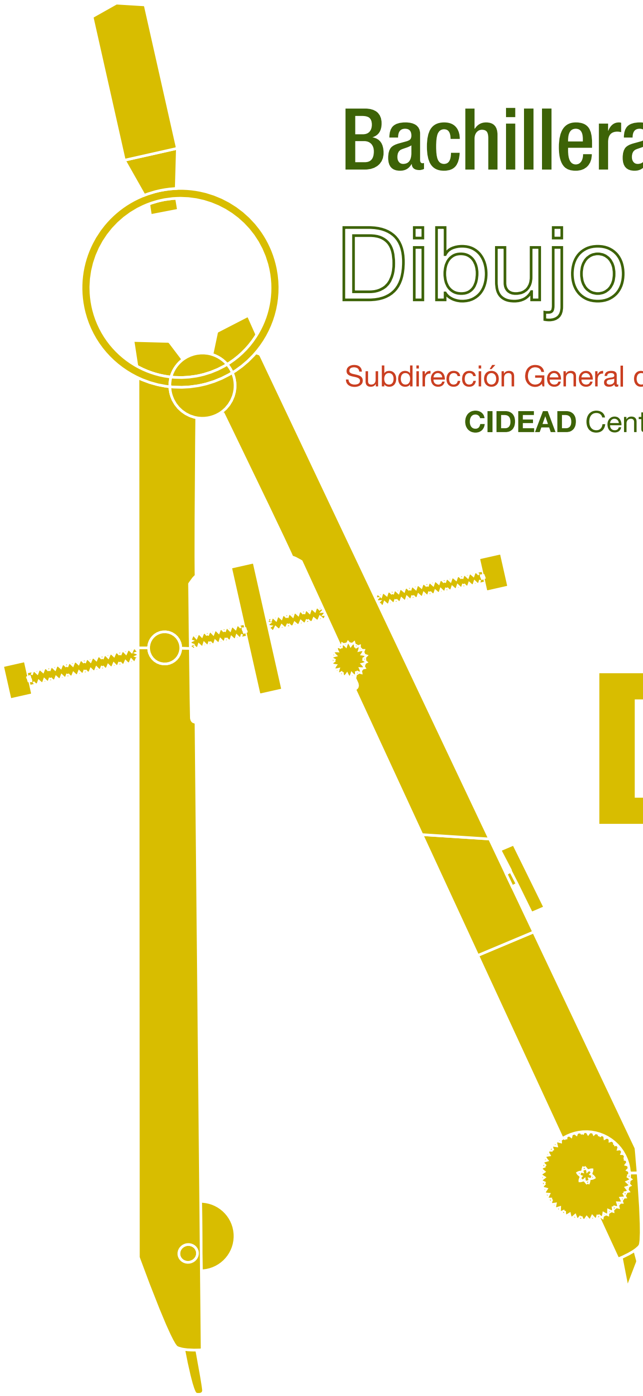


# Bachillerato a distancia

# Dibujo Técnico II

Subdirección General de Aprendizaje a lo largo de la vida

**CIDEAD** Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

DTII

Bachillerato 2º a distancia

Introducción

UNIDADES




GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

cidead

Catálogo de publicaciones del Ministerio: www.mecd.gob.es
Catálogo general de publicaciones oficiales: publicacionesoficiales.boe.es

Autores
Carlos Ayala Luna
Ana Mª de Benito Zamarrón

Animaciones
Carlos Ayala Luna
José Antonio Cuadrado Vicente
Antonio L. Martín González
Mª Luisa Bermejo López

Dirección y coordinación editorial
Juan Antonio Olmedo González

Revisión técnica
José Ramón Llonis Morla

Tratamiento electrónico
Félix García Zarcero
Mª Luisa Bermejo López

Maqueta
Julio Calderón Grande

Diseño de cubierta
Mª Luisa Bermejo López

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA
Y DEPORTE

Dirección General de Formación Profesional
Subdirección General de Aprendizaje a lo largo de la vida

Edita:


Edición: 2013

NIPO: 030-13-201-8
ISBN: 978-84-369-5493-7

**Afinidad ortogonal.** Es aquella afinidad en la que la dirección y el eje son perpendiculares.

**Altura.** Es la distancia de un vértice del triángulo al lado opuesto. También recibe este nombre la recta que pasando por un vértice es perpendicular al lado opuesto.

**Ángulo poliedro.** Está formado por los puntos del espacio comprendidos entre varios planos que pasan por un punto.

**Apotema.** Es la distancia del centro de un polígono regular a uno de sus lados y radio de su circunferencia inscrita.

**Arco capaz.** Se llama arco capaz de un ángulo sobre un segmento, al lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a él, cuyos lados pasan por los extremos del segmento.

**Baricentro.** Es el punto de corte de las tres medianas del triángulo.

**Cambio de plano.** Es uno de los métodos empleados en el sistema diédrico para obtener las verdaderas magnitudes de figuras planas, ángulos y distancias, nuevas vistas, secciones de cuerpos, etc.

**Cicloide.** Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta. Se llamará normal, acortada o alargada según que el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

**Cilindro de revolución.** Es el que se genera mediante el giro de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

**Cilindro recto.** Es aquel que tiene el pie de su altura en el centro de la base.

**Circunferencia focal.** En la elipse e hipérbola se llama así a la que tiene centro en los focos y radio *2a*.

**Circunferencia principal.** En la elipse e hipérbola se llama así a la circunferencia cuyo centro coincide con el de la curva y su radio es *a*.

**Circuncentro.** Es el punto de corte de las mediatrices del triángulo y centro de su circunferencia circunscrita.

**Cono de revolución.** Es aquel que se genera mediante el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

**Cono recto.** Es aquel que tiene el pie de su altura en el centro de la base.

**Corte.** Un corte representa la sección y la parte del objeto situada detrás del plano secante (con relación a la dirección de observación).

**Eje radical.** Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.

**Equivalente.** Se dice así de aquella figura plana que tiene igual área que otra, pero distinta forma.

**Elipse.** Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

**Epicicloide.** Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, exteriormente a ella. Se llamará normal, acortada o alargada según el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

**Escalas axonométricas.** En el sistema axonométrico se llama así a los segmentos en que se convierte la unidad de medida, dispuesta en la dirección de los ejes coordenados, al proyectarse en el plano del cuadro.

**Esfera.** Es el sólido formado por los segmentos de igual longitud que comparten un extremo.

**Evolvente de la circunferencia.** Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una recta que rueda, sin resbalar, sobre una circunferencia. Se llamará normal si el punto está en la recta, y acortada o alargada si está en el mismo semiplano, o en el opuesto, de los dos en que la recta divide al plano en cada instante.

**Figuras coplanarias.** Son aquellas situadas en un mismo plano.

**Giro.** Es uno de los métodos empleados en el sistema diédrico para obtener la verdadera magnitud de figuras planas, o de ángulos y distancias, entre puntos, rectas y planos, situados en posiciones oblicuas respecto a los planos de proyección.

**Hipérbola.** Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

**Hipocicloide.** Es la curva que describe un punto solidariamente unido a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia, interiormente a ella. Se llamará normal, acortada o alargada según que el punto esté en, dentro o fuera de la circunferencia ruleta.

**Homografía.** Transformación proyectiva en la que a un punto corresponde otro punto y a una recta otra recta.

**Homología.** Es una transformación homográfica en la que los puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología y las rectas homólogas se cortan en una recta fija llamada eje de homología.

**Incentro.** Es el punto de corte de las bisectrices del triángulo y centro de su circunferencia inscrita.

**Inversión.** Es una transformación anamórfica que convierte un punto $P$ del plano en otro $P'$, mediante un segmento $\overline{OP'}$ alineado con $\overline{OP}$, donde $O$ es un punto fijo llamado centro de inversión y el producto $\overline{OP} \times \overline{OP'} = k$, siendo $k$ un número real distinto de cero llamado potencia de la inversión.

**Línea del horizonte.** En la perspectiva cónica se llama así a la perspectiva de la recta impropia del plano geometral.

**Mediana.** Es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto. También recibe este nombre la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

**Ortocentro.** Es el punto de corte de las tres alturas del triángulo.

**Parábola.** Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

**Perspectiva cónica.** Sistema de representación que utiliza la proyección cónica. El objeto se refiere a un plano horizontal (llamado geometral) proyectándolo sobre él, y el conjunto se proyecta sobre un plano perpendicular a él (plano del cuadro) desde un punto de vista V.

**Perspectividad.** Correspondencia definida entre dos proyecciones de una figura, una figura y su proyección o una figura y su sección.

**Pirámide regular.** Es aquella que tiene por base un polígono regular cuyo centro coincide con el pie de la altura.

**Plano del cuadro.** En las perspectivas axonométrica y cónica se llama así al plano de proyección, también llamado del dibujo porque contiene la imagen del objeto representado.

**Plano del horizonte.** En una perspectiva cónica se llama así al plano paralelo al geometral que contiene el punto de vista.

**Plano geometral.** En una perspectiva cónica se llama así al plano horizontal de referencia asimilable a la superficie de la tierra.

**Poliedro.** Poliedro es el sólido terminado por superficies planas.

**Poliedros regulares.** Son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

**Poliedros regulares conjugados.** Son aquellos que se obtienen uno a partir del otro uniendo los centros de sus caras.

**Polígono estrellado.** Es el que se obtiene a partir de las divisiones de la circunferencia en partes iguales cuando éstas se unen de $p$ en $p$ partes y $p \neq 1$.

**Polígono regular.** Es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

**Potencia.** Potencia de un punto respecto de una circunferencia es el producto de las distancias desde dicho punto a los dos de intersección de cualquier secante que pasa por él.

**Prisma recto.** Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.

**Proyectiva.** Se dice así de la transformación que puede convertir una figura en otra mediante una serie de proyecciones y/o secciones.

**Punto de fuga.** En una perspectiva cónica se llama así a cada uno de los puntos de que consta la representación del punto impropio de una recta.

**Punto impropio.** Es cualquier punto situado en el infinito de la recta o plano considerado. Se indica mediante su dirección.

**Punto de medida.** En una perspectiva cónica se llama punto de medida de una recta al de fuga de las rectas paralelas (rectas de medida) que interceptan segmentos iguales sobre la recta y sobre la traza del plano que determinan (plano de medida).

**Punto principal.** En una perspectiva cónica se llama así a la intersección con el plano del cuadro de la recta perpendicular a él trazada desde el punto de vista V.

**Punto propio.** Es cualquier punto que no está situado en el infinito de la recta o plano considerado.

**Recta impropia.** Es la formada por todos los puntos impropios del plano considerado.

**Sección.** Una sección representa la intersección del plano de corte con la materia del objeto.

**Sección principal.** Es la realizada en un poliedro regular por un plano de simetría que contenga la mayor cantidad posible de sus principales magnitudes.

**Sección recta.** Es la producida en un prisma por un plano perpendicular a las generatrices.

**Suplementario.** Se dice que un ángulo es suplementario de otro cuando juntos suman 180º.

**Trimétrico.** Es el sistema axonométrico ortogonal en el cual los tres ángulos que forman los ejes son diferentes. Tiene, por tanto, tres coeficientes de reducción diferentes.

**Vista local.** Es la que define elementos simétricos de una pieza excluyendo el resto.

**Vista parcial.** Es la que contiene los elementos imprescindibles de la que sería una vista completa, y que sustituye a ésta si no se dificulta la comprensión del dibujo.

**Vista particular.** Es la que se dibuja según una dirección de observación que no es paralela o perpendicular a la de la vista principal.

Los contenidos de este material didáctico de *Dibujo Técnico II*, de Segundo de Bachillerato para la modalidad de educación a distancia, se ajustan al Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, y a la Orden Ministerial 1729/2008, de 11 de junio de 2008, por los que se regula el currículo de la Ley Orgánica de Educación.

En este curso se introducen conceptos nuevos o complementarios de los estudiados en *Dibujo Técnico I*, que permiten realizar nuevas construcciones. Así, los conceptos de arco capaz, potencia, e inversión facilitan la realización de construcciones de tangencia no resolubles con los conocimientos de Primero de Bachillerato. El conocimiento de los puntos y rectas notables del triángulo complementa la casuística de sus construcciones al considerar datos las alturas, bisectrices, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, etc. Los métodos del sistema diédrico (giros, abatimientos y cambios de plano) simplifican la realización de operaciones tales como representación de poliedros y superficies, sección por planos, desarrollos, distancias, etc. Finalmente, los cortes y vistas especiales prescritos en la norma UNE 1032 permiten representar, entre otros elementos, piezas industriales huecas, o elementos situados en planos oblicuos.

De las diez unidades de este material didáctico, las cuatro primeras desarrollan contenidos de geometría métrica y proyectiva: arco capaz, teoremas del cateto y de la altura, potencia y sus aplicaciones, construcciones de triángulos y polígonos regulares, inversión, homología y curvas cónicas.

Las cuatro unidades siguientes profundizan en el sistema diédrico teórico y normalizado: métodos, verdaderas magnitudes, representación de superficies, sección por planos, intersección con rectas, desarrollos, cortes, secciones, vistas especiales, acotación, etc.

Las dos últimas desarrollan las relaciones de incidencia, intersección, paralelismo, abatimientos de planos, representación de superficies y objetos, sección por planos e intersecciones con rectas, en las perspectivas axonométrica, caballera y cónica.

Podemos resumir el aprendizaje de esta materia en dos fases: el estudio de la teoría para comprender y asimilar los principios geométricos fundamentales, memorizando los conceptos necesarios para resolver problemas; y la realización práctica de las construcciones geométricas recogidas en cada unidad y de sus actividades, atendiendo especialmente a la correcta ejecución de los trazados.

Siempre que ha sido posible, en las ilustraciones se presentan a la izquierda los datos del ejercicio y a la derecha su realización. De este modo el alumno puede copiar o calcar los datos aparte para dibujar la construcción mientras la estudia. En cualquier caso, los datos aparecen siempre con trazo medio, la construcción con trazo fino y la solución con trazo grueso.

Para mayor claridad, se recomienda identificar cada línea o elemento con su notación correspondiente.

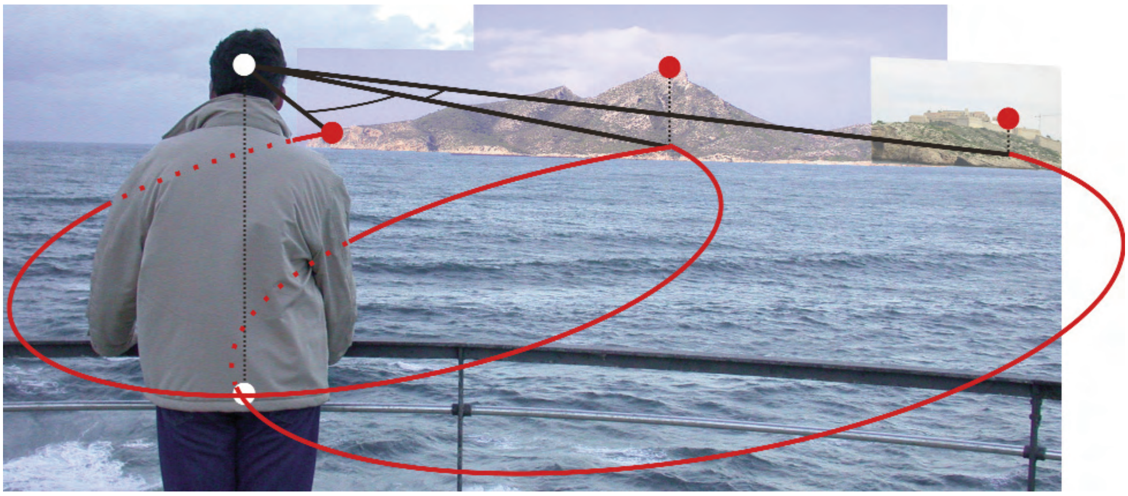
Todas las unidades constan de los siguientes apartados :

- La **Introducción**, que informa del contenido de la unidad y facilita instrucciones para su aprendizaje; propone **objetivos**, que describen las competencias que debe adquirir el alumno tras su estudio; incluye un **mapa conceptual**, que presenta las relaciones entre los conceptos fundamentales y los contenidos de la unidad; y se cierra con el **Índice de contenidos**, que recoge todos los epígrafes de la unidad.
- El **desarrollo secuenciado** de cada unidad aborda los contenidos teóricos y las construcciones necesarias para su comprensión; incluye en ocasiones ejercicios resueltos, titulados **Aplicaciones**, que suelen aportar información sobre su utilidad práctica. En los **Recuerda** se destacan los conceptos e instrucciones fundamentales. Las **Actividades** proponen ejercicios prácticos que sirven para desarrollar y afianzar los contenidos expuestos.
- En todas las unidades se incluyen **animaciones interactivas para el soporte electrónico** que relacionan los contenidos en estudio, con su tratamiento mediante las técnicas infográficas del dibujo técnico.

El material de dibujo recomendable es el siguiente:

- **Papel**, formato A4 (210 x 297 mm.) blanco, de 80 gr/$m^2$ o más, para los dibujos de las actividades, y vegetal transparente, que se empleará cuando se desee calcar los datos para realizar las actividades y poder compararlas con la solución.
- **Goma de borrar,** blanca o incolora de buena calidad.
- **Portaminas o lápiz de grafito**, de dureza 2H para el trazado general, y HB para destacar las soluciones y datos.
- **Compás y plantillas**, ambos con calidad suficiente para el nivel de exigencia gráfica del curso. El compás debe permitir el trazado de círculos grandes y pequeños, y las plantillas (escuadra y cartabón) deben ser de bordes rectos y de un tamaño adecuado a las dimensiones del papel.
- Transportador de ángulos y regla graduada de veinte centímetros de longitud.

# 1 Trazados en el plano. Potencia



Localización de un barco mediante el arco capaz (Ilustración de los autores utilizando fotografías del Banco de imágenes del ISFTIC).

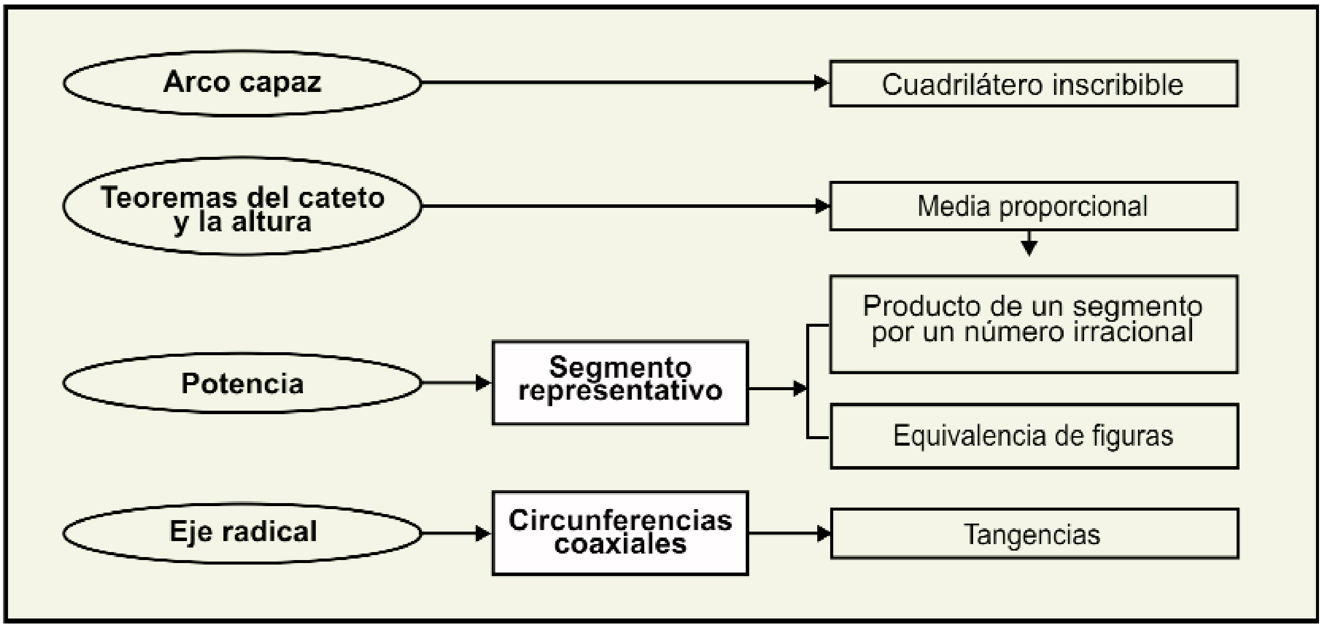
En esta Unidad se completan los trazados en el plano estudiados en Primero, presentando la construcción del arco capaz, su aplicación para determinar la posición de un barco sobre la carta náutica, y la construcción de la media proporcional.

Se introduce, además el concepto de potencia de un punto y sus aplicaciones en la realización de construcciones de tangencia y equivalencia de figuras. Facilitará la comprensión de los fundamentos geométricos de estas aplicaciones y consecuentemente su memorización, la construcción del segmento representativo de la potencia positiva o negativa y el trazado del eje o centro radical.

En las ilustraciones de este libro los trazados se realizan con regla y compás, con excepción de las perpendiculares y paralelas, en las que se utilizan la escuadra y el cartabón. Aunque en el texto la redacción de las construcciones se simplifica, citando construcciones sin desglosarlas en sus operaciones elementales, en la ilustración aparecen todos los trazados necesarios.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los siguientes **objetivos**:

1. Aplicar el concepto de arco capaz como auxiliar de otras construcciones
2. Obtener la media proporcional de dos segmentos por distintos procedimientos
3. Obtener el producto de un segmento por un número irracional
4. Utilizar el concepto de potencia en la resolución de construcciones de tangencia y figuras equivalentes




ÍNDICE DE CONTENIDOS

# 1. Trazados en el plano

## 1.1. Arco capaz de un ángulo sobre un segmento

**Ángulo inscrito** en una circunferencia es aquel cuyo vértice es un punto de ella [Ilustración 1, izquierda]. **El ángulo central correspondiente** al ángulo inscrito abarca el mismo arco que aquel y su vértice es el centro de la circunferencia.

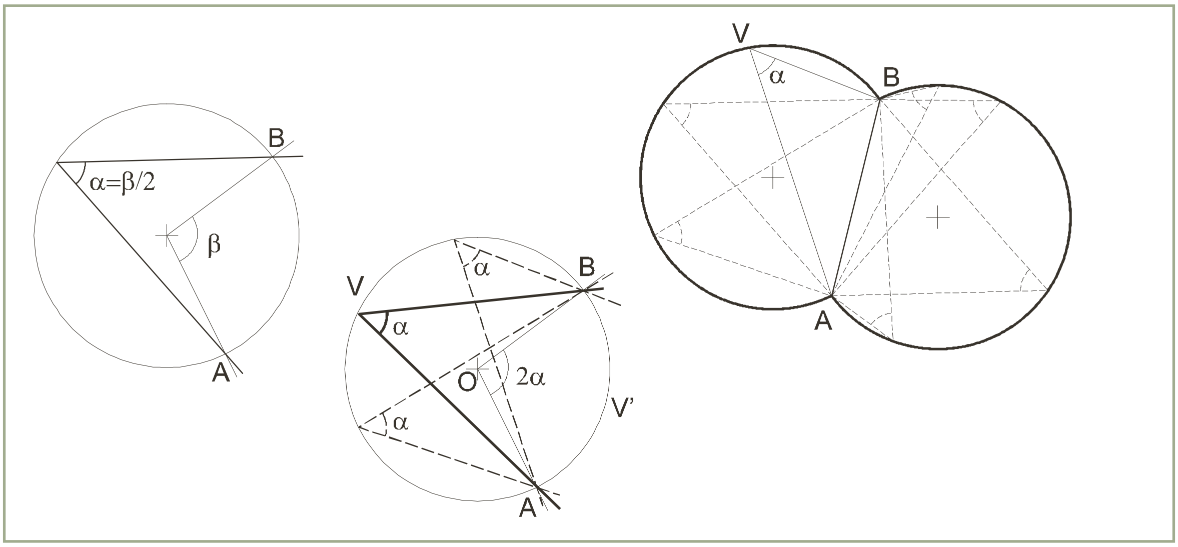



Ilustración 1    Animación

El valor del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente. Así pues, si varios ángulos inscritos comparten el mismo ángulo central sus valores serán iguales. Recíprocamente, elegido un ángulo $\alpha$ y considerando los puntos *A*, *B* fijos y *V* variable, los vértices *V* de los ángulos *AVB* de valor $\alpha$ definen un arco *AVB* cuyo centro *O* es el vértice del ángulo central *AOB* de valor $2\alpha$ [Ilustración 1, centro].

**Se llama arco capaz del ángulo $\alpha$ sobre el segmento *AB*, al lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a él cuyos lados pasan por los extremos del segmento.** Esta formado por dos arcos de circunferencia simétricos cuyos extremos *A* y *B* pertenecen al eje de simetría [Ilustración 1, derecha].

## 1.2. Construcción del arco capaz

Sea el segmento $\overline{AB}$ y el ángulo $\alpha$ [Ilustración 2].

Se transporta el ángulo $\alpha$ a partir del lado *AB* con vértice en *A,* en el semiplano opuesto al que ocupará el arco capaz, de los dos en que $\overline{AB}$ divide al plano. La perpendicular al lado *AC* por *A* corta a la mediatriz de $\overline{AB}$ en el centro $O_1$ de uno de los dos arcos de circunferencia que forman el **arco capaz**. El centro $O_2$ del otro arco es simétrico de $O_1$ respecto de $\overline{AB}$.

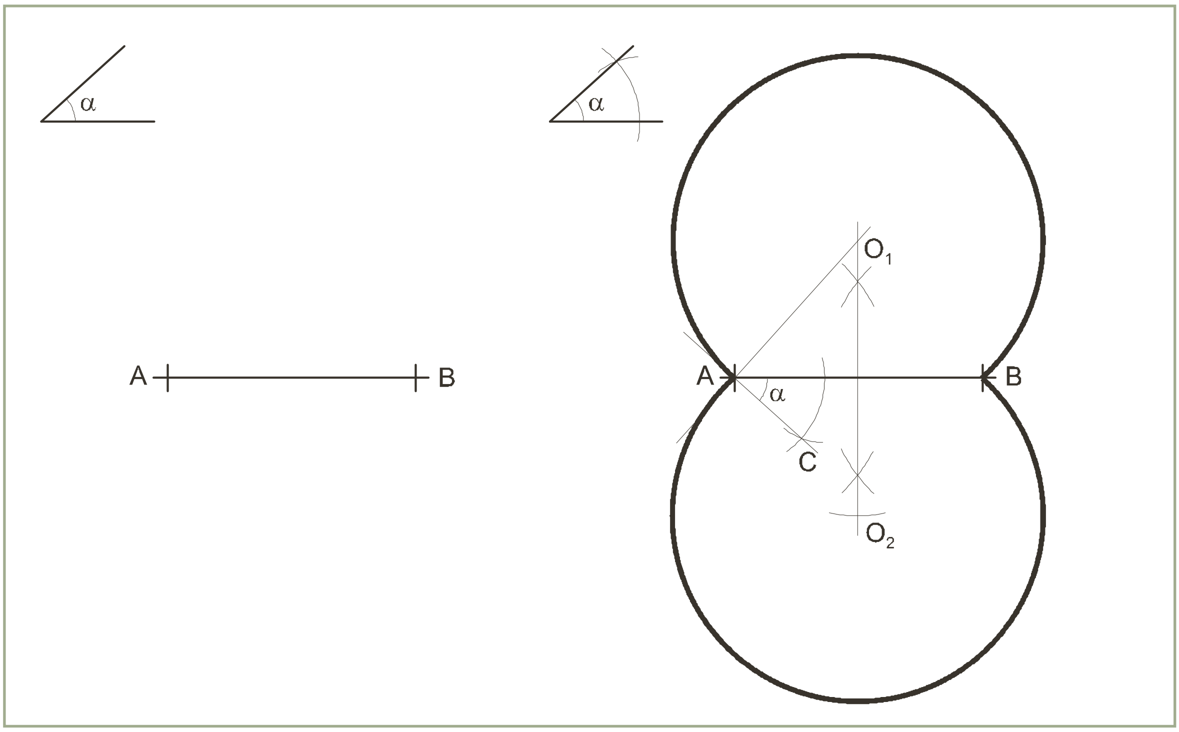
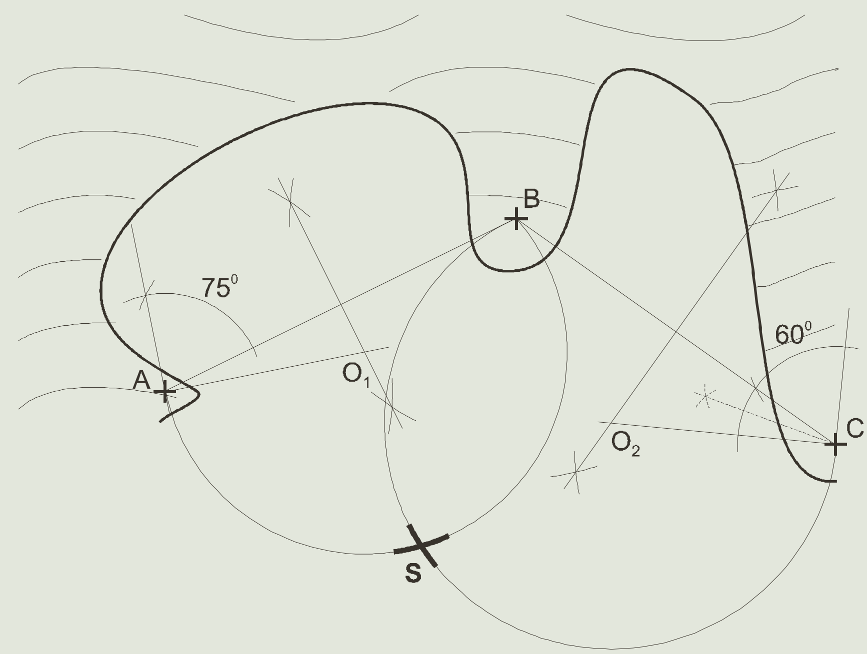



Ilustración 2 Animación

## Aplicación




Desde la cubierta de un barco *S* se miden los ángulos que forman entre sí las visuales a tres puntos de la costa *A, B, C,* resultando 75º para *A* y *B*, y 60º para *B* y *C*. Para situarlo en la carta náutica se trazan los arcos capaces correspondientes a dichos ángulos. Su punto de intersección da la posición de *S*.

## 1.3. Cuadrilátero inscribible

**La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sean suplementarios.**

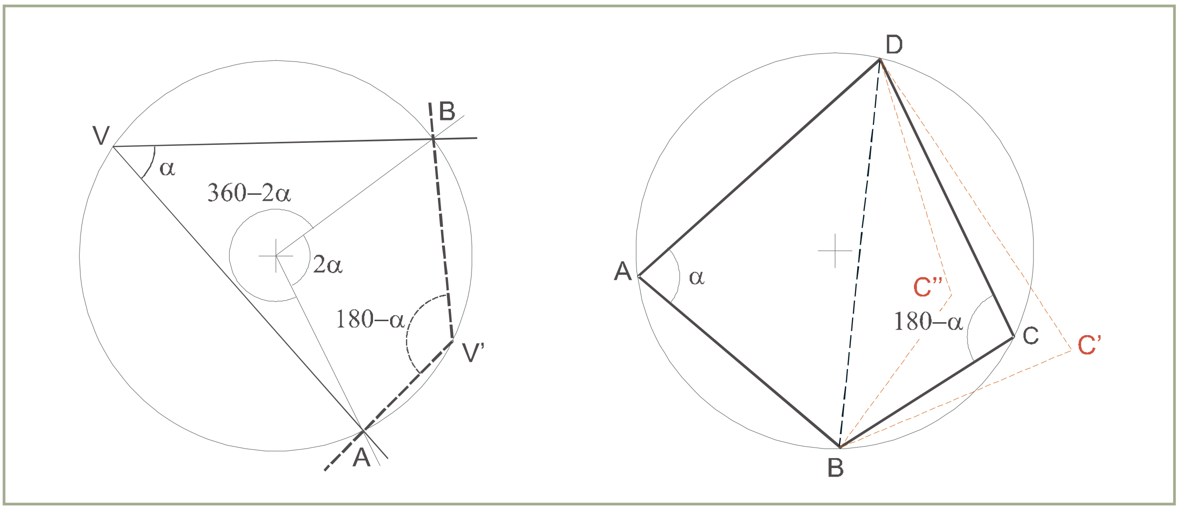



Ilustración 3 Animación

Sea una circunferencia, dos puntos fijos *A*, *B* de ella, y los puntos genéricos *V*, *V'* de los arcos *AVB* y *BV'A* [Ilustración 3 izquierda].

El ángulo inscrito *BV'A* es **suplementario** del *AVB*, ya que sus centrales correspondientes suman 360°.

En el cuadrilátero inscribible *ABCD* de la Ilustración 3 derecha, el arco capaz del ángulo $\alpha$ sobre la diagonal *BD*, determina la existencia del arco capaz de 180º-$\alpha$, que completa la circunferencia. El ángulo interior en *C* deberá ser suplementario del *A*, ya que si fuera menor o mayor el vértice *C* ocuparía las posiciones *C'* o *C''*.

## 1.4. Teorema del cateto

**El cateto del triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.**

En la Ilustración 4 los triángulos rectángulos *ABC* y *BDC* son semejantes, pues comparten el ángulo en *C*. Podemos establecer la proporción $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$, igualando las razones entre las hipotenusas con la de los catetos menores. Así, el cateto *BC* es media proporcional entre la hipotenusa *AC* del triángulo rectángulo *ABC* y su proyección sobre ella *DC*.

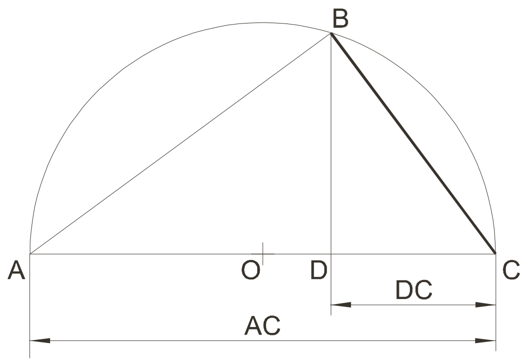



Ilustración 4 Animación

## 1.5. Teorema de la altura

**La altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es media proporcional entre las dos partes en que la divide.**

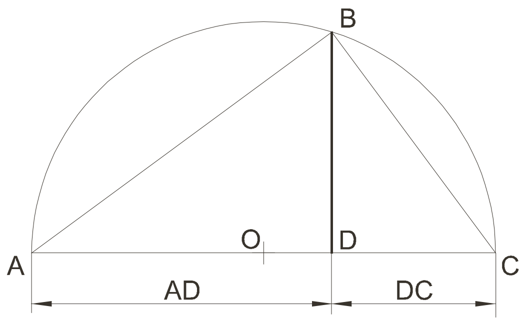



Ilustración 5 Animación

En la Ilustración 5 los triángulos rectángulos *ADB* y *BDC* son semejantes, pues sus lados homólogos son perpendiculares. Podemos establecer la proporción $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}$, igualando las razones entre los catetos. Así, la altura *BD* del triángulo rectángulo *ABC* es media proporcional entre las dos partes *AD* y *DC* en que divide a la hipotenusa.

## 1.6. Construcción de la media proporcional de dos segmentos

Sean los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{c}$ [Ilustración 6].

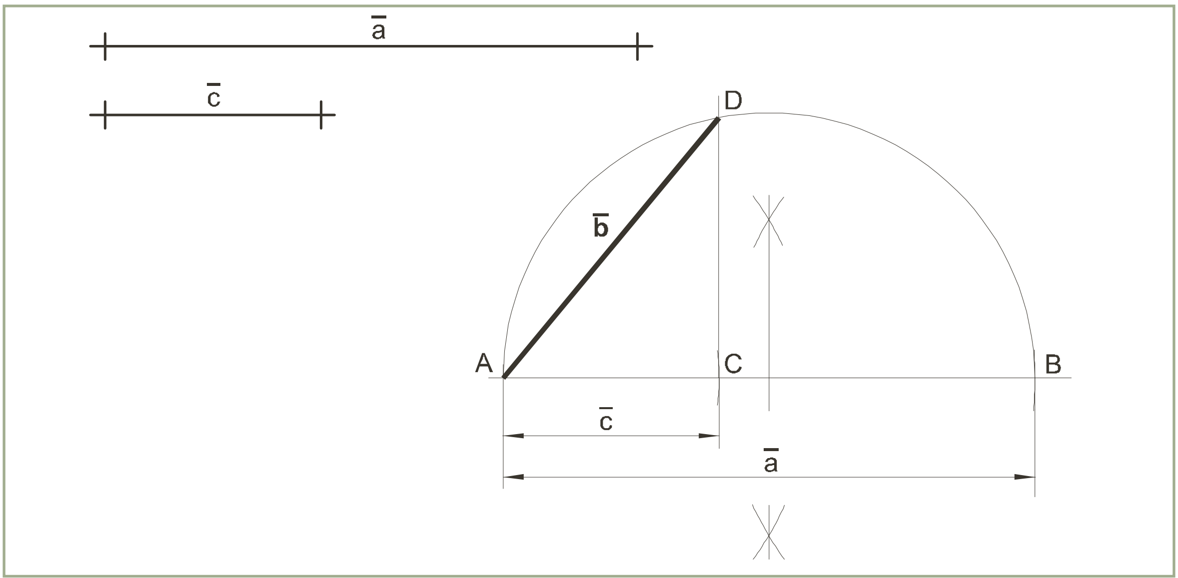
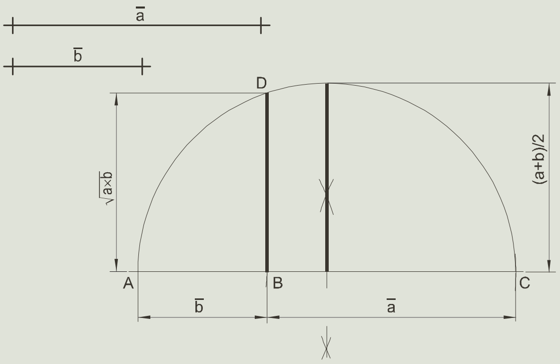



**Ilustración 6**

Si se desea utilizar el teorema del cateto, se transportan ambos segmentos con origen en *A* e igual sentido sobre una semirrecta. El punto de corte *D* de su perpendicular por *C*, con el arco capaz de 90º del segmento mayor $\bar{a}$, determina la longitud del segmento $\overline{AD}$, media proporcional.

**Aplicación**




Se desea comparar gráficamente las medias geométrica y aritmética de las medidas de dos segmentos.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los segmentos. Se transportan consecutivamente sobre una semirrecta para hallar su media proporcional mediante el teorema de la altura. El arco capaz de 90º de su suma corta en *D* a la perpendicular a ésta por *B*.

El segmento $\overline{BD}$ es la media proporcional de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, y su medida la media geométrica $\sqrt{a \times b}$ de las de aquellos. El radio del arco capaz es la media aritmética $\frac{a+b}{2}$, que es siempre mayor o igual que la media geométrica.

# 2. Potencia

## 2.1. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto *P* interior o exterior a ella [Ilustración 7], trazamos desde *P* dos secantes cualesquiera. Las rectas auxiliares *AB’* y *A’B* permiten comparar los triángulos *PAB’* y *PBA’*. Estos son semejantes, pues los ángulos en *P* son compartidos u opuestos por el vértice, y los ángulos en *A’* y *B’* son inscritos e iguales, por abarcar el mismo arco. La proporción entre sus lados es $\frac{PA'}{PB'} = \frac{PB}{PA}$ , multiplicando medios y extremos será *PA x PA’* = *PB x PB’*, así pues, para cualquier secante que pase por *P* dicho producto es constante y recibe el nombre de potencia.

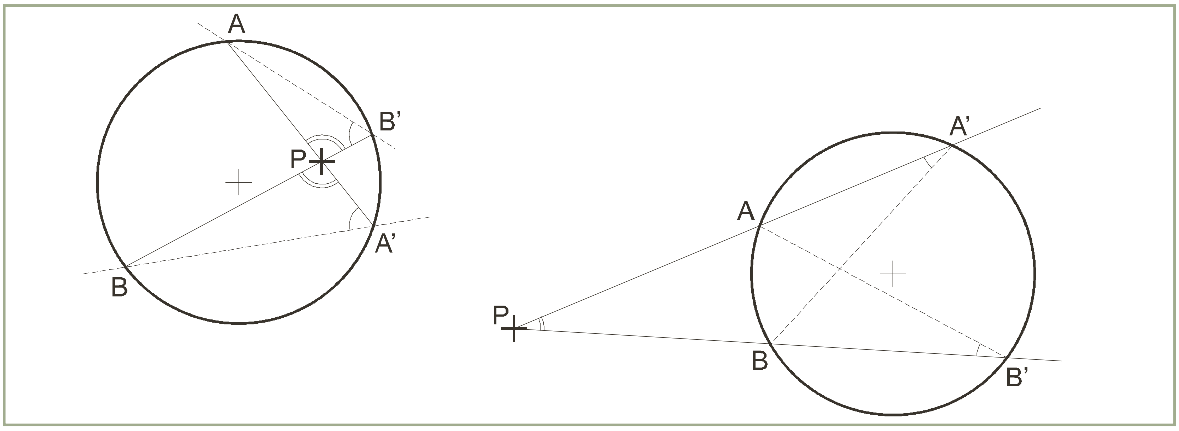



Ilustración 7

**Potencia de un punto respecto de una circunferencia es el producto de las distancias desde dicho punto a los dos de intersección de cualquier secante que pasa por él.**

## 2.2. Valor de la potencia

**La potencia es el producto de las longitudes de dos segmentos orientados**, en el mismo sentido cuando el punto es exterior o en sentidos contrarios si el punto es interior, por lo que en el segundo caso se considerará una de las distancias con signo positivo y la otra negativo. Así, la potencia será **positiva** para los puntos en el exterior y **negativa** para los del interior.

Para hallar la expresión de la potencia de un punto *P*, a partir de su distancia *d* al centro *O*, consideramos la secante que pasa por éste [Ilustración 8].

Si *P* es exterior, $Potencia = (d + R)\times(d - R) = d^2 - R^2$ , ya que ambos segmentos son positivos.

Si *P* es interior, $Potencia = (R + d)\times[-(R - d)] = d^2 - R^2$, pues debemos asignar a los segmentos signos contrarios.

Si *P* está en la circunferencia uno de los segmentos es cero y la potencia también.

Si *P* está en el centro *O* la potencia es la mínima posible $-R^2$ y crece según se aleja de él.

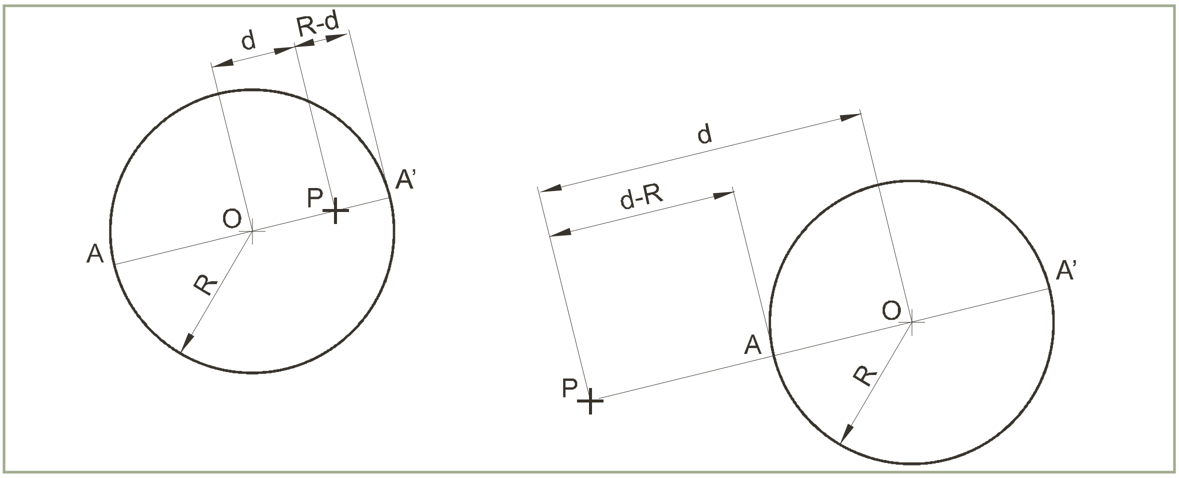



Ilustración 8

## 2.3. Segmento representativo

Para calcular el valor de la potencia de un punto *P* podemos utilizar cualquiera de las infinitas secantes que pasan por él, pero una de ellas presenta la ventaja de producir dos segmentos iguales en magnitud [Ilustración 9]. Dicho **segmento representativo** se convierte así en expresión gráfica de la **potencia**, cuya longitud al cuadrado es su valor.

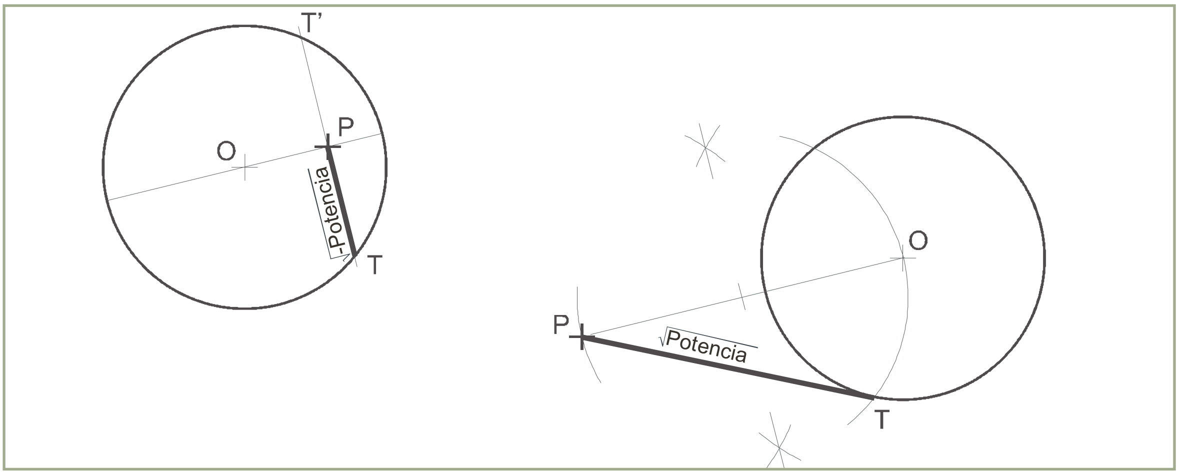
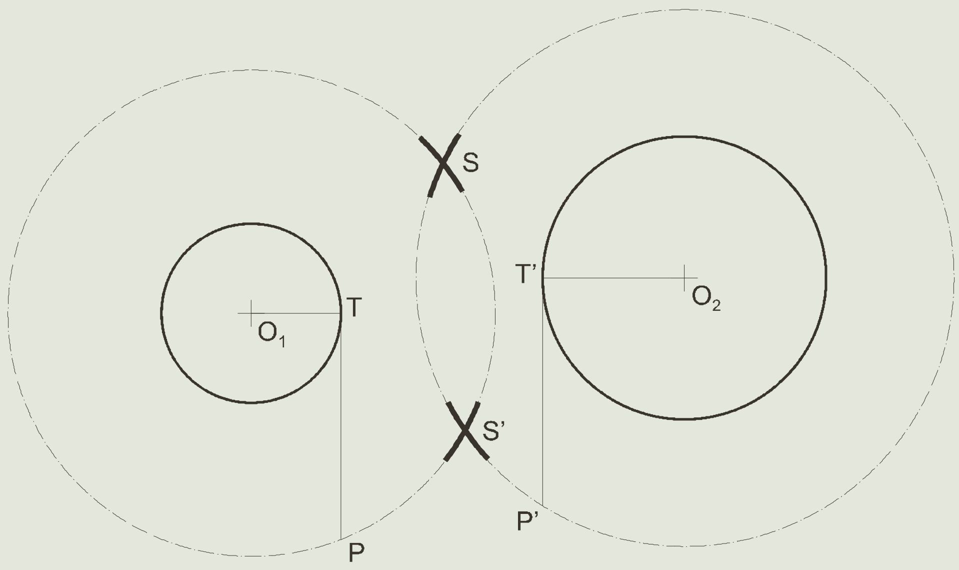



Ilustración 9

Para un punto exterior *P* [Ilustración 9, derecha] el segmento representativo es la tangente que pasa por él, ya que *Potencia* = *PT x PT* = $PT^2$. Su longitud es la raíz cuadrada de la potencia.

Para un punto interior *P* [Ilustración 9, izquierda] el segmento representativo es una de las dos mitades de la cuerda que pasa por él, que son simétricas respecto del diámetro que también pasa por *P*, ya que *Potencia* = *PT x* (–*PT'*) = $-PT^2$. Su longitud es la raíz cuadrada de la potencia cambiada de signo.

## Aplicación




Se desea hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen una potencia de 9 cm$^2$ respecto de las circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$.
Como la potencia es positiva, dichos puntos están en el exterior. Trazamos segmentos representativos *TP* y *T'P'*, de longitud $\sqrt{9\,cm^2} = 3\,cm$ , tangentes a cada una de las circunferencias. Los puntos de las circunferencias concéntricas con éstas que pasan por *P* o *P'*, tienen potencia 9 cm$^2$ respecto de su circunferencia correspondiente. La intersección de ambas nos da los dos puntos solución.

# 2.4. Producto de un segmento por un número irracional

Sea el segmento $\bar{a}$ y $\sqrt{8}$ el número irracional [Ilustración 10].

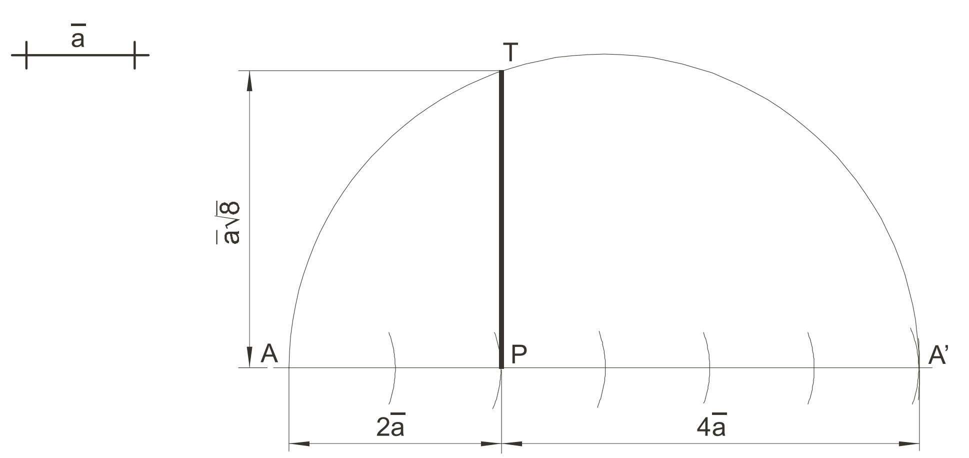



Ilustración 10

Se transporta $\bar{a}$ sobre una semirrecta de origen *A* seis veces consecutivas y se traza la semicircunferencia de diámetro $6\bar{a}$. Por el punto *P*, de división de los segmentos $2\bar{a}$ y $4\bar{a}$ creados, se levanta una perpendicular a estos, obteniéndose el segmento $\overline{PT}$ representativo de la potencia del punto *P*, cuya longitud es $\sqrt{-Potencia} = \sqrt{-[(-2a)\times 4a]} = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8}$.

Esta construcción podría haberse realizado igualmente creando los segmentos $\bar{a}$ y $8\bar{a}$, ya que la longitud de $\overline{PT}$ sería $\sqrt{-Potencia} = \sqrt{-[(-a)\times 8a]} = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8}$.

## 2.5. Eje radical de dos circunferencias

**Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.** Este es una recta perpendicular a la línea que une sus centros [Ilustración 11].

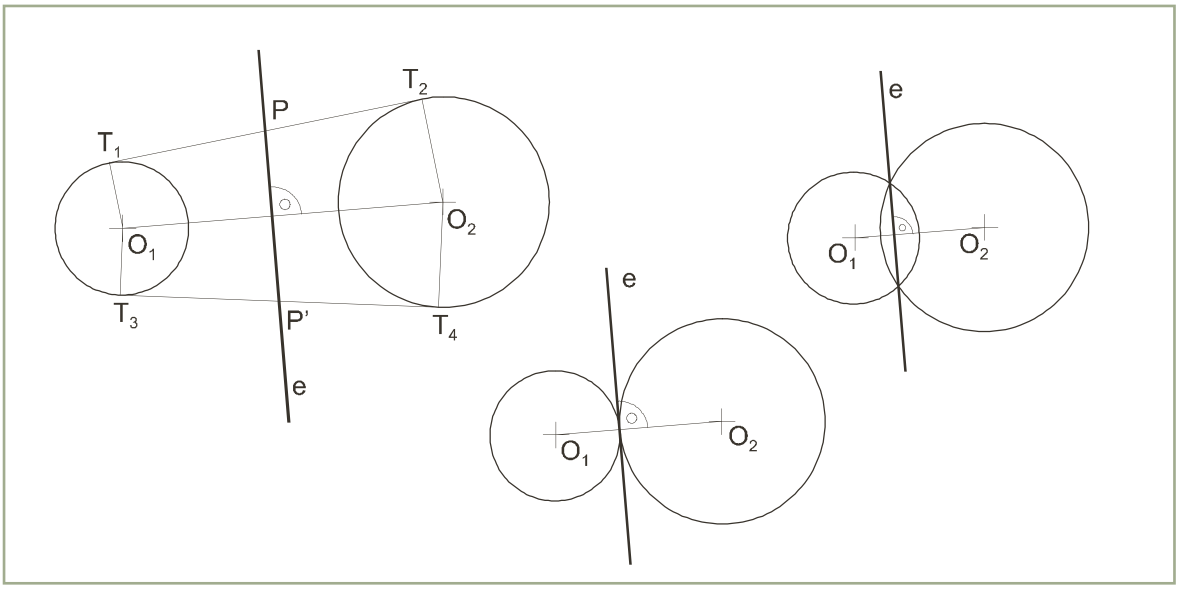



Ilustración 11

Si las circunferencias son exteriores el eje radical *e* pasa por los puntos medios *P* y *P'* de las tangentes comunes $T_1T_2$ y $T_3T_4$.

Si las circunferencias son secantes el eje radical pasa por los dos puntos de corte.

Si las circunferencias son tangentes el eje radical es la tangente común.

## 2.6. Centro radical

**Centro radical de tres circunferencias es el punto que tiene igual potencia respecto de cada una de ellas.** Es, por tanto, el punto de corte de los tres ejes radicales de dichas circunferencias tomadas de dos en dos [Ilustración 12].

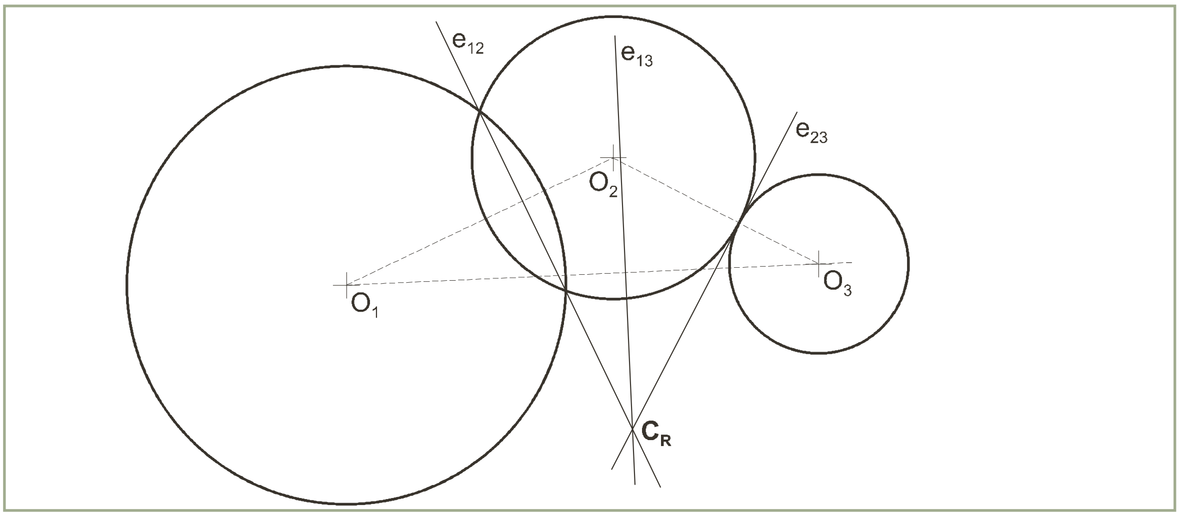



Ilustración 12

## 2.7. Construcción del eje radical

Sean las circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$ [Ilustración 13].

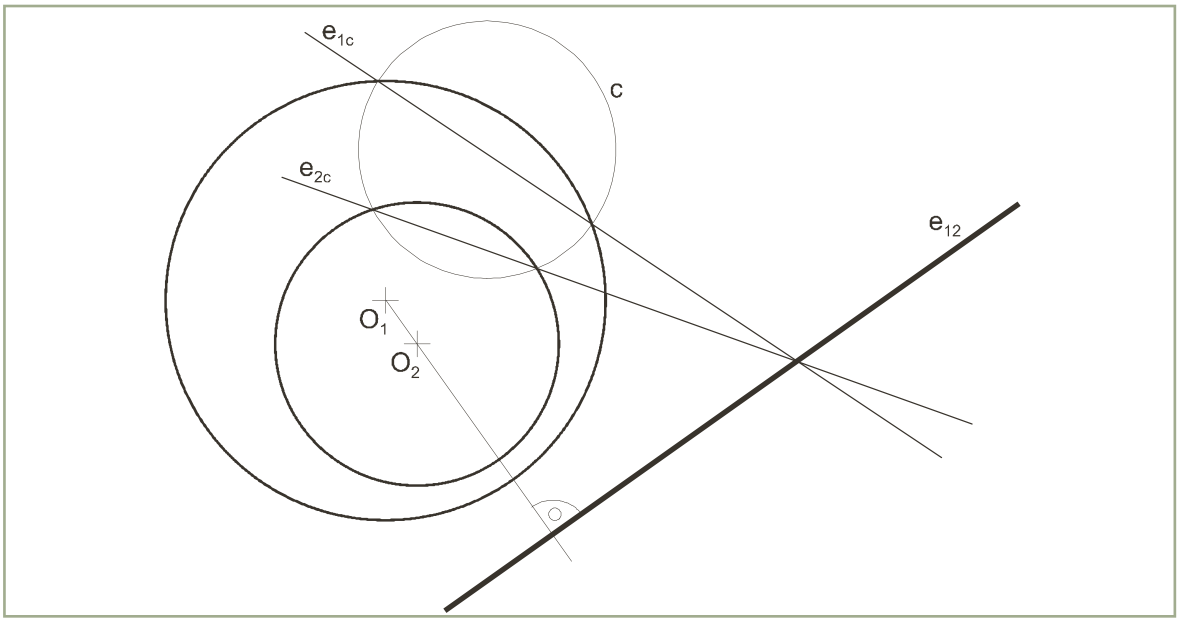



Ilustración 13

Se traza la circunferencia auxiliar *c*, secante a ambas, y se hallan los ejes radicales de ésta con cada una de ellas. El punto de corte de dichos ejes radicales es centro radical de las tres. Por tanto, pasando por él y perpendicular a la línea que une sus centros estará el **eje radical** de las de centros $O_1$ y $O_2$.

## 2.8. Circunferencias que comparten el eje radical

Obtenido el eje radical *e* de dos circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$, es posible obtener otras que compartan el eje radical con ellas [Ilustración 14]. Basta trazar la circunferencia de centro en un punto cualquiera *P* del eje *e* y radio el segmento representativo $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$ de la potencia. Las rectas tangentes a ella contienen los radios de las **circunferencias coaxiales**, cuyos centros están en la recta que pasa por $O_1$ y $O_2$.

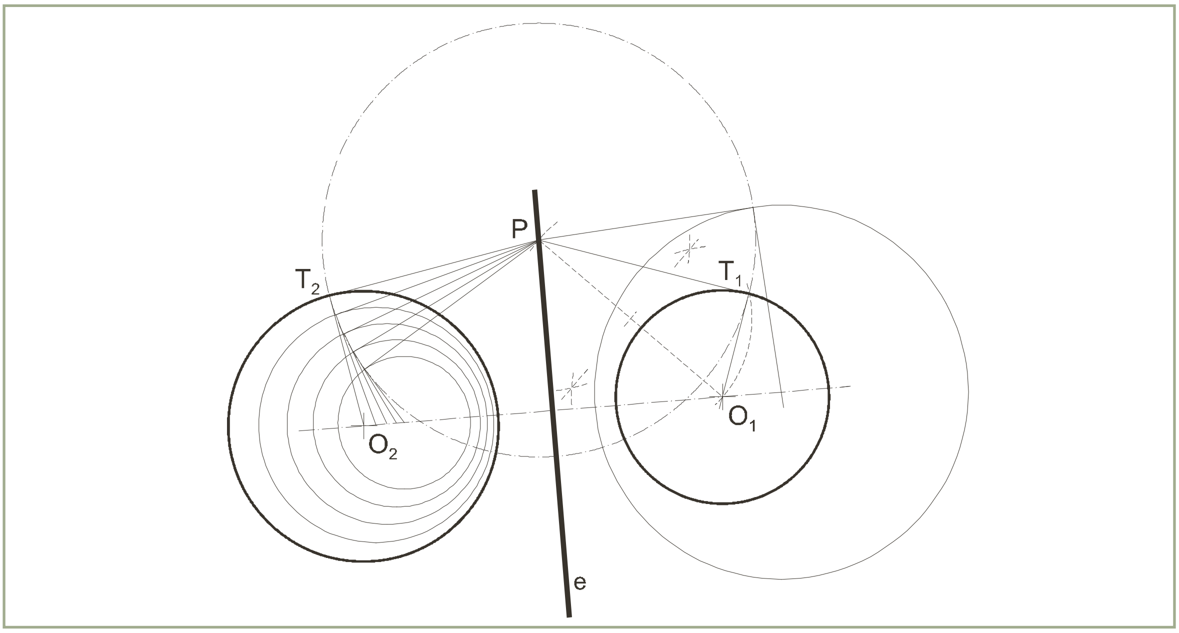



Ilustración 14