MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
CENTRO DE PROFESORES
CEUTA

MOVIMIENTOS Y HOMOTECIAS DEL PLANO EUCLIDEO EN LAS MATEMATICAS I DE C.O.U.

JORGE A. GONZALEZ RAMIREZ

AUTOR: JORGE A. GONZALEZ RAMIREZ

EDITA: CEP DE CEUTA. MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

DEPOSITO LEGAL: CE 42/92

ISBN: 84-600-8056-0

INTRODUCCION

En el mes de Diciembre de 1.991, se celebró en Ceuta una reunión entre los coordinadores de Matemáticas I y II de C.O.U. de la Universidad de Granada y los profesores que, durante el curso académico 1.991/92, estábamos impartiendo tales asignaturas. Durante la citada reunión, el coordinador de Matemáticas I nos manifestó que el tema *"Movimientos y Homotecias en el plano Euclídeo"*, que formó parte de la programación el curso anterior y por diversas razones no se impartió, se incluyese esta vez.

Hacía ya bastantes años que el tema de Movimientos no se explicaba y, a pesar de ello, algunas editoriales continuaron incluyendolo en los libros de texto durante algún tiempo, hasta que, por razones obvias, dejaron de hacerlo.

Entre el material que los coordinadores nos habían facilitado para el desarrollo de la asignatura Matemáticas I (Programación de contenidos, lista de ejercicios propuestos en selectividad, etc.), se encontraba un texto teórico titulado *"Transformaciones y Movimientos"*, elaborado para la coordinación de la asignatura, en el que se intentaba cubrir el vacío existente y adaptar el tema a los conocimientos que los alumnos de C.O.U. han de tener, de acuerdo con las programaciones actuales.

Tras un cambio de impresiones con algunos compañeros observé que, ante el estrecho margen de tiempo para desarrollar el programa de Matemáticas I y la falta de ejercicios resueltos para el tema de Movimientos, sería útil y de interés elaborar este trabajo. En él se intenta adecuar la parte teórica, lo más posible, y se presentan los 29 ejercicios propuestos por la coordinación y resueltos detalladamente.

Quiero mostrar mi agradecimiento al compañero Prof. Barrio Río, por su colaboración en la revisión final de este trabajo que, espero sea de utilidad para el profesorado que imparta las Matemáticas I en C.O.U.

Jorge Antonio González Ramírez

MOVIMIENTOS EN EL PLANO EUCLIDEO

Se llama **Movimiento** del plano Euclídeo a toda **Transformación** (aplicación biyectiva que actúa sobre objetos geométricos) del plano en sí mismo que conserva la distancia entre puntos. Es decir, si P y Q son puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ y P' y Q' son sus transformados por el movimiento, se verifica que $d(P',Q') = d(P,Q)$.

TRASLACIONES EN EL PLANO EUCLIDEO

Sea $\vec{u}= (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$. Se llama **Traslación** de vector $\vec{u}$, a la aplicación biyectiva

$$T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto T_{\vec{u}}(P)=P'$$

tal que $\overrightarrow{PP'}= \vec{u}$.

Observación. La aplicación identidad

$$I_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto I_{\mathbb{R}^2}(P)=P$$

es la traslación de vector $\vec{0}$, pues $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

ECUACIONES DE UNA TRASLACION.

Si $P=(x,y)$ y $P'= T_{\vec{u}}(P) =(x',y')$,entonces $\overrightarrow{PP'}= \vec{u}$,que es equivalente a $\overrightarrow{OP'}- \overrightarrow{OP} = \vec{u}$, de donde $\overrightarrow{OP'}= \overrightarrow{OP} + \vec{u}$.

Luego, $(x',y')= (x,y) + (u_1,u_2)$ y las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x'= x + u_1 \\ y'= y + u_2 \end{cases}$$

PROPIEDADES E INVARIANTES

(a) Toda traslación es un Movimiento, pues conserva las distancias entre puntos.

En efecto, si P' y Q' son los transformados por $T_{\vec{u}}$ de dos puntos cualesquiera P y Q de $\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$d(P',Q') = |\overrightarrow{P'Q'}| = |\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{OQ} + \vec{u} - (\overrightarrow{OP} + \vec{u})| = |\overrightarrow{PQ}| = d(P,Q)$$

(b) Toda traslación conserva los ángulos y sus sentidos.

(c) Toda traslación distinta de la identidad no deja ningún punto fijo (invariante).

En efecto. Si $T_{\vec{u}}$ tiene un punto fijo P, $T_{\vec{u}}(P) = P \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$. Luego $T_{\vec{u}} = I_{\mathbb{R}^2}$

(d) Cualquier recta que tenga vector director proporcional al vector $\vec{u}$ de la traslación, permanece invariante frente a esta.

Es decir, $T_{\vec{u}}(r) = r \Leftrightarrow \lambda\,\vec{u}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es director de r.

En efecto. Sea $T_{\vec{u}}$ y r una recta de dirección $\lambda\,\vec{u}$. Entonces,

$\forall\, P \in r \quad T_{\vec{u}}(P) = P' \in r$, ya que $PP' = \vec{u}$ y $\vec{u}$ es también director de la recta. Por tanto, $T_{\vec{u}}(r) = r$.

(e) Toda traslación transforma rectas en rectas paralelas($T_{\vec{u}}(r)=r'$, con $r' \parallel r$). Sólo permanecen invariantes ($T_{\vec{u}}(r) = r$) las rectas referidas en (d).

En efecto, sea $r \equiv Ax + By + C = 0$. Entonces su vector director es $\vec{v} = (-B,A)$. Consideremos las ecuaciones de la traslación $T_{\vec{u}}$:

$$T_{\vec{u}} \equiv \begin{cases} x' = x + u_1 \\ y' = y + u_2 \end{cases}$$, despejando x e y , y sustituyendo

en la ecuación de r se tiene la ecuación:

$$Ax' + Bx' + D = 0 \text{ , donde } D = -Au_1 - Bu_2 + C$$

(f) <u>Toda Traslación transforma circunferencias de centro *C*=(a,b) y radio *r* en circunferencias de centro *C'*=$T_{\vec{u}}(C)$ y radio *r*</u> .

Trivial, ya que conserva las distancias entre puntos.

(g) <u>Toda traslación transforma Polígonos regulares en polígonos regulares.</u>

COMPOSICION DE TRASLACIONES.

Sean $T_{\vec{u}}$ y $T_{\vec{v}}$ dos traslaciones. Entonces,

$$(T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}})(P) = T_{\vec{u}}[\,T_{\vec{v}}(P)] = T_{\vec{u}}(P') = P''$$

y obviamente se ha de cumplir que $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{P'P''} = \vec{u}$, de donde

$$\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \vec{v} + \vec{u}$$. Luego,

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} \quad ; \quad \forall\, \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

INVERSA DE UNA TRASLACION

Sea $T_{\vec{u}}$ una traslación. Veamos que su traslación inversa es $T_{-\vec{u}}$.

En efecto, $T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}} = T_{\vec{u}-\vec{u}} = T_{\vec{0}} = I_{\mathbb{R}^2}$.

Análogamente se ve que $T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} = I_{\mathbb{R}^2}$

ROTACIONES O GIROS EN EL PLANO EUCLIDEO

Sea $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y α un ángulo en radianes ($\alpha \in \mathbb{R}$). Se llama **Rotación** (o **Giro**) de centro P_0 y ángulo α a la aplicación biyectiva

$$\mathrm{R}_{P_0,\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto \mathrm{R}_{P_0,\alpha}(P) = \begin{cases} P_0 & \text{si } P = P_0 \\ P' & \text{si } P \neq P_0 \end{cases}$$

que deja fijo a P_0 y asigna a cualquier otro P un único P' que verifica

$$d(P_0,P) = d(P_0,P') \qquad \text{y} \qquad P\hat{P_0}P' = \alpha$$

Observaciones.

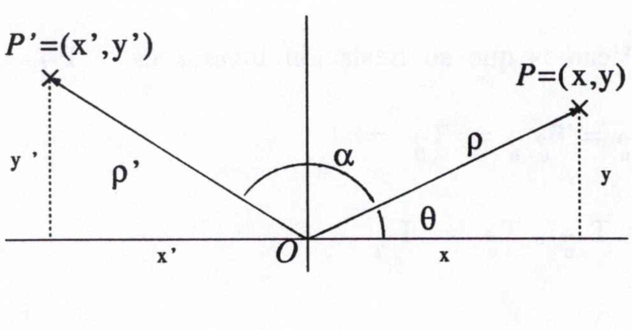
(a) Una rotación de centro cualquier punto y ángulo 2π es la identidad.

(b) Las rotaciones de centro P_0 y ángulo π se denominan **Simetrías Centrales** respecto de P_0.

ECUACIONES DE UNA ROTACION

(A) Rotaciones con centro en el origen O de coordenadas

Sea $\mathrm{R}_{O,\alpha}$ una rotacion de centro O=(0,0) y ángulo α . Sean $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{R}_{O,\alpha}(P) = P'=(x',y')$, $|\overrightarrow{OP}| = \rho$ y $|\overrightarrow{OP'}| = \rho'$. Si Q es un punto cualquiera del eje de abscisas y $\theta = Q\hat{O}P$, se tiene:



$$\begin{cases} \rho = \rho' \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \,\text{sen}\, \theta \end{cases}$$

Llamando $\theta' = \theta + \alpha$, y sustituyendo en las expresiones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \rho' \cos \theta' \\ y' = \rho' \operatorname{sen} \theta' \end{array}\right. \quad \text{, tenemos que :}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \rho \cos(\theta + \alpha) \;=\; \rho \cos \theta \ \cos \alpha - \rho \operatorname{sen} \theta \ \operatorname{sen} \alpha \;=\; x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ y' = \rho \operatorname{sen}(\theta + \alpha) \;=\; \rho \operatorname{sen} \theta \ \cos \alpha + \rho \cos \theta \ \operatorname{sen} \alpha \;=\; x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{array}\right.$$

Luego, $\left\{\begin{array}{l} x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ y' = y \operatorname{sen} \alpha - x \cos \alpha \end{array}\right\}$ ECUACIONES DE UNA ROTACION DE CENTRO $O=(0,0)$ Y ANGULO α.

(B) Rotaciones con centro en un punto P_0 cualquiera y ángulo α.

Sea $\vec{u} = \overrightarrow{OP_0}$. Observemos que el proceso de efectuar una rotación de centro el origen y,posteriormente, hacer una traslación que nos lleve el origen a P_0, es decir $T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha}$, es equivalente a efectuar primero una traslación que lleve el origen en P_0 y, con ese centro,efectuar la rotación, es decir $R_{P_0,\alpha} \circ T_{\vec{u}}$. Por tanto, podemos escribir:

$$R_{P_0,\alpha} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \quad ,$$

y componiendo por la derecha con $T_{-\vec{u}}$ en ambos miembros, tenemos:

$$R_{P_0,\alpha} = T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \circ T_{-\vec{u}} \quad .$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OP_0} = (x_0,y_0)$, se tiene:

$$(x',y') = R_{P_0,\alpha}(x,y) = (T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \circ T_{-\vec{u}})(x,y) = (T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha})(x - x_0, y - y_0) =$$

$$= T_{\vec{u}} \left[\ (x-x_0) \cos \alpha - (y-y_0) \operatorname{sen}\alpha \ , (x-x_0) \operatorname{sen} \alpha + (y-y_0) \cos \alpha \ \right] =$$

$$= \left[\ (x-x_0) \cos \alpha - (y-y_0) \operatorname{sen} \alpha \ + x_0 \ , (x-x_0) \operatorname{sen} \alpha + (y-y_0) \cos \alpha \ + y_0 \ \right]$$

Por tanto,

$$\left\{\begin{array}{l} x' = (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\,\text{sen}\,\alpha + x_0 \\ y' = (x-x_0)\,\text{sen}\alpha + (y-y_0)\cos\alpha + y_0 \end{array}\right\}$$ ECUACIONES DE UNA ROTACION DE CENTRO $P_0=(x_0,y_0)$ Y ANGULO α

<u>Observación.</u>

Si la rotación es una Simetría Central ($\alpha=\pi$) , las ecuaciones quedan de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{array}\right\}$$ ECUACIONES DE UNA SIMETRIA CENTRAL CON CENTRO EN $P_0=(x_0,y_0)$.

PROPIEDADES E INVARIANTES

(a) **<u>Toda rotación es un Movimiento,</u> pues conserva las distancias entre puntos.** $\forall\, P,Q \in \mathbb{R}^2$, $d(P,Q) = d(R_{P_0,\alpha}(P)\,,\,R_{P_0,\alpha}(Q))$

Es facil de demostrar teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores.

(b) **<u>Toda rotación conserva los ángulos y sus sentidos.</u>**

(c) **<u>Si una rotación es distinta de la identidad</u>** ($R_{P_0,\alpha} \neq I_{\mathbb{R}^2}$) , **<u>su único punto fijo</u> (invariante) <u>es el centro de rotación.</u>**

(d) **<u>Cualquier circunferencia de centro el centro de una rotación, permanece invariante frente a esta.</u>**

(e) **<u>En el caso</u> particular** $\alpha = \pi$ **(Simetrías Centrales), <u>cada recta</u>** r **<u>que pase por el centro de la rotación permanece invariante</u> trás la rotación.**

$$\text{Si } P_0 \in r \;\Rightarrow\; \forall\, P \in r \quad R_{P_0,\alpha}(P) = P' \in r$$

(f) La única Transformación del plano Euclídeo que es a la vez Traslación y Rotación es la identidad.

COMPOSICION DE ROTACIONES Y TRASLACIONES

(A) La **Composición de** dos **Rotaciones del mismo centro**, es otra Rotación de igual centro cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las rotaciones compuestas.

$$R_{P_0,\alpha} \circ R_{P_0,\beta} = R_{P_0,(\alpha+\beta)}$$

(B) Toda Rotación puede descomponerse como composición de una Rotación de centro el origen y una Traslación.

$$\exists\, \vec{u}, \vec{v} \quad \text{tal que} \quad R_{P_0,\alpha} = T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \quad \text{y} \quad R_{P_0,\alpha} = R_{O,\alpha} \circ T_{\vec{v}}$$

(En general $\vec{u} \neq \vec{v}$)

(C) La **Composición de una Traslación y una Rotación de centro distinto del origen** , es otra Rotación.

(D) La **Composición de dos Rotaciones de centros distintos** , puede ser una Rotación o una Traslación.

INVERSA DE UNA ROTACION

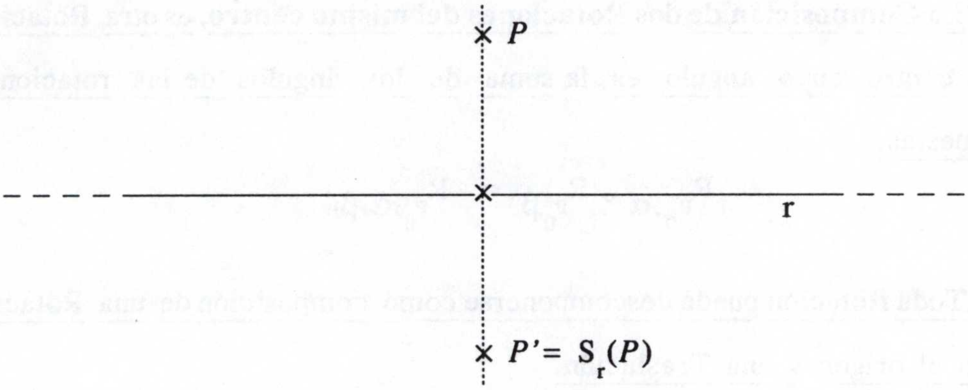
La inversa de una rotación es también una rotación.

Si consideramos la rotación $R_{P_0,\alpha}$, su inversa es $R_{P_0,(2\pi-\alpha)}$.

Es facil comprobar que $R_{P_0,\alpha} \circ R_{P_0,(2\pi-\alpha)} = R_{P_0,(2\pi-\alpha)} \circ R_{P_0,\alpha} = I_{\mathbb{R}^2}$

SIMETRIAS AXIALES(resp. de una recta)DEL PLANO EUCLIDEO

Sea r una recta de $\mathbb{R}^2$. Se define la **Simetría respecto de r** como la aplicación biyectiva $S_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que asigna a cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ un punto $P' = S_r(P)$ de forma que r sea la mediatriz del segmento PP'.



ECUACIONES DE UNA SIMETRIA

Sea $r \equiv Ax + By + C = 0$. Si $P = (x,y)$ y $P' = S_r(P) = (x',y')$, como el punto medio del segmento PP' , $PM_{\overline{PP'}} = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$,

tiene que satisfacer la ecuación de r se tiene:

$$A\,\frac{x+x'}{2} + B\,\frac{y+y'}{2} + C = 0 \qquad [I]$$

Por otra parte,el vector $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = (x'-x\ ,\ y'-y)$ es perpendicular a r y, por tanto, linealmente dependiente con $\vec{\omega} = (A,B)$. Luego,

$(x'-x\ ,\ y'-y) = \lambda\,(A,B)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x'-x = \lambda\,A \\ y'-y = \lambda\,B \end{array}\right\} \quad [II]$$

Despejando x' e y' de [I] y [II] , se obtienen las ecuaciones genéricas de la simetría, pero no las expondré aquí porque resultan un tanto "engorrosas"; Por lo que se sugiere que en la práctica, pues resulta bastante más cómodo, se calculen las ecuaciones [I] y [II] y se obtengan en el caso concreto las ecuaciones.

En particular, si r es el eje de abscisas (y=0) las ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y \end{array}\right\}$$

PROPIEDADES E INVARIANTES

(a) Toda simetría respecto de una recta es un Movimiento, pues conserva las conserva las distancias entre puntos.

$$\forall\ P,Q \in \mathbb{R}^2 \qquad d(P,Q) = d(\ S_r(P)\ ,\ S_r(Q)\ )$$

(b) Toda simetría respecto a una recta transforma cada ángulo en su opuesto.

(c) Toda simetría deja fijos (invariantes) los puntos de su eje de simetría.

$$\forall\ P \in r \qquad S_r(P) = P$$

(d) Todas las rectas perpendiculares al eje r de una simetría S_r, permanecen invariantes frente a esta.

Si $s \perp r \Rightarrow \forall\ P \in s \quad S_r(P) = P' \in s$. Es decir, $S_r(s) = s$

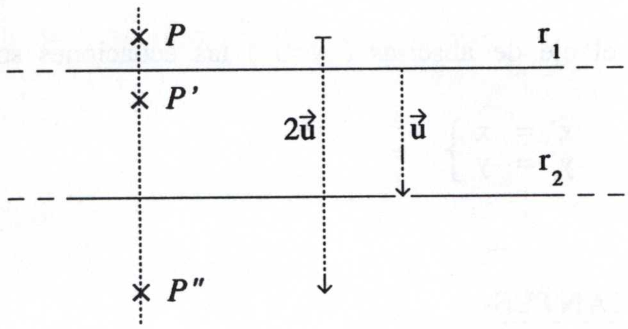
(e) Toda circunferencia cuyo centro esté en el eje de una simetría,permanece invariante frente a esta.

COMPOSICION DE SIMETRIAS

Distinguiremos dos casos:

(A) Cuando los ejes de simetría sean paralelos

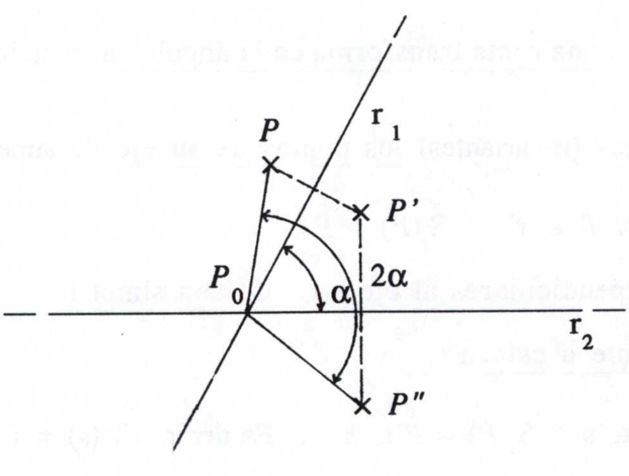
En este caso, la composición de las dos simetrías es una traslación.



$$S_{r_2} \circ S_{r_1} = T_{2\vec{u}}$$

(B) Cuando los ejes de simetría se corten

En este segundo caso, la composición de las simetrías es una rotación.



$$S_{r_2} \circ S_{r_1} = R_{P_0, 2\alpha}$$

INVERSA DE UNA SIMETRIA

La inversa de cualquier simetría es ella misma.

$S_r \circ S_r = I_{\mathbb{R}^2}$ cualquiera que sea la recta r .

OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LOS MOVIMIENTOS ESTUDIADOS

Todas las **Transformaciones** estudiadas hasta el momento, **Traslaciones, Rotaciones** y **Simetrías**, son **Movimientos** y tienen las siguientes propiedades comunes:

(1) Transforman rectas en rectas.

(2) Transforman circunferencias en circunferencias de igual radio.

(3) Transforman polígonos de n lados en polígonos de n lados (triángulos en triángulos, cuadrilateros en cuadrilateros, etc.)

(4) Conservan el paralelismo y la perpendicularidad de las rectas y , en particular, polígonos regulares en polígonos regulares.

(5) Todo Movimiento que deja un punto fijo (invariante), es una Rotación o una Simetría.

HOMOTECIAS EN EL PLANO EUCLIDEO

Sea $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$. Se llama **Homotecia** de centro P_0 y razón k , a la aplicación biyectiva definida por:

$$H_{P_0,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$P \longmapsto H_{P_0,k}(P) = P' \quad , \text{ tal que } \quad \overrightarrow{P_0P'} = k\ \overrightarrow{P_0P} \ .$$

Observación Importante.

Teniendo en cuenta las siguientes equivalencias,

$$\overrightarrow{P_0P'} = k\,\overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP_0} = k\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0} + k\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP'} = k\ \overrightarrow{OP} + (1 - k)\ \overrightarrow{OP_0}$$, se tiene que:

$$H_{P_0,k}(P) = k\,P + (1-k)\,P_0$$

Otras observaciones.

A partir de la expresión anterior obtenemos que:

(a) Si $k = 1 \Rightarrow H_{P_0,1}(P) = P \quad \forall P \in \mathbb{R}^2$. Luego, $H_{P_0,1} = I_{\mathbb{R}^2}$

(b) Si $k = -1 \Rightarrow H_{P_0,-1}(P) = -P + 2\,P_0$, y es una simetría central respecto de P_0.

ECUACIONES DE UNA HOMOTECIA

Sea $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x,y)$ y $H_{P_0,k}(P) = P' = (x',y')$.

Desarrollando la expresión $H_{P_0,k}(P) = k\,P + (1 - k)\,P_0$,ya conocida,según las coordenadas de los puntos , se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = k\,x + (1\text{-}k)\,x_0 \\ y' = k\,y + (1\text{-}k)\,y_0 \end{array}\right\} \quad \text{ECUACIONES DE UNA HOMOTECIA DE CENTRO } P_0=(x_0,y_0) \text{ Y RAZON } k\,.$$

PROPIEDADES E INVARIANTES

(a) Una Homotecia no es un Movimiento , salvo que sea la identidad (k = 1) o una simetría central (k = -1), pues no conserva la distancia entre puntos.

Si $P\,,\,Q \in \mathbb{R}^2$ y $H_{P_0,k}(P) = P'$ y $H_{P_0,k}(Q) = Q'$

$$d(P',Q') = |\,k\,|\;d(P\,,Q)$$

En efecto. De $H_{P_0,k}(P) = P'$ y $H_{P_0,k}(Q) = Q'$, se sabe que

$\overrightarrow{P_0P'} = k\,\overrightarrow{P_0P}$ y $\overrightarrow{P_0Q'} = k\,\overrightarrow{P_0Q}$ respectivamente , y se verifica que:

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P_0Q'} - \overrightarrow{P_0P'} = -k\,\overrightarrow{P_0P} + k\,\overrightarrow{P_0Q} = k\,(\overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0P}) = k\,\overrightarrow{PQ}\,.$$

Luego, $\overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{PQ}$ y, por tanto, $d(P',Q') = |\,k\,|\;d(P\,,Q)$.

(b) Si $k > 0$, la homotecia conserva el sentido de los ángulos.

Si $k < 0$, la homotecia invierte el sentido de los ángulos.

Esto es consecuencia inmediata de (a).

(c) Toda homotecia deja fijo (invariante) el centro de la misma, y es el único punto fijo salvo que esta sea la identidad.

(d) Todas las rectas que pasen por el centro de una homotecia permanecen invariantes frente a esta.

(e) Toda homotecia transforma rectas en rectas.

(f) Toda homotecia $H_{P_0,k}$ transforma circunferencias de centro $C = (a,b)$ y radio r en circunferencias de centro $H_{P_0,k}(C)=(a',b')$ y radio $|k|\,r$.

COMPOSICION DE HOMOTECIAS

(A) La composición de dos homotecias de igual centro, $H_{P_0,k}$ y $H_{P_0,k'}$, es otra homotecia del mismo centro P_0 y razón $k\,k'$.

$$H_{P_0,k} \circ H_{P_0,k'} = H_{P_0,kk'}$$

(B) La composición de dos homotecias de centros distintos, $H_{P_0,k}$ y $H_{P'_0,k'}$, es otra homotecia de centro P''_0, alineado con P_0 y P'_0, y razón $k\,k'$.

$$H_{P_0,k} \circ H_{P'_0,k'} = H_{P''_0,kk'}$$

INVERSA DE UNA HOMOTECIA

Observemos que si de las ecuaciones de una homotecia $H_{P_0,k}$,

$$\begin{cases} x' = k\,x + (1-k)\,x_0 \\ y' = k\,y + (1-k)\,y_0 \end{cases}$$

, despejamos x e y se obtienen:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}\,x' + (1-\frac{1}{k})\,x_0 \\ \\ y = \frac{1}{k}\,y' + (1-\frac{1}{k})\,y_0 \end{cases}$$

, que son las ecuaciones de $H_{P_0,1/k}$.

Es facil de comprobar que la inversa de $H_{P_0,k}$ es la homotecia $H_{P_0,1/k}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

(1) Calcular las ecuaciones de una traslación en el plano que transforme la circunferencia $\mathcal{C}_1$ de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en la $\mathcal{C}_2$ de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Razonar la respuesta.

Solución.

La circunferencia $\mathcal{C}_1$ tiene por centro el punto $C_1 = (1,2)$ y radio $r_1 = 1$. Mientras que $\mathcal{C}_2$ tiene centro $C_2 = (0,0)$ y radio $r_2 = 1$.

Como toda traslación conserva el radio (distancia entre puntos) y transforma el centro, se tiene que $C_2 = T_{\vec{u}}(C_1)$. Por tanto, bastará considerar la traslación $T_{\vec{u}}$ de vector:

$$\vec{u} = \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} = (-1,-2)$$

Luego, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

---

(2) Dados los vectores $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (1,4)$,se consideran las traslaciones a ellos asociadas $T_{\vec{v}}$ y $T_{\vec{w}}$. Se pide:

(a) Calcular la imagen del punto $A = (-1,3)$ por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}}$.

(b) Calcular también la imagen por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}}$ de la recta r de ecuación $x + 2y - 2 = 0$. Razonar ambas respuestas.

Solución.

(a) Sabemos que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}+\vec{w}}$. Como $\vec{v} + \vec{w} = (3,5)$,las ecuaciones de $T_{\vec{v}+\vec{w}}$ son :

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 5 \end{cases} \text{, e.d. } (x',y') = T_{\vec{v}+\vec{w}}(x,y) = (x+3,y+5)$$

Luego, $\left(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}}\right)(A) = T_{\vec{v}+\vec{w}}(-1,3) = (-1+3,3+5) = (2,8)$.

(b) Toda traslación transforma rectas en rectas. Calculemos la ecuación de la recta imagen de $r \equiv x + 2y - 2 = 0$ por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}}$.

1ª FORMA

Despejando x e y de las ecuaciones de $T_{\vec{v}+\vec{w}}$, $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 5 \end{cases}$, y sustituyendo en la ecuación de r ,se tiene:

$(x' - 3) + 2(y' - 5) - 2 = 0 \iff x' + 2y' - 15 = 0$ que es la ecuación de la recta imagen buscada.

2ª FORMA

Expresemos r en ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \quad - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \qquad (\text{ observemos que } (0,1) \in r \text{ }) \ .$$

Sustituyendo la x y la y de estas ecuaciones en las ecuaciones de $T_{\vec{v}+\vec{w}}$ se obtienen las paramétricas de la recta imagen que son:

$$r' = T_{\vec{v}+\vec{w}}(r) \equiv \begin{cases} x' = 3 - 2\lambda \\ y' = 6 + \lambda \end{cases}$$

3ª FORMA

Se hallan las imágenes *P'* y *Q'* de dos puntos *P* y *Q* de r y , a continuación, se calcula la ecuación de la recta que pasa por ellos.

---

(3) Se considera el triángulo cuyos vertices son A=(0,0), B=(2,0) y C=(0,3) y las traslaciones $T_{\overrightarrow{BC}}$, $T_{\overrightarrow{CA}}$, $T_{\overrightarrow{AB}}$ asociadas a sus lados. Sean $A' = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$, $B' = T_{\overrightarrow{CA}}(B)$ y $C' = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$. Probar que A , B y C son los puntos medios de los lados del triángulo de vertices A', B', C'.

Solución.

Calculemos las ecuaciones de las traslaciones asociadas a los lados:

$\overrightarrow{BC} = (0,3)-(2,0) = (-2,3) \Rightarrow T_{\overrightarrow{BC}} \equiv \begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow (x',y') = T_{\overrightarrow{BC}}(x,y) = (x-2, y+3)$

$\overrightarrow{CA} = (0,0)-(0,3) = (0,-3) \Rightarrow T_{\overrightarrow{CA}} \equiv \begin{cases} x' = x \\ y' = y-3 \end{cases} \Leftrightarrow (x',y') = T_{\overrightarrow{CA}}(x,y) = (x, y-3)$

$\overrightarrow{AB} = (2,0)-(0,0) = (2,0) \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}} \equiv \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow (x',y') = T_{\overrightarrow{AB}}(x,y) = (x+2, y)$

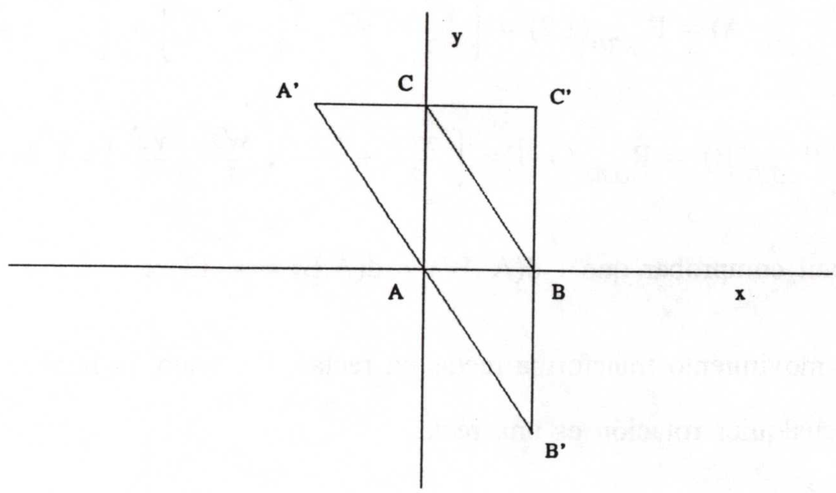
Los vértices del nuevo triángulo (el transformado por la traslación) son:

$A' = T_{\overrightarrow{BC}}(A) = T_{\overrightarrow{BC}}(0,0) = (-2,3)$; $B' = T_{\overrightarrow{CA}}(B) = T_{\overrightarrow{CA}}(2,0) = (2,-3)$; $C' = T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{AB}}(0,3) = (2,3)$. Calculemos a continuación los puntos medios de los lados del triángulo A'B'C':

$$PM_{\overline{A'B'}} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-3}{2} \right) = (0,0) \Rightarrow PM_{\overline{A'B'}} = (0,0) = A$$

$$PM_{\overline{B'C'}} = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{-3+3}{2} \right) = (2,0) \Rightarrow PM_{\overline{B'C'}} = (2,0) = B$$

$$PM_{\overline{C'A'}} = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = (0,3) \Rightarrow PM_{\overline{C'A'}} = (0,3) = C$$



(4) Sea $R_{O,\alpha}$ la rotación en el plano de centro el origen y ángulo $\alpha = \pi/4$. Sean $A=(1,2)$ y $B=(3,-1)$. Se pide :

(a) Calcular $A' = R_{O,\alpha}(A)$ y $B' = R_{O,\alpha}(B)$ y comprobar que la distancia entre A' y B' es la misma que entre A y B.

(b) Calcular la imagen por $R_{O,\alpha}$ de la recta r de ecuación $2x - 4y - 3 = 0$. ¿Es la imagen otra recta? . Razonarlo.

Solución.

Las ecuaciones de una rotación de centro el origen son de la forma:

$$R_{O,\alpha} \equiv \begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha \end{cases} \text{, o lo que es equivalente ,}$$

$$(x',y') = R_{O,\alpha}(x,y) = (x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \, , \, x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) \ .$$

En nuestro caso particular :

$$(x',y') = R_{O,\pi/4}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) \ .$$

(a) $$A' = R_{O,\pi/4}(A) = R_{O,\pi/4}(1,2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \, , \, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$B' = R_{O,\pi/4}(B) = R_{O,\pi/4}(3,-1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2\sqrt{2} \, , \, \sqrt{2})$$

Es facil comprobar que $d(A',B') = d(A,B) = \sqrt{13}$.

(b) Todo movimiento transforma rectas en rectas. Por tanto, la imagen de una recta por cualquier rotación es una recta.

Despejando x e y de las ecuaciones de $R_{O,\pi/4}$, obtenemos:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = \frac{-\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases}$$. Sustituyendo en la ecuación de r ,

$2x -4y -3 = 0$, y operando se tiene : $3\sqrt{2}\, x' - \sqrt{2}\, y' - 3 = 0$,que es la ecuación de la recta imagen por $R_{O,\pi/4}$.

Observación. Este apartado (b) también puede resolverse expresando r en ecuaciones paramétricas y sustituyendo x e y en las ecuaciones de $R_{O,\pi/4}$ directamente.

---

(5) Calcular las ecuaciones de una rotación en el plano , con centro el punto $P_0= (1,1)$ y ángulo $\pi/2$. Calcular también la figura imagen por dicho giro de una circunferencia centrada en el origen y con radio uno. ¿Es esta figura una nueva circunferencia?. Razonar la respuesta.

Solución.

Recordemos que las ecuaciones de un giro de centro $P_0=(x_0,y_0)$ y ángulo α son :

$$R_{P_0,\alpha} \equiv \begin{cases} x'= (x-x_0) \cos \alpha - (y-y_0) \text{ sen } \alpha + x_0 \\ y'= (x-x_0) \text{ sen } \alpha + (y-y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$R_{P_0,\pi/2} \equiv \begin{cases} x'= (x-1) \cos \pi/2 - (y-1) \text{ sen } \pi/2 + 1 \\ y'= (x-1) \text{ sen } \pi/2 + (y-1) \cos \pi/2 + 1 \end{cases}$$, operando se llega a que

$$R_{(1,1),\pi/2} \equiv \begin{cases} x'= - y + 2 \\ y'= x \end{cases}$$ son las ecuaciones buscadas.

Dada cualquier circunferencia, toda rotación conserva su radio (por ser movimiento) y transforma su centro (sólo queda invariante si coincide con el centro de rotación). Por tanto, el resultado es una circunferencia de igual radio y distinto centro, pues $(1,1) \neq (0,0)$.

En efecto. Para hallar la transformada de $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = 1$, bastará con despejar x e y de las ecuaciones de $R_{(1,1),\pi/2}$ y sustituir en la la ecuación de $\mathscr{C}$. Procedamos :

$\begin{cases} x = y' \\ y = -x' + 2 \end{cases}$. Sustituyendo se tiene, $(y')^2 + (-x' + 2)^2 = 1 \iff$

$\iff (x' - 2)^2 + y'^2 = 1$. Que es una circunferencia de centro $C=(2,0)$ y radio 1.

---

(6) Se consideran las rotaciones en el plano $R_{P,\alpha}$ y $R_{Q,\beta}$ con centros $P=(1,1)$ y $Q=(1,2)$ y ángulos $\alpha = \pi/4$ y $\beta = -\pi/4$ respectivamente. ¿Qué movimiento del plano es $R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta}$? . Razonese la respuesta.

Solución.

El resultado puede ser, en principio, una traslación o una rotación, pues los centros de ambos giros son distintos. Pero si nos percatamos de que los ángulos son opuestos, la respuesta es "traslación".

En efecto. Toda rotación puede descomponerse como composición de una rotación de centro el origen y una traslación (ver pág. 11). Por tanto, se pueden obtener descomposiciones de la forma:

$$R_{P,\alpha} = T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \quad \text{y} \quad R_{Q,\beta} = R_{O,\beta} \circ T_{\vec{v}} \quad . \text{ Así ,}$$

$$R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta} = \left(T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha} \right) \circ \left(R_{O,\beta} \circ T_{\vec{v}} \right) = T_{\vec{u}} \circ \left(R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} \right) \circ T_{\vec{v}} =$$

$= T_{\vec{u}} \circ R_{O,(\alpha+\beta)} \circ T_{\vec{v}}$. Como $\alpha + \beta = \pi/4 + (-\pi/4) = 0$, entonces

$R_{O,(\alpha+\beta)} = I_{\mathbb{R}^2}$ y obtenemos que $R_{P,\alpha} \circ R_{Q,\beta} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{(\vec{u}+\vec{v})}$

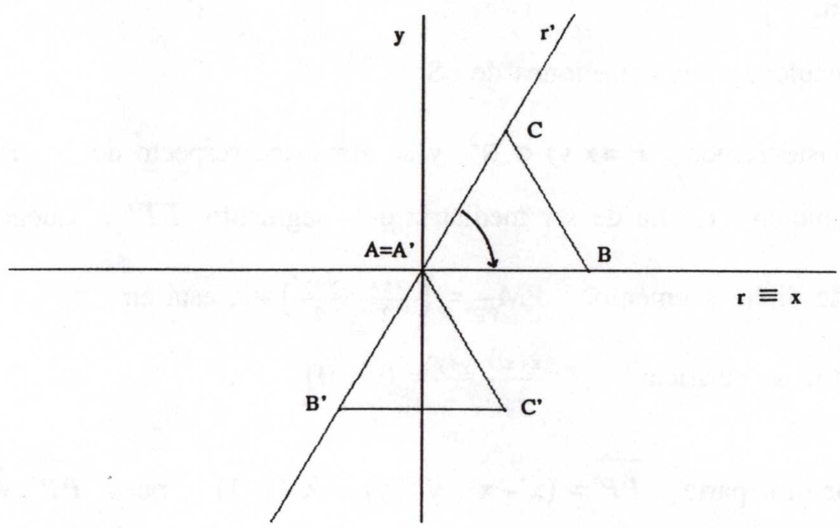
---

(7) Sean A, B y C los vértices de un triángulo equilatero y sean r y r' las rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente de dicho triángulo. Se consideran las simetrías S_r y $S_{r'}$ de ejes r y r' respectivamente.(a) Calcular el triángulo imagen del ABC por el movimiento $S_r \circ S_{r'}$, haciendo un dibujo del mismo.(b) Calcular analíticamente los vértices A',B'yC' del triángulo imagen, en el caso de que A=(0,0) , B=(1,0) y C=(1/2,√3/2).

Solución.

(a) Recordemos que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro de ángulo doble del que forman los ejes (ver pág. 14). En nuestro caso:

$$S_r \circ S_{r'} = R_{A,-2\pi/3}$$



(b) Si A=(0,0) , las ecuaciones del giro son:

$$R_{(0,0),-2\pi/3} \equiv \begin{cases} x' = \frac{-1}{2}\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}\, y \\ y' = \frac{-\sqrt{3}}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y \end{cases}$$, o lo que es equivalente,

$$(x',y') = R_{(0,0),-2\pi/3}(x,y) = \left[\frac{-1}{2}\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}\, y \,,\, \frac{-\sqrt{3}}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y \right] \text{ , por tanto,}$$

$$A' = R_{(0,0),-2\pi/3}(0,0) = (0,0)$$

$$B' = R_{(0,0),-2\pi/3}(1,0) = (-1/2\,,-\sqrt{3}/2)$$

$$C' = R_{(0,0),-2\pi/3}(1/2,\sqrt{3}/2) = (1/2\,,-\sqrt{3}/2)$$

---

(8) **Sea la simetría axial S_r ,donde r es la recta de ecuación $x - y = 0$. Se pide:**

(a) Calcular $S_r(A)$, donde $A = (2,5)$.

(b) Calcular $S_r(s)$,donde s es la recta de ecuación $4x - y - 3 = 0$.

Solución.

Calculemos las ecuaciones de S_r .

Consideremos $P=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y su simétrico respecto de r , $P'=(x',y')$. Por definición, r ha de ser mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Luego, el punto medio de dicho segmento, $PM_{\overline{PP'}} = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right)$, está en $r \equiv x - y = 0$.

Por tanto, se verifica: $\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} = 0$ [I] .

Por otra parte $\overrightarrow{PP'} = (x'- x \,,\, y'- y) = \lambda\,(1,-1)$, pues $\overrightarrow{PP'} \parallel \vec{w}=(1,-1)$.

Así, tenemos:
$$\left\{ \begin{array}{l} x'- x = \lambda \\ y'- y = -\lambda \end{array} \right. \quad [II]$$

De [I] y [II] se tiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'+ x = y'+ y \\ x'- x = y'- y \end{array} \right.$$. Resolviendolo, considerando x' e y' incognitas, se

obtienen las ecuaciones buscadas: $S_r \equiv \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow (x',y') = S_r(x,y) = (y,x).$

(a) Calculemos el simétrico de $A=(2,5)$.

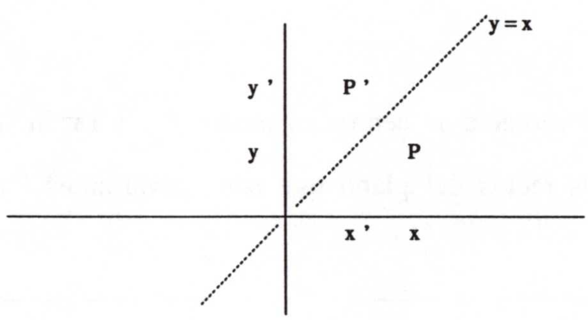
$$S_r(A) = S_r(2,5) = (5,2) \quad \Rightarrow \quad A' = (5,2)$$

(b) Para calcular la recta transformada de $s \equiv 4x - y - 3 = 0$,bastará sustituir en la ecuación de s los valores de x e y de S_r. Por tanto,

$$S_r(s) \equiv 4y' - x' - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - 4y' + 3 = 0 \ .$$

Observación.

Las ecuaciones de S_r ,del problema (8), se han obtenido analíticamente. No obstante, al ser r la bisectriz del primer cuadrante $(y = x)$, se podrian haber obtenido tales ecuaciones deduciendolas directamente de un grafico.



---

(9) Obtener razonadamente las homotecias del plano que son a su vez movimientos. En cada caso especificar de que movimiento se trata.

Solución.

Toda homotecia de centro P_0 y razón k ,

$$H_{P_0,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto H_{P_0,k}(P) = k\,P + (1\text{-}k)\,P_0$$

verifica que:

$\forall\, P,Q \in \mathbb{R}^2 \quad d(P,Q) = |\,k\,|\; d(P',Q')$;siendo $P' = H_{P_0,k}(P)$ y $Q' = H_{P_0,k}(Q)$.

Para que fuese también movimiento habría de cumplir que $|\,k\,| = 1$, o lo que es equivalente, $k = 1$ ó $k = -1$.

Si $k = 1$

$$H_{P_0,1}(P) = 1.P + 0.P_0 = P \quad , \forall\, P \in \mathbb{R}^2 \;.$$

Luego , $H_{P_0,1} = I_{\mathbb{R}^2}$ (es la identidad)

Si $k = -1$

$$H_{P_0,-1}(P) = (-1).P + (1-(-1)).P_0 = -P + 2P_0 \quad , \forall\, P \in \mathbb{R}^2 \;.$$

Luego , $H_{P_0,-1}$ es una Simetría Central respecto de P_0 (ver págs. 7 y 10).

---

(10) Dada una homotecia de centro un punto P_0 y razón 2 . Obtener razonadamente todas las rectas del plano que son invariantes (ó fijas) por dicha homotecia.

Solución.

1ª FORMA

El transformado de un punto cualquiera $P \in \mathbb{R}^2$ por una homotecia de centro P_0 y razón k es: $H_{P_0,k}(P) = k\,P + (1\text{-}k)\,P_0$. En nuestro caso particular (k = 2) tenemos: $H_{P_0,2}(P) = 2\,P - P_0$. Por tanto, sus ecuaciones son

$$H_{P_0,2} \equiv \begin{cases} x' = 2x - x_0 \\ y' = 2y - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x',y') = H_{P_0,2}(x,y) = (2x - x_0 \ , \ 2y - y_0)$$

Consideremos una recta genérica $r \equiv A\,x + B\,y + C = 0$ y calculemos su transformada por la homotecia. Para ello, despejemos x e y de las ecuaciones de $H_{P_0,2}$ y sustituyamoslas en la ecuación de r . Procedamos.

$x = \dfrac{x' + x_0}{2}$, $y = \dfrac{y' + y_0}{2}$. Sustituyendo en la ecuación de r , tenemos la ecuación de su transformada por $H_{P_0,2}$: $A\,\dfrac{x'+x_0}{2} + B\,\dfrac{y'+y_0}{2} + C = 0 \quad \Leftrightarrow$

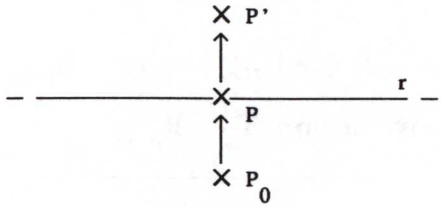
$\Leftrightarrow \quad Ax' + By' + (2C + Ax_0 + By_0) = 0$.

Como queremos hallar las rectas que son invariantes por la homotecia , impongamos que los coeficientes de la ecuación de la recta transformada coincidan con los de la ecuación de r . Para ello bastará que,

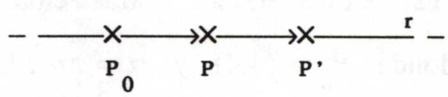
$2C + Ax_0 + By_0 = C$, lo que implica que $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Es decir, la recta ha de pasar por P_0.

En resumen, $H_{P_0,2}(r) = r$ si, y sólo si, la recta r pasa por P_0 .

2ª FORMA



(Figura 1)



(Figura 2)

Si r no pasa por P_0 (Fig. 1), el transformado P' de P no está en r , así que no puede permanecer invariante.

Si r pasa por P_0 (Fig. 2), cualquier punto P de r se transforma en otro punto de r . Luego, la recta permanece invariante.

(11) Sea $H_{O,k}$ una homotecia de centro $O=(0,0)$. Se sabe que la imagen por $H_{O,k}$ del punto $A=(2,1)$ está en la recta $r \equiv x + 3y - 15 = 0$.

(a) hallar el valor de la razón k de la homotecia.

(b) Calcular las coordenadas del punto $H_{O,k}(B)$, siendo $B = (3,-1)$.

Solución.

Sea un punto cualquiera $P=(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$P' = H_{O,k}(P) = k\,P + (1-k)\,O$. Por coordenadas:

$$(x',y') = H_{O,k}(x,y) = k(x,y) + (1-k)(0,0) = (kx,ky) \quad \Leftrightarrow \quad H_{O,k} \equiv \begin{cases} x' = k\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$$

(a) Como $H_{O,k}(2,1) = (2k, k) \in r$, habrá de satisfacer su ecuación. Luego, $2k + 3k - 15 = 0$, de donde $k = 3$.

(b) Del apartado anterior se tiene que la homotecia es:

$$H_{O,3} \equiv \begin{cases} x' = 3\,x \\ y' = 3\,y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad H_{O,3}(x,y) = (3x,3y)$$

. Por tanto,

$$H_{O,3}(B) = H_{O,3}(3,-1) = (9,-3) \ .$$

---

(12) Consideremos la traslación $T_{\vec{v}}$, con $\vec{v} = (4,4)$, y el giro $R_{P_0,\alpha}$, donde $P_0 = (4,4)$ y $\alpha = \pi/2$. Calcular el movimiento $T_{\vec{v}} \circ R_{P_0,\alpha}$.

Solución.

Sabemos que la composición de una traslación y una rotación de centro distinto del origen , es otra rotación. Calculemos las ecuaciones en nuestro caso particular.

Las ecuaciones de la traslación $T_{\vec{v}}$ son:

$$T_{(4,4)} \equiv \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x',y') = T_{(4,4)}(x,y) = (x+4, y+4)$$

Por otra parte, las ecuaciones de la rotación $R_{P_0,\alpha}$ son:

$$R_{(4,4),\pi/2} \equiv \begin{cases} x' = (x-4)\cos(\pi/2) - (y-4)\,\mathrm{sen}(\pi/2) + 4 = -y + 8 \\ y' = (x-4)\,\mathrm{sen}(\pi/2) + (y-4)\cos(\pi/2) + 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x',y') = R_{(4,4),\pi/2}(x,y) = (-y+8, x) \quad .$$

Así,

$$(T_{\vec{v}} \circ R_{P_0,\pi/2})(x,y) = T_{\vec{v}}[R_{P_0,\pi/2}(x,y)] = T_{\vec{v}}(-y+8, x) = (-y+12, x+4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{\vec{v}} \circ R_{P_0,\pi/2} \equiv \begin{cases} x' = -y + 12 \\ y' = x + 4 \end{cases}$$

OTRA FORMA MENOS ANALITICA

Recordemos que toda rotación de centro $P_0 \neq (0,0)$,puede descomponerse de la forma $R_{P_0,\alpha} = T_{\vec{u}} \circ R_{O,\alpha}$. En nuestro caso $R_{(4,4),\pi/2} = T_{(8,0)} \circ R_{(0,0),\pi/2}$. Por tanto, la composición estudiada en el en el ejercicio 12 quedaría:

$$T_{(4,4)} \circ R_{(4,4),\pi/2} = T_{(4,4)}(T_{(8,0)} \circ R_{(0,0),\pi/2}) = (T_{(4,4)} \circ T_{(8,0)}) \circ R_{(0,0),\pi/2} =$$

$= T_{(12,4)} \circ R_{O,\pi/2}$. Luego, el resultado es una rotación de centro distinto del origen.

---

(13) Sea $T_{\vec{v}}$ la traslación en el plano asociada a un vector $\vec{v}$ no nulo . ¿Tiene $T_{\vec{v}}$ algún punto fijo?. Ilustrar esta situación poniendo un ejemplo.

Solución.

1ª FORMA

Sea $\vec{v} = (a,b)$ con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. Las ecuaciones de $T_{\vec{v}}$ son :

$$T_{\vec{v}} \equiv \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow (x',y') = T_{\vec{v}}(x,y) = (x+a,y+b) \quad .$$

Supongamos que $\exists\, P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T_{\vec{v}}(P_0) = P_0$. Entonces,

$$(x_0,y_0) = T_{\vec{v}}(x_0,y_0) = (x_0 + a, y_0 + b) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_0 + a \\ y_0 = y_0 + b \end{cases}$$,de donde se obtiene

que $a = 0$ y $b = 0$ contra lo supuesto. Luego, si $\vec{v} \neq \vec{0}$, $T_{\vec{v}}$ no tiene ningún punto fijo.

Ejemplo. Si $\vec{v} = (1,0)$ y $T_{(1,0)}(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$, entonces se tiene que $1 = 0$ lo cual es absurdo.

2ª FORMA

Si $T_{\vec{v}}$ tiene un punto fijo P , $T_{\vec{v}}(P) = P \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ en contra de lo supuesto.

---

(14) Sea $R_{P_0,\alpha}$ un giro en el plano. ¿Cuántos puntos fijos tiene?. Discutirlo según los valores de α e ilustrarlo con un ejemplo en el que α sea distinto de cero.

Solución.

Supongamos que $\exists\, P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $R_{P_0,\alpha}(P) = P$. Entonces, sustituyendo en las ecuaciones de la rotación se tienen las expresiones,

$$\begin{cases} x = (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\,\mathrm{sen}\,\alpha + x_0 \\ y = (x-x_0)\,\mathrm{sen}\,\alpha + (y-y_0)\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

que podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} (x-x_0)(1-\cos\alpha) = -(y-y_0)\operatorname{sen}\alpha \\ (y-y_0)(1-\cos\alpha) = (x-x_0)\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \qquad [I]$$

Distingamos los siguientes casos, según $\operatorname{sen}\alpha$ sea ó no nulo.

(a) Si $\underline{\alpha = 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = 0$ y $1-\cos\alpha = 0$ y se verifica [I] $\forall P \in \mathbb{R}^2$. Es decir, todos los puntos del plano permanecen invariantes por la rotación (La rotación es la identidad).

(b) Si $\underline{\alpha \neq 2\pi k}$, entonces $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ siempre que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$ y, en tal caso, dividiendo miembro a miembro las ecuaciones de [I] se tiene:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{-(y - y_0)}{x - x_0} \quad \Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2 = -(y-y_0)^2$$

,y esta última igualdad sólo puede darse si ambos miembros son nulos. Luego, $x-x_0 = 0$ e $y-y_0= 0$ $\Rightarrow$ $x = x_0$ e $y = y_0$. Por tanto, el único punto fijo sería el centro de rotación $P_0 = (x_0,y_0)$.

Si $\underline{\alpha = \pi + 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = 0$ y $1-\cos\alpha = 2$ y de [I] obtenemos que $\begin{cases} 2\,(x-x_0) = 0 \\ 2\,(y-y_0) = 0 \end{cases}$, de donde $x = x_0$ e $y = y_0$.

Es decir, el único punto fijo es también el centro del giro $P_0= (x_0,y_0)$.

En resumen. Si una rotación es distinta de la identidad, su único punto fijo es el centro de rotación.

Ejemplo.

Consideremos la rotación $R_{O,\alpha}$ de centro el origen y ángulo $\alpha = \pi/2$.

Sus ecuaciones son:

$$R_{(0,0),\pi/2} \equiv \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Si $P=(x,y)$ es un punto fijo del citado giro, se tiene que:

$$\begin{cases} x = -y \\ y = x \end{cases} \text{, de donde } x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ .}$$

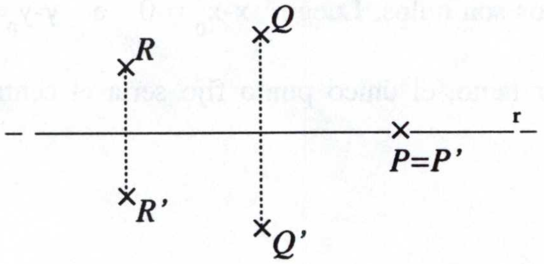
---

(15) Sea r una recta en el plano y S_r la simetría axial de eje r .

¿Cuáles son los puntos fijos de S_r ? . Ilustrar el ejercicio con un ejemplo.

Solución.

Teniendo en cuenta la definición de simetría respecto de una recta, es evidente que los únicos puntos fijos de S_r son los puntos de su eje.



; $S_r(P) = P \iff P \in r$

Veamoslo analíticamente con un ejemplo.

Consideremos la simetría que tiene por eje r el eje de abscisas (y = 0). De ocasiones anteriores ya sabemos que las ecuaciones de tal simetría son:

$$S_r \equiv \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \iff (x',y') = S_r(x,y) = (x\ ,-y)$$

Supongamos que $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo de S_r . Entonces,

$$S_r(P) = P \iff \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \iff y = 0 \iff P = (x,0) \in r \equiv y = 0 \text{ .}$$

---

(16) Sea $H_{O,a}$ una homotecia del plano con centro el origen y razón $a \neq 0$. ¿Cuáles son los puntos fijos de $H_{O,a}$?.

Solución.

Sabemos que $\forall\, P=(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad P' = H_{O,a}(P) = aP + (1-a)O$. En coordenadas,

$$(x',y') = H_{O,a}(x,y) = a(x,y) + (1-a)(0,0) = (ax,ay) \quad \Leftrightarrow \quad H_{O,a} \equiv \begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$$

Supongamos que $P_1=(x_1,y_1)$ es fijo por la homotecia. Entonces, se tiene

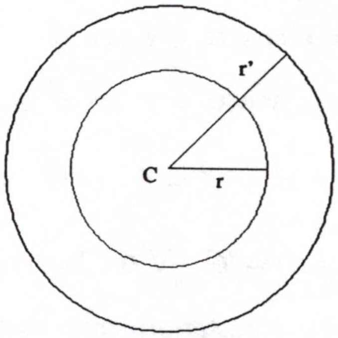
$$\begin{cases} x_1 = ax_1 \\ y_1 = ay_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-a)x_1 = 0 \\ (1-a)y_1 = 0 \end{cases} \text{, de donde } \quad x_1 = y_1 = 0 \quad \text{ó} \quad a = 1 .$$

Es decir, el único punto fijo es $O=(0,0)$ salvo que $H_{O,a}$ sea la identidad.

(17) ¿ Se puede asegurar que dos circunferencias concéntricas (mismo centro y radios distintos) son homotéticas a través de una homotecia de razón distinta de uno ? . Ilustrar la situación con un ejemplo.

Solución.

Consideremos las circunferencias $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ de igual centro C y radios r y r' respectivamente, siendo $r < r'$. Sabemos que toda homotecia distinta



de la identidad tiene a su centro como único punto fijo. Además, toda homotecia $H_{P_0,k}$,trasforma circunferencias de centro C y radio r en circunferencias de centro $H_{P_0}(C)$ y radio $|\,k\,|\, r$. Por consiguiente, si consideramos la homotecia de centro el centro C común de ambas circunferencias y razón $k = r'/r$, podemos asegurar que las circunferencias son homotéticas. Es decir, $H_{C,r'/r}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Ejemplo.

Sean las circunferencias $\mathscr{C} \equiv x^2 + y^2 = 4$ y $\mathscr{C}' \equiv x^2 + y^2 = 9$,de centro común $O=(0,0)$ y radios 2 y 3 respectivamente. Según lo visto anteriormente, la homotecia $H_{(0,0),3/2}$ ha de transformar $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. En efecto,las ecuaciones de la homotecia son:

$$(x',y') = H_{(0,0),3/2}(x,y) = \frac{3}{2}(x,y) + \left(1-\frac{3}{2}\right)(0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad H_{(0,0),3/2} \equiv \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$$. Si despejamos x e y de estas ecuaciones y las sustituimos en la ecuación de $\mathscr{C}$, se obtiene:

$$\left[\frac{2}{3}x'\right]^2 + \left[\frac{2}{3}y'\right]^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 = 9$$, que es la ecuación de $\mathscr{C}'$.

---

(18) Consideremos el giro en el plano, $R_{O,\alpha}$, de centro $O=(0,0)$ y ángulo α. Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de centro el origen y radio dos.

Comprobar que $R_{O,\alpha}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$, cualquiera que sea α .

Solución.

Las ecuaciones de $R_{O,\alpha}$ son: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$.

La ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ es : $x^2 + y^2 = 4$.

Para comprobar analíticamente que $R_{O,\alpha}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$ $\forall\,\alpha$,bastará con que despejemos x e y de las ecuaciones del giro y,posteriormente, sustituyamos en la ecuación de $\mathscr{C}$. En efecto. Multiplicando la primera ecuación de $R_{O,\alpha}$ por $\mathrm{sen}\,\alpha$ (resp. $\cos\alpha$), la segunda por $-\cos\alpha$ (resp. $\mathrm{sen}\,\alpha$) y sumando ambas miembro a miembro, obtenemos: $\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = -x'\operatorname{sen}\alpha - y'\cos\alpha \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación de $\mathscr{C}$ se tiene: $(x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha)^2 + (-x'\operatorname{sen}\alpha - y'\cos\alpha)^2 = 4$.

Operando se llega a $x'^2 + y'^2 = 4$. Luego, $R_{O,\alpha}(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \quad \forall\, \alpha$.

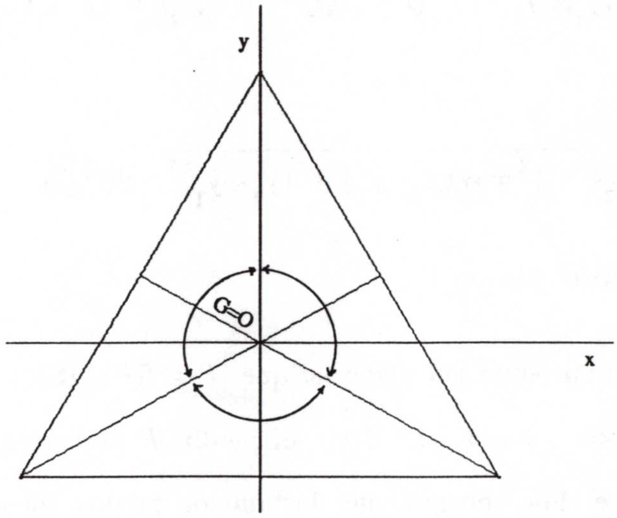
---

(19) Sea T un triángulo equilátero, cuyo baricentro es el origen de coordenadas. Se considera el conjunto de los giros del plano con centro $O=(0,0)$, esto es, $\mathscr{R} = \{ R_{O,\alpha} \,;\, R_{O,\alpha}$ es giro $\wedge\ O=(0,0) \ \wedge\ \alpha \in \mathbb{R} \}$. Obtener de una forma razonada, los elementos de $\mathscr{R}$ que dejan fijo al triángulo T .

Solución.

Se trata de buscar cuales son las rotaciones de centro $O=(0,0)$ tales que $R_{O,\alpha}(T) = T$. Es decir, tales que $\forall\, P \in T \quad R_{O,\alpha}(P) = P' \in T$.

Cualquiera de las rotaciones buscadas, habrá de aplicar los vértices del triángulo en vértices del mismo.



Si observamos la figura de la izquierda el giro de centro el origen y menor ángulo $\alpha \neq 0$ (Consideramos sólo los ángulos $\alpha \in [0,2\pi[$) que transforma un vértice en otro es $R_{O,2\pi/3}$ (Los ángulos de vértice el origen entre medianas son de 120^o ($2\pi/3$ radianes). Por tanto, sólo caben tres giros (con $\alpha \in [0,2\pi[$) :

$$R_{O,2\pi/3} \ , \ R_{O,4\pi/3} \ \text{ y la identidad en } \mathbb{R}^2$$

---

(20) Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (y,x)$. ¿Es f un movimiento en el plano? . ¿Quiénes son los puntos fijos de f ? . Si es un movimiento, ¿qué tipo de movimiento conocido es?.

<u>Solución.</u>

f será un movimiento siempre que cumpla las condiciones siguientes:

(1) Sea biyectiva y (2) Conserve las distancias entre puntos .

(1) f es claramente biyectiva,pues tiene función inversa (es ella misma). En efecto. Comprobemos que $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x,y) = (y,x)$ es, efectivamente, la inversa de f.

$$(f \circ f^{-1})(x,y) = f[f^{-1}(x,y)] = f(y,x) = (x,y) \quad \Rightarrow \quad f \circ f^{-1} = I_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Análogamente se comprueba que $f^{-1} \circ f = I_{\mathbb{R}^2}$

(2) Sean $P = (x_1,y_1)$ y $Q = (x_2,y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano. Denotemos por P' y Q' a las imagenes por f de P y Q respectivamente , esto es $P'= f(P) = f(x_1,y_1) = (y_1,x_1)$; $Q'= f(Q) = f(x_2,y_2) = (y_2,x_2)$. Entonces,

$$d(P',Q') = +\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P,Q)$$

Por tanto, f es un movimiento en el plano.

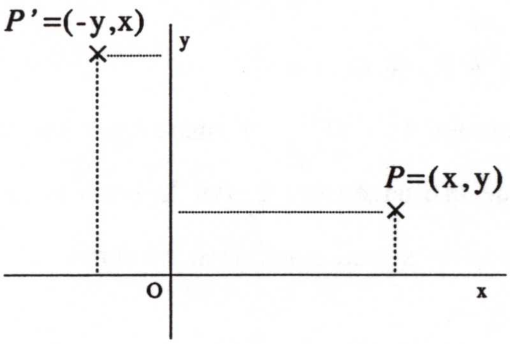
Supongamos que $P=(x,y)$ es un punto del plano tal que $P = f(P)$ (fijo). Entonces, $(x,y) = f(x,y) = (y,x) \iff y = x$. Es decir, el punto P pertenece a la bisectriz del primer cuadrante. Por consiguiente, los únicos puntos fijos de f son los de la citada bisectriz. Luego, se trata de una simetría axial de eje $y = x$.

---

(21) Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (-y,x)$. ¿Es f un movimiento en el plano? . ¿Quiénes son los puntos fijos de f ? . Si es un movimiento, ¿qué tipo de movimiento conocido es?.

Solución.

De igual forma que en el ejercicio anterior , habremos de estudiar si f es biyectiva y si conserva las distancias entre puntos.



Es facil percatarse de que f tiene inversa y que es:

$$f^{-1}(x,y) = (y,-x).$$

A continuación comprobaremos que, efectivamente , se trata de la función inversa de f .

$$(f^{-1} \circ f)(x,y) = f^{-1}\left[f(x,y)\right] = f^{-1}(-y,x) = (x,y)$$

Por tanto, $f^{-1} \circ f = I_{\mathbb{R}^2}$. Análogamente, se prueba que $f \circ f^{-1} = I_{\mathbb{R}^2}$.

Sean $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$. Consideremos las imágenes por f de ambos puntos :

$P'= f(P) = f(x_1,y_1) = (-y_1,x_1)$; $Q'= f(Q) = f(x_2,y_2) = (-y_2,x_2)$. Entonces,

$$d(P',Q') = +\sqrt{(-y_2+ y_1)^2+ (x_2- x_1)^2} = +\sqrt{(x_2- x_1)^2+ (y_2- y_1)^2} = d(P,Q).$$

Por tanto, f es un movimiento del plano.

Supongamos que $P=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo para f (e.d. $P = f(P)$).

Entonces, $(x,y) = f(x,y) = (-y,x) \iff \begin{cases} x = -y \\ y = x \end{cases} \iff x = 0$ e $y = 0$.

Es decir, el único punto fijo de f es el origen $O=(0,0)$.

Es obvio que se trata de una rotación de centro el origen y ángulo $\pi/2$.

(22) ¿Quién es la imagen por una homotecia de una recta del plano?. Razonese e ilustrese con un ejemplo.

Solución.

Consideremos la homotecia $H_{P_0,k}$ de centro $P_0=(x_0,y_0)$ y razón k. Sus ecuaciones son:

$$(x',y') = H_{P_0,k}(x,y) = k(x,y) + (1-k)(x_0,y_0) \quad \Leftrightarrow \quad H_{P_0,k} \equiv \begin{cases} x'= kx + (1-k)x_0 \\ y'= kx + (1-k)y_0 \end{cases}$$

Sea la recta de r de ecuación $Ax + By + C = 0$.

Si despejamos x e y de las ecuaciones de $H_{P_0,k}$ y sustituimos en la ecuación de r, obtendremos la ecuación de la imagen de r por la homotecia. En efecto. Despejando x e y de las ecuaciones mencionadas se obtiene:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}\, x'+ (1- \frac{1}{k})x_0 \\ y = \frac{1}{k}\, y'+ (1- \frac{1}{k})y_0 \end{cases}$$; y sustituyendo en $r \equiv Ax + By + C = 0$, se tiene

$$A\left[\frac{1}{k}\, x'+(1-\frac{1}{k})x_0\right]+B\left[\frac{1}{k}\, y'+(1-\frac{1}{k})y_0\right]+C=0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{A}{k}\, x'+ \frac{B}{k}\, y'+ D = 0}$$

donde $\boxed{D = (1- \frac{1}{k})Ax_0+ (1- \frac{1}{k})By_0+ C}$ es el término independiente. Así, vemos que la transformada de r por la homotecia es:

(a) Otra recta paralela a r si $P_0 \notin r$ (Direcciones proporcionales)

(b) La misma recta r si $P_0 \in r$. Pues en tal caso, $Ax_0+ By_0+ C = 0$ y el término independiente queda de la forma $D = - \frac{A}{k}\, x_0 - \frac{B}{k}\, y_0 = \frac{C}{k}$.

Ejemplo.

Sea $r \equiv x + y -1= 0$ y consideremos las homotecias $H_{(0,1),2}$ y $H_{(0,0),3}$ cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} x'= 2x \\ y'= 2y - 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x'= 3x \\ y'= 3y \end{cases}$ respectivamente.

Observemos que el centro, $P_0=(0,1)$, de la primera homotecia satisface la ecuación de r y no así el centro, $O=(0,0)$, de la segunda.

Despejando x e y de las ecuaciones de ambas (lo que equivale a hallar las ecuaciones de las inversas) se obtiene:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = \frac{1}{3}y' \end{cases} \quad \text{respectivamente.}$$

Sustituyendo el primer par de ecuaciones en la ecuación de r y operando se llega a la ecuación $x'+ y'- 1 = 0$, que representa a la misma r . De la misma forma, con el segundo par de ecuaciones se obtiene $x'+ y'- 3 = 0$,que es la ecuación de una paralela a r .

---

(23) Considerando la homotecia del plano de centro el origen y razón 3 . Calcular la imagen por $H_{O,3}$ de la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $C = (1,1)$ y radio 2 . ¿Quién es esta imagen? .

Solución.

Las ecuaciones de la homotecia son: $H_{O,3} \equiv \begin{cases} x'= 3x \\ y'= 3y \end{cases}$. Despejando x e y , se tiene: $x = \frac{1}{3}x'$ e $y = \frac{1}{3}y'$. Por último, sustituyendo en la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C} \equiv (x-1)^2+ (y-1)^2= 4$ y operando, se llega a $(x'-3)^2+ (y'-3)^2= 36$, que es la ecuación de otra circunferencia $\mathcal{C}'$ de centro (3,3) y radio 6 .

Observación.

Para resolver el ejercicio se podría haber tenido en cuenta la propiedad (f) de la pág. 18: "*Toda homotecia* $H_{P_0,k}$ *transforma circunferencias de centro C y radio r en circunferencias de centro* $C' = H_{P_0,k}(C)$ y radio $|k|\,r$ ".

De esta manera, se sabe que la homotecia $H_{O,3}$ transforma la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro el punto $C=(1,1)$ y radio 2 en la circunferencia $\mathscr{C}'$ de centro $C'= H_{O,3}(1,1) = (3,3)$ y radio 6.

---

(24) ¿Qué se obtiene al componer dos giros en el plano con centros distintos y ángulos opuestos?. Ilustrar la situación poniendo un ejemplo.

Solución.

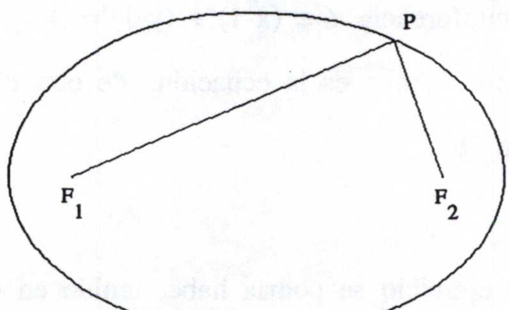
En el ejercicio (6) y su resolución se trata, exactamente, esta cuestión, por lo que se remite al mismo.

---

(25) ¿Quién es la imagen por un movimiento del plano,de una elipse?. Ilustrar la situación con un ejemplo, en el cual el movimiento que se considere sea una rotación.

Solución.

Sea una elipse de focos los puntos F_1 y F_2 y semieje mayor a. Por definición, sabemos que una elipse es *"el conjunto de puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos (focos) suman una cantidad constante e igual a* $2a$*"*. Es decir, $\mathscr{E}= \{ P \in \mathbb{R}^2 \ ; \ d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \}$.



Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un movimiento en el plano (Traslación, rotación o simetría respecto de una recta). Por tratarse f de un movimiento, sabemos que es una aplicación biyectiva que conserva las distancias entre puntos. Por tanto, si P es un punto cualquiera de la elipse y llamamos P' , F'_1 y F'_2 a las imágenes por f de P , F_1 y F_2 respectivamente (P'=f(P) ,F'_1=f(F_1), F'_2=f(F_2)) , se tiene que:

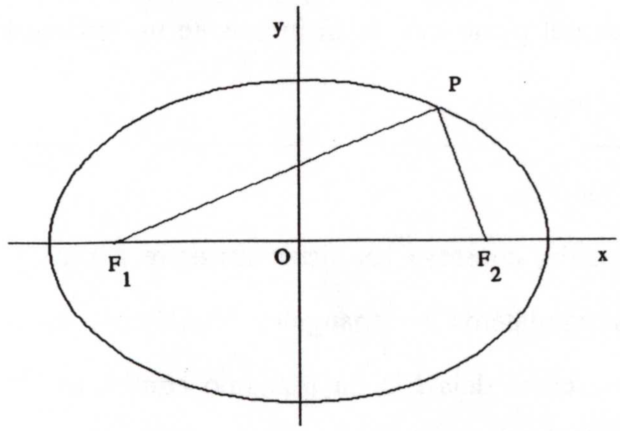
$$d(P',F'_1) = d(P,F_1) \quad \text{y} \quad d(P',F'_2) = d(P,F_2) \ .$$

Luego, $d(P',F'_1) + d(P',F'_2) = 2a$. Es decir, la imagen por f de la elipse $\mathcal{E}$ es otra elipse $\mathcal{E}'$ de focos F'_1 y F'_2 y semieje mayor igual a $2a$

$$\mathcal{E}' = f(\mathcal{E}) = \{ P'=f(P) \ ; \ P \in \mathcal{E} \wedge d(P',F'_1) + d(P',F'_2) = 2a \}$$

Ejemplo.

Consideremos la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Dicha elipse está centrada en el origen de coordenadas, con eje mayor sobre el eje de abscisas y sus semiejes son $a = 3$ y $b = 2$ respectivamente.

Sea $R_{O,\pi/2}$ el giro de centro O=(0,0) y ángulo $\alpha = \pi/2$. Sus ecuaciones son: $R_{O,\pi/2} \equiv \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$, de donde $x = y'$ e $y = -x'$. Sustituyendo x e y en la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$, se tiene: $\frac{y'^2}{9} + \frac{x'^2}{4} = 1$

que es la ecuación de otra elipse $\mathcal{E}' = R_{O,\pi/2}(\mathcal{E})$ y, como puede observarse,se encuentra centrada también en el origen,con semiejes de igual longitud que los de $\mathcal{E}$, pero con eje mayor sobre el eje de ordenadas.

(26) ¿Cuáles son las rotaciones del plano $R_{P_0,\alpha}$ que dejan invariante a una circunferencia centrada en el origen y de radio uno?. Razónese la respuesta.

Solución.

Las rotaciones son movimientos. Por consiguiente,conservan las distancias entre puntos, y en particular, el radio de cualquier circunferencia. Por otra parte, cualquier giro salvo la identidad tiene como único punto fijo el centro del mismo. Por tanto, para que una circunferencia quede invariante frente a un giro ha de tener su centro en el centro de rotación. Así pues, las rotaciones que dejan fija lacircunferencia $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = 1$ son aquellas de centro el origen y ángulo cualquiera ($R_{O,\alpha}$ con O=(0,0) y $\alpha \in [0,2\pi[$ cualquiera).

(27) ¿Cuáles son los movimientos del plano que dejan invariante un triángulo equilátero?.

Solución.

Todo movimiento, por definición, conserva las distancias entre puntos y , por tanto, transforma triángulos equiláteros en triángulos equiláteros distintos en general. Estudiemos en que casos deja fijo un triángulo equilátero T .

(A) Traslaciones.

Toda traslación distinta de la identidad no deja ningún punto fijo. Por tanto, la única traslación que deja invariante un triángulo equilatero es la identidad.

(B) Rotaciones.

Todo giro distinto de la identidad tiene como único punto fijo su centro de rotación. Distingamos los siguientes casos:

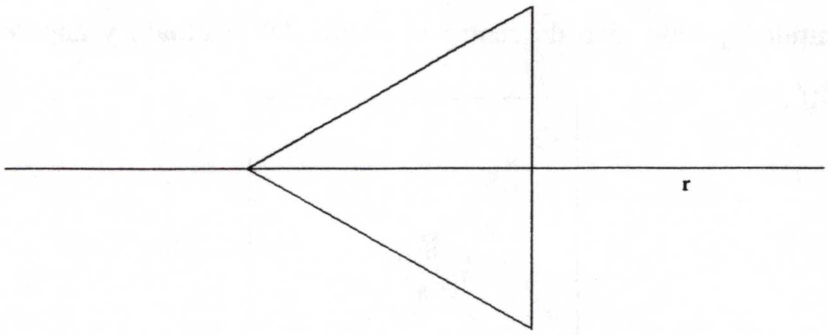
(1) Si el centro del giro no es el baricentro del triángulo, la única rotación que deja fijo un triángulo equilatero es la identidad.

(2) Si el centro de la rotación es el baricentro G hay tres giros:

$R_{G,2\pi/3}$, $R_{G,4\pi/3}$ y la identidad (Ver ejercicio (19)).

(C) Simetrías respecto de una recta.

Sólo en el caso de que el eje de la simetría coincida con una de las medianas del triángulo equilátero, es éste invariante.



En resumen.

Los únicos movimientos que dejan fijo un triángulo equilátero son:

– Los giros $R_{G,2\pi/3}$ y $R_{G,4\pi/3}$,donde G es el baricentro del triángulo.

– Las simetrías S_r donde r coincide con una mediana del triángulo.

– La identidad en $\mathbb{R}^2$.

Nota.

Observemos que en todo triángulo equilátero las medianas, rectas altura , mediatrices y bisectrices interiores, coinciden. Por consiguiente, sus puntos notables (Baricentro, Ortocentro, Circuncentro e Incentro) también coinciden.

(28) ¿Cuáles son los movimientos del plano que dejan fijo un cuadrado?.

Solución.

Todo movimiento transforma cuadrados en cuadrados distintos en general.

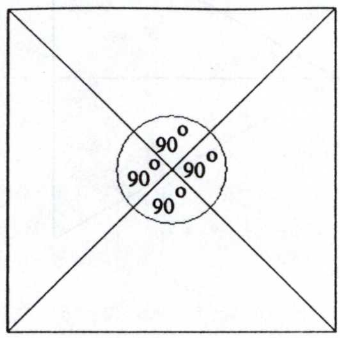
Estudiemos en que casos dejan invariante un cuadrado.

Traslaciones.

Sólo la identidad,ya que toda traslación distinta de la identidad no deja ningún punto fijo.

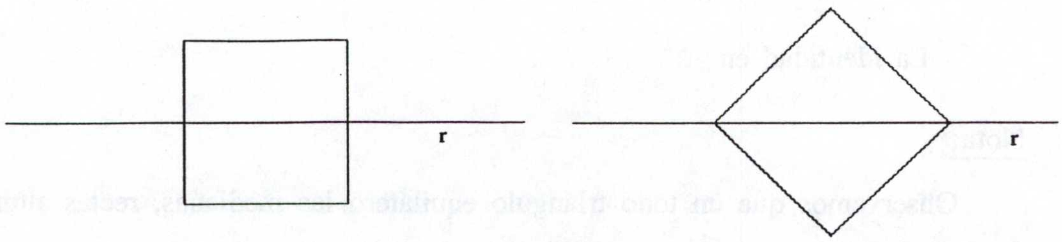
Rotaciones.

La identidad y todo giro de centro el centro del cuadrado y ángulo 90º, 180º ó 270º.



Simetrías respecto de una recta.

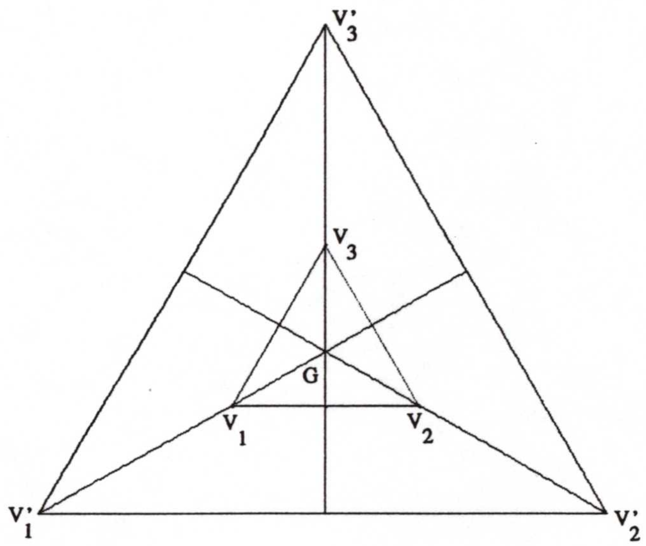
Toda simetría cuyo eje de simetría contenga a una diagonal o una apotema del cuadrado, como puede verse en los gráficos siguientes.



(29) Sea una homotecia de centro el baricentro de un triángulo equilátero T y razón 3 . Calcular la imagen del triángulo T por dicha homotecia.

<u>Solución.</u>

La homotecia transforma rectas que no pasan por su centro en rectas paralelas y conserva los ángulos y sus sentidos, pues $k = 3 > 0$. Por tanto, esto nos dice que , el transformado de T es otro triángulo equilátero de igual baricentro que T pero tres veces mayor.



BIBLIOGRAFIA

[1] OSCAR J. GARAY / ALFONSO ROMERO . . . . . *Transformaciones y Movimientos*

[2] A. MARTINEZ LOSADA Y OTROS . . . . . . *Matemáticas - COU / 78*

INDICE

Movimientos y Homotecias del plano Euclídeo en las Matemáticas I de C.O.U.