1

Materiales Didácticos

Matemáticas: Opción B

4º CURSO

SECUNDARIA
OBLIGATORIA

Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos

4 º Curso

Matemáticas: Opción B

Autoras:
Silvia Ana Pérez Mateo
Ana Rodríguez Chamizo

Coordinación:
Javier Brihuega Nieto
del Servicio de Innovación

Ministerio de Educación y Ciencia

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR
DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

- *Coordinación de la edición:* Ana Francisca Aguilar Sánchez
- *Maquetación y supervisión de pruebas:* Pedro Sauras Jaime

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación

Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N. I. P. O.: 176-95-022-5
I. S. B. N.: 84-369-2604-8
Depósito legal: M-6324-95
Imprime: MARÍN ÁLVAREZ HNOS.

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para la Educación Secundaria Obligatoria, en su segundo ciclo, es orientar a los profesores que, a partir de septiembre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas en los centros que se anticipan a implantarlas. Son materiales para facilitarles el desarrollo curricular de las correspondientes áreas, en particular para el cuarto año, aunque alguna de ellas se presenta para el segundo ciclo completo. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone anticipar la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente área, y que su utilización por los profesores, en la medida que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionarlos y para elaborar en un futuro próximo otros materiales semejantes.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental, destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

Para cada una de las áreas de la Educación Secundaria Obligatoria se han elaborado una o más propuestas de materiales didácticos. En este último caso se trata de Matemáticas, con dos volúmenes correspondientes a sus dos opciones para el cuarto curso, Lenguas Extranjeras, con una propuesta de Francés y otra de Inglés, Educación Física, con dos materiales alternativos y Ciencias Sociales, Geografía e Historia, que además de la propuesta de la correspondiente área para el segundo ciclo se complementa con una específica para el bloque sobre la vida moral y la reflexión ética.

Los materiales así ofrecidos a los profesores tienen un carácter netamente experimental. Son materiales para ser desarrollados con alumnos que proceden mayoritariamente de la Enseñanza

General Básica y que se han incorporado al segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria sin haber realizado el primer ciclo. Se trata, por tanto, de materiales para un momento transitorio y, por eso, también particularmente difícil: el momento de tránsito de la anterior a la nueva ordenación. En ellos se contiene, sobre todo, la información imprescindible sobre distribución y secuencia de contenidos para poder organizar éstos en el cuarto año de la etapa a lo largo del curso 1993/94. Las sugerencias y contrapropuestas que los profesores realicen, a partir de su práctica docente, respecto a esos materiales o a otros con los que hayan trabajado serán, en todo caso, de enorme utilidad para el Ministerio, que a través de futuras propuestas, que complementen a las actuales, podrán redundar en beneficio de los centros y profesores que en cursos sucesivos se incorporen a la reforma educativa.

Índice

Introducción

Selección y secuencia de contenidos

En el capítulo II de este documento se describe una propuesta didáctica para el área de Matemáticas del 4º curso (opción B) de la Educación Secundaria Obligatoria. Esta propuesta está distribuida en siete grandes temas, cada uno de los cuales se desarrolla en varias unidades didácticas en las que se especifican los objetivos, contenidos, actividades de enseñanza y aprendizaje, evaluación y los materiales didácticos necesarios. Si prestamos especial atención a los contenidos, veremos que se ha realizado una selección de entre los que sería posible desarrollar en este curso, y que una vez seleccionados, se ha establecido un orden determinado. En los siguientes apartados trataremos de explicar el porqué de estas decisiones.

Procedencia de los alumnos

Evidentemente los contenidos que se seleccionan para un curso dependen de los desarrollados en cursos anteriores. Los profesores a los que va dirigida esta propuesta van a dar clase a unos alumnos procedentes de la EGB y del 3º de ESO, y por lo tanto no han cursado toda la etapa. Esto hace que la elección de contenidos y su secuencia se haga en unas condiciones especiales. Así, posiblemente, la propuesta que se recoge en este documento debería modificarse (sino total, sí parcialmente) si formara parte de la programación de toda la etapa. Un ejemplo claro de esto es el estudio del azar: una programación total de la etapa debe incluir este tema en los cuatro cursos. Sin embargo, no se trata en las actuales programaciones del ciclo superior de EGB, por lo que debe iniciarse en 3º y continuarse en 4º, es decir, lo que en unas condiciones se desarrolla en cuatro cursos, en las otras se hace en dos.

Por otro lado, el Ministerio de Educación y Ciencia publicó en el curso 92-93 unos materiales de apoyo, elaborados por grupos de profesores, para la implantación anticipada del 3º de ESO, en los que se proponían secuencias para el segundo ciclo (3º y 4º) de esta etapa. Siempre que ha sido posible, hemos intentado respetar esta propuesta, sobre todo en lo referente a 3º para utilizarla como base para nuestra secuencia de 4º. En cada Unidad didáctica se describen los conocimientos previos necesarios, y que suponemos estudiados en cursos anteriores. La evaluación de estos conocimientos dará al profesor las pautas para desarrollar la Unidad, ya que se indican distintas opciones.

Justificación

Los contenidos elegidos se secuencian en quince unidades didácticas referentes a siete núcleos temáticos:

NÚCLEOS TEMÁTICOS	UNIDADES DIDÁCTICAS
Números y resolución de problemas	1ª. Fracciones, decimales y porcentajes. 2ª. Estrategias de resolución de problemas aplicadas a conjuntos numéricos.
Álgebra	3ª. Sistemas de ecuaciones lineales. 4ª. Ecuación de segundo grado.
Transformaciones geométricas en el plano y razones trigonométricas	5ª. Movimientos en el plano. 6ª. Razones trigonométricas.
Cuerpos redondos y secciones planas	7ª. Cilindro, cono y esfera. 8ª. Secciones planas de los cuerpos redondos. 9ª. Coordenadas geográficas. Medida del tiempo.
Funciones	10ª. Interpretación de funciones. Estudio gráfico de características globales. Tasa de variación media. 11ª. Estudio de algunas familias de funciones.
Estadística	12ª. Fenómenos estadísticos. Variable estadística continua. 13ª. Distribuciones bidimensionales.
Azar	14ª Espacio muestral y sucesos. Asignación de probabilidades. 15ª Probabilidad condicionada. Experimentos compuestos.

¿Por qué este orden de los núcleos temáticos?

La ordenación relativa de los núcleos Números-Álgebra, Estadística-Azar se justifica por las siguientes razones:

- Las unidades didácticas incluidas en el núcleo de Números continúan y amplían el estudio sobre conjuntos numéricos realizado en cursos previos y sirven de base para resolver los problemas propuestos en éste. Es conveniente, pues, comenzar por este tema enlazando con el curso anterior.

- El Álgebra debe ser posterior al estudio de estrategias de resolución de problemas, ya que el manejo de las mismas es necesario para resolver satisfactoriamente los problemas de generalización y simbolización que el Álgebra lleva consigo.

- El Azar debe trabajarse después de la Estadística, ya que proponemos que se utilice la frecuencia relativa de un suceso para asignarle una probabilidad.

En lo referente al resto de los temas, sería posible otra opción: estudiar las Funciones después del Álgebra y antes que la Geometría. Tiene a favor que en una de las unidades didácticas del tema de Funciones se tratan expresiones algebraicas, que habrían sido estudiadas inmediatamente antes, además de facilitar la distinción entre ecuación y función y de variable e incógnita. Sin embargo, este orden dejaría la Geometría como último tema del curso, y si los demás requieren más tiempo del inicialmente diseñado, no se podría trabajar. Por otra parte el enlace Funciones, Estadística y Azar es interesante ya que en todas se estudia la manera de tratar e interpretar informaciones siendo necesario para ello la adquisición de unas estrategias comunes: recogida de datos, ordenación de los mismos, hipótesis, pruebas, etc.

¿Por qué estas unidades didácticas y los contenidos incluidos en ellas?

La respuesta a esta pregunta se concreta en la introducción a cada núcleo temático (capítulo II) en la que se explican y justifican los contenidos desarrollados en las unidades didácticas. Por tanto, ahora sólo vamos a hacer referencia a algunos aspectos:

- Inicialmente, el número irracional se trabaja en el tema de números como una actividad de ampliación. Después se plantea a toda la clase en el tema de Álgebra, ya que la resolución de ecuaciones proporciona un contexto adecuado para su estudio.

- La resolución algebraica de sistemas de ecuaciones y de la ecuación de segundo grado, la trigonometría y la tasa de variación media son contenidos obligatorios y específicos de la opción B del cuarto curso.

- El bloque de Geometría está formada por dos unidades: transformaciones geométricas y razones trigonométricas y cuerpos redondos.

  — La Unidad sobre transformaciones geométricas y trigonometría refuerza los conocimientos anteriores sobre geometría plana, ampliándolos en un nuevo contexto.

  — El conjunto de contenidos referentes a los cuerpos en el espacio es muy extenso, nosotras hemos optado por tratar solamente los cuerpos redondos. Otra opción, que consideramos correcta, sería estudiar conjuntamente los poliedros y cuerpos redondos desde el inicio de la etapa, dejando para cuarto algunas cuestiones complicadas: medidas de volumen, intersecciones entre cuerpos, descomposición e inscripción, etc. Programar el cuarto curso basándonos en esta opción, nos llevaba a suponer que los alumnos tenían unos conocimientos previos que seguramente no tienen, por lo que el profesor debería hacer grandes modificaciones en la Unidad cuando la desarrollase en el aula. Sin embargo, si la Unidad trata exclusivamente de los cuerpos redondos, su diseño es mucho más sencillo y su desarrollo mucho más autónomo.

- Lo específico de este curso sobre el tema de funciones sería la tasa de variación media y el estudio de distintas familias de funciones. Sin embargo, la primera Unidad de este bloque se refiere a un tratamiento general de las relaciones funcionales y sus distintas expresiones (verbal, gráfica, numérica y algebraica). La razón está en que es interesante asegurar que los alumnos sepan interpretar estas expresiones y traducir de una a otra.

- La variable estadística continua y la bidimensional son los contenidos estadísticos propuestos para este curso, lo que supone que la variable estadística discreta se ha estudiado en cursos anteriores. Existen razones que justifican el tratamiento conjunto de la variable estadística discreta y la continua: analizando situaciones reales, el alumno debe decidir de qué modo le interesa organizar los datos, de esta manera no se crea una clasificación que, a priori, no existe. Esta posibilidad dejaría para cuarto la aplicación de los conocimientos adquiridos a situaciones más complejas incluidas algunas de las aparecidas en la prensa, además de la variable bidimensional.

  Aunque consideramos correcto este planteamiento, y somos conscientes de sus ventajas, hemos elegido estudiar sólo la variable continua en cuarto por dos razones:

  — Si las actividades se proponen adecuadamente, es posible retomar los conocimientos adquiridos anteriormente: población, muestra, representación gráfica, medidas centrales y de dispersión, etc., siguiendo un planteamiento helicoidal que permite reforzarlos aplicándolos a situaciones más complejas.

  — El concepto de variable continua y los procedimientos de cálculo de algunas medidas son bastante complicados.

- En el Azar las unidades didácticas parten de los primeros pasos en este tema: la experimentación, simulación y asignación de probabilidades por frecuencias relativas, que no serían propios de este curso si esta programación formara parte de la secuencia de toda la etapa. Pero los alumnos de este 4º de ESO sólo han visto este tema en tercero y es posible que muy brevemente debido a la falta de tiempo.

Metodología y evaluación

Proceso de enseñanza y aprendizaje

En el apartado de actividades de cada una de las unidades didácticas, se describe el proceso que se debe seguir con los alumnos, incluido el orden de las actividades. Por ello, a continuación sólo expondremos algunas reflexiones generales. Debemos advertir al lector que en este documento **se señalan con un asterisco (*) las actividades de evaluación o los aspectos relacionados con ella.**

(*) Todas las unidades han de comenzar con una detección de los conocimientos previos de los alumnos. Aunque esto debe ser un principio general, queremos hacer especial hincapié, ya que es necesario para una correcta aplicación y desarrollo de las Unidades. Es posible que el profesor conozca a sus alumnos y la programación que han seguido en 3º. Si es así, esta evaluación tiene el interés antes mencionado; en caso contrario, la evaluación inicial es imprescindible para adaptar las unidades.

En todos los temas las actividades propuestas pretenden que el alumno consiga los objetivos programados mediante un proceso inductivo; es decir, forma parte de estas actividades, y es además el primer paso, que el alumno haga suposiciones, aproximaciones y estimaciones, organice su propio trabajo, se confunda y encuentre la fuente de error, etc. En este proceso de construcción de aprendizaje juega un papel importante el uso de materiales, de los que hablaremos más adelante.

En el diseño de las actividades es también muy importante prever la diversificación dependiendo del nivel de los alumnos:

- Se propondrán diversos apartados en grado creciente de dificultad, de manera que todos puedan conseguir algo.
- Se realizarán actividades complementarias, de refuerzo para alumnos con dificultades, y de ampliación para aquellos que «quieran más».

El trabajo en pequeños grupos facilita el proceso anterior, ya que así los alumnos tienen oportunidad de discutir intercambiando opiniones y contrastar las propias. Esto no quiere decir que todas las actividades deban trabajarse en grupo. Las realizadas individualmente también son de gran importancia, ya que en ellas el alumno afronta solo los problemas y comprueba el grado de sus conocimientos.

Siempre que se haga una actividad en grupo, seguirá un debate de contraste entre las opiniones de cada uno de ellos, lo que permite que el profesor observe la expresión oral y la argumentación utilizadas por cada portavoz (fuente de información para la evaluación) y que detecte los posibles errores.

El hecho de que los alumnos deban ser motores de su propio aprendizaje no implica que el profesor tenga un papel secundario, ya que:

— El profesor es el que plantea la actividad indicando el motivo de la misma y el que, en algunas ocasiones, explica previamente cuestiones novedosas o de cierta dificultad incluidas en el enunciado de la misma.

— Durante el trabajo, individual o en grupos, está pendiente de los posibles atascos, planteando preguntas que ayuden a salvarlos, sin dar, en ningún caso, la solución concreta del problema, sino sugiriendo alguna estrategia o punto de vista nuevo que ayude a su solución.

— En la puesta en común, el papel del profesor es el de moderador y observador. Así podrá sacar a la luz todas las aportaciones, correctas o no. Primero, para dar a todos los grupos la oportunidad de expresarse; y segundo, para que aquellas que sean erróneas puedan corregirse o enriquecerse con las aportaciones de los demás. En cuanto al papel de observador, es de gran importancia, ya que, como hemos dicho anteriormente, es una buena oportunidad para hacer una evaluación del proceso de aprendizaje. Para hacer esta observación de manera sistemática, el profesor elaborará un guión de estructura sencilla que le permita recoger los aspectos fundamentales.

— Por otro lado, corresponde también al profesor hacer una síntesis de las conclusiones de cada actividad y completar los aspectos que no hayan surgido, dándoles el rigor y precisión matemática necesaria en esta opción. Esta precisión se refiere fundamentalmente a «poner nombre» a aquellos conceptos o procedimientos obtenidos por los alumnos y, en ocasiones, a reforzar el proceso lógico seguido por ellos.

(*) La evaluación puede también apoyarse en la lectura de informes elaborados por los grupos de alumnos. De estos trabajos el profesor puede obtener la siguiente información: expresión escrita, comprensión del enunciado del problema, especificación de las suposiciones que realizan, expresión ordenada de las conclusiones, el razonamiento seguido en el proceso de resolución, la pulcritud y el orden en la presentación del trabajo, etc.

(*) Otra fuente de información para evaluar a los alumnos es la revisión de algunos de sus cuadernos.

(*) Las pruebas individuales escritas deben diseñarse desde el comienzo de cada Unidad didáctica atendiendo a los objetivos que se pretenden alcanzar mediante la formulación de unos criterios de evaluación que definan el grado de consecución de los mismos que se quiere conseguir. En estas pruebas se plantearán actividades similares a las propuestas a los alumnos a lo largo del desarrollo de la Unidad, de modo que recojan, lo mejor posible, lo que se pretende evaluar.

Materiales

En el apartado anterior ya hemos hecho mención del interés que tiene utilizar materiales para hacer posible el proceso de enseñanza y aprendizaje descrito, ya que su uso permite que el proceso sea inductivo, pasando de lo concreto a lo abstracto.

En cada Unidad didáctica se especifican los materiales necesarios, dando en algunos casos varias opciones. De entre ellos destacamos la calculadora científica, el ordenador y programas específicos, vídeos didácticos y el retroproyector, no por su mayor importancia, sino porque deben utilizarse en todos los temas, aunque no se haga siempre mención explícita de ellos.

Mencionaremos algunas razones que avalan nuestra propuesta:

— La calculadora ahorra tiempo y permite centrarse en dar significado a lo que se está haciendo.

— El ordenador, mediante programas ya hechos, permite además de lo anterior visualizar rápidamente; y si se realizan programaciones, éstas son muy formativas, ya que es necesario «saberse muy bien las cosas». Se puede trabajar con hojas de cálculo, hacer simulaciones para el tratamiento del azar, etc.

— El vídeo acerca al aula situaciones reales y permite también la visualización rápida para un alumnado inmerso en el mundo de la imagen.

— El retroproyector ayuda al profesor a presentar esquemas y gráficas de forma clara y cuidada, centrando la atención de los alumnos. A éstos puede también ayudarles en las puestas en común.

En algunas unidades didácticas aparece, entre los recursos necesarios para su desarrollo, la mención de un libro concreto. Esto se debe a que el enfoque que se les ha dado a estas unidades didácticas está inspirado en ellos, y muchas de las posibles actividades pueden extraerse de los mismos.

Programación

Números y resolución de problemas

Con la primera Unidad didáctica de este curso se pretende que los alumnos aprendan a usar correctamente las fracciones, decimales y porcentajes, sus operaciones y las relaciones entre ellos, desarrollando la capacidad de elección de la expresión más adecuada en cada caso: la mejor forma de tomar datos y expresar los resultados, el grado de aproximación que se requiere y el error que se comete, y el método de cálculo que los hace más sencillos o manejables. En todo momento se procurará que el trabajo esté enfocado desde situaciones próximas a los alumnos o de futura utilidad práctica, por ejemplo, con el estudio del interés, descuentos y recargos, índices, etc. Aparecerá con frecuencia la fracción como operador, que es el aspecto más novedoso del tema.

Los procedimientos propuestos deben ser también tratados en otros bloques de contenidos (por ejemplo, en medida y en tratamiento de la información), pues es en ellos donde adquieren mayor significación y utilidad.

Hay que tener también en cuenta que un tratamiento muy prolongado y aislado de los números no suele conseguir avances significativos. Aun así, nos parece conveniente un tratamiento específico, que ya se supone conseguido en cursos anteriores, pero que posiblemente requería mayor profundización, debido a la dificultad que entraña.

Según lo dicho, si el profesor advierte que estos contenidos están claros para sus alumnos, debe eliminar la Unidad o reducirla en tiempo.

Un contexto adecuado para el estudio de la proporcionalidad, tanto directa como inversa, es el de las funciones, y así lo recoge esta programación, ya que se supone que la proporcionalidad numérica ha sido suficiente trabajada por los alumnos en cursos anteriores.

En referencia a la segunda Unidad planteamos que, aunque las estrategias generales de resolución de problemas han de estar presentes en todos los bloque de contenidos, nos parece necesario un tratamiento específico de las mismas, eligiendo para ello el contexto de la búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades numéricas, tratando de llegar a generalizaciones varias que nos permitan enlazar con el lenguaje algebraico.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
1ª	*Fracciones, decimales y porcentajes. Interés. Aproximación y estimación de cantidades. Errores. Reglas de uso de la calculadora. Notación científica.*	2 semanas
2ª	*Estrategias de resolución de problemas aplicadas a conjuntos numéricos.*	2 semanas

Unidad 1

FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES. INTERÉS. APROXIMACIÓN Y ESTIMACIÓN DE CANTIDADES. ERRORES. REGLAS DE USO DE LA CALCULADORA. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Objetivos

- Relacionar y utilizar adecuadamente fracciones, decimales y porcentajes, referidos a diversas situaciones.
- Realizar cálculos con estos tipos de números en la expresión que los haga más sencillos y aporte el grado de aproximación necesario a la cuestión en estudio.
- Decidir los métodos de cálculo más adecuados a cada caso: cálculo mental, algoritmos con lápiz y papel, calculadora, etc.
- Saber calcular mentalmente algunos tantos por ciento.
- Ordenar y representar en la recta numérica cantidades no enteras, sea cual sea su expresión.
- Reconocer y utilizar la notación científica para el tratamiento de números grandes y pequeños.

Contenidos

Conceptos:

- Distintas expresiones de las fracciones.
- Fracciones, decimales y porcentajes. Operaciones y su jerarquía.
- Aproximación y estimación de cantidades. Errores.
- El número racional.
- Reglas de uso de la calculadora científica. Notación científica. Números grandes y pequeños.

Procedimientos:

- Utilización contextualizada de la fracción como operador, como proporción, como decimal y porcentaje.
- Cálculo de operaciones con fracciones o decimales de la forma más sencilla: paso de fracción a decimal o viceversa, expresión de los datos en unidades más adecuadas, etc.
- Utilización de distintas formas de cálculo: cálculo mental, estimación de resultados, algoritmos con lápiz y papel y calculadora, decidiendo el procedimiento más adecuado en cada caso, en función de su complejidad y de la exactitud requerida en los resultados.
- Cálculo del tanto por ciento de una cantidad dada, mentalmente en casos sencillos.
- Dadas dos cantidades, cálculo de qué tanto por ciento representa la una de la otra.
- Ordenación y representación en la recta numérica de cantidades no enteras expresadas como fracción, decimal y porcentaje.

— Cálculo del margen de error en la aproximación y estimación de cantidades. Redondeo.

— Cálculo de intereses, descuentos y recargos.

— Identificación y análisis de índices que aparecen con frecuencia en los medios de comunicación.

— Manejo de la calculadora científica y conocimiento de sus reglas de uso.

— Utilización de la notación científica para números grandes y pequeños.

Actitudes:

— Preocupación por elegir la expresión que mejor comunique el valor de una cantidad no entera.

— Reconocimiento de la importancia de la estimación de cantidades.

— Valoración del uso de la calculadora en las operaciones con números.

Actividades

(*) La primera actividad que se debe plantear sirve para que los alumnos tomen contacto con los números no enteros (por primera vez en este curso) y como evaluación **inicial.** Esto último se consigue si el profesor pide a cada alumno que la haga individualmente y exprese su trabajo por escrito. A continuación se tratará en pequeños grupos, y se recogerán sus conclusiones. Se realizará también algo parecido cuando se comience con las operaciones, a partir de actividades similares a las que se proponen más adelante. Esta evaluación inicial es clave para determinar el grado de insistencia y el tiempo que se debe emplear en la Unidad.

A continuación los alumnos deben buscar e interpretar las cantidades no enteras que aparecen en diferentes periódicos y expresarlas de otra manera.

Una vez recogidos sus escritos, el profesor planteará las siguientes cuestiones:

— ¿Qué tanto por ciento de los anuncios están dedicados a actividades culturales? ¿Y a la venta de pisos?

— ¿Cuál es el área del mayor anuncio de cine?

— ¿Qué fracción de la primera página está dedicada a la cabecera (nombre) del periódico?

— ¿Hay algún número decimal?

— ¿Por qué esa cantidad está expresada por un número decimal?

— ¿Podrías dar otra expresión que comunique con la misma claridad y exactitud esa cantidad?

Cada alumno manejará un periódico distinto y hará comparaciones de los espacios dedicados a cultura, política, educación, sociedad, televisión, economía, etc.

(*) Este estudio individual se reflejará en un informe que se tendrá muy en cuenta en la evaluación de la Unidad.

Para la realización de operaciones con números no enteros, el profesor propondrá problemas sencillos con datos lo más reales posible y que los alumnos resolverán empleando la expresión más sencilla (sin entrar en aprender los algoritmos de las operaciones con fracciones, salvo en casos muy simples), pasando a decimales y tomando el número de cifras que el grado de aproximación del problema requiera. Según los casos, los cálculos se efectuarán mentalmente, con lápiz y papel, o con calculadora.

La utilización de barajas que emplean las fracciones, distintos tipos de dominós de fracciones, decimales y porcentajes, tableros de diversos juegos numéricos, etc., son actividades que refuerzan las operaciones con estos números.

Los problemas relacionados con la medida plantean situaciones prácticas que permiten trabajar las operaciones con decimales:

Cuatro aulas de planta rectangular tienen una altura de 2,7 m y suelos de dimensiones 4,1 m x 5,2 m, 4,3 m x 6 m, 5,1 m x 5,65 m y 6,37 m x 7 m, respectivamente. ¿Cuánto nos costará aproximadamente pintar las paredes y el techo de estas aulas, si pintar un metro cuadrado cuesta 200 pesetas? ¿A cuánto saldría pintar el metro cuadrado si el total hubiese sido 300.000 pesetas?

Es conveniente proponer problemas con más cifras decimales para que los alumnos discutan con cuántas de ellas es más adecuado trabajar, y el error que se comete. Por ejemplo, mediante actividades en las que sea necesario tomar medidas:

¿Cuánto nos costaría forrar todos los libros de uso frecuente durante este curso con cierto papel que cuesta a 45 pesetas el metro cuadrado?

El cálculo de perímetros y áreas de las piezas del tangram pueden ser actividades de ampliación. Según las unidades que se elijan, pueden aparecer números irracionales, sobre los cuales se detendrán los alumnos y trabajarán con aproximaciones adecuadas, controlando el grado de error cometido.

(*) Cuando se hayan trabajado cierto tiempo estos aspectos del tema, el profesor recogerá los cuadernos de algunos alumnos y hará una pequeña prueba escrita con una o dos actividades similares a las anteriores.

Para seguir insistiendo en el uso de porcentajes, pueden plantearse problemas de rebajas en los precios, cálculo del IVA, de intereses, etc. Por ejemplo:

Queremos ingresar en un banco cierta cantidad de dinero durante un año. ¿Qué nos interesa más: ponerla al 10% de interés anual, que se cobra al final del año, o al 5% percibido al final de cada mes?

Para el uso de la notación científica, después de trabajar con potencias de 10, se propondrán problemas con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo:

¿Cuántos segundos has vivido hasta este momento?

(*) Al finalizar el tema, se realizará una prueba escrita con problemas análogos a los trabajados en la que los procedimientos serán muy tenidos en cuenta además de la comprensión de los conceptos y una actitud positiva hacia los números. Toda la información recogida a lo largo de la Unidad será también decisiva para su evaluación.

Recursos

Libros:

— Cero, Grupo. *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas.* Valencia, Mestral. 1985.

— Cero, Grupo. *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1.* Barcelona, Teide. 1985.

Materiales manipulables:

— Barajas, dominós y tableros. Tangram.

— Calculadoras.

Vídeos didácticos:

— *Investigaciones Matemáticas 10* (apartado dedicado a números). BBC Enterprises. Distribuidora, International Education Training Enterprises S. A.

Unidad 2

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICADAS A CONJUNTOS NUMÉRICOS

Objetivos

— Resolver problemas numéricos sencillos, que requieran pocos conceptos matemáticos y no habituales para los alumnos.

— Conocer y utilizar un conjunto de estrategias específicas, de resolución de problemas. Se hará mayor hincapié en:

- Descubrir regularidades en series numéricas mediante la percepción de alguna característica de los números, una operación entre ellos, una ley numérica de formación, o construcciones geométricas que tengan una traducción numérica sencilla.
- Obtener generalizaciones a partir de casos particulares.
- Reflexionar, discutir y explicar oralmente y por escrito sus aproximaciones al problema y sus descubrimientos.

Contenidos

Algunas estrategias generales de resolución de problemas referidos a la búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades numéricas.

Procedimientos:

— Formulación verbal de problemas numéricos y algebraicos.

— Lectura comprensiva del enunciado de un problema y reescritura del mismo con las palabras del propio alumno, especificando en qué consiste y qué datos hay que tener en cuenta.

— Observación de una lista de estrategias que deben seguirse en la resolución de problemas:

- Buscar algunos casos sencillos.
- Hacer un dibujo, un diagrama o una tabla.
- Organizar y hacer recuentos sistemáticamente.
- Decidir qué pautas son las más adecuadas.
- Hacerse un plan.
- Buscar una regla general.
- Volver atrás:
  - Comprobar la regla encontrada metódicamente.
  - Explicar su funcionamiento y justificarla en casos sencillos.

— Reconocimiento e identificación de la regularidad, la configuración, la diferencia, la relación, etc., de una serie numérica dada.

— Exposición oral de la regularidad descubierta, tratando de lograr precisión en el lenguaje.

— Expresión escrita de la misma, buscando la mayor concisión posible.

— Simbolización de la regla general hasta conseguir una expresión adecuada.

Actitudes:

— Confianza en las propias capacidades para la resolución de problemas.

— Ser sistemático en la búsqueda de casos particulares, en los recuentos que se realicen y en la comprobación de reglas.

— Valoración y respeto de los puntos de vista de los demás, del camino seguido por otros en la resolución de un problema y de sus conclusiones.

Actividades

El profesor distribuirá una colección de 3 ó 4 problemas sencillos, con los que se pretende enseñar algunas estrategias para resolverlos. Las estrategias se entregarán por escrito junto con los enunciados y se explicarán de modo que sirvan de guía para su resolución.

Los alumnos, organizados en pequeños grupos expresarán por escrito todo el proceso seguido para entregárselo posteriormente al profesor.

(*) Estos trabajos y otros posteriores serán una de las fuentes de información para la evaluación.

Algunos de estos problemas pueden ser:

— Dado un dodecágono regular, ¿cuántas diagonales tiene?

— ¿Cuántos partidos de baloncesto se pueden organizar con 15 equipos de modo que cada uno de ellos juegue dos veces con cada uno de los otros?

Después del trabajo en grupos, se trasladará la discusión a toda la clase, anotando en la pizarra, en una tabla, las observaciones de los alumnos.

En sesiones posteriores, se entregará a los alumnos individualmente otra pequeña colección de problemas algo más complejos, sin la guía de estrategias anterior. El profesor irá sugiriéndolas, en caso necesario, a aquellos alumnos que estén «atascados» en un momento dado. El trabajo individual se pondrá luego en común en pequeño y gran grupo, y se entregará al profesor un informe que recoja las conclusiones.

Algunas propuestas:

a) Se presenta el dibujo de un castillo de naipes concreto de 4 pisos. Se pide el número de cartas de 10, 50 y n pisos.

b) Con una fotografía de 3 cuadrados en línea cuyos lados son palillos, se pregunta: ¿Cuántos palillos tendrá una fila de 7, 100 y n palillos, respectivamente?

c) Algunos juegos de estrategias. Por ejemplo: el juego del Nim.

Juego del Nim

Es un juego para dos jugadores. Se colocan arbitrariamente un conjunto de fichas en dos grupos. Cada jugador, por turnos, puede retirar tantas fichas como desea de un sólo montón. Si quiere, puede retirar todas las fichas de un montón, pero debe coger al menos una.

Gana el jugador que retira la última ficha.

La actividad consiste en encontrar una estrategia ganadora.

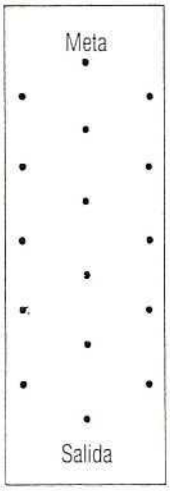
Después se harán algunas modificaciones en el juego y se analizará la nueva versión.

Se pondrá mucho énfasis en todo momento en la expresión oral y escrita, no sólo de las operaciones y soluciones del problema, sino de todo el proceso seguido.

(*) Al término de la Unidad, se planteará individualmente un problema de características análogas a los anteriores y con apartados de diverso grado de dificultad. Por ejemplo, «la escalada»:

La Escalada

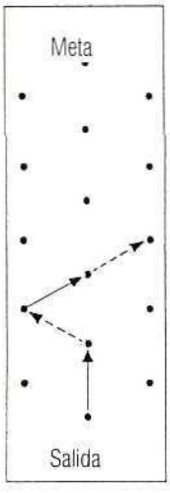
Es un juego para dos personas. Se coloca una ficha en el punto marcado como salida y, por turnos, los jugadores van desplazando hacia arriba la ficha según las siguientes reglas: en cada turno sólo se puede mover la ficha a un punto adyacente y más alto que la posición que ocupe en ese momento. El primer jugador que coloque la ficha en el punto señalado como «meta» gana.



1. Este diagrama muestra el principio de una partida, jugada ente Sara y Pablo.

Los movimientos de Sara vienen marcados por una flecha continua. Los de Pablo por una flecha punteada. Es el turno de Sara. Tiene dos movimientos posibles. Uno de ellos le asegura a ella la victoria, pero el otro se la puede asegurar a Pablo. ¿Cuál?

2. Si el juego comienza desde el principio y Sara mueve la primera, puede conseguir ganar siempre si juega correctamente. Explica cómo debería jugar Sara para estar segura de ganar.



(*) La evaluación se hará de acuerdo a un esquema de calificación, conocido previamente por los alumnos, en los que se valorarán de un modo predeterminado y se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

1. Comprensión del problema.
2. Organización sistemática de la información.
3. Descripción y explicación de las estrategias empleadas y de las soluciones obtenidas.
4. Formulación verbal o algebraica de la regla general obtenida.

Se recomienda la lectura del libro *Problems with patterns and numbers,* del Shell Centre for Mathematical Education, en el cual aparecen descritos detalladamente la guía de estrategias, algunos de los problemas presentados en la Unidad y el esquema de calificación.

Recursos

Libros:

— VARIOS: *Problems with patterns and numbers.* England, Joint Matriculation Borad y Shell Center for Mathematical Education.

— MASON, J.; BARTON, L.; STACEY, K.: *Pensar matemáticamente.* Barcelona, Labor y MEC. 1989.

Álgebra

La mayoría de los contenidos algebraicos que debe haber adquirido un alumno al término de la Educación Secundaria Obligatoria no forman un bloque que debe ser explicado aisladamente, sino que el álgebra debe estar presente a lo largo de todo el programa siempre que sea necesario resolver una ecuación o manipular una expresión literal. Este tratamiento proporciona sentido a las expresiones literales y pone de manifiesto la necesidad del aprendizaje de las técnicas algebraicas.

Teniendo muy presente lo anterior proponemos, sin embargo, dos unidades para el estudio del álgebra en este curso: resolución de ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales de ecuaciones. El incluir estas dos unidades se debe a que los algoritmos de resolución de ambas situaciones son lo suficientemente complejos como para centrar nuestra atención en ellos.

Para no caer en un estudio descontextualizado, las actividades que se propongan deben hacer referencia a situaciones reales que el alumno pueda interpretar, de manera que la solución de las ecuaciones sea necesaria y tenga sentido.

En la Unidad didáctica dedicada a la ecuación de segundo grado se incluye el estudio de un número irracional: el número áureo. Con la actividad que se propone, se trata de que los alumnos amplíen el conjunto de números irracionales que conocen (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...) partiendo de una situación concreta (resolución de un problema) y en uno de los contextos en los que surgen los números irracionales: la resolución de ecuaciones.

Se puede pensar que algunos de los contenidos y objetivos expresados en estas unidades son propios de cursos anteriores, pero dada su dificultad creemos que deben ser tratados en toda la etapa.

También hay que tener en cuenta que los alumnos que anticipan 4º de ESO han cursado estudios de EGB, por lo que es posible que el profesor advierta que conocen y aplican correctamente el algoritmo de resolución de la ecuación de 2° grado completa. En este caso se pondrá más énfasis y se dedicará más tiempo al estudio de métodos numéricos y gráficos de resolución, relacionándolos con la expresión algebraica.

Por el contrario, si los alumnos hubieran cursado los tres primeros cursos de ESO, los métodos numéricos y gráficos de resolución deben estudiarse en 3° y el método algebraico en 4°.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
3ª	*Sistemas de ecuaciones lineales. Resolución gráfica y algebraica.*	2 semanas
4ª	*Ecuación de 2° grado. Resolución gráfica y algebraica.*	2 semanas

Unidad 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. RESOLUCIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA

Objetivos

- Simbolizar cantidades mediante letras.
- Generalizar situaciones numéricas que siguen una determinada regla. Expresar regularidades mediante fórmulas.
- Traducir enunciados verbales con dos cantidades desconocidas a un sistema de dos ecuaciones.
- Resolver un sistema de ecuaciones de forma aproximada utilizando métodos gráficos.
- Conocer algún algoritmo de resolución algebraica de sistemas de ecuaciones.

Contenidos

Conceptos:

- Ecuación e incógnita. Ecuaciones equivalentes.
- Sistema de ecuaciones.
- Solución de un sistema de ecuaciones. Número de soluciones de un sistema.
- Sistemas equivalentes.

Procedimientos:

- Interpretación de un sistema de ecuaciones.

- Traducción de un enunciado verbal a un sistema de ecuaciones y viceversa.
- Interpretación gráfica de una ecuación con dos incógnitas.
- Resolución gráfica de sistemas.
- Interpretación de las coordenadas del punto de corte de dos rectas.
- Reconocimiento de sistemas equivalentes.
- Estudio gráfico del número de soluciones de un sistema.
- Cálculo de las soluciones de un sistema utilizando el método de igualación, reducción y sustitución.
- Interpretación de las soluciones de un sistema: descripción de su significado en el contexto del problema.

Actitudes:

- Valoración de la precisión y utilidad del álgebra para comunicar o resolver distintas situaciones.
- Interés por resolver problemas de regularidades.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones de un sistema.

Actividades

Como ya hemos mencionado en la introducción, los sistemas que el alumno resuelva deben ser planteados por él mismo para dar respuesta y solución a un problema real. Así, también se consigue que el alumno no se olvide de calcular una de las soluciones cuando ya ha encontrado la otra.

Inicialmente los alumnos resolverán un problema en el que intervengan dos cantidades desconocidas en dos situaciones distintas. A continuación se propone un ejemplo y el proceso que se debe seguir.

Ejemplo:

Un grupo de alumnos quiere alquilar un autocar para realizar un viaje. Acuden a varias empresas para encontrar el mejor precio y tienen duda entre dos de ellas: la empresa «Bienoslleva» les cobrará 30 pesetas por km recorrido y la empresa «Todoterreno» una cantidad fija de 2.000 pesetas, más 20 pesetas por km. ¿Qué empresa les interesa más?

Proceso:

- Los alumnos deben formular hipótesis y justificarlas.
- Después deben construir una tabla de valores para cada empresa, «traducir a ecuaciones» la situación y contestar la siguiente pregunta: ¿Cuántos km deberían recorrer para que ambas empresas cobrasen lo mismo? De nuevo los alumnos deben estimar este valor.
- Representarán gráficamente los valores obtenidos en las tablas e interpretarán el punto de corte de las dos rectas. ¿Cuántos km deberían recorrer para que la primera empresa fuese más rentable? ¿Y para que lo fuese la segunda?

Posteriormente, el profesor planteará un sistema que no tenga soluciones, describiendo cómo son las ecuaciones y qué ocurre con la representación gráfica. Por ejemplo:

En su búsqueda, nuestros alumnos encontraron la empresa «Queostimo», que cobraba 25.000 pesetas, más 30 pesetas por km, que olvidaron rápidamente. ¿Por qué? ¿Cómo se expresa la relación km-precio en una ecuación? Compárala con la empresa «Bienoslleva»: ¿Qué ocurre? ¿Hay alguna distancia para la que las dos empresas cobren lo mismo? ¿Cómo serán las rectas si representamos las relaciones de ambas empresas? Dibújalo.

(*) En este momento se puede realizar una prueba oral que consista en presentar, en una transparencia, enunciados que se corresponden con sistemas y distintas representaciones gráficas en las que estarán marcados los valores de las soluciones. Pediremos a los alumnos que asocien a cada enunciado una representación justificando el porqué de su elección.

Una vez que el alumno ha resuelto gráficamente el sistema, la actividad se presta a que el alumno emplee el método de igualación para hallar la solución exacta. Posteriormente se irán planteando sistemas en los que el alumno deba despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones para poder igualar.

El método de sustitución tiene el mismo fundamento que el de igualación. Lo interesante de este método es que sirve para resolver sistemas de ecuaciones de cualquier tipo, por ello puede resultar interesante que los alumnos lo conozcan. También sirve para reforzar el concepto de sistema y de sus soluciones. Inicialmente se plantearán sistemas en los que la sustitución de una de las incógnitas sea evidente, por ejemplo:

En una tribu africana se utilizan cocos como trueque por otros objetos. Sabemos que por 2 lanzas y 10 flechas han dado 60 cocos y por 1 lanza y 20 flechas, 75 cocos. ¿Cuántos cocos truecan por una sola lanza y una sola flecha?

Para introducir el método de sustitución se plantearán por ejemplo la siguiente situación:

Un refresco y 2 bocadillos cuestan 350 pesetas, 4 refrescos y 3 bocadillos cuestan 1.005 pesetas. ¿Cuánto cuestan 2 refrescos y 4 bocadillos? ¿Y 5 refrescos y 5 bocadillos?

Preguntas de este estilo sirven para introducir el concepto de combinación lineal de ecuaciones.

Por último, los alumnos obtendrán el precio de un refresco y de un bocadillo.

Se realizará seguidamente el mismo tipo de ejercicio, pero expresado algebraicamente. Es importante que los alumnos escriban primero en lenguaje cotidiano qué operaciones realizan. Para un análisis más detallado de este tipo de actividades se recomienda la lectura del libro *Ideas y actividades para enseñar Álgebra,* del Grupo Azarquiel (ver *Recursos* en esta Unidad).

(*) Al finalizar el tema se realizará una prueba escrita en la que el alumno deberá resolver gráfica y algebraicamente un sistema y se le pedirá que escriba un enunciado que dé lugar a un sistema sin soluciones.

Recursos

Libros:

— AZARQUIEL, GRUPO: *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 33. 1991.

Vídeos:

— *Donald en el país de las matemágicas.* Walt Disney. Distribuidora, Filmayer vídeo.

Unidad 4

ECUACIÓN DE 2º GRADO. RESOLUCIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA

Objetivos

- Traducir a lenguaje algebraico problemas expresados en lenguaje cotidiano.
- Representar gráficamente una función de 2º grado teniendo el enunciado verbal, tabla de valores o expresión algebraica.
- Resolver aproximadamente una ecuación de 2º grado a partir de la gráfica asociada.
- Resolver algebraicamente la ecuación de 2º grado.
- Conocer el número áureo y el contexto histórico en el que surgió. Comprender que este número es irracional.

Contenidos

Conceptos:

- Ecuación de 2º grado.
- Solución de una ecuación. Número de soluciones.
- Algoritmo de resolución de la ecuación de 2º grado.
- Número irracional.

Procedimientos:

- Utilización del lenguaje algebraico para expresar situaciones.
- Representación gráfica de una ecuación de 2º grado. Utilización de la gráfica para el cálculo aproximado de soluciones.
- Utilización de métodos numéricos y por tanteo para encontrar soluciones aproximadas.
- Resolución algebraica de ecuaciones de 2º grado incompletas.
- Utilización del método de completar cuadrado para resolver ecuaciones concretas de 2º grado.
- Cálculo de las soluciones a través de la fórmula.
- Interpretación de los coeficientes en el sentido de saber el número de soluciones.
- Comprobación de las soluciones.
- Resolución de la ecuación $x = 1 + 1/x$.

Actitudes:

Las mismas de la Unidad anterior.

Actividades

La primera actividad parte de un enunciado verbal que el alumno debe traducir a una ecuación de 2° grado.

Ejemplo:

Queremos hacer un marco para un cuadro de forma rectangular, que tiene una superficie de 600 cm^2. Para ello disponemos de un listón de madera de 10 cm y no queremos desperdiciar ningún trozo de madera. ¿De qué longitud han de ser los trozos que debemos cortar?

Proceso:

- Planteamiento de la ecuación y estimación del resultado.
- Elaboración de una tabla, que después de representar gráficamente los valores servirá para hallar una solución aproximada.
- Significado de los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas. Se trata de buscar el reconocimiento de que uno de ellos es la solución del problema y el otro es solución de la ecuación, pero no del problema.

A continuación el profesor planteará situaciones que conduzcan a ecuaciones de 2° grado incompletas y pedirá una solución exacta que deben encontrar utilizando métodos algebraicos. Es conveniente incluir ecuaciones con 0, 1 y 2 soluciones. No es necesario que los alumnos escriban la solución de forma algebraica.

Cuando se hayan resuelto varios ejercicios como los anteriores, el profesor retomará el problema inicial pidiendo una solución exacta. La siguiente pregunta busca que los alumnos se den cuenta de que la ecuación de 2° grado completa no se puede resolver como las anteriores: ¿Se pueden realizar las mismas operaciones que en los casos anteriores? ¿Por qué?

Después, explicará que hay un método que permite despejar la incógnita en estos casos y guiará a los alumnos en el proceso de completar cuadrados, con este problema particular y con otros similares. Los métodos geométricos pueden facilitar la comprensión de este proceso.

Por último, el profesor explicará que siguiendo el mismo procedimiento con la expresión general de la ecuación de 2° grado $ax^2+bx+c=0$ se llega a que las raíces son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Señalará cuál es el discriminante y preguntará cómo influye su signo en el número de soluciones de la ecuación.

Los alumnos aplicarán esta fórmula en distintas situaciones, entre las que se deben encontrar casos de 0, 1 y 2 soluciones, y las interpretará gráficamente.

En la introducción de este tema se explica el porqué del estudio del número áureo. Para presentarlo el profesor relatará brevemente las características de la escuela pitagórica, su preocupación por los números y la importancia de su emblema: el pentágono estrellado. Se recomienda el visionado del vídeo *Donald en el país de las matemágicas* como complemento de estas explicaciones.

Aunque los griegos encontraron el número áureo a partir de la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, se podría proponer su obtención mediante la búsqueda de un rectángulo de proporciones áureas.

El profesor explicará la siguiente situación:

En un rectángulo dibujamos un cuadrado de manera que su lado coincide con el lado menor del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo original para que el rectángulo que queda tenga sus mismas proporciones? Para hacerlo aún más sencillo, se le dirá que el lado menor del rectángulo mide una unidad.

Los alumnos deben plantear y resolver la ecuación. Una vez hecho esto el profesor explicará que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional que tuvo gran importancia en la matemática griega y en el arte.

(*) La prueba escrita de evaluación consistirá en:

— La resolución algebraica y gráfica de una ecuación de 2º grado que los alumnos deben plantear a partir de una situación concreta. Si conocen el volumen del ortoedro el problema puede ser el siguiente: Hemos pedido que nos hagan 4 cajas de metal (sin tapa) de una altura de 5 cm y que tengan un volumen de 500 cm^3. Nos explican que las harán, en una sola pieza, a partir de una plancha de metal cuadrada a la que recortarán en cada esquina un cuadrado de 5 cm de lado. El precio por cm^2 de la plancha es de 50 pesetas. ¿Cuánto nos costarán las cuatro cajas?

— La asociación entre la expresión algebraica de ecuaciones de 2º grado incompletas y representaciones gráficas en las que se marquen los valores de las soluciones.

(*) Para completar la evaluación de la unidad los alumnos realizarán una investigación sobre las proporciones áureas en algunas obras de arte. Algunos de los trabajos se expondrán en clase.

Recursos

Ver recursos de la Unidad 3.

Transformaciones geométricas en el plano y razones trigonométricas

Con la primera Unidad se pretende un acercamiento intuitivo a los movimientos en el plano partiendo del estudio de mosaicos, a la vez que se inicia a los alumnos en la terminología utilizada por los matemáticos para cada uno de estos movimientos y se busca precisión en la utilización de sus elementos básicos.

El hecho de trabajar los movimientos en el plano de este modo favorece las experiencias visuales, estéticas y «manipulativas» sobre las cuales fundamentar las actividades y abstracciones posteriores. La búsqueda del centro y ángulo de un giro, el eje de una simetría axial y el vector de una traslación, serán tareas a llevar a cabo. Se pueden hallar también, como actividad de ampliación, las coordenadas de algún punto significativo de la figura en movimiento, antes y después de su aplicación. Lo que no se hará, en ningún caso, es un tratamiento analítico del tema. Se trabajará, además, con composiciones sencillas de dos movimientos y se construirán mosaicos a partir del diseño de un motivo mínimo que cumpla determinadas condiciones sencillas.

Con respecto a la segunda Unidad, se parte de la base de que la semejanza ya ha sido trabajada al menos en el curso anterior, por lo que no se le dedicará mucho tiempo a estos contenidos. Es conveniente construir figuras, principalmente triángulos, con el pantógrafo y presentarlas como figuras homotéticas, identificando el centro y razón de homotecia, y relacionar las propiedades comunes de estas transformaciones geométricas con las de los movimientos en el plano: conservación o no de longitudes, áreas y ángulos.

Partir de la semejanza de triángulos favorece la introducción de las razones trigonométricas y su utilidad para conseguir medidas reales que requerirían un gran esfuerzo si tuvieran que realizarse sobre el terreno.

Aunque hemos elegido este enfoque para su tratamiento, es conveniente que el alumno sepa que la trigonometría surgió para satisfacer las necesidades de la astronomía y más tarde, de la cartografía, la artillería, etc., y que en la actualidad es un instrumento fundamental para la exploración de las vibraciones y movimientos periódicos que aparecen cotidianamente en la naturaleza.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
5ª	*Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías axiales. Composición de movimientos.*	2 semanas
6ª	*Semejanza y homotecnia. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.* *Ténicas de resolución de triángulos rectángulos*	2 semanas

Unidad 5

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Objetivos

- Descubrir en la naturaleza y en el arte ciertas transformaciones geométricas y cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas y en particular de los mosaicos.
- Conocer cuándo uno o varios polígonos regulares pueden recubrir el plano.
- Identificar el elemento mínimo de un mosaico y los giros, traslaciones y/o simetrías con o sin deslizamiento, que existan en él.
- Reconocer el centro y el ángulo de giro, el eje de simetría o el vector de traslación en cada caso.
- Construir mosaicos mediante el diseño de elementos mínimos que cumplan determinadas condiciones.

Contenidos

Conceptos:

- Polígonos regulares que recubran el plano.
- Traslaciones. Vector de traslación. Traslaciones con deslizamiento.
- Giros. Centro y ángulo orientado de giro.
- Simetrías axiales. Eje de simetría.
- Composición de movimientos.

Procedimientos:

- Estudio de recubrimientos del plano que aparecen en el arte y en la naturaleza.
- Identificación del elemento mínimo de un mosaico.
- Reconocimiento de que una figura se obtiene de otra mediante:
  - Una traslación; identificando el vector correspondiente.
  - Un giro; identificando el centro, ángulo y sentido del giro.
  - Una simetría axial; identificando el eje y distinguiendo que, aunque la figura resultante está contenida en el plano, el movimiento, en sí mismo, se «sale» de él.
  - Una simetría axial con deslizamiento.
- Comparación de la idea de mediatriz con la de eje de simetría.
- Relación entre giro y simetría con el plegado de papel.
- Análisis de las propiedades comunes de la figura que se obtiene mediante un movimiento y de la figura de la que se parte.
- Construcción de mosaicos mediante el diseño de un elemento mínimo.
- Obtención de una figura a partir de otra, mediante la composición de dos movimientos, y reconocimiento de los mismos en casos sencillos dada una figura y su transformada.
- Descomposición de un giro en dos simetrías axiales.

Actitudes:

- Gusto por la belleza de las formas geométricas que aparecen en la naturaleza, en el arte y en la vida cotidiana y por la observación de regularidades en los mosaicos.
- Interés por construir mosaicos diseñados por uno mismo o un grupo de compañeros.
- Curiosidad por reconocer los movimientos que transforman unas figuras en otras y por encontrar sus elementos básicos.

Actividades

(*) Para la comprensión de esta Unidad se requiere el conocimiento previo de la medida de los ángulos de los polígonos regulares, tanto centrales como el que definen dos lados consecutivos. También se debe conocer el concepto de mediatriz de un segmento y su construcción. Es, por tanto, conveniente realizar alguna actividad de evaluación inicial de estos aspectos y reforzarlos en caso necesario.

Como presentación de la Unidad pueden mostrarse mosaicos ya construidos por medio de diapositivas, transparencias y/o vídeos. El profesor propondrá la búsqueda del elemento mínimo a partir del cual puede obtenerse todo el mosaico en cuestión, debatiendo las distintas propuestas que se formulen.

A continuación se propone la siguiente actividad para realizar en pequeños grupos:

> ¿Con qué polígonos regulares, solos o combinados, puede recubrirse el plano y con cuáles no?

De esta forma se obtienen los mosaicos regulares y semirregulares.

En los párrafos siguientes se describe una secuencia de tipos de actividades sin hacer referencia a mosaicos concretos. El profesor deberá elegirlos y organizar el trabajo de la manera que crea más conveniente: transparencias, fotocopias, etc.

— Reconocimiento de giros, traslaciones y simetrías axiales con o sin deslizamiento y sus elementos básicos, mediante la utilización de mosaicos en los que, a partir de la identificación del elemento mínimo, pueda obtenerse el resto aplicando un solo movimiento a dicha figura. Este es el momento de dar una definición sencilla de vector para el caso de las traslaciones.

— Trabajo con mosaicos en los que aparezca más de un movimiento, para que los alumnos los identifiquen, así como sus elementos básicos.

— Relación entre giros y simetrías con plegado de papel, por una parte y entre el eje de una simetría axial con la mediatriz de un segmento por otra.

(*) Es un buen momento para recoger los trabajos realizados individualmente por los alumnos y revisar algunos de sus cuadernos. Esto nos dará la información necesaria para insistir en aspectos no asimilados antes de seguir profundizando en otros.

— Análisis de propiedades comunes a una figura antes y después de aplicarle cualquiera de estos movimientos: conservación o no de medidas de longitudes, áreas y ángulos.

— Estudio de composiciones sencillas de dos movimientos del mismo o de distinto tipo con actividades similares a las planteadas hasta el momento.

Como actividad de ampliación para alumnos que dominen la representación de puntos en el plano a partir de unos ejes de referencia, se puede plantear:

— Superponer a los mosaicos estudiados una transparencia con una trama cuadriculada y elegir unos ejes coordenados, para asignar cómodamente (tomando evidentemente una unidad adecuada a la trama) coordenadas a puntos de interés de las figuras y establecer relaciones sencillas entre ellos.

(*) Finalmente, se propondrá la construcción de un mosaico diseñado en pequeños grupos, teniendo en cuenta algunas pautas presentadas por el profesor, y tendiendo a buscar cierta originalidad y belleza en el mosaico resultante.

Estos trabajos se entregarán para su evaluación, cuidando su presentación y acompañados de hoja aclaratoria de los pasos realizados para la obtención del elemento mínimo y los movimientos que se le han aplicado. Sería estimulante para los alumnos que sus diseños fueran expuestos en la clase o en el centro según los resultados obtenidos.

Las pautas antes mencionadas se refieren a una serie de esquemas o reglas que Escher redactó y que se consideran aplicables a los diseños de los artesanos árabes.

Consisten en obtener el elemento mínimo del mosaico aplicando traslaciones, giros o simetrías a trozos recortados de un polígono determinado de los que recubren el plano.

Para obtener mayor información, se recomienda la lectura del libro *Tramas geométricas en la decoración cerámica de la Alhambra,* de Mª T. Pérez y P. Nestares (ver Recursos en esta Unidad).

(*) En la prueba final, se tratará de valorar si los alumnos han identificado los distintos movimientos, composiciones sencillas de los mismos y sus elementos básicos; y de si los aplican a ciertas figuras dadas, mediante actividades de evaluación similares a las propuestas.

Recursos

Libros:

— ALSINA, C; PÉREZ, R.; RUIZ, C. *Simetría dinámica.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 13. 1989.

— FIELKER, D. *Rompiendo las cadenas de Euclides.* Madrid, MEC. Col. Documentos y propuestas de trabajo. 1987.

— PÉREZ, Mª T.; NESTARES, P. *Tramas geométricas en la decoración cerámica de la Alhambra.*

— PÉREZ, R. *Alicatados de la Alhambra.* Granada, Proyecto Sur. 1990.

Vídeos:

— *Escher. Geometría y mundos imposibles.* Mare Nostrum.

— *Mosaicos de la Alhambra.*

— *Simetría y espacio.* Distribuidora: Mare Nostrum.

— *Transformaciones geométricas. Enunciado de Thales.* CNDP. Distribuidora: Mare Nostrum.

Materiales manipulables:

— Transparencias y dispositivas sobre mosaicos.

— Acetatos y rotuladores permanentes.

— Tramas cuadradas e isométricas.

— Transportador de ángulos.

— Regla y compás.

Unidad 6

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos

— Reconocer triángulos semejantes y calcular el factor de proporcionalidad existente entre sus lados.

— Conocer y dar significado a los criterios de semejanza de triángulos y, en particular, de triángulos rectángulos.

— Construir homotecias que relacionen triángulos semejantes dados por parejas. Relacionar razón de homotecia y semejanza.

— Comparar las similitudes y diferencias entre las propiedades comunes de la semejanza y homotecia y las de los movimientos en el plano.

— Definir y calcular las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

- Utilizar las funciones específicas de la calculadora científica para obtener las razones trigonométricas de un ángulo dado y viceversa.
- Conocer y valorar la utilidad de las razones trigonométricas y de algunos aparatos de medida para resolver triángulos rectángulos y obtener mediciones indirectas.

Contenidos

Conceptos:

- Semejanza de triángulos. Razón y criterios de semejanza de triángulos.
- Homotecias. Razón y centro de una homotecia.
- Razones trigonométricas.
- Algunas relaciones sencillas entre las razones trigonométricas.

Procedimientos:

- Identificación de triángulos semejantes y cálculo del factor o razón de semejanza, en un conjunto dado de triángulos.
- Obtención de criterios de semejanza de triángulos y, en particular, de triángulos rectángulos.
- Construcción de la homotecia que transforma, dados dos triángulos semejantes, uno en el otro. Razón y centro de homotecia.
- Comparación entre las propiedades comunes de semejanzas y homotecias, con las de los movimientos en el plano, señalando similitudes y diferencias en cuanto a conservación o no de medidas de ángulos, longitudes y áreas.
- Resolución de triángulos en casos sencillos a partir de ciertos datos conocidos en otro triángulo semejante al primero.
- Búsqueda de la relación entre los dos catetos de varios triángulos rectángulos semejantes. Concepto de tangente de un ángulo agudo.
- Utilización de la tangente para la obtención de medidas inaccesibles.
- Obtención de otras relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo: seno y coseno.
- Obtención de algunas relaciones sencillas entre las razones trigonométricas estudiadas.
- Utilización de técnicas de resolución de triángulos rectángulos aplicadas a la obtención de mediciones indirectas.

Actitudes:

- Gusto por la precisión al efectuar medidas y por la representación cuidada de triángulos semejantes.
- Curiosidad e interés por establecer similitudes y diferencias entre las propiedades de la semejanza y los movimientos en el plano.
- Valoración de la utilidad de la calculadora científica y de algunos instrumentos de medida para resolver cierto tipo de problemas de la vida cotidiana.

Actividades

(*) La semejanza de triángulos, así como la medida de ángulos, han de ser conocimientos ya adquiridos por los alumnos. Concretamente, la medida de ángulos acaba de trabajarse en la unidad anterior. La evaluación inicial se centrará por lo tanto en actividades sobre semejanza de triángulos y, en particular, de triángulos rectángulos. Por ejemplo:

- Dado un conjunto numeroso de triángulos, asociar los que son semejantes entre sí y calcular en cada caso la razón de semejanza.
- Pedir, además, que expresen por escrito qué características específicas tienen estos triángulos.
- Dado un triángulo cualquiera, construir varios semejantes al dado con razón 2, 3 y 1/4

Del resultado de esta evaluación dependerá, como tantas veces se sugiere a lo largo de esta programación, detenerse más o menos en los contenidos referentes a la semejanza. En cualquier caso, es conveniente cierto tratamiento de la misma, para no descontextualizar el estudio de las razones trigonométricas. Pueden plantearse actividades de utilización del pantógrafo o el compás de dos puntas para dibujar triángulos y otras figuras semejantes. Construcción de homotecias señalando la razón y el centro relacionándolas con la semejanza. También es interesante el establecimiento de similitudes y diferencias entre éstas y los movimientos en el plano.

A continuación se plantearán actividades de medidas reales de lugares inaccesibles como:

- La altura de una torre o un árbol, o la anchura de un río.
- La altura que ha alcanzado un vehículo que circula por una carretera con un desnivel del 11% cuando ha recorrido 100 km.
- La relación que existe entre la altura de algunos edificios de una ciudad o un pueblo y la anchura de sus calles.

Para la realización de algunas de estas actividades es conveniente la utilización de un teodolito. Si no se dispone de éste, pueden utilizarse otros procedimientos más imperfectos, como el que se sugiere en el libro *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1,* del Grupo Cero (ver **Recursos** en esta unidad).

A partir de estos trabajos, se introduce el concepto de tangente y más adelante los de seno y coseno a partir de problemas de resolución de triángulos en contextos diversos, como por ejemplo:

- Pilar está haciendo volar su cometa. Cuando ha soltado 50 m de hilo, observa que el ángulo que forma la cuerda con la horizontal es de 60°. ¿A qué altura se encuentra la cometa?
- En un trozo de papel milimetrado, señala un punto P y traza una recta r a 10 cm de P. Con vértice en P, traza ángulos de 10°, 20°, 30°, etc. Calcula el valor del seno, coseno y tangente de estos ángulos. Compruébalos después con tu calculadora.

También se trabajarán las relaciones más sencillas existentes entre las razones trigonométricas utilizadas. Éstas podrán ser útiles para la obtención del resto de las razones trigonométricas dada una de ellas, aunque se potenciará el cálculo de las mismas por medio de las funciones específicas de una calculadora científica y el proceso inverso. Esto no impide el trabajo previo sin ella de razones de ángulos sencillos como 30°, 45°, 60° y 90°.

(*) Como prueba individual escrita de esta unidad pueden plantearse algunas actividades que relacionen los aspectos estudiados y similares a las ya planteadas, tratando de valorar, fundamentalmente si los alumnos saben identificar figuras homotéticas, determinando su centro y razón y si han comprendido el significado de las razones trigonométricas en relación con la semejanza de triángulos rectángulos y su utilidad en la realización de mediciones.

Recursos

Libros:

— CERO, GRUPO. *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1.* Barcelona, Teide. 1985.

— GUZMÁN, M.; CÓLERA, J.; SALVADOR, A. *Matemáticas. Bachillerato 1.* Madrid, Anaya. 1987.

Vídeos:

— *Trigonometría 1.* BBC Enterprises. Distribuidora: Fundación Serveis de cultura popular.

Cuerpos redondos y secciones planas

Los conocimientos geométricos de los alumnos que participan en la anticipación del 4° curso de ESO son escasos, ya que provienen de la geometría estudiada en 7° de EGB, cargada en exceso de algoritmos de cálculo y de lo estudiado en 3° de Secundaria que consistirá fundamentalmente en geometría plana. Por ello, muchos de los contenidos de la ESO deberían estudiarse en este curso.

Ante la imposibilidad de trabajarlos todos es importante, que el profesor conozca previamente el nivel de los conocimientos de sus alumnos sobre este tema y adapte estas unidades didácticas a él. Por otra parte, una posible secuencia de los contenidos relativos a la geometría de 3 dimensiones estudiaría hasta 3° de Secundaria Obligatoria poliedros y cuerpos redondos, llegando hasta el cálculo de superficies, y dejaría para 4° el cálculo de volúmenes. Otra, que es la que aquí se propone, trataría los poliedros (regulares, prismas y pirámides, representaciones planas, superficies y volúmenes) en 3° y dejaría el estudio completo de los cuerpos redondos para 4°. El motivo es que tanto la construcción y desarrollo de estos cuerpos como los algoritmos de cálculo de superficies y volúmenes son complejos.

Tras el estudio de los cuerpos redondos, y relacionándolo con ellos, se estudiarán las cónicas, las coordenadas geográficas, medida del tiempo y confección de calendarios.

La unidad dedicada a cónicas pretende que el alumno conozca las propiedades de la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, situaciones reales en las que aparecen, métodos aproximados de dibujo y relación con las secciones de un cono. No se realizará ningún estudio analítico.

Respecto a las coordenadas geográficas se pretende que el alumno las conozca y sea capaz de leerlas e interpretarlas en un mapa. Que sepa la manera de medir el tiempo y las razones históricas y naturales que fundamentan nuestro sistema actual de medida y calendario. Para ello es necesario el conocimiento de la medida de ángulos orientados.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
7ª	*Cilindro, cono y esfera. Elementos característicos y medidas de superficie y volumen.*	2 semanas
8ª	*Secciones planas de los cuerpos redondos.*	3 semanas
9ª	*Coordenadas geográficas. Medida del tiempo. Calendarios.*	1 semana

Unidad 7

CILINDRO, CONO Y ESFERA. ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS Y MEDIDAS DE SUPERFICIE Y VOLUMEN

Objetivos

- Reconocer los cuerpos redondos describiendo correctamente sus elementos.
- Identificar los planos de simetría y las propiedades que se derivan.
- Calcular la superficie y volumen.
- Conocer las representaciones planas de los cuerpos redondos y realizarlas para resolver sencillamente algunos problemas.

Contenidos

Conceptos:

- Cilindro, cono y esfera. Elementos característicos.
- Simetrías.
- Representaciones planas.
- Áreas y volúmenes.

Procedimientos:

- Construcción de superficies cónicas, cilíndricas y esféricas.
- Identificación de los elementos de los cuerpos redondos: generatriz, vértice, centro, radio, etc. Descripción verbal correcta de estos elementos.
- Representación plana de cilindros y conos. Desarrollos planos. Comprensión de que la esfera no tiene desarrollo plano.
- Visualización y descripción de los planos de simetría de cilindros, conos y esferas.
- Cálculo de la superficie de una superficie cónica, cilíndrica y esférica.
- Estimación de los valores de medidas indirectas.
- Cálculo de volúmenes.

Actitudes:

- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas, así como de los procesos de resolución de problemas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas geométricas.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones de un problema.
- Gusto por la belleza de las formas geométricas que aparecen en la naturaleza, en el arte y en la vida cotidiana.
- Sensibilidad y gusto por la realización y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

Actividades

Se comenzará visualizando los cuerpos a partir de un triángulo rectángulo, un rectángulo y un círculo que giran en torno a un cateto, un lado y un diámetro respectivamente. El profesor preguntará qué entienden por generatriz y concretará la definición para el cilindro y el cono. Pedirá que la dibujen con cierta perspectiva y que la identifiquen con los lados del triángulo y del rectángulo. Lo mismo para el diámetro de la esfera y el del círculo que gira.

Se realizarán algunas preguntas que tiendan a distinguir entre estos cuerpos y los poliedros: ¿Cuántas caras y aristas tienen?

Después, si se dispone de cilindros y conos construidos en poliespán (corcho blanco) se cortarán, para, utilizando espejos, encontrar los planos de simetría. Una vez vistos, los alumnos deben dibujarlos y describir cuál es su localización.

Si no se tiene este material, la búsqueda de los planos de simetría del cilindro y el cono se realizará con cuerpos que los alumnos construirán en cartulina. Para ello deben dibujarse primero los desarrollos planos. Esta actividad se hará después del estudio de los planos de simetría en el caso de disponer de cuerpos prefabricados. Los alumnos dibujarán con precisión el desarrollo de un cilindro y un cono de unas medidas determinadas. Los cuerpos a los que se haga referencia deben ser objetos reales: vasos, depósitos cilíndricos, etc.

(*) Si los alumnos hacen individualmente esta actividad, y además se pide que se describa el porqué de los dibujos, este trabajo puede utilizarse como evaluación de los conocimientos sobre superficies cónicas y cilíndricas y de sus elementos.

Basándose en los desarrollos planos los alumnos calcularán las superficies totales de los cuerpos citados, primero en casos concretos y después obtendrán la fórmula general. El hecho de haber dibujado con exactitud los desarrollos planos ayudará a encontrar las relaciones necesarias. Hay que tener en cuenta que para obtener la fórmula de la superficie lateral del cono es necesario conocer cómo se calcula la superficie de un sector circular. Si no es así, el profesor ayudará a los alumnos indicándoles que existe una proporción entre la superficie del círculo y la del sector. El proceso descrito hasta ahora sirve para el estudio de cilindros y conos, pero no para la esfera. El tratamiento de este cuerpo lo veremos posteriormente. En este momento, lo que sí se analizará con los alumnos es la imposibilidad de hacer un desarrollo plano la esfera, comentando los problemas que esto plantea en la cartografía y (si se cree conveniente) alguna solución.

La obtención de las fórmulas que permitan calcular el volumen del cilindro y del cono se hará razonando a partir del volumen del prisma y de la pirámide, respectivamente. Se debe comentar previamente que podemos suponer la circunferencia como un polígono de infinitos lados. Si los alumnos desconocen este tratamiento se puede utilizar el libro de espejos para ver cómo se forman polígonos de cualquier número de lados al reflejarse en él un segmento. Un método experimental para calcular el volumen del cono, una vez conocido el del cilindro, consiste en ver que un cilindro contiene tres veces la cantidad de agua, arena, etc., que contiene un cono cuya base tiene el mismo radio que la del cilindro y ambos tienen la misma altura.

Una vez obtenidas las fórmulas de la superficie total y el volumen del cilindro y cono se harán algunos ejercicios para practicar con ellas, por ejemplo:

- ¿Cuál es el volumen máximo de líquido que puede contener un vaso cilíndrico si su altura es de 20 cm y la circunferencia de la base tiene un radio de 3 cm?
- Dibuja un vaso cilíndrico de 280 cm^3 de capacidad. Explica cómo has obtenido sus dimensiones. ¿Existe más de un vaso que tenga ese volumen?
- ¿Cuánta cartulina necesitas para construir un cilindro de 20 cm de altura y con una base cuyo radio mide 5 cm? ¿Y un cono de las mismas medidas?

— ¿Cuál es el volumen máximo de un cucurucho de helado si mide 15 cm de alto y la base del cono tiene una superficie de 10 cm^2?

(*) Para evaluar los conocimientos adquiridos hasta ahora se propondrá un problema de investigación que los alumnos deben realizar en grupo:

Una empresa quiere diseñar una lata de forma cilíndrica para un refresco. Inicialmente la única condición que tiene es la de que la capacidad de la lata debe ser de 250 cm^3. Dibuja una lata con las características anteriores. ¿Cuál es la chapa necesaria para construir esa lata?

Teniendo en cuenta que a la empresa le interesa gastar la menor cantidad de chapa posible, ¿cuáles serían las dimensiones de la lata?

Una vez resuelto el problema, uno de los empleados de la empresa advierte que las máquinas expendedoras de este refresco sólo admiten latas de 15 cm de altura: ¿Cuántas posibilidades hay ahora? ¿Cuáles son las dimensiones?

Posteriormente, se describen dos métodos para estudiar la superficie y el volumen de la esfera. El primero consiste en obtener las medidas de forma experimental; con el otro se deducen las fórmulas que proporcionan un cálculo exacto. Aunque el planteamiento que debe hacerse en este curso (y en esta opción) es el segundo, el profesor debe decidir cuál es el más apropiado para sus alumnos.

El método experimental está descrito en el libro *Cuerpos*, de Carmen Calvo *et al.*, y consiste en lo siguiente:

Para el volumen:

— Cortar la esfera (una pelota de goma, por ejemplo) en dos semiesferas.

— Construir un cilindro cuya base tenga el mismo radio que tiene la esfera, y cuya altura es igual al diámetro de la esfera. Graduar el cilindro como si fuera un vaso de laboratorio.

— Llenar las semiesferas de agua, arena, etc., y vaciarlas en el cilindro. Comprobar que el material utilizado ocupa las dos terceras partes del cilindro.

— Deducir que entonces:

$$Vol_{cono} = \frac{2}{3} Vol_{cilindro}$$

$$Vol_{cono} = \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 (2r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Para la superficie:

— Cortar una esfera en dos semiesferas.

— Construir un cilindro cuya base tiene el mismo radio que la esfera y cuya altura es igual al diámetro de la esfera.

— Recubrir con cuerda las dos semiesferas y comprobar que con la misma cantidad se recubre la superficie lateral del cilindro.

— La superficie lateral del cilindro es:

Longitud de la circunferencia base del cilindro $= 2 \pi r$

Altura del cilindro $= 2r$

Superficie lateral del cilindro $= 2 \pi r \times 2r = 4 \pi r^2$

Que, por lo tanto corresponde a la superficie de la esfera.

Un método exacto para obtener la fórmula se basa en el principio de Cavalieri y en el volumen de un cilindro. Una explicación completa puede verse en el libro *Geometría y experiencias,* de García, J. y Beltrán, C. (ver **Recursos** en esta Unidad).

En ese mismo libro se describe cómo obtener la fórmula de la superficie de la esfera, una vez conocida la fórmula del volumen. Para ello supone que el volumen esférico es la suma de los volúmenes de pequeñas pirámides con vértice en el centro de la esfera.

Para ejercitar la buena utilización de las fórmulas obtenidas se realizarán algunos ejercicios de cálculo, por ejemplo:

- El volumen de un depósito esférico de 20 m de diámetro, la superficie de la Tierra (conocido el radio o bien dando la definición de metro como la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre), el volumen de la Tierra, el volumen de aire que contiene un balón de 15 cm de diámetro, etc.

(*) Al finalizar la Unidad se realizará una prueba escrita en la que se propondrán actividades similares a las realizadas.

Recursos

Libros:

- ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J. *Materiales para construir la geometría.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 11. 1988.
- CALVO, C. *et al. Cuerpos.* Madrid, MEC. Col. Documentos y propuestas de trabajo. 1987.
- GARCÍA, J.; BELTRÁN, C. *Geometría y experiencias.* Madrid, Alhambra. 1987.
- GUZMÁN, M. *Construcciones geométricas con materiales diversos. Experimentos de geometría.* Madrid, MEC. 1985.

Materiales manipulables:

- Planchas de cartón o corcho.
- Cuchillas.
- Hilo.
- Cilindros, conos y esferas prefabricados.
- Cartulinas.
- Reglas.
- Compás.

Unidad 8

SECCIONES PLANAS DE LOS CUERPOS REDONDOS

Objetivos

- Mejorar la visión espacial. Utilizar las secciones planas de un cuerpo para representarlo en el plano.

- Determinar de cuántas maneras distintas se pueden cortar una esfera y un plano. Determinar qué condiciones deben darse para que el círculo de corte sea máximo.
- Reconocer la forma de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.
- Conocer algo sobre la historia del estudio de las cónicas.
- *Obtener las formas anteriores mediante la intersección de una superficie cónica y distintos* planos. Conocer cómo debe ser el corte para que el resultado sea una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola.
- Describir las cónicas como lugares geométricos. Definir sus elementos.
- Dibujar cónicas.
- Relacionar la forma de la cónica con su excentricidad.
- Reconocer las cónicas en distintas formas reales.

Contenidos

Conceptos:

- Circunferencia, elipse, hipérbola, parábola. Elementos.
- Excentricidad.
- Círculos máximos y paralelos de una esfera.

Procedimientos:

- *Obtención de las cónicas a partir de la intersección de un cono y un plano. Descripción de la* relación plano-cono para obtener cada una de ellas.
- Clasificación de figuras.
- Comentario de un texto sobre la construcción de las cónicas de Apolonio.
- Trazado de las cónicas por puntos.
- Ordenación en tablas de distintos datos referentes a cónicas. Generalización a partir de las tablas de las propiedades de los puntos de cada cónica.
- Cálculo de la excentricidad. Relación con la forma de la cónica.
- Identificación de secciones cónicas en situaciones y objetos reales.

Actitudes:

- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de las características de las cónicas y de sus elementos, así como de los procesos de resolución de problemas.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Confianza en la propia capacidad para percibir los cuerpos en el espacio y sus intersecciones con planos.

Actividades y recursos

Se ha elegido esta Unidad para ser desarrollada en su totalidad, por lo que se remite al capítulo III.

Unidad 9

COORDENADAS GEOGRÁFICAS. MEDIDA DEL TIEMPO. CALENDARIOS

Objetivos

- Reconocer que el sistema formado por el Ecuador y el meridiano de Greenwich es una referencia en la esfera, siendo la latitud y la longitud las coordenadas.
- Describir correctamente lo que es un meridiano y un paralelo.
- Leer coordenadas geográficas en un plano o globo terráqueo.
- Localizar lugares de la superficie terrestre conocidas la latitud y la longitud.
- Conocer y utilizar el sistema de usos horarios.
- Conocer la evolución histórica de nuestro calendario.
- Conocer cómo se confeccionan calendarios.

Contenidos

Conceptos:

- Esfera terrestre. Meridianos y paralelos terrestres.
- Latitud y longitud geográficas.
- Unidades de medida del tiempo: año, día, mes, hora, minuto y segundo.
- Husos horarios.
- Movimientos solares.

Procedimientos:

- Utilización de la calculadora para trabajar con medidas de ángulos.
- Localización de meridianos y paralelos en la esfera terrestre.
- Lectura de las coordenadas geográficas de un lugar. Cálculo aproximado de la latitud y longitud de un lugar a la vista de un mapa.
- Describir correctamente día, año, mes.
- Relación entre las unidades de medida del tiempo: día–año, día–hora.
- Determinar si un año es bisiesto o no.
- Cálculo de la hora de un lugar conocida la hora del lugar de referencia y las longitudes de ambos.

Actitudes:

- Interés por utilizar de manera precisa mapas y globos terráqueos para resolver las situaciones propuestas.
- Disposición para realizar con cuidado y rigor dibujos y esquemas.

Actividades:

Inicialmente se realizarán actividades de repaso sobre medida de ángulos en grados sexagesimales, utilización de la calculadora para sumar y restar ángulos y convertir una expresión compleja en una decimal.

El profesor iniciará el tema de las coordenadas planteando alguna situación plana (distinta de las coordenadas cartesianas que ya conocen), por ejemplo: un tablero de ajedrez. Se pedirá a los alumnos que averigüen la denominación de cada casilla del tablero. Tras esto se preguntará cómo se localizaría un punto en una superficie esférica, dejando que los alumnos hagan suposiciones que deben justificar.

Se proporcionará a cada grupo de alumnos un globo terráqueo pidiendo que fijen su atención en la división en casillas determinadas por líneas y que contesten por escrito a las siguientes preguntas:

— Sigue una de esas líneas, ¿qué es? ¿Son todas las líneas iguales? ¿Cuántos tipos de líneas hay? ¿Sabes qué es el Ecuador? Localízalo en el globo.

— ¿Algunas de esas líneas tienen relación con el Ecuador? Localiza el Polo Norte y el Polo Sur, ¿cómo son todas las circunferencias que pasan por ambos?

El profesor explicará (si los alumnos no lo han hecho) que esas líneas reciben el nombre de meridianos y paralelos y que el Ecuador y una de las circunferencias máximas, la que pasa por Greenwich, son las que se toman como referencia. Puede hacer un comentario sobre por qué se eligió este meridiano.

Una vez que los alumnos conocen el sistema de referencia, se tratará de que encuentren por sí mismos cuáles son las medidas que determinan las coordenadas de un punto de la superficie terrestre:

Piensa un lugar del mundo y localízalo en el globo terráqueo. ¿Cómo puedes decir a tu compañero qué sitio es, sin señalárselo? ¿Puedes dar distancias, medidas en centímetros?

Si los alumnos tienen dificultades se les sugerirá que utilicen ángulos para medir.

Tras esta actividad, el profesor definirá correctamente lo que se entiende por latitud y longitud. Los alumnos deberán realizar dibujos que describan lo que han escuchado y hacer algunas actividades similares a las siguientes:

— Hallar las coordenadas de: Polo Norte, Polo Sur, Greenwich, Ecuador, etc.

— Localizar lugares, conocidas la longitud y la latitud.

— Determinar las coordenadas del lugar en donde se vive y de su antípoda.

Para introducir la medida del tiempo el profesor hará un comentario sobre el origen histórico de esta medida, hablando de los movimientos aparentes del Sol, los movimientos de la Tierra y de la Luna. Después pedirá a los alumnos que describan lo que es un año, un mes, un día, una hora, un minuto y un segundo.

El aprendizaje del sistema de husos horarios se iniciará preguntando el porqué de esa frase tan repetida en los informativos peninsulares:

«Son las ocho de la mañana, una hora menos en las Islas Canarias.»

Se pedirá que relacionen esto con la definición de día y la salida del Sol.

Después el profesor explicará el sistema de husos horarios y propondrá a los alumnos que, utilizando el globo terráqueo, determinen la hora de un lugar conocida la hora del lugar de referencia.

Por último el profesor preguntará a los alumnos si saben lo que es un año bisiesto y el porqué algunos años deben serlo. Explicará la regla que sirve para determinar qué años son bisiestos y su origen. Después se propondrá el análisis de un texto en el que se explique la evolución del calendario actual. Si se cree oportuno, se puede comentar con los alumnos otros calendarios distintos del occidental.

Recursos

- Materiales manipulables.
- Calculadora.
- Globo terráqueo.
- Mapas.
- Calendarios.

Funciones

Este tema consta de dos unidades: la primera dedicada a la interpretación de funciones mediante el estudio gráfico, de modo intuitivo y práctico, de sus características globales, utilizando funciones que aparecen en los medios de comunicación y en publicaciones científicas y de todo tipo. La segunda Unidad estudia algunas familias de funciones: inversa, cuadrática y exponencial.

Es posible que los alumnos de este curso ya hayan trabajado algunos de los contenidos de la primera Unidad; por ello, el tiempo que se le ha asignado se puede reducir teniendo en cuenta que lo más novedoso es el tratamiento de la continuidad, periodicidad, tendencia y tasa de variación media como promedio de la variación de una magnitud respecto a otra en diversos intervalos, procurando incluir situaciones diversas de las distintas ciencias y de la vida cotidiana.

La función lineal es objeto de estudio de 3º de Secundaria Obligatoria, por lo que todos los alumnos deben conocerla. En este curso se retoma comparándola con otras funciones (cuadrática y exponencial). Además, en este curso y en esta opción, debe darse mayor rigor al estudio de funciones profundizando más en las funciones inversa, cuadrática y exponencial, así como en sus expresiones algebraicas en aquellas situaciones que la sencillez de la expresión permita que el alumno sea capaz de encontrarla por sí mismo.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
10ª	*Interpretación de funciones dadas mediante tablas, gráficas y expresiones verbales y algebraicas sencillas. Estudio gráfico de características globales. Tasa de variación media.*	1 semana
11ª	*Estudio de algunos tipos de funciones: de proporcionalidad directa e inversa, función cuadrática y exponencial, a partir de su expresión algebraica o de situaciones en las que se presenten.*	2 semanas

Unidad 10

INTERPRETACIÓN DE FUNCIONES DADAS MEDIANTE TABLAS, GRÁFICAS Y EXPRESIONES VERBALES Y ALGEBRAICAS SENCILLAS. ESTUDIO GRÁFICO DE CARACTERISTÍCAS GLOBALES. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Objetivos

- Construir e interpretar en su contexto tablas de datos a partir de datos desorganizados extraídos de una situación, de gráficas o de expresiones verbales muy sencillas.
- Elegir convenientemente según el contexto, las unidades y escalas en los ejes de coordenadas.
- Representar gráficamente algunas funciones sencillas dadas mediante una tabla de datos.
- Utilizar e interpretar el lenguaje gráfico en situaciones diversas.
- Reconocer intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos en tablas y gráficas e interpretarlos en su contexto.
- Detectar discontinuidades y periodicidad, en su caso, en funciones dadas mediante su gráfica.
- Calcular la tasa de variación media de funciones en distintos intervalos e interpretar su significado.

Contenidos

Conceptos:

- Unidades, escalas y ejes.
- Relaciones entre magnitudes dadas mediante una expresión verbal o algebraica o una tabla de datos.
- Estudio gráfico de características globales:
  - Crecimiento y decrecimiento.
  - Máximos y mínimos.
  - Continuidad y periodicidad.
  - Tasa de variación media.

Procedimientos:

- Interpretación de una situación presentada a partir de una gráfica.
- Sistematización en la toma de datos de una situación dada y construcción a partir de ellos de tablas de valores, interpretándolas en su contexto.
- Elección adecuada de unidades y escalas en los ejes de coordenadas.
- Representación gráfica de funciones muy sencillas dadas mediante una tabla de datos o una expresión algebraica.

— Reconocimiento e interpretación en su contexto, de intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y tendencias de una función dada a partir de una tabla o una gráfica.

— Detección de discontinuidades y/o periodicidad, en su caso, de una función dada mediante su gráfica.

— Representación gráfica de funciones utilizando sus propiedades globales.

— Determinación del período de una función a partir de la observación de la tabla numérica o gráfica asociada.

— Cálculo de la tasa de variación media.

Actitudes:

— Valoración del lenguaje gráfico para interpretar situaciones cotidianas, de los medios de comunicación y de las diversas ciencias.

— Actitud crítica ante la utilización del lenguaje gráfico, atendiendo especialmente a las unidades y escalas empleados por los medios de comunicación.

— Gusto por la presentación ordenada y pulcra de tablas de datos y gráficas, así como de su interpretación verbal.

— Valoración de la calculadora científica como ayuda eficaz si se utiliza adecuadamente.

Actividades

El tratamiento de esta Unidad depende del enfoque dado en el curso anterior, y de la profundidad alcanzada en los distintos aspectos del tema. Por ello se insistirá sobre todo en los aspectos más novedosos y en los menos asimilados por los alumnos.

(*) De lo anterior se deduce la necesidad de una **prueba inicial** que consistirá en la interpretación de gráficas aparecidas en distintos medios, por ejemplo: evolución del desempleo, índices de audiencia de cadenas de televisión, etc.

Es importante que el alumno haga esta interpretación con actitud crítica ante las unidades y escalas utilizadas y detectando, si procede, falacias en la información así representada. El alumno deberá describir el comportamiento del fenómeno asociado a la gráfica.

Las actividades irán incorporando progresivamente el estudio de más características globales de las funciones, tratando cada una de ellas primero individualmente. Por ejemplo:

— Comparación de gráficas de funciones:

- Crecientes o decrecientes.
- Crecimiento o decrecimiento en intervalos.
- Continuas o discontinuas.
- Periódicas o no.

— Análisis de las tendencias y de la tasa de variación media en distintos intervalos con la calculadora.

Del mismo modo, los alumnos aprenderán a extraer datos de situaciones cotidianas, a sistematizar los recuentos, construyendo tablas y haciendo representaciones gráficas a partir de las mismas en casos sencillos.

A final de la Unidad se añadirán a esta primera interpretación los datos que aportan el reconocimiento de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, detección e interpretación de valores extremos y otros puntos de interés, de discontinuidades o periodicidad, etc. El cálculo de la tasa de variación media en distintos intervalos informará sobre la evolución del fenómeno que se estudia. Los alumnos han de captar la gran cantidad de información que puede obtenerse a partir del estudio realizado. Estas propiedades pueden estudiarse con actividades del tipo siguiente:

> Analizar la variación de la velocidad con respecto a la distancia del punto de partida en una carrera de coches, cuando el vehículo recorre distintos circuitos.

Una descripción minuciosa de este tipo de actividades puede verse en el libro *El lenguaje de funciones y gráficas,* del Shell Center (ver Recursos en esta Unidad).

(*) Hasta este momento los problemas deben realizarse (en general) en pequeños grupos utilizando los debates y la revisión de algunos cuadernos de clase como instrumentos de evaluación.

Para trabajar más específicamente el problema de la tasa de variación media de una función puede utilizarse el ejemplo de un coche que realiza un viaje a través de distintas carreteras: rurales, urbanas, autopistas, etc., y que hace paradas para repostar o descansar.

(*) A continuación se realizará una prueba individual de evaluación que conste de ejercicios similares a los estudiados, por ejemplo:

- Relacionar enunciados verbales con gráficas de distintas características globales e indicar las razones de la asociación.
- Dada una gráfica describir un fenómeno relacionado con ella.
- Análisis de un enunciado verbal y una gráfica que no lo represente de manera fidedigna.
- Una actividad global: variación con el tiempo de la cantidad de agua del depósito de una máquina de café colocada en una oficina en la que deben estudiar todas las características globales antes mencionadas.

Recursos

Libros:

— AZCÁRATE, C.: DEULOFEU, J. *Funciones y gráficas.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 26. 1990.

— SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION. *El lenguaje de funciones y gráficas.* Bilbao, Universidad del País Vasco y MEC. 1990.

— ZERO, GRUP. *Funciones lineales y cuadráticas.* Barcelona, Vicens Vives. 1988.

Vídeos:

— *Función exponencial.* Distribuidora: Áncora.

Materiales manipulables:

— Calculadoras científicas y gráficas.

— Transparencias y rotuladores permanentes.

— Papel milimetrado.

— Prensa y revistas científicas.

Programas de ordenador:

- *Derive.*
- *Función lineal y afín.* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S.A.
- *Función cuadrática.* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S.A.
- *Hoja de cálculo.*

Unidad 11

ESTUDIO DE ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES: DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA, FUNCIÓN CUADRÁTICA Y EXPONENCIAL, A PARTIR DE SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA O DE SITUACIONES EN LAS QUE SE PRESENTEN

Objetivos

- Reconocer las funciones lineal, inversa, cuadrática y exponencial a partir de su gráfica o expresión algebraica.
- Obtener la expresión algebraica de una función inversa o cuadrática a partir de tablas numéricas o enunciados verbales y viceversa.
- Utilizar el estudio de funciones lineales y cuadráticas como método gráfico de resolución de ecuaciones de 2º grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Analizar, utilizando las nuevas tecnologías, las variaciones que los cambios de los parámetros originan en las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.
- Utilizar de modo conveniente las calculadoras científica y gráfica, programas adecuados de ordenador y vídeos didácticos para el estudio de estos tipos de funciones.
- Comparar y distinguir entre el crecimiento lineal y el exponencial.
- Describir el comportamiento de un fenómeno a partir del estudio de las características globales de la gráfica asociada.
- Asignar un modelo de función a ciertos fenómenos reales.
- Interpretar informaciones que utilicen el lenguaje gráfico de funciones de los tipos estudiados.

Contenidos

Conceptos:

- Funciones de proporcionalidad inversa, cuadrática, exponencial:
  - Representación gráfica.
  - Expresión algebraica en casos sencillos.
  - Características globales: crecimiento, máximos, cortes con los ejes, periodicidad, continuidad, tendencia, tasa de variación media, etc.
- Función lineal e inversa. Proporcionalidad directa e inversa.

- Función lineal y exponencial.
- Estudio de fenómenos sencillos cuya función asociada es la de alguno de los tipos estudiados en esta Unidad.

Procedimientos:

- Interpretación de gráficas correspondientes a funciones lineales, cuadráticas, inversas y exponenciales, teniendo en cuenta a qué situaciones o fenómenos corresponden, y qué propiedades les caracterizan.
- Representación gráfica de tablas de datos correspondientes a funciones de los tipos anteriores.
- Obtención de la expresión algebraica de la función inversa y cuadrática (en casos sencillos).
- Comparación de las variaciones gráficas que producen los cambios de los parámetros en las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.
- Reconocimiento de intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, discontinuidades y tendencias.
- Cálculo de la tasa de variación media en distintos intervalos.
- Distinción entre crecimiento lineal y exponencial.

Actitudes:

- Reconocimiento de la utilidad del lenguaje gráfico y algebraico en un gran número de situaciones.
- Valoración de la eficaz aportación de los medios informáticos y audiovisuales, de calculadoras científicas y gráficas, para el tratamiento gráfico de situaciones diversas.
- Apreciación del trabajo en equipo para el estudio comparativo de estos tipos de funciones y sus principales características.

Actividades

Es muy importante en esta Unidad didáctica la utilización de calculadoras científicas y gráficas, programas de ordenador y de vídeo adecuados y transparencias, para la visualización rápida de gráficas, comparación de los distintos tipos de familias, constatación de diferencias significativas y similitudes entre ellas, comprobación de las repercusiones en los cambios de los parámetros de una misma familia, etc.

Lo anterior no es incompatible con la realización con lápiz y papel (milimetrado o no) de actividades de representación gráfica de las familias de funciones estudiadas. Es importante conseguir cierto equilibrio entre ambos tipos de actividades.

También es necesaria la utilización de periódicos, revistas científicas y de otro tipo, etc.

A continuación se describen algunas actividades que pueden servir como ejemplo para trabajar con los alumnos la función inversa, la cuadrática y la exponencial.

Función inversa

A partir de un enunciado verbal se pedirá a los alumnos que, en pequeños grupos, dibujen la gráfica de forma aproximada, por ejemplo:

Tiempo empleado en limpiar un monte y número de personas que realizan el trabajo.

En la puesta en común el profesor pedirá a cada grupo que explique el porqué de su gráfica analizando todas las propuestas, aunque sean erróneas. La discusión ayudará a subsanar los errores.

Tras este intercambio inicial se aportarán nuevos datos que permitan un estudio más detallado:

Supongamos que 50 personas tardan 5 horas en realizar el trabajo. Con esta información los alumnos resolverán las siguientes cuestiones:

— Puntos de corte con los ejes, crecimiento o decrecimiento, tendencia, etc.

— Cálculo de la tasa de variación media en distintos intervalos.

— ¿Cuánto tardarían 100 personas? ¿Y 200? Rellenar una tabla con unos cuantos valores.

— Según los resultados obtenidos, perfeccionar la gráfica inicial.

Cuando los distintos grupos tengan completa la tabla, el profesor preguntará por un valor suficientemente alto. Con esto se busca la generalización desde los valores numéricos obtenidos a la expresión algebraica. Hay que advertir que se trata de un proceso que puede requerir cierto tiempo para algunos alumnos. El profesor debe intentar no resolver el resultado ante los primeros fracasos, sino insistir en casos particulares.

Con otros ejercicios similares se variará el coeficiente de proporcionalidad inversa y se analizará cómo influye en la gráfica. Para ello se puede utilizar un programa de ordenador que dibuje las gráficas, ya que en este momento lo que realmente interesa es que el alumno relacione la variación de los parámetros con la forma de la gráfica y no su construcción en cada caso.

(*) Los trabajos realizados en grupo con el ordenador se tendrán en cuenta para la evaluación de la Unidad, así como las aportaciones de los alumnos en las puestas en común realizadas.

Función cuadrática

Inicialmente se procederá de manera similar a la anterior: a partir de una formulación verbal se construirá una gráfica aproximada y una tabla de valores.

A la vista de los valores, se corregirá la gráfica. El profesor preguntará por el valor máximo o el mínimo, crecimiento y decrecimiento, puntos de corte con los ejes, todo ello desde la gráfica. Explicará lo que se entiende por simetría respecto a una recta, y pedirá a los alumnos que dibujen la recta de simetría de su gráfica.

Las primeras actividades deben referirse a funciones cuadráticas sencillas de tal manera que el alumno pueda encontrar la expresión algebraica a partir de la formulación verbal, por ejemplo:

Variación del área de un recinto rectangular según la longitud de la valla.

En los primeros ejercicios puede ser útil que el profesor confeccione una tabla con las gráficas de las funciones cuadráticas más sencillas y sus expresiones algebraicas. El alumno la utilizará para comparar su gráfica con las que allí aparecen y deducir cuál es la expresión asociada.

Una vez conseguida la expresión algebraica se pedirá a los alumnos que encuentren los puntos de corte con los ejes resolviendo la ecuación de 2° grado. No es necesario que utilicen siempre el lápiz y el papel para resolver estas ecuaciones; pueden aprender a utilizar programas de ordenador o calculadoras programables.

A partir de las raíces se encontrará el valor máximo o mínimo y la recta de simetría.

También se estudiarán los intervalos de crecimiento y decrecimiento, relacionándolos con la existencia de máximo o mínimo, y la tasa de variación media en distintos intervalos.

Se realizarán, de forma similar, otras actividades en las que cambien los coeficientes cuadráticos, tanto en magnitud como en signo. El profesor dirigirá sus preguntas a que los alumnos relacionen estos coeficientes con la forma de la gráfica.

Como en el caso de la función inversa, se recomienda para este tipo de actividades el uso de algún programa adecuado de ordenador.

(*) En cualquier caso, el profesor valorará las conclusiones que los alumnos, en pequeños grupos, habrán de elaborar al respecto.

Función exponencial

Se planteará un problema del tipo «divulgación de un secreto»:

> Una persona conoce una noticia importante que, al día siguiente, revela a otras dos, cada una de éstas se lo dice a otras dos al siguiente día y así sucesivamente. Se pide estudiar la relación entre el número de días transcurridos y el número de personas que conocen el secreto ese día.

Se construirá seguidamente una tabla de valores utilizando la calculadora. Para ello, el profesor enseñará el uso de la tecla x^y.

A continuación se dibujará, aproximadamente, la gráfica planteando cuestiones sobre características globales.

Se preguntará, también, por el número de personas a las que se revela la noticia el séptimo y décimo día, etc., que se generalizará para obtener la fórmula correspondiente. Puede ayudarles el poner por escrito cómo se calcula el número de personas de un día determinado.

Tras conseguir la fórmula, el profesor explicará que se trata de un nuevo tipo de función llamada exponencial y realizará con los alumnos una tabla en la que se indiquen sus características.

Se comparará la gráfica de $y = 2^x$ con la de $y = 2x$ y la de $y = x^2$ y ver que la exponencial es la de crecimiento más rápido.

A continuación se estudiarán exponenciales con otras bases; por ejemplo: ¿Y si cada persona se lo cuenta a 5? Se describirá la variación de la gráfica según cambia la base.

Después se preguntará qué sucedería si la base fuese menor que 1, por ejemplo 0,5, poniendo especial cuidado en que los alumnos comprendan que al multiplicar un número menor que la unidad por sí mismo el resultado es menor que el número inicial. Este hecho se relacionará con la forma de la gráfica.

Por último, dadas varias gráficas y expresiones algebraicas de distintas exponenciales, se pedirá que las asocien adecuadamente. Pueden utilizarse, de nuevo, programas de ordenador adecuados.

(*) Al finalizar esta actividad se pedirá a los alumnos que realicen un trabajo en grupo o individualmente que se utilizará como evaluación. El trabajo consistirá en una investigación sobre un fenómeno exponencial, por ejemplo, la variación con el tiempo de la cantidad de distintos fármacos inyectados en sangre. Una descripción completa de esta investigación puede verse en el libro mencionado en la Unidad anterior.

Recursos

Ver Recursos de la Unidad 10.

La estadística es una rama de las Matemáticas que utiliza conjuntos de datos numéricos extraídos de hechos reales o experimentales para obtener conclusiones generales sobre lo estudiado. En esto se parece a otras ciencias, por lo que tiene gran aplicabilidad en ellas y sirve como auxiliar indispensable en otros saberes como economía, psicología, medicina, sociología, ciencias sociales, etc.

Si en las Unidades anteriores se vio la importancia del lenguaje gráfico en el tratamiento de la información para una mejor comprensión y análisis de la misma, las gráficas y parámetros estadísticos aportan instrumentos indispensables para dicho tratamiento, fundamentalmente para manejar y entender gran cantidad de datos y para detectar posibles errores o intentos de manipulación.

Ya en 3.º se han trabajado casi todos los aspectos que aquí se retomarán: población y muestra, frecuencias, gráficas y parámetros estadísticos, etc. Damos por supuesto que hasta ahora se han utilizado preferentemente variables cualitativas o cuantitativas discretas, se dará en este curso el paso a variable continua.

Se iniciará también el estudio de variables bidimensionales tratando de encontrar la relación entre las dos variables de forma intuitiva y práctica.

Se ha de poner sumo interés en la pulcritud, la precisión y el orden en la presentación del trabajo que se va realizando.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
12.ª	*Fenómenos estadísticos: población y muestra. Variable estadística continua: tablas de frecuencias, gráficas y parámetros estadísticos.*	2 semanas
13.ª	*Distribuciones bidimensionales. Relación entre variables: nube de puntos, recta de regresión. Correlación.*	2 semanas

Unidad 12

FENÓMENOS ESTADÍSTICOS: POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLE ESTADÍSTICA CONTINUA: TABLAS DE FRECUENCIAS, GRÁFICAS Y PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Objetivos

- Conocer la historia del inicio y desarrollo de la estadística.
- Elegir muestras representativas de una población.
- Reconocer las situaciones que precisan la agrupación de datos estadísticos en intervalos.
- Elaborar estudios de datos estadísticos de tipo continuo, utilizando para ello el lenguaje que mejor se adapte a la situación: tablas, gráficas, parámetros centrales y de dispersión.

- Utilizar la información numérica obtenida para tomar decisiones, para aceptar o rechazar hipótesis, formular conclusiones, etc.
- Calcular los parámetros centrales y de dispersión de una variable continua. Reconocer cuál es el más significativo en cada caso.
- Intrepretar el par $(\bar{x}, \sigma)$ de una variable continua.
- Analizar críticamente las noticias estadísticas que aparecen en los medios de comunicación, detectando errores o presentaciones tendenciosas.

Contenidos

Hechos y conceptos:

- Antecedentes históricos.
- Fenómenos estadísticos: población y muestra. Condiciones de la muestra.
- Variable estadística continua. Tablas de frecuencias: Recorrido, intervalos, marcas de clase, frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
- Gráficas estadísticas: diagramas de barras, poligonales y de sectores, histogramas, pictogramas, pirámides de población, etc.
- Resumen de datos estadísticos:
    - Parámetros centrales: media aritmética, mediana, moda.
    - Significado de la dispersión.
    - Parámetros de dispersión: desviación típica y varianza.

Procedimientos:

- Elección de una muestra adecuada para que sea representativa de una población. Planificación y realización de la recogida de datos.
- Construcción de los intervalos más adecuados a la variable, marcas de clase y tablas de frecuencia. Relación con porcentajes.
- Representación, mediante las diversas gráficas estadísticas, de los datos correspondientes a la situación que se estudia y elección de las más adecuadas en cada caso.
- Análisis crítico de gráficas estadísticas detectando errores o presentaciones tendenciosas de conclusiones.
- Utilización de la información numérica para tomar decisiones o formular conclusiones sobre el tema estudiado.
- Cálculo y significado de los parámetros de centralización y de dispersión. Elección de los parámetros más significativos.
- Interpretación de una distribución dada su media y su desviación típica.
- Lectura comprensiva de los sondeos y encuestas que aparecen en los medios de comunicación.

Actitudes:

- Sentido crítico ante la elección de una muestra en cada caso y ante las conclusiones que se presentan de un estudio estadístico.
- Valoración del lenguaje gráfico estadístico para representar información.
- Reconocimiento y valoración de las nuevas tecnologías en el tratamiento estadístico de la información.
- Valoración del trabajo en equipo como medio eficaz para el planteamiento, toma de datos, debates y elaboración de conclusiones, de trabajos estadísticos.
- Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y pulcritud en la presentación de trabajos estadísticos.

Actividades

(*) No consideramos necesaria una evaluación inicial sobre variable continua, ya que no se requieren conocimientos de la misma para realizar las actividades planteadas. La evaluación inicial se centrará, por tanto, en el dominio y comprensión de los parámetros estadísticos de variables discretas.

Se trata de realizar un acercamiento práctico a la estadística, mediante la aplicación de sus técnicas a datos que los alumnos hayan coleccionado o extraído de informaciones diversas. Es por tanto importante la elaboración de una encuesta que recoja algunos aspectos de interés para el alumnado.

Se les pedirá que consigan datos que den lugar a una variable continua; por ejemplo: tiempo invertido en realizar el trayecto casa-instituto, temperatura del aula, estatura, peso, etc.

Trabajando en pequeños grupos, cada alumno aportará su dato y se hará un estudio completo tratando la variable como discreta.

Cada grupo anotará sus datos en la pizarra y el profesor planteará la siguiente pregunta: ¿Cuál es el tiempo medio que tardan los alumnos de la clase en llegar al Instituto?

Esto servirá para inducir la necesidad de ordenar los datos en intervalos. El profesor pedirá que lo hagan dándoles el número de intervalos y discutiendo en qué medida su elección influye en la exactitud de los resultados.

Tras esto, se guiará a los alumnos en la confección de tablas de frecuencias y representaciones gráficas (fundamentalmente histogramas y diagramas de sectores) y se introducirá el concepto de marca de clase.

A continuación se pedirá que calculen por grupos la media y la desviación típica apoyándose en las tablas y utilizando la calculadora. Se estudiará la distribución de datos en los intervalos:

$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma), (\bar{x} - 2\sigma, x+2\sigma), (\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} +3\sigma)$$

Para ver la necesidad del cálculo de la mediana, el profesor planteará un problema en el que los datos estén concentrados en los intervalos extremos, dando el valor de la media. Se discutirá con toda la clase la representatividad de este valor.

Se calculará entonces la mediana utilizando el polígono de frecuencias acumuladas.

Para concluir el estudio de los parámetros centrales, los alumnos realizarán una tabla en la que figuren todos estos parámetros, qué significan, cómo se calculan y cuándo son representativos.

(*) El profesor pedirá que cada alumno le entregue individualmente estos trabajos.

Se profundizará en el significado de la media y la desviación típica mediante actividades en las que las distribuciones tengan la misma media y distinta desviación típica, o al revés.

Por último, se realizará un trabajo de interpretación de estadísticas aparecidas en algún medio de comunicación.

Ver algún vídeo educativo, utilizar algún programa adecuado de ordenador y/o una hoja de cálculo, pueden ser actividades complementarias de sumo interés. Por ejemplo, un programa de ordenador que realice representaciones gráficas, permite pasar rápidamente a la comparación e interpretación de muchas distribuciones.

(*) Se pedirá la entrega del trabajo realizado en grupo en el ordenador.

El uso de la calculadora científica y de las funciones específicas de estadística, no en todos los cálculos, pero sí en la mayoría de ellos, da la oportunidad de centrarse en la interpretación de la información y en los análisis críticos de los resultados estadísticos más que en las técnicas de cálculo.

(*) Al final de la unidad, se realizará una prueba escrita con actividades similares a las anteriores pero de menor duración, en la que puedan valorarse, fundamentalmente, el cálculo (con calculadora científica) y comprensión de los parámetros, y la interpretación de gráficas estadísticas.

Recursos

Libros:

— AZARQUIEL, GRUPO. *Curso inicial de estadística en Bachillerato.* Madrid, ICE de la UAM. Col. Monográficas. núm. 3. 1983.

— ZERO, GRUPO. *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1.* Barcelona, Teide. 1985.

— NORTES CHECA, A. *Encuestas y precios.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 28. 1987.

Vídeos:

— *¿Contra todo pronóstico? La estadística por dentro.* BBC Enterprises. Distribuidora: International Education and Training Enterprises S. A.

— *Investigaciones Matemáticas 10.* BBC Enterprises. Distribuidora: International Education and Training Enterprises S. A.

Materiales manipulables:

— Calculadora científica.

Programas de ordenador:

— *Estadística:* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S. A.

— Hoja de cálculo.

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES. RELACIÓN ENTRE VARIABLES: NUBE DE PUNTOS, RECTA DE REGRESIÓN. CORRELACIÓN

Objetivos

- Representar conjuntamente dos variables observadas sobre los mismos individuos mediante una tabla de doble entrada y/o una nube de puntos.
- Reconocer e interpretar una nube de puntos o una tabla de doble entrada, como una distribución bidimensional.
- Representar gráficamente, de modo aproximado, la recta que más se ajuste a una nube de puntos dada. Dar significado y calcular el «centro» de la nube.
- Asociar coeficientes de correlación y nubes de puntos de varias distribuciones bidimensionales.
- Interpretar la relación existente entre dos variables conocido el coeficiente de correlación de su distribución. Asignar un valor aproximado y un signo a la correlación de una distribución bidimensional dada.
- Extrapolar, a partir de la recta de regresión de una distribución bidimensional, otros valores desconocidos de las variables, analizando el grado de garantía de dicha deducción según el coeficiente de correlación de la distribución estudiada.

Contenidos

Conceptos:

- Relación funcional o aleatoria entre dos variables.
- Representación conjunta de dos variables: tabla numérica y nube de puntos.
- Iniciación gráfica al estudio de la recta de regresión y el coeficiente de correlación.

Procedimientos:

- Construcción de una tabla numérica de doble entrada a partir de la recogida de datos sobre dos aspectos de unos mismos individuos.
- Representación conjunta de dos variables mediante una nube de puntos a partir de una tabla, o viceversa.
- Interpretación de una tabla o nube de puntos. Conclusiones sobre la variable.
- Construcción gráfica de la recta que más se ajuste a una nube de puntos. Significado y cálculo del «centro» de la nube.
- Asociación de valores dados del coeficiente de correlación de varias distribuciones bidimensionales con sus nubes de puntos correspondientes.
- Interpretación de la mayor o menor relación entre dos variables, según el valor y el signo del coeficiente de correlación.

— Asignación de un valor aproximado al coeficiente de correlación de una distribución bidimensional.

— Extrapolación de valores desconocidos de las variables de una distribución bidimensional a partir de su recta de regresión y análisis y grado de garantía de los valores obtenidos, según sea el coeficiente de correlación de dicha distribución.

Actitudes:

— Reconocimiento y valoración de la utilidad del tratamiento gráfico para el estudio de la interrelación entre aspectos diversos de la vida cotidiana.

— Actitud crítica ante las relaciones entre variables que se presentan en los medios de comunicación.

— Pulcritud, claridad y orden en la presentación de informes.

— Valoración del trabajo en grupo que facilita el análisis de las interrelaciones de las variables en estudio.

Actividades

(*) La representación de puntos y rectas en el plano son los conocimientos previos requeridos para realizar las siguientes actividades. Se supone que estos conocimientos ya han sido adquirido en el núcleo temático de funciones.

A continuación se plantearán actividades en las que tengan que recoger datos sobre dos cuestiones cercanas a ellos e investigar la posible relación existente entre ambas.

Cada grupo de alumnos podrá trabajar en cuestiones distintas, siempre relevantes para ellos; por ejemplo: Número de horas semanales dedicada al estudio de las distintas asignaturas y resultados en la evaluación.

Una vez recogidos los datos, se trabajará en su sistematización, construyendo tablas numéricas, representando gráficamente la nube de puntos, calculando su «centro» y su posible ajuste mediante una recta que pase por él.

Con el trabajo de todos los grupos, se planteará a toda la clase, con transparencias, la posible mejora del ajuste gráfico (recta de regresión) y la asignación de un valor aproximado y un signo a la relación que exista entre ambas variables en cada caso. Esto último puede resultar difícil, por lo que debe ser precedido de la presentación de diversas nubes de puntos y valores del coeficiente de correlación para que, mediante la asociación de unas con otros, los alumnos se familiaricen con la idea de correlación y puedan hacer después estimaciones de los casos estudiados.

(*) Aquí, se hace necesaria la realización individual de una actividad de asociación de nubes de puntos y coeficientes de correlación de varias distribuciones dadas, para conocer el grado de comprensión de los mismos.

Se harán extrapolaciones de datos que no se han podido registrar y se analizará el grado de fiabilidad de los resultados obtenidos según el valor del coeficiente de correlación en cada caso.

Por último, se pedirá a cada grupo de alumnos la presentación pulcra y ordenada de un informe sobre el trabajo realizado en el que se analicen críticamente las relaciones encontradas entre las cuestiones en estudio.

(*) Dicho informe será muy importante para la evaluación de la Unidad.

(*) Para finalizar se realizará una prueba individual escrita en la que se planteará una actividad que englobe los aspectos fundamentales estudiados:

> Dada una tabla de valores correspondientes a dos variables, representar la nube de puntos, hallar su «centro», construir gráficamente la recta que mejor se ajuste a la nube, asignar un valor aproximado y un signo al coeficiente de correlación, y extrapolar algunos valores, analizando el grado de fiabilidad que puede esperarse.

Esta prueba se valorará, no tanto por la exactitud de los cálculos realizados (que por otra parte son mínimos), como por el grado de comprensión alcanzado en los conceptos y la expresión de los razonamientos en la justificación de sus conclusiones.

Recursos

Libros:

— AZARQUIEL, GRUPO. *Correlación y regresión: una introducción intuitiva.* Madrid, ICE de la UAM. Col. Monografías. núm. 5. 1985.

Azar

La probabilidad surgió a partir del juego, y su aprendizaje habrá de llevarse a cabo mediante una metodología que lo propicie y una actitud participativa de los alumnos, a través del planteamiento de problemas concretos, experimentos reales o simulados.

No hay que olvidar que, aunque las primeras matematizaciones no se realizaron hasta el siglo XVI, el azar está presente desde la prehistoria, siempre a través de los juegos.

También hay que tener en cuenta que, aunque la actual reforma educativa propone el tratamiento del azar desde edades tempranas, nuestros actuales alumnos probablemente no tengan otro bagaje en la materia que el obtenido en 3.° de ESO. Se debe actuar, por tanto, con cautela y, en todo caso, no utilizar planteamientos axiomáticos, ni del álgebra de Boole, ni hacer uso de la combinatoria como técnica de recuento.

Durante este curso se insistirá en que los alumnos reconozcan los experimentos en los que interviene el azar, a pesar de ser un contenido que debe estar presente en cursos anteriores. Se formaliza más el concepto de espacio muestral expresándolo de diferentes formas: conjuntos, diagramas, etc. También se estudian la unión e intersección de sucesos como necesarios para describir el resultado de un experimento, así como sus probabilidades. No es necesario que todos los alumnos lleguen a simbolizar lo anterior utilizando la notación conjuntista.

Por último, no olvidemos que la teoría de la probabilidad es, junto con la estadística, y en estrecha relación con ella, una de las ramas de las Matemáticas con más aplicaciones en las ciencias naturales, económicas y sociales.

La cuantificación de la incertidumbre es una aportación de gran importancia, ya que si se conoce el grado de aproximación, se pueden hacer predicciones. Esto puede contribuir también a una visión menos determinista de los sucesos en la educación científica, a una visión menos cerrada de las matemáticas, y proporcionar una filosofía del azar que contribuya a la comprensión del mundo actual.

Secuencia: Unidades didácticas

UNIDAD DIDÁCTICA	TÍTULO	TIEMPO DEDICADO
14.ª	*Espacio muestral y sucesos. Asignación de probabilidades*	2 semanas
15.ª	*Probabilidad condicionada. Experimentos compuestos.*	2 semanas

Unidad 14

ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Objetivos

- Distinguir entre fenómenos aleatorios y deterministas en la vida cotidiana y en los ámbitos científicos, económicos y sociales.
- Utilizar el vocabulario adecuado en la descripción de experiencias de azar, así como detectar los errores más comunes que subyacen en las creencias populares sobre las mismas.
- Identificar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio así como los sucesos elementales.
- Distinguir fenómenos equiprobables de los que no lo son.
- Asignar probabilidades por distintos procedimientos.
- Identificar un suceso como unión o intersección de otros.
- Reconocer sucesos compatibles o incompatibles, dependientes e independientes.

Contenidos

Conceptos:

- Espacio muestral. Sucesos elementales. Suceso contrario, unión e intersección.
- Técnicas de recuento: diagramas de árbol y contingencia, tablas y gráficas de frecuencias.
- Asignación de probabilidades: por regularidades y/o simetrías de sus frecuencias, a partir de la ley de los grandes números, mediante la regla de Laplace, etc.
- Probabilidad del suceso contrario.
- Sucesos dependientes e independientes.
- Sucesos compatibles e incompatibles.

Procedimientos:

- Distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas a partir de múltiples ejemplos de ámbitos cercanos al alumnado y de las diversas ciencias.

- Utilización del vocabulario adecuado en la descripción de fenómenos aleatorios y detección de los errores más frecuentes de las creencias populares.
- Construcción del espacio muestral asociado a un experimento utilizando diversas expresiones tales como: conjuntos, tablas cartesianas, diagramas de árbol, contingencia, etc. Determinación de sucesos elementales y compuestos.
- Utilización de técnicas de recuento para la asignación de probabilidades y reconocimiento de simetrías y regularidades, en su caso.
- Obtención de números aleatorios para la realización de simulaciones de situaciones de azar.
- Distinción entre fenómenos equiprobables o no.
- Asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace para sucesos equiprobables.
- Identificación de los sucesos seguro e imposible, de la unión, intersección y complementación de sucesos.
- Reconocimiento de sucesos compatibles e incompatibles, dependientes e independientes.

Actitudes:

- Curiosidad e interés por investigar situaciones de azar en la vida cotidiana.
- Sentido crítico ante las creencias populares sobre el azar.
- Precisión y espíritu creativo en el diseño, y observación de experiencias de azar.
- Valoración del trabajo en equipo como medio más idóneo para llevar a cabo experimentos aleatorios.

Actividades

Si la probabilidad nació del juego, como se decía en la introducción, es jugando como mejor puede aprenderse. Por tanto, es necesario realizar numerosos experimentos aleatorios y simular otros mediante el uso del ordenador u otros medios. También se recurrirá a las tablas de números aleatorios obtenidos a partir de ordenadores y calculadoras.

Parece conveniente, por tratarse de la opción B de 4.º de la ESO, cuidar la precisión en el uso del lenguaje probabilístico y tratar de erradicar numerosos errores procedentes de creencias populares, para lo que sería conveniente proceder con cautela, conceder tiempo suficiente a los debates, de modo que salgan fuera las ideas subyacentes, ahondar en las que sean válidas y desarrollarlas, detectar y eliminar las falsas, o matizar las imprecisas. El grado de consecución de estos objetivos en 3.º es fundamental para una mayor o menor insistencia en estos aspectos en el presente curso.

Es también oportuno, para un alumno que termina la ESO, educar su capacidad en la toma de decisiones ante los juegos de azar que en nuestro país son tan numerosos, por ejemplo: loterías, quinielas, máquinas tragaperras, etc.

Las actividades siguientes sirven de ejemplo para trabajar los aspectos mencionados anteriormente:

- Generación de números aleatorios con ordenador o calculadora.
- Utilización de tablas de números aleatorios.
- Ruletas numéricas o divididas en zonas de distintas áreas.

— Juegos equitativos.

— Simulación de sorteos; de movimientos de insectos en distintos tipos de recintos y con distintas condiciones.

— Movimientos de fichas en tableros.

Para el planteamiento de las actividades concretas, como se ha indicado anteriormente, se necesita conocer lo más aproximadamente posible «lo que saben y lo que creen saber» nuestros alumnos. Por esto, se propone que el profesor les pase una encuesta (Anexo I) para, a partir de los resultados obtenidos, poner énfasis en aquellos aspectos en los que se detecten los mayores errores y dificultades. En el proceso que se describe a continuación, se hace referencia a las preguntas de la encuesta relacionadas más directamente con ellos. Se escribirán los números correspondientes entre paréntesis, para que, según los resultados obtenidos en cada caso, se actúe en consecuencia. Esta cita posibilita también que el profesor tome las actividades de la encuesta como modelo.

(*) Esto servirá, por supuesto, de evaluación inicial de la Unidad. Es también importante la lectura de los comentarios que se hacen a la encuesta (también incluidos en el mencionado anexo) y compararlos con la realidad de nuestros alumnos.

Una vez realizado este estudio, se podría trabajar de la siguiente manera:

— Para conocer el lenguaje del azar, se comenzará por un debate en el que se precisen los términos «posible» y «probable», «sumamente difícil», «improbable», «imposible», etc., y se comentarán y se harán actividades similares a la propuesta en el número 11 de la encuesta. También se tratará de clarificar en este debate inicial sus concepciones sobre si el azar tiene o no «memoria» (5, 12 y 26).

— A continuación se realizarán actividades para la asignación de probabilidades por frecuencias relativas (1, 2, 4 y 13).

  Si los alumnos no distinguen suficientemente entre sucesos equiprobables y los que no lo son, no se puede empezar rápida e indiscriminadamente a utilizar la regla de Laplace. Habrá que reforzar previamente estos aspectos mediante la realización de numerosas actividades en las que se aplique la «ley de los grandes números» (24 y 25), se busquen regularidades (12 y 15), y se utilice la proporcionalidad numérica (6, 7, 8, 9 y 10) y geométrica (3, 14 y 18). Es buen momento para insistir en ambas. Es posible que los alumnos hayan tenido serias dificultades en las situaciones geométricas planteadas (de 19 a 23).

— Se realizarán por grupos experimentos-juegos. Deberán hacer hipótesis sobre las distintas probabilidades (p. e., la probabilidad de ganar).

— Se construirán tablas de frecuencias que serán utilizadas para calcular probabilidades. Se comprobará en un caso concreto en el que la probabilidad es conocida, que las frecuencias relativas tienden a la probabilidad al aumentar el número de pruebas.

(*) Es buen momento para observar algunos cuadernos y plantear individualmente alguna actividad que recoja lo fundamental de lo realizado para valorarlas y averiguar el grado de comprensión del alumnado.

— Con posterioridad se utilizará la Regla de Laplace viendo que es un caso particular de lo anterior cuando los sucesos son equiprobables.

— En todas estas actividades, el alumno ha iniciado, de manera más o menos rigurosa, la construcción de espacios muestrales y el profesor ha debido plantear cuestiones acerca de todos los resultados posibles del experimento o juego.

Ahora es el momento de que el profesor formalice las ideas sobre espacio muestral, dando su definición, al igual que la de suceso elemental, suceso seguro e imposible y compuesto. Pedirá a los alumnos que escriban los espacios muestrales de los experimentos anteriores y dejará que ellos mismos organicen la representación del mismo. Posteriormente se sistematizarán las distintas formas de representar el espacio muestral.

Se calculará la probabilidad de los sucesos elementales y de los sucesos seguro e imposible.

Para la presentación de sucesos compuestos se describirá un suceso como unión o intersección de otros o como contrario de uno dado. Los alumnos pueden utilizar las siguientes notaciones:

$$A \text{ o } B \leftrightarrow A \cup B,\ A \text{ y } B \leftrightarrow A \cap B,\ \text{contrario a } A \leftrightarrow \bar{A} \leftrightarrow A^c$$

Una vez que el alumno ya ha visto que un suceso se puede expresar como unión o intersección de dos, se trata ahora de que distinga:

En la intersección, si los sucesos son dependientes o independientes y, en este último caso, que el primer suceso condicionará la realización del segundo. La forma más fácil de introducir esto es la realización de pruebas con y sin reemplazamiento.

En la unión, si los sucesos son compatibles o incompatibles, identificando el suceso intersección de ambos en el primer caso.

(*) Antes de pasar a la segunda Unidad, se realizará una prueba individual escrita en la que se valorará fundamentalmente la representación de espacios muestrales, la asignación de probabilidades de sucesos elementales y la distinción de sucesos equiprobables de los que no lo son. Se comprobará si se ha llegado o no al grado de comprensión suficiente de la dependencia e independencia de sucesos y de la compatibilidad e incompatibilidad de sucesos, para poder asignar probabilidades en estos casos en la siguiente Unidad. Esto servirá también de evaluación inicial de la misma.

Recursos

Encuesta (Anexo I).

Libros:

- Díaz, J.; Batanero, C.; Cañizares, M. J. *Azar y probabilidad.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 27. 1988.
- Cero, Grupo. *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1.* Barcelona, Teide. 1985.
- Cero, Grupo. *De 12 a 16, un proyecto de currículum de matemáticas.* Valencia, Mestral. 1987.
- Nortes Checa, A. *Encuestas y precios.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 28. 1987.

Vídeos:

- *Investigaciones Matemáticas 10.* BBC Enterprises. Distribuidora: International Education and Training Enterprises. S.A.

Material manipulable:

- Fichas, dados, monedas, chinchetas, barajas, ruletas, urnas, tableros, etc.

Unidad 15

EXPERIMENTOS COMPUESTOS. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Objetivos

- Determinar si dos sucesos son dependientes o independientes.
- Calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos, sean dependientes o independientes.
- Calcular la probabilidad de la unión de sucesos, sean compatibles o incompatibles.
- Identificar el espacio muestral asociado a un experimento compuesto, así como sus sucesos elementales.
- Manejar adecuadamente técnicas de recuento para experimentos compuestos: diagramas de árbol y tablas de contingencia.
- Distinguir si un suceso asociado a un experimento compuesto es dependiente o independiente.
- Saber valorar críticamente las informaciones probabilísticas que aparecen en los medios de comunicación y saber tomar decisiones en temas de azar.

Contenidos

Conceptos:

- Sucesos dependientes e independientes, compatibles e incompatibles.
- Intersección de sucesos. Probabilidad.
- Unión de sucesos. Probabilidad.
- Probabilidad condicionada.
- Espacio muestral y sucesos elementales asociados a un experimento compuesto.
- Técnicas de recuento: diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Procedimientos:

- Identificación de sucesos dependientes e independientes, asignación de probabilidades en cada caso.
- Identificación de sucesos compatibles e incompatibles, asignación de probabilidades en cada caso.
- Construcción del espacio muestral asociado a un experimento compuesto así como los sucesos elementales del mismo.
- Utilización de técnicas de recuento para experimentos compuestos. Diagramas de árbol y tablas de contingencia.

— Reconocimiento de experimentos con reposición y sin ella y asignación de probabilidades en cada caso.

— Análisis crítico de informaciones probabilísticas que aparecen en ámbitos diversos y toma de decisiones ante situaciones en las que interviene el azar.

Actitudes:

— Apreciación de la diversidad de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana.

— Valoración de las aportaciones de la probabilidad para tomar cierto tipo de decisiones.

— Presentación creativa y clara de los trabajos sobre azar, destacando la descripción de los experimentos realizados o el diseño de simulaciones.

Actividades

Esta Unidad se desarrolla en dos bloques de actividades, uno relacionado con la unión e intersección de sucesos y probabilidad condicionada y otro para experimentos compuestos.

En el primero se propone una actividad relacionada con la estadística en la que el profesor irá proponiendo las siguientes tareas:

— Estudio sobre lo que piensan hacer los alumnos de 4° de Secundaria del instituto una vez finalizado este curso. Para ello se explicarán las diferentes posibilidades.

— Elaboración de una encuesta sobre: continuación de estudios o no, estudios de bachillerato (qué modalidad), módulos profesionales (qué rama), ... teniendo en cuenta la variable sexo y grupo.

— Realización de un muestreo aleatorio estratificado (según sexo) considerando todos los grupos de 4°. Una vez elegido el número de alumnos de cada grupo que participarán en la encuesta, elección de los nombres utilizando listas de clase y números aleatorios. El profesor debe proporcionales el material que necesitan: censo de alumnos de 4°, listas, etc.

El libro *Encuestas y precios*, de A. Nortes Checa (ver Recursos en esta Unidad), proporciona abundante información sobre realización de encuestas y elección de muestras, ordenación de los datos obtenidos en la encuesta y realización de diagramas de árbol y contingencia.

Tras este trabajo estadístico previo, los alumnos contestarán a preguntas relativas a la probabilidad. Por ejemplo:

— ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un alumno al azar continúe estudios de Bachillerato? ¿Y de módulos? ¿Y de que no siga estudiando?

— Sabiendo que la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Bachillerato modalidad Tecnología?

— Si es hombre el elegido, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Bachillerato tecnológico o de ciencias de la naturaleza y la salud?

— Si elegimos, con reemplazamiento, a dos alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y estudie bachillerato artístico? ¿Y si lo hacemos sin reemplazamiento?

(*) Los alumnos deben entregar, por grupos, un trabajo en el que aparezcan las tablas de datos, *las probabilidades calculadas y la conclusiones sobre estos datos. Este trabajo servirá como evaluación.*

(*) Para la prueba individual escrita cada alumno debe tener los resultados de la encuesta. Se propondrán preguntas similares a las anteriores y deberán describir todo el proceso realizado. También se puede proponer un ejercicio de paso de un diagrama de contingencia a uno de árbol.

El segundo bloque de actividades trata del estudio de experimentos compuestos. Hay que tener en cuenta que puede ser la primera vez que el alumno se enfrente a este tipo de experimentos, por lo que se trata fundamentalmente de que se familiarice con ellos en casos sencillos y generalmente compuestos por sólo dos experimentos.

A partir de la utilización de tablas de contingencia 2 x 2 y de diagramas de árbol, el alumno se va familiarizando con determinadas situaciones correspondientes a experimentos compuestos y de forma intuitiva tratará de asignar probabilidades a distintos sucesos elementales y compuestos. En el libro *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1,* del Grupo Cero, se describe la construcción de tablas de contingencia y su utilización.

La realización de simulaciones a partir de tablas de números aleatorios generados por ordenador o calculadora, son también de gran importancia.

Las actividades sobre urnas, bifurcación de canales y laberintos, grafos, etc., proporcionan situaciones adecuadas para el estudio de experimentos compuestos.

(*) Como se han ido recogiendo mediante instrumentos diversos, a lo largo de las dos unidades, datos sobre el grado de comprensión alcanzado por los alumnos en los distintos aspectos tratados en ambas, se realizará al término de las mismas una prueba escrita que se centre fundamentalmente en un experimento compuesto, y se valorará la construcción del espacio muestral, del diagrama de árbol y/o tabla de contingencia correspondiente, y la asignación de probabilidades de sucesos no excesivamente complicados. Esto se hará mediante alguna actividad similar a la siguiente:

> Tenemos dos bolsas. En una de ellas hay 4 bolas blancas y 5 negras. En la otra, 2 bolas blancas, 6 rojas y 3 negras. Nos inventamos un juego que consiste en lo siguiente:
>
> Tiramos un dado. Si sale múltiplo de tres, cogemos una bola de la primera bolsa. En caso contrario, la sacamos de la segunda bolsa. Ganamos si al terminar el experimento hemos conseguido una bola roja.

¿Qué es más fácil, ganar o perder?

Según lo que se haya avanzado en experimentos compuestos, se podrían añadir cuestiones parecidas en las que interviniesen bolas blancas o negras.

Recursos

Ver *Recursos* en la Unidad 14.

Desarrollo de la Unidad: Secciones de los cuerpos redondos

Introducción

El diseño de esta Unidad didáctica tiene la siguiente estructura: conocimientos previos, objetivos, contenidos, actividades, recursos y bibliografía. Cada uno de estos puntos se desarrolla en un apartado.

El objetivo de esta introducción es mostrar al profesor algunas características de la Unidad didáctica que no están expresadas en el resto de los apartados del capítulo. Estas características serían la respuesta a las preguntas que desarrollamos a continuación:

¿Están las cónicas presentes en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria?

Los contenidos del área de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria están distribuidos en cinco bloques: Números y Álgebra, Medida, Geometría, Funciones y Estadística y Probabilidad. La Geometría (llamada «Representación y organización en el espacio») es tanto por sus contenidos, como por su tratamiento didáctico, una de las partes más novedosas del currículo de esta etapa.

En el Decreto por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (*) aparecen los contenidos del área de Matemáticas que se deben incluir en cada uno de los bloques. Uno de los contenidos geométricos propuestos es *«Elementos característicos de polígonos y cónicas»*. Como se puede observar, está expresado de forma muy general, lo que permite que se trabaje en distintos niveles dependiendo de los objetivos concretos que se pretendan: grado de conocimiento sobre las cónicas y sus definiciones, qué método de definición se va a elegir, profundización en las cónicas como lugares geométricos, estudio meramente intuitivo, utilización de procedimientos analíticos, etc. En los apartados posteriores se concretarán las propuestas de las autoras sobre estos aspectos, aunque debe ser el equipo de profesores que desarrolla la Unidad el que matice su contenido, adaptándolo a sus alumnos.

¿Cómo se relaciona esta Unidad con el resto de unidades propuestas en la secuencia?

En el capítulo II de este documento se describe una propuesta de secuencia y desarrollo de los objetivos y contenidos del cuarto curso, opción B, de Educación Secundaria Obligatoria. Allí puede verse que esta Unidad didáctica (Secciones de cuerpos redondos) forma parte de un conjunto de unidades dedicadas a la Geometría. La relación entre ellas permite que el estudio de las secciones cónicas se sitúa en un contexto más amplio que ayuda a su comprensión:

(*) Real Decreto 1.345/1991, de 6 de septiembre (BOE número 220, de 13 de septiembre de 1991).

Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera

↓

Secciones de los cuerpos redondos:

— Cilindro

— Cono - - - - - - → cónicas

— Esfera

↓

Coordenadas geográficas y medida del tiempo

Así los conocimientos adquiridos en una Unidad sirven de base para la posterior. En el caso de las secciones, los conocimientos previos serán los del tema sobre cuerpos redondos junto con algunas estrategias generales (ver apartado 2). Esto quiere decir que los contenidos específicos del tema se abordan desde el principio, ya que lo habitual será que no se haya estudiado nada sobre las cónicas en cursos anteriores (salvo la circunferencia, aunque no como sección cónica), no porque no sea posible, sino por la procedencia de los alumnos a los que va dirigida esta Unidad ya que en EGB este tema no está incluido en los programas y en 3.º de ESO la parte de tiempo dedicada a la Geometría se utiliza para tratar otros contenidos: polígonos, poliedros, medidas, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, etc., y no hay tiempo para estudiar las cónicas.

Partiendo de estos conocimientos, las actividades propuestas (ver **Actividades**) pretenden conseguir que el alumno tenga una visión amplia y completa sobre las secciones de los cuerpos redondos (especialmente las cónicas). Además, algunas de ellas deben ser trabajadas con el rigor matemático que requiere la opción B del cuarto curso.

¿Por qué hemos desarrollado esta Unidad?

Al inicio de esta introducción hemos señalado que la Geometría era, tanto por sus contenidos como por su tratamiento didáctico, una innovación en la enseñanza para los alumnos de secundaria. En el caso de las cónicas la situación actual es la siguiente:

— Los programas correspondientes al ciclo superior de la EGB y 1.º y 2.º de EEMM no incluyen nada sobre cónicas.

— En 3.º de BUP este estudio se hace exclusivamente de forma analítica supeditando todo el conocimiento a un buen manejo de las ecuaciones.

Por estos motivos hemos desarrollado esta Unidad intentando dar un enfoque puramente geométrico, sin necesidad de recurrir al planteamiento analítico.

Además de las cuestiones planteadas anteriormente, debemos explicar dos aspectos que tienen especial interés: la utilización de materiales y las adaptaciones de esta Unidad a distintos niveles de alumnos.

En el capítulo I de este documento ya se ha señalado la importancia que le concedemos a los materiales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En esta Unidad esa importancia es evidente, ya que los alumnos inician su aprendizaje sobre las cónicas experimentando con conos prefabricados. Es posible que al profesor le sea difícil encontrar este material, pero debe intentar conseguirlo, pues con él la obtención de las distintas familias de cónicas es muy sencilla, y son los propios alumnos los que las construyen y definen. Por si esto no fuera posible, pueden construirse los conos con plastilina o cartulina.

Por supuesto, el material tiene sus limitaciones. En este caso el único problema está en que al cortar un solo cono, no se pueden obtener las dos ramas de una hipérbola. Para solucionarlo se dan algunas indicaciones en el apartado correspondiente.

En cuanto a las adaptaciones, señalaremos que en la Unidad incluimos actividades dirigidas a aquellos alumnos que resuelven rápidamente y sin dificultad las propuestas hechas a toda la clase, por lo que terminan antes que el resto de sus compañeros. También damos algunas indicaciones y describimos actividades complementarias para aquellos que tengan problemas para lograr el objetivo pretendido. Ambas propuestas se escriben con letra cursiva para que el profesor pueda identificarlas.

Por último, como el profesor puede comprobar, cada actividad principal lleva una o dos como refuerzo. El profesor puede suprimir alguna de ellas cuando lo crea necesario.

Planteamiento de la Unidad

Conocimientos previos

- Medidas de ángulos.
- Cono y sus elementos, especialmente la generatriz.
- Organización de datos en tablas.
- Cierta experiencia en procesos de generalización.

Objetivos

- Mejorar la visión espacial. Utilizar las secciones planas de un cuerpo para representarlo en el plano.
- Determinar de cuántas maneras distintas se pueden cortar una esfera y un plano. Determinar qué condiciones deben darse para que el círculo de corte sea máximo.
- Reconocer la forma de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.
- Conocer algo sobre la historia del estudio de las cónicas.
- Obtener las formas anteriores mediante la intersección de una superficie cónica y distintos planos. Conocer cómo debe ser el corte para que el resultado sea una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola.
- Describir las cónicas como lugares geométricos. Definir sus elementos.
- Dibujar cónicas.
- Relacionar la forma de la cónica con su excentricidad.
- Reconocer las cónicas en distintas formas reales.

Contenidos

Conceptos

- Circunferencia, elipse, hipérbola, parábola. Elementos.
- Excentricidad.
- Círculos máximos y paralelos de una esfera.

Procedimientos

- Obtención de las cónicas a partir de la intersección de un cono y un plano. Descripción de la relación plano-cono para obtener cada una de ellas.
- Clasificación de figuras.
- Comentario de un texto sobre la construcción de las cónicas de Apolonio.
- Trazado de las cónicas por puntos.
- Ordenación en tablas de distintos datos referentes a cónicas. Generalización a partir de las tablas de las propiedades de los puntos de cada cónica.
- Cálculo de la excentricidad. Relación con la forma de la cónica.
- Identificación de secciones cónicas en situaciones y objetos reales.

Actitudes

- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de las características de las cónicas y de sus elementos, así como de los procesos de resolución de problemas.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Confianza en la propia capacidad para percibir los cuerpos en el espacio y sus intersecciones con planos.

Actividades

Las actividades de enseñanza y aprendizaje, junto con las de evaluación, están organizadas en 6 bloques:

- Tomografías.
- Secciones del cono.
- Trazado de cónicas y elementos característicos.
- Propiedades de los puntos de una cónica.
- Excentricidad.
- Cónicas y situaciones reales.

Como se puede comprobar en el desarrollo posterior, cada bloque introduce nuevos contenidos que amplían o matizan los anteriores. Su estructura es la siguiente:

Qué se pretende

Se explican las intenciones con que son propuestas las actividades. No se trata de una relación de objetivos, que ya han sido enunciados en el apartado 3, sino de «contar» al profesor el interés del desarrollo posterior y las posibles complicaciones.

Materiales necesarios

Se especifican los materiales que se van a utilizar en las actividades del bloque.

Proceso

En este apartado se describe todo el proceso de puesta en práctica de la Unidad. Por lo tanto, además de las actividades que se deben proponer a los alumnos, se incluyen sugerencias para el profesor. En el anexo II incluimos algunos de los gráficos o dibujos de las actividades para que el profesor tenga oportunidad de fotocopiarlos, bien en papel, bien en acetatos.

Recursos necesarios

- Regla y cartabón.
- Compás.
- Planchas de corcho o cartón.
- Cuerdas o hilos.
- Chinchetas.
- Conos prefabricados (cartulina o plastilina).
- Cuchilla.
- Papel milimetrado.
- Papel vegetal.
- Calculadora.
- Retroproyector, acetatos y rotuladores apropiados.
- Libro sobre historia de las Matemáticas.

Bibliografía

- ARGÜELLES, J. *Historia de la Matemática.* Madrid, Akal. 1989.
- BOYER, C. B. *Historia de la Matemática.* Madrid, Alianza. Col. Alianza Textos. vol. 94. 1986.
- CERO, GRUPO. *Matemáticas de 3.º de BUP. Geometría y cónicas.* Valencia, ICE de la Universidad de Valencia. Investigaciones didácticas. 1982.
- RÍO, J. DEL. *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de cónicas. 2. volúmenes: Libro del alumno y guía del profesor.* Salamanca, ICE de la Universidad de Salamanca. 1990.
- RÍO, J. DEL. «¿Cómo cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes? Una experiencia en matemáticas». *Revista Suma* n.º 11 y 12 (pp. 9-24). 1992.

Desarrollo de las Actividades

Tomografías

Qué se pretende

Las actividades propuestas a continuación tienen una doble finalidad:

- Relacionar la geometría espacial y la plana a partir de las secciones de cuerpos geométricos por series de planos paralelos. Utilizar esta relación para representar un cuerpo en el plano.
- Introducir las cónicas como secciones de un cuerpo geométrico concreto: el cono.

Material

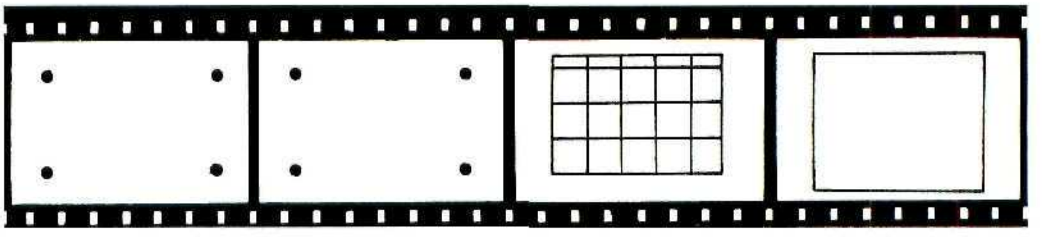
— Lápiz y papel.

— Reglas.

Proceso

El profesor explicará que la tomografía es una técnica médica de exploración de órganos corporales. Consiste en ver cómo serían las secciones del órgano estudiado si lo cortásemos por planos paralelos. Se utilizan rayos X, resonancia magnética, ultrasonidos, etc.

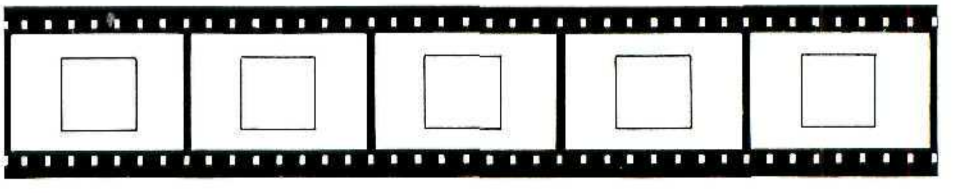
Para apoyar esta explicación, mostrará a los alumnos la «tomografía» de un objeto de la clase que sea sencillo, por ejemplo:

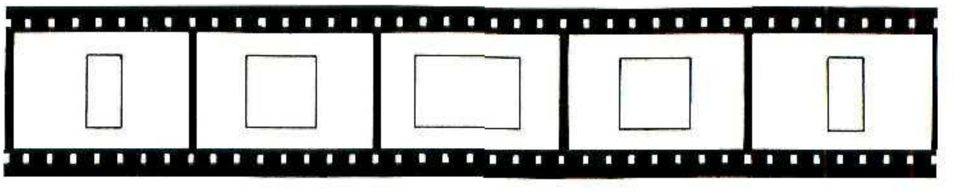


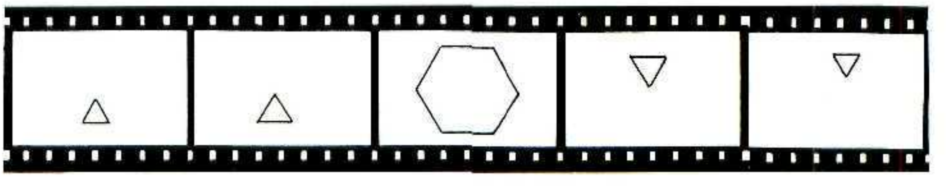
Que corresponde a la tomografía de un pupitre realizando cortes paralelos al tablero superior. A continuación propondrá la siguiente actividad que los alumnos deben realizar en grupos de 2 ó 3.

ACTIVIDAD 1: TOMOGRAFÍA DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

Aquí tenéis distintas tomografías de un objeto.







Debéis decir de qué objeto se trata y explicar cuáles son los planos de corte.

Si los alumnos tienen dificultades para identificar el cubo, abandonarán momentáneamente la actividad y el profesor les pedirá que dibujen la tomografía de algún objeto sencillo elegido por ellos. A continuación les mostrará varios poliedros indicando que la tomografía corresponde a uno de ellos. Si el profesor lo cree conveniente, puede iniciar la actividad enseñando estos cuerpos a todos los alumnos.

Si algún grupo resuelve el problema antes que los demás, el profesor les propondrá algunas de las siguientes actividades de ampliación:

- Dibujar otras secciones del cubo.
- Estudiar cómo varían los perímetros de las distintas series de secciones.
- ¿Se puede obtener como sección un pentágono regular?

ACTIVIDAD 2: TOMOGRAFÍAS DEL CILINDRO Y LA ESFERA

Haz un dibujo con todas las tomografías distintas del cilindro y de la esfera que puedas encontrar. Describe las características de las secciones que obtengas y la posición del plano de corte que las produce. Haz una clasificación.

De nuevo, el profesor puede optar por proporcionar a cada grupo de alumnos un cilindro y una esfera, aunque en este caso no sea tan necesario, ya que esta es la forma de muchos objetos reales (vasos, lápices, tubos, pelotas, frutas, etc.).

Secciones del cono

Qué se pretende

Con la primera actividad los alumnos obtienen las cónicas a partir de las secciones de un cono. En la resolución del problema deben poner en juego diversas estrategias:

- Organización de su trabajo para no repetir cortes o hacer cortes innecesarios.
- Paso de la figura concreta (figura de corte) a la figura geométrica: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.
- Clasificación de las cónicas.
- Descripción de las características de los planos de corte.

En la segunda actividad los alumnos tratan los mismos contenidos que en la actividad anterior, pero desde un punto de vista histórico. A partir del análisis del texto que se propone conocerán algunas características de la Matemática griega y las aportaciones de Apolonio al conocimiento sobre las cónicas. En última instancia se trata de que los alumnos conozcan una pequeña parte de la historia de las Matemáticas y la utilicen para adquirir conocimientos.

Material

- Conos prefabricados con material que se pueda cortar.
- Cutter.
- Lápiz y papel
- Vídeo.

— Retroproyector, acetatos y rotuladores.

— Libro sobre historia de las Matemáticas.

— Texto fotocopiado.

— Diccionarios.

Proceso

El profesor utilizará la última actividad realizada (secciones del cilindro y la esfera) para explicar a sus alumnos el objetivo de la siguiente actividad: encontrar todas las secciones sustancialmente distintas de un cono. Entregará a cada grupo de 2 ó 3 alumnos varios conos y cutter (cuchilla), y planteará la actividad que a continuación se enuncia. Para que los alumnos obtengan las dos ramas de la hipérbola, se les deberían proporcionar conos de doble hoja, pero no suelen encontrarse en el mercado. Por ello, una vez obtenida una de las ramas el profesor debe preguntar a los alumnos qué sucedería con todas las secciones si el cono fuera doble, es decir, si tuviéramos dos conos unidos por el vértice.

ACTIVIDAD 3: SECCIONES DEL CONO. CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS

- ¿Cuántas figuras distintas podemos obtener al cortar el cono?
  - Explicad cuándo consideráis que dos figuras son distintas y haced una clasificación.
  - Describid cómo deben ser los planos de corte para que se obtenga cada una de las cónicas.
  - Escribid vuestras conclusiones en un acetato para exponerlas a todos los compañeros.

Si no se dispone del material señalado, se pueden construir los conos con plastilina o cartulina.

Como mínimo los alumnos deben llegar a las siguientes conclusiones:

— Se obtienen 4 familias secciones: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola. Si aparece el caso de dos rectas que se cruzan, se aceptará como sección cónica.

— Inicialmente debemos dejar que los alumnos elijan sus propias referencias para situar y describir cómo deben ser los planos de corte que dan lugar a las distintas secciones. Aprovechando el planteamiento de algún grupo, o bien como sugerencia del profesor, al final los alumnos deben aceptar esta descripción:

CÓNICA	PLANO DE SECCIÓN
Circunferencia	Perpendicular al eje del cono
Elipse	Corta a todas las generatrices del cono
Parábola	Corta a todas las generatrices del cono menos a una, a la cual es paralelo
Hipérbola	Deja sin cortar a más de una

En el caso en que los alumnos hayan entendido cómo se obtienen las dos ramas de la hipérbola, se llegará a la conclusión de que el plano de sección corta a todas las generatrices del cono menos a dos, a las cuales es paralelo.

A continuación, el profesor explicará que la investigación que los alumnos acaban de realizar fue hecha por un matemático griego llamado Apolonio y propondrá el estudio del siguiente texto. (Se sugieren algunas preguntas que los alumnos deben responder).

ACTIVIDAD 4: LAS CÓNICAS POR APOLONIO DE PERGA

Una de las características fundamentales de los matemáticos griegos era su preocupación por sistematizar todos los conocimientos, tanto los procedentes de civilizaciones anteriores (Egipto y Mesopotamia) como los producidos por ellos mismos. En el mundo griego, la matemática se desvincula de los problemas prácticos de la vida ordinaria y pasa a tener interés en sí misma. Pondremos algunos ejemplos: **Pitágoras** (s. VI a. C.) atribuyó a los números naturales una gran importancia e intentó formular todos los fenómenos de la naturaleza en términos numéricos. La aparición de los números irracionales unida a algunas paradojas (por ejemplo, la de Zenón) desestabilizó este sistema numérico e hizo que la geometría fuera considerada como la ciencia verdadera. Toda demostración, para que fuera considerada como tal, debía ser geométrica.

Euclides de Alejandría (s. III a.C.) realiza en su obra *Elementos* una exposición en un orden lógico de todos los fundamentos de la matemática elemental. Él, junto con **Arquímedes de Siracusa** y **Apolonio de Perga**, hicieron que esta época fuera llamada «Edad de Oro» de la matemática. Arquímedes realizó numerosos inventos mecánicos, pero siempre estuvo más interesado en sus principios teóricos que en su aplicación práctica.

La obra maestra de Apolonio es su libro *Cónicas*. En él se recoge todo lo que se sabía entonces sobre las secciones cónicas. Anteriormente a Apolonio ya se conocían la **elipse**, la **hipérbola** y la **parábola**. **Menecmo** las obtuvo mediante la intersección de un cono con un plano perpendicular a la generatriz: si el ángulo en el vértice del cono era agudo, la sección era una elipse; si era recto, una parábola, y si era obtuso, una hipérbola. La contribución de Apolonio fue la de demostrar, de manera sistemática, que no es necesario considerar 3 tipos de conos, sino que basta con uno si variamos la inclinación del plano de corte. De esta manera se conseguía unificar las 3 curvas. Trató además el problema desde un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas, con lo que conseguía las dos ramas de la hipérbola.

También fue Apolonio el primero en utilizar las palabras elipse, hipérbola y parábola para nombrar a estas curvas.

El alumno debe responder a las siguientes cuestiones:

— Haz un resumen y un esquema del texto.

— Comenta la frase:

> *«Una de las características fundamentales de los matemáticos griegos era su preocupación por sistematiza todos los conocimientos, ...».*

— ¿Qué método de construcción de cónicas te parece más sencillo, el de Menecmo o el de Apolonio? ¿Por qué? ¿Cuál es el más importante matemáticamente?

Si el profesor lo considera necesario, puede ampliar esta actividad y plantear más preguntas e investigaciones. Por ejemplo:

— Escribe los números irracionales que conozcas. ¿Por qué crees que rompieron la «confianza» que los pitagóricos tenían en los números? Investiga cuál fue el primer número irracional que se reconoció que no era una fracción.

— ¿Conoces alguno de los inventos de Arquímedes? ¿Y alguna de las leyes que enunció?

Trazado de las cónicas y elementos característicos

Qué se pretende

Hasta el momento los alumnos saben que las cónicas se obtienen al intersecar un plano y un cono. Ahora pretendemos que los alumnos aprendan los métodos de dibujo que permiten el trazado de cada una de ellas y que las identifiquen con las secciones del cono.

El profesor se basará en los dibujos hechos para definir los elementos característicos de cada cónica y propondrá una actividad en la que se debe utilizar esta definición.

Material

Se detalla en el siguiente apartado.

Proceso

El profesor explicará a toda la clase el objetivo de las siguientes actividades: dibujar las figuras que han obtenido con anterioridad. A continuación él mismo dibujará una circunferencia, una elipse, una hipérbola y una parábola, siguiendo los métodos que a continuación se exponen:

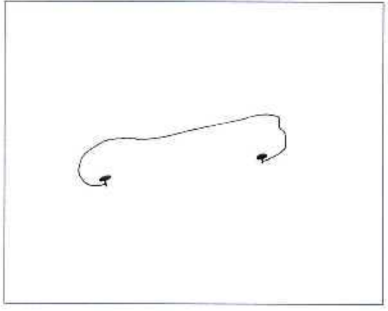
Trazado de la circunferencia

Utilizando un compás.

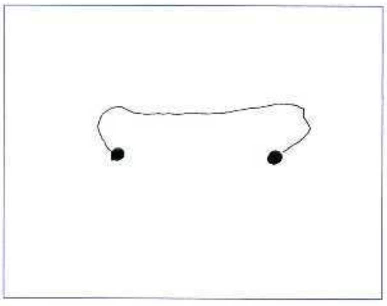
Trazado de la elipse (método del jardinero)

Material: Plancha de corcho o cartón, dos chinchetas e hilo.

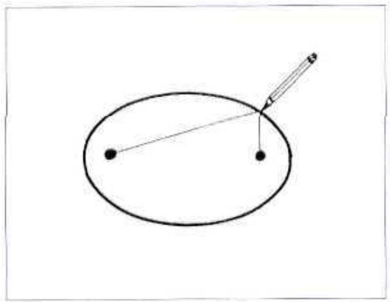
1. Se ata cada extremo del hilo en una chincheta.



2. Se pinchan las chinchetas en el corcho (cartón).



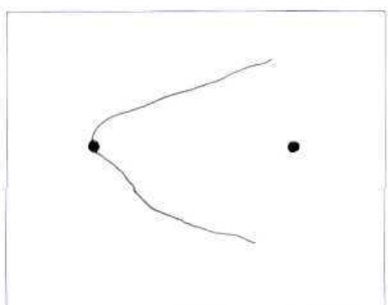
3. Se desliza un lápiz por el hilo manteniéndolo tenso.



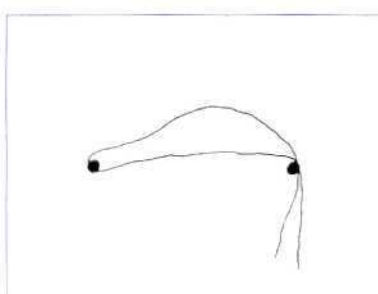
Trazado de la hipérbola

Material: Una plancha de corcho o cartón, dos chinchetas e hilo.

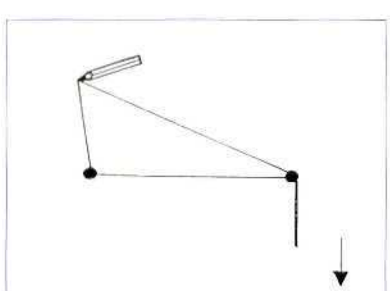
1. Se pinchan las dos chinchetas en el corcho (cartón). Doblamos el hilo y hacemos pasar una de las hebras por debajo de la cabeza de las chinchetas.



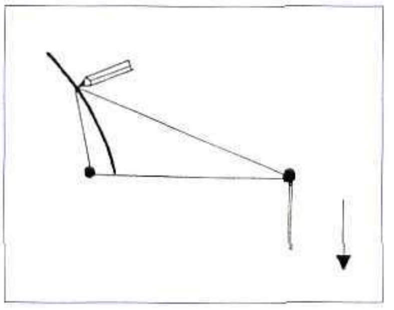
2. Se juntan las dos hebras que deben rodear «por arriba» la otra chincheta.

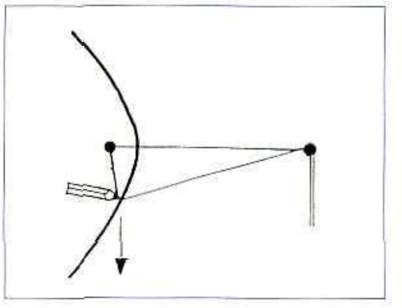


3. Sujetamos las dos hebras con una mano y tensamos los hilos con la punta de un lápiz.



4. Tirando de los hilos, hacemos que el lápiz se deslice dibujando una de las ramas de la hipérbola hasta el eje. Después, es el lápiz el que tira del hilo manteniéndolo tenso con la mano.

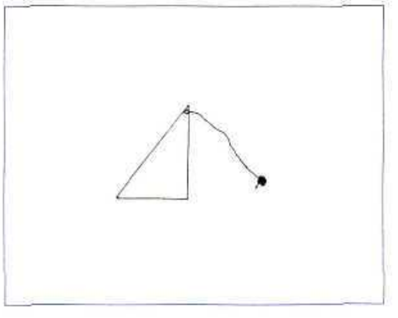




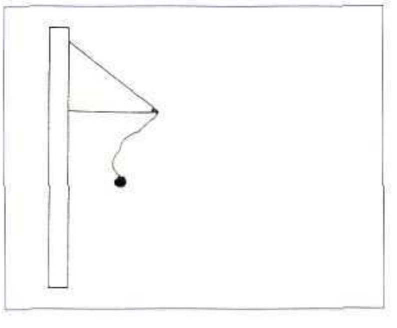
Trazado de la parábola

Material: Plancha de corcho o cartón, regla, escuadra de cartón, una chincheta e hilo.

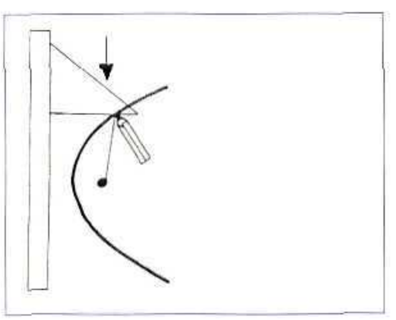
1. Hacemos un orificio en uno de los vértices de la escuadra que no corresponden al ángulo recto. Atamos un extremo del hilo en él de manera que el hilo restante tenga la misma longitud que el lado del rectángulo que no se apoya en la regla. El otro extremo del hilo se ata a la chincheta.



2. Apoyamos la regla en el corcho y la escuadra de cartón sobre la regla. Pinchamos la chincheta en el corcho.



3. Deslizamos la escuadra a lo largo de la regla mientras que, con la punta de un lápiz, mantenemos el hilo pegado al cateto de la escuadra.



El mejor soporte para que el profesor realice estos dibujos es un corcho grande para pinchar las chinchetas con facilidad. Si no es posible disponer de un corcho, puede utilizarse el retroproyector y pinchar las chinchetas por «abajo» de manera que las puntas sobresalgan por la parte superior del acetato.

ACTIVIDAD 5: TRAZADO CÓNICAS
Dibujar distintas circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas. Explicad qué es lo que cambiáis para obtener cada una de las figuras.

Los alumnos deben conseguir lo siguiente:

- Una colección de circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas.
- Que el tamaño de cada una de ellas depende de:
  - Circunferencia: abertura del compás.
  - Elipse: la longitud del hilo y la separación de los puntos fijos.
  - Hipérbola: la longitud del hilo y la separación de los puntos fijos.
  - Parábola: la longitud del hilo y la distancia entre el punto fijo y la recta.

(*) Las argumentaciones utilizadas por cada grupo en la puesta en común serán utilizadas por evaluar el aprendizaje de los métodos de dibujo y el lenguaje utilizado.

Basándose en estas conclusiones y utilizando un dibujo, el profesor definirá los elementos de cada cónica. En el Anexo II se incluyen una serie de hojas en las que aparecen dibujados los distintos elementos. Si el profesor fotocopia en acetatos estas hojas podrá construir el dibujo completo al proyectarlos.

- Elipse e hipérbola:
  - Focos: Puntos que permanecen fijos.
  - Centro: Punto medio del segmento que une los focos.
  - Distancia focal: Medida del segmento que une los dos focos.
  - Dos ejes de simetría: Uno, la recta que contiene a los focos, y el otro, la recta perpendicular a la anterior y que pasa por el centro.
  - Vértices: Puntos de intersección de los ejes de simetría con la cónica.
  - Eje mayor: Segmento contenido en el eje de simetría que pasa por los focos y que une los dos vértices.
  - Eje menor: En la elipse, es el segmento perpendicular al eje mayor que une los otros dos vértices. En la hipérbola, el eje menor sólo tiene valor analítico, por lo que no es conveniente definirlo.
- Parábola:
  - Foco: Punto que permanece fijo.
  - Directriz: Recta fija.
  - Parámetro: Distancia entre el foco y la directriz.
  - Eje: Recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
  - Vértice: Punto de intersección del eje y la parábola.

— Circunferencia:

- Centro.
- Radio.

Tras esta explicación el profesor pedirá a sus alumnos que pongan por escrito el nombre de estos elementos y su definición. Este apunte servirá para guiar la siguiente actividad, en la que los alumnos identifican los elementos y realizan medidas. Debe realizarse individualmente.

En el Anexo II incluimos una hoja con los dibujos a los que hace alusión el problema que servirá de modelo para elaborar otras. El profesor entregará una hoja distinta a cada uno de los alumnos que forman los grupos habituales de trabajo. De esta manera al finalizar la actividad, cada grupo de alumnos tendrá una colección de datos sobre cada tipo de cónica que servirá para la actividad 10.

(*) El análisis de las hojas de trabajo de algunos alumnos servirá para que el profesor evalúe el aprendizaje de algunos de los contenidos tratados hasta ahora: reconocimiento de las distintas cónicas, identificación de sus elementos, precisión en la expresión, cuidado y rigor en la realización de medidas y presentación clara y ordenada de los trabajos.

ACTIVIDAD 6: IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS DE LAS CÓNICAS Y MEDIDAS

Escribe el nombre de cada una de las cónicas que tienes dibujadas en la hoja de trabajo 1 y haz lo siguiente:

— Circunferencias:

- Localiza el centro.
- Da la media del radio.

— Elipses e hipérbolas:

- Localiza los focos.
- Dibuja el eje mayor.
- Dibuja el centro.
- Da la medida del eje mayor y del semieje mayor.
- Da la medida de la distancia focal.

— Parábolas:

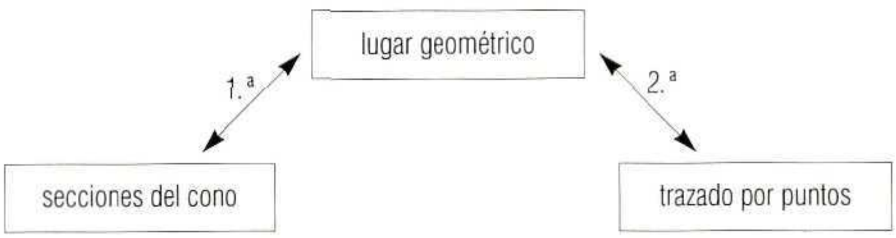
- Localiza el foco.
- Localiza la recta directriz.
- Dibuja el eje.
- Dibuja el vértice.
- Da la medida del parámetro.

Propiedades de los puntos de una cónica

Qué se pretende

El objetivo fundamental de este bloque es que los alumnos caractericen las cónicas como lugares geométricos. La actividad propuesta requiere que pasen de una serie de situaciones concretas a una formulación general. El aprendizaje de los procedimientos de generalización, en diversas situaciones, es muy importante, ya que permite la adquisición de gran cantidad de conocimientos matemáticos.

También se intenta que relacionen esta definición con los dos métodos de obtención de cónicas estudiados previamente:



La mayoría puede ser capaz de entender la segunda relación, por ello se propone una actividad en la que se pide que expliquen por qué los métodos de dibujo empleados responden a las definiciones obtenidas, de esta manera se refuerza también el concepto de cónica como lugar geométrico. La primera, es bastante más complicada, por lo que proponemos la demostración como una actividad de ampliación. Para los alumnos que no realicen esta actividad, será suficiente con que reconozcan que las figuras obtenidas por ambos métodos tienen la misma forma.

Material

— Calculadora.

— Regla.

Proceso

Los alumnos realizarán la actividad 7 reunidos en grupos de 4 y trabajarán con la hoja de cónicas de uno de ellos.

ACTIVIDAD 7: PROPIEDADES DE LOS PUNTOS QUE FORMAN UNA CÓNICA

En cada una de las cónicas de la hoja de trabajo 1 tenéis que tomar varios puntos y rellenar las siguientes tablas. Debéis realizar las medidas con mucho cuidado.

Elipses	D Distancia del punto a un foco	D' Distancia del punto al otro foco	D + D'

Hipérbolas	D Distancia del punto a un foco	D' Distancia del punto al otro foco	D - D'

Parábolas	D Distancia del punto al foco	D' Distancia del punto a la directriz	D - D'

Circunferencias	D Distancia del punto al centro	r Radio

Escribe cuál es la propiedad que cumplen todos los puntos de una misma elipse, los de una hipérbola, los de una parábola y los de una circunferencia.

Consulta los datos obtenidos en la Actividad 6:

¿Con qué valor coincide la suma D + D' en las elipses?

¿Con qué valor coincide la suma D - D' en las hipérbolas?

En el Anexo II se incluyen las hojas de trabajo 2 con las tablas para fotocopiar y entregar a los alumnos.

El profesor elegirá a un grupo para que exponga las conclusiones a las que han llegado. Es posible que debido a errores de medida algunos grupos tengan dificultad en conseguir las definiciones exactas. El profesor les animará a volver a realizar medidas con mayor exactitud. Podemos sugerirles que tomen las distancias con un compás y las lleven sobre una recta, una a continuación de la otra. De este modo será más sencillo comprobar que la suma permanece constante. Con las sugerencias del grupo elegido y las aportaciones de los demás compañeros, se deben llegar a las siguientes definiciones:

— En una circunferencia la distancia entre cualquier punto y el centro es constante.

— En una elipse la suma de las distancias de cualquier punto a los dos focos es constante.

— En una hipérbola la diferencia de las distancias de cualquier punto a los dos focos es constante.

— En una parábola la distancia de cualquier punto al foco es igual a la distancia de ese punto a la generatriz.

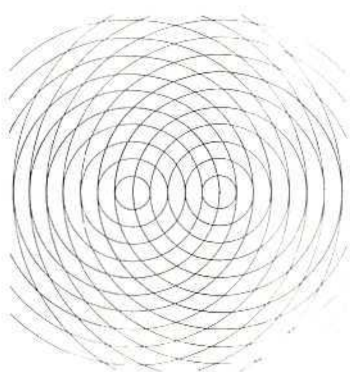
Si el profesor lo cree conveniente, puede perfeccionar más estas definiciones introduciendo el concepto de lugar geométrico.

Cada alumno hará individualmente la actividad que a continuación propondremos. Sirve para reforzar el concepto de cada cónica como lugar geométrico. Al principio, la trama creará cierta confusión, que el profesor debe disipar haciendo preguntas sobre cómo está construida (circunferencias concéntricas que se cortan).

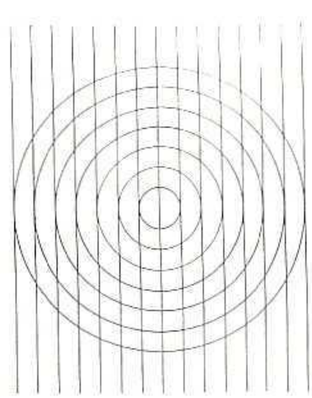
(*) Mientras los alumnos realizan la actividad, el profesor observará el proceso de resolución que siguen los alumnos. Esta observación servirá para evaluar el aprendizaje de los lugares geométricos. Si además recoge sus hojas de trabajo, podrá obtener una información más detallada.

ACTIVIDAD 8: DIBUJO DE CÓNICAS EN UNA TRAMA

Esta trama sirve para dibujar elipses y también hipérbolas. Dibuja unas cuantas y explica cómo lo has hecho.



Esta otra permite dibujar parábolas sin hacer ninguna medida. Dibuja algunas y explica cómo lo has hecho.



En el Anexo II incluimos el dibujo ampliado de las tramas (hoja de trabajo 3), bien para entregarlas a los alumnos, bien para fotocopiarlas en un acetato.

Una vez que se ha trabajado con la definición de las cónicas como lugares geométricos, el profesor explicará el objetivo de las siguientes actividades: ver que el proceso seguido en el dibujo de cónicas lleva consigo que los puntos que las forman tengan las características antes estudiadas.

ACTIVIDAD 9: MÉTODOS DE DIBUJO
Recordad los métodos de dibujo que hemos empleado para dibujar cónicas. Sin realizar ninguna medida, demuestra que la disposición de material y el proceso seguido dan lugar a puntos que cumplen las definiciones anteriores.

No es necesario que los alumnos demuestren la equivalencia de manera simbólica, basta con que la expresen correctamente.

Si hay alumnos que terminan esta actividad antes que los demás, el profesor les proporcionará las hojas del *Anexo III* pidiéndoles que las lean y que expliquen por escrito el proceso seguido en la demostración.

Excentricidad

Qué se pretende

Las actividades siguientes tienen una doble finalidad:

— Relacionar la excentricidad con la forma de la elipse y la hipérbola.

— Clasificar cónicas según su excentricidad.

Debemos advertir que proponemos el cálculo de la excentricidad por el cociente entre la distancia focal (d) y la longitud del eje mayor (m), aunque lo habitual sea el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Ya que el resultado es el mismo, nos parece más adecuado no introducir nuevas medidas que confundan al alumnado. Si el profesor lo cree conveniente puede utilizar la segunda fórmula.

Material

— Resultados obtenidos en la actividad 7.

— Calculadora.

Proceso

El profesor formará grupos de 4 alumnos, cada uno de los cuales habrá trabajado con una colección distinta de cónicas en la Actividad 7.

ACTIVIDAD 10: ¿DE QUÉ DEPENDE LA FORMA DE UNA CÓNICA?
Fijaos en los resultados que obtuvisteis en la actividad 7. En esa hoja de trabajo (1) aparecían dibujos de distintas elipses e hipérbolas ¿de qué depende su forma?

La imprecisión en la formulación de esta actividad tiene un motivo: dejar que los alumnos discutan sobre lo que significa la palabra «forma» y que formulen conjeturas y las comprueben. Después de esto, el profesor indicará que la forma está relacionada con el cociente entre la distancia focal y la medida del eje mayor y propondrá la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 11: BUSCANDO EL VALOR DE LA EXCENTRICIDAD
La forma de las elipses e hipérbolas está relacionada con el cociente entre la distancia focal y la medida del eje mayor. Haced un estudio de esta relación. Elaborad un trabajo en el que se describan vuestras conclusiones y el proceso que os ha llevado a ellas.

A los alumnos que tengan dificultades en ordenar los datos se les entregará la siguiente tabla, que se ofrece ampliada en el *Anexo II* (hoja de trabajo 4).

Tipo de cónica	d Distancia focal	a Longitud del eje mayor	$\frac{d}{a}$

Las conclusiones mínimas son las siguientes:

- La excentricidad de las elipses es siempre menor que uno y la de las hipérbolas mayor que uno.
- Las elipses son menos «achatadas» según disminuye la excentricidad.
- Las ramas de la hipérbola son menos cerradas según aumenta la excentricidad.

(*) Los informes elaborados por los distintos grupos son el instrumento de evaluación que complementa la observación del proceso de trabajo realizada por el profesor. De ellos podemos extraer información acerca de las estrategias de resolución de problemas de cada grupo: organización del trabajo, ordenación de los datos, procedimientos de generalización; además de la adquisición de otros contenidos: elementos de las cónicas, definición de excentricidad, identificación de distintas tareas, formulación de conjeturas, comprobación de las mismas, y presentación ordenada del trabajo.

Formas cónicas en situaciones reales

Qué se pretende

En esta última actividad presentamos unas situaciones reales para que los alumnos las analicen y distingan cuáles de ellas son secciones cónicas y cuáles no.

Material

- Regla.
- Compás.
- Papel vegetal.

— Papel milimetrado.

— Calculadora.

Proceso

En primer lugar, el profesor preguntará a sus alumnos si conocen algún objeto o situación real que tenga la forma de alguna de las cónicas estudiadas. A continuación propondrá la siguiente actividad que debe realizarse en grupo.

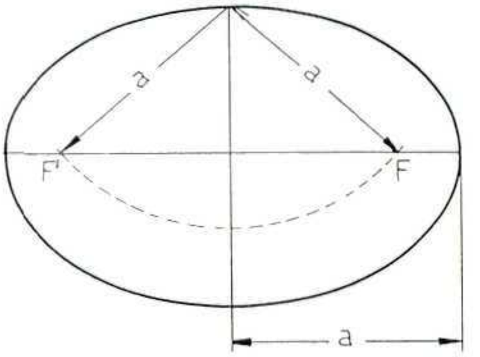
ACTIVIDAD 12: ¿SON CÓNICAS O NO?
En la hoja de trabajo 5 tienes la descripción de distintos objetos y situaciones reales. Esta descripción está apoyada por un dibujo o una gráfica. Debéis decidir cuáles de ellas son cónicas y cuáles no, y explicar el porqué.

El papel vegetal puede servir para que los alumnos reproduzcan los dibujos y doblando el papel encuentren los ejes de simetría. La dificultad de esta actividad está en que no se proporciona ninguna ayuda: las formas que aparecen en las fotografías, dibujos o gráficas están «limpias», así los alumnos tienen que buscar sus propias estrategias para resolverlo. Si el profesor observa que los alumnos tienen demasiadas dificultades, puede ayudarles con las siguientes preguntas:

Para las elipses:

¿Tiene simetrías? ¿Cómo puedes encontrar los ejes mayor y menor? ¿Y los focos? Mira uno de los puntos de corte de la figura y el eje menor, ¿te sirve este punto para averiguar dónde están los focos? Mira una elipse, traza los segmentos que unen el punto que hemos mencionado y los focos, ¿cómo son sus longitudes? ¿A qué es igual cada una de ellas?

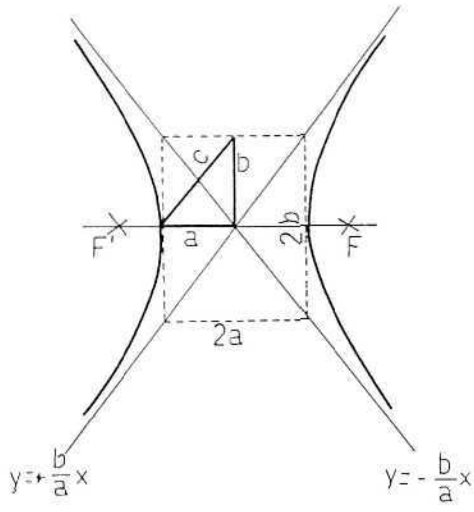
La finalidad de estas preguntas es que los alumnos descubran que tomando la longitud del semieje mayor con un compás y pinchando el compás en el punto de intersección de la elipse con el eje menor, la intersección de la circunferencia con el eje mayor son los focos.



Para las hipérbolas:

Preguntas similares a las anteriores sirven para encontrar los dos ejes de simetría.

Una vez dibujados los ejes de simetría el método riguroso para encontrar los focos pasa por la determinación y dibujo de las asíntotas, según indica el dibujo siguiente:



Debido a que esta unidad no incluye el estudio de las asíntotas, proponemos un método alternativo y accesible: pedir a los alumnos que «calquen» el dibujo de la hipérbola en papel milimetrado, a continuación decirles que vayan probando con sucesivos puntos de la trama como posibles focos (teniendo presente que deben ser simétricos respecto al eje menor).

El método de prueba consiste en lo siguiente: elegir un punto de la hipérbola y hallar la diferencia de su distancia a los focos, hacer lo mismo con otro punto distinto de la hipérbola, si las dos diferencias coinciden habremos encontrado los focos de la hipérbola.

Para realizar las medidas de las distancias del punto a los focos, es aconsejable utilizar un compás y llevar las medidas sobre una recta, de esta manera obtenemos directamente la diferencia entre ambas y, de nuevo el compás nos servirá para comparar esta diferencia con la correspondiente al otro punto.

Para las parábolas:

Proceso similar al anterior.

Prueba de evaluación

(*) Los alumnos realizarán una prueba escrita de evaluación al finalizar la unidad. Las actividades que se incluyan en la prueba escrita deben ser de distintos tipos: cerradas (por ejemplo, verdadero o falso), de aplicación de algoritmos, de empleo de estrategias de resolución, etc. y, además, ser similares a las realizadas en clase.

EJEMPLO DE PRUEBA ESCRITA DE EVALUACIÓN:

1. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y explica la razón de tu respuesta:

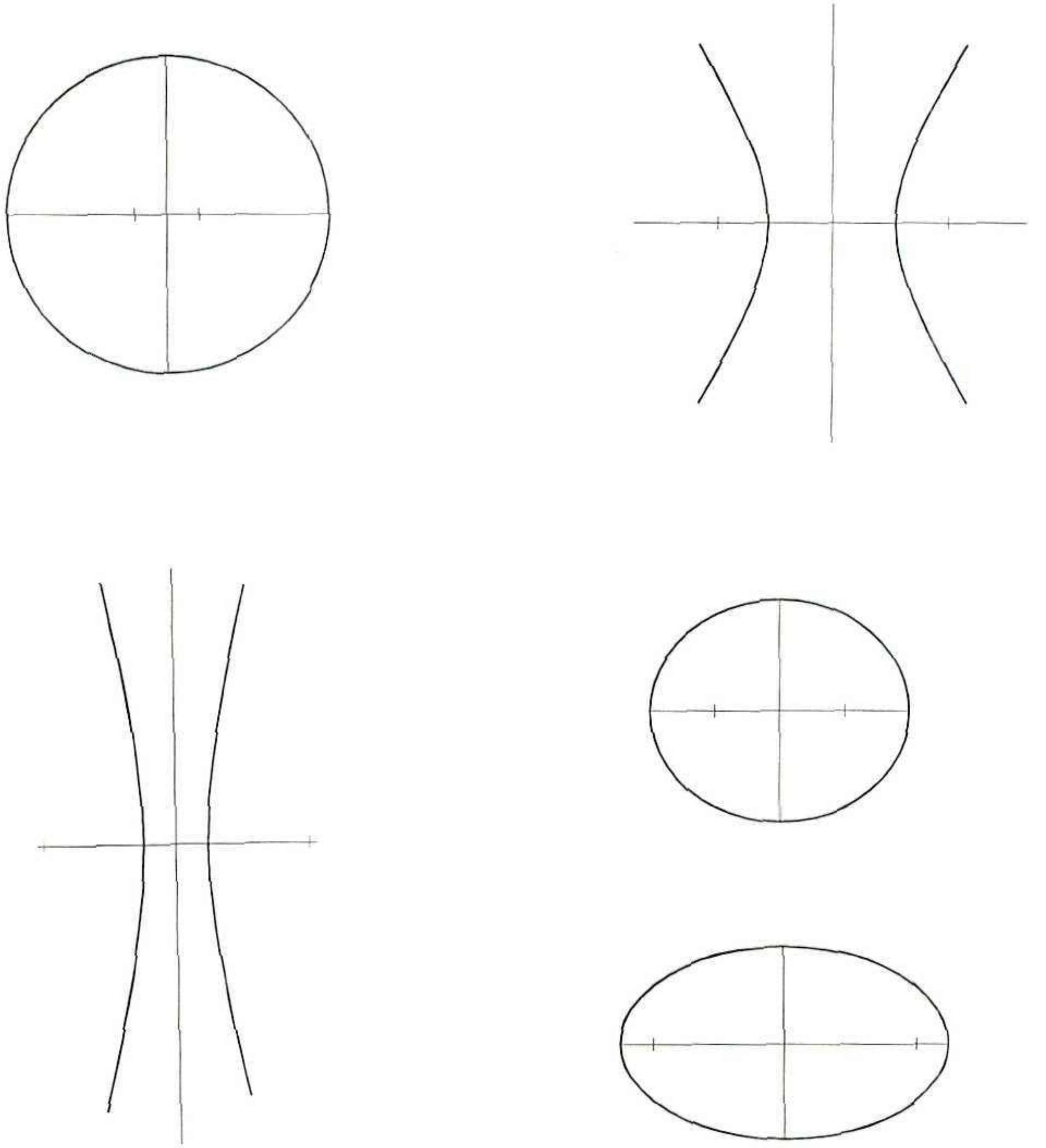
- Una cónica es un elemento de un cono.
- Las elipses tienen dos ejes de simetría.
- Las distancias de cualquier punto de una hipérbola a los focos son iguales.
- La excentricidad de una cónica puede ser negativa.
- La directriz de una parábola pasa por el foco.
- Las parábolas tienen centro.

2. La máxima distancia de la Tierra al Sol es $15{,}2\ 10^7$ km y su distancia mínima es $14{,}7\ 10^7$ km. Sabiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse y que el Sol está en uno de los focos, ¿cuál es la excentricidad de la órbita?

3. Si el vértice de una parábola dista 5 unidades de la directriz, ¿qué distancia hay entre la directriz y el foco?

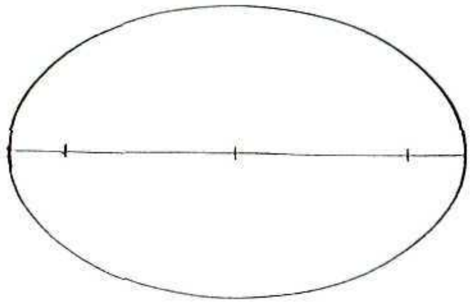
4. Asigna a cada cónica del dibujo una de las siguientes excentricidades:

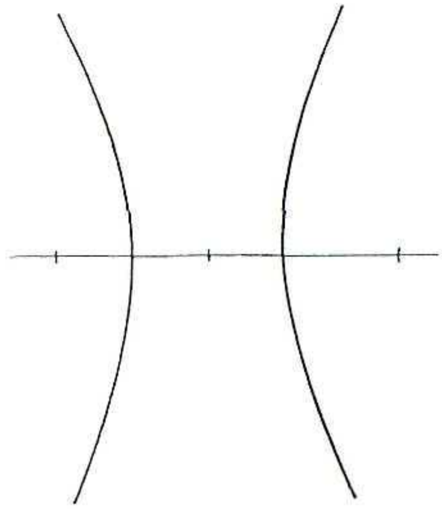
$$\frac{4}{5} \quad 1{,}8 \quad 4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2$$

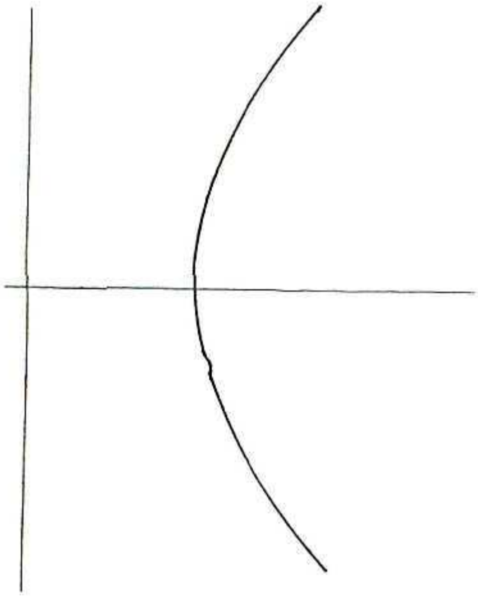


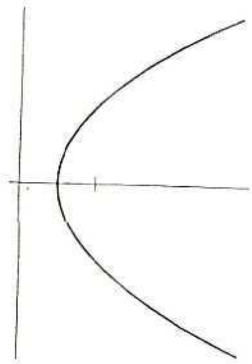
5. Di a qué cónica de las dibujadas corresponde cada una de las siguientes frases y explica por qué. Además completa los elementos que faltan en cada una de ellas:

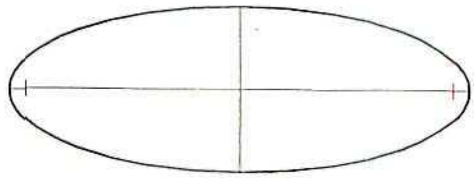
- La suma de las distancias de cualquier punto a los focos es 6 cm.
- El eje mayor es mayor que la distancia focal.
- La diferencia de las distancias de un punto cualquiera a los focos es 3 cm.
- Se puede dibujar deslizando un lápiz a lo largo de un hilo de 6 cm que se mantiene tenso y sujeto en sus extremos a dos puntos que distan entre sí 4,5 cm.
- La distancia entre el vértice y la directriz es igual a 0,5 cm.
- La excentricidad es igual a 2,25.
- *La distancia de cualquier punto de la curva a una recta es igual a la distancia a otro punto* que permanece fijo. Ambas son iguales a 2 cm.

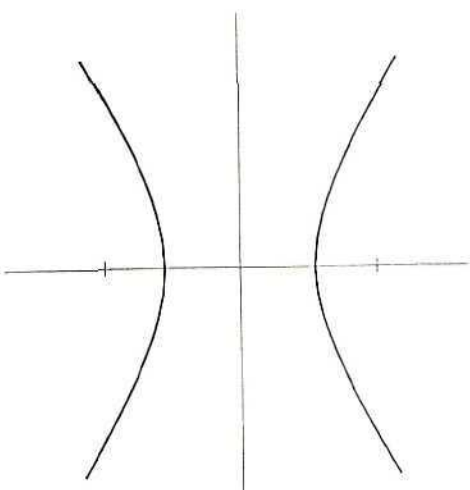


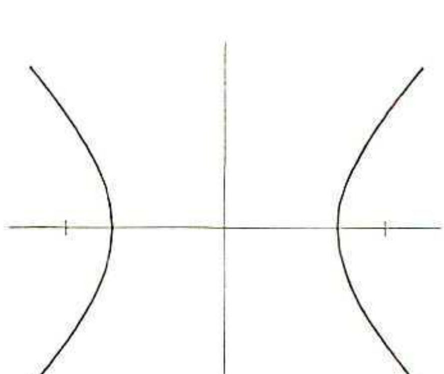












Recursos

El documento de *Matemáticas*, incluido en las «Cajas Rojas» (*Materiales para la Reforma de la Educación Secundaria Obligatoria)* editadas por el MEC en el año 1992, contiene una buena guía comentada de recursos: libros, materiales audiovisuales, programas de ordenador, materiales manipulables, etc.

Consideramos que el comentario realizado en cada caso es adecuado, por lo que en este apartado sólo presentamos aquellos materiales específicos que se pueden utilizar para desarrollar las unidades propuestas en la secuencia. Además, sólo se incluirá una breve descripción del recurso en el caso en que éste no aparezca citado en la guía.

Libros

- ALSINA, C.; PÉREZ, R.; RUIZ, C. *Simetría dinámica.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. n.º 13. 1989. (1)

- ARGÜELLES, J. *Historia de la Matemática.* Madrid, Akal. 1989.

  Libro de consulta adecuado para los alumnos. Se trata de un resumen de los acontecimientos matemáticos más importantes de cada época. Sus contenidos están ampliamente desarrollados en el libro de C. Boyer *Historia de la matemática*, por lo que este último puede ser más útil para el profesor.

- AZARQUIEL, GRUPO. *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. n.º 33. 1991. (1)

- AZARQUIEL, GRUPO. *Curso inicial de estadística en bachillerato.* Madrid, ICE de la UAM. Col. Monografías. n.º 3. 1983. (1)

- AZARQUIEL, GRUPO. *Correlación y regresión: una introducción intuitiva.* Madrid, ICE de la UAM. Col. Monografías. n.º 5. 1985.

- AZARQUIEL, GRUPO; CÓLERA, J. *La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico.* Madrid, ICE de la UAM. Col. Monografías. n.º 4. 1983. (1)

- AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. *Funciones y gráficas.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. n.º 26. 1990. (1)

- BOYER, C. B. *Historia de la matemática.* Madrid, Alianza. Col. Alianza Textos. vol. 94, 1986. (1)

- CALVO, C. *et al. Cuerpos.* Madrid, MEC. Col. Documentos y propuestas de trabajo. 1987.

(1) Material comentado en el libro *Matemáticas. Secundaria Obligatoria. «Cajas Rojas».* MEC, 1992.

Libro recomendado específicamente para la unidad titulada «Cilindro, cono y esfera. Elementos y medidas». En él se describen actividades relacionadas con el tema. Es especialmente interesante el tratamiento experimental para encontrar la superficie y el volumen del cono y la esfera que hemos recogido en nuestra unidad como alternativa a un estudio deductivo.

CARLAVILLA, J. L.; FERNÁNDEZ, G. *Historia de las matemáticas.* Toledo, Consejería de Educación de Castilla-La Mancha. 1988. (1)

CERO, GRUPO. *Matemáticas de bachillerato. Curso 1.* Barcelona, Teide. 1985. (1)

Hace una propuesta amplia de actividades secuenciadas e incorporadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El nivel es el adecuado para los alumnos de 4º de ESO (opción B). Consideramos que debe consultarse para las unidades siguientes: Fracciones, decimales y porcentajes; Trigonometría; Probabilidad condicionada; Experimentos compuestos (esta última en lo relativo a diagramas de árbol y tablas de contingencia).

CERO, GRUPO. *Matemáticas 3º de BUP. Geometría y cónicas.* Valencia, ICE de la Universidad de Valencia. Investigaciones didácticas. 1982.

Libro recomendado específicamente para la unidad «Secciones planas de los cuerpos redondos». En él se realiza una descripción completa de los distintos modos de enfocar el estudio de cónicas y las relaciones entre ellos: trazado de puntos, secciones de un cono, doblando papel,... así como de sus elementos y propiedades.

DÍAZ, J.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. *Azar y probabilidad.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. nº 27. 1988. (1)

GARCÍA, J.; BELTRÁN, C. *Geometría y experiencias.* Madrid, Alhambra. 1987. (1)

GUZMÁN, M.; CÓLERA, J.; SALVADOR, A. *Matemáticas. Bachillerato 1.* Madrid, Anaya. 1987.

Aunque el tratamiento didáctico de este libro esté orientado por las programaciones de los cursos de BUP anteriores a la LOGSE, consideramos que es interesante por incluir en todos los temas una introducción histórica, cuestiones y problemas curiosos y gran número de actividades, por lo que puede ser un buen recurso para el profesor.

HERNÁN, F. *Recursos en el aula de matemáticas.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. nº 34. 1988. (1)

LOGO, GRUPO. *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.* Madrid, UAM publicaciones. 1992.

MASON, J.; BARTON, L.; STACEY, K. *Pensar matemáticamente.* Barcelona, Labor y MEC. 1989. (1)

MEC. *Cajas Rojas de Secundaria Obligatoria.* Madrid, MEC. 1992.

NORTES, A. *Encuestas y precios.* Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. nº 28. 1987. (1)

PÉREZ, M. T.; NESTARES, P. *Tramas geométricas en la decoración cerámica de la Alhambra.* Granada, Grafsur.

Los autores presentan un interesante estudio sobre los mosaicos de la Alhambra de Granada que combina arte, belleza y geometría. Entre otras cuestiones, abordan el trazado de redes mediante descomposición de polígonos (qué polígonos regulares recubren el plano) y algunos esquemas de construcción de mosaicos que son útiles para que los alumnos diseñen sus propias teselaciones del plano.

(1) Material comentado en el libro *Matemáticas. Secundaria Obligatoria. «Cajas Rojas».* MEC, 1992.

PÉREZ, R. *Alicatados de la Alhambra.* Granada, Proyecto Sur. 1990.

RÍO, J. DEL. *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. 2 volúmenes: Libro del alumno, Guía del profesor.* Salamanca, ICE de la Universidad de Salamanca. 1990.

Los contenidos son similares a los tratados en el libro del Grupo Cero *Matemáticas de 3º de BUP. Geometría y cónicas.* Las actividades que deben realizar los alumnos están pormenorizadamente descritas, así como las ayudas necesarias. La guía del profesor incluye indicaciones sobre cómo resolver las actividades propuestas.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION. *El lenguaje de funciones y gráficas.* Bilbao, MEC y Universidad del País Vasco. 1990. (1)

VARIOS. *Problems with patterns and numbers.* England, Joint Matriculation Board y Shell Centre for Mathematical Education. 1984.

Este libro pretende desarrollar la capacidad de los alumnos para resolver problemas. Presenta materiales de clase distribuidos en tres unidades didácticas, una colección de problemas y juegos, preguntas de examen acompañadas de un esquema de evaluación y materiales de apoyo.

Hace especial hincapié en estrategias específicas de resolución de problemas y orienta al profesor en el modo de trabajarlas con los alumnos.

Está en preparación su publicación en castellano.

Materiales audiovisuales

Es posible que los vídeos que se mencionan a continuación no sean adecuados en su totalidad para las unidades que se proponen, o que el profesor prefiera secuenciarlos en varias sesiones y alterar su orden. Por ello es conveniente que el profesor vea previamente las cintas para seleccionar las partes que considere oportunas.

- *¿Contra todo pronóstico? La estadística por dentro* (60 min.). BBC Enterprises. Distribuidora: International Education and Training Enterprises. S. A. (1)
- *Donald en el país de las matemágicas.* (25 min.). Walt Disney. Distribuidora: Filamayer vídeo.

  La parte del vídeo dedicada al número áureo es la que consideremos interesante para la unidad de resolución de problemas, ya que una de las actividades se refiere a este número.
- *Escher: Geometría y mundos imposibles* (27 min.). Distribuidora: Mare Nostrum (1)
- *Funciones exponenciales reales.* Distribuidora: Áncora.

  Se trata de un vídeo muy completo, pero a la vez muy denso. Es aconsejable distribuirlo en varias sesiones, según los contenidos.

  Proporciona una buena visión de los fenómenos exponenciales.
- *Investigaciones matemáticas 10* (60m min.). BBC Enterprises. Distribuidora: International Education and Training Enterprises, S. A. (1)
- *Mosaicos de la Alhambra.* CEP de Granada.

(1) Material comentado en el libro *Matemáticas. Secundaria Obligatoria. «Cajas Rojas».* MEC, 1992.

— *Seccions conics. Slicing the cone* (39 min.). TV Ontario.

Actualmente no existe una versión en castellano de este vídeo. A pesar de ello es interesante que los alumnos lo vean, bien en el original inglés, o bien quitándole el sonido, ya que las imágenes son suficientemente expresivas. Los métodos de dibujo de las distintas cónicas están perfectamente representados y pueden sustituir o complementar la explicación del profesor.

— *Simetría y espacio* (27 min.). Distribuidora: Mare Nostrum. (1)

— *Transformaciones geométricas. Enunciado de Thales* (32 min.). CNDP. Distribuidora: Mare Nostrum. (1)

— *Trigonometría I* (92 min.). BBC Enterprises. Distribuidora: Fundación Serveis de Cultura Popular. (1)

Programas de ordenador

Programas específicos

— *Decorando la Mezquita. Juego educativo para ordenadores compatibles, con MSDOS y VGA.* Miguel de la Fuente Martos. Proyecto Sur de Ediciones, SAL. Granada, 1983.

Este programa plantea el reto de montar en el menor tiempo posible una serie de puzles artísticos, cada uno de los cuales corresponde a una decoración de la Mezquita de Córdoba y que, como referencia, aparece digitalizado en la parte izquierda de la pantalla.

Se presentan 10 puzles con 4 niveles de dificultad. Cada uno de ellos se construye a partir de una pieza única, mediante giros, traslaciones y simetrías.

— *Derive.*

— *Estadística.* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S. A. (1)

— *Función lineal y afín.* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S. A. (1)

— *Función cuadrática.* Ediciones SM. Distribuidora: Idealogic S. A. (1)

Programas de propósito general

— Paquetes integrados.

Las hojas de cálculo y los programas de gráficos son especialmente útiles en el área de Matemáticas. El Microsoft Works es el más accesible y el de más fácil manejo.

Materiales manipulables

Cada unidad didáctica de la secuencia propuesta en el capítulo II incluye una relación de los recursos necesarios cuya utilización se describe en las actividades propuestas.

(1) Material comentado en el libro *Matemáticas. Secundaria Obligatoria. «Cajas Rojas»*. MEC, 1992.

Anexo I: Un test de probabilidad(*)

El estudio del azar y la probabilidad ha estado tradicionalmente relegado a un segundo plano en el sistema educativo, cuando no ha sido sencillamente ignorado. El nuevo currículo para la Secundaria Obligatoria, sin embargo, pretende recuperarlo para *«desarrollar la intuición sobre lo aleatorio a través de la reflexión sobre situaciones de azar y sobre el concepto de probabilidad»*.

Para orientar el trabajo a desarrollar en el aula es fundamental tener una idea clara de la situación de partida (dificultades e ideas previas, intuiciones correctas o erróneas, ...). Con este objetivo hemos pasado a distintos grupos de alumnos de 1° y 2° curso de BUP, FP y REM de nuestros centros (I. B. Gabriel Aresti, ICE, I. B. Txorierri y FP Santurtzi) el test elaborado por David R. Green (*Change and probability concepts Proyect,* 1980), ligeramente recortado para no hacerlo excesivamente largo. El test es el siguiente:

1. Tenemos una ficha que es roja por un lado y verde por el otro. La cogemos por el lado rojo hacia arriba y la lanzamos al aire dando vueltas. ¿Qué lado es más probable que quede hacia arriba?

   A. El lado rojo. C. Son igual de probables.

   B. El lado verde. D. No lo sé.

2. En una clase hay 13 chicos y 16 chicas. Se escribe el nombre de cada uno en un trozo de papel y luego se coge uno sin mirar. ¿Qué es más probable?

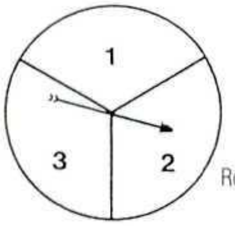
   A. Que salga el nombre de un chico.

   B. Que salga el nombre de una chica.

   C. Son igual de probables.

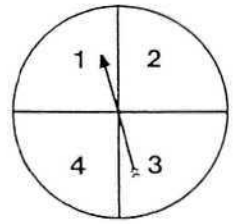
   D. No lo sé.

3. Aquí ves los dibujos de dos discos que tienen unas flechas que giran y marcan un número. ¿En qué disco es más fácil conseguir un 3?



Rojo

Amarillo



   A. En el rojo. C. En los dos igual.

   B. En el amarillo. D. No lo sé.

(*) Artículo publicado por Félix Alayo, Arantza Arregui, Begoña Arrien, Clara Baquerizo, Margarita Múgica, Fermín Porras, Ismael Redondo en la revista *SIGMA* (nº 6) - Marzo 1990.

4. ¿Qué número es más difícil de obtener al lanzar un dado?

   Respuesta: ....

5. Se lanza una moneda al aire 5 veces y siempre sale «cara». ¿Qué es más probable que aparezca la siguiente vez?

   A. Cara. C. Son iguales de probables.

   B. Cruz. D. No lo sé.

6. La bolsa A tiene 3 bolas negras y 1 blanca. La bolsa B tiene 2 bolas negras y 1 blanca. Para ganar un premio hay que sacar (sin mirar) una bola negra de una de las dos bolsas. ¿Con qué bolsa es más fácil ganar?

   A. Con la bolsa A. C. Con las dos igual.

   B. Con la bolsa B. D. No lo sé.

7. La bolsa C contiene 5 bolas negras y 2 blancas. La bolsa D contiene 5 bolas negras y 3 blancas. ¿De cuál es más probable extraer una bola negra?

   A. De la bolsa C. C. De las dos igual.

   B. De la bolsa D. D. No lo sé.

8. Otras dos bolsas contienen bolas negras y blancas. La bolsa E: 2 negras y 2 blancas. La bolsa F: 4 negras y 4 blancas. ¿De qué bolsa es más probable extraer una bola negra?

   A. De la bolsa E. C. De las dos igual.

   B. De la bolsa F. D. No lo sé.

9. Otras dos bolsas con bolas blancas y negras. La bolsa G tiene 12 negras y 4 blancas. La bolsa H tiene 20 negras y 10 blancas. ¿Qué bolsa ofrece más posibilidades de extraer una bola negra?

   A. De la bolsa G. C. Las dos igual.

   B. La bolsa H. D. No lo sé.

10. Otras dos bolsas. La bolsa J tiene 3 bolas negras y 1 blanca. La bolsa K tiene 6 bolas negras y 2 blancas, ¿De qué bolsa es más fácil sacar una bola negra?

    A. De la bolsa J. C. De las dos igual.

    B. De la bolsa K. D. No lo sé.

11. A continuación tienes 5 frases:

    1. No puede suceder.

    2. No sucede muy a menudo.

    3. Sucede bastante a menudo.

    4. Sucede casi siempre.

    5. Sucede siempre.

    Coloca al lado de las siguientes palabras el número de la frase que tenga el mismo significado. Puedes repetir los números.

    A. Muy probable. C. Probable.

    B. Improbable. D. No muy probable.

12. En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuál de los siguientes resultados se producirá más a menudo?

A. 2 caras y 10 cruces.

B. 5 caras y 7 cruces.

C. 6 caras y 6 cruces.

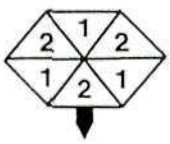
D. 7 caras y 5 cruces.

E. Hay la misma probabilidad de que aparezca cualquiera de los resultados anteriores.

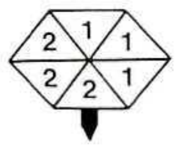
13. Pedro y Juan juegan con un dado. Pedro gana una peseta si sale 2, 3, 4 ó 5. Si sale un 1 gana Juan. ¿Cuánto debería ganar Juan cuando obtiene un 1 para que el juego sea justo?

Respuesta:..pesetas.

14. Tenemos dos ruletas:



Amarilla



Roja

¿En cuál de ellas es más fácil conseguir un dos?

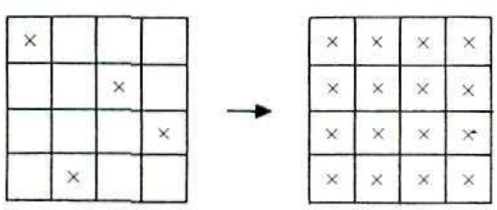
A. *En la amarilla.*

B. En la roja.

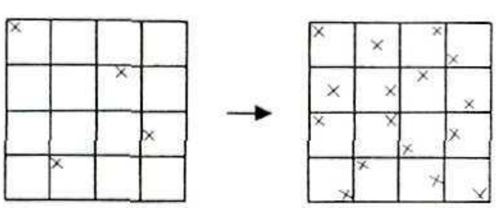
C. *En las dos igual.*

D. No lo sé.

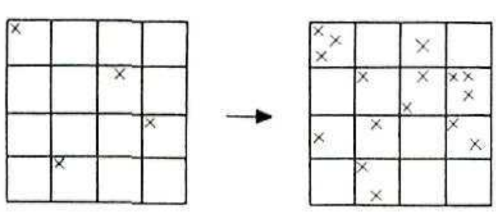
15. El suelo de un patio tiene 16 secciones cuadradas. Comienza a nevar. Al principio sólo caen unos pocos copos de nieve. Después de un rato han caído más.



Conjunto A



Conjunto B



Conjunto C

¿Cuál de estos conjuntos de dibujos muestra mejor lo que esperarías ver?

A. El conjunto A.

B. El conjunto B.

C. El conjunto C.

D. Los conjuntos B y C.

E. Todos son igual de probables.

16. De las siguientes frases marca las que signifiquen exactamente lo mismo que «tiene una probabilidad de 1 a 1 de ocurrir».

A. Puede que ocurra o puede que no.

B. Hay posibilidad de que ocurra.

C. Puede ocurrir alguna vez.

D. Hay las mismas posibilidades de que ocurra que de que no ocurra.

E. Es improbable que ocurra.

17. En una bolsa hay 4 canicas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se agita bien la bolsa y se sacan 3 canicas, 2 rojas y 1 azul. Después se extrae otra canica. ¿De qué color es más probable que sea?

A. Roja.

B. Azul

C. Todos los colores son igual de probables.

D. Verde.

E. No lo sé.

18. Tenemos dos discos de colores:

Marrón   Azul

Si hacemos girar la flecha. ¿Cuál es el mejor disco para obtener un 1?

A. El marrón.

B. El azul.

C. Los dos igual.

D. No lo sé.

19. Supongamos que dejamos caer muchas canicas por los canales del dibujo. Marca la frase que mejor describa lo que crees que ocurrirá:

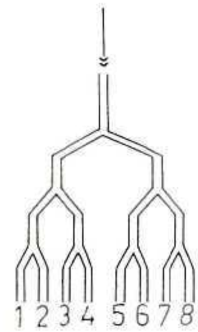
A. Cada canal tendrá aproximadamente la misma cantidad de canicas.

B. 1 y 8 tendrán la mayoría de las canicas.

C. 3, 4, 5 y 7 tendrán la mayoría de las canicas.

D. 1, 3, 5 y 7 tendrán la mayoría de las canicas.

E. Ninguna de las anteriores.



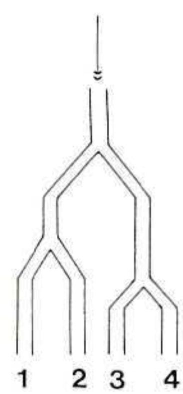
20. Haz lo mismo para estos canales.

A. Cada canal contendrá aproximadamente el mismo número de canicas.

B. 1 y 2 contendrán la mayoría de las canicas.

C. 3 y 4 contendrán la mayoría de las canicas.

D. Ninguna de las anteriores.



21. Lo mismo para estos canales.

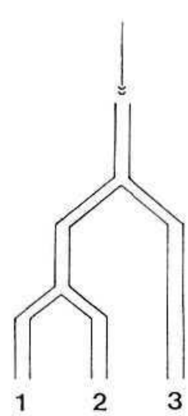
A. Cada canal contendrá aproximadamente el mismo número de canicas.

B. 2 contendrá la mayoría de las canicas.

C. 3 contendrá la mayoría de las canicas.

D. 1 y 2 tendrán la mayoría de las canicas y 3 sólo tendrá unas pocas.

E. Ninguna de las anteriores.



22. Haz lo mismo para estos canales.

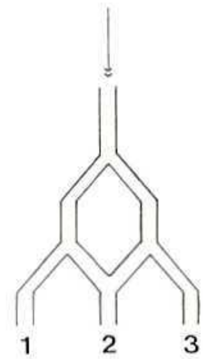
A. Cada canal contendrá aproximadamente el mismo número de canicas.

B. 2 contendrá aproximadamente el doble que 1 ó 3.

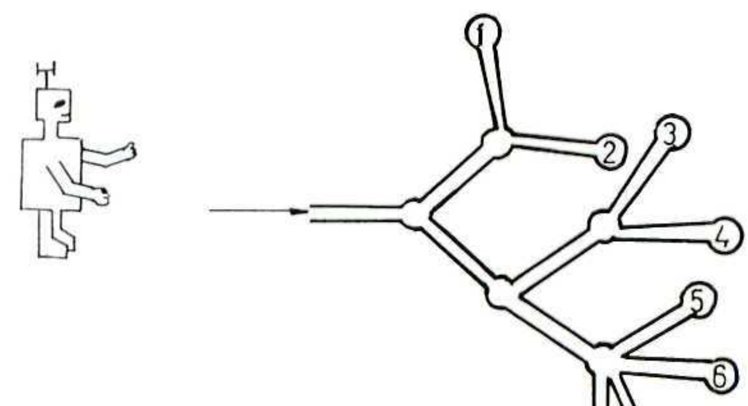
C. Aproximadamente la mitad caerán en 1 y aproximadamente la mitad caerán en 3.

D. Unas pocas caerán en 1, casi todas caerán en 2 y unas pocas caerán en 3.

E. Ninguna de las anteriores.



23. Se pone un robot en un laberinto. En cada bifurcación es igual de probable que el robot vaya por un camino o por otro. Al final de cada camino hay una trampa. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas igual de probables?



24. Al vaciar un paquete de 100 chinchetas sobre la mesa, 68 han quedado «hacia arriba» y 32 «hacia abajo».

Si repetimos el experimento, ¿qué resultado crees que se obtendrá?

A. Arriba, 36; abajo, 64.

B. Arriba, 63; abajo, 37.

C. Arriba, 51; abajo, 49.

D. Arriba, 84; abajo, 16.

E. Todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir.

F. No lo sé.

25. ¿Cuál de las siguientes situaciones es más probable?

A. Que los 10 primeros bebés nacidos en un hospital haya 7 o más niñas.

B. Que de los 100 primeros bebés nacidos en un hospital haya 70 o más niñas.

C. Son igual de probables.

D. No se puede saber.

26. Una bolsa contiene algunas bolas blancas y algunas negras. Un niño saca una bola, observa el color y la mete de nuevo. Después agita la bolsa. Hace esto 4 veces y siempre saca una bola negra. Si ahora saca otra bola, ¿qué color crees que es más fácil que salga?

A. Otra vez el negro es el más probable.

B. Negro y blanco son igual de probables.

C. Esta vez el blanco es el más probable.

D. No lo sé.

Comentarios

La comparación de los datos que hemos recogido con los obtenidos por Green en Inglaterra nos muestra que los resultados de nuestros alumnos eran ligeramente peores que los de los ingleses de la misma edad, aunque estas diferencias no parecen especialmente significativas y sería necesario un estudio más amplio y con una selección más rigurosa de la muestra para poder establecerlas con firmeza.

Importante es que, sin embargo, se repiten básicamente las mismas dificultades y falsas intuiciones, que las podemos resumir en los siguientes apartados:

El lenguaje del azar

Existe una gran confusión entre términos relacionados con el azar y la probabilidad. Así un gran número de alumnos (39%) confunde «muy probable» con «sucede siempre» y más aún (81%) confunden «improbable» con «no puede suceder». Por otro lado, en el lenguaje coloquial los términos posible y probable están tan mezclados que expresiones como «es muy posible», «poco posible», «bastante posible», «posiblemente», ..., nos parecen normales, cuando en sentido estricto (y más aún en matemáticas) las cosas o son posibles o son imposibles, no existe término medio.

La confusión es tan grande que incluso algunos diccionarios acaban recogiendo estas acepciones; así, por ejemplo, el Casares dice:

Posibilidad: Calidad de posible / aquello que hace que una cosa sea posible / probabilidad / ...

Imposible: No posible / sumamente difícil.

Asignación de probabilidad en casos elementales

Llama la atención el elevado número de errores (25–30%) en las respuestas a las preguntas 1 y 2, que se eleva al 39% en la pregunta 13. Un resultado llamativo es que en la pregunta 4 (¿«Qué número es más difícil de obtener al lanzar un dado?») sólo el 63% considera que son «igual de difíciles» todos los números, apostando los demás por el 6 (10%), el 1 (5%) y el 5 (3%) en orden decreciente. Estos resultados son sin duda fruto de su experiencia en juegos como el parchís, aunque no hay que desdeñar una cierta visión pesimista de la existencia como indican algunos alumnos, para quienes «el que quieres que salga, es el más difícil».

Proporcionalidad

La respuesta correcta de la secuencia de preguntas 6 a 10 exige aplicar un modelo de proporcionalidad para comparar la probabilidad de extraer una bola negra de dos bolsas diferentes. Los resultados nos indican que, mientras que un 82% y un 72% responden correctamente a las cuestiones 6 y 7 respectivamente, tan sólo un 58% lo hace a la cuestión 9 y un 37% a la 10, lo que nos indica que se ha seguido un sistema de conteo (es más probables donde hay más bolas negras, o en su defecto, donde hay menos bolas blancas) en lugar de un sistema proporcional.

Situaciones geométricas

Las preguntas situadas en un contexto geométrico parecen comportar una especial dificultad, quizá debido a que la geometría sigue siendo una de las hermanas pobres de las matemáticas escolares. Así, las preguntas 3, 14 y 18 relativas a ruletas, sólo son bien contestadas por el 72%, 51% y 54%, respectivamente; en la distribución de canicas por distintos canales (cuestiones 19 a 22) los ciertos oscilan entre el 43% y el 56% y apenas el 5% responde adecuadamente al robot en el laberinto.

Comportamiento regular / irregular del azar

En la pregunta 15, prácticamente todos optan por una distribución muy regular de los copos de nieve (sólo el 9% elige el conjunto C), lo cual parece indicar que está muy arraigada la idea de regularidad en el azar. Sin embargo, esto contrasta con el hecho de que al lanzar al aire 12 monedas juntas (pregunta 12) el 86% opina que todos los resultados son igual de probables y sólo un 5% opta por 6 caras y 6 cruces.

Ley de los grandes números

En el lanzamiento simultáneo de 100 chinchetas (pregunta 24), el 87% considera igualmente probables todos los resultados y sólo el 4% piensa que lo obtenido en el primer experimento nos da una información importante sobre la probabilidad de que las chinchetas caigan hacia arriba o hacia abajo y que por lo tanto el resultado que obtendremos en la repetición del experimento se aproximará bastante al anterior.

Igualmente espectaculares son las contestaciones dadas a la cuestión 25, en la que sólo el 7% considera que es más fácil que de los 10 primeros bebés nacidos en un hospital haya 7 o más niñas, que el hecho de que nazcan 70 o más niñas entre los 100 primeros. La gran mayoría piensa que son igual de probables o que sencillamente no se puede saber.

Detrás de estas situaciones está la ley de los grandes números que nos indica que, cuando una experiencia aleatoria se repite un gran número de veces, la frecuencia relativa de cada suceso se parecerá mucho a la probabilidad teórica.

«Memoria» del azar

El 74% considera que después de obtener 5 caras consecutivas al lanzar una moneda al aire, en el sexto lanzamiento la cara y la cruz son igual de probables. Piensan por lo tanto que el azar no tiene memoria y que un resultado no condiciona el siguiente. Tienden, sin embargo, a generalizar en exceso esta falta de memoria, como se puede ver en el caso de las chinchetas antes citado o en la última pregunta. En ésta, las 4 extracciones consecutivas en las que siempre se ha sacado una bola negra, sólo hace sospechar al 9% que el número de bolas negras sea mayor que el de blancas y, por lo tanto, el color negro es nuevamente más probable para una quinta extracción. El 71% cree que ambos colores son igual de probables, el 10% opina que ya es hora de que salga una bola blanca y otro 10% no sabe / no contesta.

Como decíamos, estos resultados coinciden a grosso modo con los obtenidos en Inglaterra por los autores del test. Y si pasáramos la encuesta a adultos (incluso a adultos con formación universitaria) probablemente apreciaríamos las mismas dificultades y conceptos erróneos, aunque sin duda algo más refinados.

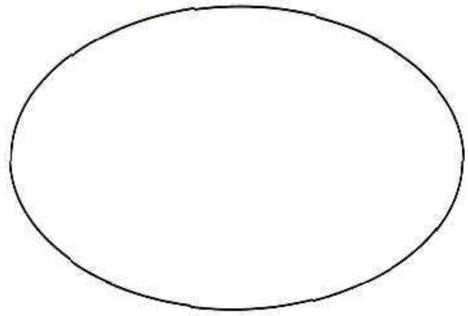
Es necesario, pues, un trabajo sistemático sobre este campo de las matemáticas, que en una primer etapa debería ir dirigido fundamentalmente a asentar intuiciones, sin pretender abordar prematuramente los aspectos formales del tema (una formalización prematura puede llevar a los alumnos a disociar su experiencia escolar de su experiencia diaria y a mantenerlas en compartimentos estancos), con mucho trabajo práctico, discusión en pequeños grupos y del conjunto de la clase. Las actividades a desarrollar deberían estar centradas en juegos, formulación de conjeturas y verificación de las mismas, planificación y realización de experiencias sencillas, simulaciones, etc.

Anexo II: Hojas de trabajo

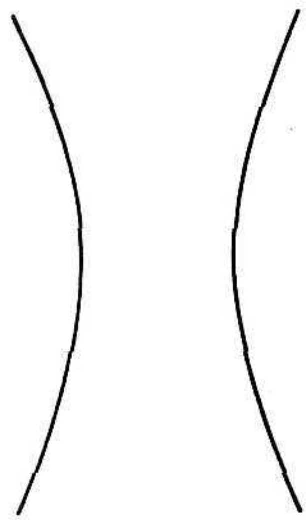
Consta de:

- Serie con los elementos característicos de la elipse, la hipérbola y la parábola.
- *Hoja de trabajo 1*: Dibujos de cónicas.
- *Hoja de trabajo 2*: Tablas para estudiar las cónicas como lugares geométricos.
- *Hoja de trabajo 3*: Tramas par dibujar elipses, hipérbolas y parábolas.
- *Hoja de trabajo 4*: Tabla para estudiar la excentricidad.
- *Hoja de trabajo 5*: Identificación de cónicas en situaciones reales.

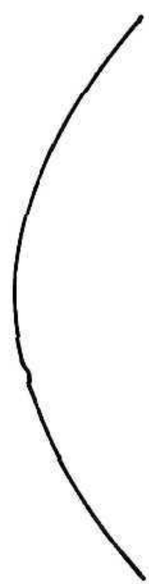
ELIPSE

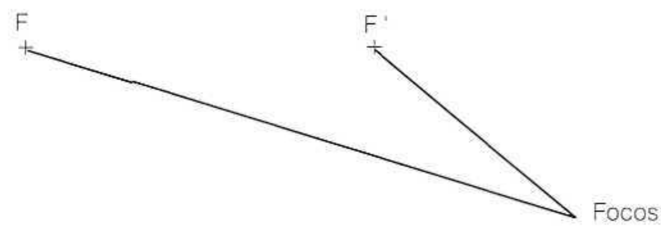


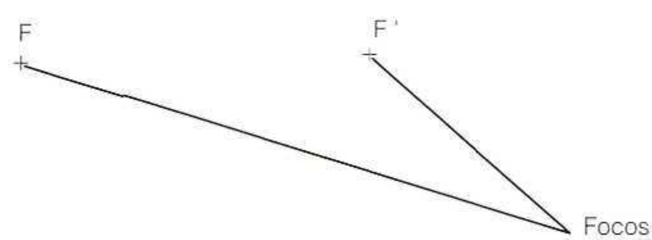
HIPÉRBOLA

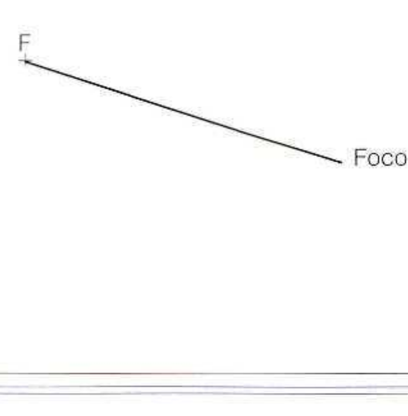


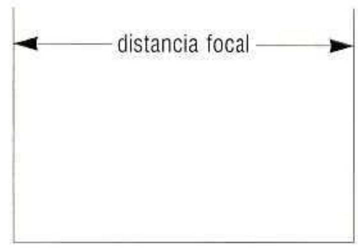
PARABÓLA

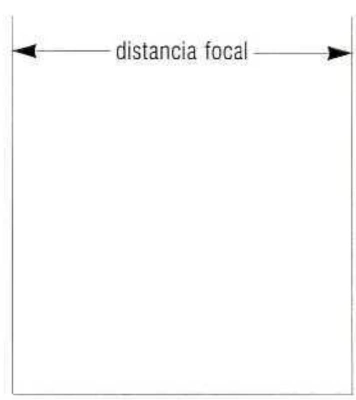


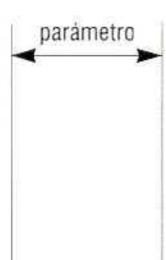

F
F '
Focos

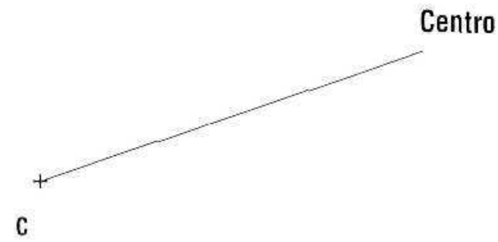

F
F '
Focos

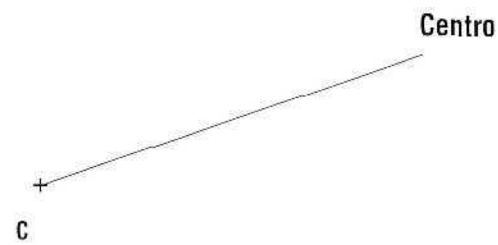

F
Foco


distancia focal


distancia focal


parámetro


Centro
C


Centro
C

Vértice
V

eje mayor

eje mayor

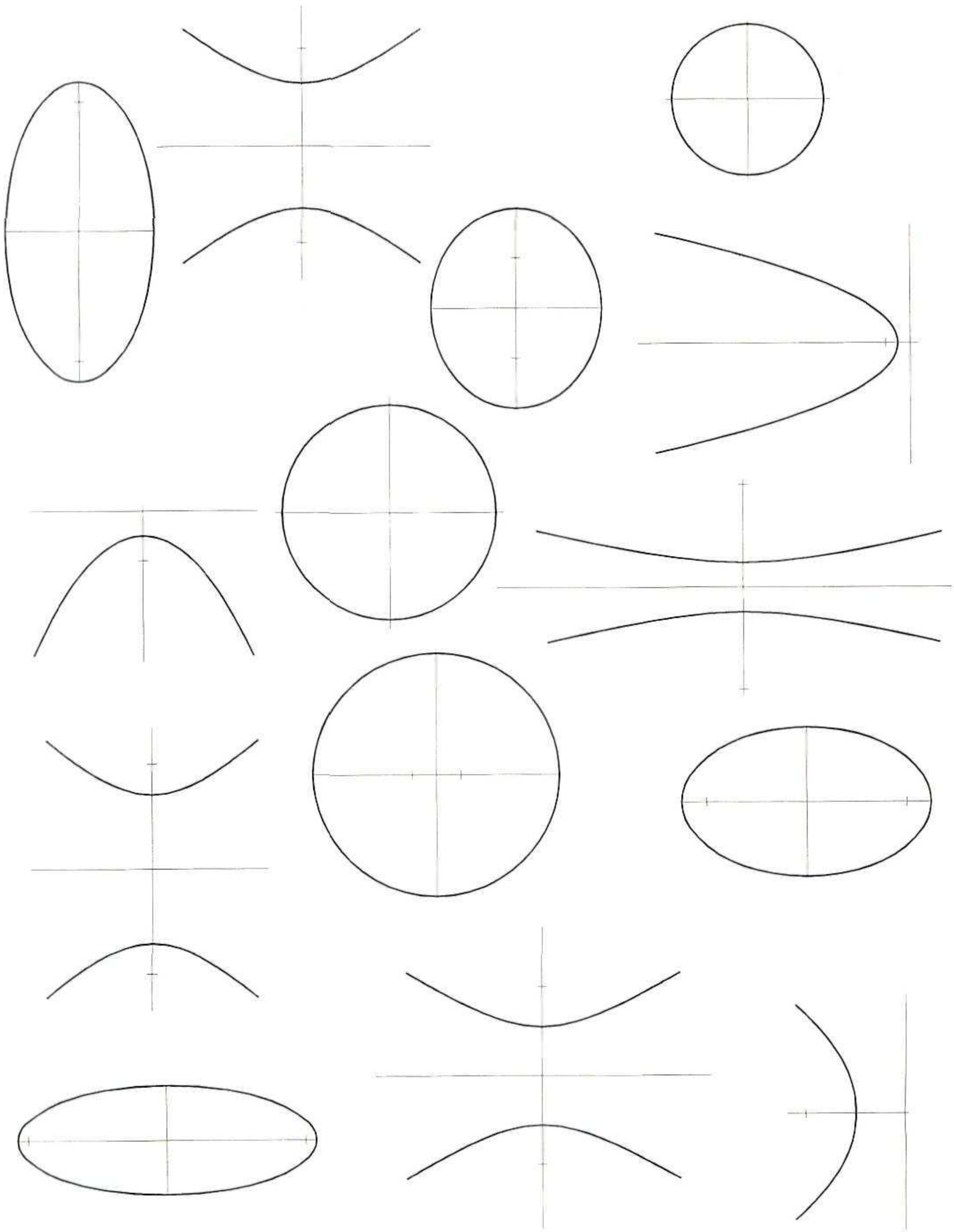
eje

directriz

eje simetria

eje menor

HOJA DE TRABAJO 1



HOJA DE TRABAJO 2

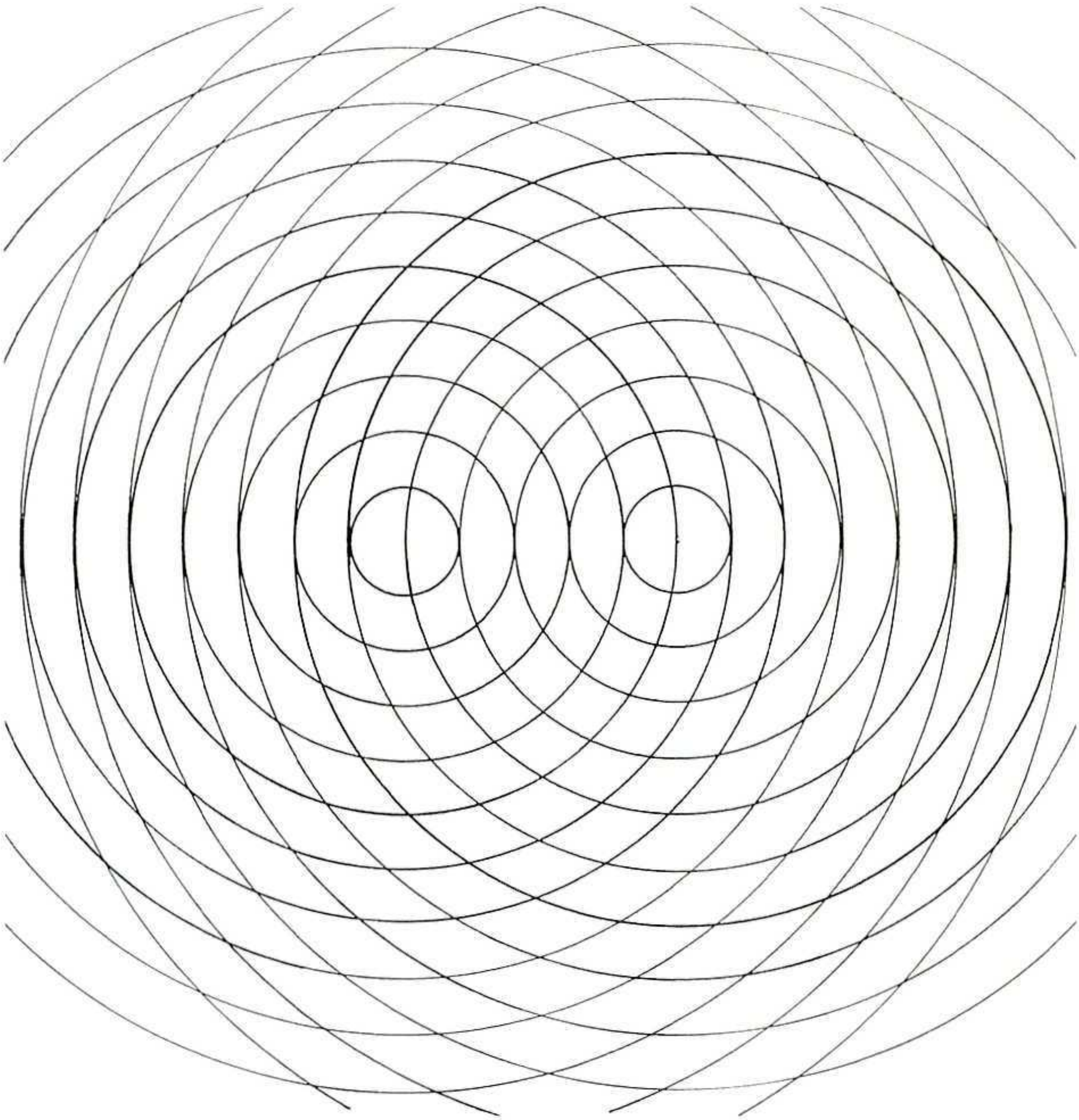
Elipse	D Distancia del punto a un foco	D' Distancia del punto al otro foco	D + D'

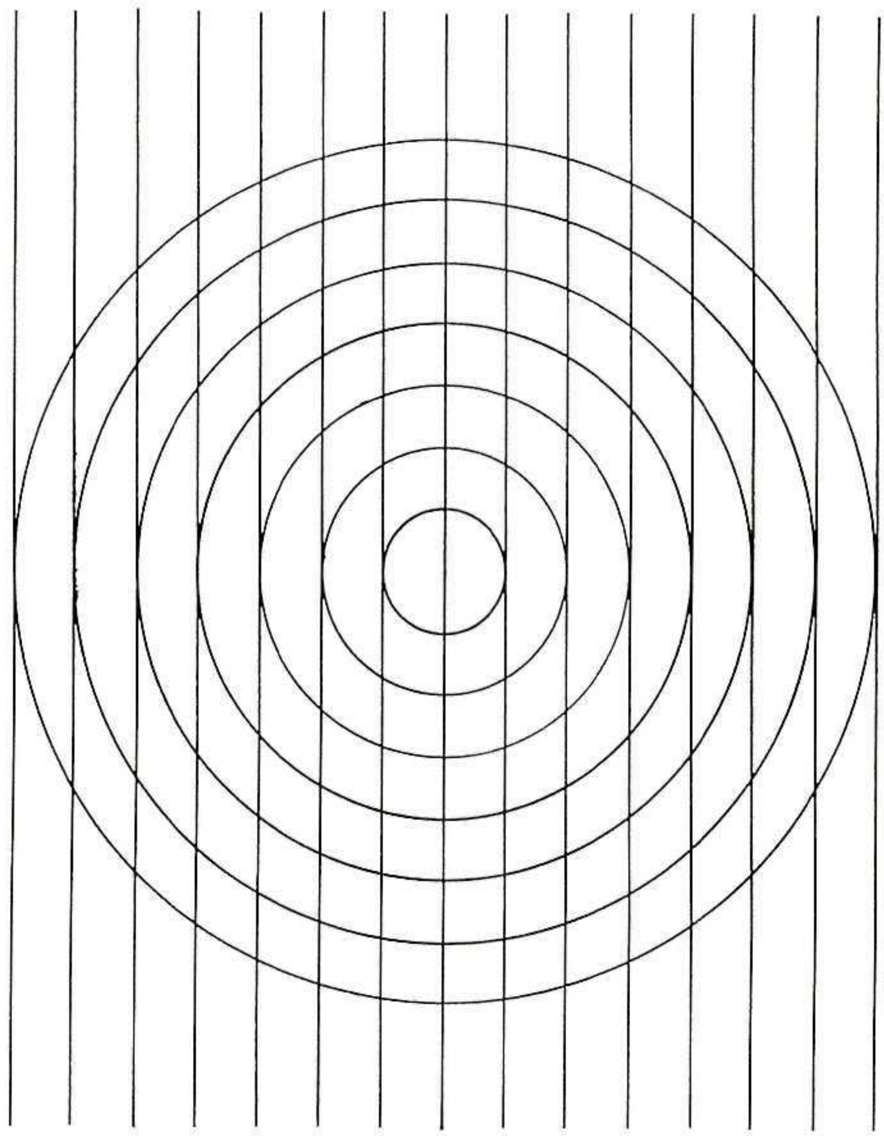
Hipérbolas	D Distancia del punto a un foco	D' Distancia del punto al otro foco	D - D'

Parábolas	*D* Distancia del punto a un foco	*D'* Distancia del punto al otro foco	D — D'

Circunferencias	D Distancia del punto al centro	r Radio

HOJA DE TRABAJO 3



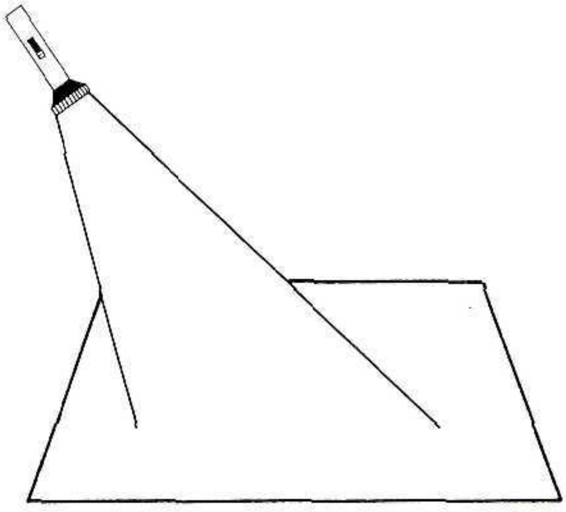


Hoja de trabajo 4

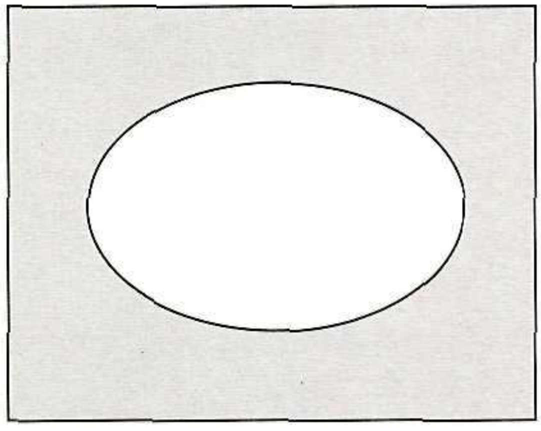
Tipo de cónica	d Distancia focal	a Longitud del eje mayor	d/a

HOJA DE TRABAJO 5

A) Recinto iluminado por una linterna inclinada respecto a la mesa.

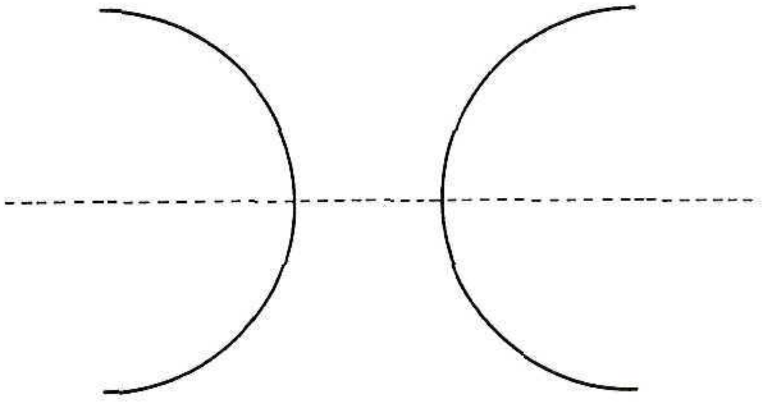


Posición de la linterna (perspectiva).

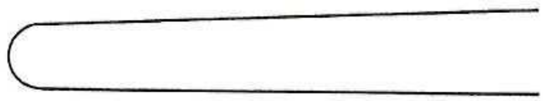


Recinto iluminado. Mesa vista desde la vertical.

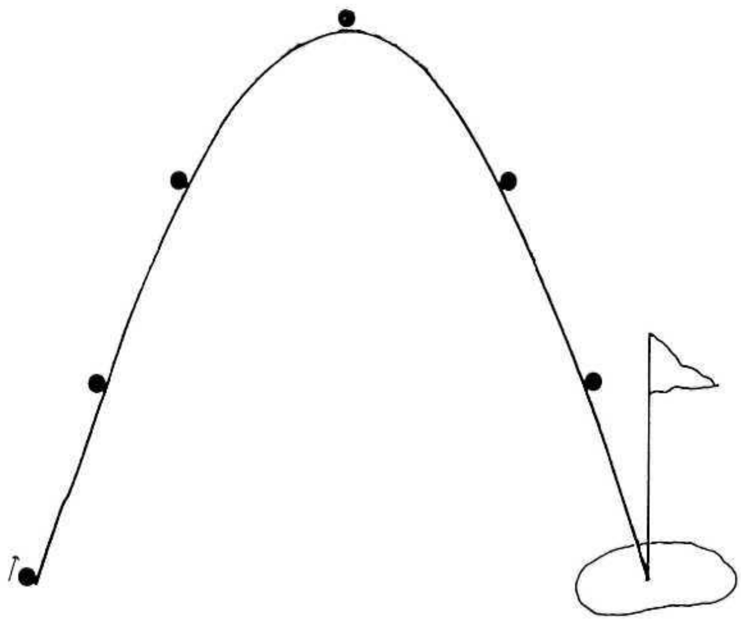
B) Dos semicircunferencias enfrentadas y separadas.



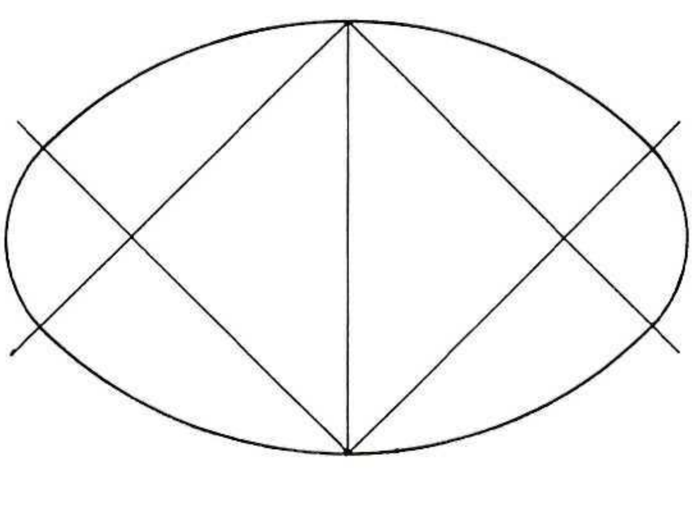
C) Una horquilla para el pelo.



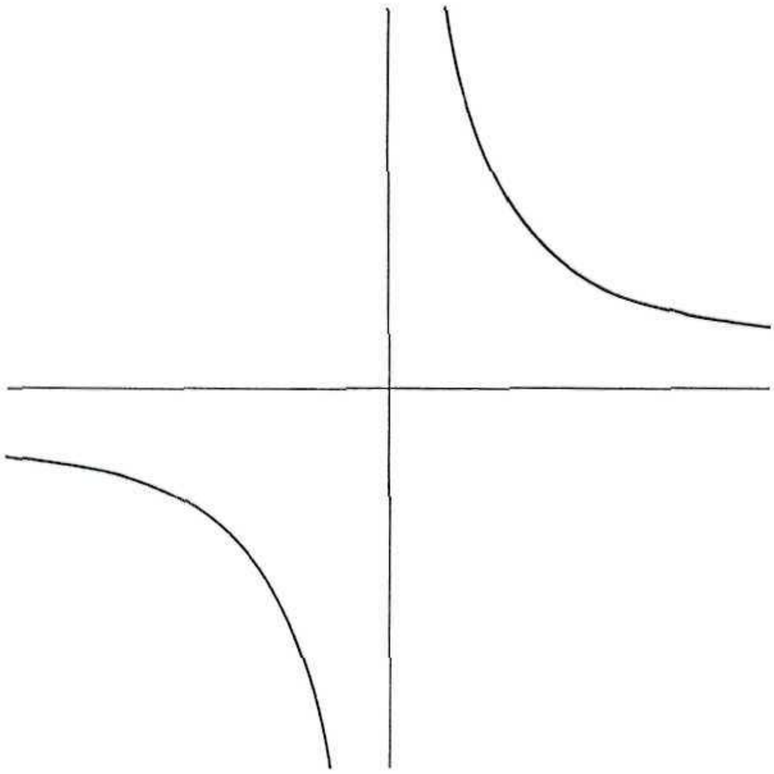
D) El recorrido de una pelota de golf tras ser golpeada.



E) La figura siguiente.



F) La gráfica de la función $f(x) = 8/x$

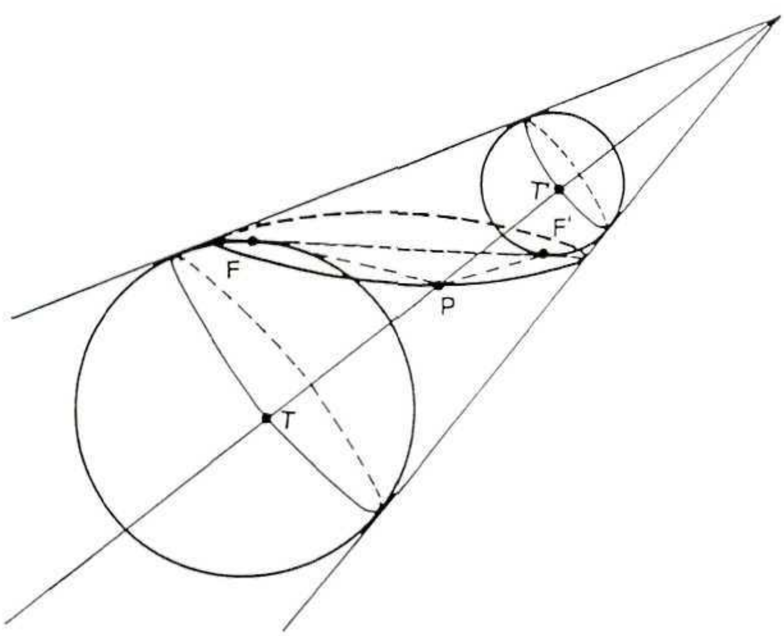


Anexo III
Secciones del cono y lugares geométricos*

Material para el alumno

1. Fíjate cómo está construido el dibujo adjunto:

- Cortamos una superficie cónica con un plano, de manera que la sección sea una elipse.
- Trazamos dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano de corte. Llamamos F al punto de tangencia de la esfera más pequeña con el plano, y F' al punto de tangencia de la otra esfera con el plano.
- La esfera pequeña determina en la superficie cónica una circunferencia C y la grande una circunferencia C'.



(*) *Los dibujos de este Anexo se han obtenido del libro Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de cónicas* de DEL RÍO SÁNCHEZ, J. ICE de Salamanca. Colección Documentos Didácticos nº 147.

Vamos a ver que todos los puntos de la elipse cumplen la siguiente condición:

«La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los puntos F y F' es constante».

Demostración:

— Toma un punto cualquiera de la elipse: P. Traza la generatriz del cono que pasa por él. Esta generatriz toca a las circunferencias C y C' en dos puntos T y S.

— Recuerda que la esfera grande es tangente a la superficie cónica y también al plano de corte, por lo tanto:

PS y PF' son tangentes a la esfera grande.

Luego:

PS = PF'

— Utilizando el mismo razonamiento con la esfera pequeña tenemos:

PT y PF con tangentes a la esfera pequeña.

Luego:

PT = PF

— Si sumamos miembro a miembro las dos igualdades, tenemos:

PS + PT = PF' + PF

pero

PS + PT = ST

ST es el fragmento de generatriz determinado por las dos circunferencias tangentes, y este fragmento es el mismo sea cual sea el punto de la elipse elegido, luego:

ST es constante para todo P.

PF' + PF es constante para todo P.

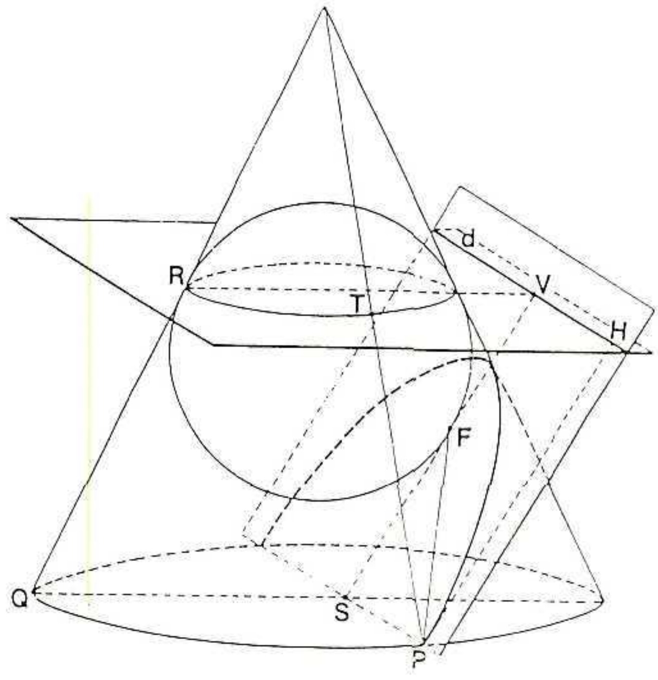
2. Haz un razonamiento similar al anterior para demostrar que los puntos de una hipérbola obtenida al cortar un doble cono cumplen la siguiente condición:

«La diferencia de las distancias a los focos es constante».

3. En este dibujo tienes representado un cono y la parábola que se obtiene al cortarlo por un plano. Además:

— Una esfera inscrita en el cono y tangente al plano que contiene a la parábola. Llamamos F al punto de tangencia.

— La esfera toca al cono en una circunferencia C. El plano que contiene a esa circunferencia corta al plano que contiene a la parábola en una recta r.



Vamos a demostrar que todos los puntos de la parábola cumplen la siguiente propiedad:

«La distancia de un punto a la recta r es igual a la distancia del punto a punto F».

— Sea P un punto de la parábola, PF es la distancia del punto al foco F.

— La distancia del punto P a la recta r es PH.

— Trazamos la circunferencia que pasa por el punto P y es perpendicular al eje del cono. Trazamos la generatriz del cono que pasa por P. Esta generatriz toca a la esfera tangente en el punto T.

— Se verifican las siguientes igualdades:

PF = PT

PT = QR

QR = SV

SV = PH

Ayúdate del dibujo para explicar por qué.

De las igualdades anteriores se deduce que PF = PH.

Dirección General de Renovación Pedagógica

Centro de Desarrollo Curricular