Ministerio de Educación y Ciencia
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

SEIS PARA CUADRAR

MATEMATICAS 12

Centros de Profesores

63178

CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACION
Y DOCUMENTACION EDUCATIVA

C I D E

BIBLIOTECA

CIUDAD UNIVERSITARIA, S/N.
28040 MADRID

Este libro debe ser devuelto el día:

20 MAR. 1992	

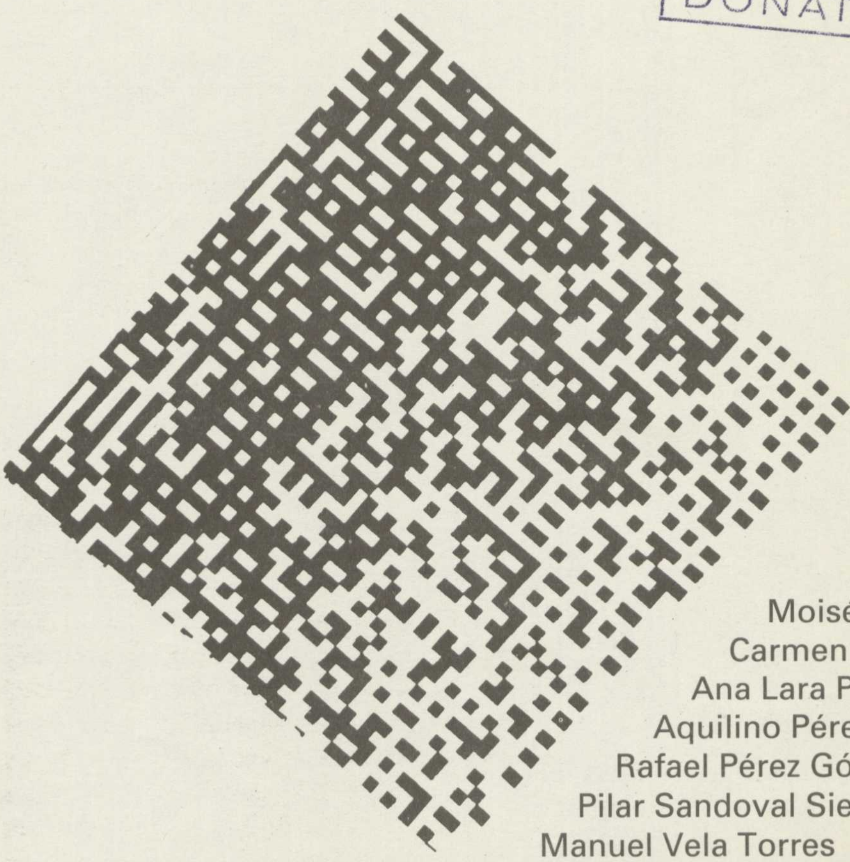
Atiéndase a la fecha escrita en último lugar.

~~B-15515~~
63178

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE ORDENACION ACADEMICA

seis para cuadrar

DONATIVO



MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
CIDE
BIBLIOTECA

Moisés Coriat Benarroch
Carmen García Arribas
Ana Lara Porras
Aquilino Pérez de Madrid
Rafael Pérez Gómez
Pilar Sandoval Sierra
Manuel Vela Torres

Nivel: E. G. B.

BIBLIOMEC
048922

Colección: *"Documentos y propuestas de trabajo"*

R. 171807

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE ORDENACION ACADEMICA
N. I. P. O.: 176-89-027-X
I. S. B. N.: 84-369-1725-1
Depósito Legal: 38204-1989
Imprime: MARIN ALVAREZ HNOS., Madrid
Diseñado por: Fernando Hernández Rojo

Prólogo

Es usual que para presentar un libro se elijan un par de ideas clave del texto y, a partir de ellas, se haga una reflexión general que describa con acierto la obra a comentar. Tengo que confesar que me ha costado trabajo seleccionar esas ideas fundamentales en este caso, ya que este libro admite varios niveles de lectura.

Creo que una de esas claves se encuentra en el último "teorema" que se enuncia en el libro: *Aprender sin pensar es inútil. Pensar sin aprender es peligroso.*

Elegir esta versión de que el aprendizaje y la reflexión no son independientes, sino todo lo contrario, es cuestión de buen gusto. Mostrar cómo el razonamiento es condición para el aprendizaje y cómo sólo se consigue un sólido aprendizaje mediante el razonamiento es uno de los motivos para haber escrito este libro.

Como en las buenas investigaciones, es en sus enunciados finales donde quedan resumidos sus resultados más importantes. Creemos que este último enunciado sintetiza bastante bien una de las ideas más interesantes que puede apreciar el lector atento.

En otro orden de ideas hay que reconocer que éste es un libro escrito contra los tópicos. La Educación Matemática es un campo de trabajo peligroso, y uno de los más sutiles consiste en instalarse a perpetuidad sobre los éxitos conseguidos. Resulta relativamente sencillo despertar el interés y el entusiasmo de los alumnos al trabajar en matemáticas sobre un determinado tópico. Mucho más difícil resulta no volver a reiterar una y otra vez aquellos ejemplos y ejercicios con los que alguna vez lograramos conseguir la atención de nuestros alumnos. La rutina y la reiteración son un gran peligro, lo que la escuela francesa llama "el envejecimiento de las situaciones didácticas", del que a veces es difícil escapar.

Los autores nos quieren mostrar cómo de cualquier tópico, por manido que esté, es posible obtener información, trabajar creativamente, elaborar estrategias y emplear un aparato matemático potente e importante.

El hilo conductor, el guía elegido, es el cuadrado. Hay que reconocer cierto atrevimiento en esta elección, ya que el cuadrado es una figura con mala prensa. Coloquialmente, los términos "cuadrar", "cuadricular", "tener la cabeza cuadrada" tienen un carácter despectivo. Cuadrado suele ser sinónimo de estancado, fosilizado, detenido... Pero esto no deja de ser un tópico más, el primero que desmontan los autores, mostrándonos cómo el fino equilibrio que se manifiesta en un cuadrado no está reñido en absoluto con el dinamismo, la intuición, la invención y el pensamiento divergente.

¿Cuántas ideas pueden surgir a partir de la estructura "cuadrado"? ¿Cuánta información puede derivarse? ¿Con cuántos campos de la matemática se puede conectar? ¿Qué aprendizajes se pueden realizar a partir de un cuadrado?

La selección de problemas hecha por los autores, más los de su propia aportación, nos ponen de manifiesto la multiplicidad de facetas que se esconden en un aparentemente simple y maltratado concepto como el cuadrado.

Aprovechar esta riqueza de conexiones para desarrollar un tratamiento de resolución de problemas es el gran acierto de esta obra. La gran experiencia profesional y didáctica de los autores hace el resto.

Pero había prometido al comienzo destacar sólo un par de ideas. Creo que el lector no se va a sentir defraudado con la lectura de este libro y que, seguramente, va a encontrar interesante realizar más de una excursión por este trabajo.

Quiero concluir felicitándome y felicitando a la comunidad de Educadores Matemáticos españoles por el hecho de que se empiecen a producir trabajos autóctonos tan valiosos como *Seis para cuadrar*.

Granada, diciembre de 1988.

L. RICO

Agradecimientos

Seis para cuadrar no puede aparecer dignamente sin mencionar a los profesores Ramón Braojos Burgos y Luis Rico Romero.

Las aportaciones de ambos durante los balbuceos del proyecto que condujo a este libro han sido para nosotros de una inmensa utilidad. Las sugerencias del segundo han contribuido a mejorar aspectos del contenido y de la redacción inicial.

Lamentamos que, por causas ajenas a todos, no figuren entre los autores de este libro.

Los autores nos quieren mostrar cómo de cualquier tópico, por manido que esté, es posible obtener información, trabajar creativamente, elaborar estrategias y emplear un aparato matemático, potente e importante.

El hilo conductor, el guía elegido, es el cuadrado. Hay que reconocer cierto atrevimiento en esta elección, ya que el cuadrado es una figura con mala prensa. Coloquialmente, los términos "cuadrar", "cuadricular", "tener la cabeza cuadrada" tienen un carácter despectivo. Cuadrado suele ser sinónimo de estancado, fosilizado, detenido... Pero esto no deja de ser un tópico más, el primero que desmontan los autores, mostrándonos cómo el fino equilibrio que se manifiesta en un cuadrado no está reñido en absoluto con el dinamismo, la intuición, la invención y el pensamiento divergente.

¿Cuántas ideas pueden surgir a partir de la estructura "cuadrado"? ¿Cuánta información puede derivarse? ¿Con cuántos campos de la matemática se puede conectar? ¿Qué aprendizajes se pueden realizar a partir de un cuadrado?

La selección de problemas hecha por los autores, fruto de su propia aportación, nos pone de manifiesto la multiplicidad de facetas que se esconden en un aparentemente simple y trasparente concepto como el cuadrado.

Aprovechar esta riqueza de conexiones para desarrollar un tratamiento de resolución de problemas es el gran acierto de esta obra. La gran experiencia profesional y didáctica de los autores hace el resto.

Pero había prometido al comienzo destacar sólo un par de ideas. Creo que el lector no se va a sentir defraudado con la lectura de este libro y que, seguramente, va a encontrar interesante realizar más de una excursión por este trabajo.

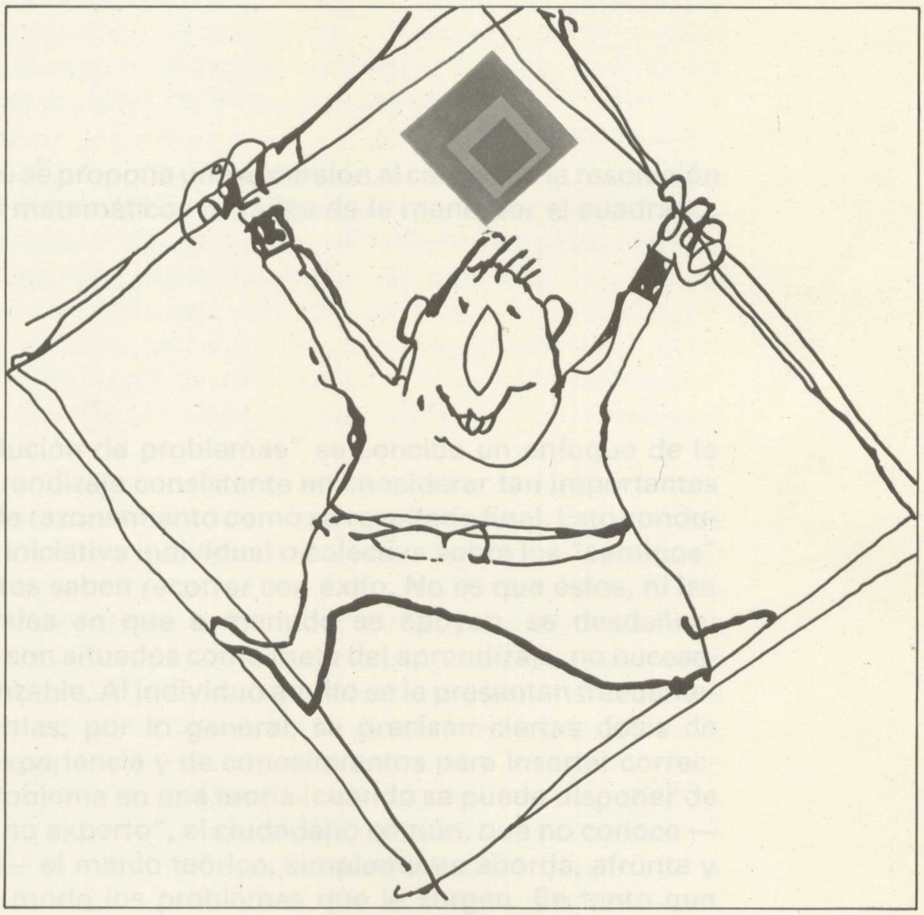
Quiero concluir felicitándome y felicitando a la comunidad de Educadores Matemáticos españoles por el hecho de que se empiecen a producir trabajos autóctonos tan valiosos como *Seis para cuadrar*.

Granada, diciembre de 1988.

L. RICO

Páginas

Presentación



"—¿Se beneficiarán nuestras tierras de este paso, de esta entrada?
—Casi seguro. Yo soy un ejemplo mínimo de las maravillas que pueden encontrarse al otro lado de esa entrada."

G. BEAR

En este libro se propone una excursión al campo de la resolución de problemas matemáticos llevados de la mano por el cuadrado.

El campo

Bajo "resolución de problemas" se concibe un enfoque de la enseñanza/aprendizaje consistente en considerar tan importantes los procesos de razonamiento como su resultado final. Esto conduce a primar la iniciativa individual o colectiva sobre los "caminos" que los expertos saben recorrer con éxito. No es que éstos, ni las teorías generales en que a menudo se apoyan, se desdeñen; simplemente, son situados como meta del aprendizaje, no necesariamente alcanzable. Al individuo adulto se le presentan frecuentemente problemas; por lo general, se precisan ciertas dosis de destreza, de experiencia y de conocimientos para insertar correctamente un problema en una teoría (cuando se puede disponer de ella). Pero el "no experto", el ciudadano común, que no conoce —o ha olvidado— el marco teórico, simplemente aborda, afronta y resuelve a su modo los problemas que le surgen. En tanto que objeto de estudio, la resolución de problemas comparte el interés de la psicología, de la sociología, de la informática y de cada una de las ramas del saber que se dedican al estudio sistemático de una o varias clases de problemas. ¿Puede basarse la metodología para desarrollar un currículo de matemáticas escolares en la resolución de problemas? En los capítulos que siguen pretendemos dar orientaciones para responder a la pregunta anterior: se muestran tipos de problemas para la clase de matemáticas, sugerencias que pueden ayudar a los alumnos a avanzar en la resolución de un problema e indicaciones para que un profesor y sus alumnos actúen en clase. Este intento, aun teniendo aspectos originales, se apoya, muy libremente, en la obra de diversos autores:

—Schwab, quien, a principios de los años setenta, sienta las bases para un cambio radical en la noción de currículo, centrándolo principalmente: (1) en el análisis de la práctica, (2) en la consideración de la singularidad de la práctica curricular y (3) en la orientación de la "teoría curricular" a la resolución de problemas.

Hay "corrientes" que, en esta línea, sostienen la necesidad de integrar procesos y productos, estrategias y procedimientos, en un estudio unitario y flexible. Se trata de una propuesta coherente que sólo especifica principios generales para orientar la práctica escolar como un proceso de resolución de problemas.

—Simon, quien, como resultado de sus trabajos con Newell, enuncia cuatro "leyes de estructura cualitativa de la solución humana de problemas" (sin pretender que sean las únicas). Todas están orientadas a desarrollar la noción de "espacio del problema", que es la manera de considerar el ambiente de la tarea a desarrollar, es decir, la representación que se hace el resolutor de la situación que lo moviliza.

Simon sugiere la posibilidad de enseñar a resolver problemas en el contexto de una materia específica como las matemáticas. Al hecho, bien conocido, de que los alumnos deberían ver cómo se van resolviendo muchos problemas para, después, poder resolver otros, se añade la propuesta de que los procesos generales de "establecer objetivos" y "representarse los problemas" deberían enseñarse en el contexto de problemas específicos.

El lenguaje es el modo esencial de la comunicación humana. Todo "buen uso" de un lenguaje es indicador de "buenos modos" de pensar. Por ello, el acceso a los lenguajes de las matemáticas debe integrarse plenamente en el acceso a la lengua materna que nuestros escolares están simultáneamente depurando. De ahí que hayamos intentado expresar las cosas en un lenguaje que quiere ser sencillo sin renunciar a ser correcto. ¡Tiempo tendrán los alumnos, si siguen estudios superiores, de adecuar su lenguaje al de una o varias escuelas matemáticas! Y, en caso contrario, de poco les servirá en su vida profesional un lenguaje hermético, generalmente inadecuado para tratar problemas con "contornos imprecisos", como suelen ser los problemas que aparecen en la vida cotidiana.

Esta exigencia conlleva dos dificultades que hemos debido asumir y cuya resolución no es tan obvia como en un principio supusimos:

—En primer lugar, la dificultad de no renunciar al rigor.

Este término admite interpretaciones diversas. Si por "rigor" se entiende la necesidad de que una situación se exprese mediante un lenguaje preciso, breve y simbólico, para cuya comprensión es necesario el conocimiento previo de una enorme masa de contenidos bien estructurados, entonces posiblemente el rigor esté ausente de este libro; en cambio, si por "rigor" se entiende la necesidad de que la búsqueda y obtención de resultados sean convincentes, válidos, coherentes y comunicables, entonces el lector podrá encontrar rigor en cada uno de los problemas que se proponen. En cualquier caso, los profesores que deseen llevar el rigor a sus clases pueden sacar partido de un criterio sencillo, pero potente: fijar el punto de partida que se considere correcto y las reglas de juego para sacar conclusiones; cuando se obtenga una propiedad respetando este principio, se podrá decir que la deducción se ha llevado a cabo con el rigor apropiado.

—En segundo lugar, la dificultad de utilizar una terminología al menos coherente.

La cantidad de trabajos realizados sobre resolución de problemas exige reflexionar acerca de la terminología empleada. Casi todas las palabras, actualmente en uso, relacionadas con la resolución de problemas, tienen una procedencia mixta: a la jerga matemática de los años 50 y posteriores se le han incorporado vocablos procedentes, principalmente, de las jergas psicológica e informática, con el agravante de que las múltiples y variadas traducciones de textos en inglés o francés provocan polisemias y sinonimias abusivas. Ofrecemos en este libro una breve lista de términos castellanos para la resolución de problemas.

El guía

El cuadrado presenta un interés particular por ser un objeto matemático con una estructura riquísima. Se define a partir de distintas familias de conceptos: (1) polígono, polígono regular y rectángulo; (2) banda, anchura de una banda y bandas perpendiculares. Se observa, con estos dos ejemplos, que el concepto de cuadrado se obtiene con ayuda de muchos conceptos previos (es decir, se trata de un concepto derivado).

La palabra "cuadrado" se utiliza normalmente como "clave" que encierra las ideas de "polígono", "cuatro lados", "lados iguales", "ángulos rectos".

Indagación[1] 1.ª

¿Puedes dar, de memorieta, algunas definiciones adecuadas del cuadrado?

¿Es posible definir un cuadrado usando solamente la noción de "segmentos iguales"? ¿Es posible definir un cuadrado usando solamente la noción de "ángulos rectos"?

[1] A lo largo del libro irás encontrando muchos tipos de problemas. Pensamos que te apetecerá hacerlos todos, pero hay unos en particular que te están destinados como lector; son los que van encabezados por la palabra "Indagación". La gran mayoría de las Indagaciones se refieren a problemas matemáticos, pero no todas: algunas se refieren a problemas de educación matemática. En el capítulo 2.° hemos propuesto una tipificación de los problemas para el Aula; sin embargo, hemos decidido no aplicarla a los problemas que te proponemos. Ésta podría ser otra "Indagación"...

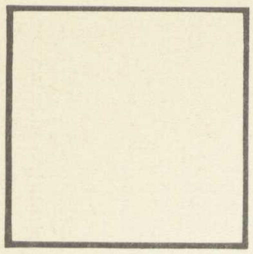


Figura 1

Al igual que muchos conceptos geométricos, el cuadrado está asociado a un dibujo convencional. La versión usual es la de la figura 1; en ella se reconocen, con mayor o menor facilidad, el polígono, los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.

Dibujos menos usuales se muestran en la figura 2.

Las representaciones gráficas usadas en geometría se basan en un modelo para puntos, rectas y planos. La representación dada en la figura 1 es tan usual que tenemos tendencia a identificarla con el concepto; así, solemos decir que "la figura 1 ES un cuadrado". Este abuso de lenguaje está tan extendido y su rechazo exigiría tanta pedantería, que nosotros también lo seguiremos, como se hace sistemáticamente en todas las aulas del Planeta. Por ello, aunque no debe olvidarse que el dibujo de la figura 1 corresponde a un modelo basado en una representación particular de los conceptos básicos de "punto", "recta" y "plano", lo usamos por tratarse de un modelo potentísimo —para el aprendizaje y para la investigación—. Si se pretende reforzar y estimular la "intuición", conviene usar dibujos; el razonar con dibujos permite poner de manifiesto, como si fueran "obvios", muchos conceptos, relaciones o ideas.

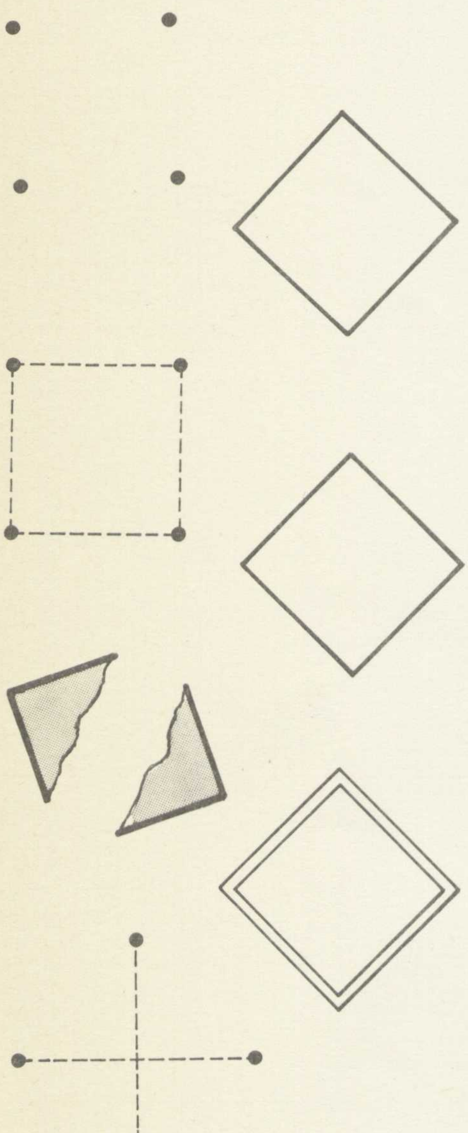


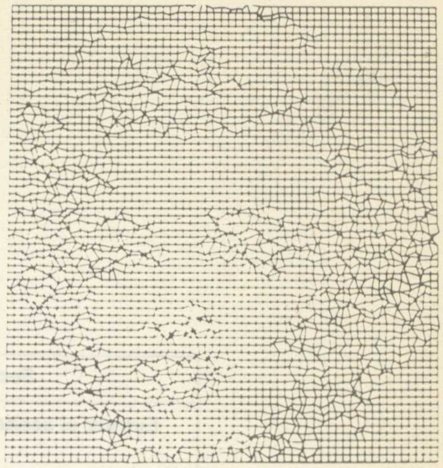
Figura 2

Con ayuda del cuadrado se pueden visualizar los siguientes conceptos, relaciones o ideas:

— Figura plana.
— Destacan cuatro vértices.
— Destacan cuatro lados.
— Destacan cuatro ángulos rectos.
— Igualdad de segmentos.
— Igualdad de ángulos.
— Paralelismo de rectas.
— Perpendicularidad de rectas.
— Frontera, división del plano en dos partes, convexidad.

En las ampliaciones que se hacen para el estudio de la geometría analítica y métrica se mantiene la caracterización del cuadrado que se aprende en la geometría intuitiva. Sólo la expresión se va haciendo progresivamente más abstracta, por apelar a conceptos más precisos y mejor definidos y hacer uso de una simbolización más lograda de las nociones iniciales que caracterizan el cuadrado; éstas no varían, aunque sí se completan con el grupo de isometrías que dejan invariante un cuadrado.

Su utilidad como recurso para facilitar razonamientos y efectuar demostraciones en los que aparece el concepto y las propiedades peculiares que presentan los objetos con esta forma (o construidos a partir de ella) hacen que el cuadrado no pierda importancia en geometría superior. Todo lo dicho justifica la utilidad del cuadrado, no sólo para las matemáticas, sino en múltiples situaciones. Un buen catálogo de aplicaciones socialmente concedidas al cuadrado es el de Bruno Munari: *La scoperta del quadrato*, Ed. S.P.A., Bolonia, 1978, del que extraemos el siguiente ejemplo (figura 3).



ARTE POR ORDENADOR
Retrato de Marilyn Monroe
Computer Technique Group

La excursión

El recorrido que proponemos muestra el siguiente aspecto "panorámico" al comienzo:

Tabla* 1

Estrategias	←	**Heurísticos**
Secuencias ordenadas de tareas	←	**Procedimientos**
Teorías	←	**Métodos**

*** La explicación de la Tabla se da en esta presentación y en el capítulo 1.**

Supongamos que una persona se plantea un problema matemático y pretende resolverlo. El proceso de resolución consiste en tomar una serie de decisiones y realizar las actuaciones consecuentes. En el capítulo 1, "Pinceladas heurísticas en torno al cuadrado", se propone una descripción genérica de "Estrategia", de "Heurístico" y de su relación: al poner en práctica una estrategia se usan heurísticos. Se trata del nivel "más general" de la resolución de problemas; un resolutor puede abordar un problema de un modo pragmático, sin preocuparse por los procesos de pensamiento y de actuación que ha utilizado, sino sólo por el resultado; o puede ocurrir que obtenga un resultado "por casualidad" y, sin más, trate (como primera medida) de reconstruir las etapas que condujeron al resultado (el caso de A. Fleming y el "penicilium notatum"). Así, estrategias y heurísticos aparecen como "primitivas" a partir de las cuales se construyen y caracterizan otras nociones ligadas a la resolución de problemas[1].

Un segundo nivel, más estricto, corresponde a las situaciones en las que el resolutor, a la vista del éxito que tiene su modo de actuar, decide ordenar las tareas con el ánimo de "optimizar" la obtención de resultados. Con esta optimización se persiguen dos objetivos no incompatibles entre sí: (1), ganar tiempo en la obtención de la

[1] Este no es el caso de los psicólogos, cuya meta consiste, precisamente, en reconocer el funcionamiento de la "mente" del resolutor cuando pone en marcha una estrategia y aplica unos heurísticos. Se trata, por tanto, de dos enfoques funcionalmente diferentes, pero no incompatibles.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
CIDE
BIBLIOTECA

solución; (2), evitar olvidos que pueden conducir a consecuencias indeseadas. Para conseguir dicha optimización se recurre a "procedimientos", es decir, a describir con cierto detalle las distintas etapas que hay que efectuar, acaso incluyendo el tiempo de cada una de ellas, y el orden en que han de efectuarse. He aquí algunos ejemplos de secuencias de tareas y procedimientos asociados (tablas 2 y 3).

Tabla 2

Cambiar el aceite de un coche

Secuencia:	Procedimientos:
Extraer el aceite gastado.	Preparar un recipiente y colocarlo. Preparar lata de aceite nuevo. Sacar tornillo y arandela. Esperar goteo del aceite viejo.
Decidir el cambio de arandela.	Si la arandela está bien, pasar a la etapa siguiente. Si no, cambiarla.
Poner el aceite nuevo.	Colocar la arandela en el tornillo. Cerrar el depósito de aceite. Llenarlo de aceite nuevo.

Tabla 3

Calcular la diagonal de un cuadrado de lado unidad.

Secuencia:	Procedimiento:
Comprender.	Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles.
Decidir lo que se va a utilizar. Aplicar.	El teorema de Pitágoras $d^2 = 1^2 + 1^2$, d = 2 u.l.

En un tercer nivel, aún más estricto que el segundo, el resolutor conoce (o desarrolla por sí mismo) un marco conceptual —una teoría— en el que varias clases de problemas tienen solución razonable y comunicable. En este supuesto, el resolutor está dispuesto a renunciar a una parte de la optimización anteriormente citada por otro tipo de optimización que llamaremos "optimización intelectual". Ya no le importa el tiempo, aunque sí el olvido, y considera que puede emplear adecuadamente dicho marco conceptual o teoría porque a la seguridad esperada de la solución se unirá ahora un placer (o una satisfacción) de tipo intelectual o estético. Estas teorías constituyen unas jerarquizaciones de contenidos ("hechos o idealizaciones de hechos"); su uso exige que los resolutores conozcan, no sólo los contenidos, sino también la jerarquización. Hay problemas cuya solución ha pasado —históricamente hablando— por la creación de nuevos marcos conceptuales (por ejemplo: los intentos de deducción del postulado de las paralelas a partir de los restantes postulados de Euclides dieron lugar a las geometrías no-euclídeas); pero esto tiene una consecuencia epistemológica obligada: ciertos problemas sólo son resolubles en los nuevos marcos.

Denominamos "métodos" a los procedimientos de razonamiento y deducción que necesitan la utilización de una teoría. Es evidente que en todo marco conceptual se tienen secuencias ordenadas de tareas; la diferencia entre una secuencia ordenada de tareas del nivel anterior y las procedentes de una teoría radica en la argumentación en que se basan unas y otras; las primeras tienen un fundamento empírico ("esta secuencia es 'buena' porque la práctica demuestra que 'funciona'"), mientras que las segundas tienen —o pretenden tener— un fundamento que procede de la capacidad de explicación que se conceda a la teoría. De este modo, podrá ocurrir que la diferencia entre "procedimiento" y "método" sea sólo una cuestión de grado.

El capítulo 1, "Pinceladas heurísticas en torno al cuadrado", se destina a describir algunos heurísticos mediante ejemplos tomados de clase y se narran las situaciones que en ella se suscitaron al proponerlos.

Los capítulos 2, "Problemas para el Aula", y 3, "Métodos para la resolución de problemas geométricos", intentan poner de manifiesto el constante flujo y reflujo en que el aprendiz se halla sumido cuando intenta tomar conciencia de su papel de resolutor. Pensamos que el capítulo de "Problemas para el Aula" hace más hincapié en los procedimientos, mientras que el capítulo 3 pone más énfasis en los métodos.

En las clases de matemáticas, al igual que ocurre en las excursiones, no se puede hablar con certeza de un "camino real", entre otras cosas porque hay alumnos —o excursionistas— que, por definición, prefieren aprender —caminar— por su cuenta. Los psicólogos y los neurólogos llevan muchos años estudiando este fenómeno que caracteriza al ser humano; se habla de dos "tipos" distintos de personalidad (holistas y reduccionistas), de dos "clases" de pensamiento (sintético, analítico; o bien: divergente, convergente) y se llega a asignar a cada uno de los hemisferios cerebrales la responsabilidad del control de estos aspectos de la personalidad y de estas clases de pensamiento: el hemisferio derecho sería el principal responsable de todo cuanto somos capaces de comprender en lo relativo a la globalidad: formas, patrones, etc., mientras que el hemisferio izquierdo sería el principal responsable de todo cuanto somos capaces de comprender en lo relativo al detalle: secuencias, deducciones, etc. Naturalmente, no pretendemos aquí entrar en estos debates. Lo que sí queremos hacer es plantearnos el "cultivo" de la creatividad en nuestras aulas, al objeto de conseguir la máxima independencia de los alumnos respecto de sus profesores y, con ello, seguramente mejorar su rendimiento escolar. Tal es el sentido del Capítulo 4, "De la creatividad y el cuadrado", donde un viejo teorema recibirá un enfoque muy especial.

En el capítulo 5, "Panorámica de los problemas", hemos intentado responder a la "pregunta ingenua" que algún excursionista siempre hace al volver, cuando todo parecía ya muy claro: "¡¡Pero,

¿qué es un problema?!!" Queremos manifestar que este capítulo es cronológicamente el último que hemos escrito porque pretende resumir nuestra excursión. El lector que se considere proclive al "pensamiento deductivo" puede comenzar el libro por este capítulo, mientras que el lector que desee contrastar su conclusión acerca de los cuatro primeros capítulos con la nuestra debe esperar hasta el final. Esta "libertad" de elección que la formación matemática otorga es la que, ciertamente, queremos también para nuestros alumnos.

A propósito de la libertad de elección: te sugerimos que trabajes este libro a tu modo, y que no te dejes influenciar por la sucesión de los capítulos. Hay caminos tortuosos en las excursiones que, aunque se pudiera creer que no llevan a ninguna parte, siempre pueden aportar una brizna de emoción.

¿Te interesan los problemas-temas? En cada capítulo encontrarás uno de ellos (o más). Por respeto al lector, los presentamos de una forma elaborada. ¡No pienses que todo se nos ocurrió así! Primero tuvimos alguna idea sobre su solución, la discutimos entre nosotros y surgieron otras y otras... Son problemas ideales para el trabajo en grupo. El problema-tema del capítulo 1, "La alfombra", se propone para sugerir una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas. El del capítulo 2, "Noche y día", es un problema de cuentas que da lugar a innumerables planteamientos, casi todos sencillos y sugerentes para los alumnos de distintos niveles. Los problemas-tema del capítulo 3, "El Tesoro", "Pick", etc., son clásicos problemas con cuya ayuda veremos cómo, sin grandes conocimientos teóricos, se pueden aplicar métodos sencillos que llevan a buenos y patentes resultados. Ya nos hemos referido al problema-tema del capítulo 4, así que no insistiremos. En el capítulo 5, el problema-tema que hemos seleccionado lleva por título "La cuadratura del círculo"; se trata de un repaso a una parte de la historia de las matemáticas y muchos pensarán, con razón, que *no* es un problema que esté al alcance de alumnos de Secundaria. No debemos olvidar que, en los Centros escolares, también trabajamos profesores, profesores con necesidades de actualización, con deseos de trabajar en grupo, con deseos, en fin, de no anquilosarnos en "lo-que-quedó" de nuestro paso por la Escuela de Magisterio o la Facultad; "La cuadratura del círculo", pone sobre la mesa un asunto generalmente mal conocido; la documentación que se ofrece quiere ser un "grano de arena" más para la formación de profesores.

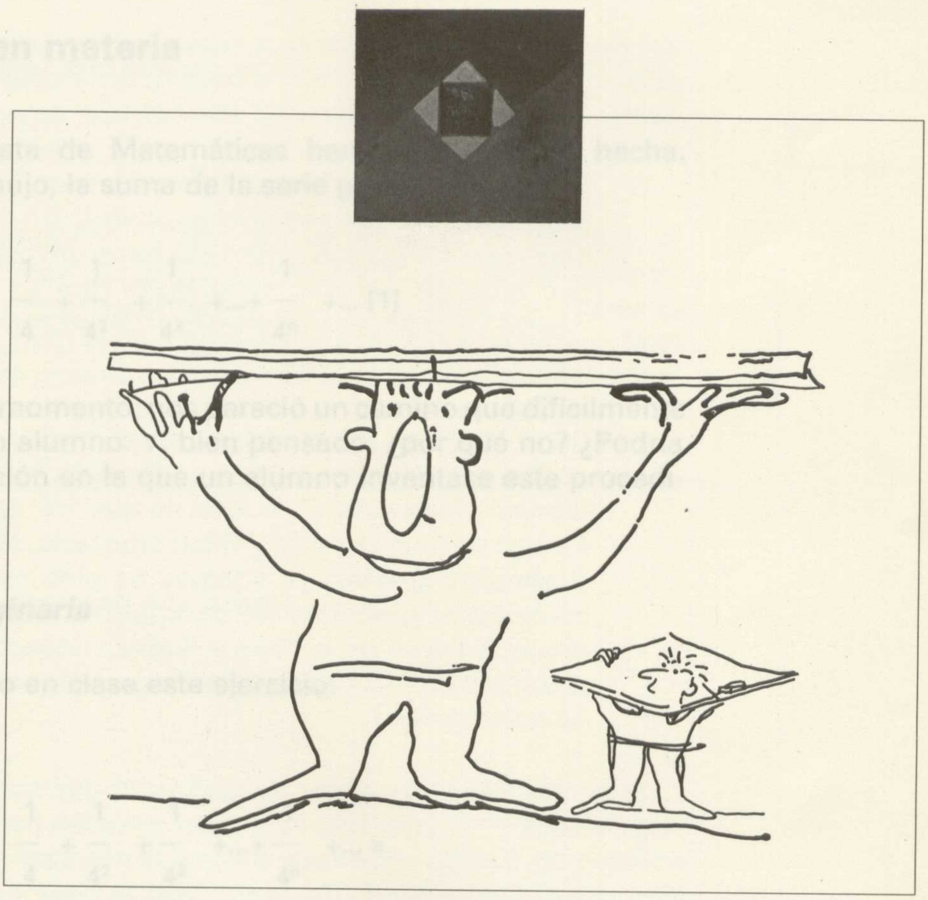
¿Te interesan sólo los problemas sueltos y no los contextos en que se presentan? Sin haberlos contado, estamos seguros de que, además de las Indagaciones, vas a encontrar enunciados, todos relacionados con el cuadrado, de los que esperamos que haya muchos que llamen tu atención.

En fin, lector, al acercarnos a través de este libro lo hacemos con plena consciencia de la dificultad que supone el que todos terminemos satisfechos de una excursión y con ganas de emprender una nueva aventura, en este caso intelectual. La educación matemática es obra de todos los que estamos "a pie de obra". Las teorías sobre la educación y los modelos de aprendizaje tienen un inmenso interés, pero ambos se hacen y adquieren sentido a través del esfuerzo, callado y cotidiano, de miles de personas. Por eso no podemos terminar esta presentación sin decirte que, como compañeros, apreciaremos tus críticas y comentarios.

LOS AUTORES

1

pinceladas heurísticas en torno al cuadrado



«¿Cómo lograr que el niño quiera aprender?... Se siente... la necesidad imperiosa de una didáctica no sólo activa, sino heurística en el sentido de procurar que el alumno elabore por sí mismo los conceptos y conocimientos que haya de aprender, mediante el acicate de situaciones hábilmente creadas ante él por el maestro, con objeto de que el interés funcional y directo por ellas despertado sea suficiente para fomentar la actividad generadora.»

P. PUIG-ADAM, 1957

Para entrar en materia

En una Revista de Matemáticas hemos encontrado hecha, mediante un dibujo, la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots \quad [1]$$

En un primer momento, nos pareció un camino que difícilmente podría seguir un alumno. Y, bien pensado, ¿por qué no? ¿Podría darse una situación en la que un alumno inventase este procedimiento?

Situación imaginaria

Has propuesto en clase este ejercicio:

«Hallar:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\text{ »}$$

Tus alumnos se han puesto a la tarea y, como estáis estudiando las progresiones geométricas, han visto rápidamente que la suma S viene dada por la fórmula $S=a_1/(1-r)$; han detectado los valores del primer término y de la razón (que en este caso coinciden): $a_1 = 1/4 = r$; finalmente, han declarado:

«la suma vale 1/3.»

Todo va bien, pues; la realización del ejercicio ha sido un éxito para casi todos. Siempre, claro está, hay algún alumno "que no se entera". Precisamente uno de éstos, llamémosle Juan, cuando tú paseabas por el aula ayudando a unos y otros, has visto que no parecía trabajar en el problema, ya que en su cuaderno, bajo el enunciado, no se veía más que un dibujo como el de la figura 1:

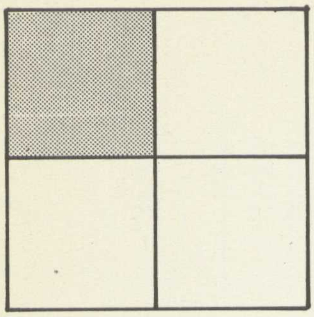


Figura 1

La clase ha continuado y Juan optó por descolgarse. Sin embargo, cuando ibas a salir del aula, Juan se te ha acercado tímidamente y, mientras te mostraba el cuaderno (figura 2), te ha preguntado: "Profe, ¿está bien así el problema de la suma?"

Indagación 1.ª

¿Cuál habría sido tu respuesta?

Esta indagación vamos a empezarla juntos. Para ello, te proponemos las siguientes consideraciones o temas de reflexión:

1.° Desde luego, la figura 2 no prueba que Juan sepa aplicar la fórmula $S=a_1/(1-r)$.

2.° Lo que sí prueba dicha figura es que Juan es bastante ingenioso. Ha conseguido encontrar un método original para resolver el problema. Esto tiene un inconveniente, y es que ante otro problema análogo que se resuelva por la misma fórmula, posiblemente Juan no sea capaz de encontrar el dibujo correspondiente.

3.° Cabe, incluso, preguntarse si es Juan consciente de la profunda visión numérica y geométrica que guarda su dibujo: ¡Ha plasmado la idea de que $1/4^n$ se puede obtener a partir de un cuadrado unidad arbitrario, dividiéndolo en 4^n cuadrados iguales! ¡Y además ha sido capaz de volver a contemplar globalmente su dibujo y afirmar que, por el procedimiento de su figura, había conseguido "dividir" el cuadrado en 3 partes iguales! Pero, ¿es consciente de lo que ha conseguido?

Si un alumno fuera capaz de realizar lo que nuestro imaginario Juan hizo, lo más probable es que su solución pasara inadvertida; o bien que quedase registrada como una mera curiosidad, un rasgo más de la personalidad "de Juan", que le lleva a salirse continuamente de los métodos y técnicas con los que se trabaja en el aula.

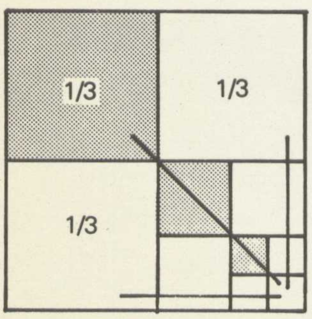


Figura 2

Así que la pregunta es: ¿son capaces los alumnos reales de reflexionar como Juan? Quisimos responder a esta pregunta.

Ensayamos la situación con un alumno...

Hicimos una exploración con un alumno de 3.° de B. U. P., al que presentamos la serie inicial [1]. Su respuesta inmediata fue recordar que existía una fórmula para encontrar la suma. La fórmula no se recordaba en ese momento pero, tras varios intentos y consultas, fue "localizada". De inmediato, sin dificultad, surgió la solución: 1/3.

El siguiente paso fue menos convencional: "¿Eres capaz —le dijimos— de representar gráficamente, en una figura, la suma que has realizado?" Tras una aclaración de lo que se solicitaba, el alumno eligió espontáneamente el cuadrado como la figura más adecuada para representar la suma y obtuvo la representación de la figura 3:

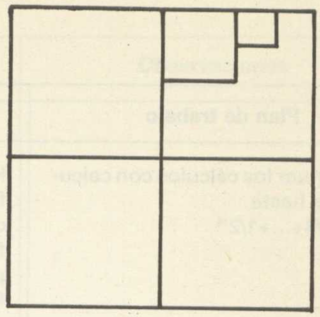


Figura 3

Esta representación es diferente de la que nosotros imaginamos iba a dar Juan. Nuestro alumno afirmó que la parte rayada (figura 4) representaba 1/3 del cuadrado, si bien reconocía que no se "veía" bien que fuese 1/3 del total.

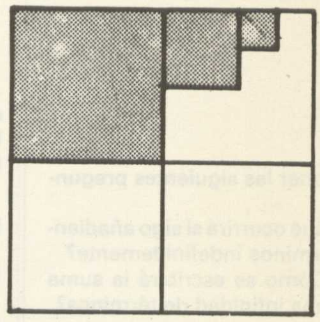


Figura 4

Hechos los comentarios oportunos logramos que trazase las divisiones completas en cada caso y que obtuviese la "solución de Juan". En este caso admitió sin dificultad que la visualización (figura 2) era "mejor".

La situación imaginaria y este primer ensayo nos permitieron reafirmar una opinión: no podemos pretender que nuestros alumnos razonen, de modo espontáneo, geométricamente —que es lo que hizo Juan—, pero sí que la geometría les sirva de apoyo. Esta opinión la tuvimos muy en cuenta para llevar la situación a la clase. Lo hicimos con un grupo de 28 alumnos (ambos sexos) de 2.° de B. U. P., sin conocimientos previos sobre sucesiones, series geométricas ni límites y que en la primera evaluación dieron un 55 por 100 de aprobados.

...¡y llevamos la situación a la clase!

Plan de trabajo	Lo que ocurrió	Observaciones
Intenciones: Es posible dar sentido a expresiones con una infinidad de términos.	Breve discurso (dos minutos).	
Calcular, sucesivamente, con papel y lápiz, los siguientes números: 1/2+1/4; 1/2+1/4+1/8; 1/2+1/4+1/8+1/16.	Los alumnos consideraron evidente la propuesta y mayoritariamente obtuvieron resultados correctos. Pequeñas dudas sobre si el resultado debía ser expresado en forma de fracción o en forma decimal. Decidieron dar esta última representación. Hubo alumnos que se negaron a "perder el tiempo" haciendo operaciones con fracciones.	

Plan de trabajo	Lo que ocurrió	Observaciones
Continuar los cálculos con calculadora hasta $1/2+1/4+\ldots+1/2^{10}$	Había en clase ocho calculadoras, todas de lógica AOS. Se formaron grupos para poder seguir los cálculos. "Echaron carreras" para ver qué grupo llegaba antes. El gruo ganador fue el que siguió la sugerencia de primero planificar y después pulsar teclas; el procedimiento final seguido por este grupo fue: 1.° teclear CM ("limpiar la memoria") 2.° teclear 2 3.° teclear x^y 4.° teclear 1 5.° teclear = 6.° teclear 1/x 7.° teclear M+ ("acumula aditivamente en la memoria") 8.° teclear MR ("muestra el contenido de la memoria") 9.° apuntar el contenido de la memoria. ...y repetir los pasos 2.° a 9.° cambiando, sucesivamente, el '1' del paso 4.° por 2, 3, 4,... 10. Los distintos resultados fueron tabulados para facilitar la lectura.	
Proponer las siguientes preguntas: (a) ¿Qué ocurrirá si sigo añadiendo términos indefinidamente? (b) ¿Cómo se escribirá la suma con una infinidad de términos?	La clase contestó que "sería muy aburrido". La respuesta del grupo fue $1/2 + 1/2^2 + \ldots + 1/2^n$. [2] Hubo división de opiniones sobre la sugerencia (por parte del profesor) de terminar la expresión con puntos suspensivos. Los defensores de [2] alegaron que, puesto que es imposible sumar infinitos términos, bastaba con precisar, en [2], el valor de n. Este alegato preparó el terreno para la tercera pregunta, ya que el profesor impuso que, al referirse a la expresión con infinitos términos (sin terminarla con "1/2·", como algún alumno sugirió), la forma comúnmente adoptada por los matemáticos era la de los puntos suspensivos.	El profesor no aprovechó la posibilidad de comenzar a formalizar la noción de suma que estaba comenzando a "madurarse". No era la meta de esta clase, pero hubiera sido muy sencillo, en este punto, y a propósito de esta discusión, ensanchar el horizonte de la noción de suma, para los alumnos limitada a una operación con dos términos, y sugerirles la posibilidad de definir el número 1 como suma de infinitos términos.
(r) ¿Hay un valor para dicha suma? ¿Podemos obtenerlo?	Los alumnos se dividieron en tres grupos de opinión: Grupo 1: Ensayaron más valores y terminaron conjeturando que "la suma o como se llame tiene que valer 1". Grupo 2: Ensayaron más valores y terminaron por declarar que la suma podía ser cualquier valor que se veían incapaces de determinar. Grupo 3: Declararon, sin ningún ensayo más, que, al haber infinitos sumandos, la suma tenía que ser "infinito". El profesor propuso entonces que se admitiera que la suma era 'A'; entonces: $2A = 1 + 1/2 + \ldots + 1/2^n + \ldots$ [3] Una vez aclarada la duda de si "hay que poner $1/2^n$ o $1/2^{n-1}$" en [3], casi toda la clase inmediatamente dedujo: $2A = 1 + A$ y $A = 1$. Pero quienes formaban el grupo 3 mantuvieron su incredulidad. Entonces se les propuso que, partiendo de un cuadrado, lo fueran dividiendo materialmente en 2, 4, 8,... partes y que evaluaran el resultado. La consecuencia de esta propuesta fue saludable: TODOS comprendieron que la suma no podría jamás ser mayor que 1 (el cuadrado) y que la parte que aún quedaba por cortar podría hacerse todo lo pequeña que se quisiera; en conclusión, la clase estableció que la reunión de todos los trozos tenía que permitir reconstruir el cuadrado y se consideró demostrado que A = 1 (figura 5).	Encontraron natural el multiplicar una suma no finita por un número. En la siguiente clase se propuso la suma $1+\ldots+2^n+\ldots$ Aplicando el procedimiento, llegaron a A=-1: de ello se dedujo que el método de cálculo utilizado no tiene validez general. **Indagación 2.ª** ¿Cuál es el ámbito de validez de este método de cálculo?

Plan de trabajo	Lo que ocurrió	Observaciones
Pedir que se estudie exhaustivamente $1/4+\ldots+1/4^n+\ldots$	Los alumnos hubieron de efectuar varios ensayos para establecer que si ponían $B = 1/4 + \ldots + 1/4^n + \ldots$, [4] entonces lo conveniente era multiplicar [4] por el número 4. Así obtuvieron $B = 1/3$. Invitados a buscar un procedimiento geométrico que permitiera corroborar el resultado obtenido para B, recurrieron naturalmente al cuadrado, que dividieron en cuatro partes. Un alumno salió a dirigir las operaciones de cortes de cuadrados y, tras varios intentos, se dirigió al profesor, en nombre de la clase, en estos términos: *«Divido el cuadrado en cuatro partes iguales, separo tres y dejo una para seguir doblando. De las tres partes que he separado, me quedo con una, que es la cuarta parte del cuadrado y la tercera parte de lo que he separado. Por más veces que repita este procedimiento con la parte que queda disponible para seguir doblando, siempre guardaré la cuarta parte de dicho trozo, que será la tercera parte de lo que no uso para seguir doblando. Por tanto, cuando reúna los trozos que he ido guardando, tendré la tercera parte del cuadrado»* (figura 6).	
Determinar $1/k+\ldots+1/k^n+\ldots$ cuando el número natural k es mayor o igual que 2.	Los alumnos consideraron que, algebraicamente, la pregunta era trivial y que el resultado no podía ser otro que $1/(k-1)$; ¡no lo efectuaron! En cambio, sólo fueron capaces de enunciar el correspondiente algoritmo geométrico cuando el profesor les hizo ver que lo importante no era saber cómo se dividía un cuadrado en k partes iguales, sino aceptar que tal cosa fuera posible.	

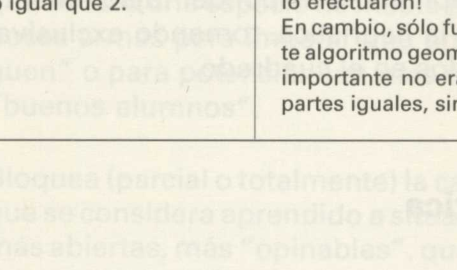


Figura 5

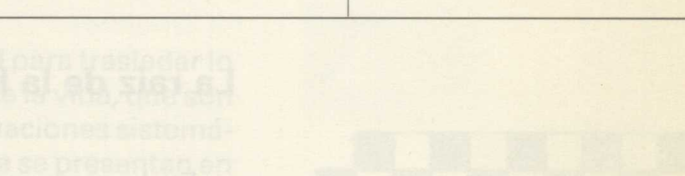


Figura 6

En estas clases se han presentado y manejado "contenidos", pero siempre sometidos a dos ideas básicas: (1) es importante adquirir una convicción personal de la respuesta que uno propone y del camino seguido para obtenerla, y (2) contrastarla con las convicciones de los demás comunicándola de forma argumentada. Se constata que el desacuerdo entre los miembros del grupo induce fuertes estados de motivación que inciden positivamente en el desarrollo de la capacidad de inventiva, de indagación y de comunicación de los alumnos, estados que, de otro modo, el profesor difícilmente puede provocar.

Quizá los alumnos no tengan esa lucidez que imaginamos en "Juan", pero no le andan a la zaga en cuanto se les estimula a pensar "otros" métodos y a explorar "otras" ideas.

¿Se pueden desarrollar clases sin limitarse a los senderos trillados; clases que no consistan en visitas a un vetusto y venerable edificio; clases en las que los alumnos dejan de ser admiradores obligados —y a menudo aburridos— de grandes obras del pensamiento?

El propósito de este capítulo es responder tajantemente por la afirmativa, como lo hace la heurística, tomando exclusivamente, para ello, ejemplos basados en el cuadrado.

La raíz de la heurística

En los primeros textos del profesor Polya, publicados en los años 50, se encuentran ya incorporados los tres componentes que se deben considerar esenciales en educación matemática:

(I) La persona a la que se le propone el enunciado de un problema matemático lo asume verdaderamente como problema.

(II) Cualquier método que conduzca a la solución concreta del problema presente es perfectamente válido.

(III) En el proceso de resolución de un problema hay una actividad mental que el resolutor debe intentar poner de manifiesto.

La enorme presión ejercida por los trabajos del profesor Polya ha permitido reconocer que, en la educación matemática, se venía poniendo énfasis en el punto (II) y sólo parcialmente en el (I), siendo el caso que la actividad matemática —toda actividad humana problemática— pone en juego los tres puntos citados.

Lógicamente, el interés de los investigadores posteriores —y el del propio profesor Polya— se orientó hacia el punto (III). ¿Cuáles son los procesos mentales que se ponen en juego al resolver problemas? ¿Se puede decir algo no trivial acerca de ellos? ¿Es posible estructurar las clases teniendo en cuenta también dichos procesos o, más aún, poniendo tanto énfasis en ellos como en los métodos y en las soluciones? (Sugerimos la lectura del libro *Enseñar a pensar*, de R. Nickerson, D. Perkins y E. Smith, traducido por Paidos-MEC, 1987.)

Los tres puntos del "programa de G. Polya" conllevan, evidentemente, una ampliación de la noción de "aprendizaje". El modelo de aprendizaje por repetición no es rentable (aunque la imitación sí pueda serlo en algunos momentos) porque deja fuera cosas esenciales:

— El alumno no adquiere consciencia de los procesos mentales que debe poner en juego ni de los "grados de libertad" de que su mente dispone; sólo aprende "rutinas" —algoritmos—, incluso cuando contrasta con otros compañeros distintos métodos de resolución de problemas.

— El profesor queda constreñido a llevar el ritmo de la clase —que es sólo una especie de media ponderada— y dispone de pocas armas para impedir que unos alumnos se "descuelguen" o para potenciar aún más el trabajo de los llamados "buenos alumnos".

— Bloquea (parcial o totalmente) la capacidad para trasladar lo que se considera aprendido a situaciones de la vida, que son más abiertas, más "opinables", que las situaciones sistemáticamente simplificadas y normalizadas que se presentan en las clases de tipo repetitivo.

Estrategias y heurísticos

Considera el siguiente problema:

«De un tablero de ajedrez se suprimen las casillas 1 y 64 (es decir, los extremos de la diagonal principal). Se pide recubrir la figura obtenida (figura 7) con dominós como el que se muestra en la figura 8.»

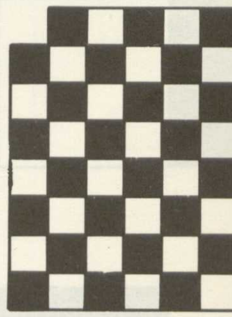


Figura 7

Figura 8

Para resolver el problema, supuesto que te interese y lo asumas como un problema tuyo, puedes seguir varios caminos. Desde el punto de vista de la heurística, lo primero que se hace es "trazar un plan" para llegar al resultado.

Por ejemplo, puedes decidir construir 31 dominós (31 x 2 = 62 = número de casillas que hay que cubrir) y dedicarte a buscar una combinación que rellene efectivamente el tablero truncado. También puedes orientarte hacia el campo de la teoría de grafos y "conectar" la situación propuesta con el problema de determinar si es posible obtener un emparejamiento perfecto en el grafo asociado a este tablero de ajedrez truncado.

Un experto en resolución de problemas diría que se acaban de enunciar dos estrategias. *Las estrategias son las líneas de pensamiento que ponemos en juego cuando queremos resolver un problema.* La estrategia es el proceso que pone en marcha un sujeto concreto para resolver un problema; por ello, debe tener en cuenta, además de sus conocimientos previos, las relaciones que pueda establecer con otros temas, la similitud con otros problemas antes resueltos y un amplio "almacén de posibilidades". Si nuestra preocupación se centra en cómo los alumnos resuelven problemas, observaremos las estrategias que se proponen seguir e incluso compararemos y enfrentaremos distintas estrategias.

Una vez elegido el camino principal (para fijar ideas, construir 31 dominós y tratar de rellenar con ellos el tablero truncado) hay que seguirlo.

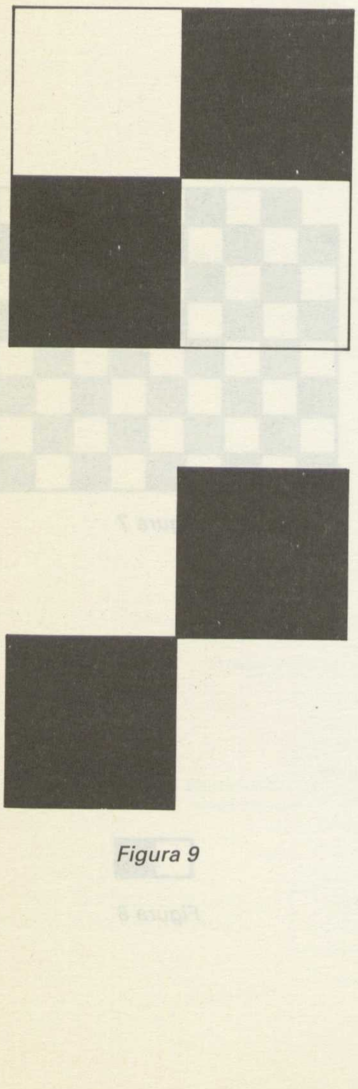


Figura 9

Algunas personas se dedican a ensayar combinaciones de dominós y se ven en la necesidad de analizar las razones de su fracaso en conseguir el recubrimiento pedido; llegado un momento, se aperciben de que la solución del problema es "el problema no tiene solución". Y justifican así la respuesta: de las 62 casillas del tablero, no hay 31 blancas y 31 negras (ya que parece lógico que pidamos, si queremos rellenar el tablero con dominós, que las casillas de ambos colores intervengan en igual número), sino 30 blancas y 32 negras.

Estas personas han efectuado ensayos y han cometido "errores" (porque los ensayos no han sido inicialmente fructíferos); aprendiendo de tales errores, ha llegado un momento en que han razonado "hacia atrás" (de la "solución" al enunciado); sólo entonces han detectado la incompatibilidad existente entre los datos y los medios de solución que se dieron.

A otras personas parece como si "les molestara" el tener que manipular tantos dominós y se les ocurre trabajar con tableros más pequeños: 7 x 7, 6 x 6, ..., ¡2 x 2! Con ayuda de este último tablero (figura 9), se convencen de la imposibilidad del recubrimiento y de la conservación de esta imposibilidad al añadir filas y columnas para recuperar el tablero original de 64 casillas.

Estas otras personas han simplificado el problema estudiando casos particulares; uno de estos casos les ha permitido llegar a una conclusión convincente y, a partir de ello, han elaborado la respuesta al problema.

El "ensayo y error", el "razonamiento hacia atrás" y el "estudio de casos particulares" son ejemplos de heurísticos. Si con la palabra "estrategias" se hacía referencia a las grandes líneas de pensamiento, con la palabra "heurístico" se hará referencia a las distintas etapas del camino efectivamente seguido: *los heurísticos son procesos específicos de pensamiento que se ponen en juego cuando se desarrolla una estrategia.* Suelen enunciarse como reglas *de actuación*, pero no debe olvidarse que el primer paso de tal acción consiste en una decisión —neta o confusa— en la que intervienen siempre lo que el resolutor "ya sabe" y lo que "desea saber"; por esta razón, puede ocurrir que dos personas de muy distinta formación aborden un mismo enunciado con un mismo heurístico y, en cambio, resuelvan el problema de modos muy diferentes. Los heurísticos no se encuentran en "estado químicamente puro" en la mente del resolutor y su riqueza de matices difícilmente se percibe sin una "buena" práctica; sirven, sin embargo, para describir comportamientos a los que se pueden ajustar las actuaciones concretas de los resolutores. Por ello, se dice de un resolutor que "está utilizando uno o varios heurísticos" cuando su actuación puede quedar convenientemente descrita por él (o ellos). Los heurísticos reciben a veces el nombre de "sub-estrategias".

Como la heurística es un campo de investigación abierto, sólo nos referiremos a unos pocos heurísticos (una pequeña parte de los que generalmente se considera que están bien establecidos).

Ejemplos de tratamientos heurísticos de problemas con el cuadrado

En este apartado se presentan dos ejemplos —elegidos entre cinco— con los que hemos seguido un mismo procedimiento, a saber: Hemos propuesto, en clase, el enunciado a tres grupos de alumnos de muy distintos niveles: 1.° de B. U. P., con prácticamente nula formación geométrica; 2.° de Magisterio y 5.° de Licenciatura (Matemáticas). En ninguna de tales clases los profesores intervinieron (activa o pasivamente) para dar pistas a los alumnos. Estos entregaron el resultado de sus reflexiones en un folio (pero no se trató de ningún "examen", ya que se potenció la consulta y discusión en voz alta o el acceso a documentos de aula).

Se han seleccionado "soluciones" que comentamos brevemente porque, a nuestro juicio, pueden inspirar conversaciones entre grupos de profesores o entre éstos y sus alumnos. El apartado termina con comentarios generales acerca de los ejemplos citados.

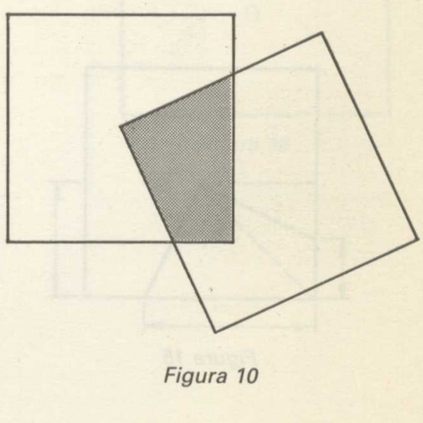


Figura 10

Ejemplo 1.°

«Se dan dos cuadrados del mismo lado. Uno de ellos se fija, por un vértice, en el centro del otro y puede girar libremente alrededor de dicho centro (figura 10). ¿Qué fracción del área del cuadrado corresponde a la superficie rayada?»

Comentarios al Ejemplo 1.°

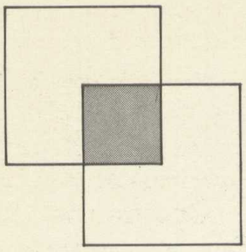


Figura 11

(1) El heurístico *simplificar el problema fijándose en casos especiales* fue mayoritariamente utilizado por los distintos alumnos. He aquí los dos casos más significativos para este problema señalados ya por los alumnos de Primero (figuras 11 y 12):

Ante estos casos, se llega a la conjetura de que la respuesta es siempre '1/4' (figura 13).

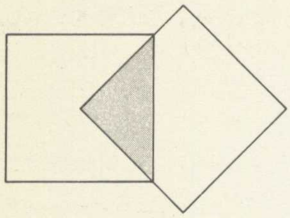


Figura 12

(2) Un alumno de Primero propuso la siguiente solución general, que pone en juego dos heurísticos: (a) *trazar un gráfico o diagrama e introducir la notación adecuada*; (b) *hacer el problema más general y observar si así puede ser resuelto.*

Para este alumno, la clave de la demostración está en que, al girar el aspa del gran cuadrado, la parte de área que se "quita" por un lado se "devuelve" por el otro, de modo que la fracción de área es constante e igual a 1/4 (figura 14).

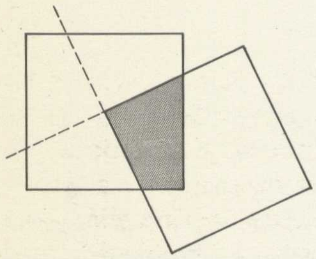


Figura 13

(3) Un alumno de 2.° de Magisterio propuso la siguiente solución algebraica (figura 15):

$$S = T_1 + T_2 = ha/2 + hb/2 = (a+b)/2 = hl/2 = l^2/4;$$

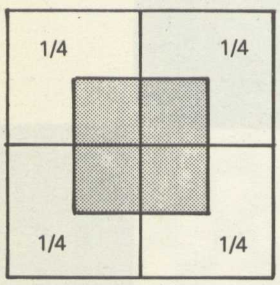


Figura 14

este alumno consiguió, con éxito, *descomponer el problema en partes cuya solución se conoce*; invitado a establecer que a+b=l, manifestó que se trataba de una igualdad evidente.

(4) Un alumno de Primero y un alumno de Licenciatura (5.°) coincidieron, razonando sobre la figura 14, en el uso del heurístico: *recordar un problema conocido de estructura análoga al que se tiene delante y tratar de resolverlo.* El alumno de Primero afirmó que bastaría con recortar los cuatro "trozos" marcados de la figura 14 y superponerlos "para ver que son iguales", mientras que el alumno de Quinto demostró la congruencia de esos cuatro cuadriláteros. La coincidencia en el heurístico de partida abre un problema de enorme interés: ¿cuándo y cómo tiene lugar el cambio en la forma de pensar que distingue a estos dos resolutores? Para nosotros, se trata de un problema abierto.

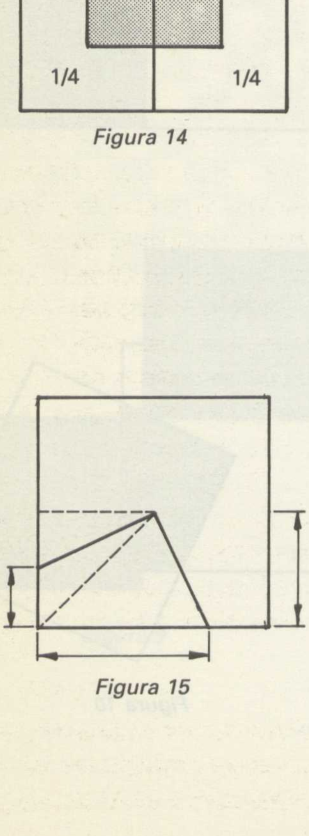


Figura 15

Indagación 3.ª

¿Se te ocurre alguna otra manera de abordar el problema?

Ejemplo 2.°

«Se da un cuadrado y se marca su centro: O. Sobre uno de los lados, y hacia el exterior del cuadrado, se construye un triángulo rectángulo y se designa por P el vértice que no está en el cuadrado (el ángulo recto del triángulo). ¿Es (PQ) la bisectriz del ángulo en P?» (figura 16)

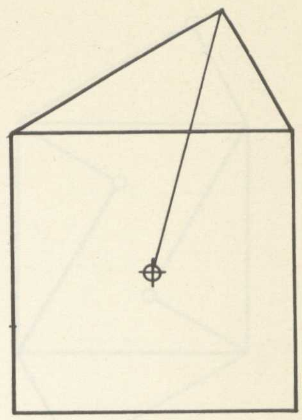


Figura 16

Comentarios al Ejemplo 2.°:

(1) El caso particular de "la casita" (figura 17) permitió orientar la búsqueda de una respuesta afirmativa:

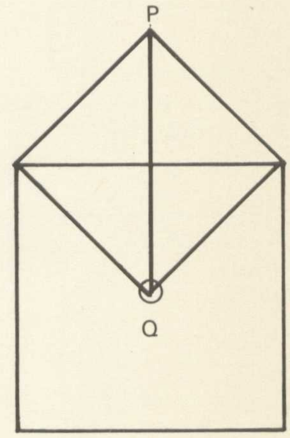


Figura 17

(2) Los alumnos de Primero tropezaron con distintos tipos de dificultades; por ejemplo, algunos se dieron por satisfechos construyendo con regla y compás la bisectriz del ángulo en P y "viendo" que coincidía con (PQ); otros, en cambio, se vieron inmersos en una situación de conflicto: respuesta afirmativa, porque la bisectriz trazada con regla y compás parecía "caer justo" encima de (PQ), pero también respuesta negativa, porque, al usar el semicírculo graduado, no obtenían en P dos ángulos cuya suma fuera exactamente 90°.

(3) Un alumno de Primero aplicó el siguiente heurístico: *Si no se puede resolver el problema que se tiene entre manos, intentar transformarlo en otro cuya solución se conoce.* Su argumentación vino a consistir en que bastaba con demostrar que el incentro del triángulo rectángulo pertenece a (PQ) —desde luego, no lo dijo con estas palabras.

Indagación 4.ª

4.1. Una solución de este enunciado hace uso de la noción de arco capaz de un ángulo, como se ilustra en la figura 18:

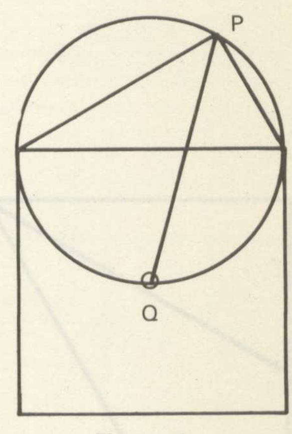


Figura 18

¿Cómo sería la demostración correspondiente a la figura 18? ¿A qué heurístico(s) ya citado(s) se apela?

4.2. ¿Se te ocurren otras maneras de resolver este ejercicio? (Indicación: ayúdate de la idea ilustrada en la figura 14, adaptándola debidamente.)

Lo primero que llama la atención es el hecho de que ningún alumno, sea cual fuere su nivel, evitó afrontar los ejemplos propuestos. Más aún, los heurísticos que emplearon los alumnos de Primero son, casi siempre, comparables a los que utilizaron los estudiantes universitarios. El único método matemáticamente inadecuado que los alumnos de Primero se negaron a rechazar fue el que se comenta con el número (2.°) bajo el Ejemplo 2.° Las dificultades de los alumnos de Primero procedieron, sobre todo, de la distancia existente entre sus intuiciones —generalmente correctas— como resolutores y sus relativamente escasos conocimientos para desarrollarlas. A pesar de ello, lograron "resolver".

En segundo lugar, debe anotarse el grado de participación de los alumnos en la resolución de los problemas —que se propusieron sin ninguna información previa acerca de los heurísticos—. Por ejemplificar las cosas en un campo (aparentemente) ajeno al cuadrado: los alumnos se interesarán más por un enunciado del tipo: "¿cuántas monedas de 25 o 50 pesetas necesito para tener 500 pesetas o más?" que por un enunciado del tipo: "discutir la inecuación $x + 2y \geq 20$". Pero, claro es, no se aumenta el interés y el grado de participación de los alumnos simplemente cambiando las formas de los enunciados; es necesario adaptar los talantes y reorganizar las funciones tradicionalmente asignadas a profesores y alumnos (lo que, dicho sea de paso, ni es especialmente difícil ni encontrará oposición en el alumnado). La siguiente indagación sugiere una manera de actuar en este sentido.

Indagación 5.ª

5.1. Propón en tus clases (al menos) uno de los siguientes ejemplos; si tienes posibilidad, graba en vídeo o en casete. En cualquier caso, analiza tu actuación.

5.2. Cuando el análisis personal esté hecho —ayudado, incluso, por las opiniones constructivas de otros profesores—, vuelve a proponer ejemplos en clase y entonces analiza la actuación del grupo.

He aquí los ejemplos:

Ejemplo I:

«De uno de los vértices de un cuadrado parten dos rectas que lo dividen en tres regiones de áreas exactamente iguales (figura 19). ¿En qué razón cortan estas rectas a dos lados del cuadrado?»

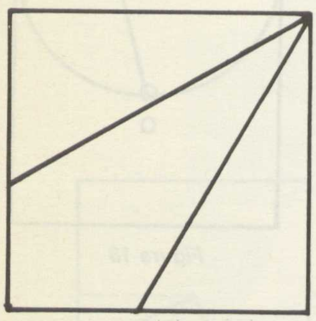


Figura 19

Ejemplo II:

«Sobre cada uno de los lados de un cuadrado se construyen triángulos rectángulos de hipotenusa igual al lado del cuadrado. Dos de estos triángulos se sitúan "hacia adentro" y los otros dos "hacia afuera", alternativamente (figura 20).

¿Hay configuraciones de estos triángulos tales que los cuatro vértices que no son del cuadrado se encuentren en línea recta?»

Ejemplo III:

«Un pastel, de base cuadrada y altura constante, se cubre uniformemente con un baño de chocolate. ¿De qué manera se pueden obtener cinco trozos tales que las cantidades de bizcocho (respectivamente, chocolate) sean las mismas en dos trozos cualesquiera? (Sólo se permiten cortes verticales).»

Ejemplo IV:

«Se dan un geoplano 3 x 3 (9 "clavos") y tres colores; la mínima zona de coloreado es uno de los cuatro cuadrados pequeños. ¿De cuántas maneras diferentes se puede colorear el geoplano?»

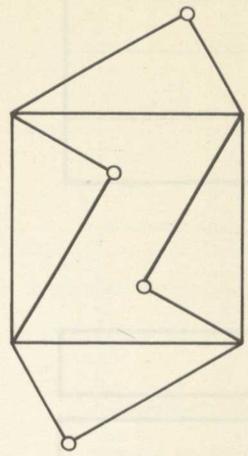


Figura 20

Estrategias didácticas. «La alfombra», un problema-tema

La presentación no sistemática que, a lo largo de este capítulo, hemos ido haciendo de la resolución heurística de problemas matemáticos no debe dejar la impresión de que la heurística sólo sirve para "problemas sueltos". Al desarrollar amplias unidades temáticas se puede hacer uso de los problemas-tema. Indudablemente, ningún problema-tema se puede resolver de modo satisfactorio (para los alumnos) con una o dos sesiones de clase; se necesitarán semanas, en particular si la intención es que los alumnos elaboren soluciones de modo exhaustivo y las discutan. Esto exigirá dos niveles de estrategia: la estrategia didáctica que el profesor decida emplear y las estrategias para la resolución de los problemas o subproblemas. En distintos capítulos de este libro indicamos diversas estrategias didácticas para "atacar" problemas-tema. En definitiva, elección que se efectúe dependerá, principalmente, de tres factores: (1.°) del propio problema; (2.°) de la "sensibilidad" matemática y de la documentación del profesor; y (3.°), pero no en último lugar, del grupo de alumnos concreto que el profesor tiene a su cargo.

El que estos tres factores se hallen íntimamente relacionados, no es una afirmación que vayamos a descubrir ahora. Quizá la "libertad de cátedra" consista principalmente, a fin de cuentas, en la búsqueda de soluciones óptimas para la armonización de estos factores.

La meta de todo profesor es muy sencilla de enunciar: conseguir que los alumnos hagan bien —y por sí mismos— las cosas. Con este fin, los profesores apelamos a distintas y muy variadas estrategias didácticas que, generalmente, se apoyan en conclusiones obtenidas por otros profesores o investigadores. De ahí las grandes "modas" o "corrientes" que se dan en las aulas.

Cuando se hace la hipótesis de que el profesor es un simple transmisor y el alumno un simple receptor, las estrategias didácticas se pueden limitar a esquemas repetitivos o, incluso, automáticos. El primer paso en este sentido lo dio el español Ramón Llull con su libro *Ars Magna* (siglo XIII) y, con todas las variantes y puestas al día que las evoluciones y revoluciones en los conocimientos exigen, la idea del razonamiento automático perdura.

En cierto sentido, a las personas nos convienen los "métodos" y los "procedimientos", en parte porque nos evitan el tener que pensar y en parte porque ayudan a eludir el temible "olvido" (al ser su empleo controlable en todas las etapas).

¿Es posible compaginar esta conveniencia con la de reconocer que profesores y alumnos no son simples eslabones de una cadena de transmisión, sino también —sobre todo— personas en distintos niveles de formación? La respuesta también es que sí: basta con imaginar estrategias didácticas más "abiertas" a las posibilidades y a las expectativas de estos dos principales protagonistas del sistema escolar.

Se han ideado —y se elaboran— muchas "guías" que tienen en cuenta estos aspectos aparentemente contradictorios. Una de ellas es la guía "IDEAL" (formada con las iniciales de las palabras-clave que configuran sus cinco etapas fundamentales), presentada como "guía para mejor pensar, aprender y crear". Las cinco etapas en que se dividiría, según sus autores, la "solución I.D.E.A.L. de problemas" son:

I, Identificar el problema;

D, Definir el problema;

E, Explorar las posibles estrategias;

A, Actuar fundándose en una estrategia;

L, Logros. Observar y evaluar los efectos de nuestras actividades.

Si el esquema es atractivo, e incluso podría pensarse que se trata de cinco pautas que marca el "sentido común", lo interesante de esta guía es que no obliga a seguir un camino predeterminado. Por tanto, si alguien desea usar estas pautas, tendrá que poner en juego heurísticos para cada una de ellas.

En el apartado final de este capítulo hemos aplicado la guía "I.D.E.A.L." a un problema-tema. No lo hemos hecho para dar a entender una supuesta "superioridad" de esta guía sobre otras descritas por otros autores (Polya, Dolan-Williamson, etc.), sino para ejemplificar lo que podría ser una estrategia didáctica basada en una guía de este tipo.

El problema de la alfombra:

«Tres hermanas heredan una alfombra cuadrada de gran valor material y sentimental, por ser un recuerdo de familia. Como ninguna de ellas quiere quedarse sin alfombra, se proponen cortarla y obtener tres alfombritas. ¿Cómo han de cortar la alfombra para conseguir sus propósitos?»

En nuestra opinión el enunciado es atractivo, tiene la virtud de que "parece fácil" y no requiere, a priori, muchos conocimientos. En suma, invita a no rehuir de entrada su solución.

Al abordar un problema, lo primero que hay que hacer es identificarlo: éste se reduce a dividir un cuadrado en tres partes.

Tal y como está enunciado, una solución fácil se obtiene dividiendo el lado del cuadrado en tres partes iguales, con lo que obtendríamos tres alfombras rectangulares idénticas (figura 21).

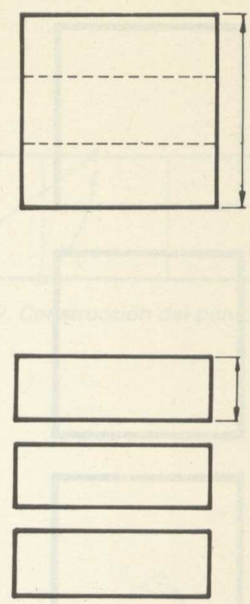


Fig. 21. División de un cuadrado en tres rectángulos

Aunque los tres trozos obtenidos son exactamente un tercio del total, ¿contentaría esta solución a las tres hermanas? Es de temer que no, pues las alfombras resultantes no son cuadradas, y por tratarse de un recuerdo, parece lógico que deseen que las alfombras obtenidas sean más parecidas a la original.

De todos es conocido que si cortamos un cuadrado por los segmentos que resultan al unir los puntos medios de lados consecutivos se obtienen tres cuadrados. Por tanto, otra solución del problema es la que se indica en la figura 22:

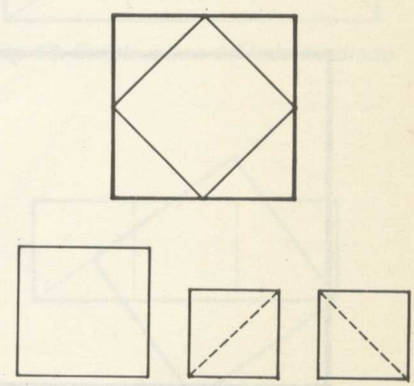


Fig. 22. División de un cuadrado en tres cuadrados

Indagación 6.ª

6.1. ¿En qué razón está la superficie de la alfombra inicial con la superficie de cada alfombra cuadrada obtenida?

6.2. Si las razones entre las superficies son de 2:1 y 4:1, ¿cuáles son las correspondientes razones entre los lados?

6.3. La solución de la figura 22 no es única; encuentra otra forma de cortar la alfombra para obtener tres alfombritas cuadradas.

6.4. ¿Qué razones guardan las alfombras obtenidas en el apartado 6.3. con la original?

Quizás has llegado al resultado que se muestra en la figura 23 y que da lugar a dos cuadrados iguales y un tercero más pequeño (figura 24).

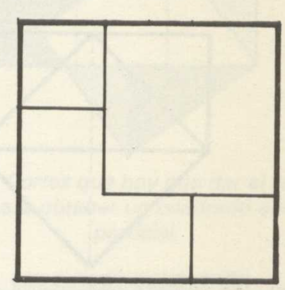


Fig. 23. Disección de un cuadrado en tres cuadrados

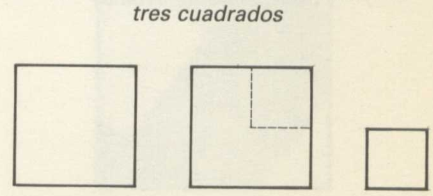


Fig. 24. Cuadrados obtenidos con la disección anterior

Hasta aquí se han resuelto distintas definiciones del enunciado inicial: hemos trabajado con la idea de tres partes iguales (rectángulo) y con la idea de tres partes cuadradas (que resultan no ser de igual superficie). Por tanto, tras identificar el problema hay que definirlo.

¿Cuál de los repartos anteriores en alfombras cuadradas te parece más equitativo?

Los repartos propuestos son poco equitativos. En el de la figura 22, a una de las hermanas le correspondería la mitad de la alfombra, mientras que, en el de la figura 24, una de ellas debería conformarse con 1/9 de la alfombra en lugar de recibir un tercio como parece razonable.

Cabe pensar que, si las tres alfombras resultantes fuesen cuadradas (como la alfombra original) y de igual superficie, todas las hermanas quedarían contentas con el reparto. Por tanto, una posible definición del problema es:

«Cortar la alfombra heredada de manera que cada hermana reciba una alfombra cuadrada igual a las demás.»

Una solución trivial: cortar la alfombra en cuatro cuadrados iguales (problema muy fácil) y dar a cada hermana uno, regalando el cuarto. Parece evidente que esta solución, aunque responde a la letra del enunciado, no contentaría a ninguna de las tres hermanas.

La definición que proponemos es:

«Dividir un cuadrado en tres cuadrados de manera que la superficie de cada uno de ellos sea un tercio de la superficie del cuadrado inicial.»

Una vez identificado y definido el problema, hay que explorar estrategias para abordar su solución.

Un primer acercamiento consiste en considerar el problema "inverso", es decir: si tenemos tres alfombras cuadradas e iguales ¿cómo hacer con ellas otra alfombra cuadrada de superficie igual a la suma de las superficies de las tres? (Figura 25).

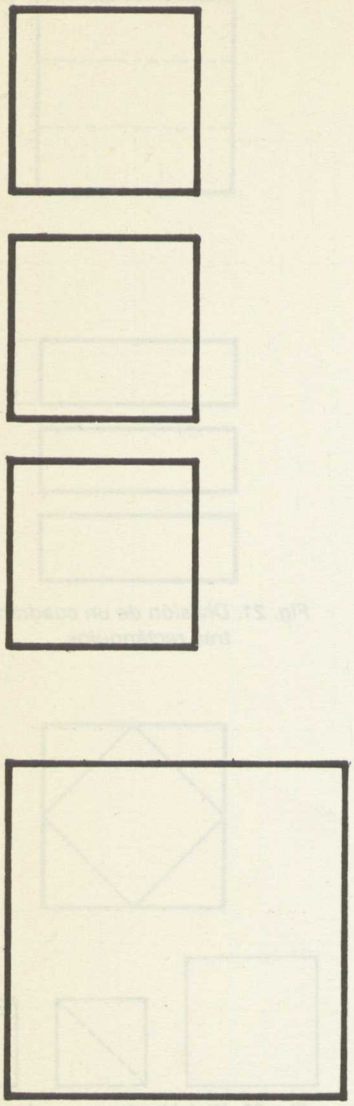


Fig. 25. La suma de las superficies de los cuadrados pequeños es igual a la superficie del mayor

Incluso el problema "inverso" parece difícil. Por ello conviene comenzar por un caso más sencillo. Recurrir al *heurístico "simplificar el problema"* suele dar buen resultado, ya que, a veces, de la solución del caso más fácil puede inferirse la del problema propuesto.

Indagación 7.ª

Confeccionar una alfombra cuadrada cuya superficie sea igual a la suma de las superficies de dos alfombras dadas también cuadradas e iguales.

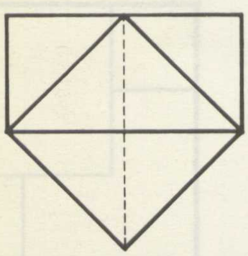


Fig. 26. Disección de un cuadrado en dos cuadrados iguales

Una solución está sugerida en la figura 22 y viene dada en la figura 26[1]. Ahora ya tenemos una idea para seguir avanzando: para la división en dos alfombras, se ha obtenido una solución haciendo

[1] Este problema viene de antiguo, ya que es la primera clase de matemáticas de la que existe constancia escrita (Platón, Menón. *Biblioteca Clásica Gredos*, vol. 61. Gredos, Madrid, 1983).

uso de la representación gráfica de la $\sqrt{2}$, lo que nos hace pensar que en la solución del problema definido va a intervenir la representación de la $\sqrt{3}$. Hecho, por otra parte, totalmente lógico, pues queremos construir un cuadrado de 3 unidades de superficie.

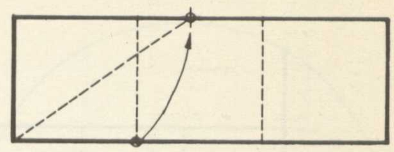


Fig. 27. Construcción del punto E

Actuemos según el plan diseñado: a partir de la $\sqrt{2}$, aplicando el teorema de Pitágoras, podemos construir $\sqrt{3}$. Representamos el punto E en el lado CD (figura 27) de manera que el segmento AE mida $\sqrt{3}$.

Al igual que en la indagación 7, se traza por el punto B la perpendicular a la recta determinada por los puntos A y E (figura 28).

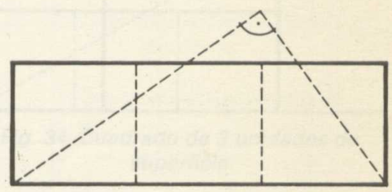


Fig. 28. Construcción del lado cuadrado

Indagación 8.ª

8.1. Comprobar que los triángulos ADE y AFB son semejantes.

Tomando el segmento BF como lado, el cuadrado buscado es el de la figura 29.

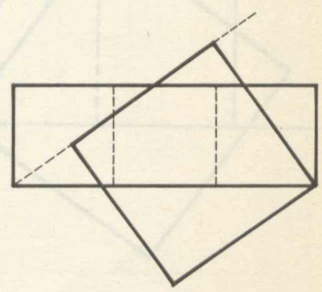


Fig. 29. Cuadrado de igual superficie que el rectángulo

Indagación 9.ª

En la figura 30 aparecen seis triángulos tramados. Demostrar que los de igual trama son iguales.

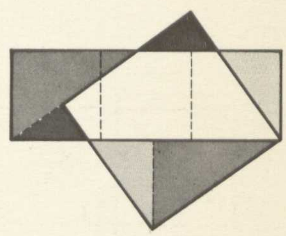


Fig. 30. Cortes que hay que dar al rectángulo para obtener un cuadrado equisuperficial

Una vez seguidos todos los pasos del plan previsto hay que analizar los logros obtenidos:

¿Se ha obtenido alguna solución?

¿Responde ésta a la definición del problema?

¿Es una solución particular? En caso afirmativo, ¿hay alguna que sea "mejor"?

¿Es posible generalizar?

En nuestro ejemplo:

—Se ha resuelto el problema.

No hay más que cortar el cuadrado en siete trozos tal como se indica en la figura 31 y reagruparlos convenientemente para obtener tres cuadrados de igual superficie.

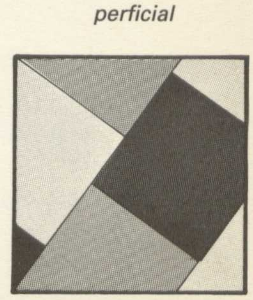


Fig. 31. Piezas en que hay que cortar la alfombra cuadrada

Indagación 10.ª

Con ayuda de la figura 31, obtener las tres "alfombritas".

— La solución responde a la definición:

hemos obtenido tres cuadrados de superficie un tercio de la superficie del cuadrado inicial.

— La solución es particular.

A es el punto de partida utilizado en la construcción de la $\sqrt{3}$. ¿Se podría partir de cualquier otro punto?

Indagación 11.ª

11.1. Hacer la construcción tomando como punto de partida el punto M (punto medio del segmento AB).

11.2. Calcular la longitud del segmento BF en este caso.

11.3. ¿Qué relación existe entre la longitud del segmento BF y la posición del punto de partida?

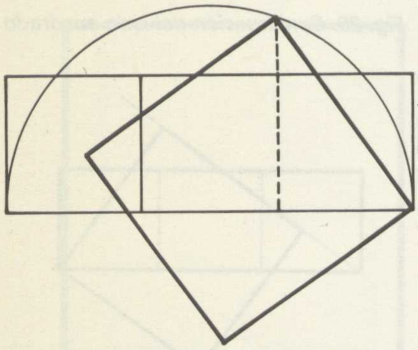


Fig. 32. Obtención del cuadrado mediante el teorema del cateto

De la indagación anterior deducimos que se puede partir de cualquier punto del lado AB (análogamente del lado CD). Hay infinitas formas de abordar el problema sin más que variar el punto de partida.

También se puede resolver el problema aplicando el teorema del cateto, tal y como se muestra en la figura 32.

—Sobre el "valor" de las soluciones.

¿Hay alguna solución que sea mejor que las demás? El calificativo "mejor" es subjetivo, y quizá ya tengas la que según tu criterio es la mejor. Nos atrevemos a sugerir el siguiente criterio: "la mejor" solución será la que imponga el menor número de cortes en la alfombra heredada. En este sentido, las soluciones dadas son igualmente "buenas", ya que en todas ellas es necesario cortar la alfombra en siete trozos.

Para seguir por este camino hemos de volver a definir el problema:

«Dividir un cuadrado en tres cuadrados de superficie un tercio de la superficie del original efectuando el mínimo número de cortes.»

Este es un caso particular del problema general conocido como el de la "mínima disección": disecar un polígono dado en otro también dado. Sólo se han hecho pequeñas incursiones en este problema. (Ver H. EVES: *Estudio de las Geometrías*, vols. 1 y 2. U.T.E.H.A., México, 1969.)

Existe un método que resuelve el nuevo problema. Se basa en otro método de construcción de la $\sqrt{3}$: el de la media geométrica (figura 33).

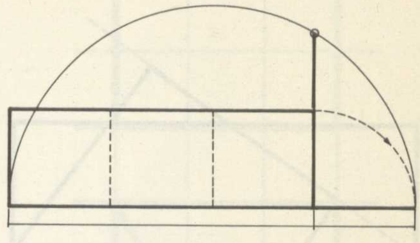


Fig. 33. Método de la media geométrica para la construcción de $\sqrt{3}$

BE es media proporcional entre AB y BF; por consiguiente, mide $\sqrt{3}$ y el cuadrado BEGH (figura 34) tiene 3 unidades de superficie.

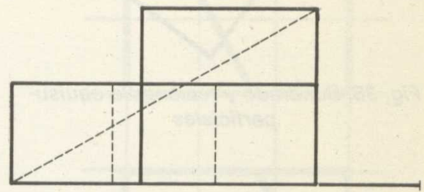


Fig. 34. Cuadrado de 3 unidades de superficie

El cateto AE indica los cortes necesarios para pasar del triminó al cuadrado de lado $\sqrt{3}$.

Indagación 12.ª

Obtener el mencionado triminó a partir del cuadrado.

Aquí queda resuelto el problema.

— Generalizaciones

«¿Cómo repartir una alfombra cuadrada entre más de tres (n) "hermanas"?»

Si n = 4, la solución es trivial.

Indagación 13.ª

¿Para qué valores de n, mayores que 4, resulta "fácil" la división de la alfombra por apoyarse en los casos ya resueltos (n = 2, 3 y 4)? ¿Optimizan estas soluciones el número de cortes?

Los casos n = 5 y no el n= 7 no se pueden resolver a partir de los conocidos.

Indagación 14.ª

Comprobar que, con la construcción de $\sqrt{n}$ a partir de $\sqrt{(n-1)}$, podemos resolver el caso n = 5 y no el n = 7. ¿Qué ha cambiado en este último caso con respecto al primero?

La construcción por el primer procedimiento será posible siempre que el punto H (figura 35) esté comprendido entre los puntos A y E, es decir, AH ≤ AE.

Esta conclusión nos lleva a plantear la siguiente pregunta:

¿Para qué valores de a y b se verifica que AH ≤ AE, siendo a y b los lados de un rectángulo cualquiera?

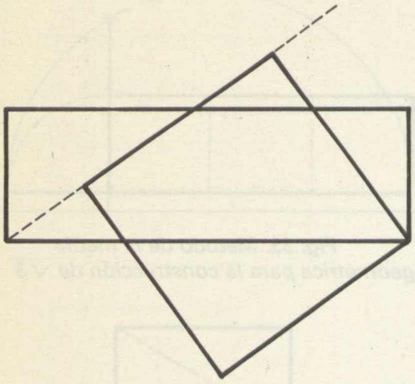


Fig. 35. Cuadrado y rectángulo equisuperficiales

"c" designa el lado del cuadrado que verifica que $c^2 = a*b$ (figura 35).

En el triángulo ABF, $a^2 = c^2 + AF^2 = c^2 + (c+AH)^2$; como AH ≤ AE = c, se tiene que $(c+AH)^2 \leq (2*c)^2 = 4*c^2$.

Por tanto: $a^2 \leq c^2 + 4*c^2 = 5*c^2 = 5*a*b$; de donde $a \leq 5*b$.

Como en nuestro caso b = 1, es claro que AH ≤ AE si a ≤ 5.

Sin embargo, que el punto H no esté comprendido entre los puntos A y E no significa que el problema no se pueda resolver. En la figura 36, se indica cómo pasar de un rectángulo 7*1 a un cuadrado de lado $\sqrt{7}$.

Comprueba que para n = 5 no es válido el procedimiento de la media geométrica. (Indicación: Reproduce para este caso la figura 32 y observa la posición del punto I.)

Cualquiera de estos dos métodos tiene sus limitaciones. Éstas son consecuencia de que se pretendía optimizar la disección (llegar a la solución con el mínimo número de cortes).

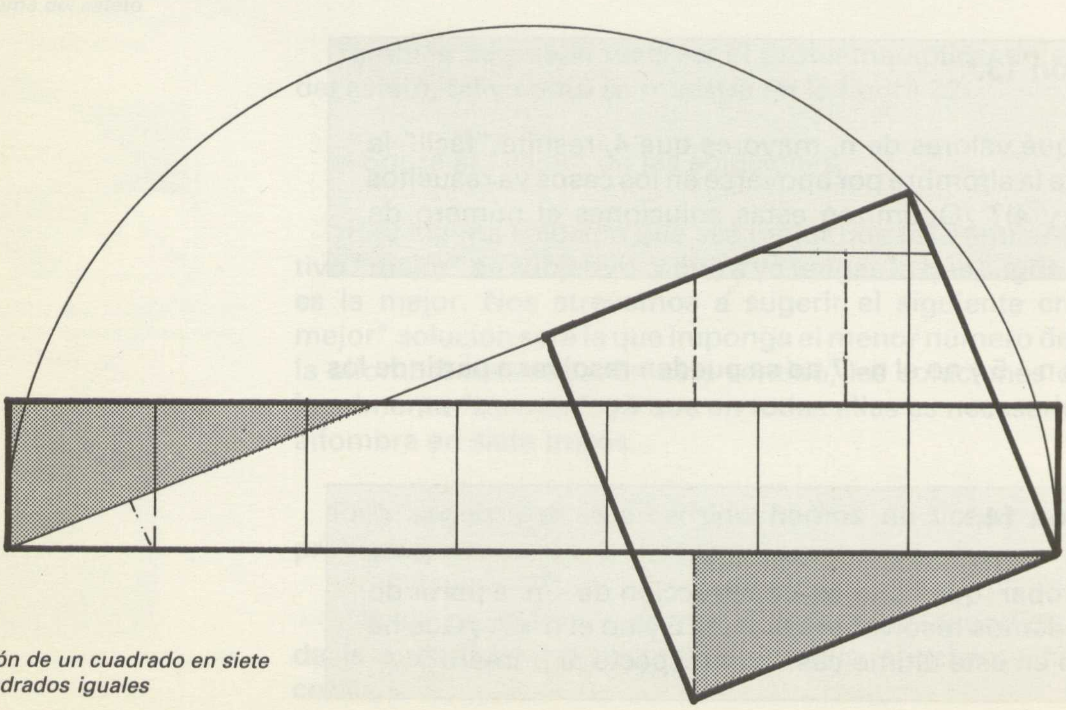


Fig. 36. Disección de un cuadrado en siete cuadrados iguales

Con el criterio de "mejor" solución que hemos sugerido, la mejor que conocemos es la obtenida en la Indagación 12.ª en la que se obtienen tres alfombras como las de la figura 37.

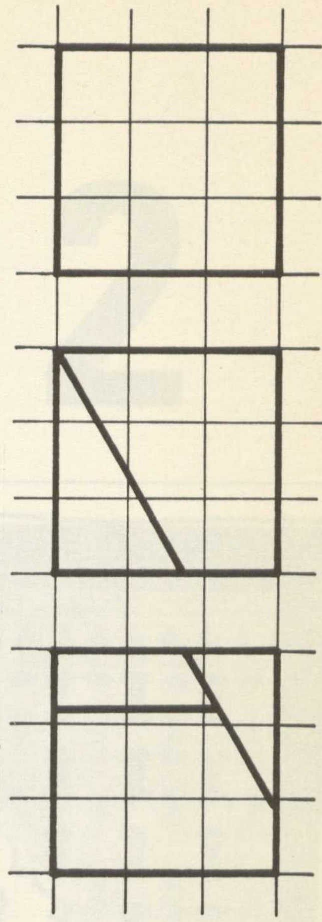


Fig. 37. Alfombritas obtenidas de la alfombra dada

Pudiera ocurrir que la última solución obtenida, pese a ser "la mejor", no gustara a las hermanas, pues se obtienen tres alfombras "distintas" al componerse de uno, dos y tres trozos, respectivamente. Olvidemos, pues, el número de cortes. Demos rienda suelta a la tijera y definamos el problema desde esta nueva óptica:

«¿Será posible obtener tres alfombras exactamente iguales (en forma, superficie, número de las piezas que las forman...)?»

La respuesta es afirmativa, ya que podemos dividir el cuadrado en tres rectángulos iguales y luego cuadrar cada uno de ellos por el procedimiento de la media geométrica.

Indagación 15.ª

15.1. Obtener por este procedimiento las tres alfombras solución. ¿En cuántos trozos hay que cortar la alfombra inicial?

15.2. ¿Tiene este procedimiento alguna limitación? Es decir, ¿puede ser dividido un cuadrado en n cuadrados iguales?

Si te parece difícil, resuelve primero la indagación siguiente:

Indagación 16.ª

16.1. ¿Se puede dividir cualquier cuadrado en n rectángulos iguales?

16.2. Comprobar que el procedimiento de la media geométrica para cuadrar rectángulos cualesquiera es válido siempre que $b \leq a \leq 4*b$, donde a y b son los lados del rectángulo.

Esta restricción se evita con mucha facilidad: si $a > 4*b$, basta cortar el rectángulo por la mitad del lado **a** y pasar a otro (de lados $c = a/2$ y $d = b + a/2$) al que ya sí se le puede aplicar el método de la media geométrica. Esto, sin embargo, no sirve en el caso del ejercicio, pues necesariamente ha de cuadrarse un rectángulo 5*1 (n*1, en general) para poder después dividirlo en 5 (respectivamente, n) cuadrados.

Según el criterio de "mejor" solución que hemos sugerido, la mejor que conocemos es la obtenida en la indagación 12, en la que se obtienen tres alfombras como las de la figura 37.

Pudiera ocurrir que la última solución obtenida, pese a ser "la mejor", no gustara a las hermanas, pues se obtienen tres alfombras "distintas" al componerse de uno, dos y tres trozos, respectivamente. Olvidemos, pues, el número de cortes. Demos rienda suelta a la tijera y definamos el problema desde esta nueva óptica:

«¿Será posible obtener tres alfombras exactamente iguales (en forma, superficie, número de las piezas que las forman...)?»

La respuesta es afirmativa, ya que podemos dividir el cuadrado en tres rectángulos iguales y luego cuadrar cada uno de ellos por el procedimiento de la media geométrica.

Investigación 15.ª

15.1 [illegible]

15.2 [illegible]

Si te parece difícil, resuelve primero la indagación siguiente.

Investigación 16.ª

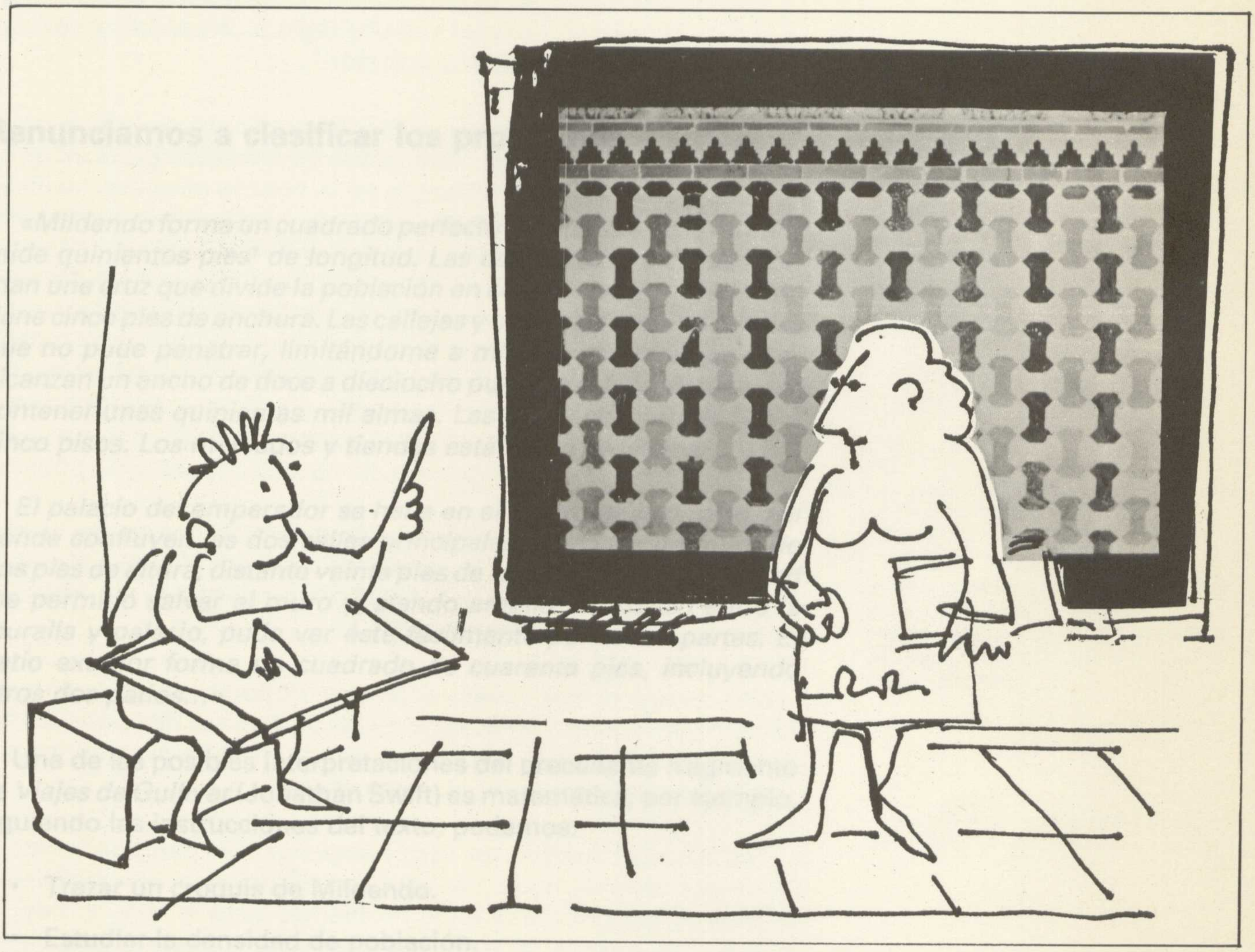
16.1 ¿Se puede dividir cualquier cuadrado en n rectángulos iguales?

16.2 Comprueba que el procedimiento de la media geométrica para cuadrar rectángulos cualesquiera es válido siempre que $b \le a \le 4 \cdot b$ (donde a y b son los lados del rectángulo).

Esta restricción se evita con mucha facilidad: si $a > 4 \cdot b$, basta cortar el rectángulo por la mitad del lado a y pasar a otro (de lados $c = a/2$ y $d = b + a/2$) al que ya sí se le puede aplicar el método de la media geométrica. Esto, sin embargo, no sirve en el caso del ejercicio, pues necesariamente ha de cuadrarse un rectángulo $5 \cdot 1$ ($n \cdot 1$, en general) para poder, después, dividirlo en 5 (respectivamente, n) cuadrados.

2

problemas para el aula



«...una persona joven que se está desarrollando debería ser estimulada para que se plantease problemas y tratase de resolverlos. Además, sólo deberíamos ayudarles a resolver sus problemas si necesitaran ayuda. No deberíamos adoctrinarles ni deberíamos embutirles respuestas cuando no se plantean preguntas, cuando los problemas no vienen de dentro.»

KARL R. POPPER

Renunciamos a clasificar los problemas

«Mildendo forma un cuadrado perfecto y cada lado de la muralla mide quinientos pies[1] de longitud. Las dos calles principales forman una cruz que divide la población en cuatro distritos. Cada uno tiene cinco pies de anchura. Las callejas y otras vías menores, en las que no pude penetrar, limitándome a mirarlas mientras pasaba, alcanzan un ancho de doce a dieciocho pulgadas[2]. La ciudad puede contener unas quinientas mil almas. Las casas cuentan de tres a cinco pisos. Los mercados y tiendas están bien provistos.

El palacio del emperador se halla en el centro de la ciudad, allí donde confluyen las dos calles principales. Lo rodea un muro de dos pies de altura, distante veinte pies de los edificios. Su Majestad me permitió salvar el muro y, siendo amplio el espacio entre la muralla y palacio, pude ver éste fácilmente por todas partes. El patio exterior forma un cuadrado de cuarenta pies, incluyendo otros dos patios...»

Una de las posibles interpretaciones del precedente fragmento de *Viajes de Gulliver* (Jonathan Swift) es matemática; por ejemplo, siguiendo las instrucciones del texto, podemos:

- Trazar un croquis de Mildendo.
- Estudiar la densidad de población.
- Comparar órdenes de distintas magnitudes de Lilliput con las de nuestro mundo y resolver problemas de escalas.

Si quisiéramos proponer el texto (el "enunciado") como "problema" en nuestras clases tendríamos que acompañarlo de algu-

[1] Pie = 0,340 8 metros.

[2] Pulgada = 0,024 8 metros.

nos criterios para precisar qué "género" de trabajo esperamos de nuestros alumnos (o pedir a los alumnos que ellos mismos enunciaran tales criterios). He aquí algunos ejemplos de criterios posibles:

- Los conceptos matemáticos requeridos para su comprensión.

- El paso de la narración a la formulación de problemas. A su vez, estos problemas podrían ser "de geometría", "de cálculo de superficies y volúmenes", de "proporciones"...

- Las distintas secuencias de tareas que permiten obtener soluciones. Así: ¿se utilizan transformaciones en la obtención de soluciones?, ¿hay tal vez una regla o un modelo implícito que permita llegar a una solución?

Posiblemente, cada criterio, aisladamente considerado, permitiría clasificar, en sentido matemático[3], este texto de Gulliver y todos los problemas; sin embargo, no se conoce ninguna clasificación que sea lo suficientemente potente y exhaustiva como para conseguir unanimidad entre las personas que trabajan con los problemas. Los psicólogos, por ejemplo, suelen clasificar los problemas (sean o no de matemáticas) atendiendo al criterio "estar bien —o mal— definidos", entendiendo por "problema bien definido" el que tiene una meta (o solución) claramente establecida. En cambio, los matemáticos profesionales clasifican tradicionalmente los problemas según el criterio "abierto/cerrado", entendiendo por "problema abierto" el que aún no ha recibido solución pública.

En cualquier caso, una clasificación de problemas que se limitara a sólo dos clases sería de poca utilidad para el aula, ya que la tarea del profesor conlleva a menudo la obligación de efectuar matizaciones (a veces muy sutiles).

Nos encontramos, pues, ante una importante limitación: la inexistencia de una clasificación de los problemas de matemáticas para el aula. Aunque la hemos buscado, nos ha sido imposible encontrarla o inventar una que sea eficaz.

Los intentos hechos en esta búsqueda nos han conducido a reconocer que, aunque no haya clasificaciones con suficiente diversidad para referirse a los problemas para el aula, sí hay, al menos, dos puntos de vista que permitan conseguir una cierta variedad de tipos. Decimos "tipo" y no "clase" para significar que no hay ahora inconveniente en que un problema pueda pertenecer a más de un tipo (lo que, con las clases, por definición, sería contradictorio).

---

[3] Como es bien sabido, en matemáticas decimos que hemos clasificado un conjunto dado cuando somos capaces de construir subconjuntos de modo que la reunión de todos estos coincida con el conjunto dado y que ningún elemento del conjunto dado esté en dos subconjuntos a la vez.

Primer punto de vista:

(A) Si se atiende a las intenciones de los profesores, se pueden reconocer tipos que juegan un papel importante —y diferente— en las aulas. Los distintos tipos no responden, por lo general, a un enfoque homogéneo —ni sistemático— de los problemas para el aula, pero tienen la ventaja de abarcarlos a todos (además de inspirarse en la práctica docente).

Segundo punto de vista:

(B) Si se observan —de modo cualitativo— las decisiones y actuaciones del resolutor, generalmente ligadas al aspecto de los enunciados, se pueden describir, de manera complementaria a lo dicho en (A), tipos de problemas.

Tipos de problemas para el aula

Son tres los aspectos que, fundamentalmente, deben tenerse en cuenta al hablar de problemas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (problemas para el aula). Se derivan de cada una de las partes que, generalmente, dan estructura a un problema (aunque no sea de matemáticas). (Ver tabla 1 y los comentarios que le siguen.)

Tabla 1

Problema	Problema matemático	Problemas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
Información	La información puede expresarse mediante conceptos, símbolos y notaciones matemáticas. Notaciones y símbolos diferentes, e incluso distintos enunciados, pueden caracterizar un "mismo" problema.	El texto del enunciado o la presentación del problema han de ser claros. Hay que asegurarse de la comprensión. Es, para el profesor, un problema de transmisión oral.
Pregunta	La pregunta puede expresarse como petición de una información con sentido matemático (localizar un dato, establecer o comprobar una relación, etc.).	La tarea a realizar debe estar al alcance de los alumnos.
Relaciones y reglas de operación del contexto en el que aparece la información.	Las reglas de operación aparecen dentro de una estructura de conceptos matemáticos integrados en una teoría.	La intención de quien propone el problema debe ser puesta de manifiesto.

COMENTARIOS A LA TABLA 1

Información

Los datos, las notaciones, los símbolos e, incluso, la "forma" literaria, pueden expresarse de modos muy diferentes sin que cambie, esencialmente, la dificultad matemática intrínseca del problema. Sin embargo, estos cambios permiten modificar sustancialmente el grado de motivación o de significado para el alumno. Por ello, proponemos un criterio de "equivalencia" de problemas:

Dos problemas son equivalentes si resuelto uno de ellos queda resuelto el otro.

Según este criterio, un mismo problema puede ser presentado bajo distintos enunciados. Ejemplifiquemos:

Primer enunciado: «Calcula las razones de las áreas de las cuatro regiones obtenidas al dibujar sobre un cuadrado una diagonal y el segmento que une un vértice —que no esté en esta diagonal— con el punto medio de un lado».

Segundo enunciado: «Dado un cuadrado, ABCD, en el que M es el punto medio de CD y E es el punto de corte de BM con AC, encuentra las razones entre las áreas de las regiones que se obtienen.»

Tercer enunciado: «Dado un sistema de referencia ortonormal, las rectas de ecuaciones $x = a$ e $y = a$ determinan con los ejes un cuadrado. La recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0, a)$ y $(a, 0)$ y la que une el vértice opuesto al origen con el punto medio de cualquiera de los lados que no lo contienen, se cortan en un punto E. Calcula las razones entre las áreas de las regiones determinadas sobre el cuadrado».

Cuarto enunciado: «Patricia cumple dos años, y su padre le ha hecho un bizcocho cuadrado para merendar con sus tres primos. Su madre se empeña en que lo corte en cuatro cuñas iguales. El primer corte lo hace de esquina a esquina. Para hacer el segundo partió de otra de las esquinas y llegó, desviándose, a la mitad de uno de los lados opuestos. Los trozos resultaron proporcionales a las edades de los niños allí presentes. Calcula sus edades.»

En cualquiera de estos casos, los alumnos deben comprender muy bien la dificultad que encierra el enunciado. A veces, la "traducción" de un problema mediante enunciados equivalentes promueve la comprensión y la motivación de alumnos que, de otro modo, se desinteresarían. Quizá no todos estén haciendo "las mismas matemáticas", pero ¡todos hacen matemáticas!

Pregunta

(1) En cualquier caso, el segundo requisito de los problemas para el aula ("la tarea debe estar al alcance de los alumnos") parece evidente. En este sentido, el profesor se enfrenta a menudo al "dilema" de no poner preguntas demasiado fáciles ni demasiado difíciles. Se trata de un equilibrio complicado y, sobre todo, inestable, ya que los éxitos o los fracasos continuados retroalimentan las propias expectativas de nuevos éxitos o fracasos.

(2) Un problema puede ir ampliándose de tal modo que vaya exigiendo una mayor destreza y conocimientos en quienes han de resolverlo. Partamos de la situación anterior (cuarto enunciado) observando que el corte ha podido hacerse sobre dos lados tal y como se muestra en la figura 1.

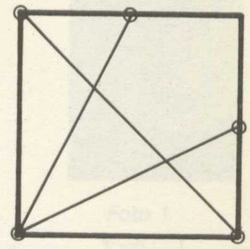


Figura 1

Sobre el dibujo de la figura 1, pueden ampliarse los enunciados anteriores hasta llegar, por ejemplo, a las preguntas del problema propuesto en el libro *Las matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90. Kuwait 1986* (Mestral Libros, Valencia, 1987):

«a) ¿Son iguales los tres segmentos determinados sobre la diagonal?

b) Sugiere varias maneras de generalizar el problema.

c) ¿Puede generalizarse la respuesta que has dado a la primera pregunta?

d) ¿Se puede usar el argumento que utilizaste en a) en los casos más generales?

e) Si tu respuesta en d) es no, ¿puedes encontrar un argumento que sí sea generalizable?»

Contexto

En Primaria y Secundaria se utilizan los problemas que figuran en los libros de texto, ya que los profesores suelen aprovecharlos para evitar pérdidas de tiempo al dictarlos en la clase o para confeccionar relaciones de ejercicios y problemas que entregan a sus alumnos. Se produce así un acoplamiento entre las intenciones del profesor —al seleccionar tales problemas y no otros— y las intenciones de los autores de los libros —que intentaron, por su parte, transmitir las que recogen los programas oficiales sistematizando las formas de los enunciados en unos pocos "modelos"—. Este modo de proceder, sin ser censurable, tiene un gran inconveniente, a saber: refuerza la dependencia del alumno hacia su profesor y hacia los libros de texto. Si lo que se pide a las matemáticas es que contribuyan a la formación de los ciudadanos, se ve la necesidad de tipos distintos —y complementarios— de proponer problemas que tengan por finalidad disminuir —o anular— el mencionado inconveniente.

Para la enseñanza y el aprendizaje basados en la resolución de problemas hay que tener en cuenta los siguientes supuestos:

1. En la resolución de problemas importan el resultado obtenido y el proceso que condujo a la solución.

2. Los tipos de problemas que se describan deben satisfacer distintos objetivos curriculares (toma de decisiones, formulación de conjeturas, por ejemplo).

3. No debemos olvidar que, por causa del estado actual de nuestra legislación educativa, muchos profesores se consideran obligados a desarrollar un temario y pueden, por lo tanto, sentirse excluidos de una forma de conducir las clases que exige, de golpe, muchos cambios profundos.

Si nos fijamos en las intenciones de los docentes y tenemos en cuenta todas las consideraciones expuestas[4], llegamos a seis tipos de problemas para el aula. Los cuatro primeros se corresponden con los problemas que aparecen en los actuales libros de texto; los dos últimos tienden a promover, en el contexto indicado, la "independencia" del alumno frente al profesor y a los textos. Los tipos de problemas a los que nos referimos son:

Ejercicios de reestructuración.

Ejercicios de reconocimiento.

Ejercicios algorítmicos.

Problemas de aplicación.

Problemas de enunciado abierto.

Problemas-tema.

Ejercicios de reestructuración [5]

Son los que preparan para el aprendizaje de un concepto nuevo (o para que se complete una estructura conceptual). Forman parte de la primera etapa de cada aprendizaje. La reestructuración se consigue de muy diversas maneras, según el nivel escolar, entre las que no se excluyen el uso del propio cuerpo o la manipulación de objetos. (La tabla 2 muestra algunos ejemplos.)

[4] Tanta precaución oratoria es necesaria, en ausencia de toda sistemática, para no incurrir en contradicciones formales de tipo lingüístico.

[5] El término ha sido acuñado por los psicólogos cognitivos para referirse al «proceso fundamental del aprendizaje de nueva información». Nosotros lo usamos aquí con cierta libertad.

Tabla 2

EJEMPLOS DE EJERCICIOS DE REESTRUCTURACION

«Jugar a las cuatro esquinas.»

«Señala cuántas figuras como ésta hay en tu clase (figura 2).»

«Observa la figura 3 y di qué figuras son iguales a la que ves en la figura 2.»

«Observa las siguientes figuras (figura 4). ¿Son iguales?»

«Con gomas de distintos colores marca cuadrados diferentes en un geoplano cuadrangular 3 x 3 (9 "clavos").»

«Busca diferencias en la figura 5.»

«¿Un rectángulo es un cuadrado? ¿Un rombo es un cuadrado?»

«Construye un cuadrado con un mecano. ¿Se puede deformar? ¿Qué figuras obtendrías? Dibújalas.»

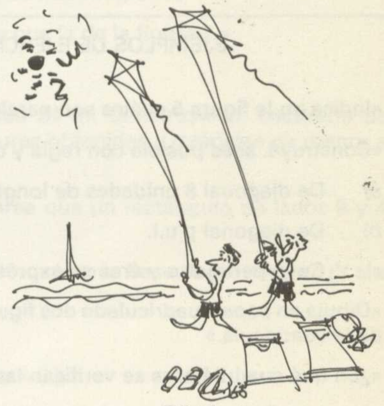
«¿Cómo hacer rígido un cuadrado? (Observa la foto1.)»

«Haz una cometa. ¿Cómo tienen que ser las dos cañas si queremos que sea cuadrada? (dibujo 1).»

«A partir de la cometa cuadrada, ¿cuántas cometas se podrían hacer, modificando la posición relativa de las diagonales?»

«Disponte a hacer un puzzle con dos cuadrados exactamente iguales (de cartulina) y unas tijeras, córtalos en piezas y ofrécelo a tus amigos para que hagan un solo cuadrado mayor. ¿Qué pasaría si los cuadrados de partida fuesen diferentes?»

Foto 1



Dibujo 1

Figura 2

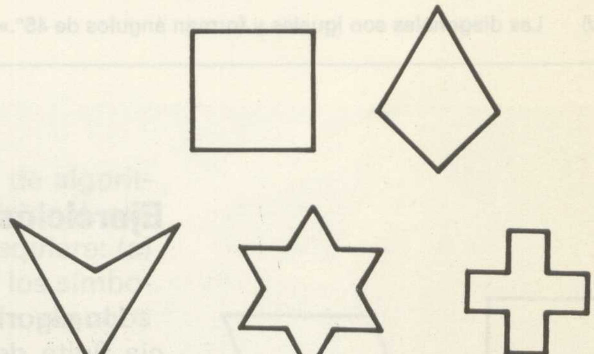


Figura 3

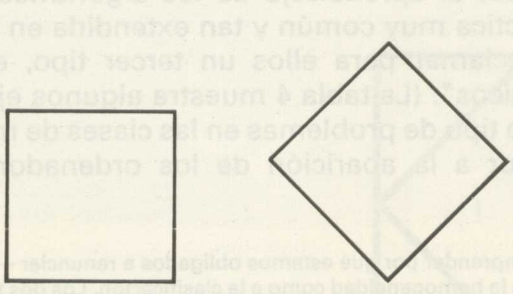


Fig. 4. Dos cuadrados, uno dispuesto sobre un lado y otro sobre un vértice

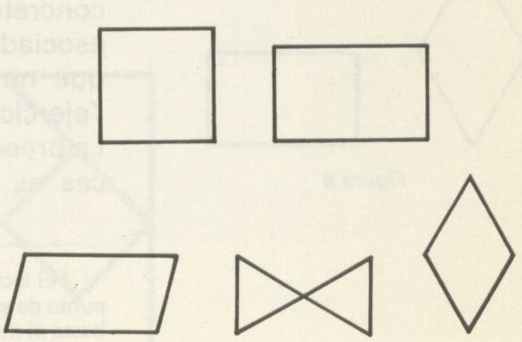


Figura 5

Ejercicios de reconocimiento

Una de las metas cotidianas de los profesores consiste en dar énfasis a ciertos hechos, a ciertas definiciones o a la afirmación (tesis) de un teorema. Como consecuencia, los alumnos "saben" que tiene gran importancia para su aprendizaje —aunque el profesor no lo diga explícitamente— el ser capaces de reconocer sin grandes dudas lo que el profesor ha enfatizado. Los problemas orientados a la consecución de estas metas los llamamos "ejercicios de reconocimieto"[6]. (La tabla 3 muestra algunos ejemplos.)

Tabla 3

EJEMPLOS DE EJERCICIOS DE RECONOCIMIENTO

«Indica en la figura 5 cuáles son paralelogramos (figura 6).»

«Construye, si es posible con regla y compás, un cuadrado:

a) De diagonal 8 unidades de longitud.

b) De diagonal p u.l.

c) Cuyo perímetro y área se expresen con el mismo número.»

«Dibuja en papel cuadriculado dos figuras equivalentes, cuyas áreas sean 16 cuadrados de la cuadrícula.»

«¿En qué cuadriláteros se verifican las siguientes propiedades?

a) Las diagonales se cortan en el punto medio.

b) Las diagonales son iguales.

c) Las diagonales se cortan formando ángulo de 45°.

d) Las diagonales son iguales y forman ángulos de 45°.»

Ejercicios algorítmicos

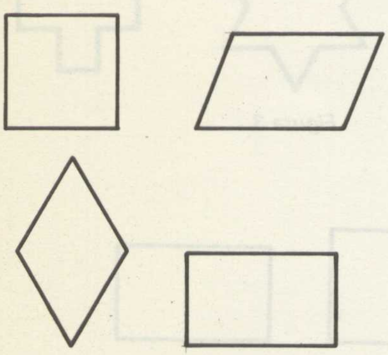


Figura 6

Un algoritmo es una serie finita de operaciones en una secuencia finita de etapas que, aplicadas en un orden determinado a ciertos datos, permiten obtener un resultado buscado. La dificultad que presenta la aplicación de un algoritmo consiste, básicamente, en estructurar correctamente unas informaciones para un uso concreto y ordenado; el aprendizaje de los algoritmos suele ir asociado a una práctica muy común y tan extendida en las aulas que nos lleva a reclamar para ellos un tercer tipo, el de los "ejercicios algorítmicos". (La tabla 4 muestra algunos ejemplos.) La presencia de este tipo de problemas en las clases de matemáticas es muy anterior a la aparición de los ordenadores y las

[6] El lector puede ya comprender por qué estamos obligados a renunciar —al utilizar el punto de vista (A)— tanto a la homogeneidad como a la clasificación. Los dos tipos citados hasta el momento tienen un origen muy diferente: la psicología cognitiva (el primero) y la práctica docente (el segundo). Por otra parte, si se compara el séptimo ejemplo de la tabla 2 con el primer ejemplo de la tabla 3, se ilustrará la dificultad de asignar problemas a clases únicas.

calculadoras, aunque la informática ha permitido retocar y perfeccionar el aprendizaje y uso de algoritmos al disminuir drásticamente los tiempos dedicados a las operaciones numéricas o algebraicas y al "descargar" al cerebro de ciertas tareas de memorización.

Tabla 4

EJEMPLOS DE EJERCICIOS ALGORITMICOS

«Dada la figura 7, calcula:

a) El área del rectángulo.

b) El área de cada una de las regiones señaladas.

c) La superficie de la figura formada por esas cinco regiones.

d) El lado del cuadrado con igual superficie que la de la figura 7.»

«Construye un cuadrado de lado dado.»

«Encuentra seis rectángulos cuyo perímetro sea 24 m. Construye un cuadrado de perímetro 24 m. Compara las superficies de las figuras obtenidas. Ordénalas de menor a mayor.»

«Construye un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo de lados 9 y 4 unidades.»

«Si el lado de un cuadrado crece en un 15 por 100, ¿cómo lo hace su perímetro? ¿Y sus diagonales? ¿Y su área?»

«Calcula la raíz cuadrada de 1992.»

«Resuelve geométricamente la ecuación $x^2 + 10x = 39$.»

Problemas de aplicación

Los problemas de aplicación implican la utilización de algoritmos. La palabra "problema", usada en el sentido tradicional, cae dentro de esta categoría. Para llegar a la solución se requiere: (a) formular simbólicamente el problema, y (b) manipular los símbolos aplicando varios algoritmos. (La tabla 5 muestra algunos ejemplos.)

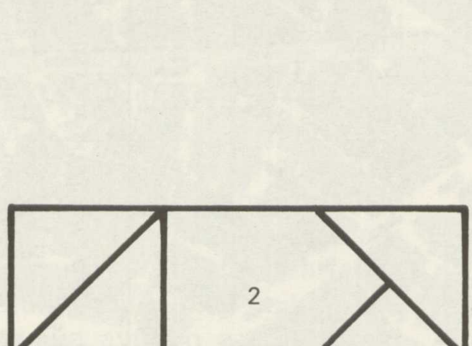


Figura 7

Tabla 5

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE APLICACION

«Calcula la superficie de la zona señalada en el plano de la figura 8.

El recorrido de una manifestación está marcado con trama en el plano de la figura 8. Cuando la cabeza llegó al lugar señalado con la letra B, la cola estaba en el señalado con la A. ¿Cuántos manifestantes han participado, si cada uno de ellos ocupa, aproximadamente, 20 dm^2? ¿Qué dimensiones debería tener la plaza del lugar B para que, con el mismo perímetro, cupiese el máximo número de personas?»

«El otoño presentó torrenciales aguaceros y grandes riadas por comarcas del litoral de Levante. Entre el 15 de septiembre y el 18 de octubre hubo varias penetraciones en superficie de aire subtropical —cálido y húmedo— sobre la que gravitaron en altos niveles de la atmósfera gotas frías, dando períodos de acusada inestabilidad, con tormentas y verdaderos diluvios. Destacaron precipitaciones en cortos períodos de tiempo del orden de 250 a 320 litros por metro cuadrado en Alicante, Valencia, Murcia y Málaga, que provocaron desbordamientos e inundaciones.» (Texto sacado del *Anuario El País* de 1987, pág. 186.)

¿Cuál fue el volumen medio de agua recogido en la zona más afectada en la Comunidad del País Valenciano que está marcada en la figura 9?»

«(3, 4) y (7, 10) son los extremos de una diagonal de un cuadrado. ¿Cuáles son los extremos de la otra diagonal? ¿Podrías encontrarlos sin dibujar?»

«Construye una caja sin tapa con una cartulina cuadrada de 42 cm. de lado.

a) Recorta en cada esquina, sucesivamente, cuadrados de lados 1, 2, 3... y calcula el volumen de la caja que se obtiene en cada caso.

b) Haz una tabla que exprese la relación lado de la base y volumen y determina las dimensiones de la caja de volumen máximo.

c) Repite el proceso para una cartulina de lado 1.»

Fig. 8. Plano de la zona centro de Granada

(E: 1/500)

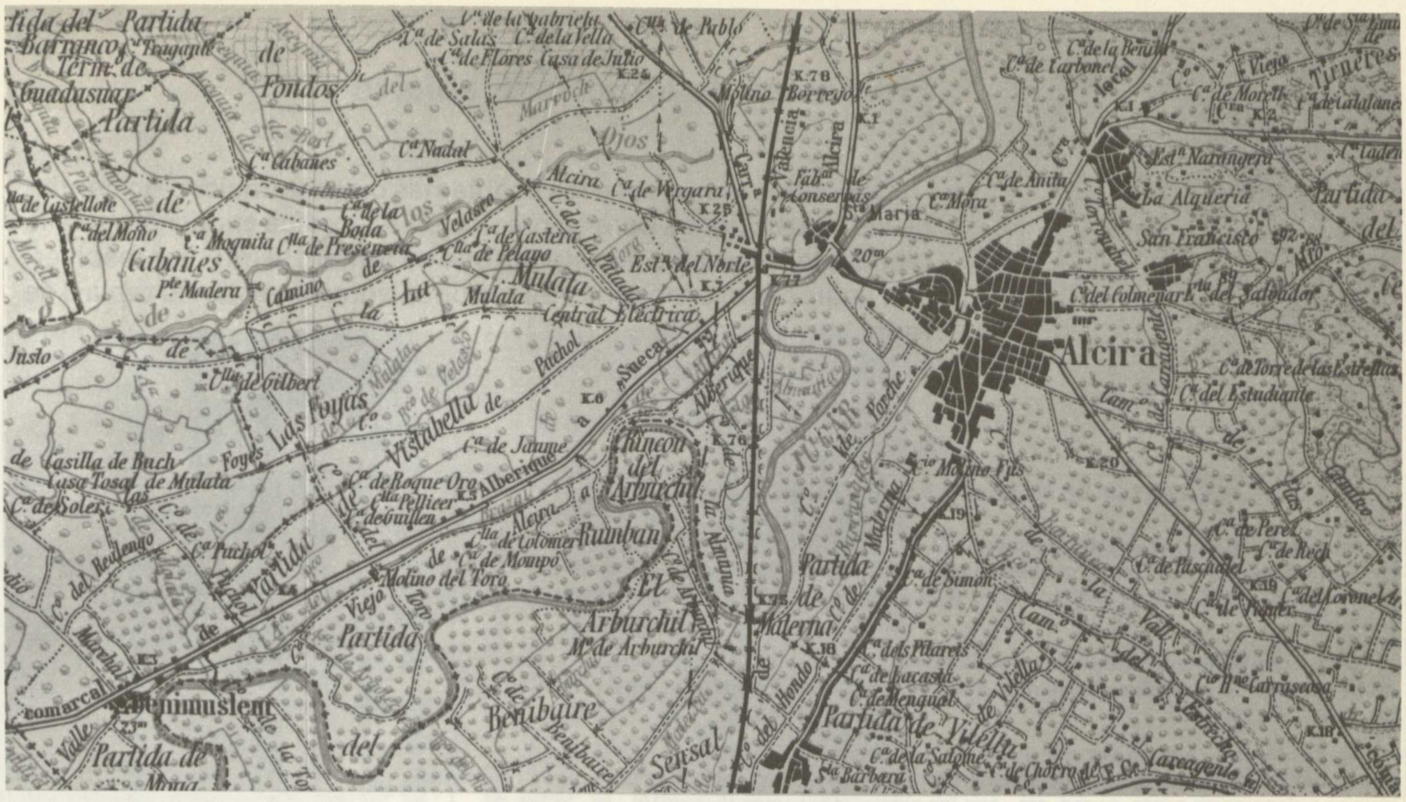


Fig. 9. Plano de una zona de huerta valenciana

(E: 1/50.000)

¿Qué tienen en común los cuatro tipos de problemas para el aula que ya han sido descritos?

Generalmente, contienen explícitamente en su enunciado lo que se pretende: dibujar, verificar, calcular, construir, hallar, demostrar, etc. Puede decirse que la situación problemática y la dificultad o dificultades que conllevan están explícitamente precisadas; los medios necesarios para obtener una solución no sólo son conocidos, sino que están inmediatamente al alcance del resolutor.

Los profesores, por estar obligados a desarrollar un determinado temario o por otras razones, proponemos generalmente sólo problemas de los tipos ya mencionados. No existe marco "oficial" que permita incluir otros tipos de problemas para el aula y mediante los cuales el alumno podría disponer de ciertas libertades (tomando decisiones, haciendo conjeturas o eligiendo convenientemente los problemas subyacentes que ayudan a resolver el problema inicial). Por eso, desde el punto de vista del resolutor, se puede decir que estos cuatro tipos de problemas se corresponden con el mínimo nivel de decisión y de actuación, de ahí que quepa englobarlos bajo la denominación "problemas de enunciado cerrado".

Problemas de enunciado abierto

Denominaremos así a los problemas cuyo enunciado no contiene las instrucciones para su resolución ni predica explícitamente la respuesta; según las decisiones que se tomen, al intentar resolverlos, aparecerán problemas de los tipos anteriores. (En la tabla 6 se muestran algunos ejemplos.)

Tabla 6

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE ENUNCIADO ABIERTO

«Sobre una cuadrícula se dan los puntos (2, 4) y (5, 6). Si los unimos mediante una línea recta, el segmento resultante no contiene ningún otro punto de la cuadrícula. Señalemos los puntos (3, 8) y (11, 18). ¿Existirán sobre el segmento que los une otros puntos de la cuadrícula?

Dados dos puntos cualesquiera, ¿podríamos asegurar que, en el segmento que los une, no hay puntos de la cuadrícula, sin necesidad de dibujarlos? Comprueba tu respuesta con los puntos (5, 18) y (61, 81).»

«¿Has pensado alguna vez por qué casi todos los suelos se embaldosan con losetas cuadradas? En tu opinión, ¿qué ventajas presentan esas losetas sobre los otros modelos? Vamos a decorar un suelo, pared, etc., con las siguientes losetas (figura 10).

Al emplear ese tipo de losetas, ¿cuál sería la loseta más pequeña que tendrías que hacer para conseguir alguna "decoración"?

¿Cuál es la mínima región que se repite?

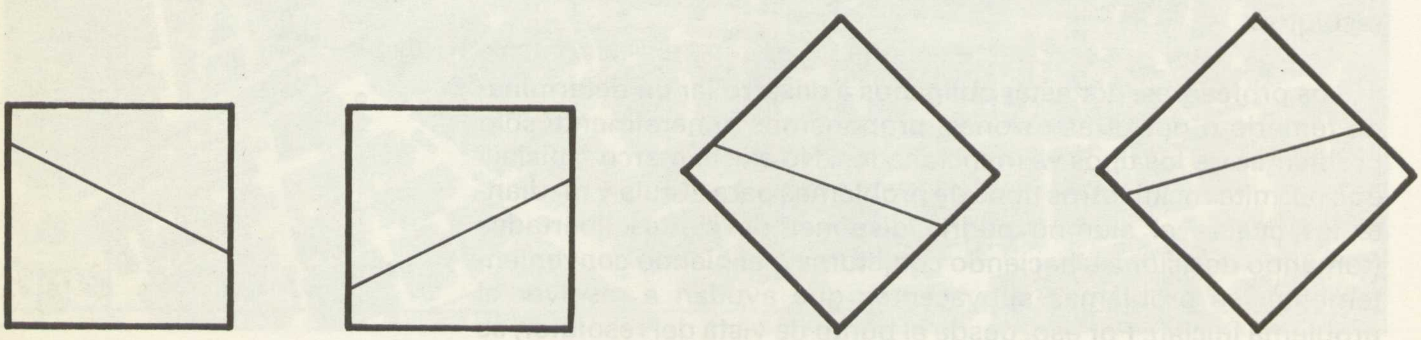
Describe las transformaciones geométricas necesarias para decorar de igual forma un suelo de superficie infinita.»

«¿Se modificarían las conclusiones obtenidas en el ejercicio anterior si utilizáramos losetas de distintos colores? Observa la foto 3:

Recorre el proceso seguido en el anterior problema de manera inversa y obtén una loseta básica de esta decoración.»

En los problemas de enunciado abierto, la situación problemática está precisada (pero no la dificultad correspondiente); los medios para eliminar cualquier posible dificultad son conocidos.

Figura 10



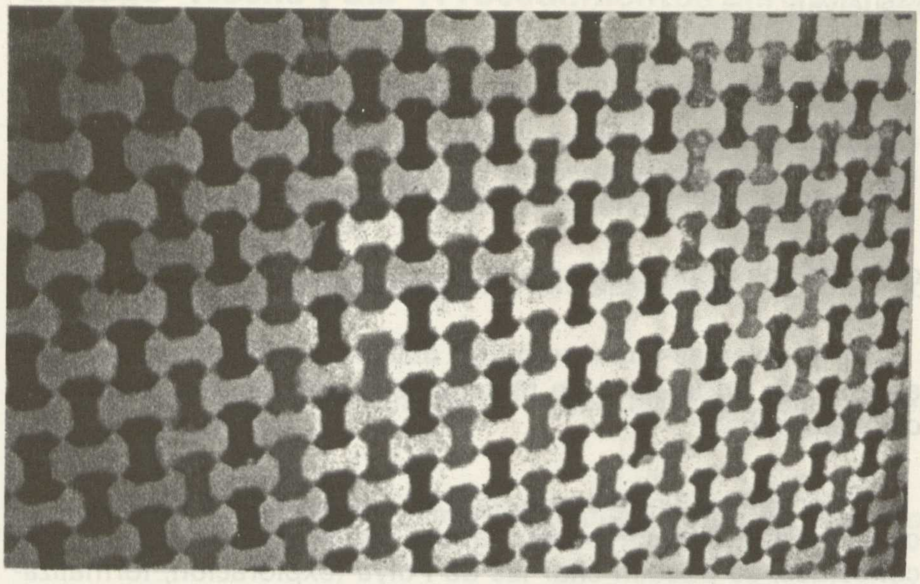


Foto 3. Mosaico de los huesos

Este tipo de problemas se corresponde con un nivel intermedio de decisión y actuación por parte del resolutor. Muy a menudo, ocurre que la mayor dificultad que éste ha de vencer no está, precisamente, en el modo de resolución sino en la elección de la "variable" que se utilice. Por ejemplo, a la vista del siguiente enunciado:

«Un cuadrado está inscrito en una circunferencia. Hallar las superficies del cuadrado y del círculo limitado por dicha circunferencia», será necesario elegir una variable para expresar las áreas pedidas (tales como (i) la medida del lado del cuadrado, (ii) el radio de la circunferencia, (iii) la diagonal del cuadrado, etc.).

Adviértase que, cuando el enunciado de un problema matemático no está bien dado (cosa que no debería ocurrir, pero ocurre), pueden aparecer distintos problemas por interpretación semántica; en este caso, no se trata de un problema de enunciado abierto, sino de un problema mal enunciado. En cambio, sí se puede decir que un problema de enunciado abierto es un problema de enunciado cerrado del que, intencionadamente, se ha extraído toda información relativa a la dificultad (con el objetivo genérico de promover la toma de decisiones por parte del resolutor).

Los cinco tipos de problemas para el aula mencionados hasta el momento están, por definición, en la clase de problemas matemáticos cerrados.

Problemas-tema

Para definir los problemas-tema apelaremos a la cita del profesor Popper con la que abríamos este capítulo. Si "algo relacionado (o que el profesor puede relacionar) con las matemáticas" provoca el interés de los alumnos y da lugar a que éstos se planteen y resuelvan:

(a) problemas de enunciado abierto,

(b) generalizaciones, o

(c) situaciones "nuevas" (quizás inesperadas),

diremos que es un problema-tema.

Los problemas-tema permiten desarrollar todas las fases de aprendizaje en la clase de matemáticas, respetando el ritmo de cada alumno.

La noción de "fases de aprendizaje" ha recibido muchas definiciones y cada profesor practica la suya. Entre las descripciones más conocidas, se pueden citar las de Polya (exploración, formalización, asimilación) o las de los esposos Dina y Pierre Van Hiele (consulta, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración). Si el profesor considera que su práctica docente es mejorable, tendrá que elegir la que más le convenga (de entre las muchas descripciones que existen) y adaptarla a sus alumnos.

Con los problemas-tema, las secuencias de clase no se desarrollan exclusivamente en torno a "contenidos", sino también en base a los descubrimientos que, con o sin orientación del profesor, cada alumno va aportando al grupo.

Como las matemáticas subyacen en casi todas las actividades de nuestra vida diaria, es relativamente fácil encontrar problemas-tema (si bien, se deben tomar precauciones para evitar que de la dinámica del problema surjan dificultades insuperables para alumnos y profesor). Cualquier problema-tema se adapta a cualquier nivel sin más que variar el "espectro" de posibilidades.

Desde el punto de vista del resolutor, los problemas-tema se corresponden con el máximo nivel de decisión y actuación. El enunciado describe una situación que el propio alumno observará con la intención de considerarla como problemática: cualquier interpretación que de ella se haga conducirá a problemas de los tipos anteriores.

Los problemas-tema tienen el inconveniente de que pueden conducir a problemas matemáticos abiertos. El profesor que desee proponer problemas-tema debe asegurarse de que los enunciados de éstos no conduzcan a problemas abiertos o, de lo contrario, informar adecuadamente al alumno del estado del problema abierto al que el resolutor haya podido llegar por su propia cuenta.

El juego "Noche y día". Procedimientos para contar.

En este capítulo proponemos un problema-tema a partir de un juego. Aunque la situación de partida permite variados enfoques, hemos querido resaltar el uso de procedimientos (en este caso, procedimientos de cómputo) que sucede al de los heurísticos.

¿Conoces el juego "Noche y día", también llamado "El infierno y la gloria"?

Hazte con un papel, cuádralo y sigue las instrucciones del plegado de la figura 11.

Si desdoblamos el papel quedarán los pliegues marcados como ves en la figura 12.

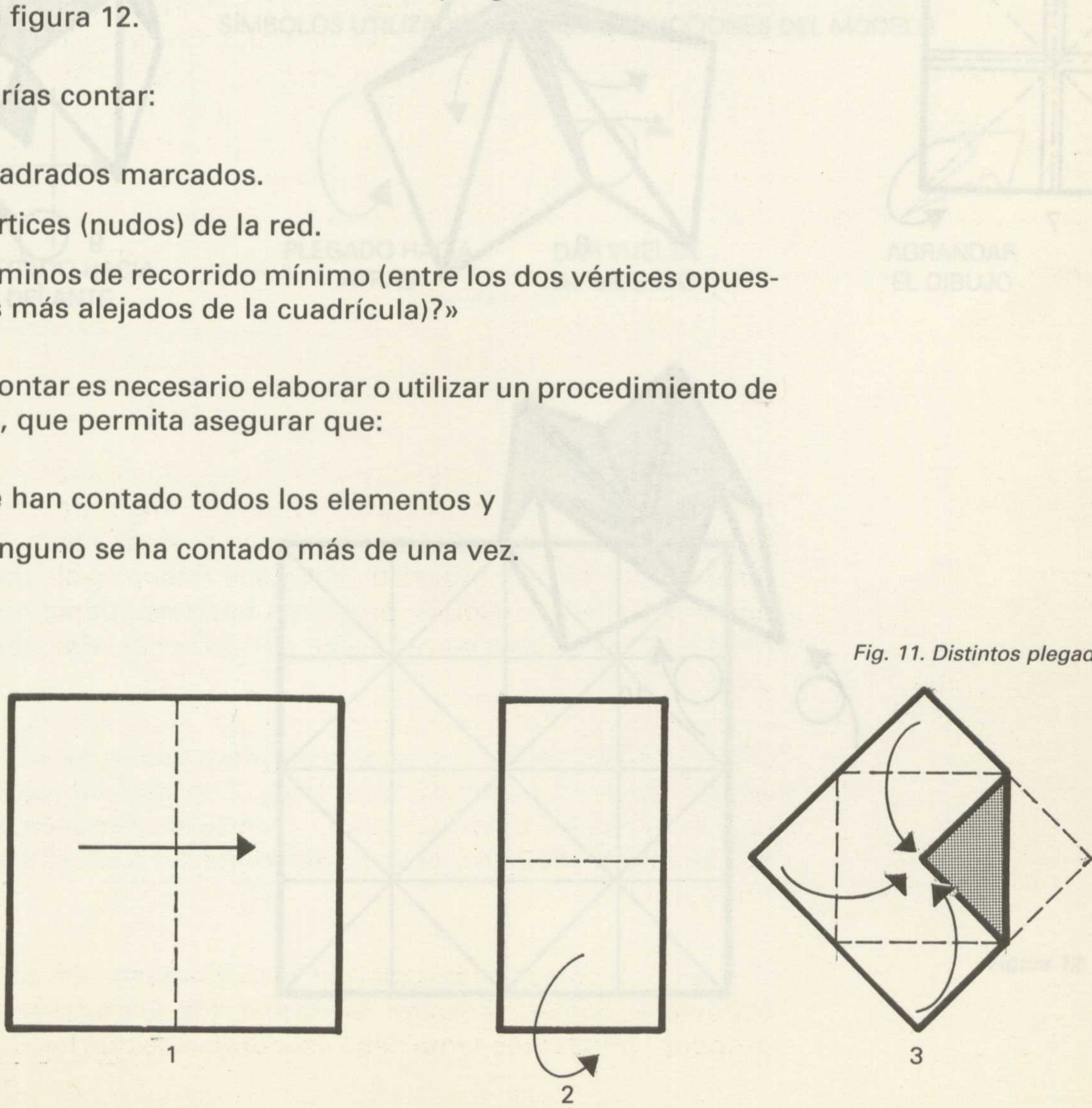
«¿Podrías contar:

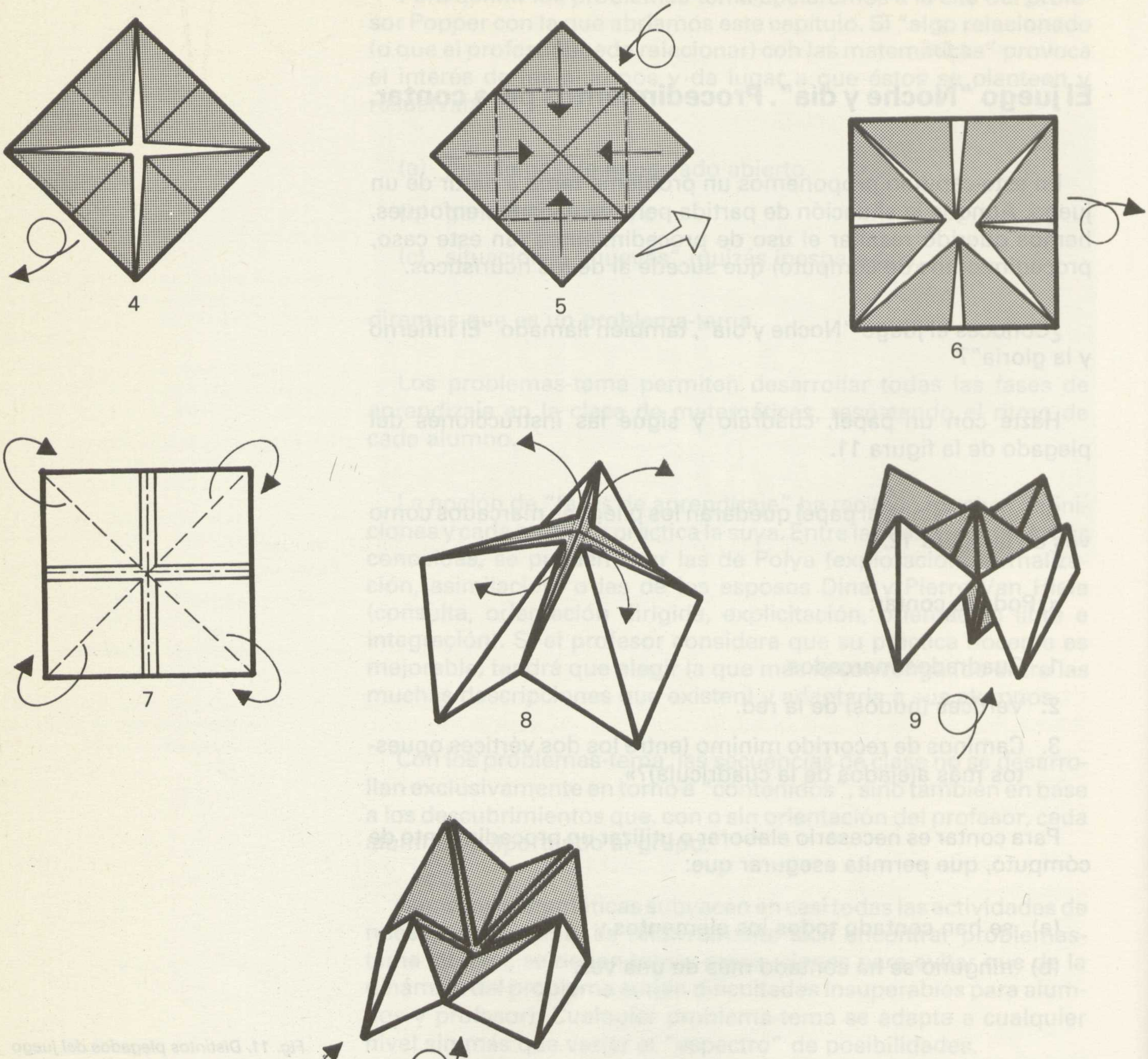
1. Cuadrados marcados.
2. Vértices (nudos) de la red.
3. Caminos de recorrido mínimo (entre los dos vértices opuestos más alejados de la cuadrícula)?»

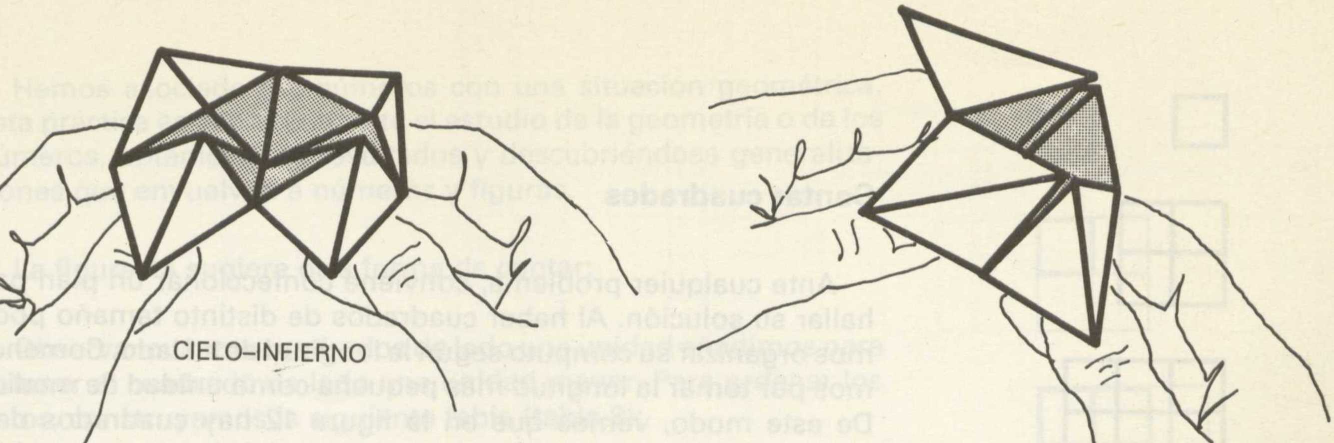
Para contar es necesario elaborar o utilizar un procedimiento de cómputo, que permita asegurar que:

(a) se han contado todos los elementos y
(b) ninguno se ha contado más de una vez.

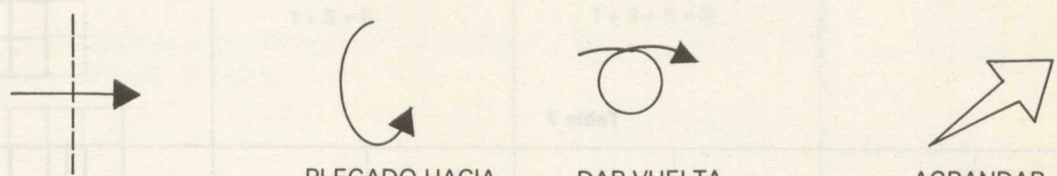
Fig. 11. Distintos plegados del juego




4
5
6
7
8
9
10



SÍMBOLOS UTILIZADOS EN LAS INSTRUCCIONES DEL MODELO



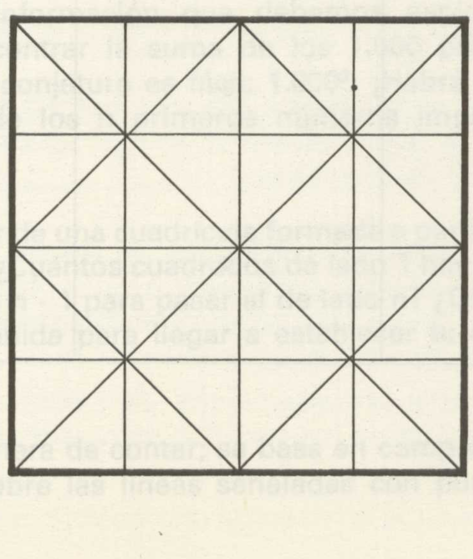


Figura 12

Contar cuadrados

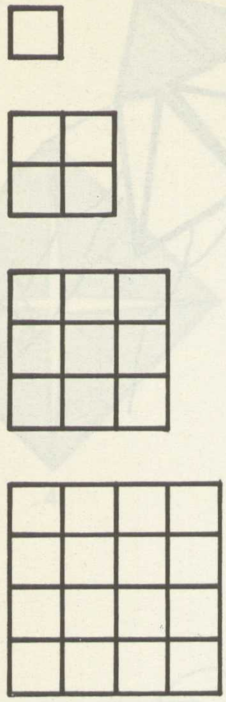


Figura 13

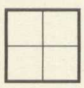
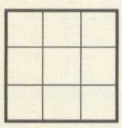
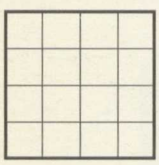
Ante cualquier problema, conviene confeccionar un plan para hallar su solución. Al haber cuadrados de distinto tamaño podemos organizar su cómputo según la longitud de su lado. Comencemos por tomar la longitud más pequeña como unidad de medida. De este modo, vemos que en la figura 12 hay cuadrados de 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades y 4 unidades de lado, pero también hay cuadrados de lado $\sqrt{2}$ unidades y $2\sqrt{2}$ unidades. ¿Cómo organizar el cómputo? Parece razonable atacar cada caso por separado.

1. Contar los cuadrados de lado una unidad.

¿Cuántos cuadrados hay de lado una unidad? Hagamos un dibujo (figura 13)

y organicemos la información que se desprende de él en una tabla (tabla 7).

Tabla 7

Situación	**Número de cuadrados**	**Lado del cuadrado (en unidades)**	**Secuencia obtenida**
	1	1	$1 \times 1 = 1^2$
	4	2	$2 \times 2 = 2^2$
	9	3	$3 \times 3 = 3^2$
	16	4	$4 \times 4 = 4^2$

Hemos asociado los números con una situación geométrica. Esta práctica es común durante el estudio de la geometría o de los números, obteniéndose resultados y descubriéndose generalizaciones que envuelven a números y figuras.

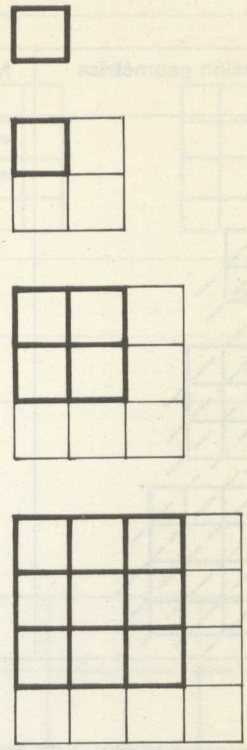
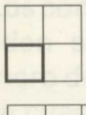
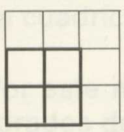
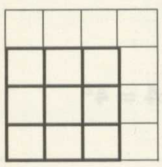


Figura 14

La figura 14 sugiere otra forma de contar:

Observar cuántos cuadrados de lado una unidad añadimos para obtener el cuadrado de lado una unidad mayor. Para ordenar los datos, construyamos la siguiente tabla (tabla 8):

Tabla 8

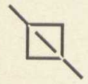
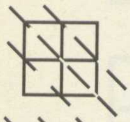
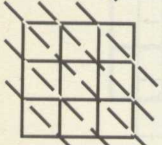
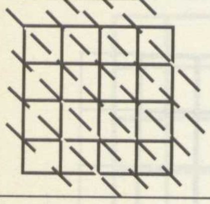
Situación geométrica	N.° de cuadrados de lado 1 unidad	Relaciones numéricas
	1	$1 = 1^2$
	1 + 3	$1 + 3 = 2^2$
	1 + 3 + 5	$1 + 3 + 5 = 3^2$
	1 + 3 + 5 + 7	$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

De la tabla 8 surge información que debemos explorar. Por ejemplo: ¿Puedes encontrar la suma de los 1.000 primeros números impares? La conjetura es fácil: 1.000^2. ¡Habrá que demostrar que la suma de los n primeros números impares es n^2!

Para ello, se puede partir de una cuadrícula formada a partir de un cuadrado de lado n - 1. ¿Cuántos cuadrados de lado 1 hay que añadir al cuadrado de lado n - 1 para pasar al de lado n? ¿Cómo manipular la relación obtenida para llegar a establecer tu conjetura?

He aquí una tercera manera de contar; se basa en comprobar cuántos cuadrados hay sobre las líneas señaladas con puntos (tabla 9).

Tabla 9

Situación geométrica	N.° de cuadrados de lado 1 unidad	Relaciones numéricas
	1	$1 = 1^2$
	$1 + 2 + 1$	$1 + 2 + 1 = 2^2$
	$1 + 2 + 3 + 2 + 1$	$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$
	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

Observa que:

$$2\,(1 + 2) + 3 = 3^2 \qquad \text{y que } 2\,(1 + 2 + 3) + 4 = 4^2$$

De donde:

$$(1 + 2) = (3^2 - 3)/2 = (3.2)/2$$

$$(1 + 2 + 3) = (4^2 - 4)/2 = (4.3)/2$$

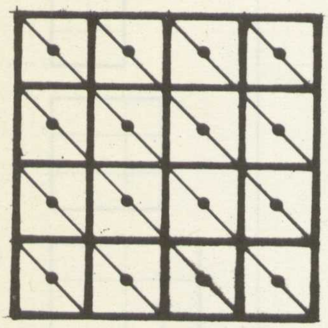


Figura 15

¡Ahora hay que sumar los números naturales!

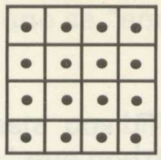
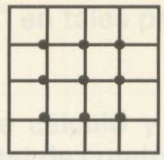
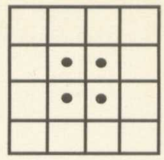
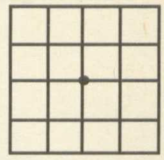
¿Qué obtendrías con este método al aplicarlo a una cuadrícula 25x25? ¿Qué esperas obtener al aplicarlo a una cuadrícula (n+1) x (n+1)? Demuéstralo.

Y aún hay más formas de contar; por ejemplo, identificando cada cuadrado por su centro (figura 15, en la que se observa que los centros están en la diagonal y en rectas paralelas a ésta).

Busca procedimientos para contar y llegar a las relaciones obtenidas en los distintos planteamientos de cómputo.

La tabla 10 muestra una posible línea de actuación.

Tabla 10

Situación geométrica				
Lado del cuadrado	1	2	3	4
Número de centros	4^2	3^2	2^2	1^2

2. Contar cuadrados cuyos lados miden un entero superior a uno.

Cuadrados de lado dos que hay en la figura 16.

Los contaremos ayudándonos de los nudos de la cuadrícula, que pueden ser vértices inferior izquierdo de estos cuadrados. El número de cuadrados de lado dos coincide con el número de nudos de la cuadrícula MNPQ, en total 3^2.

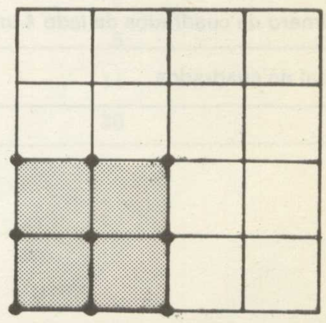
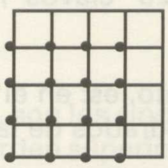
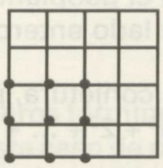
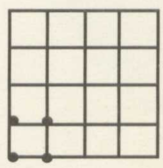
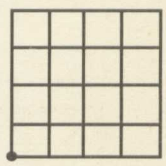


Figura 16

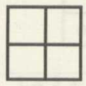
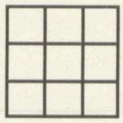
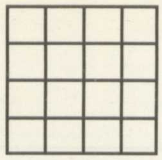
Por este mismo procedimiento se pueden contar también los cuadrados de lado 3 (tabla 11).

Tabla 11

Situación geométrica				
Lado del cuadrado	1	2	3	4
Número de centros	4^2	3^2	2^2	1^2

De nuevo surge la necesidad de sumar. ¿Cuál es el número total de cuadrados de lado un número entero que hemos encontrado? (tabla 12).

Tabla 12

Situación geométrica				
Lado del cuadrado	1	2	3	4
Número de cuadrados de lado 1 unidad	1	4	9	16
Número de cuadrados de lado 2 unidades	0	1	4	9
Número de cuadrados de lado 3 unidades	0	0	1	4
Número de cuadrados de lado 4 unidades	0	0	0	1
Total de cuadrados	1	5	14	30

Con esta tabla (tabla 12) a la vista, conocemos inmediatamente la pauta de obtención del total pedido:

en el geoplano 2x2 (4 "clavos"), hay 1^2 cuadrados de lado entero;

en el geoplano 3x3 (9 "clavos"), hay $1^2 + 2^2$ cuadrados de lado entero;

en el geoplano 4x4 (16 "clavos"), hay $1^2 + 2^2 + 3^2$ cuadrados de lado entero;

en el geoplano 5x5 (25 "clavos") hay $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ cuadrados de lado entero...

La conjetura, por tanto, es: en el geoplano de $(n + 1)^2$ "clavos" hay $1^2 + 2^2 + ... + n^2$ cuadrados de lado entero.

Si conocemos n, podremos calcular dicho total, a "mano" o con calculadora. Con una calculadora que funcione en lógica AOS, se puede aplicar el siguiente "juego de teclas":

(1.°) Teclear CM ("limpiar la memoria").

(2.°) Teclear 1.

(3.°) Teclear x^2.

(4.°) Teclear M+ (almacena aditivamente en la memoria lo que está en la pantalla).

(5.°) Teclear MR (muestra el contenido de la memoria, para apuntarlo)

...y repetir los pasos (2.°) a (5.°), cambiando el "1" del paso (2.°), por, sucesivamente, "2", "3", "4",... hasta llegar al valor dado de n.

Más, incluso con calculadora, la obtención del total de cuadrados puede resultar "exasperante". (Por ejemplo, si n=100, habría que dar un mínimo de ¡400 pulsaciones! Este número es un mínimo, porque normalmente uno se "equivoca" en tales procesos rutinarios...).

De ahí que no baste con esta posibilidad de cálculo y que convenga buscar una "fórmula" que nos dé el total de cuadrados sabiendo que en la base hay n cuadrados de lado 1. ¡Vamos a ello! (tabla 13)

Tabla 13

Lado del cuadrado	Total de cuadrados de lado entero
0	0
1	1
2	5
3	14
4	30

Comienza observando que si efectuamos las diferencias en la segunda columna de la tabla 13, tendremos:

0	1	5	14	30	
	1	4	9	16	Diferencias de primer orden
		3	5	7	Diferencias de segundo orden
		2	2		Diferencias de tercer orden
			0		

Los números 0, 1, 5, 14, 30... son los cinco primeros términos de una progresión aritmética de orden superior, en este caso de orden 3, cuyo término general hemos de determinar.

3. Contar cuadrados de lado irracional

Si te fijas en la figura 12, han quedado marcados cuadrados de lado $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ y medios cuadrados de lado $\sqrt{2}$; pero nosotros sólo nos vamos a referir a los cuadrados cuyos vértices sean nudos de la cuadrícula. ¿Cuántos cuadrados hay? ¿Puedes encontrar regularidades si ampliamos la cuadrícula a 100 x 100? ¿Cuántos cuadrados de lado $k\sqrt{2}$ (k es un número natural) hay en una cuadrícula nxn?

El concepto de "regularidad" es tan amplio que, al intentar definirlo, se puede restringir su significado; sin embargo, todo el mundo lo entiende "intuitivamente".

En estos cálculos hemos visto "regularidades" obtenidas por configuraciones recurrentes de cuadrados; continuaremos obteniendo otras "regularidades" que surgen de puntos y líneas.

Contar vértices

Para contar el número de vértices de la figura 12, puede ser útil empezar por una esquina e ir tapando con un papel (en diagonal) el resto, para ir sumando al desplazar el papel diagonalmente (figura 17).

El número de vértices es: 1, 3, 6, 10... ¿Cuántos habrá en una hoja cuadriculada de tu archivador? ¿Cuántos habrá en una cuadrícula nxn?

Quizá sea más fácil, en vez de utilizar cuadrículas, utilizar los geoplanos correspondientes.

Pongamos unas gomas (como indican las figuras 18 a 21) y contemos los "clavos" que quedan dentro. Escribe los diez primeros números de las secuencias producidas en cada situación representada.

Para cada manera de colocar la goma, encuentra el número de "clavos" que quedan dentro de ésta en cada uno de los siguientes casos:

(1.°) un geoplano correspondiente al juego "Noche y día";
(2.°) un geoplano 100 x 100;
(3.°) un geoplano n x n.

Organicemos estas situaciones en tablas, una para la situación geométrica y otra para la numérica.

Por ejemplo, para la situación que se ha mostrado en la figura 20, tenemos la tabla siguiente (tabla 14).

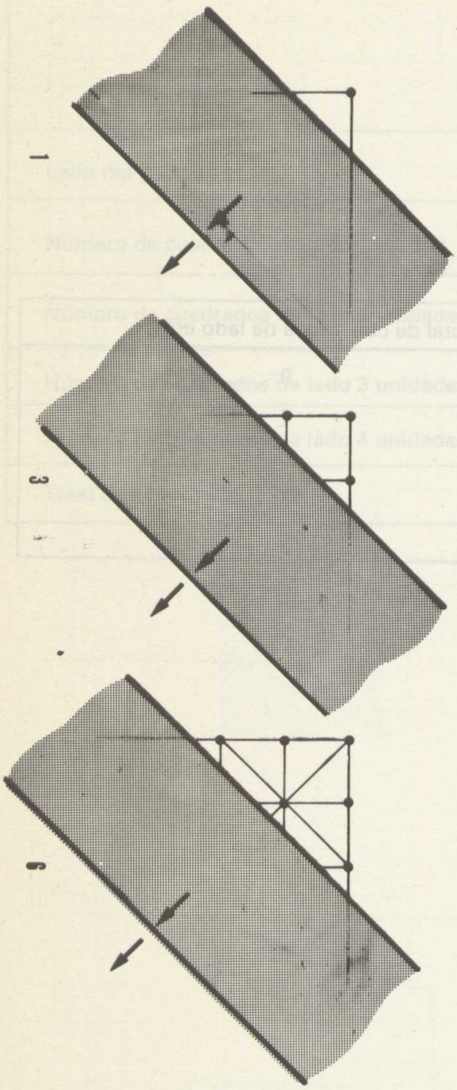


Figura 17

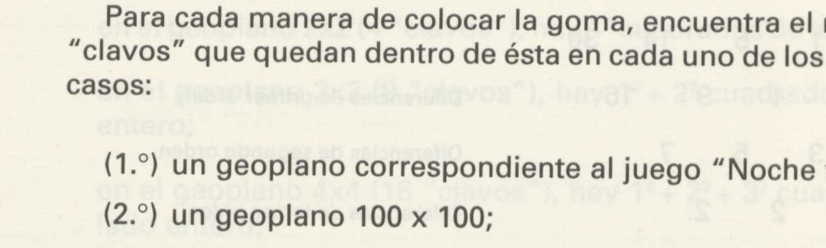


Figura 18

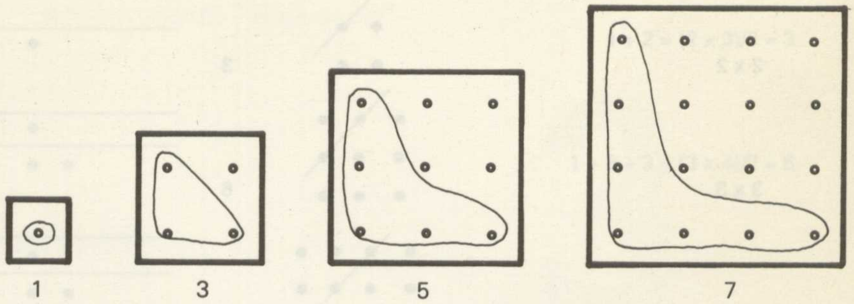


Figura 19

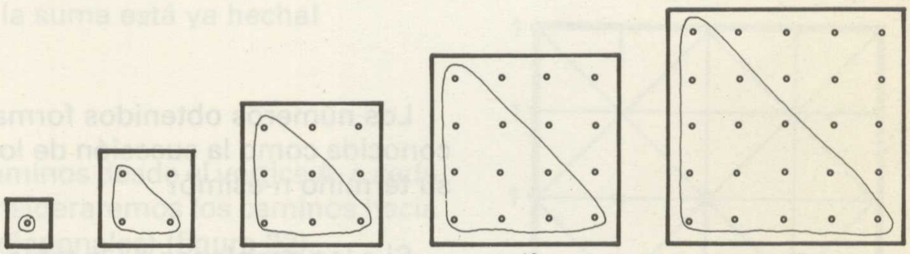


Figura 20

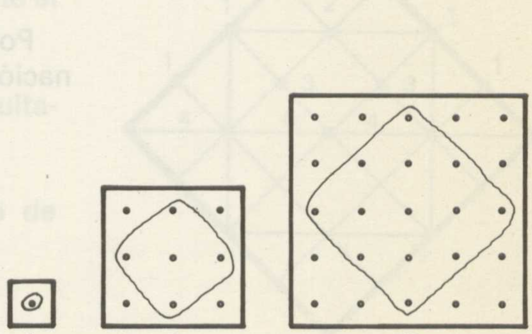
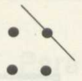
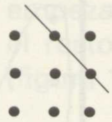
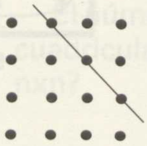
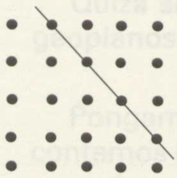


Figura 21

Tabla 14

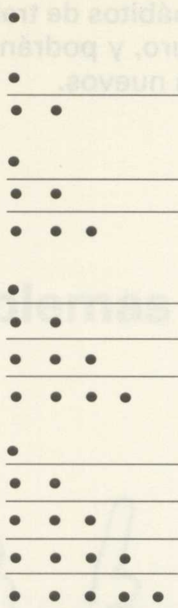
Geoplanos	Número total de clavos encerrados	Lado del cuadrado	Secuencia de los números triangulares
1 x 1	1	0	1
2 x 2	 3	1	3
3 x 3	 6	2	6
4 x 4	 10	3	10
5 x 5	 15	4	15

Los números obtenidos forman parte de la sucesión numérica conocida como la sucesión de los números triangulares. ¿Cuál es su término n-ésimo?

Si a los geoplanos de la tabla 14 les añadimos una columna de "clavos", observaremos también ordenaciones rectangulares; cada ordenación triangular tiene la mitad de puntos que la ordenación rectangular correspondiente. Así, el número de puntos encerrados en un geoplano 2 x 2 es la mitad del número de puntos de una ordenación rectangular, (2 x 3)/2. Si el número de clavos de un lado es 3, entonces el número de puntos encerrados por la goma es (3x4)/2. Ya puedes conjeturar que el número triangular n-ésimo vendrá dado por la expresión $n(n+1)/2$. No olvides que ahora hay que demostrarlo.

Por si lo prefieres, podemos dar otra interpretación de la ordenación de los números triangulares (tabla 15).

Tabla 15

Situación geométrica	Relaciones numéricas
	1 = (1 x2)/2 = 1
	1 + 2 = (2 x 3)/2 = 3
	1 + 2 + 3 = (3 x 4)/2 = 6
	1 + 2 + 3 + 4 = (4 x 5)/2 = 10
	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (5 x 6)/2 = 15

Pero no seguiremos por aquí; ¡la suma está ya hecha!

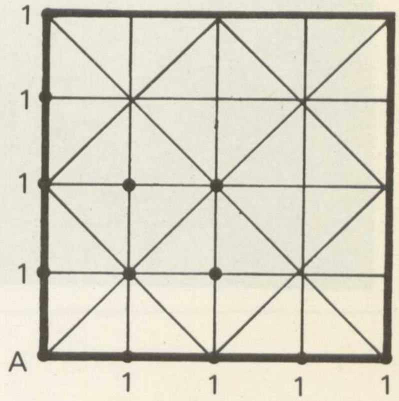


Figura 22

Contar caminos

Vamos a contar el número de caminos desde el vértice A, a cada uno de los vértices (solamente consideraremos los caminos hacia arriba y a la derecha y no por las diagonales) (figura 22).

Si giramos la figura 22, resulta que la ordenación anterior es un trozo del triángulo de Pascal (figura 23):

Si el profesor ve las "regularidades" matemáticas como fuente de belleza e interés, los estudiantes también pueden llegar a apreciarlas.

La importancia de la búsqueda de "regularidades" conlleva un esfuerzo importante para clarificar las ideas que surgen durante el proceso de pensamiento.

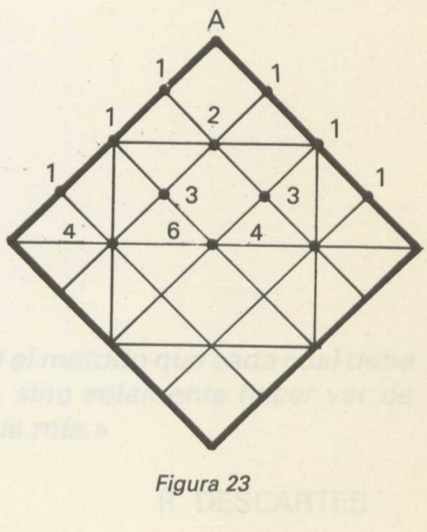


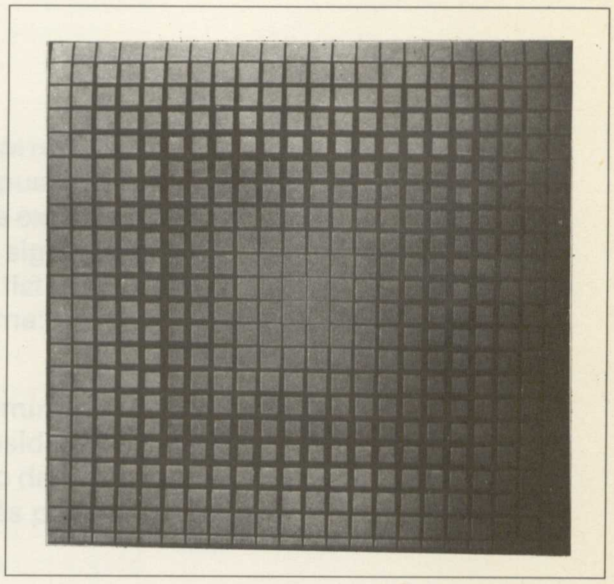
Figura 23

- Hay que organizar las informaciones, los datos o los resultados que se van obteniendo.
- Hay que ordenar y comprobar que el procedimiento de ordenación que se adopte sea adecuado.
- Hay que elaborar estrategias de cómputo.
- Hay que conjeturar y probar la conjetura.

Las indagaciones basadas en la búsqueda de regularidades pueden ser experiencias de las más importantes que tengan los estudiantes de matemáticas en todos los niveles. Experiencias que serán imborrables por "haber sido vividas" por sus autores. Permitirán desarrollar hábitos de trabajo y destrezas, que serán de gran utilidad en el futuro, y podrán ayudar a encontrar resultados o a "descubrir" otros nuevos.

3

los métodos en la resolución de problemas geométricos



«No es mi propósito enseñar aquí el método que cada cual debe seguir para conducir bien su razón, sino solamente hacer ver de qué manera he intentado construir la mía.»

R. DESCARTES

"Lo que hay que saber"

¿Qué necesita saber una persona para resolver un problema? Son muchas las respuestas que unos y otros han propuesto —y siguen proponiendo— para la pregunta anterior. Nuestra experiencia en el aula nos dice que los alumnos tropiezan con las siguientes dificultades que presentamos, a modo de síntesis, como lista de conocimientos necesarios para poder resolver un problema:

Conocimiento lingüístico: El conocimiento de los términos con los que está redactado el problema es la primera necesidad. Por ejemplo, si se es consciente de la utilización del singular o del plural en determinada información o pregunta, se tendrán más posibilidades de abordar un problema.

Conocimiento semántico: Reconocer hechos, acerca del mundo en general, es imprescindible.

Por ejemplo, saber que 1 Ha = 10.000 m^2.

Estos dos conocimientos intervienen directamente en la comprensión de la "Información" y de la "Pregunta" mencionados en el capítulo 2 y no se refieren solamente a la "lengua materna", sino también al "lenguaje específico" de las matemáticas (en el nivel en que se encuentran los alumnos).

Conocimiento esquemático*:* Permite localizar el tipo de problema a resolver. Es importante ser consciente de que se está ante un problema algorítmico o de enunciado abierto, por citar sólo dos de los casos mencionados en el capítulo anterior. Este reconocimiento, cuando ocurre, facilita la toma de decisiones y la adopción de actitudes por parte del resolutor.

Conocimiento operativo: Implica un cierto dominio en el uso de "herramientas" (ya sean intelectuales o manuales). Por ejemplo, cómo ha de despejarse la incógnita, cómo determinar la ecuación de una recta en coordenadas cartesianas, cómo manejar el compás, etc.

Conocimiento estratégico (el más difícil de aprender y de enseñar). La experiencia personal es la que permite optimizar el uso de las líneas de pensamiento que se ponen en juego al resolver problemas y explicitarlas, según el nivel alcanzado en los conocimientos previamente citados, en forma de elección de heurísticos, procedimientos o métodos.

Se han hecho numerosos intentos para enseñar a resolver problemas. En la década de los 80 se han impuesto, entre los psicólogos cognitivos, dos ideas fundamentales, fruto del estudio realizado observando a muchos resolutores de problemas; conviene aprender:

(I) gran cantidad de conocimientos específicos del campo al que pertenecen los problemas a resolver, y

(II) algunas estrategias generales, lo que contrasta con enseñar únicamente destrezas específicas, para la resolución de problemas que puedan aplicarse al conocimiento básico.

Para ser consecuentes con lo que venimos exponiendo, consideramos que se entienden mejor las ideas practicándolas que elaborando una lista de consejos (como «en tales circunstancias, debes hacer tales cosas»). Con la finalidad de transmitir la conveniencia de aprender métodos generales para resolver problemas de geometría, vamos a trabajar sobre unos problemas-tema o de enunciado abierto.

Nos ocupamos de los métodos porque, en los capítulos anteriores, ya lo hicimos con los heurísticos y los procedimientos. ¿Por qué, salvo la razón trivial de que este libro está dedicado al cuadrado, hemos elegido problemas de geometría? Es de dominio público que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría están "viviendo" un cambio profundo desde hace algunos años. En muchos casos, los tratamientos formales han desaparecido de la geometría escolar para dar paso a las organizaciones locales, en el sentido de H. Freudenthal; éstas son, por una parte, muy "ricas" en situaciones y, por otra, poco opresivas, por necesitar puntos de partida menos elaborados, independientemente de "se agoten" pronto o no. De esta forma, se propicia una "visión" del aprendizaje de las matemáticas como un conjunto de procesos —comparar, clasificar, ordenar, generalizar...—, que se pueden ir trabajando en la medida en que su necesidad surge a partir de un problema, y que desembocan en los distintos conocimientos arriba nombrados.

Del uso y aprendizaje de los métodos

Un currículum basado en la resolución de problemas tiene algo de "artístico". No sólo hay que "resolver" (y creemos que a esta altura del libro hemos aclarado la idea con las soluciones dadas o sugeridas), sino que hay que hacerlo de diferentes maneras; entre éstas, siempre será posible enunciar un criterio que permita decir cuál es la más estética. Se facilitará la búsqueda conociendo distintos métodos para resolver problemas de matemáticas escolares.

¿Debemos transmitir el contenido de un método antes de proponer problemas que se resuelven con su ayuda o debemos esperar que, con nuestras orientaciones, los alumnos lo vayan "descubriendo" a la vez que resuelven los problemas? No sabríamos dar una respuesta unánime. Por ello, junto con los problemas que siguen, presentamos **descripciones de métodos**[1] en forma de recuadro, de modo que cada lector pueda leer su contenido antes, durante o después de la resolución. La selección que hemos hecho abarca, a nuestro entender, lo esencial de las matemáticas escolares, pero no hemos pretendido presentarlos todos.

Otra dificultad asociada con el uso y aprendizaje de los métodos de resolución de problemas geométricos, proviene de lo que podríamos llamar el conocimiento estratégico **fino**. Un problema concreto puede resolverse por varios métodos, y esto en dos sentidos: (I) porque cada método, bien conducido, lleve del enunciado a su solución, o (II) porque las distintas etapas del problema puedan requerir el empleo de métodos diferentes. ¿Cómo se elige, por tanto, un método? Más aún, ¿cómo se detecta que un problema es abierto y, por tanto, se ignora qué método podría resolverlo? No hay panaceas. "El sentido común", dirán algunos. Sí, cuando esté guiado por la experiencia.

Borrar un cuadrado

Con ayuda del siguiente problema-tema presentaremos dos métodos de la geometría, el método de los lugares geométricos y el método de las transformaciones. El problema tiene muchas posibilidades más que no hemos querido explorar en este libro con objeto de diversificar el material del capítulo; así, pues, el desarrollo parcial que proponemos no corresponde a una estrategia didáctica, sino a una especie de guía para presentar los mencionados métodos. He aquí el problema:

[1] Para los detalles, remitimos al lector a los libros de matemáticas.

«Si borras el cuadrado que has dibujado (figura 1), ¿cuántos puntos del contorno necesitas para poder dibujarlo de nuevo?»

Si el problema te interesa —y suponemos que más de una vez habrás borrado accidentalmente un cuadrado—, puedes llegar a las siguientes conclusiones:

— Con un solo punto no es posible reconstruir el cuadrado.

— Con dos o más de dos puntos sí será posible, siempre que los puntos que queden cumplan determinadas condiciones.

— Con miles de puntos que quedaran el cuadrado podría no ser reconstruible.

Este problema-tema lo vamos a iniciar, pero no lo agotaremos.

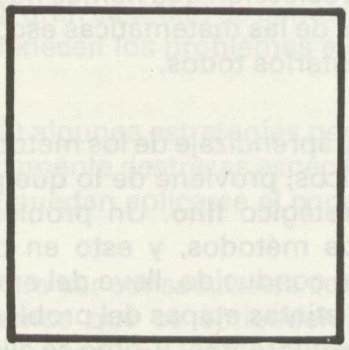


Figura 1

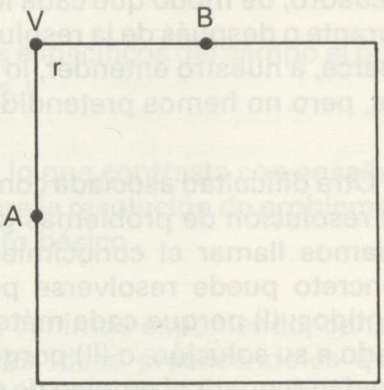


Figura 2

El método de los lugares geométricos

En los dos primeros casos que presentamos, haremos uso del método de los lugares geométricos (ver "Recuadro Lugares Geométricos").

Caso 1.°: «Dibujar el cuadrado si quedaron sin borrar los puntos medios de dos lados consecutivos.»

Al suponer el problema resuelto (figura 2), observamos:

(a) el vértice V es un punto que equidista de los puntos dados (A y B);

(b) desde V se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°.

Los puntos que equidistan de A y B están en la mediatriz de AB. Los puntos desde donde se ve un segmento bajo un ángulo recto están en una circunferencia de diámetro dicho segmento.

Por tanto, podemos pasar a la construcción efectiva (figuras 3 y 4):

Como la mediatriz y la circunferencia se cortan en dos puntos, hay dos soluciones (el vértice buscado puede ser V o V'). Por el tamaño, la solución es única y, frente a la situación problemática planteada, la solución es única (el vértice buscado es V, mientras que V' constituye una "solución parásita").

Caso 2.°: «Reconstruir el cuadrado conociendo cuatro puntos, uno de cada lado.»

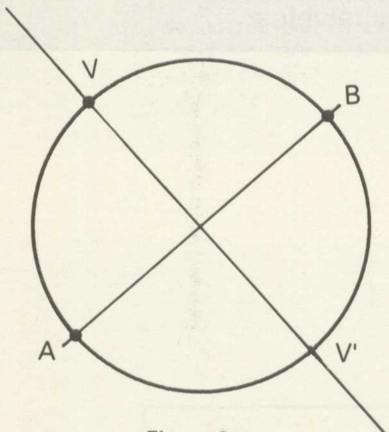


Figura 3

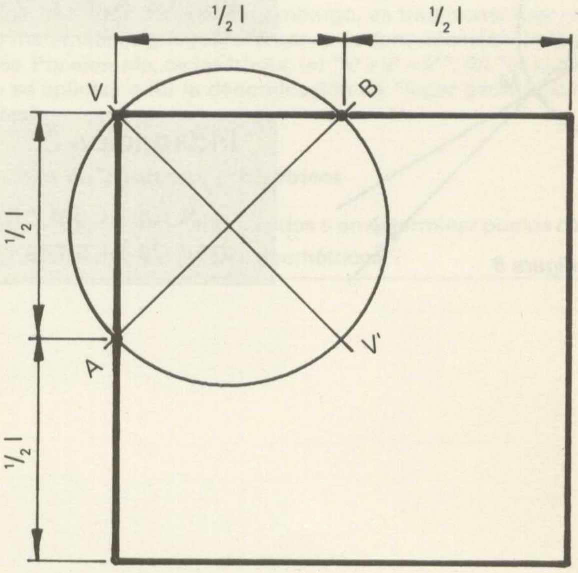


Figura 4

La figura de análisis (figura 5), obtenida al suponer el problema resuelto, permite afirmar que, si A, B, C y D son los cuatro puntos que quedaron sin borrar, entonces los vértices opuestos, V y V', están, respectivamente, en dos circunferencias de diámetros AB y DC. Si tenemos presente la idea de ángulo inscrito en una circunferencia, llegamos a la conclusión de que los puntos M y H, puntos medios de los arcos AB y DC, están en la diagonal VV' del cuadrado.

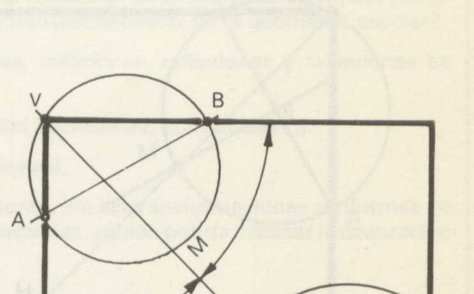


Figura 5

Para construirlos (figuras 6 y 7), dibujamos las circunferencias de diámetros AB y DC. Las respectivas mediatrices permiten determinar M y H.

La recta MH corta a las circunferencias en V y V′. Uniendo ordenadamente V y V′ con los puntos dados, recuperamos nuestro cuadrado.

Indagación 1.ª

¿Es única esta solución? ¿Qué ocurriría si los puntos M y H resultaran coincidentes (figura 8)? (Indicación: Las circunferencias serían tangentes y, por la situación problemática, los puntos A, B, C y D serían "muy particulares".)

Indagación 2.ª

A partir del problema-tema, intenta enunciar otros problemas de lugares geométricos y resuélvelos.

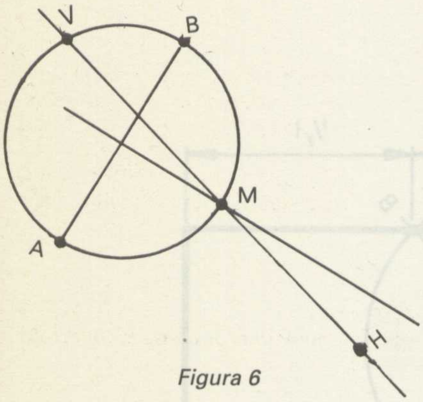


Figura 6

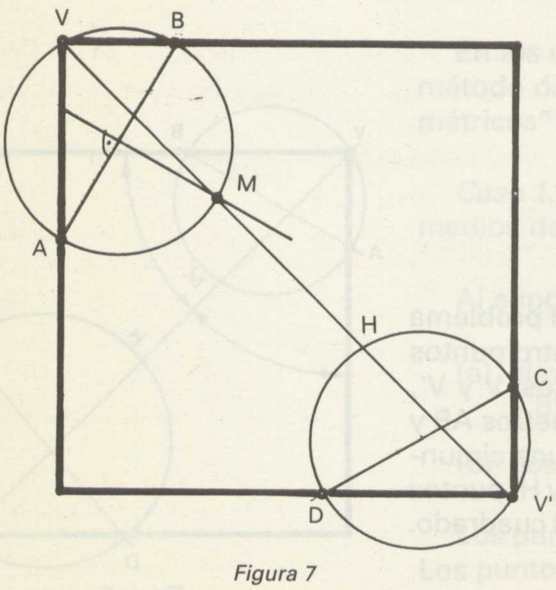


Figura 7

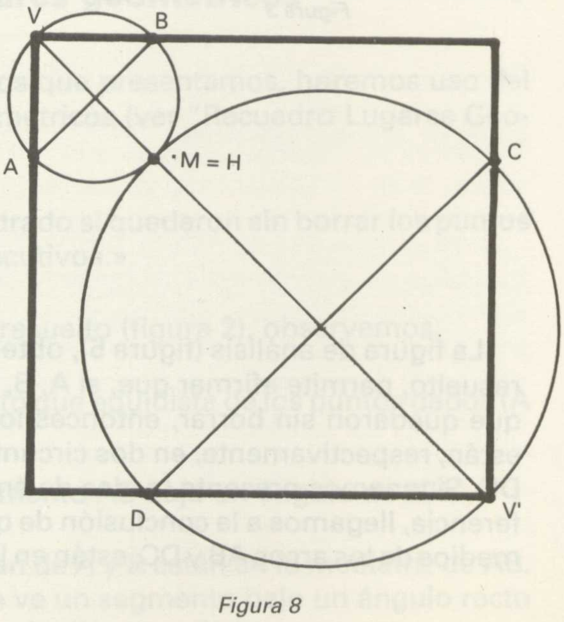


Figura 8

Recuadro: Lugares geométricos

Lugares geométricos

Al tratar de resolver problemas geométricos aparecen frecuentemente frases como "los puntos buscados equidistan de A y B", "desde V [que es un punto buscado] se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°", etc. Esas frases contienen incógnitas y nos interesa conocer qué puntos del plano las verifican.

Un lugar geométrico viene definido por una frase y es el conjunto de puntos que la verifican. Entre los lugares geométricos más elementales que conviene conocer y manejar mencionaremos: la circunferencia, la mediatriz, la bisectriz, el arco capaz de un ángulo (cuando éste mide 90°, el arco capaz recibe el nombre de "lugar geométrico de Thales").

Como todo conjunto, un lugar geométrico queda determinado cuando se puede asegurar (sin ninguna duda) si un punto cualquiera pertenece o no pertenece a él. La manera de conseguir tal determinación no tiene por qué ser única; por ejemplo, la circunferencia se puede definir de varios modos. Sin embargo, es tradicional (por reminiscencia del modo de trabajar de los grandes geómetras y matemáticos griegos) el reservar la denominación de "lugar geométrico" a los conjuntos determinados por propiedades. Por ejemplo, de las frases: (a) "$x^2 + y^2 = a^2$"; (b) "conjunto de puntos que equidistan de uno dado", sólo por tradición se aplicará a (b) la denominación de "lugar geométrico" (aunque, bajo ciertas condiciones, (a) y (b) sean equivalentes).

El método de los lugares geométricos

El procedimiento que consiste en usar lugares geométricos ya conocidos o en determinar puntos como intersección de lugares geométricos recibe el nombre de "método de los lugares geométricos".

Recuadro: Transformaciones geométricas

Transformaciones geométricas

Una transformación geométrica queda determinada cuando es posible relacionar de modo único cualquier punto del espacio con otro punto del mismo o de otro espacio. ¿Cuáles son las transformaciones de la geometría escolar?

— Las isometrías, que conservan distancias y ángulos (traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones en deslizamiento).

— Las semejanzas, que conservan la razón de distancias y los ángulos (isometrías, homotecias...).

— Las transformaciones conformes (isometrías, semejanzas, inversiones).

Las transformaciones geométricas no se estudian sólo por entretenimiento. Sin las transformaciones conformes no se podría disponer de mapas y cartas de navegación fidedignos. Sin las isometrías, ¿quién podría explicar la decoración de la Alhambra?

El método de las transformaciones geométricas

Consiste en aplicar una transformación a la figura objeto de estudio (o a parte de ésta) y observar si la nueva figura resuelve el problema de manera más fácil. Posteriormente, se deshará la transformación —es decir, se aplicará la transformación inversa— para obtener el resultado sobre la figura primitiva.

Las relaciones y datos que definen la figura sugerirán, con frecuencia, el tipo de transformación que más conviene. Por ejemplo, si se desea construir una figura de la que sólo conocemos una longitud y los restantes datos son razones entre otros segmentos o ángulos de aquélla, el tipo de transformación será una semejanza.

El método de las transformaciones geométricas

En muchas ocasiones, no basta con determinar un lugar geométrico para resolver un problema. Suele, entonces, ser útil "transformar" una figura para obtener resultados. Los dos siguientes casos que estudiaremos utilizan el método de las transformaciones geométricas (ver "Recuadro Transformaciones Geométricas").

Caso 3.°: «En esta ocasión, los puntos que no se han borrado son tres, están situados en lados consecutivos y el "punto central" es punto medio de su lado. ¿Se puede reconstruir el cuadrado?»

Con ayuda de un dibujo de análisis (figura 9), observamos que si A, B y C son los puntos conocidos, entonces V y V′ están en dos circunferencias de diámetros AB y BC. El simétrico de V, al aplicar la simetría de centro B (que no es otra cosa que la rotación de centro B y ángulo 180°), es V′. Si aplicamos esta simetría a la circunferencia de diámetro AB, se obtiene otra circunferencia que pasa por V′ (figuras 10, 11, 12 y 13).

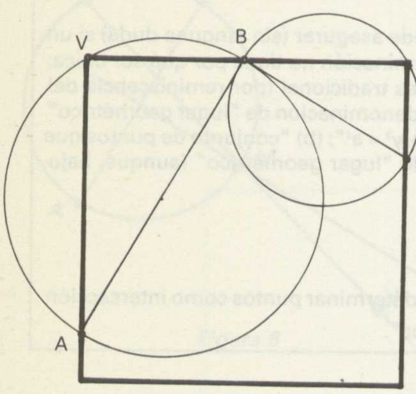
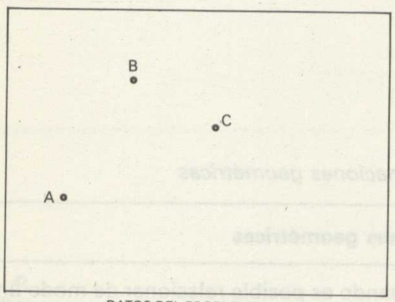


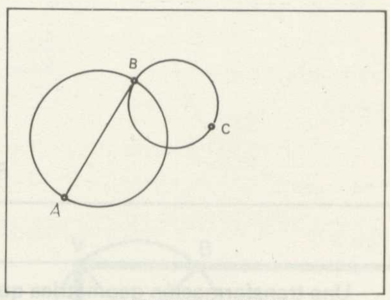
Figura 9

Observa que la circunferencia simétrica no la determinamos "punto a punto", sino hallando el simétrico del punto A y el simétrico del centro de su circunferencia. Al aplicar la simetría al punto V′ obtenemos V. Ya sólo queda unir V con A y V′ con C para obtener los lados; como VV′ es la medida del lado, podemos terminar la construcción.



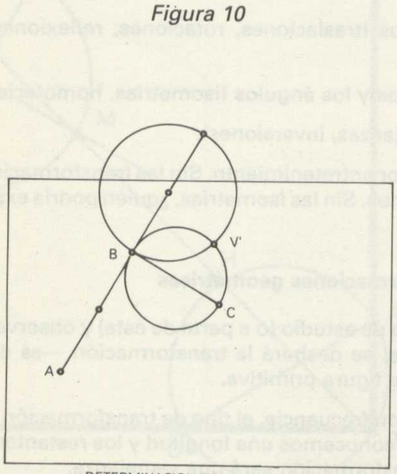
DATOS DEL PROBLEMA

Figura 10



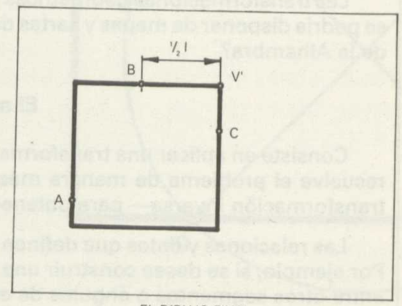
LUGARES GEOMETRICOS

Figura 11



DETERMINACION DE V′ MEDIANTE
LA CIRCUNFERENCIA SIMETRICA

Figura 12



EL DIBUJO FINAL

Figura 13

Indagación 3.ª

El enunciado (Caso 3.°) garantiza la existencia de solución y el método seguido garantiza su unicidad. Pero puede darse una situación más general: Dados tres puntos cualesquiera del plano, ¿se puede encontrar un cuadrado que cumpla las condiciones del enunciado? Describe todos los casos posibles.

Caso 4.°: «Determina el cuadrado borrado cuando se conocen tres puntos situados sobre lados distintos y dos de ellos equidistan de un vértice.»

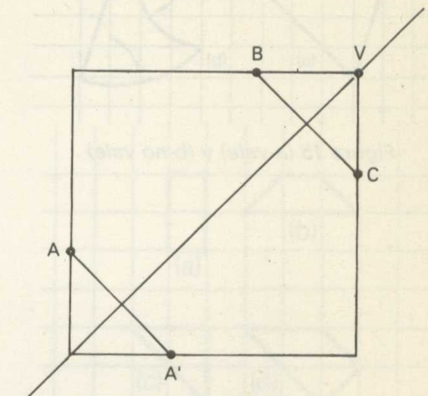


Figura 14

Si B y C son los puntos que, en el dibujo de análisis (figura 14), equidistan del vértice V, la mediatriz de BC será una diagonal del cuadrado. La simetría de eje esa mediatriz transforma el punto dado A en A'; éste está situado en el cuarto lado. El problema propuesto queda reducido al del Caso 2.°

Indagación 4.ª

Termina la resolución del Caso 4.° y discute las posibles soluciones.

Indagación 5.ª

Enuncia, partiendo del problema-tema, otros problemas que requieran el uso de transformaciones geométricas y resuélvelos.

Cálculo de áreas con una cuadrícula

En matemáticas se usa la palabra "inducción" en varios sentidos. Uno de ellos se corresponde con el significado de "demostración"; otro, con el de "generalización", y un tercer sentido, digamos el ortodoxo, corresponde al significado del teorema o principio de inducción (ver "Recuadro Inducción"). Ejemplificaremos el método de inducción matemática, basado en este último significado, con un estudio de la fórmula de Pick. Ejemplificaremos también cómo se puede poner de manifiesto la inadecuación de un método a la resolución de un problema: ¡aplicándolo correctamente! Confiamos en el lector para que el enorme "prestigio" y potencial, tantas veces demostrado, de la inducción no queden empañados por el uso que aquí hacemos de ella.

Problema-tema:

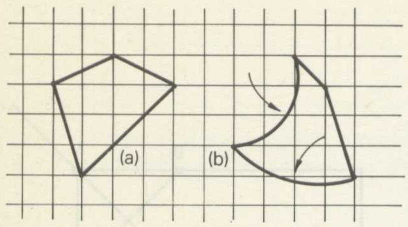


Figura 15 (a-vale) y (b-no vale)

«Utilizando una cuadrícula, ¿puedes calcular el área de una región del plano?»

Bueno, la pregunta es algo ambigua. ¿Cómo he de utilizar la cuadrícula? ¿De qué regiones estamos hablando? Precisemos:

Las regiones del plano que vamos a utilizar están delimitadas por lados rectilíneos (figura 15), que no se tocan más que en los nudos de la cuadrícula (figura 16).

La cuadrícula puedes usarla a tu antojo.

¡Qué estupidez!, dirá algún alumno. Pues no tengo más que descomponer la región en cuadrados y triángulos, calcular sus áreas y sumarlas (figura 17).

De momento, la idea es correcta y permitirá al profesor practicar algunas fórmulas (lado x lado, base x altura/dos) y otras ideas (disecciones elementales, aditividad de áreas). Así estará en condiciones de "centrar" mejor la cuestión. Por ejemplo, con la siguiente Indagación.

Prólogo I al método de inducción: ¡conjeturar!

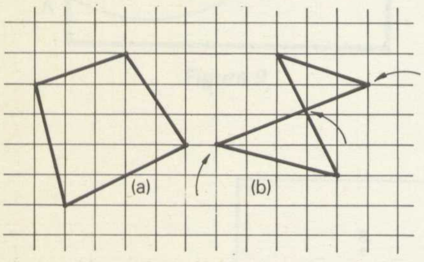


Figura 16 (a-vale) y (b-no vale)

Indagación 6.ª

6.1. Halla el área de cada una de las figuras dibujadas en la cuadrícula (figura 18).

6.2. Como también interesa prestar atención a los nudos, rellena la siguiente tabla (tabla 1).

Tabla 1

Figura	Número de nudos en EL CONTORNO	Número de nudos en EL INTERIOR	Valor del área
18.a			
18.b			
18.c			
18.d			
18.e			
18.f			
18.g			
18.h			
18.i			
18.j			
18.k			

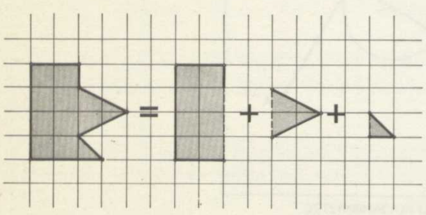


Figura 17. Ejemplo de cálculo de áreas

6.3. ¿Observas alguna regularidad entre el número de nudos y el valor del área? En caso afirmativo, intenta expresarla con palabras o con fórmulas.

Es de esperar que ningún alumno "dé" con la fórmula de Pick. Lo más probable es que simplifiquen el problema (usando, conscientemente o no, un heurístico del que ya hemos hablado) y respondan a 6.3 con una frase como ésta: "Cuando hay un nudo interior, el área vale la mitad del número de nudos del borde." ¡Magnífica conjetura!

Es un buen momento para introducir notaciones. Designaremos el área de la región con c nudos en el contorno e i nudos en el interior por

$S_{c,i}$.

Según esto, la conjetura vendrá dada por la fórmula

$S_{c,1} = c/2$ ["conjetura 1"]

Conviene comprobarla en algunos casos más. Después el profesor puede continuar en la línea de mejorar la conjetura, salvando lo que tiene de válido:

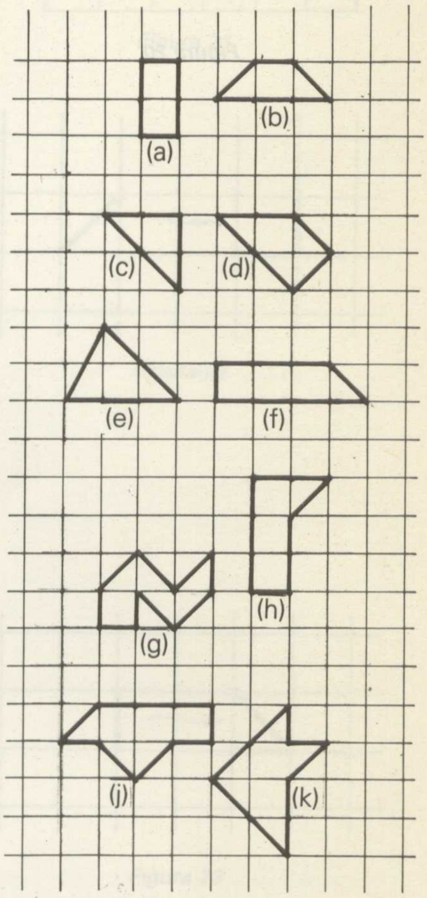


Figura 18

Indagación 7.ª

7.1. Dibuja en la cuadrícula (figura 19, con un ejemplo) cuatro figuras en cuyo contorno haya, respectivamente, 3, 4, 5 y 6 nudos y que no tengan nudos en su interior.

7.2. Ahora completa la siguiente tabla (tabla 2).

Tabla 2

Figura	Número de nudos en EL CONTORNO	Número de nudos en EL INTERIOR	Valor del área
19.a		0	
19.b		0	
19.c		0	
19.d		0	
19.e	7 (ejemplo)	0	2.5

7.3. Busca alguna regularidad manteniendo la expectativa de que aparezca en tu fórmula el "c/2".

El profesor no tardará mucho tiempo en escuchar la frase (mal dicha) "¡ce menos uno partido dos!", con lo que podrá repasar un poco la escritura de expresiones algebraicas sencillas hasta llegar a la expresión

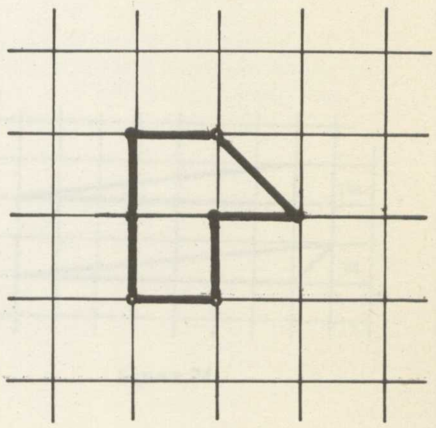


Figura 19

i = 0	$Sc_0 =$
i = 1	$Sc_1 =$
i = 2	$Sc_2 =$
i = 3	$Sc_3 =$

Figura 20

$S_{c,0} = c/2 - 1.$ ["conjetura 0"]

Repitiendo el proceso en los casos i=2 e i=3, llegaremos, respectivamente, a las siguientes expresiones:

$S_{c,2} = c/2 + 1$ ["conjetura 2"]

y

$S_{c,3} = c/2 + 2.$ ["conjetura 3"]

Al ordenar las conjeturas con ayuda de un pequeño dibujo (figura 20), el profesor se regalará el oído cuando oiga

$S_{c,i} = c/2 + i - 1,$

que llamaremos "conjetura Pick".

Prólogo II al método de inducción: ¡desconfiad!

Quizá deberíamos ser menos caricaturescos y titular esta segunda fase:

"Preparar el procedimiento a seguir". Por lo general, la experiencia demuestra que es durante la preparación cuando se cometen los errores más graves y más "ingenuos", que, sin embargo, invalidan el razonamiento por inducción propiamente dicho. Por eso hemos preferido poner un título más llamativo.

¿Por qué hemos de desconfiar? ¿De qué? En general, sistemáticamente de dos cosas:

(i) del contexto de nuestra(s) conjetura(s) y

(ii) de "lo que no esté a la vista" en el paso del "caso n" al "caso n+1". Por lo que respecta a (i), hay una diferencia importante entre las conjeturas "0", "1", "2", etc., y la "conjetura Pick". En las primeras, i, el número de puntos del interior está fijo, mientras que, en la última, i es "tan" variable como lo puede ser c, el número de puntos del contorno. Cuando i sea fijo, hablaremos de "conjetura i"; de lo contrario, nos estaremos refiriendo a la "conjetura Pick". ¡Ambas conjeturas, "i" y "Pick", vienen dadas por la misma fórmula, pero son distintas!

Por lo que respecta a (ii), observaremos que, en el caso de la "conjetura i", la situación puede describirse, si nos fijamos en el número de puntos del contorno, así:

$$c \longrightarrow c+1$$
$$S_{c,1} \longrightarrow S_{c+1,1}$$

Sin embargo, hay una "variable oculta": el número de puntos no caracteriza de modo único a la región (figura 21).

Dos regiones con el mismo c pero de distinta forma por tanto, el paso de c a c +1 puede hacerse, en principio, de muy diversas formas; ¿intervendrá esto en el método de inducción? Para responder, conviene examinar todos los casos posibles; hecha la cuenta, resulta que sólo aparecen dos posibilidades:

(I) el nuevo nudo del contorno obliga a transformar una diagonal en dos lados rectos (figura 22);

(II) el nuevo nudo obliga a transformar un lado recto en una diagonal y otro lado recto (figura 23).

En ambos casos podemos cerciorarnos —sin que esto demuestre nada— de que el aumento de área vale 1/2. De este modo, tenemos un argumento muy fuerte para afirmar que la manera de pasar de c a c+1 no incidirá de forma crítica en el proceso de demostración que sigamos.

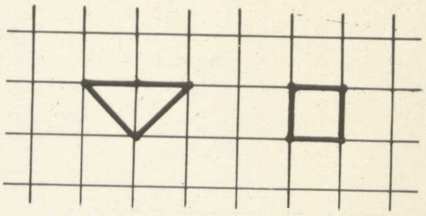


Figura 21

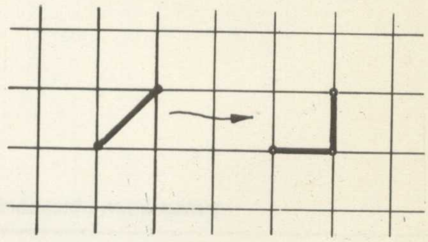


Figura 22

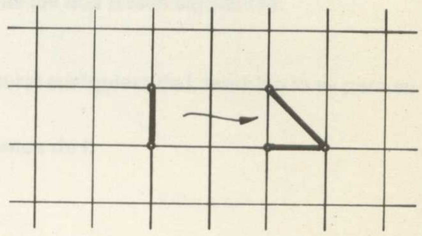


Figura 23

Indagación 8.ª

La propiedad que queremos demostrar depende de dos números naturales. Efectuando algunos ensayos con dibujos, estudia la dependencia o independencia de estos números. Conjetura acerca de la posibilidad de demostrar la "conjetura Pick" por el método de inducción.

Al fin: ¡usar el procedimiento!

Recurrencia sobre el número de puntos del contorno

El objetivo es demostrar la "conjetura 0". Para ello, seguiremos las dos etapas del método de inducción:

Etapa 1.ª: No se puede dibujar una región cuando c vale menos de 3. Así que:

$S_{3,0} = 3/2 - 1 = 1/2$

Conclusión: La propiedad es cierta para c = 3 (figura 24).

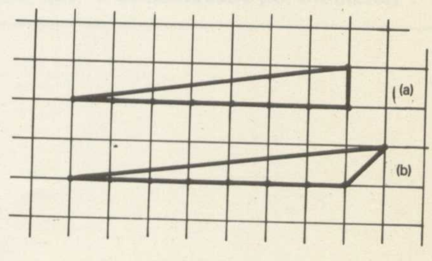


Figura 24

Esta comprobación es una fase tan esencial como sencilla y "olvidada" del método de inducción.

Etapa 2.ª: Supongamos ahora que, cuando c va tomando los valores sucesivos 4, 5, 6..., k, la fórmula conjeturada sigue cumpliéndose. ¿Podemos establecer su validez para el siguiente valor de c, es decir, k + 1?

La respuesta es sencillamente afirmativa: El paso de una figura de k nudos en el contorno a otra de k + 1 no puede hacerse más que por adición de un triángulo, pues la nueva figura tiene que compartir dos vértices consecutivos con la figura de k nudos[1]. Precisamente acabamos de comprobar que el área del triángulo añadido vale 1/2 (caso c = 3). Por tanto:

$$S_{k+1,0} = S_{k,0} + 1/2 = k/2 - 1 + 1/2 = (k + 1)/2 - 1.$$

Al superar con éxito la segunda etapa, el método de inducción nos permite "elevar" la conjetura al rango de teorema (proposición demostrada): el área de cualquier región del plano que tiene c puntos en el contorno y 0 puntos en el interior vale c/2 - 1. ¿Seguro?

Indagación 9.ª

9.1. En la figura 24, las regiones (a) y (b) tienen ambas ocho puntos. ¿Se podría decir que la segunda se obtiene de la primera por adición de un triángulo (en el sentido de la Etapa 2.ª)? ¿Invalida esto la demostración efectuada? ¿La limita?

9.2. Demuestra, con un ejemplo, la existencia de regiones (sin puntos interiores) que no se pueden obtener por aplicación del método de inducción. (Indicación: comienza por el caso más sencillo...)

9.3. Concluye que es conveniente precisar el sentido de "región" —ya discutido al principio— de modo que esté constituida sólo por lados que sean "horizontales", "verticales" o "diagonales de cuadrados".

9.4. Compara el tipo de región al que se aplica la "conjetura 0" con el tipo de región abarcado por la demostración efectuada.

Indagación 10.ª

¿Se demostraría por inducción la "conjetura 1"?

(Indicación. Las dificultades aparecerán cuando analices cómo se puede pasar de una región del tipo $S_{c,1}$ a otra del tipo $S_{c+1,1}$. La región de partida tiene, por la propia estructura de la propiedad a demostrar, un nudo en el interior; la única operación que podemos hacer, al añadir un nudo en el contorno, coincide con la operación que hicimos en el caso de la "conjetura 0". Las restantes limitaciones se mantienen.)

[1] La condición no basta, debido a que el nuevo vértice podría provocar la aparición de nudos en el interior. Esta posibilidad queda excluida, no obstante, por el propio ámbito de validez de la "conjetura 0"; si ocurriera, sería rechazable, ya que exigimos, de momento, que i=0.

¿Cuál es "el problema"?

El objetivo era demostrar la "conjetura Pick" por el método de inducción. Hemos llegado a la conclusión (usando c como variable) de que no podemos barrer todas las regiones del plano que tienen i constante. Por tanto, la "conjetura i" sólo quedará demostrada en clases (ciertamente, muy amplias) de regiones del plano, pero no en todas. Se deduce, por tanto, que las dificultades que estamos afrontando vienen más de la inadecuada elección del método que del propio método (¡ha sido su uso correcto lo que nos ha permitido poner de manifiesto las dificultades!).

Si deseas ver una demostración de la "conjetura Pick", te sugerimos la lectura de *Fundamentos de Geometría*, por H. S. M. Coxeter (trad. R. Vinós), Limusa-Wiley, S. A. México, 1971.

Recuadro: El método de inducción matemática

La inducción matemática es una proposición acerca de los números naturales según la cual *«toda propiedad perteneciente a 0 y al sucesor de cualquier número que tenga la misma propiedad, es una propiedad de todos los números naturales»*. (Este enunciado es de B. Russell.)

En su forma más usual, el método de inducción no es otra cosa que la generalización de la cita anterior. "Demostrar por inducción" es una expresión usada para designar el siguiente procedimiento:

Sea P una propiedad definida sobre el conjunto I de los naturales superiores o iguales a un natural dado n_0, y supongamos verdaderas las dos frases siguientes:

1. La propiedad P, al aplicarla a n_0.
2. De ser cierta la propiedad P para un natural cualquiera de I, también lo es para su sucesor.

Entonces, P es cierta para todos los elementos de I.

Advertencias:

1. El método de inducción no es un método que deba practicarse "alegremente"; corresponde al más elemental paso de lo finito a lo infinito.
2. La descripción del método *no dice* cómo ha de obtenerse la propiedad P. Por lo general, esto se consigue mediante heurísticos de ensayo y error que permiten enunciar una conjetura. Si la conjetura pasa, correctamente, el "filtro" del método de inducción, entonces es cuando estamos en condiciones de afirmar que hemos hecho una demostración por inducción.
3. Los matemáticos aplican muy pocas veces explícitamente este método. Si se exceptúan las circunstancias en las que el método pone a prueba su inventiva, suelen limitarse en sus escritos a afirmar que "P se demuestra por inducción".

Un cuadrado entre dos rectas

Descartes mostró el camino que condujo a estudiar la geometría utilizando el álgebra: pasa ésta a ser una "herramienta" que permite justificar propiedades o descubrir otras nuevas. Desde un punto de vista teórico, los problemas de geometría se pueden hacer empleando coordenadas; sin embargo, ¡cuántas veces nos quedamos con el problema planteado y no somos capaces de terminarlo! Para evitar esto, muchos profesores aconsejan que se empiece por hacer un estudio profundo del problema como si no se fuesen a emplear coordenadas; esto siempre conduce a plantear ecuaciones más simples que las que se obtienen sin pasar por dicha etapa. Es también interesante, una vez hecho el problema con coordenadas, el tratar de resolverlo sin usarlas, pero teniendo presentes los resultados obtenidos.

En este apartado resolveremos un problema de enunciado abierto, mientras que, en el próximo, abordaremos un problema-tema. En ambos casos ilustramos el uso de métodos algebraicos (ver Recuadro Métodos algebraicos).

Problema de enunciado abierto: «A, B, C, D, A', B', C' y D' son los vértices de un cubo; X es un punto de AC (diagonal de una cara) e Y es un punto de B'D' (diagonal de la cara opuesta, que se cruza con AC). Determinar el lugar geométrico de los puntos medios del segmento XY.»

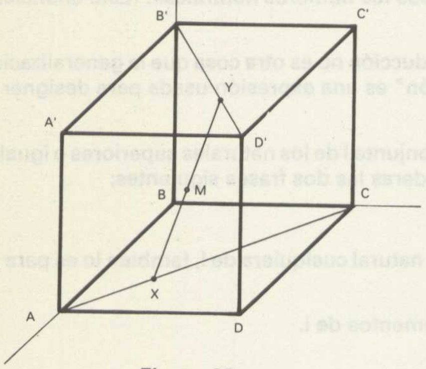


Figura 25

A la vista de una figura de análisis, parece razonable tomar el sistema de referencia indicado (figura 25); en tal caso, las coordenadas de A, C, B'

y D' serán:

A (1,0,0);   C (0,1,0);   B' (0,0,1);   D' (1,1,1).

Con ellas podemos escribir las ecuaciones paramétricas de las rectas mencionadas en el enunciado:

$$B'D': \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases} \qquad AC: \begin{cases} y = \beta \\ y = 1 - \beta, \\ z = 0 \end{cases}$$

(α y β son los respectivos parámetros reales). Como X es un punto del segmento AC, sus coordenadas se obtienen, en función de β.

X(β, 1-β, 0), con la condición: $0 \leq \beta \leq 1$.

Análogamente: Y (α, α, 1), con la condición: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ahora es fácil obtener las coordenadas del punto medio del segmento XY, así como las condiciones que deben satisfacer los parámetros; si designamos dicho punto por M:

$$M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}; \frac{1+\beta-\alpha}{2}; \frac{1}{2}\right), \text{ siendo } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ y } 0 \leq \beta \leq 1. \quad [1]$$

utilizando [1] es fácil escribir más ecuaciones del lugar geométrico pedido (en el sistema de referencia adoptado). Pero no podemos olvidar que el enunciado trata de figuras geométricas.

Indagación 11.ª

Comprueba, con ayuda de [1], que el lugar geométrico pedido es un cuadrado, cuyos vértices son los centros de las otras cuatro caras del cubo.

Recta busca nudos

Problema-tema:

«¿Cuándo podemos estar seguros de que una recta dada pasará por nudos de una cuadrícula?»

Empecemos con un caso particular:

«¿Hay algún nudo de la cuadrícula en el segmento determinado por dos nudos dados?»

Para representar los nudos, lo primero que haremos es elegir un sistema de referencia. En la cuadrícula, definida por cuadrados de lado unidad, tomamos un "nudo origen" (un nudo cualquiera) y un par de rectas perpendiculares como ejes de coordenadas (figura 26).

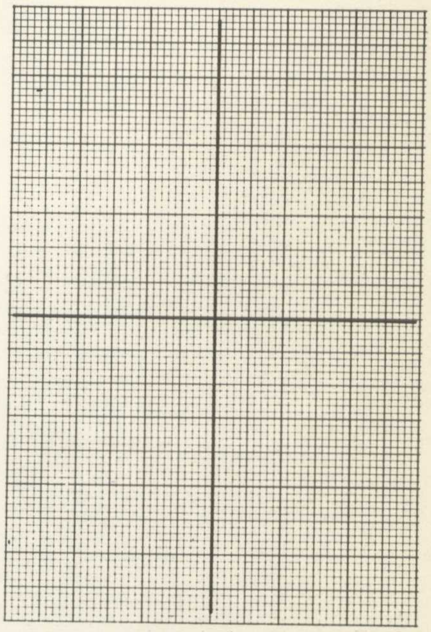


Figura 26. Cuadrícula con el sistema de referencia elegido

En esa referencia, todos los nudos de la cuadrícula tienen como coordenadas un par de números enteros y recíprocamente. Si dibujas los nudos A y B de coordenadas (2,4) y (5,6), respectivamente, comprobarás rápidamente que en el segmento definido por ellos no hay ningún otro nudo.

La comprobación efectuada, aunque es correcta, resulta poco práctica, pues en cuanto las coordenadas de los nudos fueran números "grandes" habríamos de usar una cuadrícula poco manejable.

Indagación 12.ª

En el segmento determinado por los nudos A(5,18) y B(61,81) ¿hay algún otro nudo de la cuadrícula?

Trataremos de responder sin dibujar los puntos en la cuadrícula. Como los nudos tienen coordenadas enteras, el problema es equivalente a este otro:

«¿Existe una pareja de números enteros (x,y) tal que el punto P(x,y) esté alineado con los puntos A y B?»

P estará alineado con A y B si las coordenadas de P verifican la ecuación de la recta, r, determinada por A y B.

Indagación 13.ª

Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los nudos A y B.

Para cada valor entero del parámetro obtienes valores enteros de x e y, es decir, un nudo de la cuadrícula, ya que las coordenadas de A (y las de B) son enteras. El que un nudo esté en la recta r no significa que pertenezca al segmento AB.

Indagación 14.ª

14.1. ¿Para qué valores del parámetro los nudos obtenidos están en el segmento AB?

14.2. ¿Cuántos nudos hay en el segmento AB?

Indagación 15.ª

Elige un sistema de referencia tal que los nudos de la cuadrícula no tengan coordenadas enteras, por ejemplo A(0.5, 0.5) y B(9.5, 3.5). ¿Cuántos nudos hay en el segmento AB?

Para generalizar el problema a cualquier pareja dada de nudos de la cuadrícula, distinguiremos, una vez elegido el sistema de referencia, dos etapas:

— "Ver" si hay nudos de la cuadrícula en una recta dada.

— En el supuesto que existan, determinar sus coordenadas.

Indagación 16.ª

¿Pasa la recta de la ecuación $3x + 6y = 5$ por algún nudo de la cuadrícula?

El comprobarlo (representando gráficamente la recta) no es viable ante la imposibilidad de dibujarla entera. El procedimiento de la Indagación 12.ª tampoco sirve, ya que habríamos de conocer un punto de la recta que fuera nudo.

Supongamos que el nudo (a,b) pertenece a la recta. Ha de verificarse que:

$$3a + 6b = 5$$

el máximo común divisor de 3 y 6, m.c.d.(3,6), divide a 3 y a 6, luego divide a la suma 3a y 6b y por consiguiente ha de dividir a 5.

Dado que el m.c.d.(3,6) es 3 y que tres no divide a cinco, llegamos a una contradicción, lo que permite afirmar que no hay ningún nudo en la recta dada.

Indagación 17.ª

¿Hay algún nudo de la cuadrícula en la recta de ecuación $4x + 6y = 8$?

Si nos basamos en lo anterior, sólo podemos afirmar que es posible, pero no somos capaces de asegurarlo, ya que, "en lenguaje de los matemáticos", sólo hemos obtenido una condición necesaria e ignoramos si también es suficiente.

Si dividimos la ecuación de la recta por 2, m.c.d(4,6), obtenemos la ecuación: $2x + 3y = 4$, cuyos coeficientes son enteros.

Como el m.c.d(2,3) es 1, existen dos números enteros n, m tales que:

$$2n + 3m = 1 \qquad [2]$$

Indagación 18.ª

Encuentra los números n y m que verifican la igualdad [2].

Multiplicando los dos miembros de [2] por 4 se tiene

$(2n)4 + (3m)4 = 4,$

que podemos escribir

$2(4n) + 3(4m) = 4;$

luego $x = 4n$, $y = 4m$ son soluciones de la ecuación $2x + 3y = 4$; por tanto, la recta pasa por el nudo $(4n,4m)$, y podemos afirmar que la condición necesaria es también suficiente (teorema de Bezout).

Queda resuelta, pues, la primera etapa: hemos encontrado una manera cómoda de “ver” si hay nudos de la red en una recta dada.

Para hallarlos todos, basta con encontrar uno cualquiera, (x_0,y_0); con él, escribiremos la ecuación en forma paramétrica.

Indagación 19.ª

Obtener un nudo de la red que pertenezca a la recta de ecuación

$7x + 3y = 5$

Como m.c.d (7,3) = 1, se cumple la condición necesaria y suficiente, lo que permite asegurar que existen dos números enteros que verifican la ecuación anterior. Para encontrarlos se puede proceder de la siguiente manera: despejamos la incógnita cuyo coeficiente es menor en valor absoluto. En este caso la y:

$$y = \frac{7 - 7x}{3} \qquad [3]$$

Indagación 20.ª

Obtener valores enteros para x e y que verifiquen [3].

Para facilitar la búsqueda, se puede escribir la expresión [3] de la forma:

$$y = \frac{3 + 2 - 6x - x}{3} = 1 - 2x + \frac{2 - x}{3}$$

Para que y sea entero, basta que 2-x sea múltiplio de 3, lo que ocurre si, por ejemplo, x = -1. Luego un nudo de la red es (-1,4).

Indagación 21.ª

21.1. Comprueba que la recta de la indagación anterior pasa por los nudos A(-4,11) y B(20,-45).

21.2. ¿Cuántos nudos de la red pertenecen al segmento AB?

En las Indagaciones 22 y 23 se sugieren dos posibles generalizaciones:

Indagación 22.ª

¿Qué ocurriría si se eligiera un sistema de referencia que "no se adapta" a la cuadrícula (debido, por ejemplo, a que su origen no sea un nudo, o a que los ejes no sean perpendiculares, o a ambas cosas a la vez)?

Indagación 23.ª

¿Qué ocurriría si los coeficientes A, B, C de la recta no fueran números enteros?

Recuadro: Métodos algebraicos

La imposibilidad de ciertas construcciones con determinadas herramientas (ver capítulo 5.°) o la inevitable imprecisión de los resultados obtenidos por procedimientos gráficos hacen necesario apelar a nuevos recursos más generales y exactos (aunque, para algunos, "menos estéticos"). En todos ellos se utiliza el álgebra, por lo que reciben el nombre de "métodos algebraicos".

Lo esencial de estos métodos es un proceso de "traducción": a cada punto del plano (respectivamente, del espacio) se le asociarán, mediante un sistema de referencia, dos (respectivamente, tres) números con los que se podrá operar siguiendo las reglas del álgebra.

Hay muchos tipos de coordenadas; las más corrientes son:

- en el plano
  - cartesianas
  - polares
- en el espacio
  - cartesianas
  - polares
  - esféricas
  - cilíndricas

Lo principal es decidir qué coordenadas elegir ante cada problema. (Hay muchos "preceptos" al respecto en los manuales.)

Una vez realizado el proceso de "traducción" bastará, por lo general, con unos pocos conocimientos esquemáticos y operativos para resolver un problema. Según sea éste, podrá convenir retraducir la solución a la jerga geométrica en que se dio el enunciado.

Al objeto de no alargar este recuadro, comentaremos brevemente el método algebraico —de la teoría de números— para la resolución de ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, ya que esta ecuación aparece en el problema-tema "Recta busca nudos".

La condición necesaria y suficiente para que tengan solución es que el m.c.d (A,B) divida a C.

Para encontrar las soluciones, se escribe la ecuación dada en forma paramétrica:

$$x = a - Bt$$
$$y = b + At$$

Si a y b son enteros, es claro que, para cada valor entero del parámetro t, tendremos valores de x e y que serán solución de la ecuación. El problema se reduce a encontrar los valores particulares a y b. Una forma de obtenerlos es despejar, en la ecuación dada ($Ax+By=C$), la incógnita cuyo coeficiente es el menor en valor absoluto. Supongamos, por ejemplo, que es x:

$$x = \frac{C - By}{A}$$

Entre los números C - B1, C - B2..., C - B (A-1), siempre hay uno que es múltiplo de A; sea éste C - Bi. Tomando y = i tenemos la solución buscada.

Indagación 24.ª

Describe los métodos trigonométricos.

El problema del tesoro

Este problema se propone a modo de resumen de algunos de los métodos descritos hasta ahora. También da entrada a los métodos trigonométricos.

Problema-tema:

«Un emigrante inglés oyó en una taberna de Melbourne una conversación que mantenían dos individuos:

—Si pudiera encontrar el campo correcto, el tesoro sería mío.

—¿Cómo procederías?

—El documento que cayó en mis manos establece claramente que el campo es cuadrado y que el tesoro está enterrado en un punto que dista dos estadios[1] de una de las esquinas del campo, tres estadios de la siguiente esquina y cuatro de la siguiente a ésta. En ese distrito no hay dos campos cuadrados iguales. Si supiera cuál es el lado del campo en que está enterrado el tesoro podría encontrarlo.

—Pero no sabrías desde qué esquina empezar a cavar, ni tampoco qué esquina tomar después.

—Mi querido amigo, no me importaría hacer todas las tentativas necesarias. El tesoro merece la pena.»

¿Buscamos juntos el tesoro?

Indagación 25.ª

Si supieras cuál es el campo, ¿cuántas tentativas, como máximo, tendrías que hacer para encontrar el tesoro?

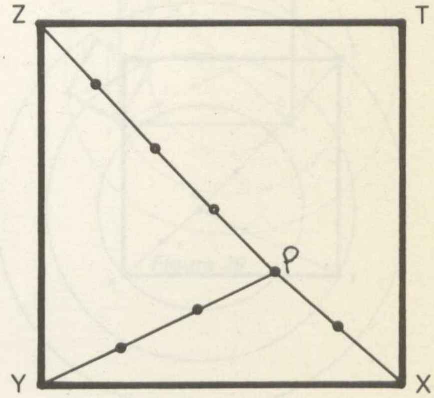


Figura 27

Para encontrar el lado del campo, el emigrante imaginó que conocia dónde estaba el tesoro (supuso el problema resuelto) e hizo un dibujo a partir de la conversación oída (figura 27). P representa el punto en que se encuentra el tesoro.

El heurístico "hacer una figura de análisis" da buenos resultados en casi todos los problemas, pues sirve para relacionar de manera cómoda los datos conocidos del problema con el dato a determinar. En el caso que nos ocupa, los datos conocidos son:

---

[1] Un estadio mide 201 metros.

distancia de X a P, dos estadios;

distancia de Y a P, tres estadios; [4]

distancia de Z a P, cuatro estadios.

El dato a determinar es el lado l del cuadrado.

Aplicando relaciones de desigualdad entre los lados de un triángulo a los triángulos PXY, PYZ, PZX (figura 27), logró encontrar dos valores entre los que debía estar el lado del cuadrado.

Indagación 26.ª

Encuentra dos valores tales que su diferencia sea la menor posible y que el lado del cuadrado esté comprendido entre ellos.

El emigrante comprobó que existían demasiados campos cuyo lado estaba comprendido entre los valores que había obtenido. En lugar de cavar en ellos y confiar en la suerte decidió seguir pensando y tratar de limitar más el número de posibles campos.

De los datos (frases [4]), el emigrante dedujo que los puntos X, Y y Z debían estar sobre tres circunferencias de centro el punto P y de radios 2, 3 y 4 estadios, respectivamente.

Ya podemos asegurar que los cuatro puntos buscados están en la región delimitada por la circunferencia de radio 4 estadios y que sobre cada una de las circunferencias hay un vértice. Nos vemos, así, conducidos a afirmar que pretendemos

«construir un cuadrado de vértices X, Y, Z, T de manera que los tres primeros pertenezcan, respectivamente, a las circunferencias de radios 2, 3 y 4 unidades y que el centro de las circunferencias sea interior al cuadrado» (figura 28).

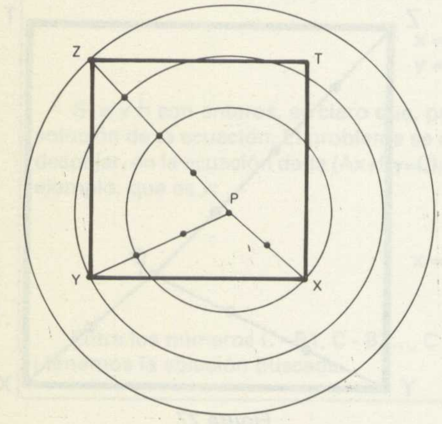


Figura 28

¿Cómo podemos construir el cuadrado de la figura 28? Ciertamente, tenemos aún dificultades para "ver" el cuadrado y es inútil dedicarse a "tantear" la posición de los vértices. Si decidimos que Y es un punto cualquiera de la circunferencia intermedia, ya no podremos tomar arbitrariamente X o Z, pues ha de cumplirse:

(*i*) distancia de Y a X = distancia de Y a Z;

(*ii*) ángulo XYZ = 90°; y

(*iii*) X está en la circunferencia de radio 2 y Z en la de radio 4.

A la vista de (*i*) y (*ii*), el emigrante pensó que Z es el transformado de X mediante un giro de centro Y y amplitud 90°.

Por ello, optó por transformar la circunferencia en la que debería estar el punto X, en la seguridad de que la intersección de ésta con la circunferencia de radio 4 (en la que debería estar el punto Z) determina el transformado de X. Como Y queda invariante, se obtiene el lado del cuadrado. Para efectuar la construcción geométrica efectiva correspondiente, basta con observar que la nueva circunferencia de radio 2 se obtiene rápidamente construyendo el transformado del punto P por el giro indicado.

Indagación 27.ª

27.1. Las circunferencias no se cortan en un único punto; por tanto, la solución obtenida no es única. Busca la solución que puede resolver el problema.

27.2. Toma como punto Y otro punto de la circunferencia intermedia y repite la construcción. ¿Qué observas?

Una vez construido el cuadrado, el emigrante aplicó la escala correspondiente, encontró el campo y el tesoro. ¡Nunca supo que había tenido mucha suerte!

Entre los descendientes del emigrante, que sabían la procedencia de su fortuna, existió siempre gran afición hacia las matemáticas. Uno de ellos se percató de la suerte que tuvo su antepasado cuando determinó el valor exacto del lado del cuadrado. En los triángulos XPY y YPZ (figura 29) aplicó a los lados de longitudes 2 y 4 estadios el teorema del coseno:

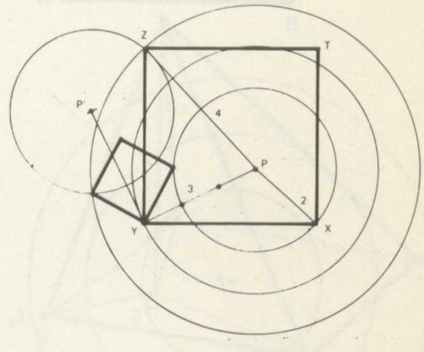


Figura 29

$$2^2 = 1^2 + 3^2 - 61\cos\alpha$$

$$4^2 = 1^2 + 3^2 - 61\cos\beta$$

Como $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, despejó en esas igualdades $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Utilizando la relación $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtuvo la ecuación que le permitió hallar para l los siguientes valores:

$$l = \sqrt{10 \pm 2\sqrt{17}},$$

buscó una solución que le permitió rechazar la solución más pequeña y determinó el valor exacto.

Indagación 28.ª

Determina el valor exacto del lado del cuadrado usando coordenadas.

Generalizaciones del Problema del tesoro

Indagación 29.ª

¿Existe siempre un cuadrado tal que las distancias de tres de sus vértices A, B, C a un punto P sean respectivamente d_1, d_2, d_3 ($d_1 \leq d_2 \leq d_3$)?

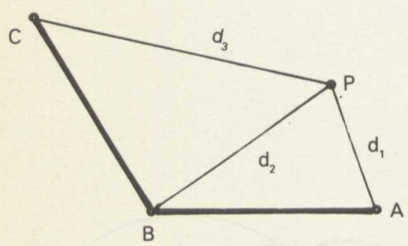
(Indicación: Observemos que el problema se reduce a hallar la intersección de dos circunferencias; por tanto, si no se cortan, el problema no tiene solución.

Como la distancia entre los centros de ambas circunferencias es $PP' = d_2.\sqrt{2}$ y sus respectivos radios son d_3 y d_1, si $d_2.\sqrt{2} < d_3 - d_1$ o $d_2.\sqrt{2} > d_3 + d_1$, el problema no tiene solución.

Si $d_3 - d_1 \leq d_2\sqrt{2} \leq d_3 + d_1$, entonces:

(a) Si se verifica alguna de las igualdades, las dos circunferencias son tangentes. El problema tiene solución única.

(b) Si se verifica la doble desigualdad, las dos circunferencias son secantes y el problema tiene dos soluciones.)



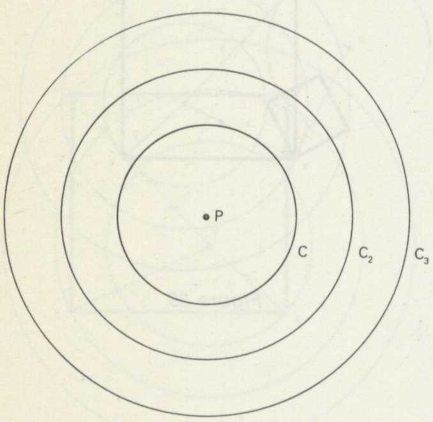


Figura 30

Indagación 30.ª

Dado un punto P, ¿existe un polígono regular de n lados tal que las distancias a P de tres vértices consecutivos sean respectivamente d_1, d_2, d_3? ($d_1 \leq d_2 \leq d_3$).

(Indicación: Ver figura de análisis (figura 30). Sean C_1, C_2, C_3 las circunferencias de centro P y de radios d_1, d_2, d_3, $A \in C_1$, $B \in C_2$, $C \in C_3$. El ángulo ABC mide 180.(n-2)/n y le llamaremos α.

Sea G[B, a] el giro de centro B y amplitud a. Se verifica:

$$A \xrightarrow{G[B, \alpha]} C \Longrightarrow C \in E\, C'_1$$

y

$A \in C'_1$

$C \in C'_1$ y $C \in C_3 \Longrightarrow C \in C'_1 \cap C_3$.

Para determinar C, basta tomar un punto B de C_2, hallar la circunferencia transformada de C_1, C'_1 y su intersección con C_3. Aplicando a C el giro de centro B y amplitud - α tenemos A, y ya podemos construir el polígono.

La distancia entre los centros de C_3 y C'_1 es

$PP' = 2.d_2.\text{sen}\ (90\ (n-2)/n)$.

Por tanto, para que el problema tenga solución debe verificarse (figura 31):

$d_3 - d_1 \leq 2.d_2.\text{sen}(90\ (n-2)/n) \leq d_3 + d_1$

Entonces:

(a) Si se verifica alguna de las igualdades, C_3 y C'_1 son tangentes y el problema tiene solución única.

(b) Si se verifica la doble desigualdad, C_3 y C'_1 son secantes y el problema tiene dos soluciones.

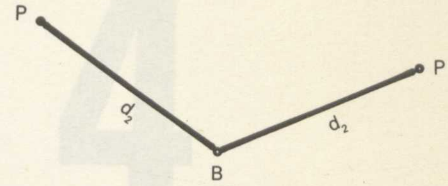


Figura 31

Indagación 31.ª

Dado un punto P del espacio, ¿existe una pirámide de vértice P y base cuadrada, tal que tres de sus aristas midan d_1, d_2, d_3?

(Indicación: Sea H la proyección ortogonal de P sobre el plano de la base (figura 32). Dada la altura PH=h, quedan determinadas $AH = d'_1$; $BH = d'_2$; $CH=d'_3$ como catetos de triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son d_1, d_2, d_3 y el otro cateto h. El problema se reduce a construir en el plano perpendicular a PH por H un cuadrado ABCD cuyos vértices disten de H, d'_1,d'_2,d'_3.

Así pues, dada la altura de la pirámide, ésta queda perfectamente determinada. Evidentemente, para que el problema tenga solución ha de ser $h<d_1$, $h<d_2$, $h<d_3$.)

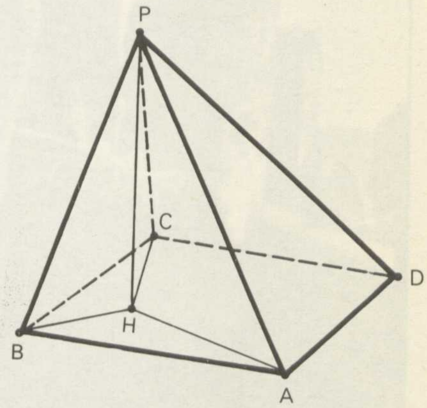


Figura 32

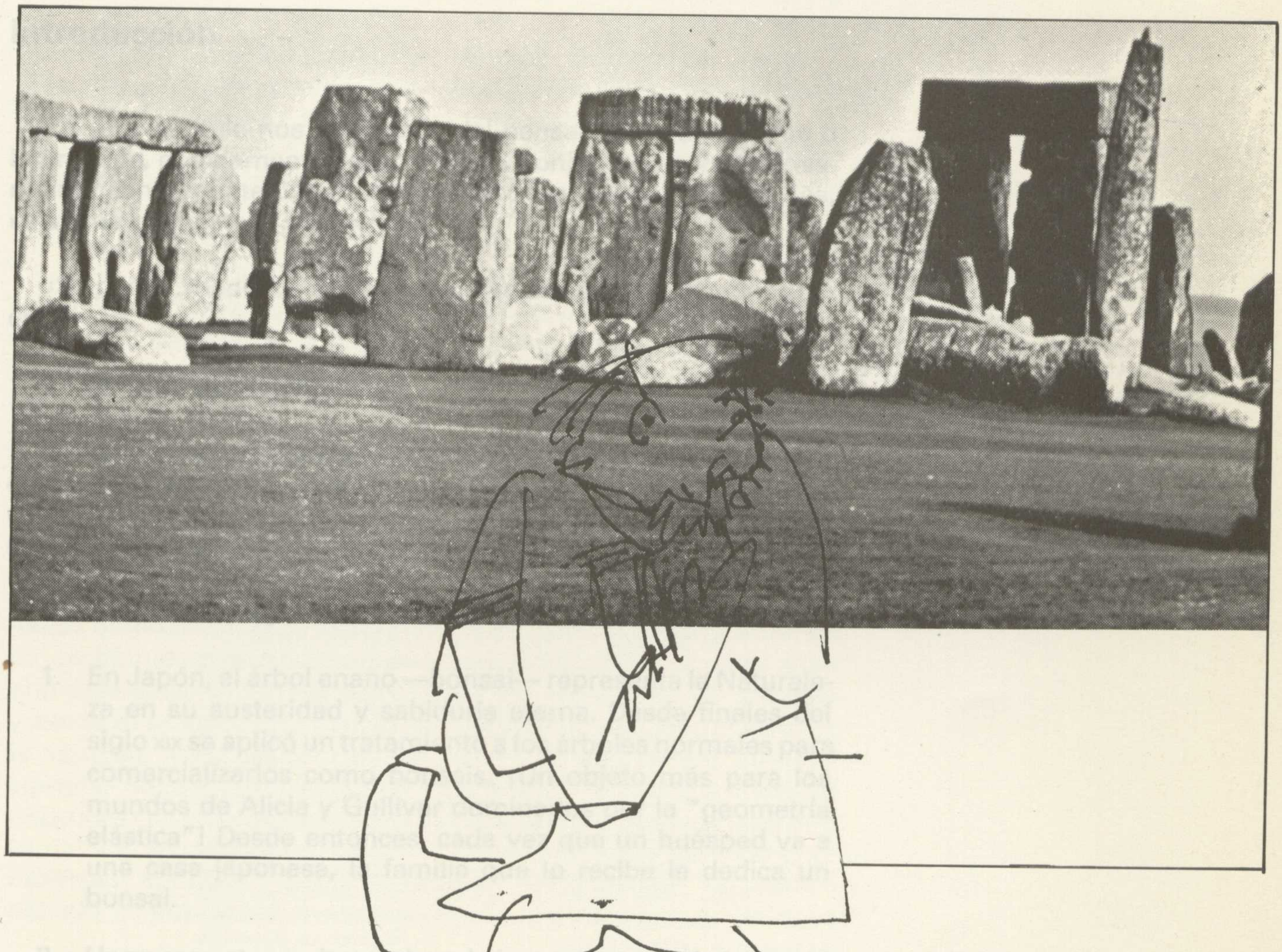
Indagación 32.ª

Dado un punto P del espacio, ¿existe una pirámide de vértice P y base un polígono regular de n lados, tal que tres de sus aristas consecutivas midan d_1, d_2, d_3?

(Indicación: Razonando análogamente, el problema se reduce a construir en el plano perpendicular a PH por H (proyección ortogonal de P sobre el plano de la base) un polígono regular de n lados, tal que tres vértices consecutivos disten de h, d'_1, d'_2, d'_3.)

4

de la creatividad y el cuadrado



«"Creatividad", una buena palabra ya por el hecho de que uno la ve como un movimiento incesante y esforzado.»

ELÍAS CANETTI

Introducción

En este capítulo nos ocupamos del pensamiento divergente o lateral que, debidamente desarrollado y conjuntado con el pensamiento convergente o deductivo, base de los restantes capítulos, es el que posibilita la creatividad.

¿Se puede, mediante el acto educativo, enseñar y aprender a ser creativo?

¿Y en clase de matemáticas?

En todo proceso creativo intervienen unas componentes tan difíciles de determinar como de observar separadamente. La originalidad, la imaginación, el "espíritu innovador" son los ejemplos más frecuentes.

Analicemos las siguientes situaciones:

1. En Japón, el árbol enano —bonsai— representa la Naturaleza en su austeridad y sabiduría eterna. Desde finales del siglo XIX se aplicó un tratamiento a los árboles normales para comercializarlos como bonsais. ¡Un objeto más para los mundos de Alicia y Gulliver dominados por la "geometría elástica"! Desde entonces, cada vez que un huésped va a una casa japonesa, la familia que lo recibe le dedica un bonsai.

2. Unos correctores de pruebas de imprenta veían inútil parte de su trabajo. Si las hacían con lápices, se borraban algunas de sus anotaciones durante los procesos siguientes de impresión. En cambio, si utilizaban tinta se producían, a veces, manchas en los originales. Hartos de esta situación, los hermanos Ladislao y Jorge Biro decidieron "regalarse" un bolígrafo: lo imaginaron y lo inventaron.

3. Un día, un matemático pensó que las condiciones iniciales de un proceso de razonamiento podían variarse. Por ejemplo, Bolyai escribiría a su padre comentándole: *«...no podéis imaginar la belleza del mundo que he creado...»*. Sus clases contaron con el desarrollo de geometría no euclídea.

Estos son ejemplos de creación de nuevos objetos e ideas, y a sus autores se les reconoce como creadores. También hay personas en quienes se puede reconocer un pensamiento que se manifiesta en "pequeñas" creaciones que no dejarán traza en los libros de historia. En el ámbito educativo, que es el que interesa aquí, podemos encontrar desde el niño que, mediante una caja y una cuerda, crea *su* coche hasta el alumno que cambia la interpretación de un problema propuesto en clase y obtiene *su* problema, pasando por profesores que, a título individual o en grupos, innovan adecuadamente en el campo de los currículos. ¿No son éstos también ejemplos de "creatividad"?

Desde hace varias décadas se vienen haciendo intentos en distintos países por iniciativa de sectores empresariales, con apoyo universitario, tendentes a incrementar la creatividad en los cuadros medios y superiores de su sistema de producción. Pensemos en España y preguntémonos: ¿necesita nuestra industria, nuestro comercio, nuestro sistema de producción, de la creatividad de todos sus recursos humanos?

Para los autores de este libro la respuesta es afirmativa. A los profesores nos corresponde conseguir que el desarrollo del "arte de pensar", en los estudiantes de cualquier edad, tenga lugar en todas las direcciones posibles (entre las que está el pensamiento creativo).

En los siguientes epígrafes mostraremos vías para fomentar el pensamiento creativo: técnicas para generar nuevas ideas y para avanzar una vez que disponemos de ellas. Aunque no son las únicas posibles, se han elegido porque cada una de ellas tiene cabida en distintas partes que, en nuestra opinión, deberán considerarse en la definición de cualquier currículo de matemáticas. La elección de unas fases del aprendizaje permitirá establecer una secuencia concreta para aplicar las técnicas que aquí se exponen y sugerirá los modos de actuación en la clase para alcanzar el objetivo propuesto. Para acabar con esta presentación diremos que utilizamos el término *la clase* en sentido amplio. La resolución de problemas requiere tiempo. No todos los problemas pueden, ni deben, ser resueltos en "la hora de clase". Algunos necesitan reposar un período largo, la clase durará desde que se plantea hasta que se resuelve.

Tabla 1

Fases	Técnicas
Elección de la secuencia en la clase	"Lluvia de ideas". Documentación. Profundización. Variaciones sobre un mismo tema
Elección de medios	Manipulación
Fijación del nivel de transmisión de mensajes	Descripción

Todas las técnicas enunciadas, con la excepción de las variaciones sobre un mismo tema, serán descritas de modo general en la columna izquierda del texto que sigue, y ejemplificamos su uso en clase de matemáticas en la columna derecha. Las variaciones sobre un mismo tema servirán para presentar el problema-tema del final de capítulo.

Secuencia en la clase

SITUACION

Lluvia de ideas

La "lluvia de ideas", resultado de interpelar al grupo formado por todos los estudiantes presentes en el aula, es una buena técnica para la creación de ideas nuevas. Osborn (1963) enuncia las etapas que, desde su óptica, sistematizan esta labor. Las reproducimos a continuación:

1. Ninguna crítica. Los participantes deben posponerlas hasta que la primera sesión haya finalizado.
2. El objetivo es la cantidad. Los alumnos deben generar la mayor cantidad de ideas que puedan sin que sean evaluadas.
3. El objetivo es la originalidad. Más que intentar ser prácticos se deben generar ideas "locas" o inusuales.
4. El objetivo es combinación y mejoramiento. Consiste en trabajar sobre las sugerencias presentadas durante las sesiones anteriores.

Como habrás observado, la cuestión es bien fácil. El profesor no tiene que dar ninguna teoría, ni sugerir problemas análogos, ni dar propiedades relacionadas con el tema expuesto... Sólo hay que elegir bien la situación que se va a presentar y, si se consigue, los estudiantes harán cuantas matizaciones, precisiones, relaciones, problemas, etc., se les ocurran y pondrán en juego sus capacidades (p. ej., la intuición) y conocimientos.

Aquí hay un modelo que, como todos, no es ni único ni exclusivo. Es más, tiene sus detractores; otras investigaciones afirman que individualmente se generarán más ideas nuevas que al hacerlo en grupo. ¿Qué te parece si adoptamos una postura integradora? Añadamos a la lista anterior el apartado 5:

5. El objetivo es la reflexión individual. Los alumnos escribirán una síntesis de las propuestas que han surgido en el grupo.

EJEMPLO

La situación a plantear para la "lluvia de ideas" en la clase de matemáticas consistirá en proponer un problema. Las situaciones ligadas con la búsqueda de regularidades numéricas y con el cálculo combinatorio son, por ejemplo, propicias a que sea el alumno quien tome la iniciativa y ponga de manifiesto su capacidad creativa. Más importante que la situación matemática elegida es la actitud mutuamente abierta, confiada y respetuosa que ha de reinar en la clase. Elige problemas fáciles, definidos y de enunciado abierto. Por ejemplo, éste puede ser interesante para comenzar: ¿qué podría hacerse con un cuadrado?

— Formar otros cuadrados.
— Formar otras figuras de igual superficie.
— Estudiar las proporciones que de él se derivan.
— Considerarlo como objeto didáctico.

SITUACION | EJEMPLO

Documentación de ideas

La clase continúa proponiendo la búsqueda de información sobre las ideas obtenidas tras el proceso de síntesis.

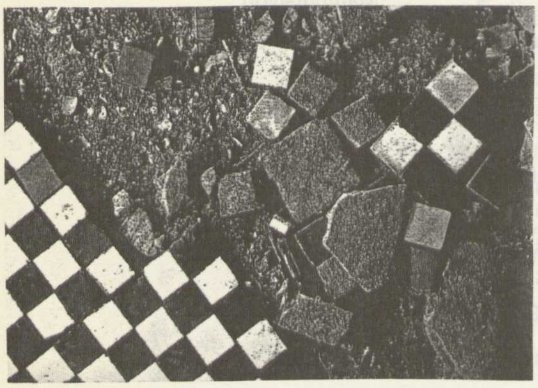


Figura 1.1

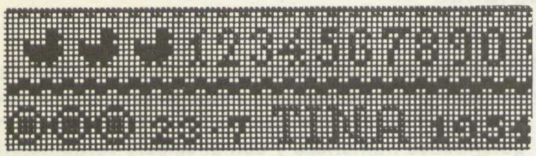


Figura 1.2

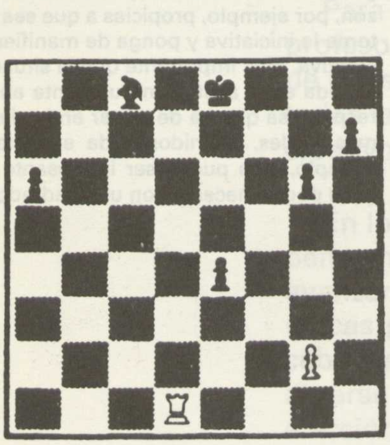


Figura 1.3

Figura 1.1. Suelo
Figura 1.2. Alfabeto para punto de cruz
Figura 1.3. Ajedrez
Figura 1.4. Arte de la "cuadratura" de fray Andrea Pozo

— Formar otros cuadrados.

Así pudo surgir "la cuadrícula" cuando alguien resolvió el problema de calcular áreas. Posteriormente resolvió otros como el de embaldosar el suelo de un recinto (figura 1.1), dar lugar a diferentes tipos de letras, (figura 1.2), ocupar el tiempo libre de las personas como base de distintos juegos (figura 1.3), creación de diseños decorativos (figura 1.4).

Formar otras figuras de igual superficie (conservación de la cantidad y no de la forma). En el semanal de *El País* apareció el juego de mesas de la figura 2 basado en el juego del Tan-gram. Es el cambio de forma más reciente que conocemos obtenida de un cuadrado. Donde parece más patente que la figura base es el cuadrado es en los peculiares "polígonos nazaritas" que mostramos en la figura 3. Llamamos así a los polígonos que definen la forma de los alicatados que decoran las paredes de la Alhambra. Recientemente, Josep Albers creó una serie de cuadros que constituye su *Homenaje al cuadrado*; pero los constructores del citado monumento granadino se le adelantaron siglos, ya que la Alhambra es un monumento al cuadrado.

— Estudiar proporciones.

Citaremos dos creaciones cuyo origen está en sendas proporciones derivadas del cuadrado, la $\sqrt{2}$ y el número de oro, seleccionadas, por su carácter bien diferenciado, de entre las muchas existentes.

— Considerarlo como objeto didáctico.

Este es uno más de los muchos libros escritos sobre el cuadrado.

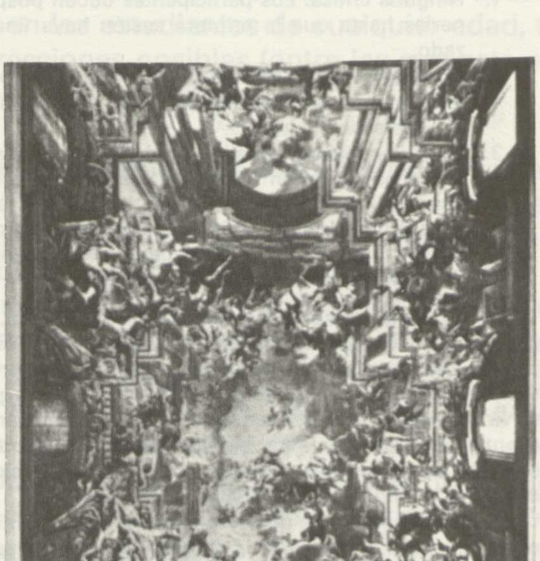


Figura 1.4

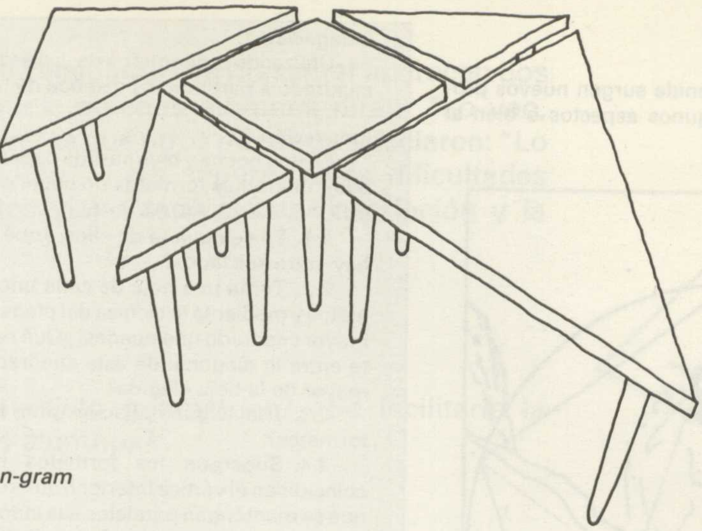


Figura 2. Tan-gram

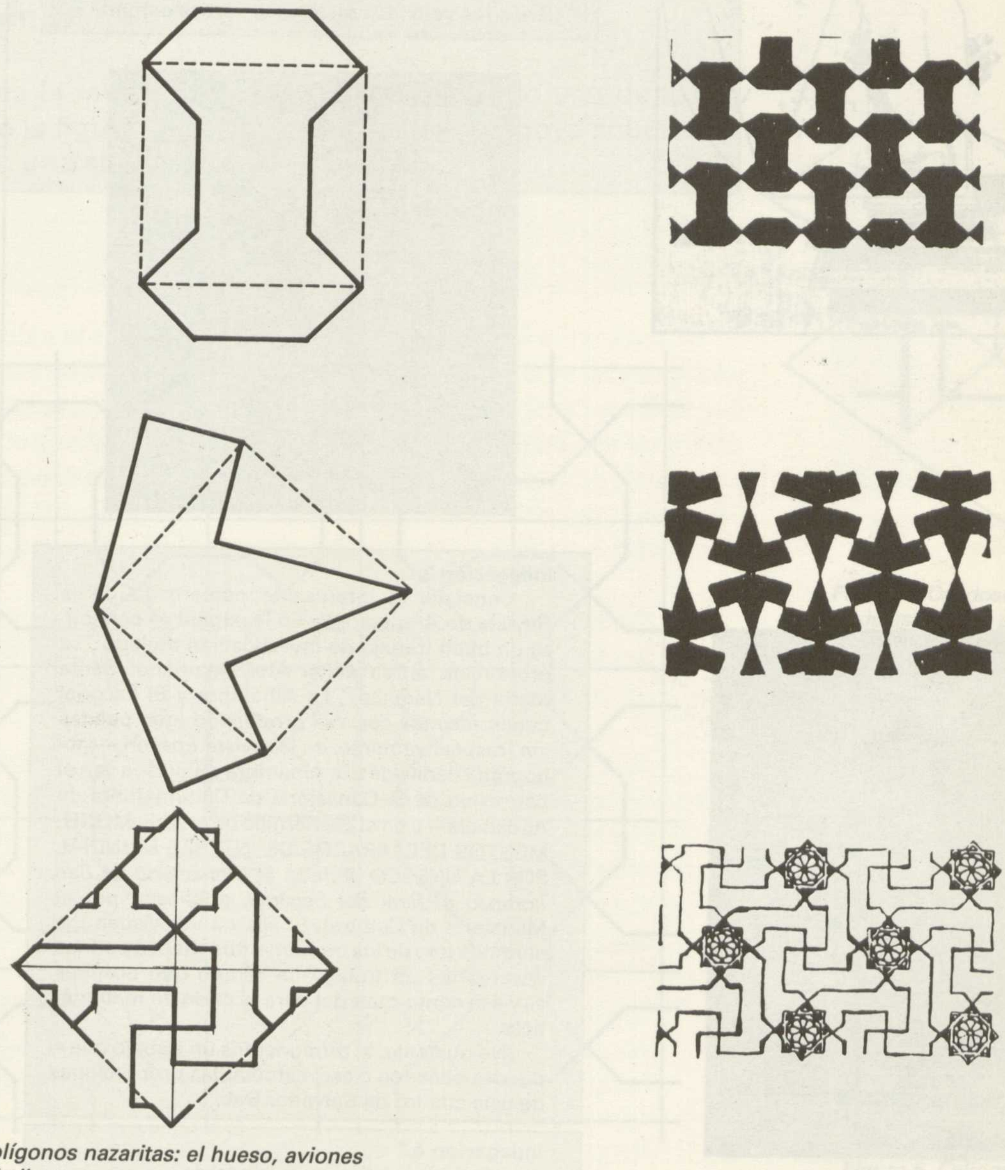
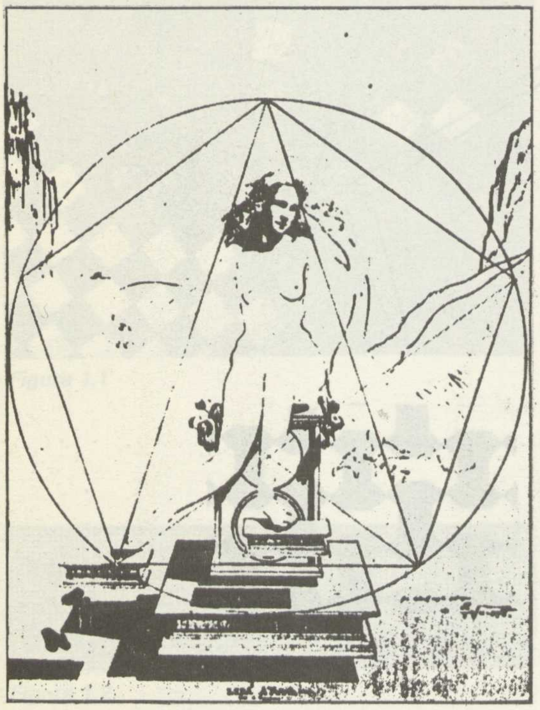


Figura 3. Polígonos nazaritas: el hueso, aviones y la llave

SITUACION | EJEMPLO

Profundización

De la documentación obtenida surgen nuevos problemas, bien al modificar algunos aspectos o bien al actuar por analogía.



Cuadro: Leda Atómica

Indagación 1.ª

Utilizando la geometría de la disección haz un cuadrado a partir de los diseños de la figura 3.

Indagación 2.ª

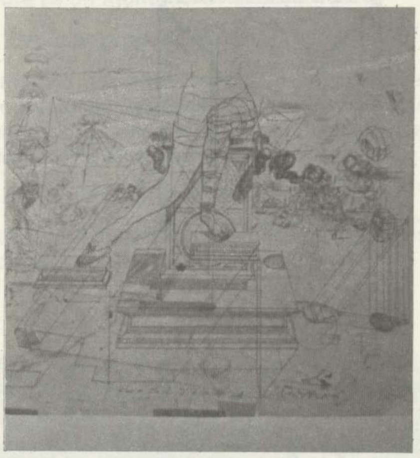
En una buena y bien surtida papelería puedes pedir diferentes formatos de papel de la serie A (AO, A1, A2 A3, A4, A5 y A6).

2.1. En cualquiera de ellos, ¿qué proporción hay entre sus lados?

2.2. Toma una hoja de cada uno de los formatos y mediante la técnica del plegado, obtén el mayor cuadrado que puedas. ¿Qué relación existe entre la diagonal de este cuadrado y el lado mayor de la hoja elegida?

2.3. ¿Hay alguna relación entre los distintos formatos?

2.4. Superpón los formatos haciéndolos coincidir en el vértice inferior izquierdo (de forma que se mantengan paralelos sus lados). Apilados de mayor a menor superficie, ¿qué disposición tienen los vértices opuestos al vértice común?



Indagación 3.ª

Consigue el interesante número 73 de la *Revista de Arqueología*. En la página 44 comienza un buen trabajo de investigación titulado "La proporción áurea en el Arte Asturiano. Santa María del Naranco." La Alhambra y El Escorial tienen recintos con esa proporción (que puedes ver, respectivamente, en la revista *Epsilon* —monografía dedicada a la Alhambra publicada con el patrocinio de la Consejería de Cultura-Junta de Andalucía— y en el cuadernillo de la serie MONUMENTOS DECLARADOS DE INTERES MUNDIAL POR LA UNESCO titulado *El Monasterio de San Lorenzo el Real del Escorial*, publicado por el Ministerio de Cultura). Si alguna vez visitan tus alumnos uno de los monumentos citados podrías encargarles un trabajo de campo que después sirviese como material para la clase de matemáticas.

No obstante, te proponemos un trabajo que sí puedes hacer en clase: estudiar las proporciones de este cuadro de Salvador Dalí.

Indagación 4.ª

¿Qué harías tú con un cuadrado?

Dos viejas técnicas más

A lo largo del proceso que acabamos de presentar aparecen dos grandes tipos de dificultades; muchos alumnos dirán: "Lo veo, pero no lo sé explicar", mientras que otros puede que declaren: "Lo entiendo, pero no lo imagino". Para superar estas dificultades podemos hacer uso de dos viejas técnicas: la descripción y la manipulación.

Describir

¿Cómo describirías un objeto geométrico? ¿Se facilitaría la descripción si lo viesen los alumnos?

Indagación 5.ª

Describe la imagen que se obtiene haciendo uso de los objetos de la figura 4 si el libro de espejos se apoya sobre el palillo con una abertura (diedro) de 90°.

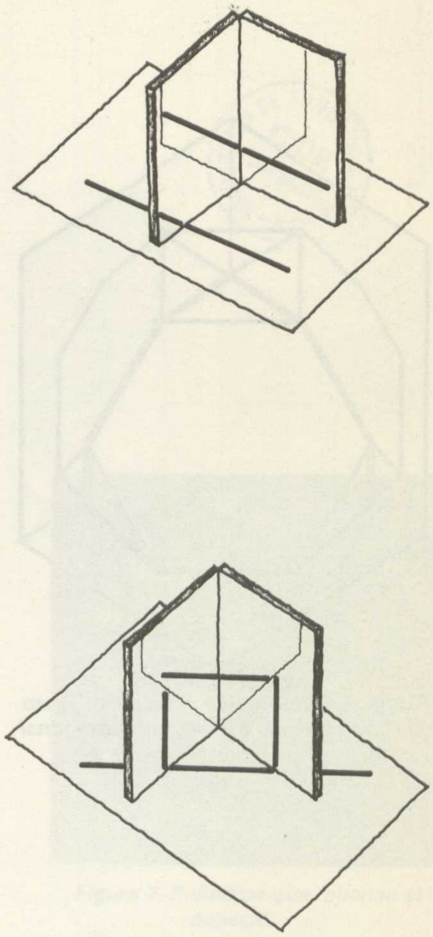
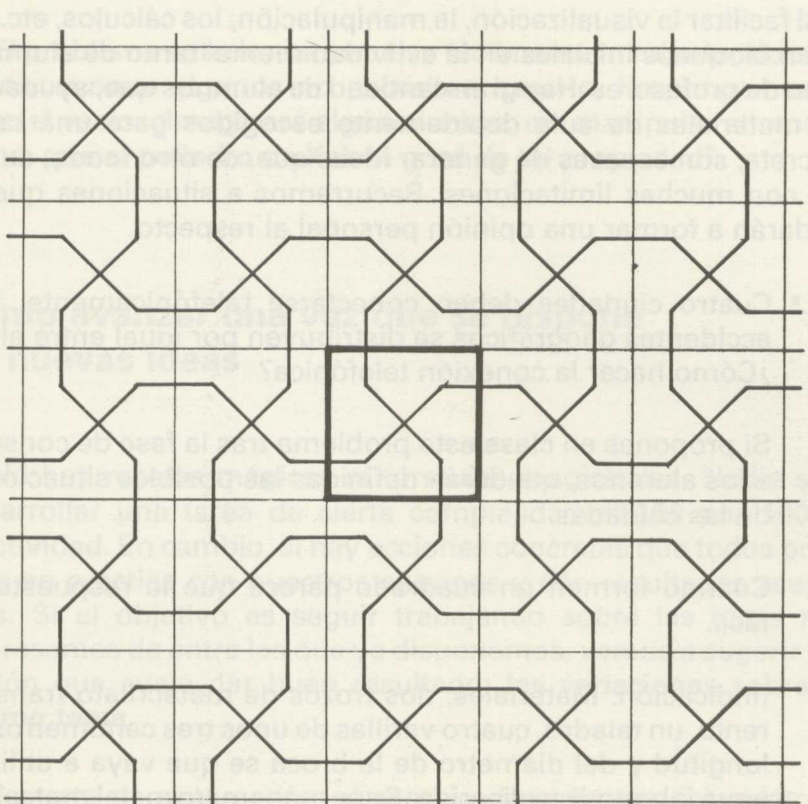


Figura 4. Calidoscopio diédrico (libro de espejos) y palillo de polo



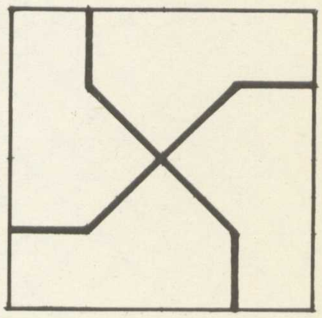


Figura 5. Calidoscopio diédrico de cuatro espejos y loseta cuadrada con decoración

Indagación 6.ª

Describe la imagen que se forma al introducir la loseta en el calidoscopio. Ambos objetos se muestran en la figura 5.

Indagación 7.ª

¿Qué poliedro se forma al introducir el trozo de cubo en el calidoscopio?

(Calidoscopio y trozo de cubo en la figura 6.)

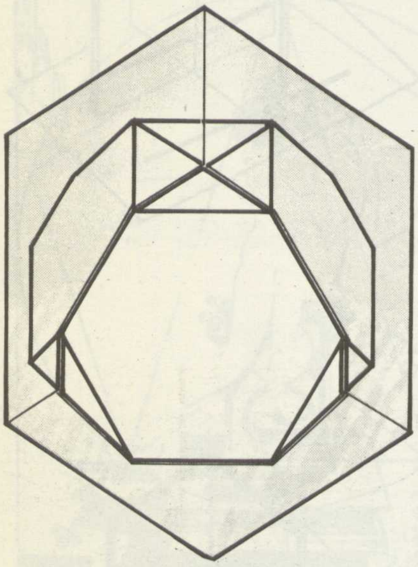


Figura 6. Calidoscopio octaédrico. Trozo de cubo obtenido por sección hexagonal

Mediante la visualización se estimula la formación de imágenes mentales cuya posterior descripción necesita de la adopción de un punto de vista. Cada uno puede elegir el suyo, lo cual proporciona en el aula múltiples enfoques. Dejemos que se manifiesten los alumnos y que aporten gran cantidad de observaciones sobre cada situación. Así estaremos fomentando el pensamiento creativo. Después, y sólo entonces, se someterá cada descripción a evaluación, ya que la actividad de describir es difícil de realizar correctamente.

Manipular

Al facilitar la visualización, la manipulación, los cálculos, etc., se evitan bloqueos iniciales en la actividad mental tanto de alumnos como de profesores. Hay gran cantidad de alumnos que, ayudados por materiales de aula debidamente escogidos para una tarea concreta, son capaces de generar ideas que, de otro modo, surgirían con muchas limitaciones. Recurramos a situaciones que te ayudarán a formar una opinión personal al respecto.

1.ª Cuatro ciudades deben conectarse telefónicamente. Los accidentes geográficos se distribuyen por igual entre ellas. ¿Cómo hacer la conexión telefónica?

Si propones en clase este problema tras la fase de consulta a los alumnos, quedarán definidas las posibles situaciones de las ciudades.

Cuando formen un cuadrado parece que la respuesta es fácil.

(Indicación. Materiales: dos trozos de metacrilato transparente, un taladro, cuatro varillas de unos tres centímetros de longitud y del diámetro de la broca se que vaya a utilizar, agua jabonosa y glicerina. Superpón un trozo del metacrilato sobre el otro y procede a realizar cuatro agujeros que simbolizarán las ciudades. Coloca las varillas, a modo de "columnitas" entre los dos metacrilatos, encajadas en los agujeros. Introduce el objeto así realizado en el agua jabonosa en la que previamente se intentó disolver la glicerina. Saca lentamente el objeto del agua y observa las películas que se han debido formar.)

Indagación 8.ª

Conjetura e intenta explicar el hecho.

2.ª ¿Qué cuerpos geométricos, acoplados consigo mismos, rellenan el espacio (tridimensional)?

Si en la fase del aprendizaje de la orientación dirigida se utiliza la analogía, puede suceder que, al recordar que el cuadrado es la figura plana con la cual rellenamos el plano habitualmente, los alumnos piensen de manera automática en que los hexaedros o cubos pueden apilarse sin dejar huecos en el espacio.

Indagación 9.ª

Los triángulos equiláteros rellenan el plano. ¿Rellenarán el espacio los tetraedros?

El problema anterior se resuelve fácilmente manipulando tetraedros, aunque algunos no necesiten hacerlo. Propongamos un salto al vacío. ¿Imaginará algún alumno, sin manipular el modelo físico, que **el poliedro de Kelvin** goza de tal propiedad?

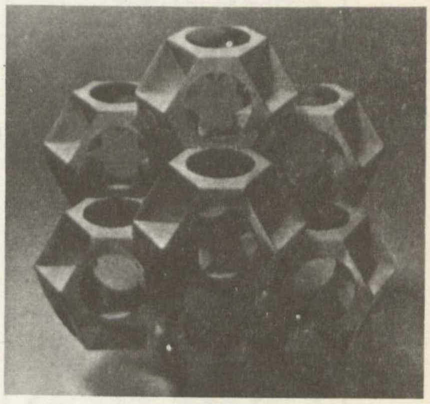


Figura 7. Poliedros que rellenan el espacio

Cómo avanzar una vez que se dispone de nuevas ideas

No hay recetas mágicas ni fórmulas magistrales. Nadie sabe desarrollar una tarea de cierta complejidad al 100 por 100 de efectividad. En cambio, sí hay acciones concretas que todos ponemos en práctica con nuestros alumnos y dan resultados aceptables. Si el objetivo es seguir trabajando sobre las ideas más interesantes de entre las que ya disponemos, vamos a sugerir una acción que suele dar buen resultado: **las variaciones sobre un mismo tema.**

Se trata de sistematizar el cambio de atributos del objeto de estudio hasta agotar sus posibilidades, si es que esto último es posible. Para lograrlo se pueden utilizar heurísticos. Incluso cabe hacer uso de materiales de alta tecnología para aplicar el de

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA CIDE BIBLIOTECA

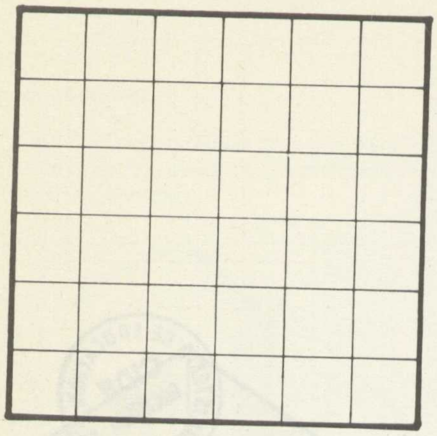


Figura 8. Cuadrícula 6 x 6

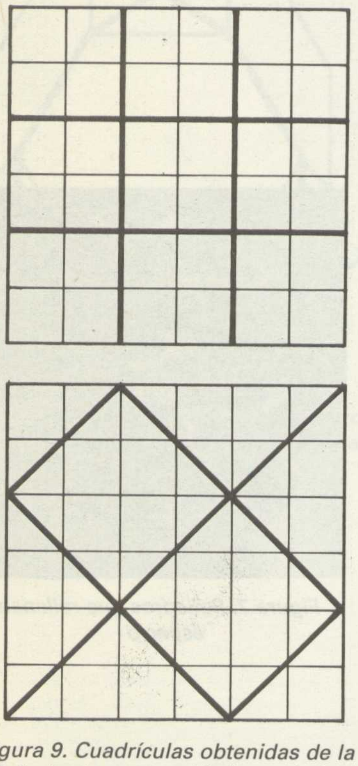


Figura 9. Cuadrículas obtenidas de la 6 x 6. Lado dos veces el lado u y lado dos veces la diagonal del cuadrado de lado u

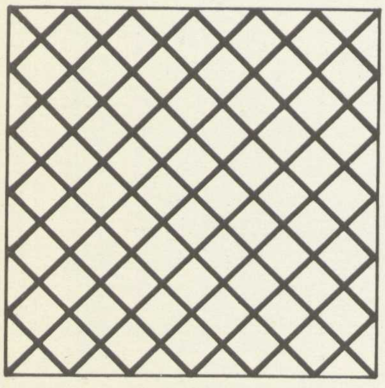


Figura 10. Cuadrícula con las diagonales

"ensayo-error" (como puede ser la simulación por computadora). ¿Qué no habrían hecho los tracistas medievales del Reino Nazarí si hubiesen podido contar con un Editor de Mosaicos?

A lo largo de este libro aparecen enunciados de contenido matemático que nos hemos abstenido de llamar axiomas, teoremas, etc.

«Más que interpretar la Matemática como un colosal depósito estratificado en los textos que las anteriores generaciones nos han legado, hemos de concebirla como una actividad pensante en eterna producción: la de ayer, la de hoy, la de mañana. Para que no falte esta última formamos a nuestros alumnos hoy. Sólo cultivando el espíritu de investigación y de conquista se asegura, a un tiempo, la firmeza de lo adquirido y la continuidad histórica del progreso.» (P. Puig Adam).

Con este final de capítulo se pretende ejemplificar, haciendo uso de la última técnica anunciada, un modo de cultivar la creatividad sin estratificar el conocimiento matemático y propiciando la continuidad y fluidez de ideas. "Hagamos" en clase un teorema.

El problema-tema

Al comienzo de este capítulo señalamos que una de las cosas que se podía hacer con un cuadrado era una cuadrícula. ¡Ya tenemos una idea! Anunciábamos entonces que trabajaríamos sobre este magnífico material didáctico por ser fuente inagotable de ideas que permitirán avanzar en el tema. Pues bien, se trata de demostrar el teorema de Pitágoras utilizando la cuadrícula como material de apoyo.

Primera variación sobre el tema. Hacer "otras" cuadrículas sobre la de la figura 8. Por ejemplo, como las de la figura 9.

Indagación 10.ª

Una de las cuadrículas posibles obtenidas de una 6x6 es la que resulta de trazar las diagonales de todos los cuadrados unidad que la forman (figura 10).

Marcar un cuadrado de cada una de las cuadrículas de la figura 9 sobre la de la figura 10 y contar el número de triángulos pequeños que hay en el interior de cada uno de los cuadrados señalados. ¿Cuál es la relación que existe entre los dos números hallados?

Indagación 11.ª

Estudiar la figura 11. Buscar, en cada cuadrícula, la relación existente entre la superficie del cuadrado dibujado sobre la hipotenusa y las superficies de los cuadrados dibujados sobre los catetos.

Segunda variación sobre el tema. Salgamos de las diagonales de la cuadrícula de la figura 10 y formemos, por ejemplo, la cuadrícula de la figura 12.

¿Has comprendido ya por qué contamos antes los triángulos pequeños y no los cuadraditos formados por dos de ellos? Ahora, si deseamos seguir contando igual que antes, nos encontramos con que los triangulitos de antes no aparecen, al menos directamente. Haciendo uso de la simetría podemos restablecer la situación anterior.

Aunque se pueden "contar" los triangulitos, parece que es más cómodo contar los cuadraditos y llegar a la conclusión de que el cuadrado base de la cuadrícula de la figura 12 tiene cinco cuadraditos pequeños.

El uso de la analogía es un buen recurso para avanzar. Hagamos una figura (figura 14 —análoga a la figura 11—) con los nuevos cuadrados y busquemos una relación entre el número de cuadraditos. ¿Sigue cumpliéndose la de antes? ¡Magnífico! Es una buena idea que debemos explorar al máximo.

Indagación 12.ª

Hacer cuadrados con las diagonales de rectángulos 1 x 3, 2 x 3 ... ¿Qué sucederá en el caso 100 x 100? Conjeturar acerca de la relación entre el cuadrado de lado n, el de lado m y el de lado la diagonal del rectángulo nxm.

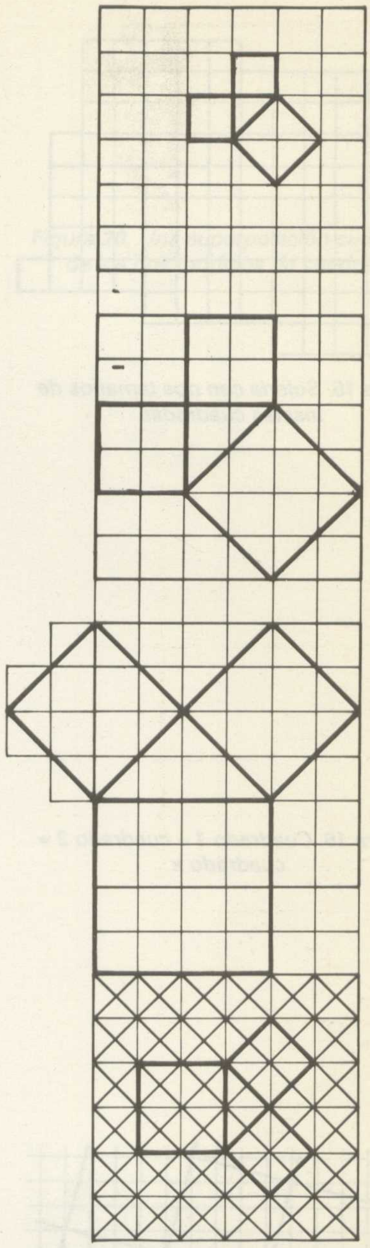


Figura 11. Molino de viento sobre las cuadrículas

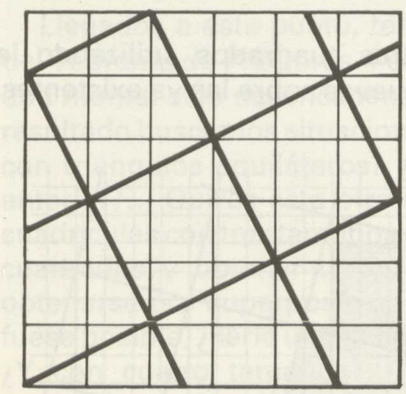


Figura 12. Cuadrícula de lado la diagonal del rectánculo 2 x 1

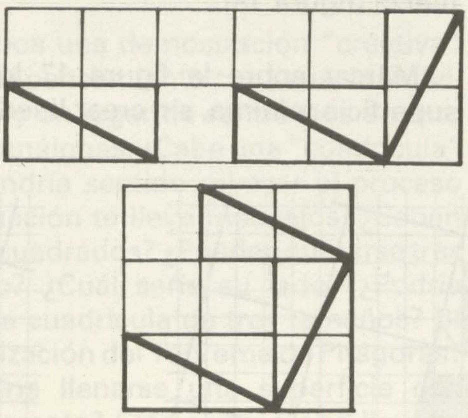


Figura 13

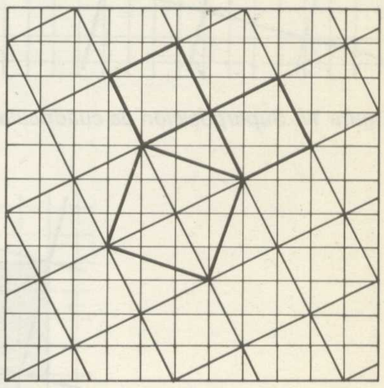


Figura 14

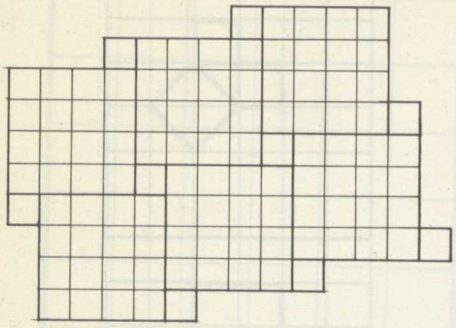


Figura 15. Solería con dos tamaños de losetas cuadradas

Tercera variación sobre el tema. Si las posibilidades de trabajar sobre la cuadrícula se van agotando, pensemos en modificaciones. ¿Qué tal si utilizamos dos tamaños de cuadros? Realmente estaríamos diseñando una solería poco original (figura 15).

No tendría interés la pregunta acerca de cuál sería el lado de una loseta cuadrada que embaldosara igual superficie que la determinada por el contorno de la figura 15, ya que cualquier loseta cuadrada lo haría. Veamos si enfocándolo desde otro punto de vista cobra interés el tema. ¿Qué tal si encontramos una loseta que cubra igual superficie que dos de las de la figura 15? El problema está ya planteado: ¿cuál es el lado del nuevo cuadrado?

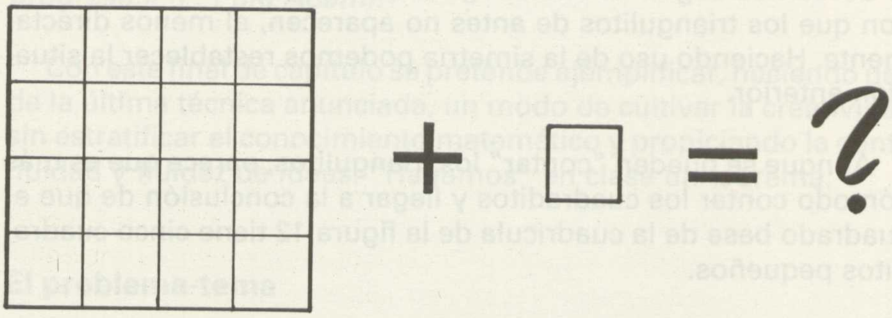


Figura 16. Cuadrado 1 + cuadrado 2 = cuadrado x

De lo anterior se puede conjeturar que x es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de cuadrado 1 y cuadrado 2.

Cuarta variación sobre el tema. Utilicemos los dos modelos de cuadrícula definidos. Puesto que la superficie a cubrir tiene que ser la misma, superpongamos ambos modelos buscando como lado del cuadrado x la "diagonal" de la cuadrícula de dos tamaños de cuadro (figura 17), tal y como hacíamos anteriormente. De este modo comprobaremos la conjetura anterior.

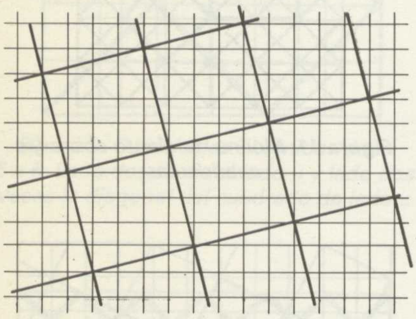
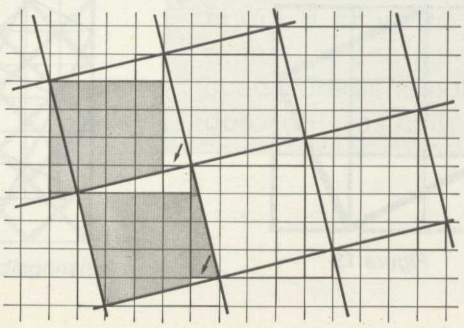


Figura 17. Superposición de cuadrículas

Observa la figura delimitada por los bordes marcados con más fuerza (figura 18).

Marcar sobre la figura 17 los tres cuadrados, utilizando la superficie mínima, sin crear líneas nuevas sobre las ya existentes.



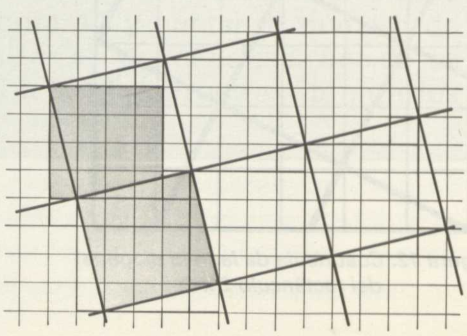


Figura 18

Figura 19

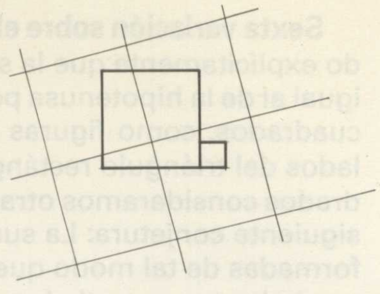


Figura 20. Una superposición cualquiera de los dos modelos de cuadrícula

Descompongámosla tal y como se muestra en la figura 19.

¿Queda claro que la suma de las superficies de los cuadrados del suelo inicial coincide con la superficie del cuadrado obtenido?

Indagación 13.ª

Enunciar el resultado obtenido utilizando los lados de los tres cuadrados. ¿Se ha conseguido mejorar la conjetura planteada en la Indagación 12.ª?

Quinta variación sobre el tema. Una vez definido el tamaño del cuadrado con el que se necesitaría la mitad del número de losetas para embaldosar la misma superficie, superpón los dos modelos de cuadrícula definiendo nuevos vértices, por ejemplo, como en la figura 20.

Indagación 14.ª

El número de superposiciones posibles de las cuadrículas que nos ocupan es infinito. Actuando de igual modo que cuando obtuvimos la figura 19, redistribuir los trozos que se obtienen en cada superposición, para conseguir el/los otro/s cuadrado/s.

(Sugerencia: Hacer en un acetato o en papel vegetal el modelo de cuadrícula de un solo cuadro para superponer sobre el dibujo de la otra.)

Llegados a este punto, tenemos una demostración "creativa" del Teorema de Pitágoras. Pero el pensamiento continúa, la actividad mental está desencadenada y en lugar de centrarnos en este resultado buscamos situaciones análogas: ¿Cabe una "cuadrícula" con triángulos equiláteros? ¿Tendría sentido rehacer el proceso anterior?... Quizás esta otra situación te lleve más lejos. ¿Caben cuadrículas con tres tamaños de cuadrados? ¿Pueden sumarse tres cuadrados y obtener un cuarto? ¿Cuál sería su lado? ¿Podría obtenerse por superposición a la cuadrícula de tres tamaños? Si fuese posible, ¿sería una generalización del Teorema de Pitágoras? ¿Y con cuatro tamaños? ¿Podría llenarse una superficie con cuadrados **todos** de tamaño diferente? Este camino nos llevaría lejos, pero volvamos al Teorema de Pitágoras.

Sexta variación sobre el tema. Hasta aquí, no hemos mencionado explícitamente que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al de la hipotenusa porque hemos preferido pensar sobre los cuadrados, como figuras geométricas, que se forman sobre los lados del triángulo rectángulo. ¿Qué sucederá si en lugar de cuadrados consideramos otras figuras? Hacemos en este momento la siguiente conjetura: La suma de las superficies de las dos figuras formadas de tal modo que, en cada una de ellas, coincida uno de sus lados con uno de los catetos de un triángulo rectángulo será igual a la superficie de la figura formada sobre la hipotenusa.

Observa que esta generalización es diferente de otras sugeridas antes, por lo que queda patente que una generalización no tiene por qué ser única. ¿Qué figuras hemos de construir sobre el triángulo rectángulo base? Si de nuevo recurrimos a analogías, parece interesante empezar pensando en que las figuras sobre los lados del triángulo rectángulo sean semejantes, ya que los cuadrados, única figura utilizada hasta ahora, tienen todos "igual forma".

Sigamos este plan y coloquemos la figura más sencilla para empezar, el triángulo, y podremos ir variándola hasta...

Indagación 15.ª

¿Cómo propondrías este problema en clase? El enunciado es: La suma de las superficies de dos figuras semejantes construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la superficie de la figura semejante a las anteriores construida sobre la hipotenusa del mismo.

Séptima variación sobre el tema. El pensamiento creativo no puede menos que volver a desviarse hacia otras ideas que han surgido ya y que normalmente no exploramos, ideas que podíamos llamar "complementarias". Por ejemplo, en cualquiera de las figuras utilizadas para representar gráficamente el Teorema de Pitágoras podemos trazar tres triángulos, además del dado, y normalmente nunca lo hacemos. ¿Y si unimos los vértices de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo?

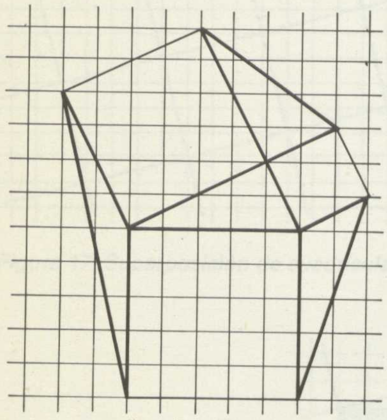


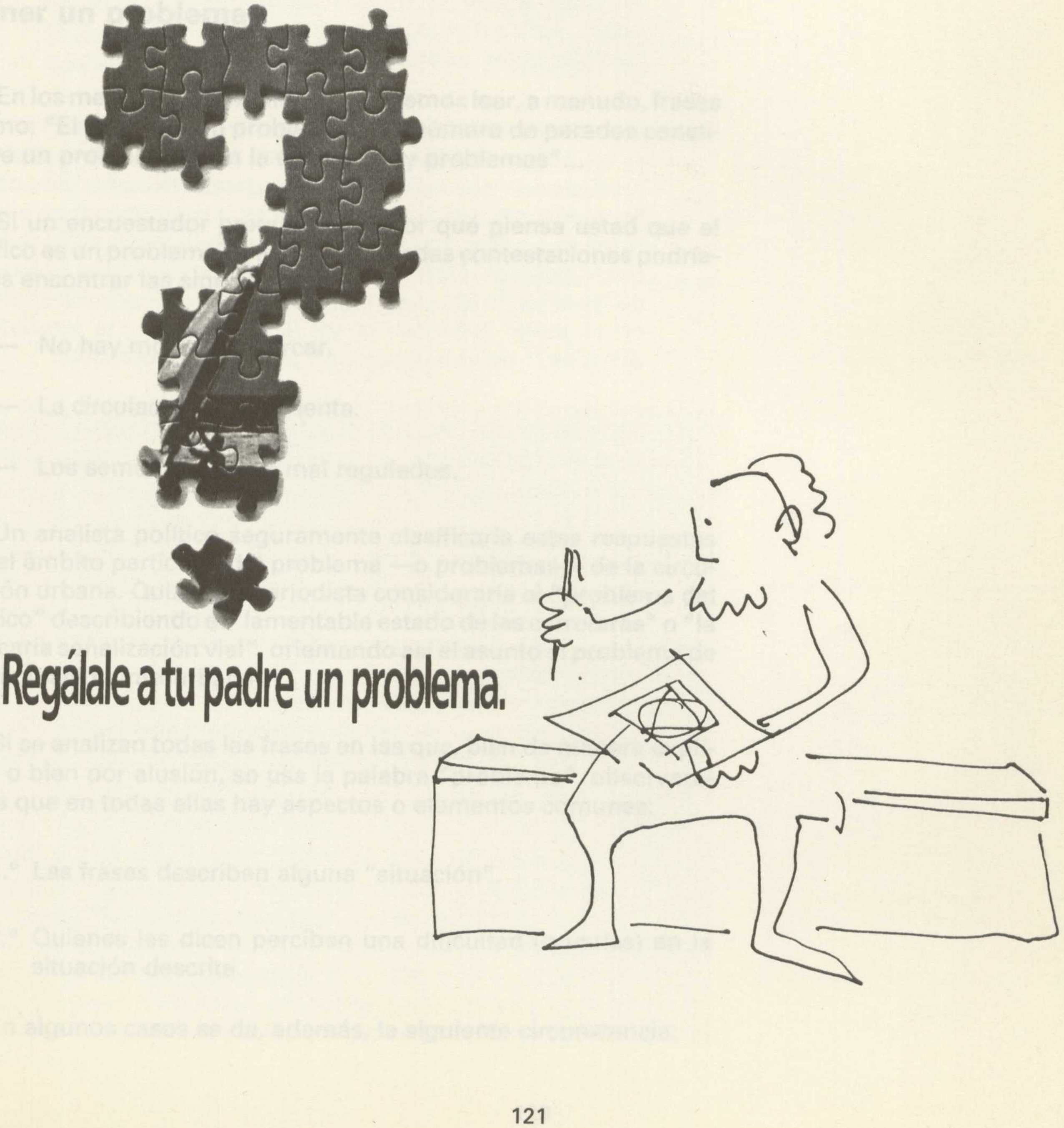
Figura 21. Molino de viento y triángulos determinados por él

Indagación 16.ª

Comienza a contar los triangulitos que recubren a los triángulos que acabamos de formar en cada una de las cuadrículas sobre las que hemos dibujado el "molino de viento". Sigue los procedimientos empleados para el Teorema de Pitágoras y... ¡enuncia tu teorema sobre la relación existente entre las superficies de los triángulos "complementarios" y el de partida!

epílogo o introducción: panorámica de los problemas

5



Tener un problema

En los medios de comunicación podemos leer, a menudo, frases como: "El tráfico es un problema", "El número de parados constituye un problema", "En la sanidad hay problemas"...

Si un encuestador preguntara: "¿Por qué piensa usted que el tráfico es un problema?", entre las variadas contestaciones podríamos encontrar las siguientes:

— No hay modo de aparcar.

— La circulación es muy lenta.

— Los semáforos están mal regulados.

Un analista político seguramente clasificaría estas respuestas en el ámbito particular del problema —o problemas— de la circulación urbana. Quizás un periodista consideraría el "problema del tráfico" describiendo el "lamentable estado de las carreteras" o "la precaria señalización vial", orientando así el asunto al problema de la circulación interurbana.

Si se analizan todas las frases en las que, bien de manera explícita o bien por alusión, se usa la palabra "problema", observaremos que en todas ellas hay aspectos o elementos comunes:

1.° Las frases describen alguna "situación".

2.° Quienes las dicen perciben una dificultad (o varias) en la situación descrita.

En algunos casos se da, además, la siguiente circunstancia:

3.° Quien (o quienes) percibe(n) la dificultad en la situación descrita desea(n) que la situación cambie por la desaparición de la dificultad y actúa(n) en consecuencia.

De este análisis se deduce lo que es "tener un problema":

«Una persona tiene un problema cuando, ante una situación, percibe una dificultad y decide actuar para que la dificultad desaparezca, asumiendo los correlativos cambios que la desaparición de la dificultad acarree en la situación inicial.»

El análisis precedente y la definición propuesta exigen algunos comentarios.

— Las mismas palabras pueden expresar ideas distintas, lo que da lugar a que se tengan "problemas" diferentes. Esto queda suficientemente ilustrado con lo dicho acerca del "problema del tráfico".

— Los elementos 1.° y 2.° no bastan para objetivar problemas; sirvan como ejemplos las mil y una actuaciones de todas las oposiciones democráticas en sus respectivos Parlamentos. En dichas actuaciones lo normal es que se describan situaciones y se detecten dificultades, pero la lucha política está por lo general menos orientada a conseguir la desaparición de las dificultades que a utilizarlas en aras de una alternancia en el poder (alternancia en la que radica "la verdadera dificultad" de toda oposición política democrática).

— Es costumbre sobreentender —hasta olvidarla— la condición de que haya una voluntad de hacer desaparecer dificultades. Esto provoca múltiples inconvenientes.

Inconvenientes de primer tipo: Si no hay voluntad, no hay problema. (Aplíquese, por ejemplo, a las situaciones de aprendizaje. Si no se provoca el deseo de aprender, las preguntas que se hagan caerán en saco roto. También se puede aplicar a situaciones no humanas: a menos que entremos en el campo de la ciencia-ficción, la frase "un arbolito dobla su tronco para resolver el problema de crecer con un obstáculo que impide la verticalidad" sólo puede ser metafórica.)

Inconvenientes de segundo tipo: Los deseos no pueden ser "descabellados". (Aplíquese, por ejemplo, a la dificultad de fabricar mecanismos de alto rendimiento. Pretender un rendimiento del 90 por 100 correspondería a un acto poético, no a un deseo propiamente dicho.) Esto no cierra el paso a los "chispazos", "genialidades" y demás deseos legítimos que sólo algunos son capaces de realizar.

Inconvenientes de tercer tipo: Si no se percibe la dificultad en una situación, no tiene sentido hablar de voluntad para conseguir que aquélla desaparezca. De ahí que una situación pueda dar lugar, o no, a que personas distintas tengan, o no, problemas.

— Superados (advertidos de) los inconvenientes, observamos que los problemas son inherentes a lo humano: la importancia de estudiar cómo se tienen problemas y qué es resolver un problema surge al considerar que nuestro quehacer en la vida es muy variable; con cada situación nueva aparecen dificultades que dan lugar a problemas.

Si un ser humano tiene un problema (en el sentido de la definición), nos referimos a él con el término "resolutor". Para designar situaciones que dan lugar a problemas, hablamos de "situaciones problemáticas". Como los problemas se dicen (se "enuncian"), llamamos "enunciado" (de un problema) toda sucesión de frases con la que se pretenda describir una situación problemática y, opcionalmente,

— caracterizar una o varias dificultades asociadas;

— alguna manera de vencerla(s).

Por último, suponemos —y es tan exagerado como habitual el hacerlo en educación matemática— que toda persona a la que se comunica un enunciado pasa a ser resolutora.

Indagación 1.ª

A continuación proponemos algunas situaciones. Si estuvieras, sucesivamente, inmerso/a en cada una de ellas, especifica tu(s) dificultad(es), precisa tu(s) problema(s) e indica cuándo quedarán éstos resueltos:

Situación 1.ª: «Se oye un portazo.»

Situación 2.ª: «Tu hijo trae a casa las notas.»

Situación 3.ª: «El contador de gasolina de tu vehículo marca: "reserva".»

Situación 4.ª: «Tu cónyuge tiene "tarde libre", tu hija de siete años quiere que la lleves al cine y tu hijo de nueve quiere que le lleves al partido de baloncesto.»

Situación 5.ª: «Tienes que hacer la compra.»

(Nota: La situación 5.ª normalmente conduce a un problema que recibe el nombre de "dilema". La figura 1 ilustra un dilema muy entretenido.

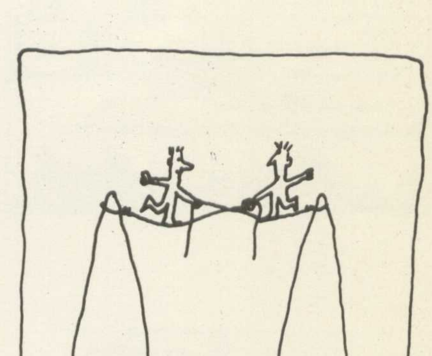


Figura 1

Anatomía de un problema

Las dificultades no se vencen siempre de la misma forma. Por ejemplo, una combinación de balón que acabe en gol se apreciará más que un gol conseguido de penalty (aunque ambas maneras de ganar un partido de fútbol sean legítimas). Además de enlazar la situación con la dificultad, hay que evaluar los cambios de situación que el modo de actuar conlleva. Por seguir con el fútbol: durante las noches de domingo, los locutores de radio analizan el significado de los resultados de los partidos; cuándo se puede afirmar que un equipo será "matemáticamente" el primero o el último, sus resultados concretos suelen dejar de interesar a los periodistas.

La "trayectoria" que, voluntariamente o no, siguen los resolutores ante la situación problemática se puede analizar de distintas maneras. En esencia, todas coinciden con la siguiente **secuencia de tareas** (tabla 1):

Tabla 1

1.ª Precisar en qué consiste la dificultad.

2.ª Analizar el uso que podemos hacer de los conocimientos y medios de que disponemos.

3.ª Vencer la dificultad.

4.ª Evaluar el cambio.

5.ª Asumir el cambio y las tareas (por lo menos la 1.ª y la 4.ª) o recomenzar.

Hacer un problema (o resolver un problema) consiste en enlazar las distintas etapas de esta secuencia mediante una serie de decisiones y actuaciones. La validez de las decisiones tomadas y de las actuaciones realizadas sólo se puede garantizar, en general, cuando la evaluación del cambio de situación conduce a asumir que la nueva situación no lleva ya asociada la dificultad que "puso en marcha" al resolutor. (Sin embargo, hay muchos casos particulares en los que la validez, o inadecuación, de la "cadena" se puede garantizar de antemano.)

A título de ejemplo, consideremos la situación

«un bebé no para de llorar»,

a la que aplicaremos la secuencia precedente.

Primera etapa: **Precisar en qué consiste la dificultad**

Como no es normal que un bebé llore durante mucho rato, los padres pueden suponer que el niño tiene fiebre (le ponen el termómetro y ven que no es así), que tiene hambre (no es posible, hace una hora que cenó), que quiere eructar (pero el eructo no sale), que se le ha caído el chupete (¿dónde está el chupete?). A las 11 de la noche los padres se dan cuenta de que "el crío llora porque se ha perdido el chupete".

Segunda etapa: **Analizar el uso que podemos hacer de los conocimientos y medios de que disponemos**

Los padres llegan a la conclusión de que hay que conseguir un chupete nuevo, el cual se puede comprar en una farmacia de guardia. En la casa está el periódico de hoy: consultan las farmacias que hay de guardia y determinan cuál es la más próxima. Está cerca. El padre decide ir a pie. No olvida su monedero.

Tercera etapa: **Vencer la dificultad**

El padre compra el chupete en la farmacia. Regresa a la casa. Lavan el chupete y se lo ponen al crío.

Cuarta etapa: **Evaluar el cambio de situación**

A los pocos minutos, el bebé duerme plácidamente. Se ha vencido la dificultad, se ha resuelto el problema.

Quinta etapa: **Asumir el cambio y las tareas o recomenzar**

(Cuando unos padres ven que sus hijos están tranquilos, normalmente no hacen autocrítica, pero imaginemos...) Antes de sentarse, por fin, a leer un rato o a hablar de otras cosas, los padres se preguntan, para la "próxima vez", si conviene tener en la casa un chupete de "urgencias"; también piensan que podían haber llamado a los vecinos del 5.° y pedirles prestado un chupete (habrían tardado menos tiempo en aseptizarlo que en ir a la farmacia de guardia).

Indagación 2.ª

¿Cómo se puede aplicar la anterior secuencia de tareas al dilema de la figura 1?

Inmediatamente debemos preguntarnos: ¿hay procedimientos para realizar esta secuencia de la forma más cómoda, eficaz y segura? La respuesta no es simple, en general.

En primer lugar, debe notarse que el lenguaje coloquial resulta poco preciso: lleva a emplear muchas palabras para comunicar ideas, cosa que podría evitarse buscando un léxico o jerga apropiados. Hay muchos ejemplos que confirman esta afirmación. El Caballero de Méré propone a B. Pascal que averigüe cómo se debe jugar a las cartas para ganar; como resultado del estudio de éste, apareció el lenguaje de las probabilidades. Ni siquiera disponiendo

Figura 2

de las otras jergas matemáticas se pueden resolver cómodamente los problemas de probabilidad (que, por cierto, no responden a la pregunta del Caballero de Méré). También es posible que el lenguaje apropiado no coincida con el que inicialmente "parece" más natural; así, en análisis matemático, se utiliza frecuentemente la jerga geométrica con la ventaja de que la mezcla sirve como motor para establecer propiedades.

En segundo lugar, es necesario disponer personalmente de "herramientas" que faciliten las tomas de decisiones y la realización de las actuaciones subsiguientes. Estas "herramientas" se "sacan" de los conocimientos e instrumentos obtenidos y producidos por la Humanidad a lo largo de los siglos. Son pocas, pero necesarias, las ocasiones en las que el resolutor inventa "sus herramientas". Ante un problema, es recomendable buscar y rebuscar todas las "herramientas" cuya utilidad concreta se considere plausible.

Indagación 3.ª

A la vista de los siguientes recortes de anuncios, formula problemas y resuélvelos.

El caso de la medicina

Una situación que se presenta con frecuencia viene descrita por la frase:

«Una persona se siente enferma.»

Los médicos procuran determinar si hay, o no, una enfermedad y, en caso afirmativo, tratan de curarla.

Para conseguir que la dificultad desaparezca, dan los siguientes pasos:

a) Hacer el historial clínico y explorar al paciente.

b) Interpretar los síntomas, los análisis, las radiografías, etc.

c) Emitir un diagnóstico y decidir un tratamiento.

d) "Mandar" al paciente que siga el tratamiento.

e) Comprobar la curación del enfermo, la aparición de efectos secundarios, etc.

Indagación 4.ª

4.1. Estudia la correspondencia existente entre esta secuencia de tareas y la secuencia expuesta en la tabla 1.

4.2. Establece la secuencia de tareas que siguen los mecánicos de coches para efectuar reparaciones y compárala con la de los médicos. (Indicación: comparar los léxicos y, hecha la salvedad de los léxicos, comparar las secuencias.)

El caso de algunos psicólogos

Los psicólogos llevan decenios derrochando esfuerzos e ingenio en su búsqueda de teorías que permitan pasar del estadio descriptivo (por ejemplo, el que corresponde a la Tabla 1) a un estadio explicativo con respecto a la resolución de problemas.

En el capítulo 1.° nos hemos referido a la secuencia "I.D.E.A.L.", que es una descripción dada por psicólogos.

Indagación 5.ª

Ante la situación:

«una persona está comprando los periódicos y revistas que lee los domingos por la tarde»,

un resolutor, utilizando la secuencia I.D.E.A.L., ha establecido lo siguiente:

Identificación: hay que abonar los periódicos y revistas.

Definición: ¿Cuánto importan una revista de 200 pesetas, otra de 160 pesetas y un periódico de 100 pesetas?

Exploración: Hallar, mentalmente, la suma de los precios de los ejemplares.

Actuación: 200 + 160 + 100 = 460. Hay que abonar 460 pesetas.

Logros: Revisar la definición (los datos están bien tomados); revisar el cálculo. El dinero devuelto es correcto. No hay nada que redefinir. La nueva situación es satisfactoria para el comprador.

5.1. Aplicar la secuencia de la tabla 1 a la situación del relato.

5.2. Comparar, cualitativamente, la secuencia I.D.E.A.L. y la secuencia de la tabla 1.

Entre los numerosos intentos realizados por psicólogos —e investigadores asimilados— para obtener un marco teórico susceptible de "explicar" el problema de la resolución de problemas, merecen especial atención —por nuestra parte— los enfoques o "teorías" del **procesamiento de la información**. De un modo genérico, estos enfoques se caracterizan por dos grandes líneas de investigación tendentes a comprender:

(i) "los procesos componentes, las estrategias y representaciones mentales de la información"; y

(ii) "las interacciones entre procesos, estrategias y representaciones que dan lugar a las diferencias individuales medidas en las capacidades"[1]

Es muy posible que la reestructuración teórica que acompañe a una futura teoría del procesamiento humano de la información aporte importantes métodos generales de resolución de problemas. Como aún se está lejos de dicha teoría, conviene, en la enseñanza, limitarse por ahora al nivel descriptivo —donde hay mucho que hacer— y, por volver al tema de este libro, a la resolución de problemas matemáticos.

El caso de las matemáticas

Consideramos que son problemas de matemáticas todos los que se resuelven empleando matemáticas, independientemente de la "rama del saber" o de la situación que los originaron.

Al estudiar fenómenos o situaciones de cualquier tipo, un resolutor puede ser conducido por su problema a uno de estos tres supuestos:

(I) en la resolución no hay matemáticas;

(II) en la resolución sí hay matemáticas;

(III) la situación es inabordable, pero su simplificación e idealización lleva al supuesto (I) o al supuesto (II).

En este último caso, se suele decir que el problema ha sido matematizado; de la situación inicial se ha pasado a otra situación inventada, y el problema es un problema inventado (como muchos otros problemas inventados por las personas).

En resumen: cuando nos dicen que un problema "es de matemáticas", es corriente sobreentender que se trata de un problema que se resuelve única y exclusivamente con conocimientos y medios matemáticos. Los matemáticos disponen de "herramientas" muy

---

[1] R. J. Sternberg (ed.). Trad. J. Vives. Labor, Barcelona, 1986.

potentes y de jergas muy apropiadas para resolver los problemas matemáticos; esto no es una casualidad, sino fruto de que en todas las épocas históricas se hayan estado planteando y resolviendo problemas de matemáticas; con "buenos problemas", independientemente de que tengan solución, acaban generándose buenos heurísticos, buenos procedimientos, buenos métodos de trabajo y buenos instrumentos. De esta experiencia histórica se puede aprender mucho y llegar a optimizar con procedimientos y métodos muy adecuados una secuencia de tareas (ya sea la de la tabla 1, la secuencia I.D.E.A.L. o cualquier otra).

Hay problemas que "consumen mucha energía" por parte de los resolutores. El último problema que abordaremos en este libro tardó, pese a su simple apariencia, "apenas" dos mil años en ser reconocido como "insoluble". No se trata de ningún caso "raro"; se pueden citar decenas de problemas que aún no han encontrado solución comunicable entre los matemáticos.

Este problema se dice, generalmente, así:

«Construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.»

El problema-tema: «La cuadratura del círculo»

En el campo de las construcciones geométricas hay una importante familia de problemas en las que se utiliza el verbo "cuadrar": cuando se pide "cuadrar tal figura" se entiende que hay que construir un cuadrado que tenga igual área que la figura dada. Quizá sea en los problemas de construcción donde la realización de la etapa segunda de nuestra secuencia ("Analizar el uso que podemos hacer de los conocimientos y medios de que disponemos") intervenga del modo más "crítico", ya que puede darse el caso de que los recursos de construcción que nos hayamos dado sean inoperantes —por más conocimientos que tengamos— para obtener resultados por lo demás "evidentes". Por ejemplo, si tu único procedimiento de construcción se basara en los "mecanos" de juguete, posiblemente tendrías dificultades insuperables a la hora de fabricar un tetraedro o, incluso, un cubo. Empecemos, pues, a cuadrar figuras con medios que exijan pocos conocimientos por parte de los resolutores; esto —pensamos— puede conseguirse "recortando" y "encajando" piezas, es decir, con los puzzles.

Indagación 6.ª

Dibuja en cartulina cada una de las siguientes figuras y córtalas en piezas por las líneas discontinuas. Por cada figura, forma un cuadrado con las piezas.

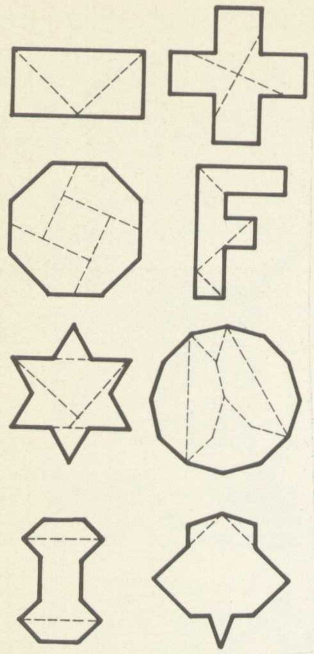


Figura 3: Rectángulo. Cruz griega. Octógono regular. Letra "F". Estrella de David. Dodecágono. Polígonos nazaritas

Otros medios para construir objetos geométricos, también considerados sencillos y a la vez los más venerables, lo constituyen la regla (de un solo borde) y el compás. Nos permitiremos referirnos conjuntamente a ellos con la expresión "maquinaria euclídea". Con ésta se hacen las llamadas construcciones euclídeas (se sobreentiende que toda construcción euclídea debe realizarse en un número finito de pasos).

Indagación 7.ª

En *El País Semanal* (última semana de agosto, 1987) aparece como diseño de una mesa el conocido puzzle de la cuadratura del triángulo equilátero ya hecho por Dudeney (ver figura 4).

Teniendo en cuenta que AP=BP, CQ=BQ, AR=1/4AC, CS=1/4CA, ¿puede hacerse la construcción con regla y compás?

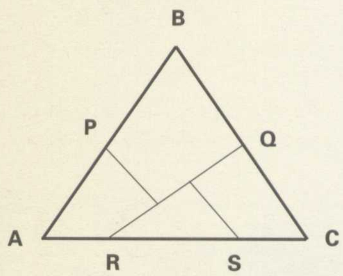


Figura 4. El puzzle de Dudeney

Si decidimos —como hicieran los matemáticos griegos— limitarnos a la regla y el compás, podemos enfocar de otro modo las cuestiones ligadas a los problemas de cuadrar figuras. ¿Se puede cuadrar cualquier figura plana de lados rectilíneos?

Indagación 8.ª

Utilizando sólo regla y compás:

8.1. Busca un método para cuadrar cualquier tipo de triángulos.

8.2. ¿Puedes cuadrar cualquier rectángulo? (Indicación: Repasa en el Problema de la Alfombra, capítulo 1.)

8.3. Cuadra los objetos que aparecen en la figura 3.

8.4. Demuestra que puede cuadrarse la superficie delimitada por cualquier poligonal cerrada. (Indicación: Consulta el libro *Geometría métrica*, de P. Puig Adam...)

8.5. Estudia el siguiente enunciado, debido a Fermat, y comprueba que no contradice la afirmación dada en 8.4:

«No existe un triángulo rectángulo de lados enteros y cuya área sea un cuadrado [perfecto]».

¿Se pueden cuadrar también figuras de lados curvilíneos? De todos es conocido el ejemplo del jarrón, cuya sección transversal puede cuadrarse (figura 5):

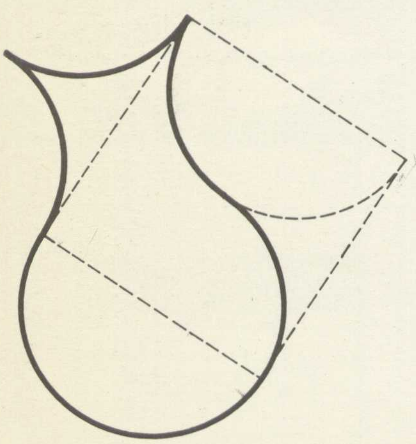


Figura 5. El jarrón, los cuatro círculos que lo forman y el cuadrado

La construcción geométrica puede hacerse con regla y compás; trácense cuatro circunferencias de igual radio dado, de modo que sean tangentes dos a dos; la tangente común a todas ellas determina el lado del cuadrado.

Si repasamos la historia de las matemáticas, podemos encontrar muy pronto intentos de cuadrar figuras de "lados" curvos: los círculos y otras figuras construidas con "trozos" de círculos.

Por ejemplo, las lúnulas de Hipócrates de Chíos (siglo VII) cumplen la propiedad de ser congruentes por adición al triángulo rectángulo en que se apoyan (figura 6); es decir, la suma de las áreas de las lúnulas coincide con el área del triángulo[1].

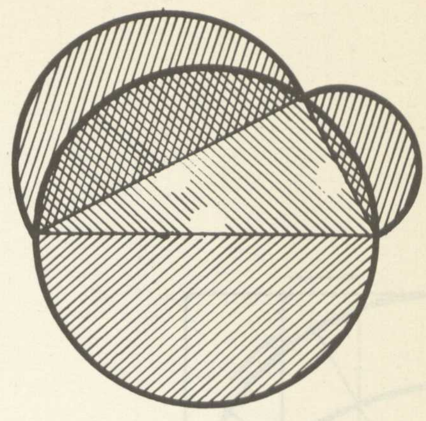


Figura 6. Las lúnulas asociadas a un triángulo rectángulo

Algunos investigadores conjeturaron que, al ser el área de una lúnula la mitad de la de un triángulo rectángulo isósceles (figura 7), también se podría calcular el área de un círculo como suma de lúnulas construidas sobre un cuadrado de área igual al círculo en cuestión.

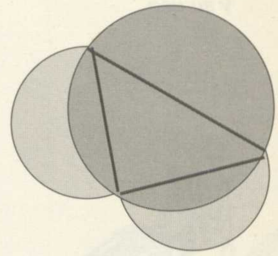


Figura 7. Las lúnulas equivalentes a un triángulo rectángulo isósceles

Indagación 9.ª

9.1. Leonardo da Vinci estuvo fascinado por la teoría anterior y la aplicó en sus diseños arquitectónicos para distribuir las capillas alrededor del altar mayor en sus iglesias. ¿Podrías justificar esta afirmación a la vista del diseño de la figura 8?

9.2. Enuncia la generalización para polígonos de n lados.

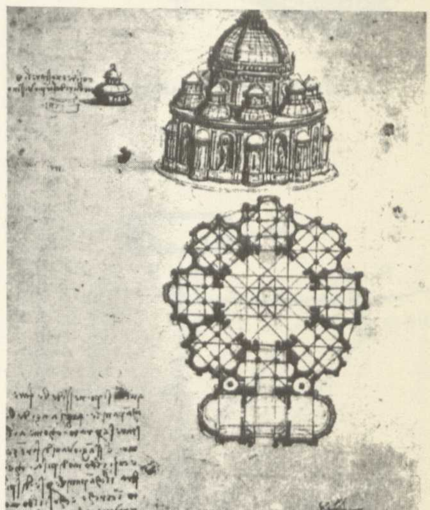


Figura 8. Una planta de iglesia diseñada por Leonardo

Ahora, ya conocemos el significado de "cuadrar", conviene acercarse a la palabra "cuadratura", ya que el problema que nos ocupa se conoce con el título de este apartado: "El problema de la **cuadratura** del círculo".

Como palabra castellana, "cuadratura" aparece en el siglo XVII; procede del latín "quadratura/ae", cuyo significado es el de dividir la tierra en cuadrados (parece obvio que con objeto de "medir" su superficie).

Acaso como consecuencia de la palabra latina, aparece en los libros de arte "la quadratura", una técnica de falseamiento arquitectónico que se desarrolló, fundamentalmente en Italia, durante el Barroco. Es la pintura de la arquitectura ilusionista que pretendía prolongar la verdadera arquitectura hacia un espacio imaginario. El Vaticano, la Galería Farnese o el palacio Barberini, todos ellos en Roma, presentan buenos ejemplos. En el capítulo 4 se dio un ejemplo del arte de la quadratura según Andrea Pozzo.

---

[1] En el capítulo 4 se hicieron sucesivas generalizaciones sobre los lados de un triángulo rectángulo. Ahora tienes la posibilidad de ampliar lo allí afirmado.

En los diccionarios modernos, "cuadratura" aparece principalmente asociada al cálculo de integrales definidas y, por ende, a la determinación de áreas. Sin embargo, también se utiliza para aludir a un problema concreto de disección; cuando se habla de 'la cuadratura del círculo' se hace referencia a la construcción de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado. Así, al referirnos a "la cuadratura del círculo" podemos entender que lo que se pretende es cuadrar un círculo.

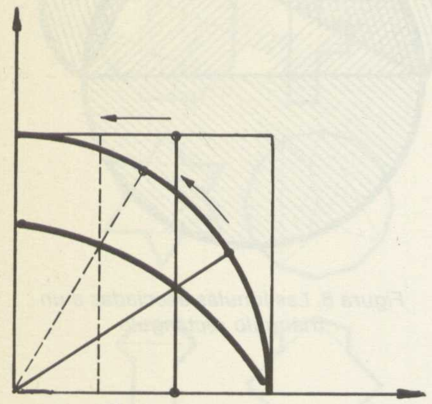


Figura 9. La cuadratiz de Dinostrato y su uso

Ya estamos en condiciones de examinar la incidencia de algunos medios de construcción en "la cuadratura del círculo" y el por qué de que el problema clásico carezca de solución.

Indagación 10.ª

El símbolo "π" designa el valor numérico del área de un círculo cuyo radio vale la unidad.

10.1. Utilizando una cuadrícula, acota el valor de π e indica la precisión obtenida.

10.2. Prueba que el área de un círculo de radio r es πr^2.

10.3. Prueba que la longitud de la circunferencia de radio r es $2 \pi r$.

La construcción de un segmento de longitud π daría significado a la definición y a los resultados de la Indagación 10.ª.

Se conocen dos modos (uno gráfico y otro mecánico) de conseguir tal construcción. En ambos se utilizan la regla, el compás y una curva auxiliar. En la resolución gráfica, la curva se construye punto a punto con la regla y el compás (de hecho, sólo puede construirse un número finito de puntos; el razonamiento se completa haciendo uso de la continuidad); en las construcciones mecánicas, la curva puede ser trazada de manera continua por un sistema mecánico.

Construcción gráfica

Fue Hipias (siglo V antes de J. C.) quien inventó la curva que se conoce con los nombres de "trisectriz de Hipias" (porque se utilizó en los intentos de resolver el problema de la trisección del ángulo) y "cuadratriz de Dinostrato" (porque éste, que vivió en el siglo IV antes de J. C., la empleó al tratar de resolver el problema de cuadrar el círculo). Construyendo un cuadrado OIJK y la circunferencia de centro O que pasa por I se procede como sigue (figura 9):

— Se considera una recta OE que gira uniformemente alrededor de O desde la posición OJ hasta la OI.

— Se considera también una recta J'K' que se desplaza uniformemente, permaneciendo vertical, desde JK hasta OI.

— Se supone que las rectas OE y J'K' parten simultáneamente de sus posiciones iniciales y llegan a la vez a las posiciones finales. El punto de intersección, Q, de las rectas OE y J'K' describe en el transcurso del movimiento una curva que es la cuadratriz de Dinostrato. El punto genérico de esta curva no es construible con regla y compás; pero sí pueden construirse con dichas herramientas numerosos puntos correspondientes a posiciones particulares de las rectas OE y J'K'. Por ejemplo, si J' es el punto medio del segmento OJ, E es el punto medio del arco IJ; si J' está en la cuarta parte del segmento OJ, E estaría en la cuarta parte del arco IJ, etc. Se ve así que, por construcción de mitades de segmentos y bisectrices de ángulos, pueden construirse con la regla y el compás todos los puntos de la cuadratriz cuyas ordenadas sean de la forma $m/2^n$, donde m y n son enteros tales que $0 \leq m \leq 2^n$.

Indagación 11.ª

Si Q_0 es el punto de intersección de la cuadratriz con la recta OI, este punto no es construible con regla y compás, pero, como todos los puntos de la cuadratriz, se puede obtener con una aproximación teórica tan grande como se quiera.

*11.1. Probar $OQ_0 = 2/\pi$.

11.2. Construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$.

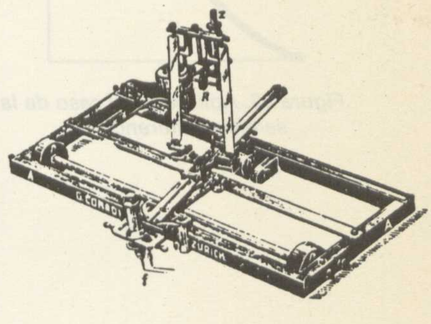


Figura 10. El intégrafo

Construcción mecánica

En 1889, el ingeniero ruso Abdank Abakanowicz inventó un aparato, llamado "intégrafo", que permite el trazado gráfico de funciones

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

cuando se da la gráfica de la función continua f (figuras 10, 11).

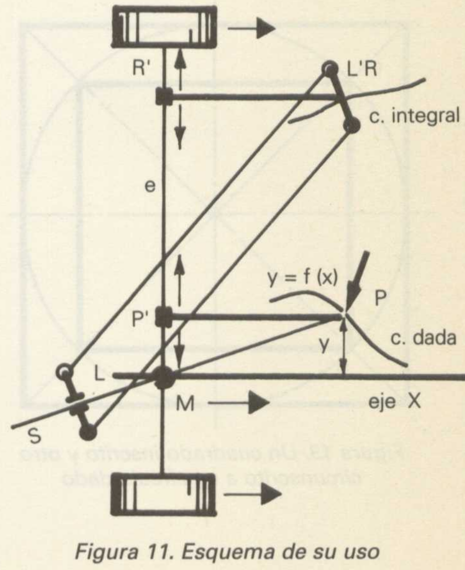


Figura 11. Esquema de su uso

El intégrafo permite dibujar la primitiva de la función correspondiente a la gráfica dada que se anula en el extremo inferior de la integral. Cada punto de la gráfica de la primitiva (denominada "curva integral") tiene una ordenada cuyo valor coincide con el área barrida por el punzón del aparato hasta ese momento. Si la curva dada es una semicircunferencia, cuando el punzón complete el recorrido sobre ésta, el lápiz habrá dibujado una curva cuyo último punto tiene una ordenada que vale $\pi/2$ (ver figura 12).

Utilizando ahora la regla y el compás podemos duplicar este segmento y obtener una representación gráfica de π.

Puede que el lector encuentre chocante el resultado anterior, que permite construir exactamente —en teoría— un segmento de longitud π. Por ello resultará provechosa la indagación siguiente.

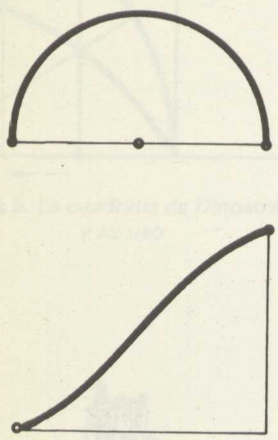


Figura 12. Aplicación al caso de la semicircunferencia

Indagación 12.ª

12.1. De las herramientas utilizadas en esta construcción exacta de π hay una de la que no se puede prescindir. Determina los pares posibles de herramientas imprescindibles.

12.2. La construcción anterior de p es de hecho una solución a otro problema cuya resolución equivaldría a cuadrar un círculo (la equivalencia fue demostrada por Arquímedes). ¿Cuál es tal problema?

*12.3. Si utilizáramos el intégrafo con una circunferencia completa, ¿podríamos obtener directamente un segmento de longitud π?

12.4. Simula un intégrafo con un ordenador.

Así, hemos conseguido realizar "la cuadratura del círculo": una vez obtenido el segmento de longitud π, es fácil construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$. Sin embargo, ¡la construcción no se ha hecho exclusivamente con maquinaria euclídea!

Una "construcción" basada en el análisis matemático

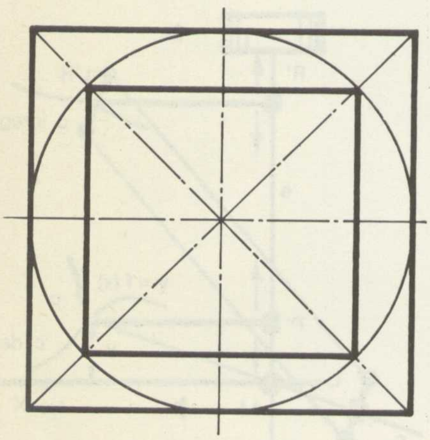


Figura 13. Un cuadrado inscrito y otro circunscrito a un círculo dado

Los analistas no suelen preocuparse por los procedimientos concretos de construcción; en su lugar, suelen quedar satisfechos cuando demuestran la existencia de un objeto matemático determinado. Si adoptamos este punto de vista, nuestro problema de "cuadrar el círculo" puede transformarse en el problema de «demostrar la existencia de un cuadrado cuyo área coincida con la de un círculo dado». Es relativamente fácil ver que existe tal cuadrado. Necesitamos dibujar un cuadrado ABCD inscrito, y otro EFGH circunscrito, al círculo dado (ver figura 13).

Indagación 13.ª

Comprueba que la figura 13 puede hacerse exclusivamente usando regla y compás.

El cuadrado circunscrito debe tener mayor área que el círculo y éste, a su vez, mayor área que el cuadrado inscrito. Reduciendo gradualmente el cuadrado circunscrito hasta llegar al inscrito, se pasa de un cuadrado de área mayor que la del círculo a otro de área menor: debe existir un cuadrado cuya área coincida con la del círculo. Este es el cuadrado requerido. Su lado mide, necesariamente, $r\sqrt{\pi}$.

Así llegamos a una segunda solución al problema de cuadrar el círculo. La primera construcción hace uso de una máquina no euclídea y la segunda, por necesitar infinitos cuadrados, no puede recibir el apelativo de "construcción euclídea".

Cuadraturas aproximadas

Se puede cuadrar, aproximadamente, el círculo utilizando sólo la regla y el compás. A lo largo de la historia se han ideado muchos procedimientos para construir un cuadrado cuya área es una aproximación suficiente a la del círculo dado. Como son relativamente sencillos, los proponemos como Indagaciones.

Indagación 14.ª

Inscribe en (respectivamente: circunscribe a) un círculo dado un polígono regular y divídelo en triángulos. Construye un paralelogramo cuyo área coincida con la suma de las áreas de estos triángulos y cuádralo. ¿Puedes estimar el error cometido en función del número de lados?

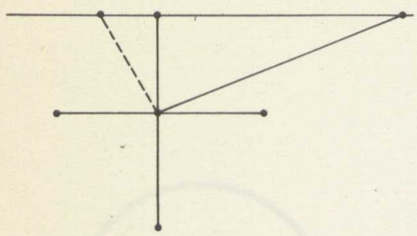


Figura 14. La aproximación de Kochansky

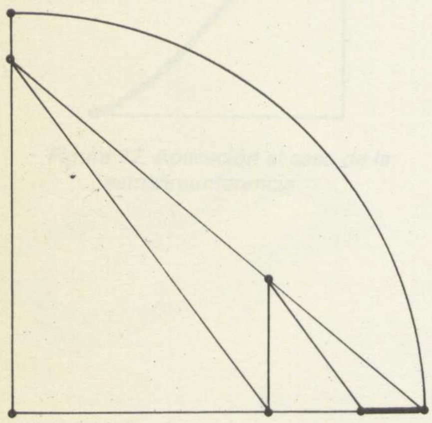


Figura 15. La construcción aproximada de pi por el método de Zu

Indagación 15.ª: La aproximación de Kochansky (1685)

Dado un círculo de centro M se dibuja un diámetro AB y se construye el perpendicular CD a AB. Se traza la paralela a AB que pasa por C (es tangente a la circunferencia). En esta recta vamos a marcar los dos puntos G y H. Para determinar el punto G, se trazará la recta que, pasando por M, forma un ángulo de +30° con MC (un punto F de dicha recta se obtiene fácilmente con la condición de que AF=AM); para determinar el punto H, basta con llevar, desde G y en el sentido G->C, tres veces el radio AM. La longitud del segmento HD es una aproximación "bastante buena" de media circunferencia del círculo (figura 14).

15.1. Calcula el valor de HD (tomando AM como unidad) y evalúa la calidad de la aproximación.

15.2. Construye el rectángulo PQRS (de base PQ=HD y de altura PR=AM) y el cuadrado equivalente. Has conseguido una cuadratura aproximada del círculo.

15.3. Supón que el radio de círculo mide 4 centímetros. ¿Cuál es la diferencia entre el lado del cuadrado que tiene exactamente igual área que el círculo dado y el lado del cuadrado obtenido?

Indagación 16.ª

Una de las aproximaciones de π más precisas es la debida al astrónomo chino Zu Chongzhi (siglo V después de J.C.); la construcción con regla y compás se basa en la determinación del segmento FG (figura 15); te pedimos que efectúes los razonamientos que llevan a su obtención.

Escrita en forma decimal, la fracción 16/113 tiene un período de 112 cifras que se muestran a continuación

1415929203539823008849557522123893805309734513 2743362831
858407079646017699115044247787 6 1061946902654867256637168.

Para que no pierdas el tiempo tratando de memorizar este resultado, se reproduce un elemental —y no muy cómodo— programa en BASIC que puedes utilizar para determinar (¡a mano!) el período de la escritura decimal de números racionales:

```
10 A#=16
20 B#=113
40 C#=A#\B#
50 A#=A# MOD B#
60 LPRINT C#;
70 A#=A#*10#
80 GOTO 40
```

Admitido que $\pi = 3.141592653589793...$, es evidente que

$$3 + 16/113 - \pi < 0.0000003.$$

Por lo tanto, el segmento 3.CG+FG sería el análogo al segmento HD en la aproximación de Kochansky. ¡Pero esta aproximación es mejor!

Las construcciones correspondientes a las Indagaciones 14.ª, 15.ª y 16.ª no son, rigurosamente hablando, "cuadraturas del círculo", ya que no son exactas; pero sí son construcciones euclídeas.

DONATIVO

El problema clásico

El problema clásico de la cuadratura del círculo se enuncia así:

«Construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado».

Si se elude la condición de que las herramientas sean euclídeas (lo que se consigue empleando el intégrafo, por ejemplo) o la condición —implícita en toda construcción euclídea— de que el proceso de construcción sea finito, el problema tiene solución; si se cambia la condición de igualdad de áreas por la de aproximación de áreas, el problema también tiene solución. ¿Por qué no tiene solución el problema clásico? ¡La culpa es del número π!

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
CIDE
BIBLIOTECA

El papel de π

Los trabajos de Ferdinand Lindemann (1882) permitieron demostrar que la construcción buscada por los griegos era imposible. En reconocimiento a la gran aportación matemática que supuso el dar una respuesta definitiva —y negativa— al problema, en una galería de la Universidad de Munich figura un busto de F. Lindemann; bajo su nombre figura la letra π dentro de un círculo y un cuadrado.

Dicho a grandes rasgos, la conexión entre el descubrimiento de F. Lindemann y la imposibilidad de cuadrar el círculo es la siguiente:

Se define:

— Un número es algebraico si es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales (elementos de Q).

— Si un número no es algebraico, se llama trascendente.

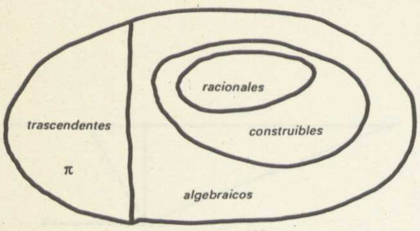


Figura 16

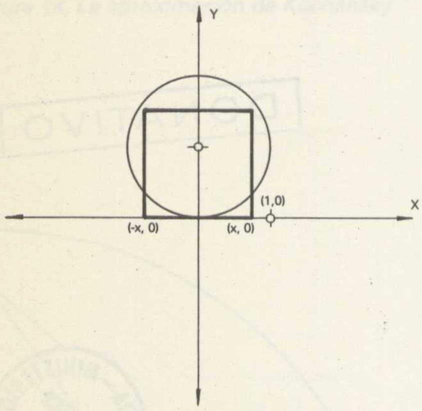


Figura 17

Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ es algebraico, por ser solución de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0;$$

(los coeficientes son todos racionales: 1, 0 y —2 en el sentido de los grados decrecientes).

Se demuestra que el conjunto de los números construibles con regla y compás contiene a los racionales y está contenido en el de los algebraicos (figura 16).

F. Lindemann demostró que π no es algebraico. Por tanto (figura 16), no es posible contruir, con regla y compás, un segmento de longitud π.

La contradicción concreta a la que se llega en el caso de la cuadratura del círculo con regla y compás es la siguiente: con los datos de la figura 17,

se deduce que el área del cuadrado es $(2x)^2$, mientras que el área del círculo es p. Por tanto, la igualdad de áreas exige

$$4x^2 = \pi$$

o, lo que es lo mismo,

$$4x^2 - \pi = 0. \quad [1]$$

La ecuación [1] no es una ecuación algebraica, porque π no es racional. Al resolver [1], se obtiene que la abscisa x del punto A debe tomar el valor $\sqrt{\pi/2}$. Pero, al ser p trascendente (Lindemann), también lo serán $\sqrt{\pi}$ y $\sqrt{\pi/2}$. Como ningún número trascendente es construible con regla y compás, se deduce la imposibilidad de resolver el problema clásico de la cuadratura del círculo.

El caso de las matemáticas escolares

En el caso de las matemáticas escolares, a las que hemos dedicado los cuatro primeros capítulos de este libro, las etapas 4.ª y 5.ª (ver tabla 1) presentan particularidades, ya que la mayoría de los cambios de situación no afectan al "mundo exterior" de los alumnos, sino a su propia "vivencia" de las matemáticas.

Sin embargo, el asumir la solución y las etapas que condujeron a ella no puede implicar ningún tipo de uniformidad en lo que respecta a los procedimientos o métodos utilizados por distintos alumnos o grupos de alumnos. Al resolver problemas se desarrollan la imaginación y la "intuición", se afrontan situaciones imprevistas, se toman decisiones de un modo sopesado; con el éxito y con el fracaso se adquieren nuevas perspectivas. La confrontación —en el diálogo— de personalidades y procedimientos o métodos es necesariamente enriquecedora para alumnos y profesores.

Al resolver problemas se aprende y al aprender se resuelven problemas.

Esta frase no es paradójica, ni tampoco es un hallazgo del siglo XX. Por remontarnos veinticinco siglos, cerraremos el libro con una sentencia de Confucio.

Indagación 17.ª

Articula un curso de matemáticas con ayuda de estas dos ideas (si las compartes), tomadas de *Las Analectas:*

"Aquel que sigue examinando sus viejos conocimientos y adquiriendo otros nuevos puede convertirse en maestro de los demás."

"Aprender sin pensar es inútil. Pensar sin aprender es peligroso."