-2=10^{x-3}$$

Ahora ya podemos despejar la función: $y=2+10^{x-3}$.

b) Lo que debemos hacer aquí es aplicar las propiedades de los logaritmos para eliminar las potencias y los productos y tener una expresión en función de los logaritmos de a, b y c:

$$\log(a^2\cdot b\cdot\sqrt{c})=\log a^2+\log b+\log c^{\frac{1}{2}}=2\cdot\log a+\log b+\frac{1}{2}\cdot\log c$$

Ahora que tenemos la expresión que buscábamos, sustituimos los valores de $\log a=3$, $\log b=-5$ y $\log c=4$ entonces:

$$2\cdot\log a+\log b+\frac{1}{2}\cdot\log c=2\cdot3-5+\frac{1}{2}\cdot4=6-5+2=3$$

c) Aplicamos otra vez las propiedades de los logaritmos para obtener un único término:

$$3\log 5+\frac{1}{2}\log 9-3\log 3-\log 25=\log 5^3+\log 9^{\frac{1}{2}}-(\log 3^3+\log 25)=\log(5^3\cdot9^{\frac{1}{2}})-\log(3^3\cdot25)=$$

$$=\log(5^3\cdot9^{\frac{1}{2}})-\log(3^3\cdot5^2)=\log\left(\frac{5^3\cdot\sqrt{9}}{3^3\cdot5^2}\right)=\log\left(\frac{5\cdot3}{3^3}\right)=\log\left(\frac{5}{3^2}\right)=\log\left(\frac{5}{9}\right)$$

3. Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $4^{x-1}+2^{x+2}=48$

Solución:

Intentamos que aparezca la misma base en el primer miembro. Aplicando las propiedades de las potencias a los dos sumandos tenemos:

$$4^{x-1}=\frac{4^x}{4} \text{ y } 4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2$$

Además $2^{x+2}=2^x\cdot2^2=4\cdot2^x$, llegamos así a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{4}\cdot(2^x)^2+4\cdot2^x=48$$

Multiplicamos por 4 para eliminar el denominador: $(2^x)^2+16\cdot2^x-192=0$, si utilizamos el cambio de variable $2^x=y$ se transforma en una ecuación de segundo grado:

$$y^2+16\text{y}-192=0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$y=\frac{-16\mp\sqrt{16^2-4\cdot(-192)}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{256+768}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{1024}}{2}=\frac{-16\pm32}{2}$$

Las soluciones de la ecuación de 2º grado son: $y_1=8\, e\, y_2=-24$. Deshacemos el cambio de variable y obtenemos $2^x=8$ y $2^x=-24$. Como la función exponencial siempre toma valores positivos, la única solución es $2^x=8=2^3\Rightarrow x=3$.

Sustituyendo comprobamos que la solución es correcta: $4^{3-1}+2^{3+2}=4^2+2^5=16+32=48$

4. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log(4\text{x}-1)-\log(3\text{x}-2)=\log 2$

Solución:

Aplicamos las propiedades de los logaritmos a la ecuación: $\log\left(\frac{4\text{x}-1}{3\text{x}-2}\right)=\log 2$.

Al tener los dos miembros de la igualdad la misma función logarítmica, los argumentos deben ser iguales, es decir: $\frac{4\text{x}-1}{3\text{x}-2}=2$. Resolvemos a continuación la ecuación racional que nos aparece:

$$4\text{x}-1=2(3\text{x}-2)\Leftrightarrow4\text{x}-1=6\text{x}-4\Leftrightarrow4\text{x}-6\text{x}=1-4\Leftrightarrow-2\text{x}=-3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Sustituimos el valor obtenido en la ecuación para comprobar que la solución es correcta:

$$\log\left(4\cdot\frac{3}{2}-1\right)-\log\left(3\cdot\frac{3}{2}-2\right)=\log(5)-\log\left(\frac{5}{2}\right)=\log\left(\frac{5}{\frac{5}{2}}\right)=\log 2$$

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Solución:

Para resolver el sistema operamos en la segunda ecuación y entonces tenemos que:

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 = \log 10 \Rightarrow \frac{x}{y} = 10 \Rightarrow x = 10\text{y}$$

Sustituimos en la primera ecuación y operamos:

$$(10\text{y})^2 - y^2 = 11 \Rightarrow 100\text{y}^2 - y^2 = 11 \Rightarrow 99\text{y}^2 = 11 \Rightarrow y^2 = \frac{11}{99} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{3}$$

Sólo nos vale la solución positiva ya que no existe el logaritmo de un número negativo, así que $y = \frac{1}{3}$ y de $x = 10\text{y}$ llegamos a que $x = \frac{10}{3}$. Por lo tanto la solución es $(x, y) = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Comprobamos la solución:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} - \frac{1}{9} = \frac{99}{9} = 11 \text{ ; } \log\left(\frac{10}{3}\right) - \log\left(\frac{1}{3}\right) = \log\left(\frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}\right) = \log 10 = 1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa la siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x-2)+1$

b) $g(x)=3^{x+2}-1$.

2. Responde a las siguientes preguntas:

a) Calcula el dominio y la función inversa de la función $h(x)=2-10^{(3x+1)}$

b) Si $\log a=-6$, $\log b=5$ y $\log c=2$, calcula $\log\left(\frac{\sqrt{a}\cdot b}{c^2}\right)$

c) Escribe mediante un sólo logaritmo $5\log x-\frac{1}{2}\log y+3\log z$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=39$

b) $9^{x-1}-2\cdot 3^x-27=0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(4x-1)-\log(3x-2)=\log 2$

b) $\log(x^2+1)-\log(3x-8)=1$

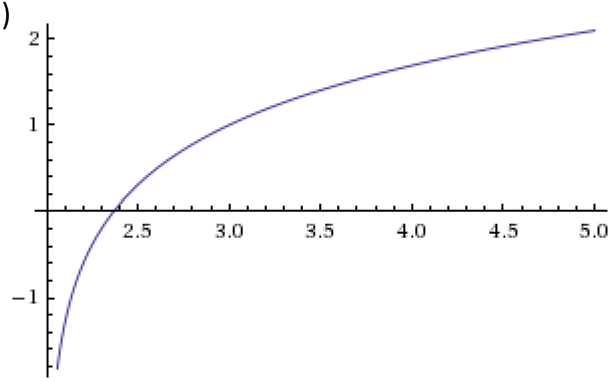
5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ \log x-2\log y=-5 \end{cases}$

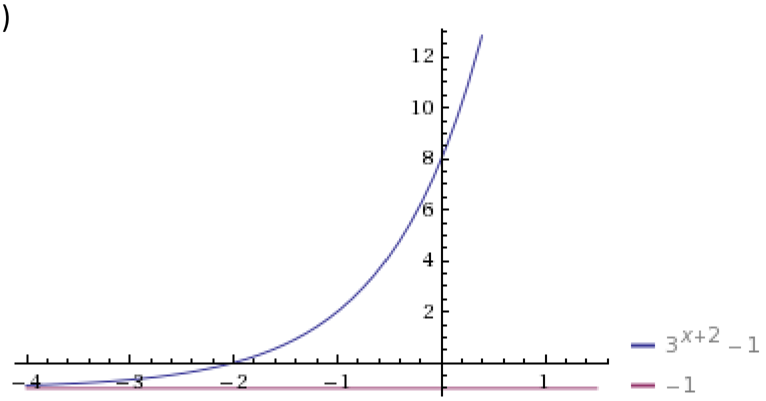
b) $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x-1}+5^{y+1}=9 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. a)



b)



2.

a) $Dom[h(x)]=\mathbb{R}$, $y=\log\sqrt[3]{2-x}-\dfrac{1}{3}$

b) -2

c) $\log\left(\dfrac{x^5\cdot z^3}{\sqrt{y}}\right)$

3.

a) $x=2$

b) $x=3$

4.

a) $x=\dfrac{3}{2}$

b) $x_1=3$, $x_2=27$

5.

a) $x=\dfrac{1}{10}$, $y=100$

b) $x=3$, $y=0$

Tema 15

Razones trigonométricas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- La circunferencia goniométrica. Ampliación de la definición a ángulos cualesquiera.
- Signos de las razones trigonométricas.
- Reducción al primer cuadrante.
- Teorema fundamental de la trigonometría y corolarios.
- Teorema de adición de ángulos.
- Transformación de sumas en productos.
- Ecuaciones goniométricas

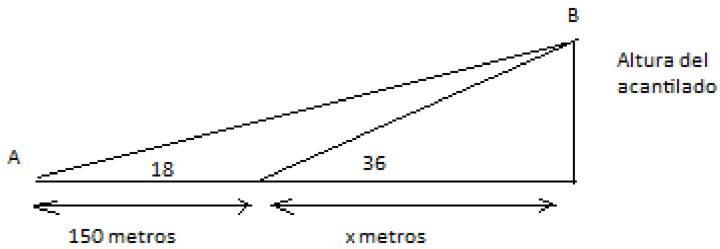
PROBLEMAS RESUELTOS

1. El ángulo de elevación del punto más alto de un acantilado, observado desde un barco es de 18^0. Al aproximarse 150 m en dirección a la costa, el nuevo ángulo de elevación es de $36^{0.}$ ¿Cuál es la altura del acantilado?

Solución:

El ángulo de elevación del punto B para un observador situado en el punto A es el ángulo formado por la recta que unen los puntos A y B y la horizontal.

El problema nos da por tanto dos ángulos de elevación distintos y la distancia que hay entre ellos, 150 m. La razón trigonométrica de la tangente nos relaciona la altura del acantilado con la distancia de la base de dicho acantilado hasta el punto desde donde se mide el ángulo de elevación,ya que forma un triángulo rectángulo. Si llamamos x a la distancia horizontal medida desde el punto donde el ángulo de elevación es de 36^0 entonces la distancia horizontal desde el otro punto será x+150.



$$\tan 18^{\text{o}} = \frac{h}{150+x} \qquad \tan 36^{\text{o}} = \frac{h}{x}$$

Despejando la altura h de las dos ecuaciones e igualándolos podemos obtener la variable x para posteriormente calcular la altura:

$$h=(150+x)\cdot\tan 18^{\circ} \qquad h=x\cdot\tan 36^{\circ}$$

$$x=\frac{150\cdot\tan 18^{\circ}\cdot\tan 36^{\circ}}{\tan 36^{\circ}-\tan 18^{\circ}} \qquad x=121{,}35\,m$$

La variable h queda:

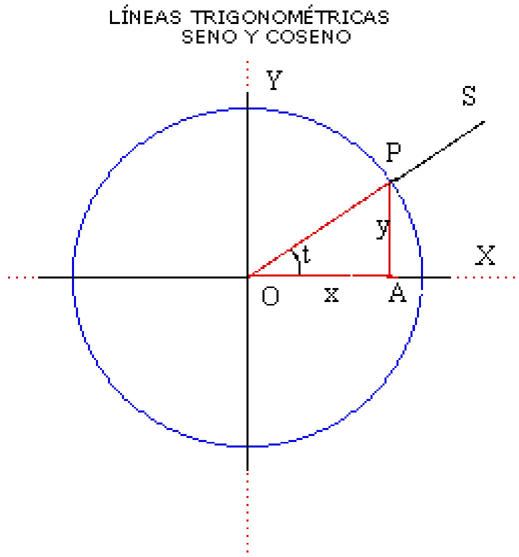
$$h=\frac{150\cdot\tan 18^{\circ}\cdot\tan 36^{\circ}}{\tan 36^{\circ}-\tan 18^{\circ}} \qquad h=88{,}17\,m$$

2. La circunferencia goniométrica tiene radio r = 1 y en ella el seno y el coseno de un ángulo coinciden, respectivamente con la ordenada y la abscisa de cualquier punto P que pertenezca a dicha circunferencia. Con esta información demostrar el teorema fundamental de la trigonometría $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras (hipotenusa al cuadrado igual a la suma de los catetos al cuadrado) en el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia:
La hipotenusa del triángulo es el radio de la circunferencia luego su valor es 1, mientras que los catetos corresponden a la ordenada y la abscisa del punto P, por lo tanto al $\operatorname{sen}\alpha$ y al $\cos\alpha$:

$$1^2=(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2\rightarrow 1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$$



El resultado puede ser aplicado en cualquiera de los cuadrantes, ya que aunque el signo del seno o del coseno sea negativo, al ser elevado al cuadrado se obtiene el mismo resultado.

3. Obtener el $\operatorname{sen}\alpha$ y el $\cos\alpha$ sabiendo que $\tan\alpha=1$ y que α pertenece al tercer cuadrante

Solución:

Se considera la definición de $\tan\alpha$ y el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$$

Como $\tan\alpha=1$ entonces $1=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

De la última ecuación obtenemos que $\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha$, y sustituyendo en el teorema fundamental de la trigonometría:

$$1=\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\rightarrow 1=2\operatorname{sen}^2\alpha\rightarrow\frac{1}{2}=\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Aunque tenemos dos posibilidades sólo es posible una, ya que el enunciado del problema nos dice que el ángulo α pertenece al tercer cuadrante: $\operatorname{sen}\alpha<0 \qquad \cos\alpha<0$

Por tanto el resultado final será:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\alpha$$

4. Calcular las razones trigonométricas del ángulo 1590^0 a partir de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

Solución:

Al ser un ángulo mayor que 360^0 lo primero que necesitamos es reducirlo al primer cuadrante. Por tanto dividimos entre 360^0 de manera que obtengamos un cociente y un resto. El cociente representa el número de vueltas completas que realiza el ángulo y el resto es un ángulo equivalente al inicial, pero reducido al primer giro.

$$1590^0 = 4\cdot 360^0 + 150^0$$

El ángulo de 1590^0 equivale a uno de 150^0 y las razones trigonométricas son las mismas.

El segundo paso es reducir el ángulo equivalente a uno del primer cuadrante y para ello nos valemos de la circunferencia goniométrica, donde se cumple que si α pertenece al primer cuadrante, β al segundo y la suma de α + β es 180^0 entonces:

$$\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta=-\cos\alpha \qquad \tan\beta=-\tan\alpha$$

Calculamos el ángulo α:

$$\alpha=180^{\circ}-\beta \text{ , siendo } \beta=150^{\circ}$$

$$\alpha=180^{\circ}-150^{\circ}=30^{\circ}$$

$$\operatorname{sen}150^{\circ}=\operatorname{sen}30^{\circ}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 150^{\circ}=-\cos 30^{\circ}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^{\circ}=-\tan 30^{\circ}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

5. Simplificar las siguientes expresiones teniendo en cuenta que α es un ángulo del primer cuadrante:

a) $$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{(\cos^2\alpha-1)\cdot\tan(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(2\pi-\alpha)}$$

b) $$\frac{\tan(180-\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(360-\alpha)}{\sec\alpha\cdot\cos(180-\alpha)}$$

Solución:

a) Reducimos todos los ángulos al primer cuadrante (a partir de la circunferencia goniométrica):

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{cotan}(2\pi-\alpha)=\frac{1}{\tan(2\pi-\alpha)}=\frac{1}{\tan\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{(\cos^2\alpha-1)\cdot\tan(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(2\pi-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{(\cos^2\alpha-1)\cdot(-\tan\alpha)\cdot\frac{1}{-\tan\alpha}}$$

Las tangentes se simplifican. Si ahora acudimos al teorema fundamental de la trigonometría $1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha$, podemos escribir $\cos^2\alpha-1$ en función del seno, de manera que todos los términos de la ecuación han quedado reducidos a una sola función, el seno

$$\cos^2\alpha-1=-\operatorname{sen}^2\alpha$$

Por lo tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{(\cos^2\alpha-1)\cdot\tan(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{cotg}(2\pi-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{(\cos^2\alpha-1)\cdot(-\tan\alpha)\cdot\frac{1}{-tg\alpha}}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{-\operatorname{sen}^2\alpha}=1$$

b) De nuevo reducimos al ángulo de primer cuadrante y si escribimos todos los términos posibles en función de una sola de las razones trigonométricas:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\operatorname{cotan}(360-\alpha)=-\operatorname{cotan}\alpha=-\frac{1}{\tan\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$\frac{-\tan\alpha\cdot\frac{-1}{\tan\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}\cdot(-\cos\alpha)}=-1$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2x=1+\operatorname{sen} x$

b) $\cos x=\operatorname{sen} 2x$

Solución:

Vamos a usar las ecuaciones que transforman las razones trigonométricas de los ángulos $(\alpha+\beta)$ y $(\alpha-\beta)$ en función de las razones trigonométricas de los ángulos α y β, pero teniendo en cuenta que en este caso los ángulos son iguales así que utilizaremos las ecuaciones de los ángulos dobles:

$$\operatorname{sen} 2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

a) Usamos el teorema fundamental de la trigonometría para que todos los términos queden en función de la misma razón trigonométrica: $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \rightarrow \cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$

$$1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1+\operatorname{sen} x$$
$$2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x=0 \rightarrow \operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x+1)=0$$

Por lo tanto uno de los dos factores debe ser cero:

- $\operatorname{sen} x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0+360^{\circ}\cdot k \\ x=180^{\circ}+360^{\circ}\cdot k \end{cases}$ con $k\in\mathbb{Z}$
- $2\operatorname{sen} x+1=0 \rightarrow \operatorname{sen} x=-\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x=210^{\circ}+360^{\circ}\cdot k \\ x=330^{\circ}+360^{\circ}\cdot k \end{cases}$ con $k\in\mathbb{Z}$

b) Sustituyendo la fórmula del seno del ángulo doble en la ecuación inical obtenemos:

$$\cos x = 2\,\mathrm{sen}\,x \cdot \cos x \;\rightarrow\; \cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x \cdot \cos x = 0 \;\rightarrow\; \cos x \cdot (1 - 2\,\mathrm{sen}\,x) = 0$$

Por lo tanto uno de los dos factores debe ser cero:

- $\cos x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 90^{\text{o}} + 360^{\text{o}}\text{k} \\ x = 270^{\text{o}} + 360^{\text{o}}\text{k} \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $1 - 2\,\mathrm{sen}\,x = 0 \;\rightarrow\; 1 = 2 \cdot \mathrm{sen}\,x \;\rightarrow\; \mathrm{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 30^{\text{o}} + 360^{\text{o}} \cdot k \\ x = 150^{\text{o}} + 360^{\text{o}} \cdot k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El ángulo de elevación del punto más alto de una montaña observado desde un punto situado en tierra es de 32º. Al aproximarnos 1000 m en dirección a la montaña, el nuevo ángulo de elevación es de 41º. ¿Cuál es la altura si los dos puntos de observación están al nivel del mar?
2. Calcular las razones trigonométricas del ángulo -1395º a partir de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.
3. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:
   a) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$
   b) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$
   c) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$
4. Demostrar las siguientes igualdades:
   a) $\sec x - \cos x = \tan x \cdot \operatorname{sen} x$
   b) $\operatorname{cotan} x \cdot \sec x = \operatorname{cosec} x$

SOLUCIONES

1. $h = \dfrac{1000 \cdot \tan 41^{\circ} \cdot \tan 32^{\circ}}{\tan 41^{\circ} - \tan 32^{\circ}} = 2222{,}39\, m$
2. $\operatorname{sen} 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $\cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $\tan 45^{\circ} = 1$
3.
   a) $\begin{cases} x = 30^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \\ x = 150^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$
   b) $\begin{cases} x = 60^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \\ x = 120^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$
   c) $\begin{cases} x = 30^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \\ x = 150^{\circ} + 180^{\circ}\mathrm{k} \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$
4. Las identidades se resuelven utilizando las fórmulas trigonométricas y simplificando de la forma adecuada.

Tema 16

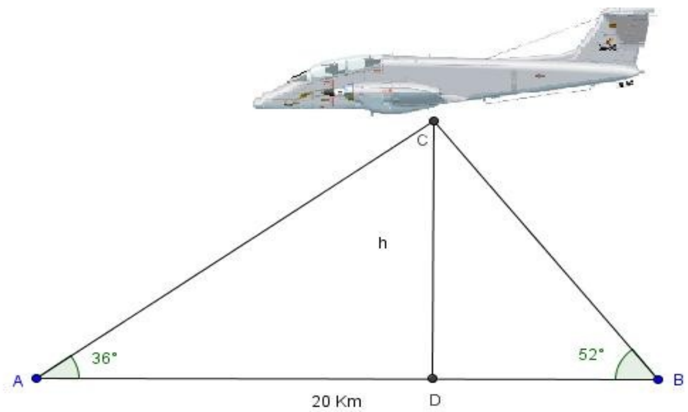
Trigonometría

CONCEPTOS BÁSICOS

- Resolución de triángulos rectángulos.
- Teoremas del seno y del coseno.
- Resolución de triángulos: caso general.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos radares, separados una distancia de 20 Km, observan un avión, situado en su mismo plano vertical, bajo ángulos de 36° y 52°, respectivamente. ¿A qué altura vuela el avión?



Solución:

Sea $h=\overline{CD}$ y $x=\overline{DB}$. Entonces, $\overline{AD}=20-x$.

En el triángulo ADC se cumple: $\tan(36^{\circ})=\dfrac{h}{20-x}$

En el triángulo DBC se cumple: $\tan(52^{\circ})=\dfrac{h}{x}$

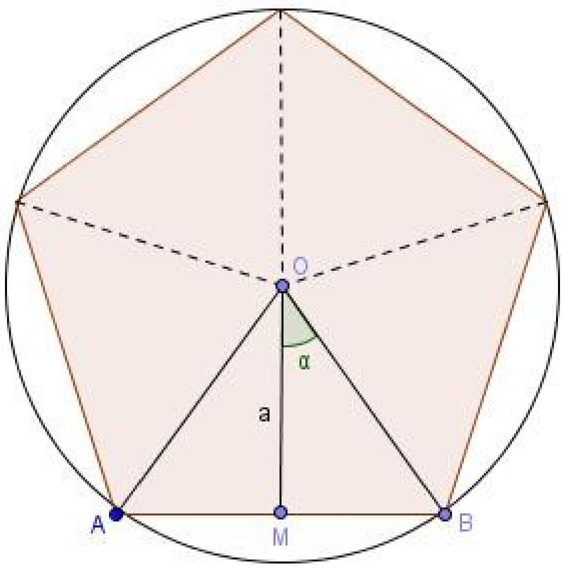
Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones hallaremos la altura del avión.

$$\left.\begin{array}{r}\tan(36^{\circ})=\dfrac{h}{20-x}\rightarrow h=(20-x)\tan(36^{\circ})\\ \tan(52^{\circ})=\dfrac{h}{x}\rightarrow h=x\tan(52^{\circ})\end{array}\right\}\rightarrow x=7{,}24\,km\ y\ h=9{,}27\ km$$

La altura con la que vuela el avión es 9,27 km.

2. Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 6 cm.

Solución:



Consideremos uno de los triángulos isósceles en que se descompone el pentágono. M es el punto medio de $\overline{AB}$ y el ángulo α es la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$ del polígono.

$$\widehat{AOB}=\frac{360º}{5}=72º\rightarrow\alpha=\frac{72º}{2}=36º$$

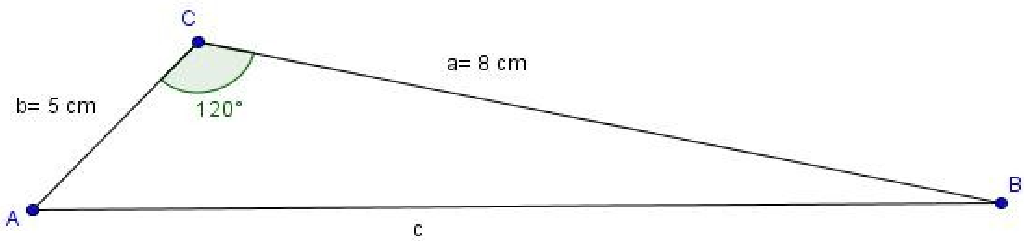
Si consideramos el triángulo OMB, podemos calcular la apotema del polígono, que coincide con la altura del triángulo : $\tan(36º)=\frac{3}{a}\rightarrow a=4{,}13\,cm$

Por lo tanto, el área del pentágono será 5 veces el área del triángulo OAB :

$$A=5\cdot\frac{base\cdot altura}{2}=5\cdot\frac{6\cdot 4{,}13}{2}=61{,}95\,cm^2$$

El área del pentágono es $61{,}95\,cm^2$.

3. Halla el lado *c* del triángulo de la figura.



Solución:

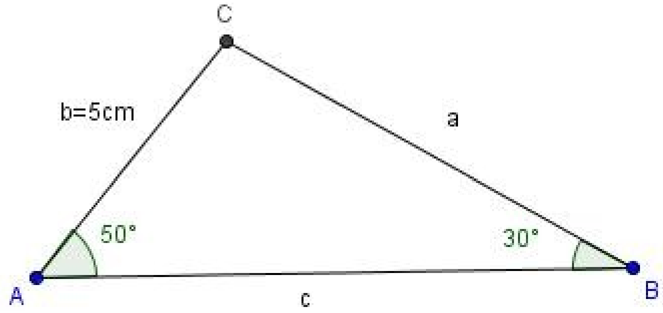
Puesto que los datos son *a*, *b* y $\widehat{ACB}$, aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cos(\gamma)$$

Sustituyendo los datos, obtenemos: $c=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos(120º)}=11{,}36\,m$

El lado *c* mide $11{,}36\,m$

4. Halla el lado *a* del triángulo de la figura.



Solución:

Puesto que los datos son α, β y *b* aplicaremos la primera igualdad del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}$$

Sustituimos los datos y despejamos *a*:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(50^o)}=\frac{5}{\operatorname{sen}(30^o)}\rightarrow a=5\cdot\frac{\operatorname{sen}(50^o)}{\operatorname{sen}(30^o)}=7{,}66\,m$$

El lado *a* mide $7{,}66\,m$

5. Los tres lados de un triángulo miden 3,4, y 5 cm , respectivamente. Calcula sus ángulos y su área.

Solución:

Es un triángulo rectángulo ya que se cumple el teorema de Pitágoras $(h^2=a^2+b^2\rightarrow 5^2=4^2+3^2)$, por tanto, tiene un ángulo recto $\alpha=90^o$ formados por los dos catetos. Para calcular los otros dos ángulos podemos aplicar las relaciones trigonométricas, teniendo en cuenta que la hipotenusa del triángulo mide 5 cm, y los catetos 3 y 4 cm, respectivamente.

$$\operatorname{sen}(\beta)=\frac{3}{5}=0{,}6\rightarrow\beta=\operatorname{arcsen}(0{,}6)=36{,}87^o$$

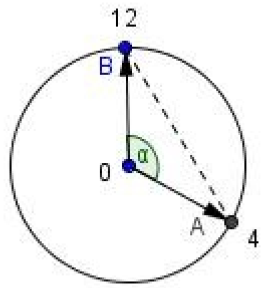
$$\operatorname{sen}(\gamma)=\frac{4}{5}=0{,}8\rightarrow\gamma=\operatorname{arcsen}(0{,}8)=53{,}13^o$$

El área del triángulo será : $A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6\,cm^2$

6. Las agujas de un reloj de pared miden 10 y 12 cm,respectivamente.

a) ¿Cuál es la distancia entre los extremos cuando el reloj marca las cuatro?

b) ¿Cuál es la superficie del triangulo que determinan las agujas a esta hora?



Solución:

a) El ángulo formado por las agujas es de: $\alpha=\frac{360^{o}}{3}=120^{o}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo, obtenemos:

$$\overline{AB}^2=\overline{OB}^2+\overline{OA}^2-2\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AO}\cos 120^{o}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{12^2+10^2-2\cdot 12\cdot 10\cdot\cos 120^{o}}=\sqrt{364}=19{,}08\,cm$$

b) La superficie del triángulo $\widehat{OAB}$ será:

$$S=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OA}\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{2}=\frac{12\cdot 10\cdot\operatorname{sen}(120^{o})}{2}=52\,cm^2$$

7. Tenemos que hacer un mapa de una zona geográfica. A , B , y C son las cimas de tres montañas de la misma altura , de forma que las posiciones de A y B se conocen , mientras que la posición de C se ha de determinar. Subimos a lo alto de la cima A y medimos el ángulo entre la línea AB y la línea AC que es de 68^{o} . Subimos a lo alto de la cima B y medimos el ángulo entre las líneas BC y BA , que resulta ser de 35^{o} . En el mapa que tenemos, la distancia del papel entre A y B es de 3 cm.

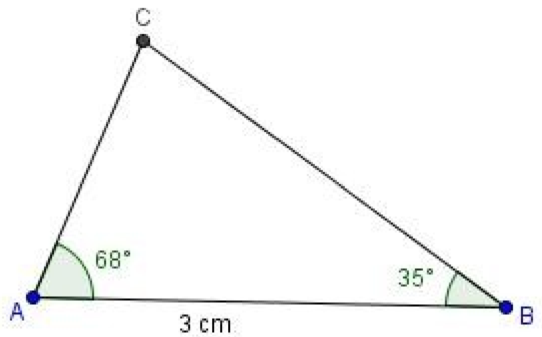
a) Haz un diagrama de la situación y determina el ángulo que forman en C las líneas $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.

b) ¿ Cuales serán sobre el mapa las distancias entre $\overline{CA}$ y entre $\overline{CB}$?

c) Si la escala del mapa es 1: 50000 cm = 1,5 Km, calcula la distancia real entre los puntos A, B y C.

Solución:

a) El diagrama de la situación sería como un triángulo el que se muestra en la figura:



El ángulo que forman en C las líneas $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ será $\alpha=180-68-35=77^{o}$, ya que la suma de todos los ángulos es 180º y conocemos dos de ellos.

b) Aplicaremos el teorema del seno:

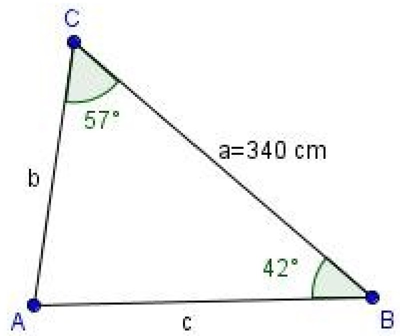
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\overline{AB}}=\frac{\operatorname{sen}(68^{o})}{\overline{BC}}\rightarrow\overline{BC}=\frac{\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}(68^{o})}{\operatorname{sen}(\alpha)}=2{,}85\,cm$$
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\overline{AB}}=\frac{\operatorname{sen}(35^{o})}{\overline{AC}}\rightarrow\overline{AC}=\frac{\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}(35^{o})}{\operatorname{sen}(\alpha)}=1{,}77\,cm$$

c) Para obtener las distancias reales multiplicamos la medida en el plano por 50 000 :

$$\overline{AB}=3\cdot 50\,000=150\,000\text{cm}=1{,}5\,Km\,;\,\overline{BC}\approx 1{,}42\,Km\,;\,\overline{AC}\approx 0{,}88\,Km$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un instante determinado, dos observadores , separados una distancia de 500 m , ven un águila en el mismo plano vertical que ellos, bajo ángulos de 35° y 52° .¿A qué altura vuela el águila?
2. Dos amigos parten de un mismo punto A y siguen direcciones que forman entre sí un ángulo de 35^{o}.Tras caminar 50 m y 75 m, respectivamente, se sitúan en dos puntos B y C. Calcula la distancia que les separa y los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ del triángulo ABC .
3. El entrenador de un equipo de fútbol indica a tres jugadores, A, B y C, que se sitúen en el campo formando un triángulo. A debe situarse a 20 m de B, B a 15 m de C y C a 23 m de A. ¿Bajo qué ángulo observa cada jugador a los otros dos?
4. Resuelve el triángulo ABC en el que $a=340\,cm$, $\widehat{B}=42^{\circ}$ y $\widehat{C}=57^{\circ}$.



5. De un paralelogramo sabemos que el lado más largo mide 20 cm, que su área es de $120\,cm^2$ y que el ángulo más pequeño mide 30° . Determina:
   a) El valor del otro ángulo del paralelogramo.
   b) La longitud del lado más pequeño.
   c) La medida de las diagonales.

SOLUCIONES

1. 226,30 m
2. $\widehat{B}=40,11^{o}; \widehat{C}=104,89^{o}; BC=44,51$
3. $\widehat{A}=40,08^{o}; \widehat{B}=80,79^{o}; \widehat{C}=59,13^{o}$
4. $\widehat{A}=81^{o}; b=230,34\,cm; c=288,70\,cm$
5. a) 150^{o}

   b) 12 cm

   c) d_1=30,98 cm y d_2= 11,33 cm.

Tema 17

Funciones goniométricas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Funciones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas derivadas.
- Funciones trigonométricas inversas.
- Tabla de valores: manejo.
- Representación de gráficas

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un alternador es una espira plana que gira a una velocidad angular ω en un campo magnético creado por imanes. Esto induce una fuerza electromotriz que hace circular la corriente eléctrica por la espira hacia un circuito exterior. Esta fuerza electromotriz (fem) es una función periódica, es decir, se repite con el tiempo. Si en un alternador la ecuación de la fem es $\epsilon=3{,}6\cdot\operatorname{sen}(100\pi t)$, calcular el periodo de esta función, el tiempo t para el cual la fem alcanzará su primer máximo y representar Є en función del tiempo.

<u>Solución:</u>

Si Є es una función periódica entonces se cumple que $\epsilon(t+T)=\epsilon(t)$

$$3{,}6\cdot\operatorname{sen}(100\pi(t+T))=3{,}6\cdot\operatorname{sen}(100\pi t)$$
$$3{,}6\cdot\operatorname{sen}(100\pi t+100\pi T)=3{,}6\cdot\operatorname{sen}(100\pi t)$$

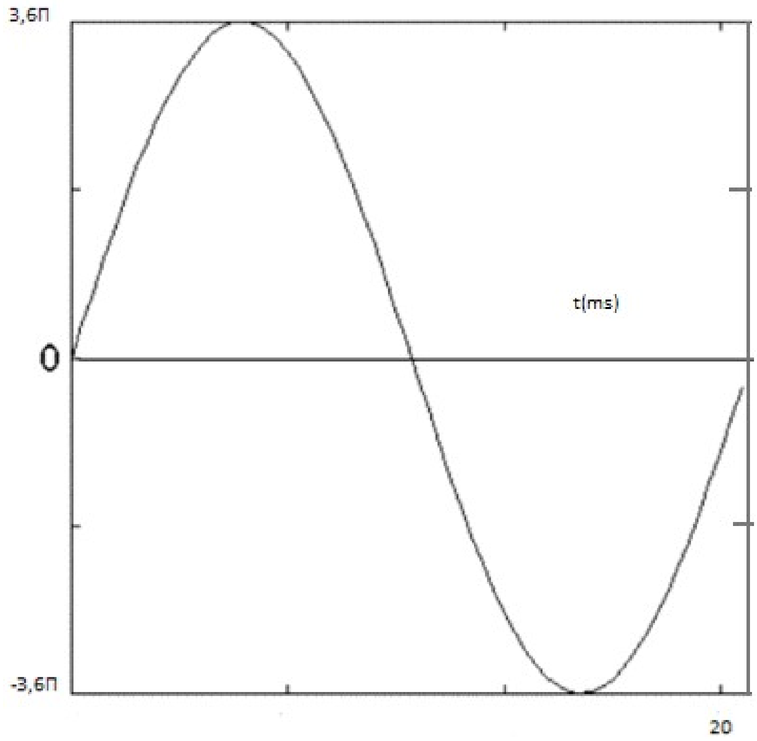
para que esta ecuación sea válida, debe cumplirse:

$$100\pi T=2\pi \;\rightarrow\; T=\frac{2\pi}{100\pi}=0{,}02\,s=20\,ms$$

La fem será máxima cuando la razón seno alcance su máximo valor, es decir cuando $\operatorname{sen}(100\pi t)=1$ por lo que $100\pi t=\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; t=5\cdot10-3\,s=5\,ms$

En ese instante $\epsilon max=3{,}6\pi\approx11{,}4\,V\,(voltios)$

Representamos en el eje de abscisas el tiempo en milisegundos y en el eje de ordenadas la fuerza electromotriz teniendo en cuenta que una oscilación completa corresponde a un tiempo de 20 ms, que es el período de esta función y que la amplitud máxima de esta función es el valor máximo de la fem que acaba de ser calculado:



2. Un cuerpo vibra con un movimiento armónico simple según la ecuación $x = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(2\text{t} + \frac{\pi}{2}\right)$. Sabiendo que la velocidad de vibración es la derivada de la posición con respecto al tiempo calcular dicha velocidad y el período T .

Solución:

El período T es el tiempo para el cual la función se repite:

$$x(t) = x(t+T) \quad 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(2\text{t} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(2(t+T) + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left(2\text{t} + 2\text{T} + \frac{\pi}{2}\right)$$

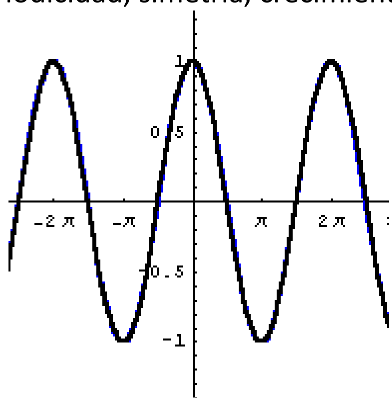
$$2\text{T} = 2\pi \rightarrow T = \pi$$

Calculamos la velocidad derivando la función posición respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la derivada de la función seno es la función coseno:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}02 \cdot 2 \cdot \cos\left(2\text{t} + \frac{\pi}{2}\right) \ , \ v = 0{,}04 \cdot \cos\left(2\text{t} + \frac{\pi}{2}\right)$$

El período de la velocidad sigue siendo el mismo que el de la posición

3. Observa la siguiente función $f(x) = \cos x$ y estudia su dominio, el recorrido, intersecciones con los ejes, su continuidad, periodicidad, simetría, crecimiento y decrecimiento.



Solución:

Dominio:
Son todos los valores de x para los cuales la expresión de la función tiene sentido, por tanto:

$$D(f)=R$$

Recorrido:
Son todos los valores que toma la función. La función coseno solo toma valores entre -1 y 1.

Cortes con los ejes:
La función corta al eje Y en el punto $(0,1)$ y al eje X en infinitos puntos; pero para el intervalo $[0,2\pi]$ sólo corta al eje X en los puntos:

$$\left(\frac{\pi}{2},0\right) \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2},0\right)$$

Periodicidad:
La función es periódica con período $T=2\pi$, ya que $f(x)=f(x+2\pi)$.

Simetría:
$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ → función par, simétrica respecto a el eje Y.

Continuidad:
La función coseno es continua en todo su dominio.

Monotonía:
Podemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función gráficamente o analíticamente a través de su derivada. Como la función es periódica nos ceñimos al intervalo $[0,2\pi]$.
Gráficamente puede ser observado que para este intervalo la función es estrictamente creciente en el intervalo $(\pi,2\pi)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(0,\pi)$.
Analíticamente tenemos que calcular la derivada de la función coseno:

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\operatorname{sen} x$$

En el intervalo $[0,2\pi]$ la función derivada se anula en los puntos $0,\pi\, y\, 2\pi$, por lo tanto usamos estos puntos para dividir el intervalo y estudiar el signo de la derivada en ellos.
En el intervalo $(0,\pi)$:

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=-\operatorname{sen} x<0 \rightarrow \textit{función decreciente en ese intervalo}$$

En el intervalo $(\pi,2\pi)$:

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=-\operatorname{sen} x>0 \rightarrow \textit{función creciente en ese intervalo}$$

4. Representar la función $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\cos x$

Calcular su dominio, periodicidad, simetrías, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de corte con los ejes y puntos singulares.

Solución:

La función existe para todo los números reales luego su dominio es R.
El período del $\cos x$ es 2π y el del $\cos 2x$ es π , por lo tanto estudiaremos la función solamente en el intervalo $[0,2\pi]$ ya que después se repite.
Estudiamos las simetrías:

$$f(-x)=\frac{1}{2}\cos(-2\mathrm{x})+\cos(-x)=\frac{1}{2}\cos 2\mathrm{x}+\cos x$$

$f(-x)=f(x)$ → es una función par simétrica respecto al eje Y.

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje Y → $x=0$ → $f(x)=\frac{1}{2}\cos 0+\cos 0=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

Con el eje X → $y=0$ → $0=\frac{1}{2}\cos 2\mathrm{x}+\cos x$

Para resolver esta ecuación trigonométrica se utilizan las fórmulas del ángulo doble:

$$\cos 2\mathrm{x}=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

Por tanto en nuestra ecuación trigonométrica resulta:

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x+2\cos x=0$$

Tenemos que poner todos los términos en función de la misma razón trigonométrica y para ello se hace uso de la ecuación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, de donde resulta que $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$

$$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+2\cos x=0$$

$$2\cos^2 x+2\cos x-1=0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$\cos x=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}\rightarrow\begin{cases}\cos x=0{,}366\\ \cos x=-1{,}366\end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones pero una de ellas es incompatible ya que es menor que -1 y es imposible que el coseno de un ángulo tenga ese valor.

$\cos x=0{,}366$ → con ayuda de la función inversa del coseno:

$$x_1=\arccos(0{,}366)=1{,}196\,rad\,;\; x_2=\arccos(0{,}366)=5{,}087\,rad$$

Luego los dos puntos de corte con el eje x en el intervalo $[0{,}2\pi]$ son:

$$(1{,}196,0);(5{,}087,0)$$

Con el eje Y :

$$\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

Calculamos los puntos singulares de la función igualando su derivada a 0:

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=-\operatorname{sen}2\mathrm{x}-\operatorname{sen}x$$

Usando la ecuación del ángulo doble del seno: $\operatorname{sen}2\mathrm{x}=2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$, resulta

$$\frac{df(x)}{dx}=-\operatorname{sen}2\mathrm{x}-\operatorname{sen}\mathrm{x} = -\ 2\ sen\ \mathrm{x}\cos\mathrm{x}\ -\ sen\,x=-\operatorname{sen}x(2\cos x+1)$$

Igualando a 0 tendremos dos ecuaciones:

$$\operatorname{sen}x=0\rightarrow x=0\,;\,x=\pi$$

$$2\cos x+1=0\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\,;\,x=\frac{4\pi}{3}$$

De donde se obtienen los puntos singulares:

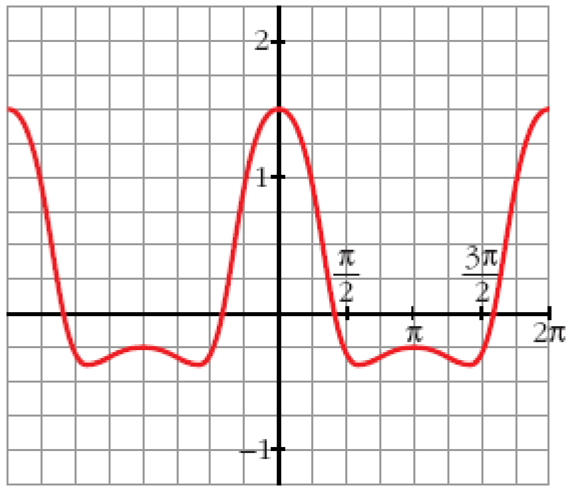
$$\left(0,\frac{3}{2}\right);\left(\frac{2\pi}{3},-\frac{3}{4}\right);\left(\pi,-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{3}{4}\right)$$

Ordenamos de menor a mayor en la ordenada x. Si elegimos un punto cualquiera entre el primer y el segundo punto singular y observamos el signo de la derivada en él, conoceremos el crecimiento o decrecimiento de la función. Por ejemplo para $x=\frac{\pi}{2}$, que se encuentra en ese intervalo el signo de la derivada será:

$$\frac{df(\pi/2)}{dx}=-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}<0$$

Luego la función en el intervalo $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ es decreciente y de modo análogo para los otros intervalos se comprueba que la función es creciente en el intervalo $\left(2\frac{\pi}{3},\pi\right)$, decreciente en $\left(\pi,4\frac{\pi}{3}\right)$ y creciente de nuevo en $\left(4\frac{\pi}{3},2\pi\right)$

La gráfica de la función resulta:



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una masa sujeta a un muelle sobre una superficie sin rozamiento oscila con un movimiento vibratorio según la ecuación: $x(t)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot t\right)$, donde el tiempo se mide en segundos y la posición en metros. Calcular:

a) El período de esta función.
b) La distancia máxima que separa a esta masa de su posición de equilibrio.
c) El tiempo mínimo necesario para que la masa pase por los puntos $x=0{,}5\,m$ y $x=-2\,m$

2. Hallar las simetrías y periodicidades de la función $y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ y obtener donde son continuas y donde derivables.

3. Representar la función $y=\operatorname{sen} x+\cos x$ y obtener sus puntos singulares.

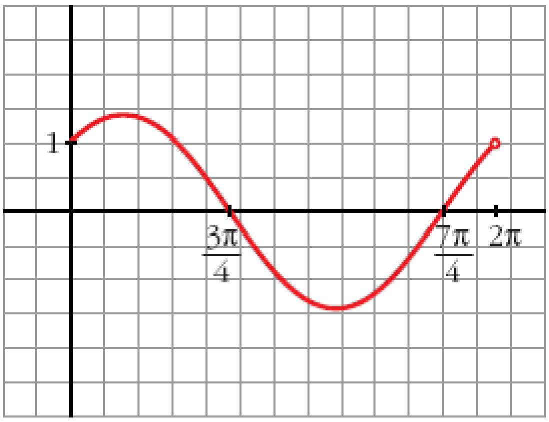
SOLUCIONES

1.

a) 3 s
b) 2 m
c) t = 0,63 s ; t = 1,5 s

2. Función impar, simétrica respecto al origen de coordenadas.
Periódica de período 2π y continua y derivable para todos los números reales.

3. Los puntos singulares son $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right);\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$



Tema 18

Límites y continuidad

CONCEPTOS BÁSICOS

- Definición de límite.
- Propiedades y operaciones con límites.
- Límites infinitos, límites en el infinito e indeterminaciones.
- Definición de continuidad. Propiedades.
- Discontinuidad. Tipos.
- Funciones continuas.
- Funciones compuestas.
- Asíntotas: tipología y cálculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Explica el significado de estas dos expresiones :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$, podemos conseguir que el valor de $\frac{x^2-1}{x}$ sea tan grande como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.
Con más precisión: dado un número k, tan grande como queramos, podemos encontrar un número h, tan grande como sea necesario, tal que si $x > h$, entonces: $\frac{x^2-1}{x} > k$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$, podemos conseguir que $\frac{2x-1}{x}$ sea tan próximo a 2 como queramos dando a x valores suficientemente grandes.
Con más precisión: dado $k > 0$, podemos encontrar un número tal que si $x > h$, entonces: $\frac{2x-1}{x} < k$

2. Comprobando los ordenes de infinito, asigna límite a estas expresiones:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{10x^2-5}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5-1}}{10x^2-5}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^3+1)}{10x^2-5}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{\log(x^3+1)}$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(2^x-\sqrt{x^5-1}\right)$

f) $\lim_{x\to\infty} \left(10x^2-\sqrt{x^5-1}\right)$

g) $\lim_{x\to\infty} (\log x^3-10x^2)$

Solución:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{10x^2-5}=+\infty$ porque la función exponencial es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5-1}}{10x^2-5}=+\infty$ porque el exponente del numerador es mayor que el del denominador.

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^3+1)}{10x^2-5}=0$ porque cualquier potencia es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{\log(x^3+1)}=+\infty$ porque toda función exponencial es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

e) $\lim_{x\to\infty} \left(2^x-\sqrt{x^5-1}\right)=+\infty$ porque una exponencial es un infinito de orden superior a una potencia.

f) $\lim_{x\to\infty} \left(10x^2-\sqrt{x^5-1}\right)=-\infty$ porque el minuendo es de grado 2 y el sustraendo es de grado $\dfrac{5}{2}$.

g) $\lim_{x\to\infty} \left(\log x^3-10x^2\right)=-\infty$ porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

3. Cuando $x\to+\infty$, $f(x)$ tiende a $+\infty$; $g(x)$ tiende a $-\infty$; $h(x)$ tiende a 0 y $j(x)$ tiende a 1. Identifica las indeterminaciones y asigna el límite al resto:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{j(x)}{h(x)}$

c) $\lim_{x\to\infty} [g(x)\cdot h(x)]$

d) $\lim_{x\to\infty} [f(x)-g(x)]$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{h(x)}{f(x)}$

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

g) $\lim_{x\to\infty} j(x)^{g(x)}$

h) $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$. Es una indeterminación. No podemos saber cual es el límite de ese cociente sin conocer las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{j(x)}{h(x)}=\dfrac{1}{0}=\pm\infty$. No podemos saber si el límite será $+\infty$ o $-\infty$, sin conocer $h(x)$, esto no es una indeterminación porque solo puede darse uno de esos dos resultados.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)\cdot h(x)]=-\infty\cdot 0$. Indeterminación.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=+\infty-(-\infty)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{+\infty}{0}=\infty$. Caso análogo al b)

g) $\lim\limits_{x\to\infty} j(x)^{g(x)}=1^{-\infty}$. Indeterminación.

h) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=+\infty^{-\infty}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

4. Estudia la continuidad de esta función según los valores de *a*: $f(x)=\begin{cases} 2x+a, & x\le 1 \\ x^2-ax+2, & x>1 \end{cases}$

Solución:

La función es continua en $x\neq 1$ cualquiera que sea *a*, porque está formada por dos funciones polinómicas. Estudiemos la continuidad en el punto de abscisa 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\cdot 1+a=2+a \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=1^2-a\cdot 1+2=3-a$$

Para que $f(x)$ tenga límite en $x=1$, ha de ser:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\rightarrow 2+a=3-a\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Por tanto:

- Si $a=\dfrac{1}{2}$, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{5}{2}$ y este límite coincide con $f(1)=\dfrac{5}{2}$, la función es continua.
- Si $a\neq\dfrac{1}{2}$, no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. La función es discontinua, y en $x=1$ tendrá un salto finito.

5. Estudia la continuidad de la función siguiente: $y=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$

Solución:

Hallamos las raíces del denominador. Son $x=-1$ y $x=2$. En estos puntos no está definida la función. Estudiaremos el límite de la función en esos puntos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}=\pm\infty$$

Si $x\to -1^-$, $y\to -\infty$ y si $x\to -1^+$, $y\to +\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{5}{3}$$

La función es discontinua en $x=-1$ y en $x=2$ porque no esta definida en esos puntos.
En $x=-1$ tiene una discontinuidad infinita y, por tanto, una asíntota vertical.
En $x=2$ tiene una discontinuidad evitable porque existe límite finito en ese punto.

6. Calcula *a* y *b* para que sea continua la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax\,, x\le -1 \\ b\,, -1<x<3 \\ 2x+4, x\ge 3\end{cases}$$

Solución

La función $f(x)$ es continua en $x\neq -1$ y en $x\neq -3$ cualesquiera que sean a y b, por estar definida por funciones continuas. Estudiemos los límites en $x=-1$ y en $x=3$.

- Cálculo del $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$:

  $$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x^2+ax)=1-a \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} b=b$$

  Para que sea continua en $x=-1$, debe de ser $1-a=b$.

- Cálculo del $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$:

  $$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} b=b \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x+4)=10$$

  Para que sea continua en $x=3$, debe ser $b=10$.

Llevando el valor $b=10$ a la igualdad anterior: $1-a=10\to a=-9$.
Si $a=-9$ y $b=10$, $f(x)$ es continua en $x=-1$ y en $x=3$ porque:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=10 \text{ y } \lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=10$$

7. Determina las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Solución

- Asíntotas verticales : hay una en $x=2$, ya que $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]=\infty$, ahora estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

  $$f(1{,}99)\approx 78806\to \lim_{x\to 2^-}[f(x)]=+\infty$$
  $$f(2{,}01)\approx 81206\to \lim_{x\to 2^+}[f(x)]=+\infty$$

- Asíntotas oblicuas: determinamos la ecuación de la recta $y=mx+n$ y para ello calculamos el valor de la pendiente y del origen en ordenadas aplicando límites

  $$m=\lim_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}=1$$
  $$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-2)^2}{(x-2)^2}=4$$

  Existe una asíntota oblicua en $y=x+4$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(0{,}5^x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2+3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x}{x+1}-\frac{3x}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+2x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1{,}2^x-\frac{3x^2}{x+1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

k) $\lim\limits_{x\to2}\left[\frac{3}{x^2-5x+5}-\frac{4}{x-2}\right]$

l) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x+1}$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x)^{1-3x}$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

2. Calcula el valer de k para que cada una de las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & si\ x\neq1\\ k, & si\ x=1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & si\ x\neq1\\ k, & si\ x=1\end{cases}$

3. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & si\ x\leq2\\ a-x^2, & si\ x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & si\ x\leq0\\ x+2a, & si\ x>0\end{cases}$

SOLUCIONES

1.

a) $+\infty$
b) 0
c) $1/e$
d) e^{-6}
e) No existe el límite.
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty$

f) $+\infty$
g) $-\infty$
h) 0
i) $+\infty$
j) $+\infty$
k) No existe el límite.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$
l) 1/2

m) No existe el límite.
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
n) 1
o) 3/2
p) $+\infty$
q) 0
r) $e^{\frac{-1}{2}}$

2.

a) $k=4$
b) $k=1/2$

3.

a) Continua si $a=-8$; discontinua si $a\neq -8$
b) Continua si $a=1/2$; discontinua si $a\neq 1/2$

Tema 19

Derivadas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Definición de derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica de la derivada.
- Derivabilidad y continuidad.
- Derivadas de las funciones elementales.
- Regla de la cadena.
- Derivación logarítmica.
- Cálculo de derivadas.
- Derivadas sucesivas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halla la función derivada de $f(x)=\sqrt{x+3}$ utilizando la definición y calcula su valor en el punto de abscisa $x=2$.

Solución:

La definición de la derivada de una función en un punto x es: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

La función en $x+h$ será $f(x+h)=\sqrt{x+h+3}$, así que sustituyendo en la definición:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}=\frac{0}{0}$$

El resultado es una indeterminación, para poder resolverla multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}$, para poder simplificar la fracción:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h+3})^2-(\sqrt{x+3})^2}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Una vez obtenida la función derivada en el punto x, sustituyendo el valor de x por 2 obtendremos el valor de la derivada en ese punto :

$$f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

2. Dada la parábola $y=x^2-2\mathrm{x}-2$, se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas $x=1$ y $x=3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

Solución:

Hallamos los extremos de la cuerda: $\begin{cases} x_1=1 \rightarrow y_1=-3\,;\, A(1,-3) \\ x_2=3 \rightarrow y_2=1\,;\, B(3,1) \end{cases}$ y la pendiente de la recta que une ambos puntos vendrá dada por la expresión: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4}{2}=2$.

La pendiente de la tangente $f'(x_0)$ debe ser igual a la de la cuerda:
$f'(x_0)=2x_0-2=2 \rightarrow x_0=2$.

Como $f(2)=-2$ entonces la tangente en el punto $(2,-2)$ es paralela a la cuerda que une los puntos A y B.

Su ecuación en forma punto-pendiente, es $y+2=2(x-2) \rightarrow y=2\mathrm{x}-6$

3. Halla el valor que ha de tener m para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 \; si\; x\leq 1 \\ \dfrac{2}{mx} \; si\; x>1 \end{cases}$$

Solución:

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, ha de ser continua en $x=1$.

- Si $f(x)$ es continua en $x=1$, $\lim\limits_{x\rightarrow 1} f(x)=f(1)=3-m$

  $$\lim_{x\rightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1^-}(3-m\,x^2)=3-m \qquad \lim_{x\rightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1^+}\left(\frac{2}{mx}\right)=\frac{2}{m}$$

  Por lo que los límites laterales deben ser iguales: $3-m=\dfrac{2}{m} \rightarrow m^2-3\mathrm{m}+2=0$

  Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos los valores de m para los que se cumple la igualdad: $m=2$ y $m=1$.

  Así que $f(x)$ es continua en $x=1$ si $m=1$ ó $m=2$.

- $f(x)$ será derivable en $x=1$ si $f'(1^-)=f'(1^+)$:

  Para $m=1$ tenemos : $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 \; si\; x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} \; si\; x>1 \end{cases}$ y $f'(x)=\begin{cases} -2\mathrm{x} \; si\; x\leq 1 \rightarrow f'(1^-)=-2 \\ \dfrac{-2}{x^2} \; si\; x>1 \rightarrow f'(1^+)=-2 \end{cases}$

  por lo que $f(x)$ es derivable en $x=1$ si $m=1$.

  Para $m=2$ tenemos: $f(x)=\begin{cases} 3-2\mathrm{x}^2 \; si\; x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} \; si\; x>1 \end{cases}$ y $f'(x)=\begin{cases} -4\mathrm{x} \; si\; x\leq 1 \rightarrow f'(1^-)=-4 \\ \dfrac{-1}{x^2} \; si\; x>1 \rightarrow f'(1^+)=-1 \end{cases}$

  por lo que f no es derivable en $x=1$ si $m=2$.

4. Calcula la derivada de :

a) $f(x)=x^5$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{7\mathrm{x}^2}$

e) $f(x)=x^3-\sqrt{2\mathrm{x}}+\dfrac{3}{x}$

f) $f(x)=3\mathrm{x}^4-5\mathrm{x}^2+7\mathrm{x}+1$

g) $f(x)=\mathrm{sen}(x^2+5\mathrm{x}-1)$

h) $f(x)=\sqrt{\mathrm{sen}\,x}$

i) $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{x^2+5x-1}$

j) $f(x)=5e^{x^2+3x}$

k) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$

l) $f(x)=\arctan(\operatorname{sen} x)$

Solución:

a) $f'(x)=5x^4$

b) $f'(x)=D(x^{-4})=\dfrac{-4}{x^5}$

c) $f'(x)=D\left(x^{\frac{3}{7}}\right)=\dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

d) $f'(x)=D\left(\sqrt[3]{7}x^{\frac{2}{3}}\right)=\sqrt[3]{7}\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\sqrt[3]{7}\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt[3]{7}}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'(x)=3x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}=3x^2-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{3}{x^2}$

f) $f'(x)=12x^3-10x+7x$

g) $f'(x)=(2x+5)\cos(x^2+5x-1)$

h) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

i) $f'(x)=\cos\sqrt{x^2+5x-1}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+5x-1}}(2x+5)$

j) $f'(x)=5D[e^{x^2+3x}]=5e^{x^2+3x}\cdot D(x^2+3x)=5e^{x^2+3x}(2x+3)$

k) $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}}\cdot D(\sqrt{x})=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$

l) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\cdot D(\operatorname{sen} x)=\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a) $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{(1-x)^2}}$

b) $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$

c) $f(x)=x^{x^3}$

Solución:

a) Antes de derivar, aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{(1-x^2)}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}[\ln(\operatorname{sen} x)+\ln(\cos x)-2\ln(1-x)]$$

Ahora derivamos la expresión resultante :

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{2}{1-x}\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}+\frac{2}{1-x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}+\frac{2}{1-x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\operatorname{cotan} 2x+\frac{1}{1-x}\right)$$

b) Antes de derivar, aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\ln f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Derivamos la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

Despejamos $f'(x)$

$$f'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] f(x)$$

Sustituimos $f(x)$ por su valor:

$$f'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

c) Antes de derivar, aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\ln f(x) = \ln x^{x^3} = x^3 \ln x$$

Derivamos la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\mathrm{x}^2 \cdot \ln x + x^3\frac{1}{x} = 3\mathrm{x}^2 \cdot \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

Despejamos $f'(x)$

$$f'(x) = x^2(3\ln x + 1)\, f(x)$$

Sustituimos $f(x)$ por su valor:

$$f'(x) = x^{x^3}\, x^2(3\ln x + 1)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encuentra el valor de las derivadas siguientes en el punto que se indica aplicando la definición de derivada:

a) $f(x)=x^2-5x+6$ en $x=-2$

b) $f(x)=\ln x$ en $x=2$

2. Hallar le ecuación de la recta tangente a : $y=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$ en $x_0=3$.

3. Determina el valor de k que hace que la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.

4. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x)$ es derivable para todos los números reales?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax \; si \; x\leq 0 \\ -x^2+b \; si \; x>0 \end{cases}$$

5. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^2+3x-5)^3$

b) $f(x)=[\ln(2x+3)]^5$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

d) $f(x)=\sqrt[4]{3x^2}$

e) $f(x)=3^{5x}$

f) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

g) $f(x)=\arctan\dfrac{\ln x}{x}$

h) $f(x)=3^{x\cdot \operatorname{sen} x}$

i) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$

j) $f(x)=e^{\sqrt{x^2+5}}$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

l) $f(x)=\operatorname{sen}^2(\ln x^2)$

m) $f(x)=\operatorname{sen} x\cdot\cos x$

n) $f(x)=(\ln x)^x$

o) $f(x)=\ln(\ln x)$

p) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$

SOLUCIONES

1.

a) -9

b) $\frac{1}{2}$

2. $y=\frac{1}{2}+\frac{7}{12}(x-3)$

3. $k=1$

4. $a=0$ y $b=-8$

5.

a) $f'(x)=3(x^2+3\mathrm{x}-5)^2(2\mathrm{x}+3)$

b) $f'(x)=5[\ln(2\mathrm{x}+3)]^4\cdot\frac{2}{2\mathrm{x}+3}$

c) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt[4]{27x^2}}$

e) $f'(x)=3^{5\mathrm{x}}\cdot(\ln 3)\cdot 5$

f) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

g) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2+(\ln x)^2}$

h) $f'(x)=3^{x\operatorname{sen}x}\ln 3(\operatorname{sen}x+x\cos x)$

i) $f'(x)=\frac{7}{(x-4)^2}$

j) $f'(x)=\frac{(2\mathrm{x}+5)\cdot e^{\sqrt{x^2+5}}}{2\sqrt{x^2+5}}$

k) $f'(x)=-\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{(1-\tan x)\cdot(1+\tan x)^3}}$

l) $f'(x)=\frac{4}{x}\cdot\operatorname{sen}(\ln x^2)\cdot\cos(\ln x^2)$

m) $f'(x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

n) $f'(x)=(\ln x)^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln(x)}\right]$

o) $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$

p) $f'(x)=\frac{3\mathrm{x}+2}{4\sqrt[4]{x^2(x+1)^3}}$

Tema 20

Análisis de funciones: representación gráfica

CONCEPTOS BÁSICOS

- Dominio y rango.
- Monotonía. Extremos absolutos y relativos.
- Concavidad, convexidad, puntos de inflexión. Asíntotas.
- Gráficas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La función $y=x^3+mx^2+nx+p$ pasa por $(0,5)$, tiene un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=3$. Halla m, n y p.

<u>Solución:</u>

La función pasa por el punto *(0, 5)*, por lo tanto: $5=0^3+m\cdot 0^2+n\cdot 0+p\Rightarrow p=5$.
Derivamos la función para poder calcular los extremos: $y'=3x^2+2mx+n$. Sabemos que en un extremos la función derivada se anula, es decir, que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$.
Sustituyendo el punto *(-1, 0)* llegamos a:

$$0=3(-1)^2+2m(-1)+n\Rightarrow -2m+n=-3\,.$$

Sustituyendo el punto *(3, 0)* llegamos a:

$$0=3(3)^2+2m(3)+n\Rightarrow 6m+n=-27\,.$$

Tenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -2m+n=-3 \\ 6m+n=-27 \end{cases}$

Vamos a resolverlo por reducción.
Restando la segunda ecuación menos la primera:

$$6m-(-2m)+n-n=-27-(-3)\Rightarrow 8m=-24$$

de aquí llegamos a $m=\dfrac{-24}{8}\Rightarrow m=-3$.

Despejamos ahora n de la primera ecuación: $n=2m-3$ y sustituyendo el valor obtenido de m calculamos n:

$$n=2(-3)-3\Rightarrow n=-9\,.$$

Sustituyendo en el sistema podemos comprobar que los valores de m y n son correctos.
Hemos calculado los valores de los parámetros m, n y p. La función es: $y=x^3-3x^2-9x+5$.

2. Calcula el radio de la base y la altura de un cono de generatriz 3 m y de volumen máximo.

Solución:

Sabemos que el volumen de un cono es $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ donde r es el radio de la base y h la altura. No podemos trabajar con esta ecuación porque tiene dos incógnitas, para tener sólo una incógnita en la ecuación utilizamos la relación entre la generatriz g, el radio r y la altura h, que nos la da el teorema de Pitágoras: $g^2=r^2+h^2$.

Despejamos r^2 : $r^2=g^2-h^2$, sustituimos ahora el valor conocido de $g: r^2=g^2-h^2 \Rightarrow r^2=9-h^2$ y por últimos se sustituye este valor en la ecuación del volumen del cono:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(9-h^2)h \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(9\text{h}-h^3)$$

Para calcular el máximo, derivamos la función volumen que hemos calculado en función de la variable $h: V'=\frac{1}{3}\pi(9-3\text{h}^2)=\pi(3-h^2)$, igualando la derivada a cero (condición de extremo):

$$V'=0 \Rightarrow \pi(3-h^2)=0 \Rightarrow h^2=3 \Rightarrow h=\pm\sqrt{3}$$

Como la altura es una distancia debe ser positiva, y así $h=\sqrt{3}\ m$. Para comprobar que es un máximo, vemos que para valores de h menores que $\sqrt{3}$ (por ejemplo 1) la derivada es positiva y entonces la función crece, y para valores mayores que $\sqrt{3}$ (por ejemplo 2) la derivada es negativa y la función decrece; por lo tanto en $h=\sqrt{3}\ m$ hay un máximo relativo de la función volumen.

Conocidos la generatriz y la altura nos falta calcular el radio de la base del cono utilizando la ecuación $r^2=9-h^2 \Rightarrow r=\sqrt{9-h^2}$, sustituyendo el valor de h calculado:

$$r=\sqrt{9-h^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}\ m$$

La altura del cono es $\sqrt{3}\ \ m$ y el radio de la base $\sqrt{6}\ \ m$.

3. Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

- Dominio. Continuidad. Puntos de corte con los ejes.

  Los puntos que anulan el denominador no pertenecen al dominio: $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$, entonces el dominio es $Dom[f(x)]=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

  Hay discontinuidad en los puntos $x=\pm 1$ que, de hecho, serán asíntotas verticales.

  Corte con el eje Y ($x=0$): $f(0)=\frac{0^3}{0^2-1}=0$, punto $(0,0)$.

  Corte con el eje X ($y=0$): $0=\frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow x=0$, punto $(0,0)$.

- Simetrías. Periodicidad.

  Función par ($f(x)=f(-x)$):

  $$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} \Rightarrow -\frac{x^3}{x^2-1} \neq f(x)\text{ , no es par.}$$

  Función impar ($f(x)=-f(-x)$):

  $$-f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2-1}=f(x)$$

  Entonces la función es impar o simétrica respecto al origen de coordenadas. Esto significa que no es necesario hacer todos los cálculos, podemos hacerlos para la parte positiva del eje X, y para la parte negativa sería la simétrica respecto al origen de coordenadas. A pesar de esto realizaremos todas las operaciones señalando las que conocemos por ser función impar.

  Una función es periódica si cumple $f(x)=f(x+T)$. En este caso no es periódica.

- Asíntotas.

Horizontal $\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a\right)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$ (ya lo sabemos por ser función impar); no tiene asíntota horizontal.

Vertical $\left(\lim_{x\to a} f(x)=\infty\right)$: $\lim_{x\to+1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim_{x\to+1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$; $\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$ (los dos últimos límites los sabemos por ser función impar); entonces las rectas $x=1$ y $x=-1$ son asíntotas verticales.

Oblicuas $\left(y=mx+n \ con \ m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \ y \ n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]\right)$:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$$

Entonces la recta *y = x* es una asíntota oblicua.

- Extremos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivamos la función: $f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

Los posibles extremos se calculan con $f'(x)=0$; $x^2(x^2-3)=0\Rightarrow\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$

Para estudiar si son máximos o mínimos podemos utilizar el criterio de la derivada segunda o estudiando los intervalos, lo haremos de la segunda forma, entonces ahora calcularemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, dividimos el eje en intervalos teniendo en cuenta los puntos de discontinuidad, una vez tenemos los intervalos miramos el signo de la función derivada, si es positivo la función crece y si es negativo la función decrece. Lo escribiremos en forma de tabla para que sea mas sencillo de interpretar (los tres primeros intervalos podríamos no estudiarlos, conocemos su comportamiento al ser una función impar):

Intervalo	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+
$f(x)$	crece	decrece	decrece	decrece	decrece	crece

Podemos entonces estudiar los extremos, vemos que antes de $x=\sqrt{3}$ la función decrece y después crece, esto significa que en $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo. Al revés, en $x=-\sqrt{3}$ pasa de crecer a decrecer por lo que hay un máximo, aunque ya lo sabemos por se una función impar. Para finalizar, $x=0$ no es extremo ya que antes decrece y después también.

Debemos calcular la coordenada *y* de los extremos, para ello sustituimos los puntos en la función:

$f(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y el mínimo está en $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ y el máximo: $\left(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (lo sabemos por ser impar)

- Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad y convexidad.

Calculamos la derivada segunda: $f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

Calculamos los puntos de inflexión: $f''(x)=0$; $2x(x^2+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2+3=0 \text{ sin } solución\ en\ \mathbb{R} \end{cases}$

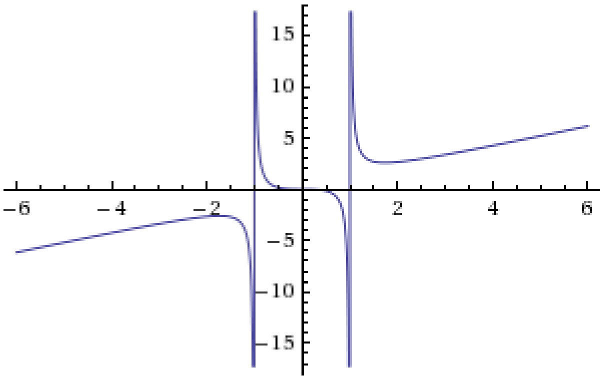
Para calcular los intervalos de concavidad y convexidad, dividimos el eje en intervalos teniendo en cuenta los puntos de discontinuidad, una vez tenemos los intervalos miramos el signo de la función derivada segunda, si es positivo la función es cóncava(U) y si es negativo la función es convexa (∩). Lo escribiremos en forma de tabla, igual que antes podríamos no calcular los dos primeros intervalos:

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa (∩)	cóncava (U)	convexa (∩)	cóncava (U)

En el punto $x=0$ la función pasa de ser cóncava a ser convexa, por lo tanto *(0, 0)* es un punto de inflexión.

- Representación gráfica.

Ya podemos unir toda la información de la función para dibujarla. Lo primero es marcar los puntos conocidos, después se dibujan las asíntotas (si las hay) y para finalizar se traza la gráfica teniendo en cuenta la información de que disponemos.



4. Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

Solución:

- Dominio. Continuidad. Puntos de corte con los ejes.

La función logaritmo sólo está definida para los valores positivos de *x*. Los puntos donde se anula el denominador no pertenecen al dominio: $\ln x=0 \Rightarrow x=1$, entonces el dominio de la función es: $Dom[f(x)]=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Hay una discontinuidad en el punto $x=+1$ que será una asíntota vertical.

Corte con el eje Y (*x = 0*): no existe porque *f(0)* no está definida.

Corte con el eje X (*y = 0*): $0=\dfrac{0}{\ln 0} \Rightarrow x=0$, pero en el punto *x = 0* no está definida, no hay.

- Simetrías. Periodicidad.

No hay simetrías ni periodicidad por la propia definición de la función, no hace falta estudiarlo.

- Asíntotas.

Horizontal: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$; no tiene asíntota horizontal.

Vertical: $\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln x} = \infty$; entonces la recta *x = 1* es una asíntota vertical.

Oblicuas: $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x(\ln x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$. Pero *m* tiene que ser distinto de cero, por lo tanto no hay asíntota oblicua.

- Extremos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivamos: $f'(x) = \frac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

Posibles extremos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Vamos a escribir la tabla de crecimiento y decrecimiento:

Intervalo	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	decrece	decrece	crece

Antes de $x=e$ la función decrece y después crece, esto significa que en $x=e$ hay un mínimo. Calculamos la coordenada *y* del extremo: $f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$ y el mínimo está en (e,e) .

- Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad y convexidad.

Derivada segunda: $f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{\ln x}{x} - \frac{2(\ln x - 1)}{x}}{(\ln x)^3} = \frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

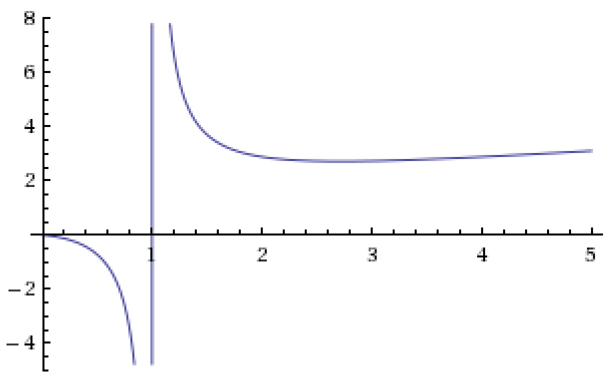
Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

Escribimos la tabla de concavidad y convexidad:

Intervalo	$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^{2},+\infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa (∩)	cóncava (U)	convexa (∩)

En el punto $x=e^2$ vemos que hay un punto de inflexión; calculamos la coordenada *y* : $f(e^2) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} = \frac{e^2}{2}$. El punto de inflexión está en $(e^2, \frac{e^2}{2})$.

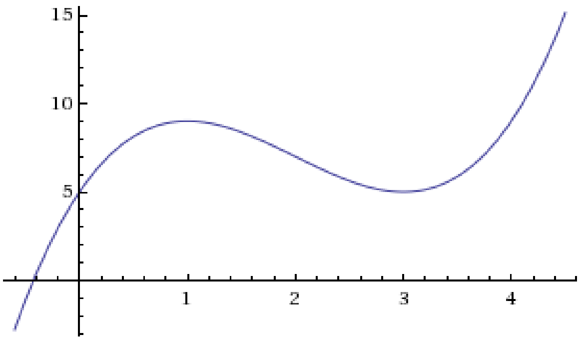
- Representación gráfica.

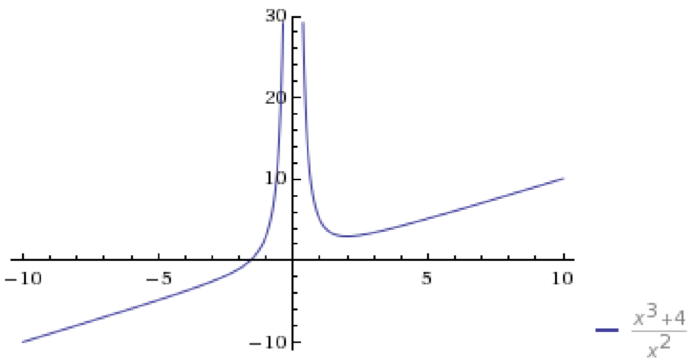


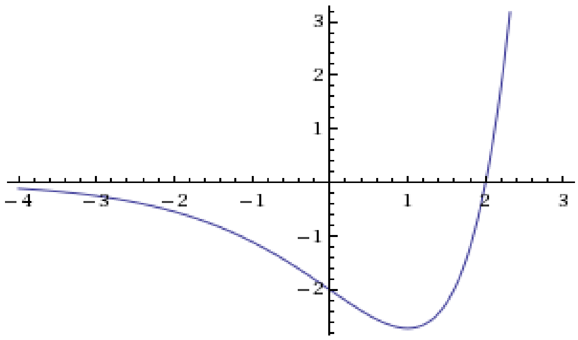
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La función $y=x^3+mx^2+nx+p$ pasa por $(-1,0)$, tiene un mínimo en $x=-1$ y un punto de inflexión en $x=-\frac{1}{3}$. Calcula m, n y p.
2. Calcula las dimensiones de un bote cilíndrico con dos tapas de volumen $V=8\pi\ m^3$ si queremos que el metal empleado en su fabricación sea mínimo.
Ayuda: la superficie del metal utilizado debe ser mínima.
3. Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.
4. Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$.
5. Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=(x-2)e^x$.

SOLUCIONES

1. $m=1$, $n=-1$, $p=-1$
2. $r=\sqrt[3]{4}\ m$, $h=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\ m$
3. 

4. 

5. 

Tema 21

Integral indefinida

CONCEPTOS BÁSICOS

- Concepto de primitiva e integral de una función.
- Integral de funciones elementales
- Propiedades de la integral.
- Integración por partes.
- Integración de funciones racionales.
- Método de sustitución

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halla una primitiva de $f(x)=\frac{3+x}{5}$, que se anule en $x=1$

Solución:

$$\int \frac{3+x}{5}dx=\int\left(\frac{3}{5}+\frac{x}{5}\right)dx=\int \frac{3}{5}dx+\int \frac{x}{5}dx=\frac{3}{5}\int dx+\frac{1}{5}\int x\,dx=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2}+C$$

Por tanto, las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{10}x^2+C$ como se tiene que anular en $x=1$, entonces $F(1)=0$, es decir, $\frac{3}{5}1+\frac{1}{10}\cdot 1^2+C=0;\quad \frac{6+1}{10}+C=0,\ C=\frac{-7}{10}$.

Luego la primitiva pedida es $F(x)=\frac{3}{5}x+\frac{x^2}{10}-\frac{7}{10}$.

2. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x^2(3x^3+14)^3\,dx$

b) $\int \sqrt[5]{5x+6}\,dx$

c) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

d) $\int \frac{dx}{\tan x}$

e) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

Solución:

a) $\int x^2(3x^3+14)^3\,dx=\frac{1}{9}\int 9x^2(3x^3+14)^3\,dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{(3x^3+14)^{3+1}}{3+1}+C=\frac{(3x^3+14)^4}{36}+C$

b) $\int \sqrt[5]{5x+6}\,dx = \int (5x+6)^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+6)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}+C = \frac{1}{6}(5x+6)^{\frac{6}{5}}+C = \frac{5x+6}{6}\sqrt[5]{5x+6}+C$

c) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot(\arctan x)\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2}+C$

d) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot dx = \ln|\operatorname{sen} x|+C$

e) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{4\,dx}{4x^2+4x+4} = 4\int \frac{dx}{(4x^2+4x+1)+3} = 4\int \frac{\frac{dx}{3}}{\frac{(2x+1)^2}{3}+1} =$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

3. Calcula las siguientes integrales racionales

a) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

b) $\int \frac{1-2x^2}{(x+3)^3}\,dx$

Solución:

a) Por el algoritmo de la división tenemos que $\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}$ descomponiendo el denominador $x^3-x^2=x^2(x-1)$,vemos que tiene una raíz de multiplicidad simple y otra de multiplicidad doble, por tanto, hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{-x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

Multiplicando por $x^2(x-1)$ tenemos:

$$-x-1 = x(x-1)A+(x-1)B+x^2C$$

Para obtener las constantes A , B y C damos valores a x .

Si $x=0$: $-0-1=0(0-1)A+(0-1)B+0^2C \Rightarrow B=1$

Si $x=1$: $-1-1=-1\cdot(1-1)A+(1-1)B+1^2C \Rightarrow C=-2$

Y dando otro valor cualquiera obtenemos A , por ejemplo $x=-1$:

$$-(-1)-1=-1\cdot(-1-1)A+(-1)(-1-1)B+(-1)^2C \Rightarrow A=2$$

Luego la integral nos queda

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int\left(x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}\right)dx = \int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx+\int \frac{2}{x}\,dx+\int \frac{1}{x^2}\,dx-\int \frac{2}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2}+2\ln x-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$$

b) Como -3 es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio del denominador, realizamos la siguientes descomposición:

$$\frac{1-2x^2}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}$$

Multiplicando por $(x+3)^3$, obtenemos:

$$1-2x^2 = (x+3)^2A+(x+3)B+C$$

Asignado valores a x obtenemos:
Si $x=-3$: $1-3\cdot(-3)^2=(-3+3)A+(-3+3)B+C \quad \Rightarrow \quad C=-17$
Si $x=0$: $1=9A+3B-17$
Si $x=-2$: $-7=A+B-17$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 9A+3B=18 \\ A+B=10 \end{cases}$ obtenemos los valores $A=-2$ y $B=12$.

Por tanto la integral queda:

$$\int \frac{1-2x^2}{(x+3)^3}dx=\int \frac{-2}{x+3}dx+\int \frac{12}{(x+3)^2}dx+\int \frac{-17}{(x-3)^3}dx=$$

$$=-2\int \frac{1}{x+3}dx+12\int (x+3)^{-2}dx-1\int (x+3)^{-3}dx=$$

$$=-2\ln|x+3|+12\frac{(x+3)^{-1}}{-1}-17\frac{(x+3)^{-2}}{-2}=-2\ln|x+3|-\frac{12}{x+3}+\frac{17}{2(x+3)^2}+C$$

4. Utilizar el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales:

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

b) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

<u>Solución:</u>

a) Integramos utilizando la regla de integración por partes $\int u\ dv=uv-\int v\ du$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx \stackrel{*}{=} \left(\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2x \\ dv=-\cos x \end{cases} \right) \stackrel{*}{=} -x^2\cos x-\int (-2x\cos x)\, dx=$$

$$=-x^2\cos x+\int (2x\cos x)\, dx \stackrel{*}{=} \left(\begin{cases} u=2x \\ dv=\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2 \\ dv=-\operatorname{sen} x \end{cases} \right)$$

$$\stackrel{*}{=} -x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x-\int (2\operatorname{sen} x)\, dx=-x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x+2\cos x+C$$

b) Procediendo de la misma manera obtenemos:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx \stackrel{*}{=} \left(\begin{cases} u=\operatorname{sen} x \\ dv=e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\cos x \\ dv=e^x \end{cases} \right) \stackrel{*}{=} e^x \operatorname{sen} x-\int e^x \cos x=$$

$$\stackrel{*}{=} \left(\begin{cases} u=\cos x \\ dv=e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\operatorname{sen} x \\ dv=-e^x \end{cases} \right) \stackrel{*}{=} e^x \operatorname{sen} x-\left(e^x \operatorname{Cos} x-\int -e^x \operatorname{Sen} x\, dx\right)=$$

$$e^x \operatorname{sen} x-e^x\cos x-\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

Si nos fijamos en la primera igualdad y en la ultima tenemos que $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx=e^x \operatorname{sen} x-e^x\cos x-\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$, sumando $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ en ambos miembros tenemos: $2\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx=e^x \operatorname{sen} x-e^x \cos x$. Luego $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx=\frac{e^x \operatorname{sen} x-e^x\cos x}{2}+C$

5. Calcular las siguientes integrales realizando los cambios de variable indicados:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\ dx$ con $\operatorname{sen} x=t$

b) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ con $1+e^x=t$

Solución:

a) Si hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$ entonces se tiene que $\cos x \; dx = dt$,entonces realizando los cambio en la integral obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \; dx = \int t^2 (1-t^2)\, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$

Deshaciendo el cambio nos queda:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \; dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

b) Si $1 + e^x = t$, derivando ambos miembros obtenemos $e^x \; dx = dt$ y sustituyendo obtenemos:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

Deshaciendo el cambio nos queda:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encuentra la primitiva de $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{sen} x$ que se anula en $x=\dfrac{\pi}{4}$

2. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x \cdot dx$

b) $\int \sec^2 x \cdot \sqrt{\tan x} \cdot dx$

c) $\int \dfrac{dx}{(3x+1)^4}$

d) $\int \cos 3x \cdot e^{\operatorname{sen} 3x} dx$

e) $\int \dfrac{x^3}{x^8+1} dx$

3. Calcula las siguientes integrales racionales:

a) $\int \dfrac{2x+3}{x-2} dx$

b) $\int \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$

c) $\int \dfrac{5x-2}{2x^2-3x-5} dx$

d) $\int \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} dx$

e) $\int \dfrac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3} dx$

4. Utilizar el método de integración por partes para calcular las siguientes integra:

a) $\int \ln|x+1| dx$

b) $\int x \ln|x+1| dx$

c) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

d) $\int x \; e^x dx$

e) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

f) $\int (3x^2+2x-7)\cos x \, dx$

5. Calcular las siguientes integrales realizando los cambios de variable indicados:

a) $\int \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} dx$ con $x=t^2$

b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2-x}}$ con $2-x=t^2$

c) $\int \dfrac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ con $\tan x=t$

d) $\int \dfrac{2^{\ln x}}{x} dx$ con $\ln x=t$

SOLUCIONES

1. $F(x) = \tan x - \cos x + \frac{\sqrt{2}-2}{2}$

2.

a) $\frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}^4 x + C$

b) $\frac{2}{3} \cdot (\tan x)^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\frac{-1}{9} \cdot (3x+1)^{-3} + C$

d) $\frac{1}{3} \cdot e^{\operatorname{sen} 3x} + C$

e) $\frac{1}{4} \arctan(x^4) + C$

3.

a) $2x + 7\ln|x-2| + C$

b) $x + 4\ln|x-4| + \ln|x+2| + C$

c) $\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln\left|x - \frac{5}{2}\right| + C$

d) $2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

e) $\frac{-1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$

4.

a) $x\ln|x+1| - x + \ln|x+1| + C$

b) $\frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) + C$

c) $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

d) $x e^x - e^x + C$

e) $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

f) $(3x^2 + 2x - 13)\operatorname{sen} x + (6x+2)\cos x + C$

5.

a) $-\frac{2x\sqrt{x}}{3} - x - 4\sqrt{x} - 4\ln|1-\sqrt{x}| + C$

b) $-2\sqrt{2-x} + C$

c) $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

d) $\frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + C$

Tema 22

Integral Definida

CONCEPTOS BÁSICOS

- Definición de integral definida y propiedades.
- Interpretación geométrica.
- Teorema fundamental de cálculo.
- Regla de Barrow.
- Calculo del área encerrada por una función.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^4 (x^2 - x + 5)\, dx$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx$

Solución:

Calculamos una primitiva de la función y luego aplicamos la regla de Barrow

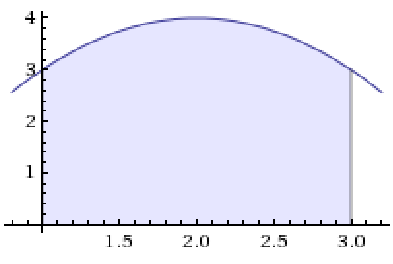
a) $\int_1^4 (x^2 - x + 5)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} + 5\cdot 4 - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1}{2} + 5\cdot 1\right) = \frac{57}{2} = 28{,}5$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$

2. Calcula el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$ el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

Solución:



La función es positiva en el intervalo $(1,3)$. Luego el área pedida se corresponde con la integral:

$$\int_3^1 (-x^2+4x)\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_1^3=\frac{-3^3}{3}+\frac{4\cdot 3^2}{2}-\left(\frac{-1^3}{3}+\frac{4\cdot 1^2}{2}\right)=\frac{22}{3}\ u^2$$

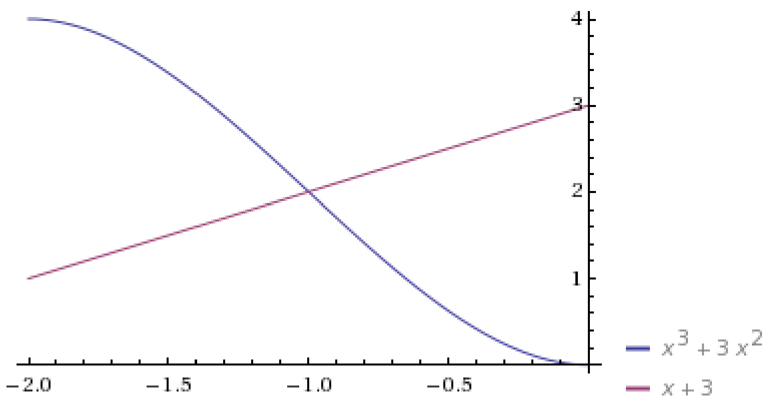
3. Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3+3x^2$ y $g(x)=x+3$, y entre $x=-2$ y $x=0$

Solución:

Estudiamos el signo de la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+3x^2-x-3$ como $h(x)$ es una función continua sólo hay que buscar las raíces y comprobar los signos es cada intervalo.
Factorizamos el polinomio $h(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$ La única raíz en el intervalo $(-2,0)$ es $x=-1$.
Luego $h(x)\geqslant 0$ si $x\in(-2,-1)$ ya que $h(-1{,}5)>0$ y $h(x)\leqslant 0$ si $x\in(-1,0)$ ya que $h(-0{,}5)<0$.
Por tanto el área pedida es:

$$\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))dx-\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx=\frac{7}{2}$$

También se puede hacer observando las gráficas de las funciones. Vemos que $f(x)$ es mayor que $g(x)$ en el intervalo $(-2,-1)$ y al revés en el intervalo $(-1,0)$.

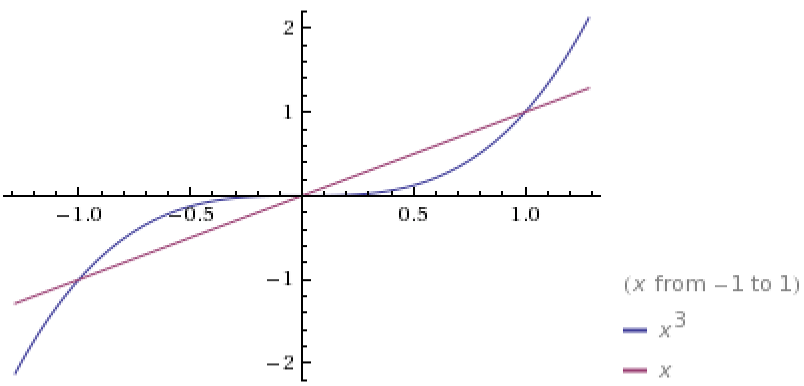


Otra forma de calcular área pedida es haciendo la integral $\int_{-2}^{0}|(f(x)-g(x))|dx$.

El área pedida es $\frac{7}{2}u^2$.

4. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$

Solución:



Como no se especifica el intervalo suponemos que piden el área finita encerrada entre las dos gráficas. Observando la gráfica se aprecia que el área pedida corresponde con las integrales:

$$-\int_{-1}^{0} x-x^3\ dx+\int_{0}^{1} x-x^3\ dx$$

Pero como las funciones son simétricas basta con calcular una área.

$$-\int_{-1}^{0} x-x^3\ dx+\int_{0}^{1} x-x^3\ dx=2\int_{0}^{1} x-x^3\ dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}-0=\frac{1}{2}\ u^2$$

También se puede calcular el área haciendo la integral $\int_{-1}^{1}|(f(x)-g(x))|\,dx$.

El área encerrada entre las dos gráficas es $\frac{1}{2}u^2$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^2 (x^2+x-3)\,dx$

b) $\int_2^3 \sqrt{x-2}\,dx$

c) $\int_0^1 x\cdot e^{x^2-1}\ dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

f) $\int_0^8 (\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x})\,dx$

2. Calcular el área limitada por la gráfica de la parábola $y=x^2-x-2$ y el eje OX.

3. Calcular el área de la figura limitada la parábola $y=\frac{x^2}{4}$, las rectas $x=1$, $x=3$ y el eje OX.

4. Calcular el área de la figura limitada entre la curva $y=x(x-2)(x-4)$, las rectas $x=1$, $x=3$ y el eje OX.

5. Calcular el área limitada por la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje OX.

6. Calcular el área limitada por la parábola $y=4x-x^2$ y el eje OX.

7. Calcula el área de la figura limitada entre la $y=-x^2-x+2$, las rectas $x=-1$, $x=0$ y el eje OX.

8. Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$

9. Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y las rectas $x=0$ y $x=1$

SOLUCIONES

1.

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{e-1}{2e}$

d) 0

e) $\ln\frac{9}{8}$

f) $\frac{100}{3}$

2. $\frac{9}{2}u^2$

3. $\frac{13}{6}u^2$

4. $\frac{7}{2}u^2$

5. $8u^2$

6. $\frac{32}{3}u^2$

7. $\frac{13}{6}u^2$

8. $\frac{64}{3}u^2$

9. $(e+\frac{1}{e}-2)u^2$

Tema 23

Geometría métrica en el plano

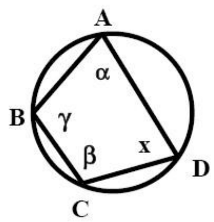
CONCEPTOS BÁSICOS

- Figuras básicas en el plano: puntos, rectas, semirrectas, segmentos y ángulos
- Los polígonos y su clasificación según los ángulos internos y según el número de lados
- Elementos notables de un polígono regular convexo
- Clasificación de los triángulos. Elementos notables de un triángulo y sus propiedades. Construcción de triángulos. El teorema de Euclides.
- La circunferencia: propiedades, elementos notables. Trazado de tangentes a una circunferencia. Circunferencia circunscrita a un triángulo. Circunferencia inscrita en un triángulo.
- Propiedades de los ángulos según su posición relativa respecto de una circunferencia. Polígonos inscribibles en una circunferencia

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dado un cuadrilátero cualquiera:

a) Demuestra que un cuadrilátero convexo es inscribible en una circunferencia, si y sólo si la suma de dos ángulos internos correspondientes a dos vértices opuestos es 180º.



b) En el cuadrilátero inscrito en la circunferencia de la figura, $\alpha-\beta=120^0$ y $\gamma=\dfrac{\alpha}{2}$. Calcula la amplitud de los ángulos internos de dicho cuadrilátero.

c) Si el radio de la circunferencia mide 30 cm, calcula la longitud del arco $arc(CA)$ que contiene al punto D.

Solución:

a) Para probar la veracidad de esta proposición hemos de demostrar las siguientes afirmaciones:

- 1º Si tenemos un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, entonces la suma de dos ángulos internos opuestos es 180º.
- 2º Si la suma de dos ángulos internos opuestos de un cuadrilátero convexo miden 180º, entonces dicho cuadrilátero es inscribible.

En efecto:

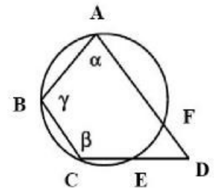
- 1º Supongamos que tenemos un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, tal como se muestra en la figura dada en el enunciado. Consideremos dos ángulos internos opuestos, por ejemplo el α y el β. Puesto que ambos ángulos, respecto de la circunferencia, son ángulos inscritos, entonces cada uno de ellos mide la mitad del arco que abarca.

Para facilitar la escritura, denotemos por $arc(BC)+arc(CD)$ el arco que abarca el ángulo α y por $arc(DA)+arc(AB)$ el arco que abarca el ángulo β. Entonces:

$$\alpha=\frac{1}{2}(arc(BC)+arc(CD)) \text{ y } \beta=\frac{1}{2}(arc(DA)+arc(AB))$$

Por tanto $\alpha+\beta=\frac{1}{2}(arc(BC)+arc(CD)+arc(DA)+arc(AB))=\frac{1}{2}\cdot 360^0=180^0$.

- 2º Supongamos ahora que tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$ tal que la suma de dos ángulos internos opuestos mide 180º. Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC, entonces el vértice D puede estar sobre la circunferencia, o ser interior a la misma o ser exterior:



→ Si el vértice D está sobre la circunferencia, entonces el cuadrilátero ya es inscribible.

→ Supongamos que el vértice D es exterior a la circunferencia, tal como se muestra en la figura de la izquierda. Puesto que α y β son ángulos inscritos en la circunferencia y $\alpha+\beta=180^0$, podemos escribir :

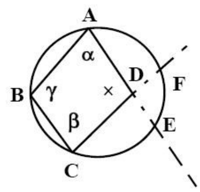
$\frac{1}{2}(arc(BC)+arc(CE)+arc(EF))+\frac{1}{2}(arc(EF)+arc(FA)+arc(AB))=180^0$, es decir $arc(BC)+arc(CE)+2\cdot arc(EF)+arc(FA)+arc(AB)=360^0$.

Por otra parte $arc(AB)+arc(BC)+arc(CE)+arc(EF)+arc(FA)=360^0$.

Si restamos ambas expresiones obtenemos que $arc(EF)=0$,

De lo que se deduce que los puntos E y F coinciden entre sí y con el punto D.

De lo anterior concluimos que el punto D está sobre la circunferencia.



→ Supongamos ahora que el vértice D es interior a la circunferencia, tal como se muestra en la figura de la derecha. Se procede de forma análoga y también se concluye que D está sobre la circunferencia.

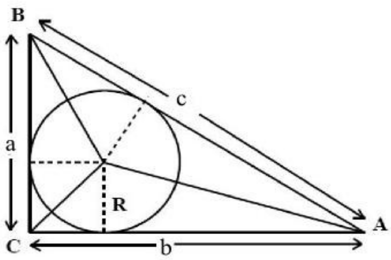
b) Si denotamos por r al radio de la circunferencia, entonces la longitud de la circunferencia viene dada por la expresión $l=2\pi r$, la longitud correspondiente a un ángulo central de un grado viene dada por $l_{1^0}=\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$ y la longitud correspondiente a un ángulo central ω se calcula mediante la expresión $l_\omega=\frac{\pi r}{180}\cdot\omega$, siempre que el ángulo ω esté medido en grados sexagesimales.

Como el cuadrilátero dado está inscrito en una circunferencia, $\alpha+\beta=180^0$. Teniendo en cuenta la anterior igualdad y que $\alpha-\beta=120^0$, se obtiene que $\alpha=150^0$ y $\beta=30^0$. De $\gamma=\frac{\alpha}{2}$ se deduce que $\gamma=75^0$. Pero la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero vale 360^0, por lo que $x=105^0$.

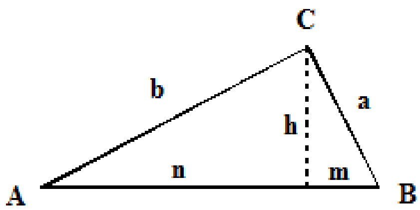
c) El $arc(CA)$ está limitado por los lados del ángulo inscrito γ, por lo que $75^0=\gamma=\frac{1}{2}arc(CA)$, es decir $arc(CA)=150^0$. Por supuesto, esta última igualdad nos informa de la medida del ángulo central que limita al arco cuyos extremos son los punto C y A, medido en sentido contrario al seguido por las agujas del reloj.
Denotemos por ω dicho ángulo central, entonces la longitud del arco mide $l_\omega=\frac{\pi\cdot 30}{180}\cdot 150=25\pi\ \ cm.$

2. Determinar el área de un círculo inscrito en un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 25,6 cm y 14,4 cm.

<u>Solución:</u>



El centro de la circunferencia inscrita en un triángulo equidista de los lados del triángulo, por tanto dicho centro pertenece a las bisectrices de los ángulos internos del triángulo.
Si trazamos los segmentos que tengan un extremo en el centro de la circunferencia y el otro extremo en uno de los vértices del triángulo, entonces dividimos el triángulo en otros tres triángulos. Si consideramos como base de cada uno de ellos a los lados del triángulo, sus respectivas alturas coinciden con los radios de la circunferencia inscrita.
La suma de las áreas de dichos triángulos es igual al área, S_Δ, del triángulo rectángulo dado, esto es $S_\Delta=\frac{1}{2}(a\cdot R+b\cdot R+c\cdot R)$. Pero $p=a+b+c$ es el perímetro del triángulo, por lo que podemos escribir que $S_\Delta=\frac{1}{2}p\cdot R.$
Los datos que nos dan son precisamente las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, $n=25{,}6\,cm$ y $m=14{,}4\,cm.$



La hipotenusa: $c=25{,}6+14{,}4=40\,cm.$
Según el Teorema de Euclides:

$$a^2=m\cdot c=14{,}4\cdot 40=576$$
$$b^2=n\cdot c=25{,}6\cdot 40=1124$$

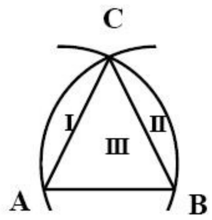
de lo que se deduce que $a=24\,cm$ y $b=32\,cm.$ Por lo tanto, el perímetro es $p=96\,cm$ y el área del triángulo es:
$S_\Delta=\frac{1}{2}24\cdot 32=384\,cm^2$.

Teniendo en cuenta que $S_\Delta=\frac{1}{2}p\cdot R$, se obtiene que $R=8\,cm$, y así el área del círculo es $S_O=\pi\cdot 8^2=64\pi\,cm^2$.

3. Se considera un triángulo equilátero ABC de 2 cm de lado. Con centro en el vértice A trazamos un arco de circunferencia que pase por los vértices B y C. Con centro en el vértice B trazamos otro arco de circunferencia que pase por los vértices A y C. Calcula el área de la superficie encerrada por dichos arcos y la base AB del triángulo.

Solución:

Evidentemente el triángulo ΔABC es equilátero y el área del sector circular correspondiente a la superficie señalada en la figura con I y III es $S_{I+III}=\frac{\pi\cdot 2^2}{360}\cdot 60=\frac{2\pi}{3}\ cm^2$.



La superficie correspondiente a la zona II es la que resulta de restarle el área del triángulo señalado con III al área del sector limitado por el círculo con centro en A y los radios AC y AB, esto es $S_{II}=\frac{2\pi}{3}-S_{III}$.

La altura del triángulo ΔABC divide a dicho triángulo en dos triángulos rectángulos. Las bases de dichos triángulos miden 1 cm.

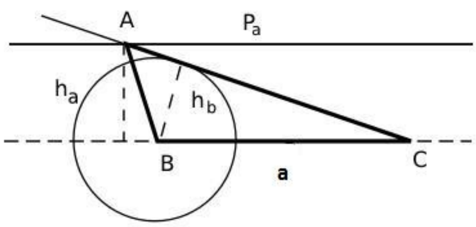
Haciendo uso del Teorema de Pitágoras, obtenemos que la altura anteriormente mencionada, mide $\sqrt{3}\,cm$. Por tanto la superficie del triángulo rectángulo es $S_{III}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\,cm^2$. Consecuentemente $S_{II}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\ \ cm^2$, y el área pedida es $S=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\ \ cm^2$.

4. Describe el proceso a seguir para construir un triángulo ΔABC, si se conocen el lado a, la altura h_a correspondiente al lado a y la altura h_b correspondiente al lado b. Indica la relación que debe existir entre las magnitudes dadas para que:

a) dicha construcción sea posible
b) para que no tenga solución
c) para que el triángulo sea recto en el vértice C.

Hacer la construcción, en caso de ser posible, si $a=6\,cm$ cm, $h_a=5{,}5\,cm$ y $h_b=4\,cm$.

Solución:



Trazamos:

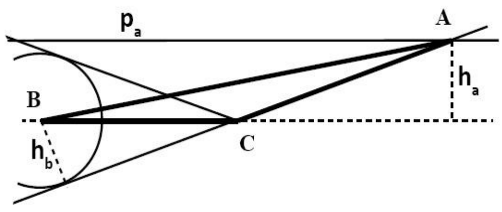
1º) un segmento a (denotando por B y C a sus extremos),

2º) una recta paralela, p_a, a dicho segmento, que diste del mismo h_a unidades,

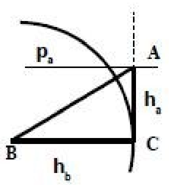
3º) una circunferencia con centro en B y radio h_b

4º) una tangente a dicha circunferencia que pase por el punto C.

La tangente trazada corta a la recta p_a en un punto A. Los puntos A, B y C forman un triángulo que cumplen las condiciones dadas en el enunciado.



Claramente, de ser posible esa construcción, se obtienen dos posibles soluciones ya que hay dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el punto C.



Si h_b coincide con la longitud del segmento BC, entonces dicho segmento es un radio de la circunferencia con centro en B y radio h_b. En estas condiciones, la tangente trazada por el punto C es perpendicular al segmento BC y consecuentemente el triángulo así obtenido es recto en C.

Claramente, si h_b es mayor que la longitud a dada, entonces el problema no tiene solución. En este caso, el círculo encerrado por la circunferencia trazada contendría al punto C y en ese caso no se podría trazar una tangente a la circunferencia, que pasase por el punto C.

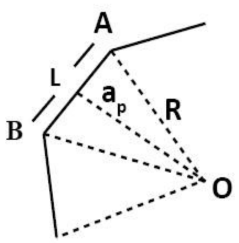
5. Calcula los ángulos internos, la longitud del lado, la apotema y el área de un polígono regular de 8 cm de radio, si tiene 35 diagonales.

Solución:

Tenemos que averiguar el número de lados, n, que tiene el polígono.

Las diagonales del polígono son los segmentos que se pueden trazar entre dos vértices no consecutivos, por tanto su cantidad viene dado por $C_2(n)-n$, siendo $C_2(n)$ las combinaciones binarias de n elementos. Como el polígono tiene 35 diagonales, podemos escribir que $C_2(n)-n=35$, o bien $\frac{n(n-1)}{2}-n=35$, cuyas raíces son $n=10$ y $n=-7$. PPor tanto se tata de un decágono.

Al trazar todas las diagonales posibles a partir de uno de sus vértices, el polígono de n lados queda dividido en n-2 triángulos . La suma de los ángulos internos de todos esos triángulos coincide con la suma de los ángulos internos del polígono, por tanto dicha suma es $(n-2)\cdot 180^0$. Si el polígono es regular, cada uno de los ángulos internos viene dado por la expresión $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$, así, en nuestro caso, cada ángulo interno debe medir 144^0, y consecuentemente el ángulo $\measuredangle BAO=72^0$, siendo O el centro del decágono y A y B dos vértices consecutivos.

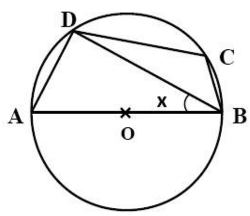


La apotema, a_p, divide al triángulo $\Delta\, BAO$ en dos triángulos rectángulos. Haciendo uso del coseno en uno de dichos triángulos, la longitud del lado viene dada por la expresión $L=2R\cos 72^0$, y por tanto $L=3{,}33\ \ cm$. Haciendo uso del seno, $a_p=R\,\text{sen}\,72^0=8\cdot\text{sen}\,72^0$, la apotema mide $7{,}61\ \ cm$. El área del polígono se obtiene a través de $S=10\cdot\frac{L\cdot a_p}{2}$, que nos da $126{,}71\ \ cm^2$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es tal que su hipotenusa coincide con uno de sus diámetros. Y, recíprocamente, si un lado de un triángulo es tal que coincide con un diámetro de la circunferencia circunscrita, entonces dicho triángulo es rectángulo.



b) ¿Cuánto mide la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, si sus catetos miden 3 y 4 cm?

c) Consideremos la figura representada a la derecha en la que O es el centro de la circunferencia, $\measuredangle(DCB)=130^0$. Calcula el ángulo x, la longitud del arco menor y la cuerda determinados por los vértices D y B, si el radio de la circunferencia mide 4 cm.

2. Con el cateto mayor de un triángulo rectángulo como diámetro, se traza un semicírculo. Hallar la longitud de la semicircunferencia, sabiendo que el otro cateto mide 30 cm y la cuerda que une el vértice del ángulo recto con el punto de intersección de la hipotenusa y el semicírculo mide 24 cm.

3. Consideremos una circunferencia de 3 cm de radio. Denotemos por O su centro. Con centro en un punto P de la misma, trazamos otra circunferencia con igual radio, que corta a la considerada en los puntos denotados por A y B. Consideremos el arco determinado por dichos puntos sobre la circunferencia de centro P que esté contenido en el círculo encerrado por la circunferencia de centro en O. Ese arco divide al círculo con centro en O en dos superficies. Calcula el área de la menor de ellas.

4. Construir un triángulo ΔABC tal que sus lados estén en la proporción $a:b:c=4:5:7$, y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo mida 5 cm.

5. Calcula el número de diagonales, la longitud del lado, la apotema y el área de un polígono regular de 8 cm de radio, si cada uno de sus ángulos internos mide 150º.

6. Responde a las siguientes cuestiones:

a) En un reloj analógico unimos mediante sendos segmentos los puntos correspondiente a 1 y 5 h y a 8 y 4 h respectivamente. Averigua el ángulo que formas dichos segmentos.

b) Si en dicho reloj unimos mediante segmentos los puntos correspondientes a 11, 8 y 4 h, calcula la amplitud de los ángulos internos del triángulo así formado.

7. Un rombo de 150 m^2 es tal que la proporción entre sus diagonales es $e:f=3:4$. Calcula la longitud de los lados, las diagonales y la altura de dicho rombo.

8. Encuentra una relación para calcular el área de un n-ágono regular en función del radio de la circunferencia inscrita a dicho polígono.

SOLUCIONES

1.

a) Se demuestra con razonamientos análogos a los ejercicios resueltos

b) 2,5 cm

c) 40º; $\frac{20\pi}{9} cm$;

2. $20\pi\, cm$.

3. $6\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}\, cm.$

4. $a=\frac{16\sqrt{6}}{7} cm,\ b=\frac{20\sqrt{6}}{7} cm,\ c=4\sqrt{6}\, cm.$

5. 54 diagonales, lado: $8\sqrt{2-\sqrt{3}}\, cm$, apotema: $4\sqrt{2+\sqrt{3}}\, cm$, área: $192\, cm^2$.

6.

a) 90º

b) 45º, 60º y 75º.

7. Lado: $12{,}5\, m$, diagonales: $20\, m$ y $15\, m$, altura: $12\, m$.

8. $n\cdot R\cdot \tan\left(\frac{180^0}{n}\right)$.

Tema 24

Geometría métrica en el espacio

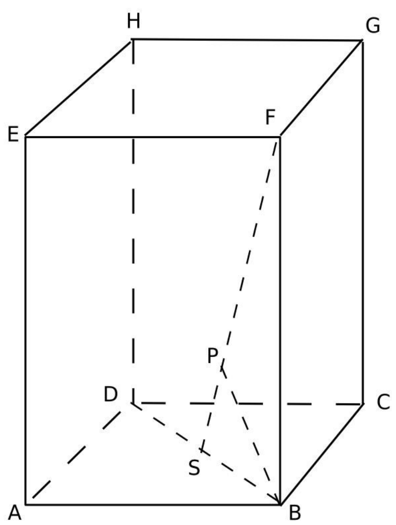
CONCEPTOS BÁSICOS

- Figuras básicas en el espacio: puntos, rectas, planos.
- Posiciones relativas de puntos, rectas y planos.
- Ángulo formado por dos rectas, por dos planos o por una recta y un plano.
- Elementos notables de un poliedro. Poliedros regulares. Desarrollo de los poliedros.
- Secciones de un prisma recto o de una pirámide mediante planos.
- Cilindros y conos.
- La esfera y sus secciones mediante planos (paralelos, meridianos, casquetes circulares).
- Áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se considera un prisma recto de base cuadrada ABCDEFGH tales que $|AB|=5$ cm y $|AE|=8$ cm. Calcula la distancia del punto B a la recta SF, siendo S el centro de la cara ABCD.

<u>Solución:</u>



En el dibujo de la izquierda se representa gráficamente la situación descrita en el enunciado. El triángulo ΔSBF es recto en B ya que la arista BF es perpendicular a la cara correspondiente a la base del prisma, por tanto es perpendicular a cualquier recta contenida en el plano que contiene a dicha cara. La distancia del punto B a la recta SF viene dada por la distancia entre dicho punto y su proyección P sobre la recta. La longitud del segmento PB es precisamente la altura del triángulo rectángulo ΔSBF, considerando como base a la hipotenusa SF.

Haciendo uso del Teorema de Euclides, $BS^2 = PS \cdot SF$, $BF^2 = PF \cdot SF$ y $BP^2 = PS \cdot PF$. BF mide 8 cm ya que es una de las aristas del ortoedro. La distancia de B a S es la mitad de la longitud de la diagonal BD de la base ABCD del prisma recto, pero, haciendo uso del

Teorema de Pitágoras, $BD=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}\ \ cm$, y, consecuentemente, $BS=\frac{5}{2}\sqrt{2}\ \ cm$, y, en el triángulo ΔSBF, la hipotenusa

$$SF=\sqrt{8^2+\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{34}\ \ cm.$$

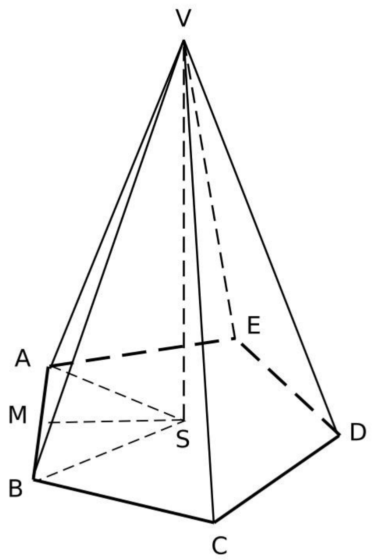
Así, sustituyendo en las expresiones que resultaron de aplicar el Teorema de Euclides, obtenemos:

$$PS=\frac{25}{102}\sqrt{34}\ \ cm,\ \ PF=\frac{64}{51}\sqrt{34}\ \ cm \text{ y } BP=\frac{40}{51}\sqrt{17}\ \ cm.$$

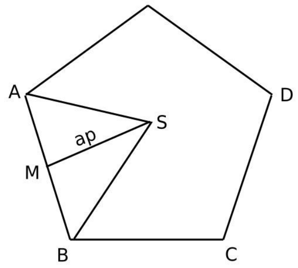
Por lo tanto la distancia del punto B a la recta SF es $\frac{40}{51}\sqrt{17}\ \ cm.$

2. Una pirámide regular es tal que la suma de los ángulos interiores del polígono de la base es igual a 540° y las caras laterales son triángulos equiláteros. Determina el volumen, el área total, los ángulos que forman la base y la arista lateral, la base y la cara lateral y dos caras laterales consecutivas de dicha pirámide en función de la longitud, a, del lado de la base.

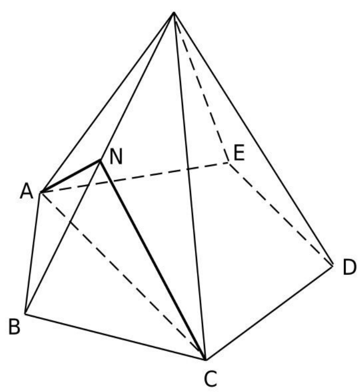
<u>Solución:</u>



Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados viene dada por la expresión $(n-2)180^0$, deducimos que la base es un pentágono.
La altura, h, de la pirámide es la distancia del vértice a la base y coincide con la longitud del segmento determinado por dicho vértice y su proyección sobre la base, dicha proyección es el centro S del pentágono.
Denotemos por A, B, C, D, E y V a los vértices de la pirámide, siendo los cinco primeros los correspondientes a la base. Sea M el punto medio de uno de los lados del pentágono, por ejemplo del AB, entonces el triángulo ΔMSV es rectángulo, recto en S, tal que el cateto MS es la apotema del pentágono.



El ángulo interno correspondiente al vértice A del triángulo rectángulo ΔAMS mide 54^0, por tanto la apotema $a_p=MS$ mide $\frac{a}{2}\cdot\tan 54^0$. MV es la altura del triángulo ΔABV, por tanto $MV=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ y, haciendo uso del Teorema de Pitágoras en el triángulo ΔMSV, tenemos que $h=SV=\frac{a}{2}\sqrt{3-\tan^2 54^0}$.



De todo lo anterior se deduce que el área de la base es $\frac{5}{4}a^2\tan 54^0$, el área lateral es $5\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, el área total es $\frac{5}{4}(\sqrt{3}+\tan 54^0)a^2$ y el volumen es $\frac{5a^3}{24}\tan 54^0\sqrt{3-\tan^2 54^0}$.
El ángulo que forma la arista AV con la base coincide con el ángulo que forma AV con la recta que resulta de intersecar la base con un plano perpendicular a la misma y contenga a dicha arista.

Ese ángulo α es precisamente el ángulo interno correspondiente al vértice A, en el triángulo rectángulo $\Delta\, ASV$, pero $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{h}{a}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3-\tan^2 54^0}$, $\alpha=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3-\tan^2 54^0}\right)$.

El ángulo que forman dos caras laterales es precisamente el ángulo que forman las rectas que resultan de intersecar dichas caras con un plano que sea perpendicular a las mismas.
Consideremos un plano con las características descritas y que contenga al vértice A. Ese plano cortará a la arista BV en el punto medio N de la misma y pasará por el vértice C. El ángulo que forman las caras laterales ABV y BCV es precisamente el ángulo interno γ correspondiente al vértice N del triángulo isósceles $\Delta\, CNA$.

Según los cálculos ya hechos, $AN=NC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, y, aplicando el teorema del coseno en el triángulo $\Delta\, ABC$ junto con las fórmulas del ángulo mitad, tenemos:

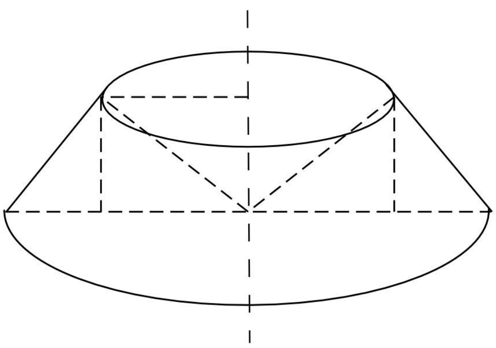
$$AC=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos 108^0}=2a\operatorname{sen}54^0 \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{AC}{AN}=\frac{1}{2}2a\operatorname{sen}54^0:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}54^0$$

de lo que se deduce que:

$$\gamma=2\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}54^0\right).$$

3. La superficie de un triángulo rectángulo de lados 15, 20 y 25 cm respectivamente, gira alrededor de un eje perpendicular a la hipotenusa que pasa por el vértice correspondiente al menor ángulo interno del mismo. Calcula el volumen del sólido que así se describe.

<u>Solución:</u>



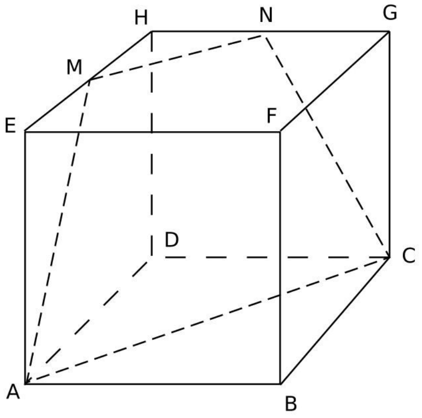
Haciendo uso del Teorema de Euclides, se tiene que la altura del triángulo respecto de la hipotenusa y las proyecciones de los catetos que miden 15 y 25 cm son respectivamente 12, 9 y 16 cm.
Si al volumen de un tronco de cono de radios 25 y 16 cm y altura 12 cm le restamos el volumen de un cono de 16 cm de radio y 12 cm de altura, obtenemos el volumen pedido.
Haciendo uso de la fórmula para calcular el volumen de un cono tenemos que el volumen del cono es $1024\pi\ \ cm^3$. El volumen del tronco de cono es $5124\pi\ \ cm^3$. Por tanto el volumen del sólido de revolución es $4100\pi\ \ cm^3$.
<u>Nota</u>: El volumen del tronco de cono, cuyo eje pasa por los centros de las circunferencias que determinan las bases, se puede obtener directamente por la expresión:

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(r_1^2+r_1\cdot r_2+r_2^2\right)$$

Siendo h la altura del tronco de cono y r_1 y r_2 los radios de las bases del tronco de cono.
Esta fórmula se obtiene completando el tronco de cono para obtener un cono, calculando la altura de este último haciendo uso del Teorema de Thales para triángulos semejantes.

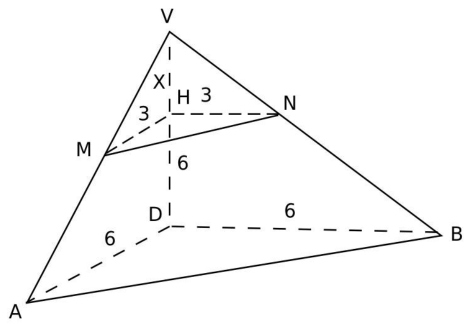
4. Se considera un cubo ABCDEFGH. Sean M y N los puntos medios de las aristas EH y GH respectivamente. Averigua la longitud de los lados de la sección resultante de cortar el cubo por el plano CMN y los volúmenes de los cuerpos en los que queda dividido el cubo. Cada una de las aristas del cubo mide 6 cm.

Solución:



Puesto que los puntos M, N y C están en el plano secante, los segmentos MN y NC también están contenidos en el plano secante y, respectivamente en las caras EFGH y DCGH. La recta paralela al segmento MN que pasa por el punto C está contenida en el plano secante ya que el punto C pertenece al plano secante. Esa paralela corta a la arista AD en un punto P. Puesto que el triángulo MHN tiene los lados paralelos al triángulo PDC, estos dos triángulos han de ser semejantes. El triángulo MHN es isósceles, por tanto el triángulo PDC también lo es, con lo que el punto P tiene que coincidir con el punto A. La sección ACMN producida por el plano CMN en el cubo es un trapecio ya que tiene cuatro lados y dos de ellos son paralelos.

El triángulo MHN es recto en H y sus catetos miden respectivamente 3 cm, por tanto la hipotenusa, según el Teorema de Pitágoras, mide $3\sqrt{2}$ cm. El lado AC coincide con la diagonal del cuadrado ABCD y por eso mide $6\sqrt{2}$ cm. El lado NC coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo CGN, cuyos catetos miden respectivamente 3 y 6 cm, con lo que el lado NC mide $3\sqrt{5}$ cm. Siguiendo un razonamiento similar, obtenemos que el lado AM mide también $3\sqrt{5}$ cm. En consecuencia el trapecio ACMN es isósceles.



El cubo ha quedado dividido en dos cuerpos y uno de ellos, el ACDMNH, es un tronco de pirámide de 6 cm de altura. Las rectas que contienen respectivamente a los segmentos AM y BN cortan a la recta que contiene a la arista DH en un punto V. De esta forma construimos la pirámide que corresponde al tronco de pirámide ABDMNH, cuya altura mide $6+x$ cm.

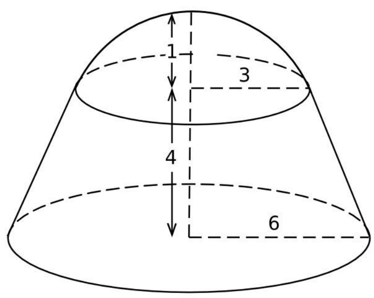
Teniendo en cuenta que los triángulos VHN y VDB son semejantes, podemos escribir $\frac{6}{3}=\frac{6+x}{x}$,

de lo que se deduce que $x=6$ cm. El volumen del tronco de pirámide coincide con la cantidad que resulta de restarle el volumen de la pirámide MNHV del volumen de la pirámide ABDV. Así obtenemos que el tronco de pirámide tiene una capacidad de $63\ cm^3$. Si efectuamos 6^3-63, obtenemos el volumen del otro cuerpo en el que ha quedado dividido el cubo, esto es $153\,cm^3$.

5. Una torre con cúpula está formada por un cono truncado, cuyas bases miden 6 y 3 m respectivamente y 4 m de altura. El casquete esférico que forma la cúpula tiene un radio de 3 m y una altura de 1 m. Calcula su superficie.

Solución:

Haciendo uso del Teorema de Pitágoras, tenemos que $R^2=3^2+(R-1)^2$, de donde se obtiene que el radio de la esfera es $R=5\ m.$ Por tanto la superficie del casquete esférico es $S=2\pi\cdot5\cdot1=10\pi\ \ m^2$.



La generatriz, g, del tronco de cono, haciendo uso del Teorema de Pitágoras, es $g=\sqrt{3^2+4^2}=5\ \ m.$ Así, la superficie del tronco de cono es $S=\pi\cdot(3+6)\cdot5=45\pi\ \ m^2$.

La suma de ambas superficies es $55\pi\ \ m^2$, que corresponde a la superficie de la torre.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una pirámide triangular es tal la base es un triángulo equilátero de lado 8 cm y cada una de las aristas laterales miden 15 cm. Calcula el volumen de la pirámide, el ángulo que forman las aristas laterales con la base y el ángulo que forman las caras laterales con la base.
2. De una superficie circular de radio 4 cm suprimimos un sector circular correspondiente a un ángulo central de 30° y construimos con ella un cono. Calcula las dimensiones del cono y el ángulo que forman los dos segmentos que resultan de cortar el cono mediante un plano perpendicular a la base del mismo, que pase por el vértice del cono. Calcula el volumen del cono.
3. Un trapecio recto de bases 40 y 30 cm respectivamente es tal que uno de los lados desiguales forma 60° con la base mayor. Obtener el volumen del cuerpo resultante al hacer girar la superficie encerrada por el mismo, alrededor de un eje que contiene a la base menor.
4. La arista AB y la altura de una pirámide regular ABCDV de base cuadrada miden a unidades cada una. Calcula la distancia del centro de la base a cualquiera de las caras laterales de la pirámide.
5. Dado el volumen V de una pirámide n-agonal regular en la que el lado de la base mide a unidades, determinar el ángulo que forma una arista lateral de la pirámide con el plano de la base.
6. Calcula el perímetro del polígono que se obtiene al seccionar el cubo ABCDEFGH, de arista 60 cm, mediante el plano MLD, siendo M el punto medio de la arista BF y L un punto de la arista FG que dista 20 cm del vértice G. Calcula, además, el volumen de cada uno de los cuerpos en los que queda dividido dicho cubo.

SOLUCIONES

1. $16\sqrt{611}\ cm^{3}$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{611}}{8}\right)$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{611}}{4}\right)$.
2. $\frac{11}{3}\ cm$, $\frac{\sqrt{23}}{3}\ cm$, $2\,\text{arcsen}\left(\frac{11}{12}\right)$, $\frac{21\sqrt{23}}{81}\ cm^{3}$.
3. $11\ 000\pi\ cm^{3}$.
4. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.
5. $\arctan\left(\frac{24V}{n\cdot a^{3}}\cdot \text{sen}\left(\frac{180º}{n}\right)\cdot \tan\left(\frac{180º}{n}\right)\right)$.
6. $50+16\sqrt{34}+18\sqrt{41}\ cm$, $47400\ cm^{3}$, $168600\ cm^{3}$.

Tema 25

Transformaciones geométricas en el plano

CONCEPTOS BÁSICOS

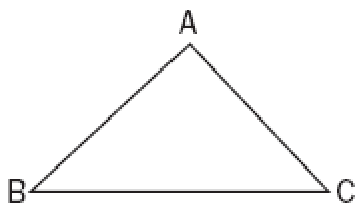
- Movimientos: giros, traslaciones, simetrías axiales y centrales.
- Homotecias.
- Semejanzas.
- Criterios de semejanzas de triángulos.
- Criterios de congruencia de triángulos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la siguiente figura, construir las figuras homóticas respecto a las homotecias dadas:

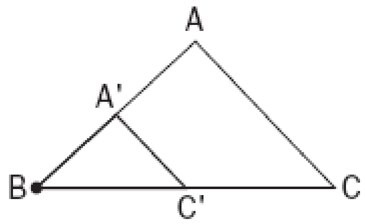
a) Centro en el vértice B y razón de la homotecia $k=\frac{1}{2}$

b) Centro en el vértice A y razón de la homotecia $k=-\frac{1}{2}$

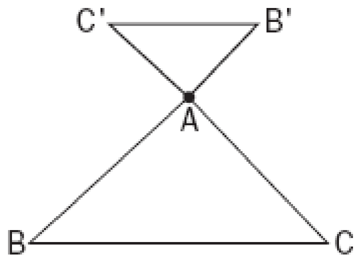


Solución:

a) Una homotecia es una transformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por el mismo factor. En el primer apartado ese punto fijo es el vértice B, y que la razón de la homotecia sea $k=\frac{1}{2}$ significa, que dado cualquier punto, por ejemplo A: $BA'=\frac{1}{2}BA$ siendo A' el punto perteneciente a la homotecia:



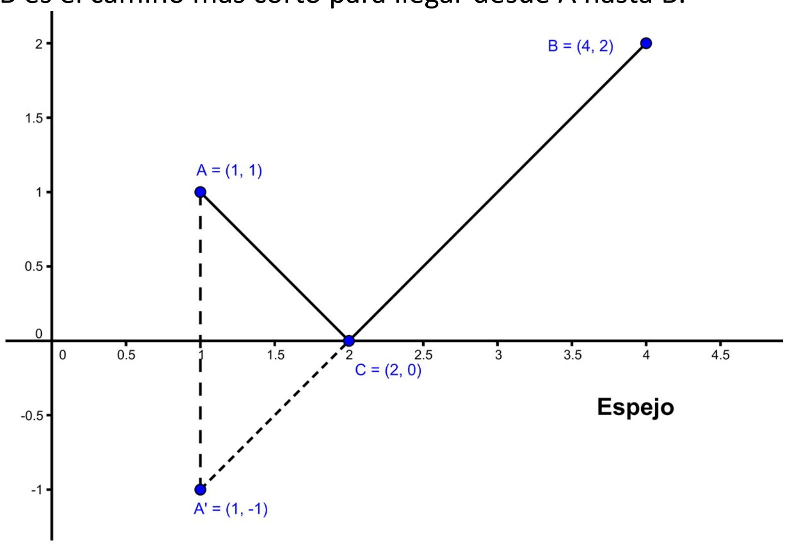
b) La razón de la homotecia es $k=-\frac{1}{2}$ respecto al punto A, por tanto el punto B se traslada a otro B´respecto a A de manera que $AB=-\frac{1}{2}AB'$ y de modo análogo con el punto C:



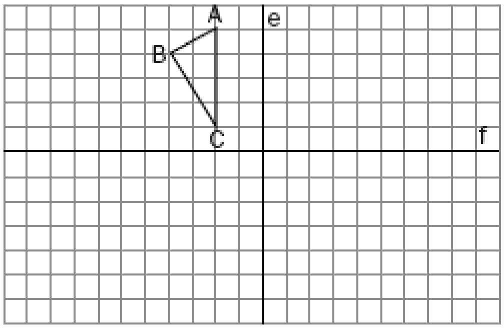
2. La luz siempre toma el camino más corto para viajar de un punto a otro. Usando esta idea dibujar en qué punto de un espejo se reflejará un rayo que parte del punto $A(1,1)$ para llegar al punto $B=(4,2)$. Considera que el espejo está situado en el eje X.

Solución:

Se dibuja la simetría axial (simetría respecto a un eje) del punto $(1,1)$ respecto al eje X, su homólogo será el punto A' y posteriormente se traza una línea recta desde el punto A' hasta el punto B. El punto C, en donde la recta corta al espejo, es el punto en donde se refleja el rayo y el camino ACB es el camino más corto para llegar desde A hasta B.

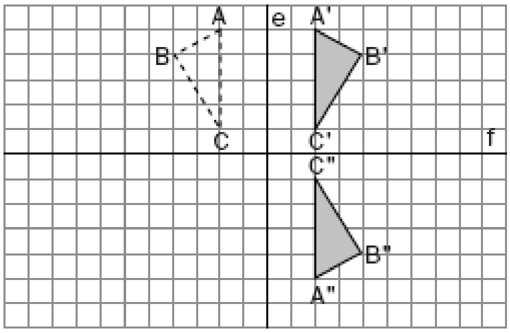


3. Dibujar un triángulo homólogo al dado en la figura respecto al eje e (simetría axial respecto a ese eje) y después otro triángulo homólogo al dibujado pero respecto al eje f. ¿Cuál es la transformación geométrica que hace pasar del triángulo dado al último?



 ***Solución:***

Una simetría respecto a un eje transforma un punto A del plano en otro punto A' de manera que el segmento AA' sea perpendicular al eje y la distancia que une al punto A con el eje es la misma distancia que une al punto A' con dicho eje. Los puntos A y A' se llaman puntos homólogos y este tipo de simetría es llamada simetría axial.



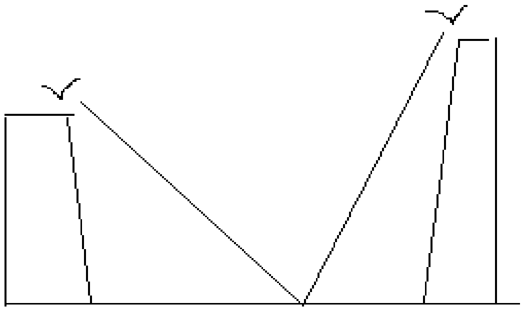
Podemos ver que cualquier segmento mide lo mismo que su simétrico y que este tipo de simetría conserva las distancias. Los ángulos miden lo mismo que los simétricos.

Si comparamos el primer triángulo con el último podemos comprobar que tenemos una simetría respecto a un punto, en este caso sobre el punto en el que cortan los dos ejes, donde se cumple que para un punto dado, por ejemplo C, los puntos C, C' y el punto respecto al que se realiza la simetría (podemos llamarlo O) están alineados y que la distancia desde C a O es la misma distancia que la de su homólogo a O. Este tipo de simetría recibe el nombre de simetría central.

4. Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40, están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que van a beber dos pájaros que están en lo alto de las torres. Los dos pájaros (cada uno desde una torre diferente) descienden a la misma velocidad y llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?

 ***Solución:***

Si los dos pájaros descienden a la misma velocidad y en el mismo tiempo entonces recorrerán la misma distancia. La trayectoria de los pájaros es la hipotenusa de los triángulos rectángulos que se forman con la altura de cada una de las torres y la distancia desde las bases hasta la fuente. Si llamamos x a la distancia entre la primera torre y la fuente, entonces la distancia desde la fuente hasta la segunda torre será $50-x$.



Aplicando el teorema de Pitágoras, hipotenusa al cuadrado igual a la suma de los catetos al cuadrado, e igualando las dos hipotenusas podemos obtener la distancia desde la base de las torres hasta la fuente:

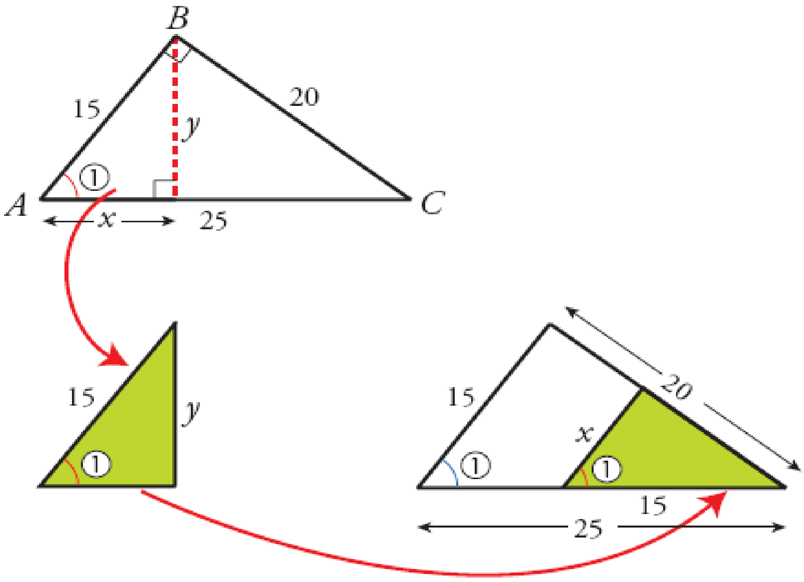
$$30^2+x^2=(50-x)^2+40^2$$
$$900+x^2=2500-100x+x^2+1600$$
$$100x=3200 \rightarrow x=32\ pasos$$

La fuente se encuentra a 32 pasos de la primera torre y a 18 pasos de la segunda.

5. Tenemos un triángulo rectángulo de lados 15, 20, y 25 cm. Si lo dibujamos colocando la hipotenusa como base entonces podemos dibujar otros dos triángulos rectángulos dentro del primer triángulo, trazando la altura. Escoger el triángulo más pequeño de los dos y obtener sus lados usando criterios de semejanza.

Solución:

Los dos triángulos son semejantes ya que todos sus ángulos son iguales, el que comparten, el ángulo recto y por lo tanto también el tercero. Los situamos en posición de Tales para apreciar sus lados semejantes:



Al ser lados proporcionales se cumple que:

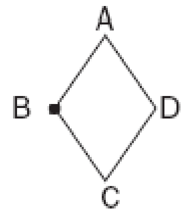
$$\frac{x}{15}=\frac{15}{25} \rightarrow x=\frac{15\cdot 15}{25}=9$$
$$\frac{y}{20}=\frac{15}{25} \rightarrow y=\frac{15\cdot 20}{25}=12$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dado el siguiente rombo, construir las figuras homóticas respecto a su vértice B:

a) Centro B y razón $k=2$.

b) Centro B y razón $k=-2$.

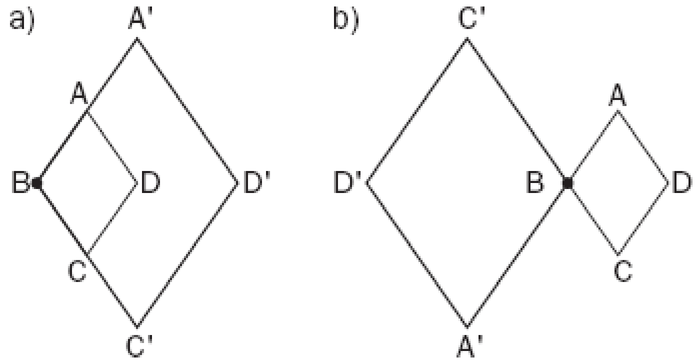


2. Obtener los lados del segundo triángulo rectángulo que se forma en el ejercicio 5.

3. Un roble tiene una sombra de 6,5 m a cierta hora del día. En ese mismo instante, un cobertizo que se sitúa a su lado y que tiene una altura de 2,8 m proyecta una sombra de 70 cm. ¿Cuál es la altura del roble?

SOLUCIONES

1.



2.

a) 12 cm.
b) 16 cm.

3. 26 m.

Tema 26

Vectores en el plano y en el espacio

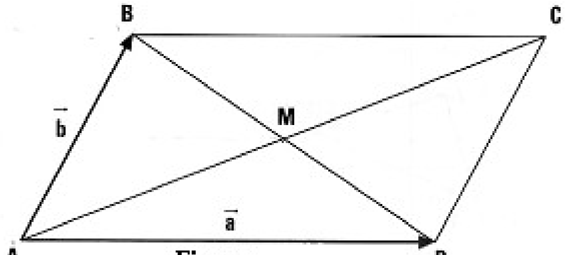
CONCEPTOS BÁSICOS

- Vectores. Operaciones. Representación gráfica.
- Combinación lineal. Independencia. Bases.
- Producto escalar, vectorial y mixto.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerando a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la siguiente figura como una base de V^2, calcular en función de dicha base los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$



Figura

Solución:

Dados dos vectores no nulos de diferente dirección, como los dados en el enunciado, cualquier otro vector del plano puede ser escrito en función de los dos primeros.
Si tenemos un vector $\vec{v}$ podemos encontrar dos números reales k_1 y k_2 tal que:

$$\vec{v}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$$

A los números k_1 y k_2 se les denomina componentes del vector $\vec{v}$ en la base formada por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y se escribe: $\vec{v}=(k_{1,}k_2)$

Considerando la figura del problema y los vectores dados, por la regla del paralelogramo podemos calcular todos los vectores fácilmente en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ Por tanto los coeficientes de los vectores $\vec{a}\, y \vec{b}$ son las componentes del vector $\vec{AC}$ en la base dada por los vectores $\vec{a}\, y \vec{b}$

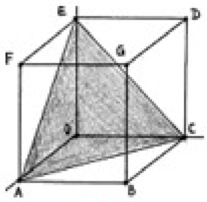
$$\overrightarrow{AC}=(1,1)$$
$$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=(-1,-1)$$
$\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$ ya que sería la suma del vector $\vec{b}$ y el vector $-\vec{a}$, por tanto en esta base:
$$\overrightarrow{DB}=(-1,1)$$
$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$ y sus componentes serán: $\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$ y sus componentes serán: $\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$ y sus componentes serán: $\overrightarrow{MC}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Por último la suma de los tres últimos vectores será la suma de sus componentes:
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

2. Las aristas del cubo de la siguiente figura miden 3 unidades. Calcular las coordenadas de todos sus vectores que aparecen si unimos todos los puntos dados con el punto O y calcular usando cálculo vectorial el área del triángulo ACE.



Figura

Solución:

Tenemos tres dimensiones en el espacio consideramos los ejes con origen en el punto O por lo que tendremos las siguientes coordenadas para los vectores pedidos:
$$\overrightarrow{OA}=(3,0,0),\ \overrightarrow{OB}=(3,3,0),\ \overrightarrow{OC}=(0,3,0)$$
$$\overrightarrow{OD}=(0,3,3),\ \overrightarrow{OE}=(0,0,3),\ \overrightarrow{OF}=(3,0,3)$$
$$\overrightarrow{OG}=(3,3,3)$$
Para calcular el área del triángulo ACE acudimos a la interpretación geométrica del producto vectorial, ya que si dos vectores son linealmente independientes, como es el caso de los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AC}$ el paralelogramo construido sobre ellos tiene un área que coincide con el módulo del producto vectorial de los dos vectores. El triángulo sombreado coincide con la mitad de dicho paralelogramo, por tanto:

Área del triángulo: $A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AE}\, x\, \overrightarrow{AC}|$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AE}\ y\ \overrightarrow{AC}$:
$$\overrightarrow{AE}=(0,0,3)-(3,0,0)=(-3,0,3);\ \overrightarrow{AC}=(0,3,0)-(3,0,0)=(-3,3,0)$$
Y su producto vectorial será:
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-9,9,-9)$$
El módulo de el producto vectorial:
$$\sqrt{(-9)^2+(-9)^2+(-9)^2}=15,59$$
Por lo que el área del triángulo será la mitad de este módulo, medido en unidades al cuadrado: Área del triángulo ACE = 7,795 u^2

3. Calcular el valor de a y b para que el vector $(a, b, 1)$ sea perpendicular a los vectores $(3,2,0)$ y $(2,1,-1)$ al mismo tiempo.

Solución:

El producto vectorial de dos vectores es otro vector simultáneamente perpendicular a ambos, por lo tanto calculamos dicho producto vectorial y posteriormente lo comparamos con el dado en el anunciado:

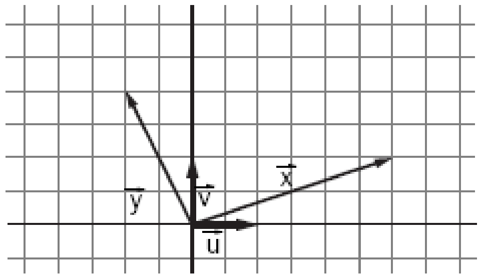
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,3,-1)$$

Para que el vector $(a, b, 1)$ tenga la misma dirección que el obtenido mediante el producto vectorial debe cumplir:

$$\frac{-2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{-1}{1}$$

Por tanto $a=2$ y $b=-3$; y el vector buscado es $(2,-3,1)$

4. Los vectores de la siguiente figura $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base ortonormal. Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, escribiendo sus coordenadas en función de la base dada y calcular el ángulo que forman entre ellos.



Solución:

Por definición una base ortonormal es aquella formada por dos vectores perpendiculares entre sí y cuyo módulo es la unidad, por tanto las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ serán:

$$\vec{x}=(3,1) ; \vec{y}=(-1,2)$$

El producto escalar de los vectores dados será:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(3,1)\cdot(-1,2)=3\cdot(-1)+1\cdot 2=-1$$

Para calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ usamos la definición de producto escalar que se iguala al producto de sus módulos por el coseno del ángulo formado entre los vectores:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\vec{x}\cdot\vec{y})$$

siendo el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ el menor de los ángulos existente entre ellos.

$$\cos(\vec{x}\cdot\vec{y})=\frac{(3,1)\cdot(-1,2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$$

Usando la función inversa del coseno, el ángulo formado por los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es de 98º.

5. Dados los puntos $A=(1,0,4)$, $B=(3,0,1)$, $C=(2,0,0)$ y $D(0,4,0)$ estudiar sin representarlos si son o no coplanarios.

Solución:

Cuatro puntos son coplanarios cuando pertenecen a un mismo plano. Esto se cumple si tres de los vectores formados entre ellos son linealmente dependientes, por lo que el rango de la matriz formada por dichos vectores debe ser menor que 3.

$$rg[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]<3$$

En caso contrario los vectores serán linealmente independientes.

Calculamos los vectores a partir de los puntos dados:

$$\overrightarrow{AB}=(3,0,1)-(1,0,4)=(2,0,-3)$$
$$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)-(1,0,4)=(1,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AD}=(0,4,0)-(1,0,4)=(-1,4,-4)$$

Para calcular el rango de la matriz, colocamos los vectores en tres columnas y hallamos su determinante. Si se iguala a 0 el rango de la matriz es menos que 3, pero en caso contrario será igual a 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

Por la regla de Sarrus podemos obtener el determinante obteniendo:

$$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0+0-12-(-32)=20$$

Como el resultado es distinto de cero los vectores son linealmente independientes por ser su rango igual a 3, por lo que los puntos no pueden ser coplanarios.

6. Calcular un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}=(3,2,0)$ y $\vec{v}=(0,2,1)$ a la vez y que tenga módulo 1.

Solución:

Calculando el producto vectorial de los dos vectores obtendremos una perpendicular a ambos:

$$\vec{u}\,x\,\vec{v}=(2,-3,6)$$

Pero este vector no es unitario ya que su módulo no es la unidad. Si lo dividimos entre su módulo obtendremos un vector con la misma dirección y sentido pero con módulo 1. Llamamos al vector obtenido $\vec{w}$

$$|\vec{w}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7$$

El vector unitario será:

$$\overrightarrow{u_w}=\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dados los puntos $A=(-2,-2)$, $B=(3,4)$, $C=(8-1)$. Calcular el punto D de manera que los puntos $ABCD$ formen un paralelogramo.

2. Calcular a y b para que los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(3,0,1)$ y $C=(a,b+1,2)$ estén alineados.

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,4,-8)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ y $\vec{w}=(1,2,3)$. Calcular:

a) $(\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})$

b) $|\vec{u}|,|\vec{v}\,x\,\vec{w}|$

SOLUCIONES

1. (3,-7)

2. $a=4\,;b=0$

3. a) 33

b) $9\,;3\sqrt{3}$

Tema 27

Geometría analítica en el plano

CONCEPTOS BÁSICOS

- Puntos y rectas.
- Ecuaciones de la recta.
- Posición relativa de dos rectas. Paralelismo y perpendicularidad.
- Distancias entre dos puntos, dos rectas y de un punto a una recta.
- Ángulo entre dos rectas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los puntos $A=(-1,2)$ y $B=(2,3)$, calcula:

a) La distancia entre los puntos A y B .
b) La recta r que pasa por esos dos puntos en todas las formas posibles.
c) La recta que es perpendicular a r y pasa por el punto $C=(2,-2)$.
d) La distancia del punto C a la recta r .

Solución:

a) La distancia entre dos puntos A y B es igual al módulo del vector que une A y B , es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Entonces $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,3)-(-1,2)=(3,1)$; el módulo de este vector es $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ y por lo tanto la distancia pedida entre A y B es $\sqrt{10}\ u$.

Nota: Se podría haber calculado con el vector $\overrightarrow{BA}$ pero el resultado es el mismo ya que la distancia es igual medirla desde A hasta B que desde B hasta A .

b) Para calcular las ecuaciones de una recta necesitamos un punto y un vector director de esa recta. En nuestro caso vamos a utilizar el punto $A=(-1,2)$ (se podría hacer igualmente con el punto B) y el vector director $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(3,1)$ calculado en el apartado anterior.
Entonces las ecuaciones de la recta en sus diferentes formas son:
Vectorial: $r:(x,y)=(-1,2)+k(3,1),\quad k\in\mathbb{R}$
Paramétricas: (separamos las dos coordenadas) $r:\begin{cases} x=-1+3k \\ y=2+k \end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$
Continua: (despejamos el parámetro k e igualamos) $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}$
General o implícita: (eliminamos denominadores multiplicando por 3, y después pasamos todos los términos al primer miembro) $r: x+1=3(y-2)\Leftrightarrow x-3y+7=0$
Explícita: (despejamos y de la ecuación anterior) $r: y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{7}{3}$

Punto-pendiente: (escribiendo la ecuación en la forma $y-b=m(x-a)$ siendo a y b las coordenadas de un punto de la recta), en nuestro caso tomando el punto $A=(-1,2)$. Entonces la ecuación de la resta es:

$$r: y-2=\frac{1}{3}(x+1)$$

c) Los coeficientes de la ecuación general de una recta r coinciden con las coordenadas de un vector perpendicular a dicha recta, por lo tanto dicho vector será el vector director de una recta r' perpendicular a la recta r. En nuestro ejemplo dicho vector perpendicular a r es $\vec{p}=(1,-3)$ y además es el vector director a la recta r' pedida.

Entonces el vector $\vec{v}=(3,1)$ es un vector perpendicular a r' que tendrá la forma:

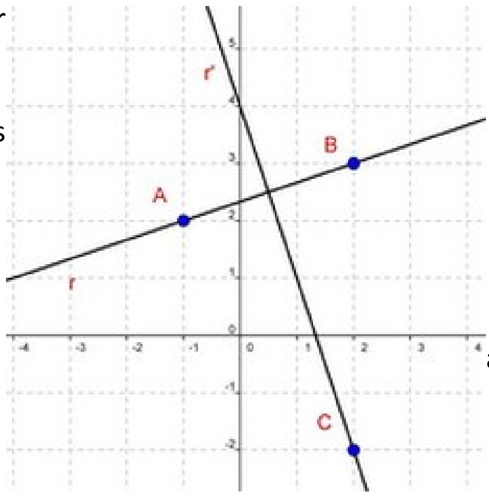
$$r': 3\mathrm{x}+y+d=0$$

Sustituyendo el punto $C=(2,-2)$ en r' podemos calcular el parámetro d:

$$3\cdot 2-2+d=0 \Leftrightarrow d=-4$$

La ecuación de la recta pedida es:

$$r': 3\mathrm{x}+y-4=0$$



d) Para calcular la distancia desde un punto $P=(a,b)$ a una recta $r: Ax+By+C=0$

Sabemos que:

$$d(P,r)=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Así no tenemos más que sustituir el punto C y la recta r en la ecuación y operar:

$$d(C,r)=\frac{|2-3\cdot(-2)+7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}\ u=\frac{3\sqrt{10}}{2}\ u$$

2. Calcula el valor del parámetro m para que la distancia desde el punto $P=(1,2)$ a la recta $r: mx+2\mathrm{y}-2=0$ sea igual a $\sqrt{2}\ u$.

<u>Solución:</u>

Tenemos que utilizar la ecuación de la distancia entre un punto y una recta, pero ahora sabiendo que el resultado tiene es $\sqrt{2}u$. Entonces:

$$d(P,r)=\frac{|m+2\cdot 2-2|}{\sqrt{m^2+2^2}}=\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+4}}.$$

Sabiendo que la distancia es $\sqrt{2}$ tendríamos la ecuación:

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+4}}=\sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros desarrollando:

$$\frac{(m+2)^2}{m^2+4}=2 \Leftrightarrow m^2+4\mathrm{m}+4=2\mathrm{m}^2+8 \Leftrightarrow m^2-4\mathrm{m}+4=0$$

Resolvemos ahora la ecuación de 2º grado:

$$m=\frac{4\mp\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

La única solución es $m=2$.

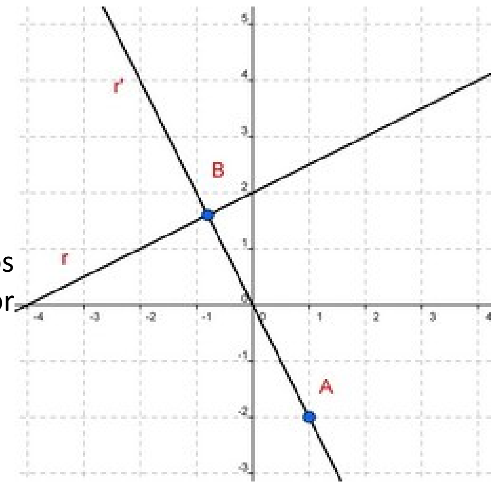
Si sustituimos ese valor podemos comprobar que el resultado es correcto.

3. Halla el punto de corte de la recta $r: x-2y+4=0$ con la recta que es perpendicular a ella que pasa por el punto $P=(1,-2)$.

Solución:

La recta perpendicular a r tiene la forma $r': 2x+y+d=0$.
Sustituyendo el punto $P=(1,-2)$ en la ecuación obtenemos el parámetro d : $2-2+d=0 \Leftrightarrow d=0$.
Entonces la recta perpendicular es $r': 2x+y=0$.
Para calcular el punto de corte de las dos rectas resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que forman las rectas, es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$



Multiplicamos la segunda ecuación por 2 $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$

Y sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$5x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$$

Para calcular y despejamos en cualquiera de las dos ecuaciones y sustituimos el valor de x calculado, por ejemplo de la segunda ecuación:

$$y=-2x \Leftrightarrow y=-2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow y=\frac{8}{5}$$

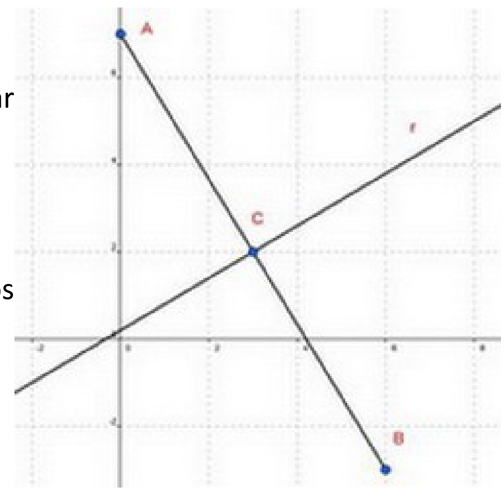
Por lo tanto punto de corte de las dos rectas es:

$$C=\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$$

4. Calcula el punto simétrico de $A=(0,7)$ respecto de la recta $r: 3x-5y+1=0$.

Solución:

Para resolver este ejercicio, primero calculamos la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por el punto A . Después calculamos el punto de corte C entre las dos rectas, y para finalizar teniendo en cuanta que el punto C es el punto medio del segmento que une A con su simétrico, podemos calcular las coordenadas de B .



La ecuación de la recta perpendicular tiene la forma

$$s: 5x+3y+d=0 \text{ .}$$

Sustituimos el punto A en esta ecuación para calcular el parámetro d :

$$5\cdot 0+3\cdot 7+d=0 \Leftrightarrow d=-21$$

Entonces la ecuación de la recta perpendicular es:

$$s: 5x+3y-21=0$$

El punto de corte de las dos rectas lo obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ 5x+3y-21=0 \end{cases}$$

La solución es $x=3, y=2$ y el punto de corte es:

$$C=(3,2) \text{ .}$$

Calculamos ahora el vector $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3,2)-(0,7)=(3,-5) \text{ .}$$

$$\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(3,-5)=(6,-10) \text{ .}$$

Ya podemos obtener las coordenadas del punto simétrico, para ello utilizamos la definición del vector que une dos puntos: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ y las coordenadas serán:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(6,-10)+(0,7)=(6,-3)\Rightarrow B=(6,-3)$$

5. El vértice A de un paralelogramo $ABCD$ está en el punto $(3,-4)$. Dos de sus lados están contenidos en las rectas de ecuaciones $r:2x+3y-7=0$ y $s:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{1}$. Halla las ecuaciones de las rectas que contienen los otros dos lados y el coseno del ángulo que forman las dos rectas que pasan por el punto *A*.

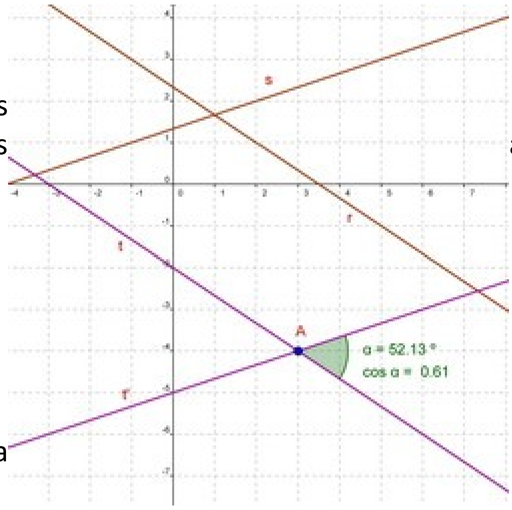
Solución:

Sustituyendo en las ecuaciones de las rectas r y s podemos comprobar que el punto A no pertenece a ninguna de las dos rectas.

Obtenemos la recta s en forma general multiplicando por 3:

$$s: x-3y+4=0 .$$

Las rectas que pasan por A que contienen los otros dos lados del paralelogramo tienen que ser paralelas a r y s, las llamaremos t y t'.



La recta t tiene la forma

$$t: 2x+3y+d=0$$

Obtenemos el parámetro d sustituyendo el punto A en la ecuación de t:

$$2\cdot 3+3\cdot(-4)+d=0\Leftrightarrow d=6$$

Por lo tanto $t: 2x+3y+6=0$.

La ecuación de la recta t' se calcula de la misma manera, pero al ser paralela a s tiene la forma:

$$t': x-3y+d=0$$

Sustituyendo, igual que antes, las coordenadas del punto A tendremos la ecuación de t':

$$3-3\cdot(-4)+d=0\Leftrightarrow d=-15$$

Entonces $t': x-3y-15=0$.

Para calcular el ángulo podemos utilizar los vectores directores o los vectores perpendiculares de las dos rectas.

Utilizamos, por ejemplo, los vectores perpendiculares:

$$\vec{n}=(2,3)\ y\ \vec{n}'=(1,-3).$$

Calculamos el módulo de los dos vectores:

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13} \quad \text{y} \quad |\vec{n}'|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

Ahora necesitamos el producto escalar de los dos vectores:

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\cdot 1+3\cdot(-3)=-7$$

Y para finalizar obtenemos el coseno del ángulo que es:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{|-7|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{130}} .$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Escribe, de todas las formas posible, las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A=(-1,3)$ y es paralela al vector $\vec{v}=(-3,4)$.

2. Calcula la distancia de la recta $r:\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$ al punto de intersección de las rectas $s:2x+3y-1=0$ y $t:x+y+2=0$.

3. Dadas las rectas $r:ax-2y+7=0$ y $s:\dfrac{x+1}{b}=\dfrac{y}{2}$, obtén a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P=(-1,2)$.

4. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas. En caso de ser secantes, calcula el punto de corte y si son paralelas calcula la distancia entre las rectas.

a) $r:(x,y)=(2,-1)+k(1,-1)$ $k\in\mathbb{R}$, $s:-x+y+5=0$.

b) $r:5x-y+7=0$, $s:-10x+2y-14=0$

c) $r:\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{1}$, $s:-x+5y+12=0$

5. Obtén la ecuación punto-pendiente de la recta paralela a $r:(x,y)=(2,5)+k\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$ $k\in\mathbb{R}$ que pasa por el punto $A=(1,-2)$.

SOLUCIONES

1. Vectorial: $(x, y)=(-1,3)+k(-3,4)\ k\in\mathbb{R}$

   Paramétricas: $\begin{cases} x=-1-3k \\ y=3+4k \end{cases}\ k\in\mathbb{R}$

   Continua: $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{4}$

   General: $4x+3y-5=0$

   Explícita: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

2. $d=4\sqrt{5}\ u$

3. $a=3, b=-3.$

4. Soluciones:
   a) Secantes (perpendiculares), el punto de corte es $P=(3,-2)$.
   b) Coincidentes.
   c) Paralelas. Distancia: $d=\frac{24}{\sqrt{26}}\ u$

5. $y+2=-\frac{3}{2}(x-1)$

Tema 28

Geometría analítica en el espacio

CONCEPTOS BÁSICOS

- Puntos y vector director de una recta.
- Ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de una recta.
- Ecuaciones vectorial, paramétricas y general de un plano.
- Posiciones relativas de rectas, de planos y de rectas y planos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{3} \qquad s: \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 3+2t \\ z = t \end{cases} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

<u>Solución:</u>

Ponemos la recta r en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora vemos si tienen o no puntos en común igualando ambas rectas y discutiendo el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas resultante por el teorema de Rouche.

$$\begin{cases} 1-3t = -2\lambda \\ 3+2t = 3+5\lambda \\ t = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t+2\lambda = -1 \\ 2t-5\lambda = 0 \\ t-3\lambda = 0 \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Las matrices A de los coeficientes y A* ampliada con los términos independientes son:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es dos ya que al menos un menor de orden 2 en A es no nulo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

para ver cuál es el rango de A*resolvemos su determinante:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3. Según el teorema de Rouche como los rangos son distintos el sistema es incompatible y por lo tanto las rectas no tienen puntos en común, y o se cruzan o son paralelas. Como sus vectores directores son linealmente independientes (no son combinación lineal) entonces no son paralelos y las rectas se cruzan.

Se puede hacer el problema razonando en términos de vectores solamente, cogiendo un punto, A, de la recta r y un punto, B, de la recta s y calculando el vector $\overrightarrow{AB}$. Se ve que los vectores directores de ambas rectas r y s, $\vec{V} = (-2,5,3)$ de la recta r y $\vec{W}$ = (-3,2,1) de la recta s, no son combinación lineal y por lo tanto no son paralelos, esto significa que las rectas ni son paralelas ni coincidentes como antes hemos dicho. Ahora, si las rectas se cortan deben estar en un mismo plano y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$ serán linealmente dependientes y si las rectas se cruzan dichos vectores serán linealmente independientes.

Escogemos los puntos dados en las rectas, $A(0,3,1)$ y $B(1,3,0)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$.
Podemos comprobar si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son linealmente dependientes o independientes de varias formas, una de ellas es poniéndolos en un determinante (como filas o como columnas y en el orden que queramos) y resolviéndolo, si sale distinto de cero son independientes. Se ve que sale el último determinante resuelto.
En definitiva las rectas r y s se cortan.

2. Calcula una ecuación continua de la recta dada de la forma:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 4x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

Si el anterior sistema es una recta debe ser un sistema compatible indeterminado, lo resolvemos por Cramer pasando cualquiera de las incógnitas al otro miembro

$$\cdot \begin{cases} 3x + 2y = -2 + 3z \\ 4x - 2y = 6 - z \end{cases}$$

Ahora despejamos x e y por Cramer en función de z que pasa a ser un parámetro (z = λ)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -14$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2+3\lambda & 2 \\ 6-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{4-6\lambda-12+2\lambda}{-14} = \frac{-8-4\lambda}{-14} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2+3\lambda \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix}}{-14} = \frac{18-3\lambda+8-12\lambda}{-14} = \frac{26-15\lambda}{-14} = \frac{-13}{7} + \frac{15}{14}\lambda \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$z = \lambda$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}\lambda \\ y=\dfrac{-13}{7}+\dfrac{15}{14}\lambda \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ahora sólo debemos de despejar el parámetro λ e igualar.

$$\frac{x-\frac{4}{7}}{\frac{2}{7}}=\frac{y+\frac{13}{7}}{\frac{15}{14}}=z$$

O también:

$$\frac{7x-4}{2}=\frac{14y+26}{15}=z$$

3. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 4x-2y+8z-3=0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

Estudiamos el sistema por Rouche escribiendo primero las matrices de los coeficientes y ampliada $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, A*\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

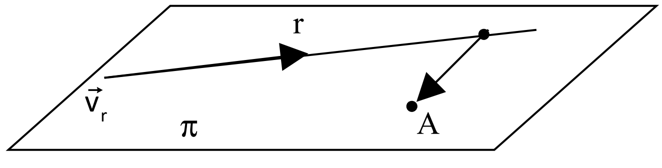
El rango de la matriz A es 1 ya que todos los menores de orden dos que podemos encontrar en ella son nulos (es decir las dos filas que forman la matriz son combinación lineal). El rango de la matriz A^* es 2 ya que al menos podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo en dicha matriz (es decir las filas que la forman no son combinación lineal):

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$$

Por lo tanto se cumple que los rangos de A y A^* son distintos y el sistema es incompatible, lo cual significa que los planos no tienen puntos en común y son paralelos.

4. Escribe la ecuación general o cartesiana del plano que contiene a la recta r:x = y = z y al punto $A(0,2,3)$

<u>Solución:</u>



Necesitamos dos vectores del plano no paralelos, uno de ellos puede ser el vector director de la recta, el otro lo podemos obtener calculando un punto de la recta y restándolo con el punto A. Con estos dos vectores y el punto A obtenemos las ecuaciones paramétricas.
El vector director de la recta es $\vec{v}(1,1,1)$ y un punto de la recta es el $(0,0,0)$.
Entonces el vector $(0,2,3)$ es un vector del plano.

Las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\lambda+2\mu \\ z=\lambda+3\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

La ecuación general del plano la obtenemos al resolver el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3y+2z=0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dados los puntos $A(1,3,5)$, $B(-2,4,1)$, halla las coordenadas del punto C, perteneciente al plano OXY, de forma que A, B y C estén alineados.
2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=1 \\ x-y+z=4 \end{array}\right\}$
3. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y contiene a la recta $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=2 \\ x-3y+z=1 \end{array}\right\}$
4. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:

a) $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{array}\right\} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 2x+y=-5 \\ 4x-z=-10 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} 2y-z=-7 \\ 2x-3y=8 \end{array}\right\} \end{array}\right.$

SOLUCIONES

1. $C\left(\frac{-11}{4},\frac{17}{4},0\right)$
2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$
3. El plano buscado es: $11x-13y-4z-16=0$
4.
   a) Las rectas se cortan en un punto de coordenadas $\left(\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$

   b) Las rectas se cruzan.

Tema 29

Problemas métricos en el plano y en el espacio

CONCEPTOS BÁSICOS

- Producto escalar, vectorial y mixto.
- Ángulos entre elementos del espacio.
- Distancias en el espacio.
- Vector normal de un plano.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula el ángulo que forman la recta $r: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ y el plano $\Pi: 4x+5y+z+2=0$

Solución:

El ángulo entre la recta y el plano es 90° menos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\vec{v}=(-1,3,1), \vec{n}=(4,5,1)$$

Teniendo en cuenta la definición de producto escalar y su expresión analítica podemos calcular el ángulo entre recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}\cdot\vec{n}=(-1,3,1)\cdot(4,5,1)=-4+15+1=12 \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{11}\sqrt{42}\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{42}} \Rightarrow \alpha=56°$$

Luego el ángulo entre la recta y el plano es 90° - 56° = 34°.

2. Calcula la distancia del punto $P(3,-2,4)$ al plano $\Pi: 3x+6y+z+6=0$.

Solución:

Calculamos la ecuación de la recta, r, perpendicular al plano Π y que pasa por el punto P. El vector normal del plano es un vector director de esta recta.

El vector normal del plano es $\vec{n}=(3,6,1)$ y por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r: \begin{cases} x=3+3\lambda \\ y=-2+6\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora calculamos Q, el punto de corte de la recta r y el plano Π. Para ello sustituimos las ecuaciones parametricas de la recta r en el plano Π :

$$3(3+3\lambda)+6(-2+6\lambda)+(4+\lambda)+6=0 \Rightarrow 46\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-7}{46}$$

El punto de corte lo calculamos sustituyendo este valor de λ en la recta

$$Q=\left(\frac{117}{46},-\frac{134}{46},\frac{177}{46}\right)$$

La distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{QP}=\left(\frac{21}{46},\frac{42}{46},\frac{7}{46}\right) \Rightarrow d=|\overrightarrow{QP}|=\sqrt{\left(\frac{21}{46}\right)^2+\left(\frac{42}{46}\right)^2+\left(\frac{7}{46}\right)^2}=\frac{7}{\sqrt{46}}$$

La distancia entre el punto P y el plano Π es $\frac{7}{\sqrt{46}}\ u$

3. Calcula la distancia del punto $P(6,-3,4)$ a la recta $r:\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$

Solución:

Lo primero que vamos a hacer es poner la recta en paramétricas y para ello resolvemos el sistema compatible indeterminado por Cramer.

$$\begin{cases} 2x-y=-3-2z \\ 3x-y=4-z \end{cases}$$

Si $z=\lambda$. Entonces tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=-3-2\lambda \\ 3x-y=4-\lambda \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3-2\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{1}=3+2\lambda+4-\lambda=7+\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3-2\lambda \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}}{1}=8-2\lambda+9+6\lambda=17+4\lambda \qquad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$z=\lambda$$

La distancia entre el punto P y la recta r es la distancia entre P y Q, en donde Q es el punto de corte de la recta r y la perpendicular a dicha recta que pasa por P. Como el punto Q pertenece a la recta r sus coordenadas son de la forma:

$$Q(7+\lambda,17+4\lambda,\lambda)$$

Y por lo tanto el vector $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$\overrightarrow{PQ}=(1+\lambda,20+4\lambda,-4+\lambda).$$

El vector director de la recta r y el vector $\overrightarrow{PQ}$ deben ser perpendiculares y así su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=(1+\lambda,20+4\lambda,-4+\lambda)\cdot(1,4,1)=0 \Rightarrow 1+\lambda+80+16\lambda-4+\lambda=0$$

Luego $\lambda=\frac{-77}{18}$ y la distancia pedida es:

$$d=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(1-\frac{77}{18}\right)^2+\left(20-\frac{308}{18}\right)^2+\left(-4-\frac{77}{18}\right)^2}=\frac{\sqrt{28.386}}{18}\approx 9{,}36\,u$$

4. Calcula el área del triángulo definido por los vectores $(4,-1,3)$ y $(-5,3,1)$

Solución:

Como sabemos, el área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que definen el triángulo.

$$\vec{C}=(4,-1,3)\times(-5,3,1)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10\,\hat{i}-19\,\hat{j}+7\,\hat{k}=(-10,-19,7)$$

Luego el área, S, del triángulo es: $S=\frac{|\vec{C}|}{2}=\frac{|(4.-1,3)\times(-5,3,1)|}{2}=\frac{\sqrt{510}}{2}u^2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula el ángulo formado por los planos $\Pi_1: x+y-3z=1$ y $\Pi_2: 2x-3y+2z=2$

2. Halla la ecuación de la recta proyección de la recta $r:\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x-y+3z=-4 \end{cases}$ sobre el plano $\Pi: 2\mathrm{x}-y+3\mathrm{z}+5=0$

3. Calcula la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$

4. Calcula el área y el volumen del tetraedro determinado por los puntos $A(0,0,0)$, $B(0,a,a)$, $C(a,0,a)$ y $D(a,a,0)$.

SOLUCIONES

1. El ángulo formado por los planos Π_1 y Π_2 es 59,2°
2. La proyección es: $\begin{cases} 13x-16y-11=0 \\ 19x+48z+91=0 \end{cases}$
3. La distancia entre la recta r y punto P 3 unidades
4. El área es $2\sqrt{3}a^2 \ u^2$ y volumen es $\frac{|a^3|}{3} \ u^3$

Tema 30

Cónicas

CONCEPTOS BÁSICOS

- Concepto de lugar geométrico.
- La circunferencia.
- La elipse.
- La hipérbola.
- La parábola.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto (4, 0) y radio 5, calcula también las ecuaciones de las rectas tangentes a dicha circunferencia en los puntos de abscisa 2.

Solución:

La ecuación de una circunferencia de centro (a, b) y radio R es: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
Sólo tenemos que sustituir las coordenadas del centro y el radio y obtenemos la ecuación de la circunferencia: $(x - 4)^2 + y^2 = 25$.
Las rectas tangentes se pueden calcular de varias formas.

Calculamos los puntos de tangencia, estos deben cumplir con la ecuación de la circunferencia, sustituyendo x = 2 en la misma obtenemos que $y = \pm\sqrt{21}$, es decir, los puntos de tangencia son $(2,\sqrt{21})$ y $(2,-\sqrt{21})$.
Nos fijamos en el punto situado en el semiplano superior, la recta que pasa por el centro y el punto de tangencia (la que contiene al radio) debe ser perpendicular a la recta tangente a la circunferencia en dicho punto.

El vector director de esta recta debe ser: $\vec{v}=(4,0)-(2,\sqrt{21})=(2,-\sqrt{21})$,entonces $m = \dfrac{-\sqrt{21}}{2}$

y por lo tanto la pendiente de la recta tangente debe ser:

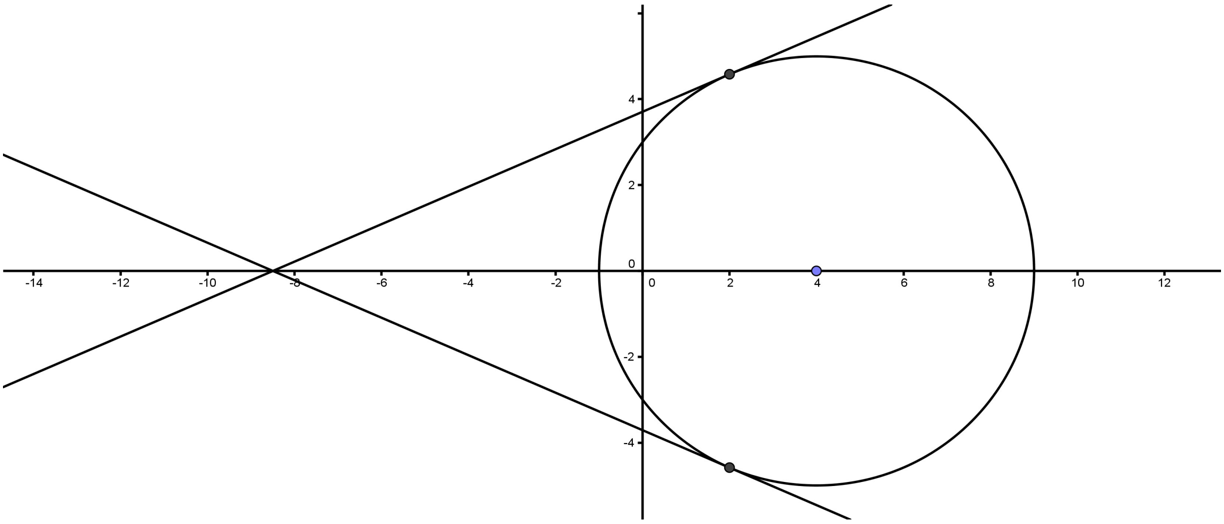
$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

Y ya sólo tenemos que escribir la ecuación punto – pendiente de la recta

$$(y-\sqrt{21}) = \frac{2}{\sqrt{21}}(x-2)$$

La recta tangente del semiplano inferior se calcula del mismo modo y queda:

$$(y+\sqrt{21}) = \frac{-2}{\sqrt{21}}(x-2)$$



(Otro modo de hacerlo es utilizando la interpretación geométrica de la derivada: "la derivada de la función $y=\sqrt{(25-(x-4)^2)}$ debe ser la pendiente de la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa 2")

2. Halla los elementos de las siguientes elipses:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{10}=1 \qquad 3x^2+y^2=121$$

Solución:

Simplemente tenemos que comparar con la ecuación de la elipse y utilizar las relaciones entre los elementos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

en donde (x_0, y_0) es el centro de la elipse, a es el semieje mayor y b es el semieje menor. Sabemos que se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$, en donde c es la distancia del foco al centro o semidistancia focal y $e=\frac{c}{a}$ es la excentricidad.

Evidentemente la primera elipse está centrada en el origen (0, 0), su semieje mayor es a = 5 y su semieje menor es b = $\sqrt{10}$. Por lo tanto las coordenadas de los vértices sobre el eje mayor son $A'(-5,0), A(5,0)$, y sobre el eje menor: $B'=(0,-\sqrt{10}), B(0,\sqrt{10})$. La semidistancia focal es $c=\sqrt{25-10}=\sqrt{15}$ luego las coordenadas de los focos son $F'(-\sqrt{15},0), F(\sqrt{15},0)$ y por último la excentricidad es $e=\frac{\sqrt{15}}{5}$

Transformamos la segunda elipse para poder compararla con la ecuación general

$$\frac{3x^2}{121}+\frac{y^2}{121}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{11}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{11^2}=1$$

Esta elipse también está centrada en el punto (0, 0), sus semiejes son a = 11 y $b=\frac{11}{\sqrt{3}}$ y por lo tanto las coordenadas de sus vertices son:

$$A(0,11), \quad A'(0,-11), \quad B\left(\frac{11}{\sqrt{3}},0\right), \quad B'\left(\frac{-11}{\sqrt{3}},0\right)$$

Observamos que el semieje mayor de la elipse es paralelo al eje Y

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{\left(121-\frac{121}{3}\right)}=11\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Luego las coordenadas de los focos son:

$$F\left(11\sqrt{\frac{2}{3}},0\right), \quad F'\left(-11\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$$

Y la excentricidad es:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{11\sqrt{\frac{2}{3}}}{11}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. Halla los semiejes real e imaginario de la hipérbola, centrada en el origen, que pasa por el punto P(2, -6) y cuyo foco es F(3, 0)

Solución:

Sabemos que la ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ y la relación entre sus elementos es $c^2=a^2+b^2$

Sustituimos y obtenemos las ecuaciones: $\frac{2^2}{a^2}-\frac{(-6)^2}{b^2}=1$ y $9=a^2+b^2$

$$4b^2 - 36a^2 = a^2b^2,$$
$$4\,(9 - a^2) - 36a^2 = a^2\,(9 - a^2)\,,$$
$$36 - 4a^2 - 36a^2 - 9a^2 + a^4 = 0,$$
$$a^4 - 49a^2 + 36 = 0$$
$$a^2 = t$$
$$\Rightarrow t=\frac{49\pm\sqrt{49^2-4\cdot 36}}{2}=\frac{49\pm\sqrt{2257}}{2}=\frac{49\pm 47{,}5}{2}=\begin{cases} t=48{,}25 \\ t=0{,}75 \end{cases}$$

Si t = a^2 = 48,25 observamos que b no existe

$b=\sqrt{9-0{,}75}=2{,}9$, (es una hipérbola cuyo eje real es el eje y ya que b > a). Luego los semiejes son a = 0,87 y b = 2,9.

4. Halla el foco, la directriz y el vértice de la parábola de ecuación:

$$y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{25}{6}$$

Solución:

La ecuación de una parábola cóncava con directriz horizontal, cuyo vértice es el origen de coordenadas es $y=\frac{1}{2p}x^2$ (en donde p es la distancia entre el foco y la directriz) y por lo tanto la ecuación de una parábola cuyo vértice es el punto (a, b) es $(y-b)=\frac{1}{2p}(x-a)^2$.

Desarrollando esta ecuación obtenemos:

$$y-b=\frac{1}{2p}(x^2+a^2-2x)\Rightarrow y=\frac{1}{2p}x^2-\frac{a}{p}x+\frac{a^2}{2p}+b$$

que es la ecuación general de una parábola.

La comparamos con la ecuación de la parábola dada en el enunciado:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2p}\Rightarrow p=3$$

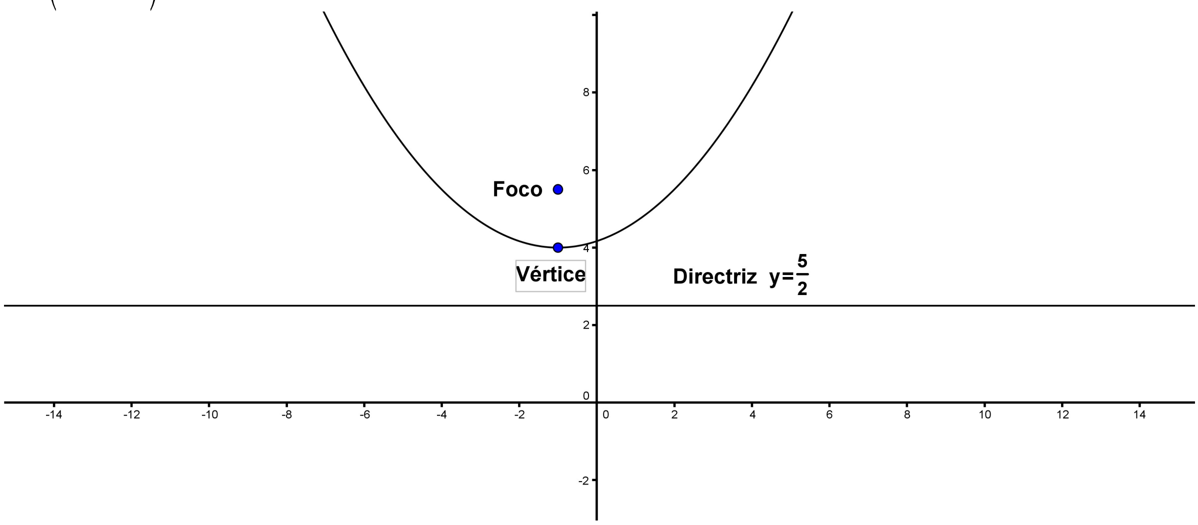
$$\frac{1}{3}=\frac{-a}{3}\Rightarrow a=-1$$

$$\frac{25}{6}=\frac{1}{6}+b\Rightarrow b=4$$

Luego el vértice es el punto V(-1, 4)

Como la distancia entre el vértice y la directriz es $\frac{p}{2}$ ésta, estará por debajo del vértice a una distancia de $\frac{3}{2}$ y su ecuación debe ser, lógicamente,$y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

El foco debe estar por encima del vértice (en la recta x = -1) a una distancia de $\frac{3}{2}$ también y por lo tanto su coordenada y es $y=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$. Es decir, el foco es el punto F de coordenadas $\left(-1,\frac{11}{2}\right)$.



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (1, 3) y de la recta y = 2. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes y normal en el punto de abscisa x = 5.
2. Halla la semidistancia focal, los semiejes, la excentricidad y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:
   a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$
   b) $4x^2-y^2=4$
3. Calcula la ecuación de la circunferencia cuyo radio vale 3, pasa por el punto (2, 4) y su centro está en la bisectriz del primer cuadrante.
4. Halla el eje, el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x - 15$.

SOLUCIONES

1. El lugar geométrico es la parábola $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$, la recta tangente es: $y=4x-\frac{19}{2}$, la recta normal es $y=\frac{-1}{4}x+\frac{47}{4}$.

2.

a) a = 6, b = 8, c = 10, e = 5/3, $y=\pm\frac{4}{3}x$

b) a = 1, b = 2, $c=\sqrt{5}$, $e=\sqrt{5}$, $y=\pm 2x$

3. $\left[x-\left(\frac{6+\sqrt{14}}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{6+\sqrt{14}}{2}\right)\right]^2=9$, $\left[x-\left(\frac{6-\sqrt{14}}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{6-\sqrt{14}}{2}\right)\right]^2=9$

4. El eje es x = -1, vértice (-1, -16), foco $\left(-1,-\frac{63}{4}\right)$, directriz $y=\frac{-65}{4}$.

Tema 31

Combinatoria

CONCEPTOS BÁSICOS

- Números factoriales y combinatorios. El triángulo de Tartaglia.
- Ecuaciones combinatorias. El binomio de Newton.
- Combinatoria. Técnicas básicas de recuento.
- Variaciones. Variaciones con repetición.
- Permutaciones. Permutaciones con repetición.
- Combinaciones.
- Resolución de problemas de recuento.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Desarrolla el siguiente binomio de Newton: $(2x-3y)^5$.

<u>Solución:</u>

La fórmula del binomio de Newton es:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\,a^n+\binom{n}{1}\,a^{n-1}b+\binom{n}{2}\,a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\,ab^{n-1}+\binom{n}{n}\,b^n$$

Para ello lo primero es identificar los términos del binomio y a continuación se sustituyen los valores correspondientes y se desarrolla el binomio, que en nuestro ejemplo son $a=2x,\, b=-3y,\, n=5$ (es importante fijarse en el signo de los términos ya que debemos incluirlo), y a partir de aquí desarrollamos la ecuación; los números combinatorios que aparecen se calculan directamente con la definición o con el triángulo de Tartaglia, y son:

$$\binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1,\ \binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5,\ \binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10$$

Finalmente desarrollamos el binomio:

$$(2x-3y)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4(-3y)+\binom{5}{2}(2x)^3(-3y)^2++\binom{5}{3}(2x)^2(-3y)^3+$$

$$+\binom{5}{4}(2x)(-3y)^4+\binom{5}{5}(-3y)^5=2^5\cdot x^5+5\cdot 2^4\cdot x^4\cdot(-3y)+10\cdot 2^3\cdot x^3\cdot(-3)^2\cdot y^2+10\cdot 2^2\cdot x^2\cdot(-3)^3\cdot y^3+$$

$$+5\cdot 2\mathrm{x}\cdot(-3)^4\cdot y^4+(-3)^5\cdot y^5=32\cdot x^5-240\cdot x^4\cdot y+720\cdot x^3\cdot y^2-1080\cdot x^2\cdot y^3+810\cdot x\cdot y^4-243\cdot y^5$$

2. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{8!\cdot(n+1)!}{6!\cdot(n-1)!}$

b) Obtén la solución de la siguiente ecuación combinatoria: $V_{x,4}=20\cdot V_{x,2}$

Solución:

a) Para simplificar una expresión de este tipo se desarrollan los factoriales según su definición y se simplifican los términos comunes. En este caso:

$$\frac{8!\cdot(n+1)!}{6!\cdot(n-1)!}=\frac{8\cdot7\cdot6!\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{6!\cdot(n-1)!}$$

Al desarrollar todos los factores de la fracción vemos que en el numerador y en el denominador aparecen los términos comunes $6!\ y\,(n-1)!$ que podemos simplificar, de este modo, obtenemos $8\cdot7\cdot(n+1)\cdot n=56\cdot(n^2+n)$, que es la solución.

b) Para resolver una ecuación combinatoria, lo primero que hacemos es sustituir los términos por sus desarrollos en factoriales según la fórmula que le corresponda, después se simplifican los factoriales, se resuelve la ecuación resultante y para finalizar se comprueban las soluciones.
En nuestro ejercicio:

$$V_{x,4}=20\cdot V_{x,2}\Leftrightarrow\frac{x!}{(x-4)!}=20\cdot\frac{x!}{(x-2)!}$$

Simplificamos el factor $x!$ y multiplicando por $(x-4)!\cdot(x-2)!$, tenemos entonces:

$$(x-2)!=20\cdot(x-4)!$$

Desarrollando el factorial del 2º miembro para simplificarlo:

$$(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)!=20\,(x-4)!\Leftrightarrow(x-2)\cdot(x-3)=20\Leftrightarrow x^2-5\mathrm{x}-14=0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot(-14)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{5\pm9}{2}$$

Cuyas soluciones son $x_1=7\ y\ x_2=-2$, de éstas $x_2=-2$ no es válida por ser un número negativo. Si sustituimos el valor $x_1=7$ en la ecuación podemos comprobar que es solución de la ecuación original.

3. En el coche de una familia caben sus 5 miembros. ¿De cuántas formas pueden ocupar las cinco plazas si todos tienen carné de conducir? ¿De cuántas formas podrían ocupar las plazas si sólo dos de ellos tuvieran carnet?

Solución:

Tenemos un coche de 5 plazas en la que se van a sentar 5 personas. Como todas ellas tienen carnet de conducir, todas pueden sentarse en el asiento del piloto. Por lo tanto en la primera pregunta es claramente un caso de permutaciones de 5 elementos, es decir:

$$N=P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$$

El coche se puede ocupar de 120 formas distintas.

Para la segunda pregunta vemos que, de las 5 personas que viajan en el coche, solamente 2 pueden ser pilotos, entonces para el asiento del piloto hay dos opciones, para los otros 4 asientos tenemos otras 4 personas que no importa donde se sienten, es decir, para los otros 4 asientos es una permutación de 4 elementos. Entonces el resultado final es:

$$N=2\cdot P_4=2\cdot4!=2\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=48$$

Si sólo dos tienen carnet de conducir el coche se puede ocupar de 48 formas distantas.

4. ¿Cuántas palabras de 5 letras (con o sin sentido) pueden formarse con las letras de la palabra DESTINO? ¿Cuántas empiezan por vocal? ¿Cuántas terminan en SE?

Solución:

La palabra DESTINO tiene siete letras distintas. Para la primera pregunta tenemos que seleccionar 5 letras de entre las siete letras distintas. Debemos tener en cuenta el orden ya que al cambiar la posición de las letras la palabra formada es distinta.
Entonces lo que tenemos son variaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 5 en 5:

$$N=V_{7,5}=\frac{7!}{2!}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=2520$$

Se pueden formar 2520 palabras distintas de cinco letras con las letras de la palabra DESTINO.

En la segunda pregunta vemos que las palabras deben comenzar por vocal, es decir, para la primera letra tenemos 3 opciones que son las vocales E, I y O, para el resto de las 4 letras que nos faltan podemos poner cualquiera de las 6 letras que faltan una vez que hemos colocado una vocal al principio. Entonces para el resto de las letras tenemos variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4, es decir, que el número total es:

$$N=3\cdot V_{6,4}=4\cdot\frac{6!}{2!}=4\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=1440$$

Se pueden formar 1440 palabras distintas que empiezan por vocal de cinco letras con las letras de la palabra DESTINO.

Por último, tenemos que en la tercera pregunta las palabras deben terminar en SE, es decir, que estas posiciones están fijas. Entonces para las 3 primeras posiciones nos quedan 5 letras, es decir, que la solución son variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$N=V_{5,3}=\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$$

Se pueden formar 60 palabras distintas de cinco letras que terminan en SE con las letras de la palabra DESTINO.

5. A un concurso literario se presentan 20 personas. Si está previsto conceder tres premios a tres participantes distintos: ¿De cuántas formas distintas pueden elegirse a los premiados si los tres premios son diferentes? ¿Y si los tres premios son iguales?

Solución:

Lo primero que debemos tener en cuenta es que no puede haber repetición ya que se entregan los tres premios a tres participantes distintos.

En la primera pregunta los tres premios son distintos, es decir, que importa el orden; entonces en este caso la solución serán variaciones sin repetición de 20 elementos tomados de 3 en 3:

$$N=V_{20,3}=\frac{20!}{17!}=20\cdot19\cdot18=6840$$

Se pueden conceder los tres premios de 6840 formas distintas si los premios son diferentes.

Para la segunda pregunta los tres premios son iguales, esto significa que no importa el orden de los premiados ya que reciben el mismo regalo, entonces en este caso serán combinaciones sin repetición de 20 elementos tomados de 3 en 3:

$$N=C_{20,3}=\frac{20!}{17!\cdot3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2}=1440$$

Se pueden conceder los tres premios de 1440 formas distintas si los premios son iguales.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Desarrolla el siguiente binomio de Newton: $(3-x)^5$.
2. Resuelve los siguientes ejercicios:
   a) Simplifica la siguiente expresión: $\frac{n!\cdot(n+1)!}{((n-1)!)^2}$.
   b) Obtén la solución de la siguiente ecuación combinatoria: $\binom{x+1}{4}=2\cdot\binom{x}{3}$
3. En una clase hay 14 chicas y 10 chicos. Queremos seleccionar un jurado para un premio en la escuela formado por 5 alumnos.
   a) ¿De cuántas formas podemos seleccionar el jurado?.
   b) ¿De cuántas formas podemos seleccionarlo si debemos escoger 2 chicas y 3 chicos?
4. Un entrenador de un equipo de baloncesto tiene que escoger un equipo en el que juegan 1 base, 2 aleros y 2 pívots. En la plantilla tiene un total de 3 bases, 5 aleros y 4 pívots. ¿Cuántos equipos distintos puede seleccionar?
5. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5:
   a) ¿Cuántos números de 5 cifras, sin repetición , se pueden formar?
   b) ¿Cuántos son pares?
   c) ¿Cuántos son múltiplos de 5?.
   d) ¿Cuántos empiezan en 1 y terminan en 4?

SOLUCIONES

1. $-x^5+15\cdot x^4-90\cdot x^3+270\cdot x^2-405\cdot x+243$
2.
   a) $n^2\cdot(n+1)$
   b) $x=7$
3.
   a) 42504
   b) 10920
4. 180
5.
   a) 120
   b) 48
   c) 24
   d) 6

Tema 32

Probabilidad

CONCEPTOS BÁSICOS

- Experimentos aleatorios. Espacio muestral. Sucesos.
- Definición clásica de probabilidad. Regla de Laplace.
- Definición frecuentista de probabilidad. Ley de los grandes números.
- Sucesos dependientes e independientes.
- Probabilidad condicionada.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Describe dos espacios muestrales (uno discreto y otro continuo) de dos experimentos aleatorios y describe dos sucesos de cada uno de ellos.

Solución:

Experimento aleatorio discreto. Se lanzan dos dados distintos. El espacio muestral está formado por todos los posibles resultados que se pueden obtener en el experimento. Como los dados son distintos, no es lo mismo obtener un 1 en el primer dado y un 2 en el segundo que obtener un 2 en el primer dado y un 1 en el segundo. Cada dado tiene seis caras, en total hay $6 \cdot 6 = 36$ posibles resultados. Por tanto el espacio muestral del experimento es {1 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 1, 2 2, 2 3, …, 6 5, 6 6}

Experimento aleatorio continuo. Tiempo de espera en la parada para coger el autobús, si el autobús pasa cada 20 minutos. Los posibles resultados del experimento son cualquier tiempo desde el tiempo 0 (llego justo cuando el autobús sale de la parada) al tiempo 20 minutos (llego justo cuando el autobús está saliendo de la parada) Si expresamos el tiempo en segundos los elementos del espacio muestral son todos los números reales del intervalo $[0,1200]$

2. El 20% de los habitantes de una gran ciudad han votado al partido político *B*. Se seleccionan tres personas al azar. Calcular razonadamente:

a) La probabilidad de que los tres hayan votado al partido *B*
b) La probabilidad de que ninguno haya votado al partido *B*
c) La probabilidad de que sólo uno de los tres haya votado al partido *B*

Nota: El número de habitantes del pueblo es tan grande que después de seleccionar a uno, dos o tres habitantes se tiene que el 20% de los no seleccionado han votado al partido B.

Solución:

Llamemos *B* al suceso "una persona ha votado al partido *B*".
Del enunciado se deduce que $P(B)=0{,}2$

a) De la nota se deduce que la probabilidad de que tres personas distintas voten al partido *B* es independiente luego $P(BBB)=P(B)\cdot P(B)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}008$
Luego la probabilidad de que los tres hayan votado al partido *B* es 0,008.

b) El suceso "una persona no ha votado *B*" es el suceso complementario del suceso *B* luego $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}2=0{,}8$.
Por tanto $P(\bar{B}\bar{B}\bar{B})=P(\bar{B})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{B})=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}512$
Luego la probabilidad de que ninguno haya votado por el partido B es 0,512.

c) Sea *C* el suceso "Solo una persona ha votado por al partido *B*". El suceso *C* está formado por tres sucesos elementales:
   - La primera persona ha votado al partido *B* y las otras dos no.
   - La segunda persona ha votado al partido *B* y las otras dos no.
   - La tercera persona ha votado al partido *B* y las otras dos no.

Es decir, $C=B\bar{B}\bar{B}\cup\bar{B}B\bar{B}\cup\bar{B}\bar{B}B$. Como los tres sucesos elementales son disjuntos entonces $P(C)=P(B\bar{B}\bar{B})+P(\bar{B}B\bar{B})+P(\bar{B}\bar{B}B)=0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}384$
Luego la probabilidad de que sólo uno haya votado por el partido *B* es 0,384.

3. Una encuesta revela que el 35 % de los habitantes de una ciudad oye la emisora *A*, el 28% oye la emisora *B* y el 10% oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de estos ciudadanos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que escuche alguna de esas emisoras
b) Que no escuche ninguna de ellas
c) Que escuche la emisora *A* sabiendo la persona no escucha la emisora *B*
d) Que escuche la emisora *A* sabiendo la persona escucha la emisora *B*
e) Que escuche sólo una de las dos emisoras

Solución:

Llamemos *A* al suceso "una persona escucha la emisora *A*" y *B* al suceso "una persona escucha la emisora *B*".
Recopilemos toda la información del enunciado en una tabla de doble entrada.

	A	$\bar{A}$	
B	10%		28%
$\bar{B}$			
	35%		

Como sólo escuchan la emisora *A* el 28%, entonces el 72% no escuchan la emisora *A.*
Si del 28 % de las personas que escuchan la emisora *B,* el 10% también escucha la emisora *A,* entonces hay un 18% de personas que escuchan la emisora *B* y no escucha la emisora *A.*
Y con razonamientos análogos se completa la tabla de quedando de la siguiente manera:

	A	$\bar{A}$	
B	10%	18%	28%
$\bar{B}$	25%	47%	72%
	35%	65%	100%

a) El suceso "una persona escucha alguna de las dos emisoras" es el suceso $A \cup B$, ya que son las personas que están en el suceso *A* o en el suceso *B*.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{35}{100} + \frac{28}{100} - \frac{10}{100} = \frac{53}{100} = 0{,}53$$

Luego la probabilidad de que una persona escuche alguna de las dos emisoras es 0,53.

b) El suceso "una persona no es escucha ninguna de las dos emisoras" es el suceso complementario el suceso $A \cup B$, ya que son las personas que no escuchan alguna de las dos emisoras. Luego la probabilidad pedida en este apartado es

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

La probabilidad de que una persona no escuche ninguna de las dos emisoras es 0,47

c) El suceso "una persona escucha la emisora *A* sabiendo que no escucha la emisora *B*" es el suceso $A|_{\bar{B}}$. $P(A|_{\bar{B}}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{28}{100}} = \frac{25}{72} = 0{,}347$.

Luego la probabilidad de que una persona escuche la emisora *A* sabiendo que no escucha la emisora *B* es 0,347.

d) El suceso "una persona escucha la emisora *A* sabiendo que escucha la emisora *B*" es el suceso $A|_B$. $P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{28} = 0{,}357$.

Luego la probabilidad de que una persona escuche la emisora *A* sabiendo que escucha la emisora *B* es 0,357.

e) El suceso "una persona sólo escucha una de las dos emisoras" es el suceso intersección $A \cap B$, ya que son las personas que están en el suceso *A* y en el suceso *B* al mismo tiempo.

$$P(A \cap B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{25}{100} + \frac{18}{100} = 0{,}43$$

En este caso no tenemos que restar la probabilidad de la intersección porque los sucesos son disjuntos $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Luego la probabilidad de que una persona escuche sólo una de las dos emisoras es 0,43

4. En un instituto se ofertan tres modalidades de estudios excluyentes, A,B y C. Los alumnos tienen que elegir entre estudiar francés o inglés. La modalidad A es elegida por el 50% de los alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%.

También se conoce que han elegido inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la modalidad C, habiendo elegido francés el resto de los alumnos.

a) ¿Que porcentaje de estudiantes del instituto ha elegido francés?
b) Si se elige al azar un estudiante de francés, ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido la modalidad A?

Solución:

Llamemos *A* al suceso “el alumno ha elegido la modalidad *A”*. De forma análoga definimos los sucesos *B* y *C.* Llamamos *I* al suceso “el alumno ha elegido estudiar inglés”, análogamente se define el suceso *F.* Del enunciado sabemos que:

$$P(A)=0{,}5 \quad P(I|_A)=0{,}8 \qquad\qquad P(F|_A)=0{,}2$$
$$P(B)=0{,}3 \quad P(I|_B)=0{,}9 \quad \text{Como } \bar{I}=F \text{ entonces } P(F|_B)=0{,}1$$
$$P(C)=0{,}2 \quad P(I|_C)=0{,}75 \qquad\qquad P(F|_C)=0{,}25$$

a) Los sucesos A, B y C son un recubrimiento disjunto del espacio muestral, es decir, $A\cup B\cup C=\Omega$ y $A\cap B=\emptyset$ $B\cap C=\emptyset$ y $A\cap C=\emptyset$ luego podemos aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular la probabilidad del suceso F.
$$P(F)=P(A)\cdot P(F|_A)+P(B)\cdot P(F|_B)+P(C)\cdot P(F|_C)=0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}25=0{,}18$$
Estudian francés en el instituto el 18% de los alumnos.

b) Hay que calcular la probabilidad del suceso $A|_F$ .Aplicando el teorema de Bayes $P(A|_F)=\dfrac{P(F|_A)\cdot P(A)}{P(F)}=\dfrac{0{,}2\cdot 0{,}5}{0{,}18}=0{,}\hat{5}$. Luego, la probabilidad de que un alumno que estudie francés haya elegido la modalidad A es $0{,}\hat{5}$

5. A un cumpleaños asisten 23 personas, ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos dos personas en esa fiesta que cumplan años el mismo día?

Solución:

Llamemos *A* al suceso “hay al menos dos personas en la fiesta que cumplen años el mismo día”. El suceso complementario de *A* es “Que todos en la fiesta cumplan años en días distintos”.

En este problema resulta mucho más sencillo calcular los casos favorables de $\bar{A}$ que los de *A*.

Los casos posibles son todas las formas de elegir 23 días entre los 365 días del año. Se puede repetir el día elegido e importa el orden ya que cada uno de los 23 asistente a la fiesta es una persona distinta. Por lo tanto, son variaciones con repetición de 365 días tomados de 23 en 23.

$$VR_{365,23}=365^{23}$$

Para contar los casos favorables de $\bar{A}$ estamos ante el mismo problema que el de los casos posibles solo que ahora no puede haber repeticiones, luego son variaciones sin repetición de 365 días tomados de 23 en 23.

$$V_{365,23}=365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-23+1)=365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(343)=\frac{365!}{342!}$$

Entonces tenemos que

$$P(\bar{A})=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(343)}{365^{23}}=\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(343)}{365^{22}}\simeq 0{,}4927$$

Y por tanto $P(A)=1-P(\bar{A})\simeq 0{,}507$. Es decir, la probabilidad de que al menos dos personas cumplan años el mismo día es algo mayor del 50%

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se selecciona un número natural entre 70 y 345, ¿Cuál es la probabilidad de que contenga al menos un 1?
2. Se lanza un dado trucado. La probabilidad de obtener un 6 es 0,4 y la de obtener cualquiera de los otros números es equiprobable. Calcular:
   a) La probabilidad de obtener un número par
   b) La probabilidad de obtener un 2, sabiendo que se ha obtenido un número par
   c) La probabilidad de obtener un 3, sabiendo que se ha obtenido un número impar
3. En una bolsa que contiene 8 bolas blancas y 5 rojas se extraen simultáneamente tres bolas. Hallar la probabilidad de que:
   a) Al menos una de las bolas extraídas sea roja
   b) Dos bolas sean blancas y una roja
   c) Dos bolas sean rojas y una blanca
4. El 65% de los alumnos de una clase estudia francés, el 40% estudia inglés y el 15% es estudia los dos idiomas. Se elige al azar un estudiante. Calcular la probabilidad de que:
   a) No estudie francés ni inglés
   b) Estudie francés y no inglés
   c) Que estudie francés, si se sabe que estudia inglés
   d) No estudie inglés, si se sabe que no estudia francés

SOLUCIONES

1. 0,49
2.
   a) 0,64
   b) 0,1875
   c) $0,\hat{3}$
3.
   a) 0,8042
   b) 0,4895
   c) 0,2797
4.
   a) 0,1
   b) 0,5
   c) 0,375
   d) 0,286

Tema 33

Estadística

CONCEPTOS BÁSICOS

- Objetivos de la estadística.
- Población, muestra, tamaño de la muestra.
- Variable estadística y sus tipos (cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas). Rango de una variable estadística.
- Frecuencia absoluta, frecuencia relativa y frecuencia acumulada. Distribución de frecuencias.
- Agrupación de datos en clases. Marca de clase.
- Representaciones gráficas más usadas en estadística (diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias, diagrama de sectores e histogramas).
- Medidas de centralización (media aritmética, media ponderada, media geométrica, media armónica, media cuadrática, moda, mediana).
- Medidas de dispersión (rango o recorrido, desviación de cada dato respecto de la media, desviación media, desviación típica, varianza, coeficiente de variación de Pearson).
- Variables estadísticas bidimensionales. Coeficiente de correlación de Pearson.

PROBLEMAS RESUELTOS

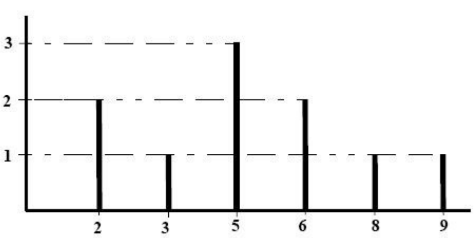
1. Se eligió aleatoriamente una muestra de diez familias de una aldea y se apuntó el número de hijos por familia:

Nº de hijos : x_i	2	3	5	6	8	9
Nº de familias: n_i	2	1	3	2	1	1

a) Representa los datos mediante un diagrama de barras y mediante un polígono de frecuencias.
b) Calcula las medidas de centralización: media aritmética, moda y mediana.
c) Calcula la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de Pearson.
d) ¿Qué porcentaje de familias pertenecen al intervalo $(\bar{x}-\sigma\,,\bar{x}+\sigma)$, siendo $\bar{x}$ la media aritmética y σ la desviación típica?

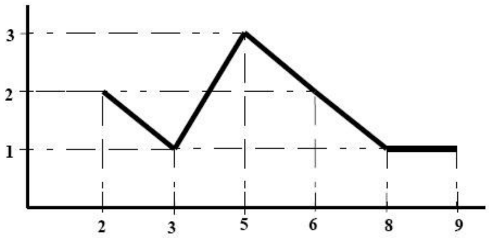
Solución:

a) Como sabemos, la estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de organizar los datos obtenidos en una observación, representarlos, analizarlos, interpretarlos y de extraer conclusiones que permitan hacer previsiones acerca del conjunto de elementos de los cuales se han extraído los datos.



Por supuesto, el estadista no extrae datos de toda la población, sino que, de acuerdo a unos criterios, selecciona a unos pocos miembros de la misma y sobre este pequeño conjunto, llamado muestra, hace las observaciones oportunas. En el caso que se nos presenta los elementos de la muestra son 10 familias, por lo que el tamaño, N, de la muestra es 10, y el fenómeno observado, que recibe el nombre de variable estadística, es "número de hijos". Cada uno de los diferentes datos se representa por x_i, correspondiendo x al nombre de la variable y el subíndice es un ordinal que nos indica la posición del dato entre los diferentes valores de la variable; en nuestro caso, los subíndices pueden tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5 o 6 ya que tenemos 6 valores diferentes. Esta variable estadística es cuantitativa ya que las observaciones proceden de una medida que se puede representar numéricamente y, como el conjunto de valores posibles es un subconjunto del conjunto de los números enteros, podemos afirmar que es una variable discreta.

En este ejercicio ya nos están dando los resultados organizados en una tabla, en la que en la primera fila se incluyen los seis datos diferentes, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6, y en la segunda se nos indica la frecuencia absoluta, n_i, esto es, el número de elementos de la muestra que corresponden al valor x_i, de la variable.



Una primera información del fenómeno observado se obtiene a través de la representación gráfica de los resultados obtenidos. Para este tipo de variables se considera óptimo el diagrama de barras o el polígono de frecuencias. El primero se obtiene señalando sobre un eje horizontal los datos y, con base en los mismos, se trazan segmentos verticales con longitudes proporcionales a las frecuencias absolutas de los datos señalados.

Otra representación es el llamado polígono de frecuencias. Para su trazado, se representan los datos en un eje horizontal, sobre un eje vertical se marcan las frecuencias absolutas, se señalan los puntos cuyas coordenadas son (x_i, n_i) y cada pareja de puntos consecutivos se unen mediante sendos segmentos, obteniéndose así una línea poligonal.

En la siguiente tabla se reflejan todos los cálculos necesarios para averiguar las distintas medidas de centralización y de dispersión:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\downarrow$	$N_i\uparrow$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert \cdot n_i$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert^2$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert^2 \cdot n_i$
2	2	4	2	10	3,10	6,20	9,61	19,22
3	1	3	3	8	2,10	2,10	4,41	4,41
5	3	15	6	7	0,10	0,30	0,01	0,03
6	2	12	8	4	0,90	1,80	0,81	1,62
8	1	8	9	2	2,90	2,90	8,41	8,41
9	1	9	10	1	3,90	3,90	15,21	15,21
$\sum$.	10	51				17,20		48,90

Con el símbolo Σ indicamos el resultado de la suma de los números contenidos en la columna correspondiente.

b) Las medidas o parámetros estadísticos son valores que nos dan información sobre el comportamiento de la muestra y se clasifican en tres grupos: las medidas de centralización, las medidas de dispersión y las de posición. Las primeras son números que, en cierta medida dan valores centrales o medios de los datos ya que tienden a situarse en el centro del conjunto de datos observados; las más usadas son la media aritmética, $\bar{x}$, la

moda, M_o, y la mediana, M_e. Las medidas de centralización nos informan acerca del valor en torno al cuál se sitúan los datos.
La media aritmética viene dada por la suma de todos los valores de la variable, distintos o no, correspondientes a la muestra, dividida por el tamaño de la muestra:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{N}=\frac{51}{10}=5,1$$

Este número nos indica que cada familia tendría aproximadamente 5 hijos, si éstos se pudieran distribuir homogéneamente entre las familias. En numerosos casos, la media aritmética no se considera como parámetro representativo de la muestra ya que se ve muy afectada por la presencia de datos extremos, es decir, que estén muy alejados de la masa principal de datos.
La moda es el dato de mayor frecuencia, el que más se repite, en nuestro ejemplo, la moda es única y vale 5.
Si colocamos los datos ordenados de menor a mayor, repetidos tantas veces como indique su frecuencia absoluta, la mediana es el dato que ocupa el lugar central. Para averiguar cúal es dicho dato, calculamos la frecuencia acumulada ascendente $N_i\downarrow$ y la frecuencia acumulada descendente $N_i\uparrow$, que corresponden a los distintos datos si los ordenamos de mayor a menor. El último x_1 de tal sucesión ocupa el lugar $N_1\downarrow$, el último x_2 ocupa el lugar $N_2\downarrow$, y así sucesivamente. Si ordenamos los datos de mayor a menor $N_6\uparrow$ nos indica el lugar que ocupa el último x_6 en la sucesión, $N_5\uparrow$ nos indica la posición del último x_5 y así sucesivamente.
Como el tamaño de la muestra es $N=10$, los datos centrales están en la quinta y sexta posición, pero, al observar los valores de las distintas frecuencias acumuladas, vemos que dichas posiciones están ocupadas por el cinco, así la mediana es $M_e=5$.

c) Las medidas de dispersión nos permiten establecer lo disperso que están entre sí los datos observados. Las medidas más comunes son el rango o recorrido, la desviación de cada dato respecto de la media, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de Pearson.
   - El rango o recorrido es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable. Este parámetro nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influenciado por los valores extremos. El rango de la variable en estudio, y de acuerdo a la muestra elegida, es $9-2=7$.
   - La desviación de cada dato respecto de la media aritmética, $|x_i-\overline{x}|$, es la diferencia, en valor absoluto, que hay entre cada dato y la media. Sus valores están reflejados en la tabla anterior.
   - La desviación media, d_m, es la media aritmética de las desviaciones de cada dato respecto de la media, nos da el promedio en que los datos se separan de la media:

$$d_m=\frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i-\overline{x}|\cdot n_i}{N}=\frac{17,20}{10}=1,72\,.$$

   Cuanto mayor es la desviación media, los datos están más dispersos o menos concentrados alrededor de la media. Viene medida en las mismas unidades que la variable, esto es en número de hijos. No se considera una buena medida de dispersión ya que presenta graves inconvenientes a la hora de hacer inferencia a la población.
   - La varianza , (σ^2), es la media de los cuadrados de las desviaciones de cada dato respecto de la media aritmética. Es útil porque sus propiedades matemáticas son más fáciles de utilizar. El inconveniente de este parámetro de dispersión es que no se mide en las mismas unidades que los datos observados. Teniendo en cuenta la tabla anterior,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}|^2 \cdot n_i}{N} = \frac{48{,}90}{10} = 4{,}89.$$

- La desviación típica, (σ), es la media cuadrática de las desviaciones de cada dato respecto de la media y coincide con la raíz cuadrada de la varianza. Según los cálculos hechos, $\sigma^2 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4{,}89} = 2{,}21$. Este número nos informa también de la dispersión de los datos respecto de la media aritmética y está expresada en las mismas unidades que la variable, por otra parte tiene la propiedad de que al menos el 75% de las observaciones están en el intervalo $(\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma)$.
  Cuanto mayor sea la varianza o la desviación típica, los datos estarán más dispersos o alejados de la media.
- El coeficiente de variación de Pearson, es $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{4{,}89}{5{,}1} = 0{,}96$. Es adimensional y por eso es un buen parámetro a tener en cuenta a la hora de comparar el grado de dispersión de dos muestras distintas.
  Si calculamos $\overline{x} - \sigma$ y $\overline{x} + \sigma$, el intervalo $(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma) = (2{,}89; 7{,}31)$. Observando la tabla de valores de la variable para la muestra elegida, tenemos que los únicos que pertenecen a dicho intervalo son el 3, el 5 y el 6, que tienen respectivamente las frecuencias absolutas 1, 3 y 2, es decir, a dicho intervalo pertenecen 6 familias que corresponden a un 60% de los elementos de la muestra.

2. Se desea hacer un estudio del tipo de pacientes que acuden a la consulta de un logopeda a lo largo de un mes, mirando los expedientes médicos se obtuvo los siguientes resultados:

Edad	2	3	4	5	6	7	11	12	13
Nº de personas	3	5	5	4	6	1	1	2	3

Se pide:

a) Distribuir los datos en 4 intervalos y representarlos mediante un histograma.

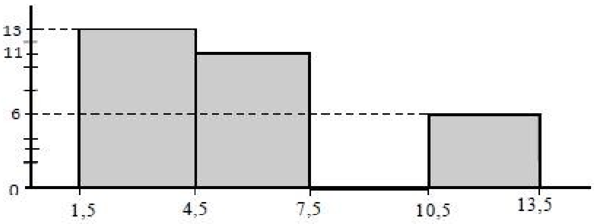
b) Calcular las marcas de clase, la media aritmética, la moda, la mediana y la desviación típica.

<u>Solución:</u>

a) Los datos se suelen agrupar en intervalos o clases en los casos en los que la variable es continua o el tamaño de la muestra es grande. Estos suelen ser semiabiertos por la derecha, $[L_{i-1}, L_i)$, siendo L_{i-1} el extremo inferior del intervalo y L_i el extremo superior del mismo, de tal manera que el extremo inferior de cada clase coincide con el extremo superior de la clase siguiente. Por comodidad se suelen representar por $L_{i-1} - L_i$. Para poder hacer los cálculos de los distintos parámetros estadísticos, se sustituyen los x_i que aparecen en las fórmulas por lo que se conoce como marca de clase y que corresponde al punto medio del intervalo $\left(x_i = \frac{L_{i-1} + L_i}{2}\right)$. El número de intervalos se suele fijar entre 5 y 15, de tal manera que cada clase contenga al menos 5 datos. Su cantidad se puede establecer según la Regla de Sturges o bien por la de Norcliffe. Es aconsejable que todos los intervalos tengan la misma amplitud y han de ser tales que las marcas de clase correspondan a números simples.
Por supuesto, al agrupar los datos de esta manera, se simplifican los cálculos pero se pierde información sobre todo porque a partir del momento en que se hace la clasificación, sólo se tiene en cuenta el número de datos que incluye cada clase y no el cómo están distribuidos dentro de la misma.
A cada clase se le asigna como frecuencia absoluta la suma de las frecuencias absolutas de los datos que pertenecen a dicho intervalo.

En este ejemplo, el rango de los valores correspondientes a la variable es 13 – 2 = 11. Como queremos dividir la muestra en 4 clases, efectuamos la división 11:4, que nos da 2,75 que, por comodidad, redondeamos a tres. Por tanto las clases consideradas serán $1{,}5-4{,}5$, $4{,}5-7{,}5$, $7{,}5-10{,}5$ $10{,}5-13{,}5$. En resumen, a la variable en estudio, de acuerdo con la muestra considerada, corresponde la siguiente distribución en intervalos:

La representación más usada para el caso en el que los datos estén agrupados en intervalos es el histograma: sobre un eje horizontal se representan los intervalos de clase y, con base en dichos intervalos, se trazan rectángulos cuya altura es proporcional a la frecuencia absoluta de la clase.

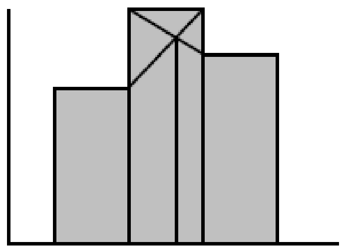


b) En la siguiente tabla reflejamos los datos clasificados, con sus correspondiente marcas de clase y frecuencias, además incluimos en ella los valores necesarios para calcular los distintos parámetros estadísticos.

$L_i - L_{i+1}$	x_i	n_i	$N_i\downarrow$	$x_i \cdot n_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot n_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert^2$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert^2 \cdot n_i$
1,5 – 4,5	3	13	13	39	2,90	37,70	8,41	109,33
4,5 – 7,5	6	11	24	66	0,10	1,10	0,01	0,11
7,5 – 10,5	9	0	24	0	3,10	0,00	9,61	0,00
10,5 – 13,5	12	6	30	72	6,10	36,60	37,21	223,26
$\sum$...		30		177		75,40		332,70

Las media aritmética y la desviación típica se calculan como en el ejemplo anterior, tomando las marcas de clase como valores de la variable. De esta forma obtenemos que $\bar{x}=5{,}90$ y $\sigma=3{,}33$.

La clase modal es el intervalo 1,5 – 4,5 ya que es la de mayor frecuencia absoluta y no tiene por qué ser única. A veces es necesario asociar a dicha clase un valor concreto como representante de la misma, este número es el que se obtiene de la expresión:



$$Mo = L_{i-1} + \frac{d_{i-1}}{d_{i-1} - d_{i+1}} \cdot c_i,$$

siendo L_{i-1} el extremo inferior de la clase modal, c_i la amplitud de la clase modal, d_{i-1} la diferencia de la frecuencia absoluta de la clase modal con la de la clase anterior y d_{i+1} la diferencia de la frecuencia absoluta de la clase modal con la de la siguiente. El número que se obtiene a través de la fórmula es la abscisa del punto de corte de los segmentos que unen los vértices de la clase modal con vértices de las clases anterior y posterior a la misma en la forma que se indica en la figura.

Sabemos que la mediana es el dato que ocupa el lugar central y se encuentra en la clase cuya frecuencia absoluta acumulada excede a la mitad del número de datos.

La mitad del número de datos es 15, que corresponde a la clase $L_{i-1} - L_i = 4{,}5 - 7{,}5$. Si suponemos que los datos de dicha clase han sido distribuidos homogéneamente, su valor viene dado por $Me = L_{i-1} + \frac{c_i}{n_i} \cdot \left(\frac{N}{2} - n_{i-1}\right)$, siendo n_i la frecuencia absoluta de la clase que contiene la mediana y n_{i-1} la frecuencia de la clase anterior a la que contiene a la mediana, así $M_e = 5{,}05$. Si, en el histograma, trazamos una semirrecta vertical con origen en este valor, divide al histograma en los partes de igual área.

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{\dfrac{332{,}70}{30}} = 3{,}33$.

3. Se desea establecer la relación que existe entre la edad de una mujer y su presión sanguínea, para lo cual se elige una muestra de diez mujeres sanas. Los resultados obtenidos se reflejan en la siguiente tabla:

Edad en años (X)	56	42	72	36	63
Presión sanguínea (Y)	14 7	12 5	16 0	11 8	14 9

Analiza si existe alguna relación funcional lineal entre las dos variables consideradas.

Solución:

Usando la terminología estadística, se nos pide que establezcamos si existe una correlación de tipo lineal, es decir, si al representar los puntos (X,Y) en un sistema de ejes cartesianos, tienden a agruparse en torno a una línea recta.

El coeficiente de correlación de Pearson, r, es un parámetro estadístico, cuyos valores están en el intervalo cerrado [–1, 1], que nos indica si existe o no dependencia funcional lineal. Su valor viene dado por la expresión $r = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$, siendo σ_{XY} la covarianza y σ_X y σ_Y las desviaciones típicas de X e Y respectivamente:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2, \quad \sigma_{XY} = \frac{\sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y},$$

siendo $n_{i,j}$ la frecuencia absoluta del par de valores (x_i, y_j).

- Si $r \in \{-1, 1\}$, los puntos se encuentran en una recta,
- si $r = 0$, no exite correlación lineal entre las variables, es decir, los puntos están dispersos y no se aproximan a los de ninguna recta,
- si $r \in (-1, 1) - \{-1, 1\}$, existe correlación lineal, es decir los puntos se encuentran muy próximos a los de una recta, tanto más próximos cuanto más cercano a 1 sea el valor de r.

En la tabla siguiente se reflejan todos los cálculos necesarios para obtener dichos parámetros:

x_i	y_i	n_{ij}	x_i^2	y_i^2	$x_i y_j$
56	147	1	3136	21609	8232
42	125	1	1764	15625	5250
72	160	1	5184	25600	11520
36	118	1	1296	1392	4246
63	149	1	3969	2220	9387
Σ = 269	699	6	15349	98959	38635

Así $\overline{x}=\frac{269}{5}=53{,}8$, $\overline{y}=\frac{1699}{5}=139{,}8$, $\sigma_X^2\frac{15349}{5}-53{,}8^2=175{,}36$,

$\sigma_X=\sqrt{175{,}36}=13{,}24$, $\sigma_X^2=\frac{98959}{5}-139{,}8^2=247{,}76$, $\sigma_Y=\sqrt{247{,}76}=15{,}74$,

$\sigma_{XY}=\frac{38635}{5}-53{,}8\cdot 139{,}8=205{,}76$ y $r=\frac{205{,}76}{13{,}24\cdot 15{,}74}=0{,}99$.

Según este resultado, teniendo en cuenta lo comentado anteriormente, concluimos que existe correlación lineal fuerte entre las variables X e Y.

4. En un hotel de Trnava hay solamente habitaciones de segunda y tercera clase, cuya cantidad está en la proporción 1:3, todas ellas con cuatro camas. La relación del precio por cama entre la de una en una habitación de segunda clase y la de una en una habitación de tercera clase es 7:3. Si el precio por la cama en una habitación de segunda clase es 77 euros, ¿cuál es el precio medio por cama en dicho hotel?

Solución:

Si representamos por x al número de habitaciones de segunda clase, entonces el número de habitaciones de tercera clase es 3x. Como el precio de una cama en una habitación de segunda clase es 77 €, entonces el precio de cada cama en una habitación de tercera clase coincide con los tres séptimos de dicho precio, es decir 33 €. Calculamos la media ponderada:

$$\overline{X_P}=\frac{33\cdot 3+77\cdot 1}{3+1}=44$$

Por tanto, el precio medio por cama es 44 €.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Las calificaciones en la asignatura de biología en tantos por ciento de los 30 alumnos de una clase viene dada por la siguiente tabla:

calificaciones : x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Nº de alumnos: n_i	1	1	3	4	7	7	2	3	2

a) Calcula la media aritmética, ¿Qué desventajas tiene esta medida de centralización respecto de otras?
b) Calcula la moda y la mediana
c) Calcula la varianza y la desviación típica.
d) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen su calificación en el intervalo $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$, siendo $\bar{x}$ la media aritmética y σ la desviación típica?

2. Distribuir los datos del ejercicio anterior en 4 intervalos y representarlos mediante un histograma. Calcular las marcas de clase, la media aritmética, la moda, la mediana y la desviación típica.

3. Se desea establecer si existe una dependencia funcional lineal entre la temperatura media de un lugar del continente europeo y su latitud, para lo cual se construyó la siguiente tabla referida a diez capitales europeas:

Temperatura en ºC (X)	13	24	13	14	11	13	19	14	14	19
Latitud en º (Y)	54	37	52	52	54	53	39	53	50	40

Averigua si existe tal dependencia entre dichas variables.

4. Entre el planeta Marte y Júpiter se ha descubierto un nuevo planeta al que se le ha asignado el nombre de Novisto que está habitado por unos extraños seres, que son en apariencia no inteligentes, cada uno con una enorme cabeza y tres patas. Se envió una sonda para el estudio del extraño planeta y de sus raros inquilinos. La sorpresa fue grande, en las fotos tomadas en distintos puntos del planeta se puede apreciar que no todos los novistos son parecidos. Se observó que el 97% de ellos tienen dos orificios en la cabeza que supuestamente son ojos, mientras que el 1% de ellos tienen tres y el resto tiene sólo uno. ¿Cuál es el porcentaje de novistos que tienen en la cabeza un número de ojos superior a la media de la población del planeta Novisto?

SOLUCIONES

1.

a) 53,67
b) las modas son 50 y 60, la mediana es 50
c) $\sigma^2=369{,}53$ y $\sigma=19{,}22$
d) 66,67%.

2. 8,5 – 29,5; 29,5 – 50,5; 50,5 – 71,5; 71,5 – 92,5 ; las marcas son 19, 40, 61 y 82; $\bar{x}=51{,}90$; $Mo=44{,}32$; $Me=49$; $\sigma=17{,}72$.

3. $r=-0{,}95$, hay una correlación lineal fuerte.

4. 98%.

Tema 34

Números Complejos

CONCEPTOS BÁSICOS

- Números complejos en forma binómica y en forma polar.
- Operaciones en forma binómica.
- Operaciones en forma polar.
- Raíces n-enésimas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2$

b) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

c) i^{37}

d) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$

<u>Solución:</u>

a) Aplicando la fórmula de la suma por la diferencia y la del cuadrado de suma tenemos:
$(4-3i)(4+3i)-(4-3i)^2=4^2-(3i)^2-(4^2-2\cdot 4\cdot 3i+(3i)^2)=16-9i^2-16+24i-9i^2=$
$=16-9\cdot(-1)-16+24i-9\cdot(-1)=8+24i$

b) $$\frac{1+i}{2-i}+\frac{-3-2i}{1+3i}=\frac{(1+i)\cdot(1+3i)+(-3-2i)\cdot(2-i)}{(2-i)\cdot(1+3i)}=\frac{1+3i+i+3i^2-6+3i-4i+2i^2}{2+6i-i-3i^2}=$$
$$=\frac{-10+3i}{5+5i}=\frac{(-10+3i)\cdot(5-5i)}{(5+5i)\cdot(5-5i)}=\frac{-50+15i-50i+15i^2}{5^2-(5i)^2}=\frac{-65-35i}{25+25}=\frac{-65}{50}-\frac{35}{50}i$$

c) $i^{37}=(i^2)^{18}\cdot i=(-1)^{18}\cdot i=i$

d) $$\frac{i^7-i^{-7}}{2i}=\frac{(i^2)^3\cdot i-\frac{1}{(i^2)^3\cdot i}}{2i}=\frac{(-1)^3\cdot i-\frac{1}{(i-1)^3\cdot i}}{2i}=\frac{-i+\frac{1}{i}}{2i}=\frac{\frac{-i^2+1}{i}}{2i}=\frac{-(-1)+1}{2i^2}=\frac{2}{-2}=-1$$

2. Calcula en forma polar:

a) $(-1-i)^5$

b) $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}$

c) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

Solución:

a) Primero pasamos a forma polar $z=-1-i$. Su módulo es $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ y su argumento es $\tan\varphi=\dfrac{-1}{-1}$ entonces $\varphi=-45^{\text{o}}$ ya que $z=-1-i$ es un número complejo del 4º cuadrante. Luego $(-1-i)^5=(\sqrt{2}_{-45^{\text{o}}})^5=-1-i=\sqrt{2}^{\,5}_{5\cdot(-45)^{\text{o}}}=4\sqrt{2}_{135^{\text{o}}}$ y en forma binómica.

b) Pasamos a forma polar $z=1-\sqrt{3}\,i$. Su módulo es $|z|=\sqrt{1^2\pm(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ y su argumento es $\tan\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$ entonces $\varphi=-60^{\text{o}}$ porque esta en el 4º cuadrante. Por tanto $z=1-\sqrt{3}\,i=2_{-60^{\text{o}}}$

Luego las cuatro raíces son:

$$\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt[4]{2_{-60^{\text{o}}}}=\left\{\sqrt[4]{2}_{\frac{60^{\text{o}}}{4}},\sqrt[4]{2}_{\frac{60^{\text{o}}+360^{\text{o}}}{4}},\sqrt[4]{2}_{\frac{60^{\text{o}}+2\cdot360^{\text{o}}}{4}},\sqrt[4]{2}_{\frac{60^{\text{o}}+3\cdot360^{\text{o}}}{4}}\right\}=\left\{\sqrt[4]{2}_{15^{\text{o}}},\sqrt[4]{2}_{105^{\text{o}}},\sqrt[4]{2}_{195^{\text{o}}},\sqrt[4]{2}_{285^{\text{o}}}\right\}$$

c) Pasamos a forma polar $z_1=1-i$ y $z_2=\sqrt{3}+i$.

$|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ y $\tan\varphi=\dfrac{-1}{1}$ entonces $\varphi=-45^{\text{o}}$ porque esta en el 4º cuadrante.

$|z_2|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(1)^2}=\sqrt{4}=2$ y $\tan\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ entonces $\varphi=30^{\text{o}}$ porque esta en el 1$^{\text{er}}$ cuadrante.

Luego:

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}_{-45^{\text{o}}}}{2_{30^{\text{o}}}}\right)^3=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-45^{\text{o}}-30^{\text{o}}}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3_{3\cdot(-75^{\text{o}})}=\left(2\frac{\sqrt{2}}{8}\right)_{-225^{\text{o}}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^{\text{o}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135^{\text{o}}+i\,\text{sen}\,135^{\text{o}})=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}i$$

3. Hallar el valor real b para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea:

a) Sea un número imaginario puro

b) Sea un número real

Solución:

$$(3+6i)(4+bi)=12+3bi+24\text{i}+6bi^2=12-6b+(3b+24)i$$

a) Para que el producto sea un número imaginario puro. La parte real debe valer cero. Es decir,

$$12-6b=0\Rightarrow b=\frac{-12}{-6}=2$$

b) Para que producto sea un número real. La parte imaginaria debe ser cero. Es decir,

$$3b+24=0\Rightarrow b=\frac{-24}{3}=-8$$

4. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{z}{2i}+\dfrac{z+1}{4-2i}=3$

b) $\dfrac{z-3}{2z-i}=1-i$

Solución:

a) $\dfrac{z}{2i}+\dfrac{z+1}{4-2i}=3;\ \dfrac{z(4-2i)+2i(z+i)}{2i(4-i)}=3;\ 4z-\cancel{2zi}+\cancel{2zi}+2i^2=3(8i-4i^2);$

$4z-2=24i+12;\ 4z=14+24i;\ z=\dfrac{7}{2}+6i$

b) $\dfrac{z-3}{2z-i}=1-i;\ z-3=(1-i)(2z-i);\ z-3=2z-i-2zi+i^2;\ -z+2zi=-i-1+3;$

$z(-1+2i)=2-i;\ z=\dfrac{i-2}{-1+2i}\cdot\dfrac{-1-2i}{-1-2i}=\dfrac{-2+i-4i+2i^2}{1+4}=\dfrac{-4-3i}{5}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(7-2i)^2+(3+4i)(5-2i)$

b) $(1+2i)^2+\dfrac{1+i}{1-i}$

c) $(\sqrt{3}-2i)^2+(2\sqrt{3}-5i)(1-2i)$

d) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7$

2. Hallar el valor real de p para que $(p+5i)+(3+i)=(1+5i)+(-p+i)$

3. Calcula el valor real de k para que $\dfrac{k-2i}{3+4i}$ sea:

a) Un número real

b) Un número imaginario

4. Calcular el valor de p y q para que los número complejos $z_1=2p+qi$ y $z_2=-5+3i$ sean:

a) Números opuestos

b) Números conjugados

5. Realiza las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1+i)^{10}$

b) $(1+\sqrt{3}i)^6$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}}$

d) $\sqrt[10]{10+10i}$

6. Halla todas las soluciones de la ecuación $x^6+1=0$

SOLUCIONES

1.

a) $68-14i$
b) $-3+5i$
c) $-11+2\sqrt{3}+(-8\sqrt{3}-5)i$
d) -1

2. $p=-1$

3.

a) $k=\frac{-3}{2}$
b) $k=\frac{8}{3}$

4.

a) $p=\frac{5}{2}\,,\ q=-3$
b) $p=\frac{-5}{2}\,,\ q=-3$

5.

a) 32_{90°
b) 64_{0°
c) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{35^\circ},\sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{155^\circ},\sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{275^\circ}$
d) $\sqrt[10]{200}_{9^\circ},\sqrt[10]{200}_{81^\circ},\sqrt[10]{200}_{153^\circ},\sqrt[10]{200}_{225^\circ},\sqrt[10]{200}_{297^\circ}$

6. $1_{30^\circ},1_{90^\circ},1_{150^\circ},1_{210^\circ},1_{270^\circ},1_{330^\circ}$

BIBLIOGRAFÍA

Libros

- Barreiro–Rubio, *Cuadernos de matemáticas: Progresiones–números complejos*, ed. Tipo Línea.
- Barreiro–Rubio, *Cuadernos de matemáticas: Teoría de conjuntos–El número natural*, ed. Tipo Línea.
- Sánchez González, J. L., Vera López, Juan, *Matemáticas 3º Secundaria*, ed. Oxford.
- Sánchez González, J. L., Vera López, Juan, *Matemáticas 4º Secundaria*, ed. Oxford.
- Bescós, Esther, Pena, Zoila, *Matemáticas 1º Bachillerato*, ed. Oxford.
- Barreiro–Rubio, *Cuadernos de matemáticas: Sucesiones-Límites*, ed. Tipo Línea.
- C. A. Sánchez Royo, J. Estela Herrero, L. Fernández Torres y A. López Gillermo, *Matemáticas II. Bachillerato*, de. Edebé
- N. Antonov, M. Vygodsky, V. Nikitin, A. Sankin*, 1000 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría Adaptados a B.U.P., C.O.U. Y Selectividad*, ed. Paraninfo.
- V. Burjan, Ľ. Hrdina, M. Maxian, *Prehľad Matematiky 1. časť.* ed. S.P.N. 1. vydanie.
- V. Burjan, Ľ. Hrdina, M. Maxian, *Prehľad Matematiky 2. časť*. ed. S.P.N. 1. vydanie.
- Grupo editorial Bruño, *Geometría. Curso Superior*, ed. Bruño.
- Grupo editorial Edebé, *Matemáticas I. Bachillerato*, ed. Edebé.
- L. Koreňová, V. Jodas, *Nová Maturita z Matematiky. Príprava na Maturitu z Matematiky*, ed. Aktuell.
- K. Partiková, M. Reiterová, *Nová Maturita. Matematika 1*, ed. Príroda.
- K. Partiková, M. Reiterová, Nová Maturita. Matematika 2, ed. Príroda.
- V. Quesada, A. Isidoro, L. A. López, *Curso y Ejercicios de estadística,* ed. Alhambra.
- S. Richtárová, D. Kyselová, *Chystáte sa na Maturitu? Matematika*, ed. Enigma.
- F. Vejsada, F. Talafous, *Zbierka Úloh z Matematiky pre SVŠ*, ed. S.P.N.
- J. Vocelka, *Matematika. Maturujeme Inak*, ed. Vydavateľstvo Vzdelávacej literatúry.
- Colera Jiménez, José; García Pérez, Rosario; Gaztelu Albero, Ignacio; Oliveira González, María José, *Matemáticas 3,* ed. Anaya.
- Colera Jiménez, José; Oliveira González, María José; García Pérez, Rosario, *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I,* ed. Anaya.

Páginas WEB

- http://descartes.cnice.mec.es
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrollo/matematicas
- http://es.wikipedia.org
- http://www.wolframalpha.com
- http://www.rae.es
- http://www.profesores.net

Programas informáticos gratuitos

- OpenOffice (http://es.openoffice.org)
- Geogebra. (http://www.geogebra.org)
- Wiris. (http://www.wiris.com)

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN