

Cursos de Verano para Profesores de Enseñanza Secundaria

**Actualización  
Científica  
y Didáctica**

**TEMAS RELEVANTES DE LA  
MATEMÁTICA ACTUAL:  
EL RETO DE LA  
ENSEÑANZA SECUNDARIA**



MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN,  
CULTURA Y DEPORTE

**UIMP**

*Universidad Internacional  
Menéndez Pelayo*

H/ 1842

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE  
BIBLIOTECA  
04 MAY 2004  
ENTRADA  
DONATIVO

MA-5264  
(H. U.)



H/1842



**TEMAS RELEVANTES DE LA  
MATEMÁTICA ACTUAL:  
EL RETO DE LA ENSEÑANZA  
SECUNDARIA**



R. 147549.



**MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE**  
SECRETARÍA GENERAL DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL  
Subdirección General de Formación del Profesorado

Edita:

© SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA. Centro de Publicaciones

N.I.P.O.: 176-00-062-1

I.S.B.N.: 84-369-3348-6

Depósito legal: M-31.645-2000

Imprime: Solana e Hijos, A.G., S.A.

**TEMAS RELEVANTES DE LA MATEMÁTICA ACTUAL:  
EL RETO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA**

Actas del Curso para Profesores de  
Enseñanza Secundaria  
Universidad Internacional Menéndez Pelayo  
Santander, septiembre, 1999

**DIRECTOR:**

Enrique Zuazua Iriondo

**SECRETARIA:**

María Victoria Pinillos Laffon

**PONENTES:**

Mikel Bilbao  
Alicia Delibes  
Javier Duoandikoetxea  
José Luis Fernández  
Tomás Recio  
Roberto Rodríguez del Río  
Antonio Ros  
Gilbert Strang

NOTA: Por omisión en la Edición del libro, introducir esta página  
antes del Índice



# Índice

	<u>Págs.</u>
Introducción .....	7
Análisis de Fourier: Historia y aplicaciones recientes .....	11
<b>Javier Douandikoetxea</b>	
Matemáticas y Finanzas .....	45
<b>José Luis Fernández</b>	
El Problema Isoperimétrico .....	81
<b>Antonio Ros</b>	
Álgebra Lineal y sus Aplicaciones .....	97
<b>Gilbert Strang</b>	
Ondas continuas y discretas .....	113
<b>Enrique Zuazua</b>	
Matemáticas en el Aula de Informática .....	145
<b>Roberto Rodríguez del Río</b>	
El reformismo educativo .....	211
<b>Mikel Bilbao</b>	
Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España y en otros países de la Unión Europea .....	233
<b>Alicia Delibes</b>	
Educación Matemática: una oportunidad y una necesidad social	251
<b>Tomás Recio</b>	
Conclusiones .....	255
Direcciones .....	257



# Introducción

Este libro recoge los textos de las conferencias impartidas en el curso “Temas relevantes de la Matemática actual: El reto de la Enseñanza Secundaria” celebrado en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander en septiembre de 1999.

Cuando diseñamos este curso, nuestro objetivo principal fue proporcionar a los Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria la posibilidad de actualizar sus conocimientos y métodos a través del contacto con algunos de los temas de mayor actualidad en la investigación matemática. Para ello recurrimos a científicos del más alto nivel preocupados y comprometidos con la enseñanza de las Matemáticas.

Los temas elegidos fueron diversos. Gilbert Strang (MIT, USA) disertó sobre el Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. Javier Duoandikoetxea (UPV-EHU) habló sobre el Análisis de Fourier, uno de los motores más profundos del Análisis y de máxima actualidad por sus relevantes aplicaciones en tomografía y teoría de las señales. José Luis Fernández (UAM) describió las Matemáticas que en la actualidad se desarrollan de manera espectacular en relación con el mundo de las Finanzas, en las que la teoría de la Probabilidad juega un papel esencial. Antonio Ros (Universidad de Granada) nos adentró en el mundo de la Geometría a través del estudio de los orígenes y estado actual del problema isoperimétrico. De este modo pretendimos cubrir los aspectos fundamentales de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad.

Además de estos cuatro ciclos de conferencias, se desarrollaron dos sesiones de trabajo a cargo de María Victoria Pinillos (IES Isabel La Católica y UCM) y Roberto Rodríguez (IES Gabriel García Márquez y UCM) en el Aula de Informática, en las que se utilizaron algunos de los programas más útiles y de más fácil acceso en la enseñanza de las Matemáticas. Se mostraron asimismo algunas aplicaciones relacionadas con los temas antes mencionados.

El curso se complementó con cuatro conferencias relacionadas. En la primera de ellas, a cargo de Mikel Bilbao (UPV-EHU) se describió la evolución de la enseñanza Matemática en el siglo XX. En la segunda, a cargo de Alicia Delibes (CIDE y UCM) se presentó la

situación de la misma en España y en los países de nuestro entorno. Santos González (Universidad de Oviedo) nos habló sobre la experiencia de su facultad de Ciencias con los nuevos planes de estudio de la Licenciatura de Matemáticas y las expectativas de trabajo que ésta está generando en los jóvenes licenciados. Enrique Zuazua (UCM) disertó sobre la ecuación de ondas desde un punto de vista histórico. Se celebraron, además, dos mesas redondas en torno a los temas: “Las matemáticas como profesión” y “La enseñanza de las Matemáticas”. En ellas participaron los profesores del curso, pero además contamos con la presencia de Concepción Fidalgo Benayas (IES Parque Aluche), Enrique Fernández Cara (Universidad de Sevilla y presidente de SEMA) y Tomás Recio (Universidad de Cantabria).

En este libro recogemos las notas de los cursos y conferencias, así como un breve resumen de las mesas redondas y de las conclusiones que entre todos los participantes se recogieron en torno a los problemas que plantea la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Es para nosotros una gran satisfacción ver que el esfuerzo que los profesores realizaron preparando las notas que constituyeron el material básico del curso, trasciende aquella semana de septiembre en el que se desarrolló, plasmándose en un libro al que muchos otros profesionales de las Matemáticas, educadores, científicos o público en general podrán acceder.

A pesar de tratarse de un curso que sólo duró una semana, han sido muchos los que con su colaboración y esfuerzo lo han hecho posible. Por ello queremos aquí testimoniar nuestro agradecimiento a todos los profesores, conferenciantes y participantes en las mesas redondas. Sirva como ejemplo del entusiasmo de todos ellos, que Gilbert Strang, Profesor del MIT y presidente de SIAM, para llegar a Santander tuvo que esquivar uno de los huracanes que ese verano azotaron la costa este de los Estados Unidos. A Alicia Delibes y Roberto Rodríguez hemos de agradecerles su generosa y siempre acertada ayuda y colaboración.

Cuando diseñamos este curso, lo hicimos convencidos de que se trataba de un enfoque adecuado y que contábamos con un excelente plantel de conferenciantes. Pero nos resultaba difícil calibrar la acogida que tendría entre los Profesores de Enseñanza Media a los que iba dirigido. Desde aquí queremos testimoniar nuestro

agradecimiento a los asistentes que, con su interés y participación activa, hicieron posible que el curso cubriese con creces nuestras expectativas.

Agradecemos también a José Luís Alejos, director del IES Augusto González de Linares, y a su Departamento de Informática el que nos permitieran utilizar las aulas y equipos informáticos de su instituto para desarrollar las sesiones prácticas de trabajo.

Por último, queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a la Subdirección General de Formación de Profesorado del MEC y a las autoridades de la UIMP por habernos concedido la oportunidad de organizar este curso.

Todos los que colaboraron en la UIMP, el Palacio de la Magdalena y el maravilloso entorno de la ciudad de Santander hicieron el resto.

Madrid, 14 de febrero del 2000.

María Victoria Pinillos Laffon (IES Isabel La Católica y UCM)  
y Enrique Zuazua Iriondo (UCM)



Asistentes al curso



# Análisis de Fourier: Historia y aplicaciones recientes

Javier Duoandikoetxea

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

A principios del siglo XIX, Fourier planteó el problema de la representación de una función en serie trigonométrica. El artículo hace un recorrido histórico por el desarrollo de la teoría hasta nuestros días y describe algunas aplicaciones del citado análisis en el mundo real.

## 1 Introducción

El punto de partida del Análisis de Fourier está en el problema de la representación de una función en serie trigonométrica planteado por Fourier a principios del siglo XIX. En los intentos de dar una respuesta convincente a este problema, se elaboraron y precisaron conceptos matemáticos básicos (función, integral, convergencia, sumabilidad) que tomaremos como motivo para hacer un recorrido histórico por el desarrollo de la teoría de las series de Fourier en el siglo XIX.

En el siglo XX la teoría tomó nuevos rumbos, encontró formas más generales y amplió el estudio a objetos distintos de los originales. Como consecuencia, tanto los conceptos como las técnicas han dejado de pertenecer a la Matemática elemental y requieren entrar en campos avanzados, fuera del alcance de estas notas. En su lugar he preferido describir en la segunda parte algunas aplicaciones del Análisis de Fourier a problemas del mundo real. Aunque no deja de ser una pequeña muestra de las posibilidades de las Matemáticas, espero que también sirva para convencer al lector, acostumbrado a la Matemática abstracta y teórica, de que ésta dice y tiene mucho que decir en el mundo tecnológico en que vivimos. Muchas veces no nos damos cuenta de que detrás del trabajo del físico, del ingeniero o de cualquier científico, puede haber una importante presencia

matemática que no debería quedar escondida. Por otra parte, si como ya indicara Fourier en el “discurso preliminar” de su libro de 1822, el estudio de la Naturaleza es fuente fecunda de problemas para los matemáticos, en las aplicaciones que mostramos queda claro cómo la Matemática, a la vez que aporta soluciones a situaciones prácticas, también se nutre de nuevos problemas que surgen en ellas.

## 2 Algunos conceptos del Análisis y su relación con las series de Fourier

Antoni Zygmund escribió en el prefacio de su famoso libro sobre series trigonométricas (1958):

Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por los matemáticos trabajando sobre series trigonométricas. Es concebible pensar que estos descubrimientos podían haber sido realizados en contextos diferentes, pero de hecho nacieron en conexión con la teoría de las series trigonométricas. No fue accidental que la noción de función aceptada ahora generalmente fuera formulada en la celebrada memoria de Dirichlet (1837) que trata de la convergencia de la serie de Fourier, o que la definición de integral de Riemann en su forma general apareciese en el *Habilitationsschrift* de Riemann sobre series trigonométricas, o que la teoría de conjuntos, uno de los desarrollos más importantes de las matemáticas del siglo XIX, fuera creada por Cantor en su intento de resolver el problema de los conjuntos de unicidad para series trigonométricas. En épocas más recientes, la integral de Lebesgue se desarrolló en estrecha conexión con la teoría de series de Fourier y la teoría de funciones generalizadas (distribuciones) con la de las integrales de Fourier.

Cuenta en un artículo posterior que un importante matemático le acusó de *imperialismo* por haber escrito estas palabras, ante esto se limitó a comentar que todos tenemos “un cierto sentido de posesión”.

Sin entrar en discusiones sobre los derechos de las distintas áreas de las Matemáticas en el desarrollo de los mencionados conceptos, el objeto de esta primera parte es el de presentar la evolución de los trabajos sobre series trigonométricas en el siglo XIX y su aportación a los conceptos clásicos del Análisis.

## 2.1 Las series de Fourier

Un biógrafo dice que Fourier fue sucesivamente “profesor, policía secreto, prisionero político, gobernador de Egipto, prefecto de Isère y de Rhône, amigo de Napoleón y secretario de la Academia de Ciencias”, lo que no es mal resumen para una sola vida. Nacido en Auxerre (Francia) en 1768, era profesor de la École Polytechnique cuando fue reclutado en 1798 para formar parte de la expedición de Napoleón a Egipto. A su vuelta fue nombrado prefecto de Isère y fue en su puesto de Grenoble donde volvió a sus investigaciones sobre el problema de la propagación del calor en los sólidos. Su *Mémoire de la propagation de la chaleur*, presentada en el Institut de France, en 1807 fue aceptada con críticas y el Instituto convocó su premio anual para 1811 sobre este tema. Fourier presentó una nueva memoria que ganó el premio aunque se seguía considerando deficiente en “generalidad y rigor”. Ninguna de las dos memorias fue publicada en su momento. Sin embargo, en 1822, el mismo año en que fue nombrado Secretario perpetuo de la Academia de Ciencias, publicó su obra definitiva, un libro que se ha convertido en un clásico y que tituló *Théorie analytique de la chaleur*. Sommerfeld calificó a este libro como “la Biblia de la Física matemática”. Fourier murió en 1830.

Su estudio de la ecuación del calor le condujo a escribir la solución en forma de una serie (de funciones) cuyos coeficientes numéricos venían dados por los que correspondían a la representación de una función (dato inicial) en serie trigonométrica. Concretamente, necesitaba poder escribir una función periódica de periodo  $2\pi$  en la forma

$$(1) \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Un primera cuestión que se nos presenta es: ¿qué valores deben tener las sucesiones de coeficientes  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ ? Fourier respondió a esta pregunta y dedujo que dada  $f$  debemos elegir

$$(2) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Una vez conocidos éstos, aparecen nuevas preguntas: ¿cuándo converge la serie?; si converge, ¿lo hace a  $f$  o a otra función?, etc.

Para algunas funciones particulares, Fourier calculó precisamente los coeficientes y estudió la convergencia. En general, se atrevió a asegurar que la representación (1) era válida para “toda” función periódica.

Durante mucho tiempo, el único tipo de convergencia considerado fue el que hoy llamamos convergencia puntual; la convergencia uniforme no se comprendió bien hasta el último tercio del siglo XIX y otros tipos de convergencia surgieron a principios del siglo XX. Para cada  $t$  se construye la sucesión

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(que llamamos *suma parcial N-ésima*) y se estudia su límite cuando  $N$  tiende a infinito.

Las fórmulas (2) para los coeficientes se suelen obtener fácilmente multiplicando los dos miembros de (1) por 1 (para  $a_0$ ), por  $\cos kt$  (para  $a_k$ ) y por  $\sin kt$  (para  $b_k$ ) e integrando en  $(-\pi, \pi)$ . Si aceptamos que la integral y el sumatorio se pueden intercambiar, los coeficientes salen aplicando las fórmulas

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt \, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq k, \\ \pi, & \text{si } n = k; \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin kt \, dt &= 0 \quad \text{para todos } n \text{ y } k. \end{aligned}$$

Este método aparece en el libro de Fourier, aunque después de otro procedimiento muy curioso en el que determina los coeficientes a través del desarrollo de  $f$  en serie de Taylor.

Si bien la representación de una función en serie trigonométrica se había considerado antes de Fourier, como veremos en la sección siguiente, nadie antes que él puso de manifiesto la correspondencia entre funciones y coeficientes

$$f \longleftrightarrow \{a_k, b_k\}$$

que leída en un sentido es un *análisis* (de  $f$  en sus componentes) y en el otro, es una *síntesis* (de  $f$  a partir de sus componentes).

La descomposición de  $f$  en sus componentes, su recuperación a partir de ellas, el que las relaciones (3) se llamen de *ortogonalidad*, nos recordará inmediatamente la geometría euclídea. Entrar en esta conexión, que nos llevaría a los primeros años del siglo XX, queda fuera del propósito de este texto pero es otra de las relaciones de las series de Fourier con conceptos fundamentales del Análisis (bases ortonormales en espacios de Hilbert).

## 2.2 Los precursores y el concepto de función

No fue Fourier el primero en plantearse la representación (1). Ya a mediados del siglo XVIII, la solución que Daniel Bernoulli dio al problema de la cuerda vibrante incluía una representación semejante. Pero, en este caso, la solución de Bernoulli “competía” con una propuesta de solución completamente distinta, debida a d’Alembert, en forma de suma de una onda que avanza y otra que retrocede, que se determinan según Euler a partir de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. Los tres personajes mencionados y, más tarde Laplace, intervinieron en una larga discusión sobre cuál de las propuestas era la más general posible. Ninguno de los demás se inclinaba a aceptar la propuesta de Bernoulli como suficientemente amplia y sólo los trabajos sobre las series de Fourier aclararon la situación con el tiempo.

El elemento que distorsionaba fuertemente la discusión era la noción de función. ¿Qué es una función? En aquel momento los matemáticos estaban dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula y las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. En cualquier caso, se entendía

(1) como una igualdad entre fórmulas y se veía en su lado derecho una “rigidez” que no podía ser equivalente a la generalidad del lado izquierdo. Hoy no tenemos problemas en aceptar que una función puede venir dada por una fórmula en un intervalo y extendida periódicamente fuera de él sin que allí la misma fórmula sea válida, pero hace doscientos años era complicado desligar una función de su fórmula y eso presentaba problemas de interpretación de la igualdad (1). Bernoulli, que había llegado a sus conclusiones por razonamientos físicos, defendía su generalidad sin dar argumentos convincentes.

La idea abstracta de función como correspondencia tardó todavía un tiempo en aparecer. Este tema nos propone una primera idea para meditar: los estudiantes parecen tener tendencia a quedarse con la noción de función del siglo XVIII y encuentran dificultades en entender el concepto general, ¿“justifica” el desarrollo histórico de la noción esta actitud?

No fueron estos trabajos y discusiones previas el punto de partida de Fourier. Él llegó más lejos y, además, partiendo de una ecuación menos “natural” para ello. Al menos parece que la idea de Bernoulli de superposición de ondas elementales está más ligada a las vibraciones que a la difusión del calor. Y es que Fourier no llegó a su representación a través de la intuición física sino a través de lo que hoy llamamos *método de separación de variables* para resolver ecuaciones en derivadas parciales, método que también hay que colocar en su haber.

### 2.3 Cauchy y la integral

Las fórmulas de los coeficientes contienen integrales. ¿Qué es la integral? Para Fourier la integral es el área encerrada por una curva en un intervalo y, por tanto, no hay dudas sobre la existencia de los coeficientes. Sin embargo, si la función es muy irregular la idea misma de área queda en entredicho. Pero este inconveniente, que estaría ligado a un concepto amplio de función, no afectaba a los ejemplos que Fourier manejó.

Los trabajos de Fourier fueron simultáneos con el intento de (r)establecer el rigor en Matemáticas de B. Bolzano (1781-1848) y A. L. Cauchy (1789-1857). Este último publicó en 1821 su *Cours d'Analyse (de l'École Polytechnique)* en cuya introducción se puede

leer:

En cuanto a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que se exige en geometría, de manera que no haya que recurrir nunca a razonamientos sacados de la generalidad del álgebra. Los razonamientos de este tipo, aunque admitidos comúnmente, sobre todo en el paso de las series convergentes a las series divergentes y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, me parece que no pueden ser considerados más que como inducciones apropiadas para hacer presentir a veces la verdad, pero que son poco acordes con la exactitud tan proclamada de las ciencias matemáticas.

Pretende que todos los conceptos estén definidos y que los razonamientos se basen en ellos, no en manipulaciones. Por primera vez encontramos en Cauchy la definición de la integral de una función (no en ese libro sino en su *Resumé des leçons* de 1823). La dio para una función continua en un intervalo y es

$$\lim (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

donde los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  forman una partición del intervalo y el límite se toma haciendo que la longitud de los intervalos de la partición tienda a cero. Para ser consistente con sus propósitos, Cauchy tuvo que probar que el límite existe para funciones continuas. Su prueba no fue del todo correcta, ya que utilizaba sin justificación el concepto de continuidad uniforme que fue desarrollándose precisamente a la vista de estas dificultades, aunque hizo falta tiempo para que los matemáticos lo comprendiesen y se familiarizasen con él. Una vez definida la integral pudo deducir el teorema fundamental del Cálculo y probar que derivando la integral resulta la función original.

Quizá alguien se sorprenda de ver atribuida a Cauchy la definición de integral que parece ser la que habitualmente llamamos de Riemann. Volveremos un poco más adelante sobre el tema al hablar de éste.

## 2.4 Dirichlet y la convergencia

P. Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue enviado por su padre a París en 1822 para estudiar Matemáticas en el lugar más adecuado del momento según su opinión. Allí se encontró con las series de Fourier como tema de moda por un lado y con los métodos rigurosos de Cauchy, por otro. Fue capaz de combinarlos para producir el primer teorema de convergencia para series de Fourier: *si la función  $f$  es acotada, continua a trozos y tiene un número finito de máximos y mínimos, la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f(x)$  en los puntos de continuidad y a  $(f(x+) + f(x-))/2$  en los de discontinuidad ( $f(x+)$  y  $f(x-)$  son los límites laterales).*

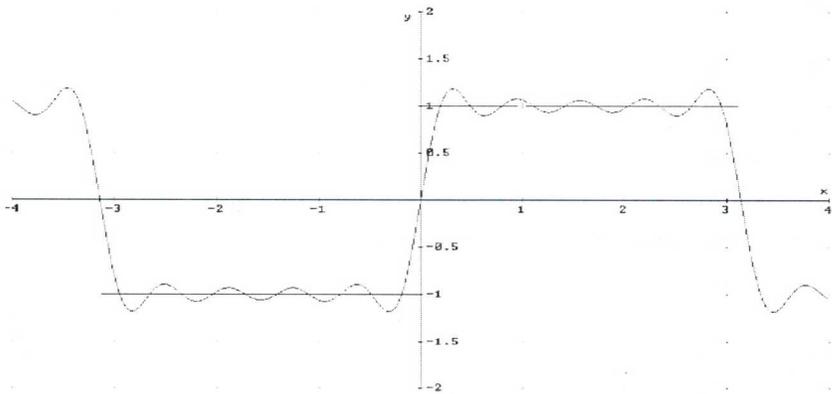


Figura 1: Función Salto. Suma Parcial de Fourier de orden 10

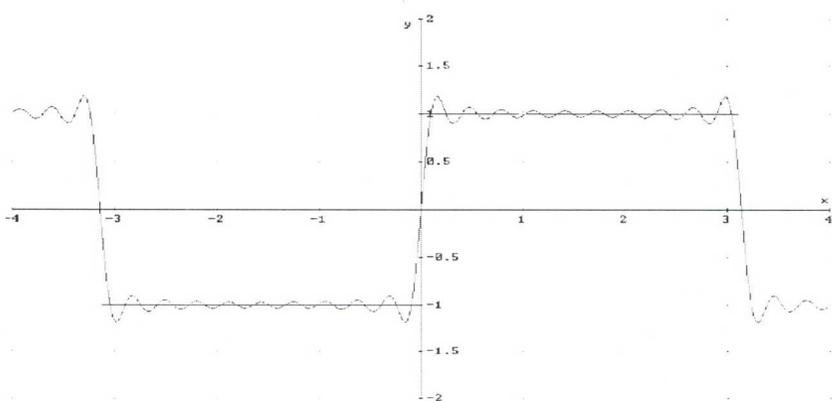


Figura 2: Función Salto. Suma Parcial de Fourier de orden 20

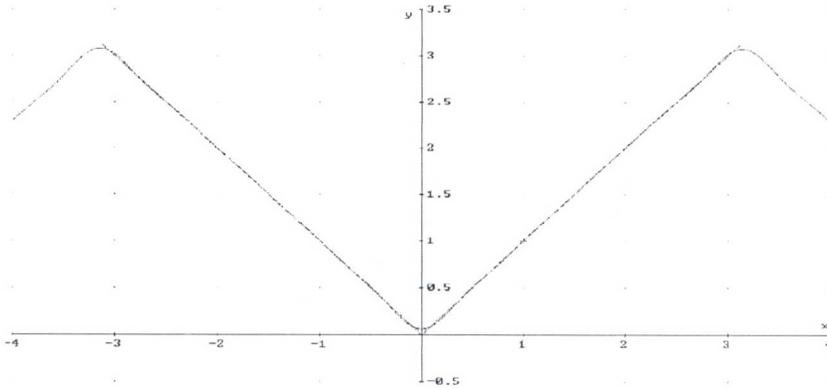


Figura 3: Función Valor Absoluto. Suma Parcial de Fourier de orden 10

Merece la pena resaltar algunos aspectos del trabajo de Dirichlet. En primer lugar, limita su propósito a una clase de funciones y no pretende probar un resultado para “todas” las funciones. Para ser riguroso necesita trabajar con funciones para las que tiene una definición de integral y para funciones acotadas continuas a trozos, la definición de Cauchy es suficiente. También dispone de una definición de límite en el libro de Cauchy. Escribe una representación integral de la suma parcial que seguimos usando hoy (introduciendo lo que llamamos el núcleo de Dirichlet) y la descompone en dos partes aplicando un razonamiento distinto a cada una de ellas (un *tour de force* en su tiempo en palabras de Kahane, aunque para nosotros hoy sea habitual este tipo de argumento). A partir de este momento se sabe que ciertas (muchas) funciones tienen series de Fourier convergentes y corresponde a otros ampliar la clase.

Dirichlet discute al final de su trabajo la posibilidad de un número infinito de discontinuidades o de extremos y encuentra la dificultad de la integral. Da una condición que considera necesaria e incluye el comentario siguiente:

Tenemos un ejemplo de una función que no cumple esta condición [de integrabilidad] si suponemos  $\varphi(x)$  igual a una constante determinada  $c$  cuando la variable  $x$  tiene un valor racional e igual a otra constante  $d$  cuando esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de  $x$  y, sin embargo, no se puede sustituir en la serie [de Fourier],

puesto que las diferentes integrales que entran en esta serie perderían todo su sentido en este caso.

Se considera que Dirichlet poseía una noción moderna de función como correspondencia, independiente de una representación analítica o geométrica. Muestra, además, los inconvenientes para extender la definición de integral de Cauchy proponiendo nuestro ejemplo habitual de función no integrable (en el sentido de Riemann). Y queda claro que para tal función hablar de área bajo una curva tampoco tiene sentido por el momento. Poner de manifiesto las dificultades es un primer paso para avanzar.

## 2.5 Riemann, su integral y las series trigonométricas

La producción matemática de G. B. Riemann (1826-1866), aunque poco abundante, es de una asombrosa calidad y cubre campos variados de la Matemática en los que abrió nuevos caminos. Su relación con el problema que nos ocupa la heredó de Dirichlet y constituye su memoria de habilitación de 1852 que llevaba como título *Sobre el desarrollo de una función en serie trigonométrica*. Tras hacer un repaso histórico del problema, empieza atacando el problema de la definición de la integral, para lo que necesita extender la noción de Cauchy. Parece necesitar una “disculpa” por este deseo de integrar más funciones y lo expresa así:

Cualquiera que sea nuestra ignorancia respecto a la manera según la cual las fuerzas y los estados de la materia varían con el tiempo y el lugar en lo infinitamente pequeño, podemos tener por seguro que las funciones a las que no son aplicables los resultados de Dirichlet no intervienen en los fenómenos naturales. Sin embargo, parece que estos casos no tratados por Dirichlet son dignos de atención por dos razones.

Primeramente, como señala el mismo Dirichlet al final de su trabajo, este tema está muy estrechamente relacionado con los principios del Cálculo infinitesimal, y puede servir para aportar mayor claridad y seguridad a

estos principios. Desde este punto de vista, su estudio tiene un interés inmediato.

En segundo lugar, la aparición de las series de Fourier no se limita a las investigaciones físicas, hoy día son aplicadas también con éxito en un dominio de las matemáticas puras, la teoría de los números, y parece que aquí son precisamente las funciones cuyo desarrollo en serie trigonométrica no ha sido estudiado por Dirichlet las que son importantes.

¿Cuál es la diferencia entre la definición de integral de Cauchy y la de Riemann? Planteada así la pregunta, la respuesta es que prácticamente ninguna. Porque lo que Riemann hace es proclamar como integrable a toda función para la que el límite propuesto por Cauchy existe y estudiar la clase de funciones resultante (las que hoy llamamos *integrables Riemann*). Consigue dar dos caracterizaciones basadas en la oscilación de la función y puede construir funciones integrables con un conjunto denso de discontinuidades, lo que no es fácilmente intuible. Podríamos decir que si bien Cauchy definió la integral, Riemann definió la clase de funciones integrables, lo que supone un mayor nivel de abstracción. Otra cuestión para meditar: ¿no sería conveniente en algún tipo de cursos y posiblemente en toda la enseñanza secundaria limitarse a explicar la definición de Cauchy de integral de funciones continuas a trozos, que son las que realmente vamos a manejar, y no entrar en la definición de la clase de funciones integrables?

En cuanto al problema de la representación de una función en serie trigonométrica, Riemann plantea una pregunta al revés: ¿qué propiedades tienen las sumas de las series trigonométricas? Porque sólo las funciones que las cumplan pueden ser representadas. Una vez más, Riemann propone el estudio de una clase de funciones que satisfacen una determinada propiedad. Tuvo la brillante idea de integrar dos veces la serie formalmente, lo que la hace uniformemente convergente (y da como suma una función continua) y aplicó después una especie de derivada segunda generalizada. Una explicación en un contexto moderno nos situaría en la teoría de distribuciones. Por otra parte, uno de sus resultados de convergencia es en realidad un resultado de sumabilidad, cuestión que se desarrolló para series divergentes al final del siglo.

No entraremos en detalles de los resultados anteriores y mencionaremos simplemente dos propiedades importantes de las series de Fourier que Riemann descubrió: (i) los coeficientes de Fourier de una función integrable (dados por (2)) tienden a cero; (ii) el comportamiento de la serie de Fourier en un punto sólo depende de los valores de la función en un entorno del punto (*principio de localización*). Esta última propiedad, que puede sorprender a primera vista, merece una reflexión: si cambiamos arbitrariamente los valores de la función fuera de un intervalo, los coeficientes de Fourier quedan alterados y, sin embargo, lo que Riemann probó es que el comportamiento de la serie de Fourier para valores de la variable en el intervalo no cambia (sigue siendo convergente y hacia el mismo límite donde ya lo era y diverge donde antes divergía).

## 2.6 Cantor y la unicidad

Georg Cantor (1845-1918) siguió con el estudio de las series trigonométricas iniciado por Riemann y probó que si dos series trigonométricas tienen el mismo límite en todo punto, sus coeficientes tienen que ser iguales.

Cuando la información sobre la convergencia no es en todo punto aparece el problema de la unicidad: si dos series trigonométricas convergen al mismo límite fuera de un subconjunto de  $(-\pi, \pi)$ , ¿están obligadas a tener el mismo límite dentro de él y, en consecuencia, los mismos coeficientes? La respuesta, obviamente, depende del conjunto y llamamos *conjuntos de unicidad* a aquéllos para los que la respuesta es positiva. Haciendo la diferencia de las dos series, la pregunta se puede plantear del modo siguiente: dado un conjunto  $E \subset (-\pi, \pi)$ , estudiar si siempre que una serie trigonométrica converge a cero en  $(-\pi, \pi) \setminus E$ , también converge a cero en  $E$ .

Cantor probó que los conjuntos de un solo punto son de unicidad (y, por tanto, los finitos) y después extendió el estudio a conjuntos infinitos. Pudo probar el resultado para los que tienen un único punto de acumulación (noción que definió él mismo) eliminando primero los puntos aislados para llegar a quedarse con un conjunto de un punto. Aplicando sucesivamente el proceso llegó a demostrarlo para conjuntos para los que al eliminar puntos aislados sucesivamente acaban siendo vacíos. Este proceso le condujo a

definir los conceptos básicos de la Topología de conjuntos y fue una de sus fuentes en el estudio de los conjuntos infinitos.

## 2.7 Du Bois-Reymond y un resultado negativo

Aunque el teorema de Dirichlet sólo se aplicaba a una determinada clase de funciones, parecía ser cuestión de tiempo que alguien probase que la serie de Fourier de una función continua convergía en todos los puntos hacia la función. Por ello resultó ser muy sorprendente el resultado de P. du Bois-Reymond de 1872: *existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto*.

La prueba de du Bois-Reymond es constructiva, igual que algunas modificaciones posteriores. Los potentes métodos del Análisis funcional que se desarrollaron en el primer tercio del siglo XX permiten ahora demostrar el mismo resultado con una prueba de existencia, no constructiva, a partir del teorema de Banach-Steinhaus (principio de acotación uniforme), que es la que se ve a menudo en los libros.

El efecto de este resultado negativo no se limitó a la sorpresa sino que cayó como un jarro de agua fría a la teoría general de las series de Fourier, se había conseguido una función continua (¡nada menos!) que no coincidía con la suma de su serie de Fourier. La propuesta de Fourier se tambaleaba pero Féjer encontró una salida.

## 2.8 Weierstrass y su función no diferenciable

Otro resultado que causó gran impacto en la misma época que el anterior fue la construcción por Weierstrass de una función continua sin derivada en ningún punto. La relación con el tema que tratamos está en que la función propuesta por Weierstrass viene dada por una serie trigonométrica que es la serie de Fourier de su suma. Como ejemplo nos sirve la función dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}.$$

El desarrollo del concepto de convergencia uniforme (y el ahora llamado test  $M$  de Weierstrass para series de funciones) permite construir con facilidad funciones continuas en forma de series; la continuidad de la función arriba indicada se deduce inmediatamente

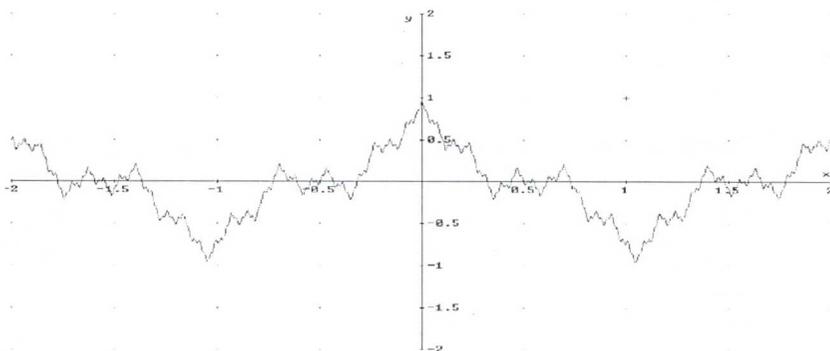


Figura 4: Función de Weierstrass. Suma Parcial de orden 5

de dicho test. Su derivada formal (término a término) conduce a una serie divergente, aunque esto no es argumento suficiente para concluir la no diferenciabilidad.

Un aspecto que me gustaría resaltar en este apartado, y que creo que no se explica con claridad en los cursos de Análisis, es el papel de sucesiones y series como definición de funciones (o de números en el caso de series numéricas). Aquí no se trata de representar por una serie una función dada de una determinada manera, sino que es la propia serie la que define a la función. Esto es algo que ya tenían claro matemáticos como Riemann o Weierstrass. Los ejemplos de funciones integrables con muchas discontinuidades que Riemann construyó tienen forma de series. Incluso se le atribuye (así lo afirma du Bois-Reymond) la propuesta de la función dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$$

como función continua sin derivada (se tardó más de cien años en probar que hay algunos puntos en los que sí es derivable). Si reflexionamos un poco, nos daremos cuenta de que no sólo funciones, sino incluso números reales, vienen a menudo definidos por una sucesión o serie (¿qué es el número  $e$ ?, ¿qué es el desarrollo decimal de un número?).

## 2.9 Féjer y la sumabilidad

Hemos intentado recuperar la función a partir de sus coeficientes de Fourier haciendo el límite de las sumas parciales de la serie y du Bois-Reymond ha descubierto que es un método que no siempre funciona bien. ¿Se puede intentar de otro modo? Un joven húngaro de 20 años, L. Féjer, publicó en 1900 un resultado que devolvió su valor al programa de Fourier a condición de modificar la forma de hacer la síntesis.

Era bien conocido que si una sucesión converge, las medias aritméticas de sus términos también convergen y, además, al mismo límite. Pero hay sucesiones que no convergen y sí lo hacen sus medias aritméticas. Lo mismo ocurrirá, por tanto, con las series y, por ejemplo, mientras las sumas parciales de  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  no tienen límite, sus promedios tienden a  $1/2$ . ¿Ganamos algo con asignar este valor a la serie o es un puro capricho?

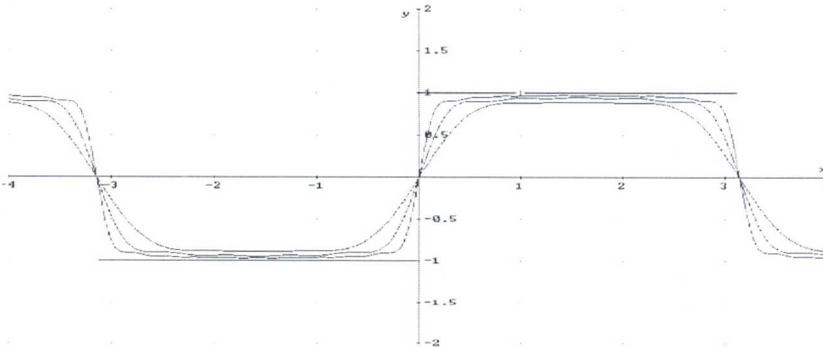


Figura 5: Función Salto. Sumas Parciales de Fejér de orden 5, 10 y 20

Féjer aplicó el procedimiento de hacer el límite de los promedios de las sumas parciales a las series de Fourier con la seguridad de que aquéllas, para las que ya había convergencia, no se iban a ver afectadas. Su éxito fue que la magia perdida volvió: *las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función continua siempre convergen a la función* (uniformemente además). Así que a partir de los coeficientes de Fourier tenemos un método seguro de recuperar funciones continuas, la síntesis es posible para ellas.

La asignación a una serie de un valor *suma* por procedimien-

tos distintos del de hacer el límite de sus sumas parciales es lo que llamamos un *método de sumabilidad*. Hay otros además del mencionado que también dan buen resultado en las series de Fourier; uno de ellos, propuesto por Poisson ya en 1820, no había podido ser apreciado en su tiempo a falta de una clara distinción entre convergencia y divergencia.

En el terreno de los conceptos matemáticos, una enseñanza que podemos sacar de estos resultados es que no hay una única manera de *sumar* una serie y que una serie divergente puede contener información recuperable por métodos de sumabilidad. No es extraño que ochenta años después de que Cauchy escribiese en la introducción de su *Cours d'Analyse* que “una serie divergente no tiene suma” y Abel que “las series divergentes son en general una invención diabólica y es vergonzoso que se pretenda fundar sobre ellas demostración alguna”, publicase E. Borel sus *Leçons sur les séries divergentes* (1901), todo un libro sobre series para las que parecía que no había nada sensato que decir.

## 2.10 La entrada al siglo XX

Las series de Fourier atravesaron el siglo XIX como un tema estrella en las Matemáticas. El siglo XX les trajo nuevos rumbos.

Para empezar, la nueva definición de integral dada por Lebesgue (publicada en 1902), amplió la clase de funciones para las que se podían estudiar las series de Fourier lo que hizo el propio Lebesgue inmediatamente. Aparecieron en escena distintos espacios (métricos) y las nociones de distancia asociadas a ellos permitieron considerar a su vez distintos tipos de convergencia. El estudio de las cuestiones de convergencia y sumabilidad de las series de Fourier empezaba de nuevo en estos espacios y duró algún tiempo, con resultados positivos y negativos. El desarrollo de la teoría de lo que luego han sido los espacios de Hilbert dio al sistema trigonométrico un marco en el que encontró un sentido como base (hilbertiana) del espacio que llamamos  $L^2(-\pi, \pi)$ , que no hay que confundir con una base algebraica del espacio vectorial ya que en éstas sólo podemos usar combinaciones lineales, es decir, sumas finitas y no series.

Por otro lado, sabemos que la serie de Fourier de una función continua puede diverger en un punto pero ¿cómo de grande puede ser el conjunto de divergencia? Para medir el tamaño del conjunto

(asignándole una longitud) tenemos ahora con Lebesgue la teoría de la medida de conjuntos de la recta. Un conjunto se dice que tiene *medida cero* si se puede recubrir con (una sucesión de) intervalos cuya suma de longitudes es tan pequeña como se quiera, ¿ocurrirá que el conjunto de divergencia es de medida cero? Se necesitaron dos tercios de siglo para responder que sí (L. Carleson, 1966).

Actualmente, podemos considerar que la mayoría de las cuestiones relacionadas con las series de Fourier de una variable se han resuelto, pero sus equivalentes en varias variables presentan todavía bastantes problemas abiertos.

## 2.11 Algunas lecturas

Hay libros de Análisis de una y varias variables que exponen en un capítulo los resultados sobre series de Fourier que hemos mencionado; un par de referencias pueden ser

T. M. APOSTOL, *Análisis matemático*, 2ª edición, Reverté, 1988 (capítulo 11: *Series de Fourier e integrales de Fourier*);

J. E. MARSDEN y M. J. HOFFMAN, *Análisis clásico elemental*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1998 (capítulo 10: *Análisis de Fourier*).

El desarrollo histórico se puede encontrar en

I. GRATAN-GUINNESS (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Alianza Universidad 387, Madrid, 1984.

Un extenso y excelente libro sobre historia de la matemática se publicó en castellano en una edición en tres tomos:

M. KLINE, *El pensamiento matemático de la Antigüedad hasta nuestros días*, Alianza Universidad 715, 724 y 729, 1992.

(A pesar del título la historia no llega más que hasta el primer tercio del siglo XX, aproximadamente, pero es suficiente para el periodo tratado aquí.)

Un libro de fácil e interesante lectura, cuyo objetivo es el estudio histórico de los conceptos elementales del cálculo y, por tanto, sólo llega hasta la integral de Riemann (y no contiene mucha información sobre series de Fourier), es el siguiente:

A. J. DURAN, *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad 861, Madrid, 1996. Citaré a continuación algunas referencias que no están en castellano. El mejor texto

histórico sobre series de Fourier, debido a Kahane, es la primera mitad del libro

J. P. KAHANE y P. G. LEMARIE-RIEUSSET, *Fourier series and wavelets*, Gordon and Breach, 1995; en francés, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1999.

Hay un libro antiguo muy bueno que trabaja fundamentalmente con la integral de Riemann y contiene una introducción histórica que incluye los resultados del siglo XIX (y tiene la ventaja de encontrarse en una edición barata de Dover):

H. S. CARSLAW, *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, tercera edición, Dover, 1950.

Sobre la influencia del estudio de las series de Fourier en el desarrollo del Análisis hay un interesante artículo: E. A. GONZALEZ-VELASCO, *Connections in mathematical analysis: the case of Fourier series*, Amer. Math. Monthly 99 (1992), 427-441.

Sobre el concepto de función y su relación con las series de Fourier merece la pena leer

N. LUZIN, *Function: Part I*, Amer. Math. Monthly 105 (1998), 59-67; *Part II*, 263-270.

La obra original de Fourier se encuentra en edición facsímil:

J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, París, 1988.

(Hay una traducción en castellano, que no sé si se puede encontrar ahora, de la E. T. S. de Arquitectura de Madrid.)

En el libro *Grandes matemáticos* de la colección Temas de Investigación y Ciencia, nº 1, se encuentra el artículo *Jean-Baptiste Fourier* de R. Bracewell con comentarios sobre su vida y algunas aplicaciones del análisis de Fourier.

**NOTA:** Las gráficas que aparecen en este artículo han sido generadas utilizando el programa DERIVE, ver el artículo *Matemáticas en el Aula de Informática* de R. Rodríguez Del Río, en este mismo libro.

### 3 El Análisis de Fourier y el Mundo Real

#### 3.1 La transformada de Fourier

En la primera parte nos hemos limitado a considerar las series de Fourier, que vienen asociadas a funciones periódicas. Cuando el periodo es  $2\pi$  tienen la forma allí descrita y cuando el periodo es  $\ell$  se escriben como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi k}{\ell} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{\ell} t \right).$$

Para cada  $k$  fijo aparecen dos funciones  $\sin kt$  y  $\cos kt$  que en realidad son una misma desplazada ( $\sin kt = \cos(kt - \pi/2)$ ). Si escribimos

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \cos \phi_k = \frac{a_k}{A_k} \quad \text{y} \quad \sin \phi_k = \frac{b_k}{A_k},$$

la serie toma la forma

$$(4) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} t - \phi_k\right).$$

$|A_k|$  es el valor máximo del término de lugar  $k$  y se llama *amplitud* y  $\phi_k$  es el desplazamiento de la función y se llama *fase*. El periodo es  $\ell/k$  y su inverso,  $k/\ell$ , es la frecuencia. Podemos observar que hay una primera frecuencia fundamental que es  $1/\ell$  y las demás son múltiplos enteros de ella.

Cuando el periodo de la función tiende a infinito, la frecuencia fundamental tiende a cero. ¿Hay alguna representación semejante para funciones definidas en la recta real? La respuesta es que sí, pero ahora las frecuencias no forman un conjunto discreto sino que todas son posibles, en lugar de asociar a cada función una sucesión se le asocia otra función y la síntesis no se hace sumando una serie sino por medio de una integral. Por comodidad es preferible usar expresiones con valores complejos basándonos en la fórmula

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Sea  $f$  una función integrable en  $\mathbf{R}$ , definimos su *transformada de Fourier* como la función

$$(5) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt.$$

(Hay distintas convenciones en la definición, la principal variante está en el uso o no del factor  $2\pi$  en el exponente de las funciones básicas. Incluirlo tiene la ventaja de que no se necesitan factores delante de la integral en la fórmula de inversión.) Para obtener  $f$  a partir de  $\hat{f}$  hay que hacer

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi$$

que es prácticamente otra transformada de Fourier (es la transformada de Fourier de  $\hat{f}$  evaluada en  $-x$ ). Por supuesto, la validez de tal representación necesita condiciones sobre las funciones y conduce a una discusión semejante a la que hemos mencionado en la primera parte para las series pero en la que ahora no vamos a entrar.

Por otra parte, se puede pensar en extender a funciones de varias variables los resultados anteriores. Mencionemos simplemente que, en este caso, la transformada de Fourier se sigue definiendo a través de una integral como la de (5) con la diferencia de que se integra en  $\mathbf{R}^n$  y se sustituye el producto  $t\xi$  del exponente por  $t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n$ .

### 3.2 Difracción de ondas y cristalografía

La difracción es la distorsión de una onda por un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda. Es un fenómeno que no observamos habitualmente a simple vista en el caso de la luz porque los objetos interpuestos son mucho mayores que su longitud de onda ( $5 \times 10^{-7}$  m. aproximadamente).

Si tenemos un haz de luz monocromática (es decir, con una única frecuencia), colocamos un obstáculo con una rendija en su camino y una pantalla en la parte posterior, veremos aparecer sobre ésta una cierta imagen. La imagen no es simplemente la proyección de la rendija sobre el fondo, como parecería corresponder a una simple propagación geométrica de la luz en línea recta. Cuando la rendija tiene un tamaño comparable a la longitud de onda de la luz y la pantalla está a “gran distancia”, la figura que se observa es una

figura de difracción que se suele llamar a veces *transformada óptica*. Para una abertura circular la imagen resultante es un círculo central iluminado, rodeado de anillos alternativamente oscuros y brillantes, en los que la iluminación decrece rápidamente a medida que nos alejamos del centro. ¿Cuál es la explicación de este fenómeno?

La búsqueda de una explicación para este y otros fenómenos que ocurren en la propagación de la luz ha ido ligada a la discusión sobre su naturaleza ondulatoria o corpuscular. En 1818 (la misma época de los trabajos de Fourier), la Academia de Ciencias de París propuso para su premio anual el modelo de la difracción. El ganador del premio fue A. J. Fresnel (*Mémoire sur la diffraction de la lumière*, publicado en 1826) con un tratamiento ondulatorio que, como ya había ocurrido con el trabajo de Fourier en 1811, no se libró de ciertas discusiones en el jurado. Uno de los miembros de éste, Arago, que ya había colaborado anteriormente con Fresnel, construyó un dispositivo (que todavía se conserva) para convencer a otro, Poisson, de que la predicción teórica era correcta.

El modelo matemático del fenómeno fue propuesto por G. Kirchhoff en 1882 y muestra que lo que vemos en la transformada óptica es la transformada de Fourier de una función de dos variables, la función característica de la rendija. Esto explica la existencia de las zonas claras y oscuras alternas; se puede pensar en una función sinusoidal, que va pasando por máximos y por ceros y, que va multiplicada por una función decreciente que hace que la intensidad luminosa de los máximos vaya disminuyendo.

Este modelo de difracción se suele llamar *difracción de Fraunhofer*. Josef Fraunhofer (1787-1826) fue un estudioso del espectro solar. Para ello construyó redes de difracción, que consisten en colocar un sistema de muchas rendijas paralelas y hacer pasar la onda a través de ellas. Fraunhofer las produjo con alambres muy finos al principio, y grabando líneas paralelas en una lámina de vidrio después, que le permitieron determinar longitudes de onda de las líneas oscuras del espectro solar. Fue un pionero de la espectroscopía, que tardó aún varios años en llegar.

Igual que con la luz visible podemos pensar en la existencia de fenómenos de difracción para otras ondas. Los rayos X fueron descubiertos en 1895 por W. C. Röntgen (1845-1923). Aunque algunas de sus propiedades, como las de atravesar ciertos cuerpos opacos, fueron descubiertas rápidamente, no se comprendió bien su natu-

raleza ya que no se pudo observar ni su reflexión ni su refracción, los fenómenos más sencillos de detectar para las ondas luminosas. ¿Se podía producir su difracción? Ante la hipótesis de que fuesen radiaciones con longitud de onda mucho más pequeña que la de la luz, Max von Laue (1879-1960) tuvo en 1912 la brillante idea de utilizar como redes de difracción los átomos de los cristales, lo que efectivamente funcionó como comprobaron poco después Frederich y Knipping. Esto confirmó la hipótesis y le valió a von Laue el premio Nobel en 1914. A partir de entonces surgió una espectroscopía de rayos X y W. H. Bragg y su hijo W. L. Bragg la utilizaron inmediatamente para determinar la estructura cristalográfica de sólidos, por lo que recibieron el premio Nobel en 1915.

Tenemos, por tanto, la presencia de la transformada de Fourier en el modelo de la difracción y una aplicación práctica en el caso de los cristales. Parece que sólo nos queda invertir el resultado de la difracción para reconocer el cristal. La transformada óptica se puede invertir utilizando dos lentes colocadas convenientemente y recogiendo la imagen en una pantalla situada en el plano focal de la segunda. Es como hacer dos veces la transformada de Fourier y la imagen recuperada está girada  $180^\circ$  con respecto a la original. No se puede aplicar a los rayos X un método similar porque no hay manera de concentrarlos con una lente.

Nos queda la posibilidad de medir la transformada de Fourier e invertirla matemáticamente y resulta que nos encontramos entonces con el *problema de la fase*: la medición del espectro de difracción proporciona información sobre el módulo de la transformada de Fourier pero no da las fases, de modo que no podemos invertirla. Mirando a la serie (4) es como si conociésemos el módulo de  $A_k$  pero nada sobre  $\phi_k$ . Si a pesar de todo podemos conocer la estructura del cristal, es porque tenemos información complementaria sobre el objeto del que estamos haciendo la transformada, sabemos que corresponde a una distribución periódica de masas. Los llamados métodos directos de la cristalografía utilizan argumentos probabilísticos para asignar fases y recuperar la estructura. El premio Nobel de Química de 1985 fue otorgado a Hauptman y Karle por haber desarrollado un nuevo método para solucionar el problema de la fase. Las matemáticas presentes en su solución son de alto nivel: teorema de equidistribución de Weyl, teorema del límite central y trabajos de Toeplitz sobre series de Fourier de funciones no

negativas.

El matemático inglés T. W. Körner escribe en su libro *Fourier Analysis*:

Si las transformadas de Fourier no hubieran existido en otro lado en Física, la naturaleza ondulatoria de la luz habría forzado al óptico y al cristalógrafo a inventarlas.

### 3.3 Tomografía axial computerizada

El uso médico de los rayos X en forma de radiografías se remonta a poco después de su descubrimiento. En años recientes se ha desarrollado una técnica que también utiliza rayos X, pero es completamente distinta. Consiste en obtener imágenes de secciones planas próximas entre sí. Es lo que se llama la tomografía axial computerizada (TAC) o *escáner*.

La idea matemática en la que se basa esta técnica proviene de un resultado de Johann Radon (1887-1956). Radon fue un matemático austriaco que, en un artículo publicado en 1917, se ocupó del problema de la recuperación de una función plana a partir de sus integrales sobre líneas rectas. Supongamos que de una función  $f(x, y)$  definida en el plano conocemos los valores de las integrales sobre todas las rectas del plano. ¿Caracterizan estos valores a  $f$ ? Dicho de otro modo, para dos funciones distintas ¿hay siempre una línea sobre la que las integrales son distintas? Por supuesto que cambiando el valor de la función en un único punto las integrales no varían, pero hablamos de funciones esencialmente diferentes. La respuesta de Radon es que la función queda caracterizada y, más aún, se puede dar una fórmula para recuperarla, una fórmula de inversión. En su deducción hizo intervenir la transformada de Fourier.

Estamos asociando a cada función  $f$  su *transformada de Radon*, una función  $F(\theta, s)$  donde  $\theta$  es la dirección de la recta y  $s$  la distancia al origen, por ejemplo. La situación es parecida a la de Fourier, aunque con distintos objetos. Queremos invertir el proceso y obtener  $f$  conociendo  $F$ , para lo que disponemos de la fórmula dada por Radon.

Un ejemplo sencillo puede ser el siguiente: imaginemos un conjunto plano con dos agujeros en su interior; según el teorema de

Radon, si conocemos la longitud de las intersecciones de todas las rectas del plano con el conjunto podemos determinar la forma exacta del borde externo y de los agujeros y su situación. Ahora la función de que habla el enunciado sería la que vale 1 dentro del conjunto y 0 sobre los agujeros y en el exterior; la integral de esta función sobre una recta equivale a medir la longitud de la sección de la recta con el conjunto. Nosotros vemos el conjunto desde fuera, pero si hubiese un modo de medir esas longitudes “sin levantar la cabeza del plano” podríamos reconocer los agujeros sin verlos. Esta es la idea que aparece en la aplicación práctica que da lugar a la tomografía axial computerizada.

El trabajo de Radon quedó olvidado durante un tiempo hasta que fue recuperado en el estudio de algunas ecuaciones en derivadas parciales. Pero, para la aplicación que nos ocupa, la observación crucial se debe a Allan Cormack quien pensó que podía servir para ver lo invisible, una sección plana interna del cuerpo humano. ¿Qué es lo que va a medir la integral a lo largo de una línea? Aquí es donde interviene la idea que Cormack expuso en un par de trabajos en 1963 y 1964 basada una propiedad de los rayos X: se propagan en línea recta y pierden intensidad proporcionalmente a la intensidad misma, la distancia recorrida y la densidad del medio atravesado. Un cálculo matemático muestra que midiendo la intensidad de entrada y de salida de los rayos se puede calcular la integral de la densidad. Esta información viene a ser la transformada de Radon y aparentemente sólo queda aplicar la fórmula de inversión.

Es una brillante idea, pero quedan muchas cosas por resolver. Una y muy importante, conseguir que al trabajar con aproximaciones el resultado sea fiable. Porque si hablamos del mundo real no vamos a poder construir la transformada de Radon, que necesita una información infinita, hay que contentarse con medir en un número finito de rectas. También la fórmula de inversión de Radon, que viene dada por una integral, tiene que ser discretizada. Aparecen así nuevos problemas relacionados con el Análisis numérico. Para su uso práctico falta todavía la construcción de una máquina que realice el trabajo de medir las intensidades necesarias y que, a partir de los datos obtenidos, construya una imagen de lo que queremos ver. La primera máquina fue construida en 1971 por G.Ñ. Hounsfield a quien se concedió el premio Nobel de Medicina de 1979, conjuntamente con Cormack. Originalmente se elegían

unas cuantas direcciones y varias líneas paralelas en cada una de ellas. Después se cambió el procedimiento y se trabaja enviando haces de rayos desde varios puntos.

Si la Matemática había provisto la idea básica fundamental, su aportación no terminó ahí, sino que la aplicación práctica, a su vez, presentó nuevos problemas a los que hubo que dar respuesta. Aparecieron cantidad de trabajos matemáticos (y otros) sobre las posibilidades y limitaciones del sistema. El desarrollo de métodos matemáticos y físicos en la Medicina sigue siendo un tema de mucho interés, ya que está presente en todos los procesos de obtención de imágenes (distintos tipos de tomografía, resonancia magnética nuclear, ultrasonidos, etc.).

### 3.4 Tratamiento de señales y ondículas

En su modelo matemático, una señal es una función. En el mundo real hay montones de cosas que son señales: el sonido y la imagen, por ejemplo, pueden ser las más evidentes y están presentes cada vez más en la vida moderna.

Lo que la transformada de Fourier nos dice es cuánto de cada frecuencia tiene la señal, que se reconstruye a partir de esa información con una integral (una serie si la señal es periódica). Pero en la práctica, el propio análisis en frecuencias es útil.

Una primera observación es que las señales no se pueden localizar simultáneamente en tiempo (su variable original) y en frecuencia. Matemáticamente, una señal que dura un tiempo muy pequeño tiene que tener un rango infinito de frecuencias y, del mismo modo, una señal con un rango finito de frecuencias dura un tiempo infinito. Una expresión cuantitativa de esta propiedad es lo que se conoce como *principio de indeterminación* y dice que

$$\left( \int (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \frac{1}{8\pi^2} \int |f(t)|^2 dt.$$

Los términos de la izquierda miden, en cierto modo, la concentración de  $f$  alrededor de  $t_0$  y la de  $\hat{f}$  alrededor de  $\xi_0$ . Si  $f$  está soportada cerca de un punto  $t_0$  podemos hacer pequeño el primer factor, pero entonces tiene que ser grande el segundo y  $\hat{f}$  no puede estar concentrada cerca de ningún  $\xi_0$ . (Una interpretación similar con posiciones para  $f$  y momentos para  $\hat{f}$  es el modelo del principio de indeterminación de la Mecánica Cuántica.)

Pero hemos dicho en el párrafo anterior “matemáticamente” para indicar que en el mundo real no es exactamente cierto que las señales tengan duración infinita o una gama infinita de frecuencias. A pesar de esto, es cierto que el modelo matemático da explicaciones adecuadas.

¿Qué queremos hacer con una señal? Pues, por ejemplo, registrarla, transmitirla, quizá transformarla, recuperarla, etc. Cuanto mejor conozcamos su estructura (matemática) mejor podremos trabajar con ella.

### 3.5 Señales de banda limitada

Si tomamos una señal sonora, puesto que el oído humano sólo puede reconocer un cierto rango de frecuencias, éstas serán las que hay que registrar y transmitir. Una función cuyas frecuencias están contenidas en un intervalo  $[-A, A]$  se llama de *banda limitada*. ¿Tenemos alguna ventaja sabiendo que una señal es de banda limitada? Hay un hermoso resultado de Claude Shannon (1916- ), de 1948, que dice que basta registrar la señal a intervalos regulares a distancia  $1/2A$  para reconstruirla. Shannon trabajaba en ese momento para los Laboratorios Bell de AT&T.

El resultado de Shannon se expresa matemáticamente del modo siguiente:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2A}\right) \frac{\sin 2\pi(tA - k)}{2\pi(tA - k)}.$$

Su prueba es extraordinariamente simple y sus consecuencias realmente importantes. Se suele llamar *teorema de muestreo* porque indica la distancia a la que se deben tomar las muestras de  $f$  para conocerla completamente. Como se ve, la propiedad de banda limitada impone una fuerte restricción a la función, ya que sus valores en una sucesión son suficientes para tenerla completa. La fórmula de Shannon no es otra cosa que una fórmula de representación en la que escribimos la función como suma de una serie de funciones (en lugar de una representación integral). Además, conviene notar que las funciones básicas que se utilizan en la representación son modificaciones por dilatación y traslación de una única función que es  $\sin t/t$ . Por buscarle algún inconveniente, la función  $\sin t/t$  no está bien localizada alrededor de cero, no decrece rápidamente. (Aunque se podría pensar que hay que exigir a la función original

que sea continua para evaluarla en los puntos de la muestra, el ser de banda limitada le impone una condición mucho más fuerte, es  $\mathcal{C}^\infty$ .)

¿Qué ocurre si se toman las muestras más próximas o más lejanas de lo que el resultado exige? Es de imaginar que si son más próximas se tenga más información y así es. Ese exceso sirve para reconstruir la función a partir de funciones básicas mejores que  $\sin t/t$ , lo que permite obtener buenas aproximaciones de la señal con menos sumandos de la serie. Tomar menos muestras de las necesarias es peor; la función reconstruida tiene menos frecuencias que la original y hay una superposición en las frecuencias altas.

La integral de  $f^2$  en  $\mathbf{R}$  (que coincide con la de  $\hat{f}^2$  según el famoso teorema de Plancherel) mide la energía de la señal. Con las cantidades

$$\alpha^2(T) = \frac{\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad \text{y} \quad \beta^2(A) = \frac{\int_{-A}^A |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi}$$

estamos midiendo la proporción de energía de la señal concentrada en el intervalo de tiempo  $[-T, T]$  o en el rango de frecuencias  $[-A, A]$ , respectivamente. El que la función y su transformada de Fourier no puedan estar simultáneamente soportadas en sendos intervalos finitos, implica que dada una función  $f$  los números  $\alpha(T)$  y  $\beta(A)$  no pueden ser ambos iguales a 1. De hecho, una manera natural de medir la indeterminación de una señal en términos de energía es calcular el producto  $\alpha(T)\beta(A)$ . Surgen además preguntas como la siguiente: ¿cuáles son las señales de banda limitada ( $\beta(A) = 1$ ) que maximizan  $\alpha(T)$  para un  $T$  fijo? Son cuestiones sobre las que se trabajó en los años sesenta y dieron origen a la aparición de las llamadas *ondas esféricas prolatas*.

Pero si hay algo que podemos achacar a la representación de Fourier es, precisamente, su falta de localización. Cualquier frecuencia puede aparecer porque toda la señal, presente y futura, interviene en el cálculo de la transformada. La idea más sencilla de localizar consiste en cortar la función en un intervalo, es decir, hacerla cero fuera de él. Moviendo el intervalo a otro lugar, estudiamos otro trozo de la función y así sucesivamente. Se llama el *método de la ventana deslizante*. Tal como lo hemos planteado, tiene el inconveniente de que la función que interviene afectando a la original es otra vez  $\sin t/t$  como en el teorema de Shannon. Pero

podemos utilizar ventanas que no corten tan bruscamente y tengan más suavidad. D. Gabor utilizó este método en los años cuarenta trabajando con ventanas gaussianas (que no son funciones de soporte compacto pero decaen tan rápidamente que son casi nulas fuera de un intervalo). Además, Gabor dio fórmulas de reconstrucción de la función a partir de las transformadas de Fourier de sus cortes por las ventanas. En 1971 recibió el premio Nobel de Física por su descubrimiento de la holografía.

### 3.6 Cómo hacer cálculos efectivos

Una vez más la transición al mundo real impone exigencias: los datos que se recogen y que se pueden almacenar son finitos, los cálculos son aproximados, reducir el tiempo empleado en realizarlos es importante. El primer paso consistió en trabajar con una *transformada discreta de Fourier* (sumas finitas) cuyos valores se determinan a través de un sistema de ecuaciones lineales. El álgebra lineal entra en juego y los métodos numéricos para resolver sistemas pasan a ser un instrumento básico.

En 1965 aparece un famoso algoritmo de James Cooley y John Tuckey, la *transformada rápida de Fourier* o FFT (de “fast Fourier transform”). El número de cálculos necesarios para hacer la transformada de Fourier discreta de una señal de  $N$  valores se reduce con la FFT del orden de  $N^2$  a  $N \log N$ , lo que es una ganancia muy importante cuando  $N$  es grande, tanto, que se afirma que la rapidez en estos cálculos debe más a la FFT que a la mejora de los ordenadores. Es curioso constatar que las ideas algebraicas presentes en el algoritmo FFT se pueden remontar a Gauss, lo que permite afirmar a Körner que era “una solución en busca de un problema”, ya que su importancia (el “problema”) sólo se entiende en el terreno de los cálculos con ordenador.

La aparición de la transformada de Fourier rápida, con su reducción de tiempo de cálculo, incrementó enormemente el campo de aplicaciones prácticas del Análisis de Fourier; el libro *The Fast Fourier Transform and its Applications* de E. Oran Brigham presenta una abrumadora lista con diez entradas principales y más de setenta secundarias. Gilbert Strang afirma que “industrias enteras han pasado de lentas a rápidas gracias a esta única idea, que pertenece a la matemática pura”. Sin embargo, también conviene

indicar que la eficacia de la FFT ha confundido, a veces, a los usuarios y ha hecho que se utilice en problemas para los que el análisis de Fourier no es el instrumento adecuado.

### 3.7 Las ondículas

En los últimos años ha irrumpido en el estudio de señales y otros fenómenos el *análisis por ondículas* (término que se está utilizando en castellano por el original francés *ondelette* y su forma inglesa *wavelet*). Se puede decir que surgió a partir de una idea del ingeniero geofísico francés Jean Morlet, a quien se unió primero el físico Alex Grossman y luego el matemático Yves Meyer. En cierto modo, la descomposición de Morlet es una variante del método de ventanas pero tiene importantes diferencias con éste. Por su parte, los matemáticos reconocieron una fórmula de reproducción debida a A. P. Calderón. A medida que la teoría se iba desarrollando, se comprendió que se estaba creando un marco en el que tenían cabida ideas que se habían utilizado previamente en matemáticas, física e ingeniería a lo largo del tiempo y sin aparente conexión entre sí. La intervención de un joven investigador de 23 años, Stéphane Mallat, fue crucial en esta unificación.

Las funciones trigonométricas ceden su puesto, como ondas elementales del análisis, a otras más apropiadas a los objetivos buscados, en particular a la localización en tiempo y frecuencia. Hay curiosamente un ejemplo de 1910, las *funciones de Haar*, que son una muestra de lo que se pretende hacer.

Consideremos la función  $h_1(t) = 1$  si  $t \in (0, 1/2)$  y  $h_1(t) = -1$  si  $t \in (1/2, 1)$ . Para obtener el sistema de Haar dilatamos y trasladamos la función de modo que  $h_{j,k}(t) = h_1(2^j t - k)$  para  $j$  entero positivo y  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ . Es decir, la función  $h_{j,k}$  sólo es distinta de cero en un intervalo de longitud  $2^{-j}$  en cuya mitad izquierda vale 1 y en la derecha  $-1$  y al recorrer  $k$  sus  $2^j$  valores posibles los soportes de las funciones correspondientes llenan el intervalo  $(0, 1)$ . Pues bien, estas funciones son ortogonales entre sí (en el sentido de que la integral del producto de dos distintas es cero) y además, cualquier función  $f$  definida en  $(0, 1)$  y de cuadrado integrable (o sea, una señal de energía finita) se puede representar

como

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} h_{j,k}(t)$$

para una sucesión de números  $\{c_{j,k}\}$  adecuada. La igualdad ocurre en el sentido siguiente: la integral del cuadrado de la diferencia entre  $f$  y las sumas parciales de la serie tiende a cero. Igual que en el caso de las series de Fourier se pueden estudiar otros sentidos de convergencia.

Dos particularidades destacadas del sistema de Haar son que refleja las propiedades locales de la función, ya que sólo los coeficientes de las funciones de la base cuyo soporte corta al de  $f$  son relevantes, y que un simple cambio de escala permite pasar de la original a las demás. Por otra parte, aunque hemos hecho nuestra construcción en  $(0, 1)$  no hay inconveniente en hacerla en toda la recta real, considerando también dilataciones con  $j$  negativo y llevando  $k$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Puestos a buscarle un defecto al sistema (¡y es importante!) mencionaremos su falta de regularidad: las “ondas elementales” de Haar no son ni siquiera continuas. ¿Se puede encontrar una función  $\psi$  regular que permita construir una familia por dilatación y traslación con las propiedades del sistema de Haar? Yves Meyer fue capaz de dar, en 1985, un ejemplo afirmativo que además era de clase  $C^\infty$  (se puede derivar tantas veces como se quiera). Con respecto a la ondícula de Haar se perdía algo: no era de soporte compacto. Pero fue sólo cuestión de tiempo, un par de años después, Ingrid Daubechies construyó ondículas con un número prefijado de derivadas y con soporte compacto, utilizando un proceso iterativo.

El paso clave en la comprensión matemática de lo que era el análisis por ondículas al estilo del modelo de Haar fue dado por Stéphane Mallat junto con Yves Meyer, quienes lo explicaron como un *análisis multirresolución*. Este consiste en considerar una sucesión creciente de subespacios del espacio  $L^2(\mathbf{R})$  de funciones de cuadrado integrable,

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

y una función de escala  $\varphi$  con las propiedades siguientes: (i) (densidad)  $\cup_j V_j$  es denso en  $L^2$ ;

(ii) (separación)  $\cap_j V_j = \{0\}$ ;

(iii) (escala)  $f(t) \in V_j$  si y sólo si  $f(2^{-j}t) \in V_0$ ;

(iv) (ortonormalidad)  $\{\varphi(x - k)\}$  es una base ortonormal de  $V_0$ .

La ondícula básica se puede obtener a partir de  $\varphi$  como una combinación (que puede ser una serie) de  $\varphi(2t - n)$ . Por ejemplo, en el caso del sistema de Haar es  $\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$ . Las demás ondículas salen de la básica por dilatación y traslación. La proyección de un elemento de  $L^2$  sobre uno de los subespacios  $V_j$  es una aproximación del elemento, tanto mejor (con más detalle) cuanto más arriba esté el espacio en la sucesión. Se suele decir que tenemos un “zoom” que nos permite tener una visión más amplia de la función o elegir una parte de ella y observarla con más detalle, según convenga.

Las aplicaciones de las ondículas a la matemática pura se limitan en muchos casos a dar demostraciones simplificadas de resultados conocidos previamente. Sin embargo, su utilización práctica abarca terrenos muy dispares con variado éxito. Puede servir en Astronomía para distinguir una estrella de una galaxia, en modelos de visión artificial, en la compresión de la información para transmitirla en menos tiempo o almacenarla en menos espacio (lo que interesó al FBI para su archivo de huellas digitales), en la eliminación de ruido de una señal y en muchas otras cosas. Una aplicación curiosa es la limpieza de una antigua grabación deteriorada en la que Brahms toca al piano una pieza propia.

Recordando la exitosa aparición de la FFT en el análisis de Fourier clásico surge una pregunta: ¿qué pasa con el cálculo efectivo al trabajar con las ondículas? S. Mallat se impuso la tarea de encontrar un método eficaz de cálculo y llegó a la *transformación rápida en ondículas*, basándose en algoritmos piramidales de cálculo que ya se estaban utilizando. Su método da un número de operaciones del orden de  $N$ , se puede decir que es  $CN$  donde  $C$  es una constante que depende de la ondícula utilizada. Cuando  $N$  es muy grande, es cierto que este número es menor que el  $N \log N$  de la FFT, pero en la práctica no es éste el único argumento en uso. Lo que interesa es el método que dé la mejor relación calidad-precio entre el coste de realización y la señal ofrecida. Al decir de los expertos, la respuesta depende del problema, hay veces que la FFT es mejor que las ondículas y al revés. Pero es que, además, éstas son toda una gama y también entre ellas hay que elegir la más conveniente a cada situación. Las ondículas han entrado en el mercado en competencia con

otros métodos de trabajo y los problemas que actualmente se abordan en la teoría, surgen tanto de su aspecto puramente matemático como del mundo de las aplicaciones prácticas.

### 3.8 Algunas lecturas

Aunque supongo que es difícil de encontrar, comienzo mencionando el libro siguiente porque me ha sido muy útil en la preparación de esta segunda parte:

E. PRESTINI, *Applicazioni dell'analisi armonica*, Hoepli, Milán, 1996. La difracción de ondas por una rendija o por una red se puede encontrar en libros de Física o de Óptica. Por ejemplo, en los capítulos 22 y 23 de

M. ALONSO y E. J. FINN, *Física, vol II: campos y ondas*, Fondo Educativo Interamericano, 1970. Sobre la tomografía hay algunos artículos de carácter matemático más o menos divulgativos:

K. T. SMITH, D. C. SOLMON y S. L. WAGNER, *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing a function from radiographs*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1227-1270;

L. A. SHEPP y J. B. KRUSKAL, *Computerized tomography: the new medical X ray technology*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 420-439;

A. K. LOUIS, *Medical imaging: the state of the art and future development*, Inverse Problems 8 (1992), 709-738. Un libro que describe el mundo de las comunicaciones, es decir, la transmisión de señales, es

J. R. PIERCE y A. M. NOLL, *Señales: la ciencia de las telecomunicaciones*, Reverté, 1995.

Hay una cantidad enorme de libros y artículos sobre ondículas. Me limito a mencionar un libro que pretende explicarlas a un público amplio y sin gran formación matemática y algunos artículos con propósito divulgativo.

B. BURKE HUBBARD, *The World according to wavelets*, A K Peters, 1996; en francés, *Ondes et ondelettes: La saga d'un outil mathématique*, Pour la Science, 1995.

R. S. STRICHARTZ, *How to make wavelets*, Amer. Math. Monthly 100 (1993), 539-556.

G. STRANG, *Wavelet transforms versus Fourier transforms*, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1993), 288-305;

J. S. WALKER, *Fourier Analysis and Wavelet Analysis*, Notices Amer. Math. Soc. 44 (1996), 658-670.

C. M. BRISLAWN, *Fingerprints go digital*, Notices Amer. Math. Soc. 42 (1994), 1278-1283.

Hay mucha información sobre ondículas en Internet, a partir de la dirección

[www.wavelet.org](http://www.wavelet.org)

se puede acceder (enero del 2000) a tanta como uno quiera, hasta perderse.



# Matemáticas y Finanzas

José Luíz Fernández  
Universidad Autónoma de Madrid

La economía tiene a las matemáticas como soporte conceptual y herramienta de trabajo. Partiendo de esta base, el autor se centra en el uso de las matemáticas en las finanzas con diversas ejemplificaciones.

## 1 Introducción

### 1.1 Matemáticas y Economía

Desde siempre las matemáticas se han aplicado a cuestiones de comercio, de economía y de finanzas.

Se trata de una relación con diversos niveles y múltiples facetas, aunque aquí nos centraremos en algunos aspectos muy concretos y a un nivel básico.

Por supuesto, las matemáticas son un lenguaje esencial para el comercio. Esto es claro. Pero quizás convenga recordar, por ejemplo, que nuestro querido número  $e$  nace para calcular intereses que se componen de manera continua, o el papel que el cálculo de probabilidades desempeña en la industria del seguro.

Las ciencias todas tienen a las matemáticas no sólo como su lenguaje sino también como su soporte conceptual. Se piensa en ciencia pensando en matemáticas. Y la economía, la ciencia económica, no es ninguna excepción a esta regla.

Aquí nos centraremos en un aspecto concreto de la economía: las finanzas y, dentro de éstas, en la gestión de carteras y en los derivados.

## 1.2 Matemáticas y Finanzas

Las primeras conceptualizaciones matemáticas de asuntos financieros son debidas a Daniel Bernoulli. En un artículo de finales del siglo XVIII, en la Academia de San Petersburgo sobre la *medición del riesgo*, Bernoulli introduce la función de utilidad y a la varianza como medida del riesgo.

En 1900 Louis Bachelier (alumno de Poincaré) introduce el movimiento browniano (antes que Einstein o Wiener) en su tesis doctoral *Teoría de la especulación* para analizar el comportamiento de los mercados financieros.

Markowitz, en los años cincuenta inicia la teoría de carteras y de inversiones, en la que nos centraremos más adelante. Markowitz y algunos de lo que desarrollaron estas teorías, como Sharpe, recibieron sendos premios Nobel por esa teoría.

El análisis de Bachelier lo retoma y mejora Samuelson (Premio Nobel) en los años sesenta proporcionando un esquema en el que se enmarca la moderna teoría de opciones merecedora también de premios Nobel en 1997: Merton, Scholes (F. Black hubiese sido galardonado con el Nobel si no hubiera fallecido en 1995).

## 1.3 Relevancia en Educación

Así que estos dos aspectos del **uso de las matemáticas en las finanzas y los mercados financieros**, tienen pedigrí: desde Bernoulli, pasando (tangencialmente) por Poincaré, hasta unos cuantos premios Nobel en economía, a matemáticos y físicos.

Pero, ¿qué es lo que hace relevante en el contexto en que nos encontramos? Hay varias razones.

- Es un ejemplo importante de modelización matemática, de como se crea un modelo para entender una realidad. A veces pensamos en la modelización matemática de aspectos científicos como una herramienta para realizar predicciones dentro de esa ciencia que permitan confirmar sus teorías, pero hay que resaltar que, sobre todo, sirven para entender mejor la realidad a estudio.
- La modelización que vamos a discutir no requiere más conceptos que los de media, varianza y correlación.

Es un ejemplo que permite exhibir claramente a la modelización matemática en acción, a las matemáticas pensando el mundo, sin grandes andamiajes conceptuales.

Y esto es muy importante.

Vamos a discutir versiones básicas y simplificadas de la teoría de carteras y de la teoría de opciones. Esto hace que los conceptos matemáticos requeridos sean tan limitados. Pero, hay que insistir que lo que se quiere destacar es el proceso de modelización matemática. Y también, que en gran medida lo que fundamentalmente se usa en las instituciones financieras son estas versiones sencillas.

- Se trata de un conocimiento útil, relevante, usado en la práctica por bancos, por gestoras de fondos, por compañías de seguros, en asuntos tales como seguros, pensiones, hipotecas, . . . .

El uso instrumental de estas teorías es, en general, complejo y elaborado, pero las ideas básicas son simples.

- Se trata de modelos revisables, adaptables: se puede jugar con ellos, manipularlos.
- Se puede experimentar con ellos. Se pueden simular en el ordenador de manera sencilla, y sobre estas simulaciones hacer análisis y tomar decisiones que tras un tiempo pueden ser contrastadas.
- Finalmente, creo que es importante señalar que podemos hacer análisis con datos reales obtenidos, por ejemplo, de los periódicos.

## 2 Teoría de carteras

### 2.1 Inversiones

Vamos a centrarnos en una de las aplicaciones de las matemáticas a estas cuestiones económicas, la de las **inversiones**: la teoría de carteras de Markowitz.

### 2.1.1 Conceptos

Un **activo** es un instrumento financiero. Tiene un **valor** que identificamos con su **precio**, a pesar de la admonición de Machado. Un activo se compra y se vende, y con el tiempo su valor/precio va cambiando.

Sólo vamos a tener en cuenta un único periodo de tiempo, un **horizonte de inversión**, que quedará fijo en lo que sigue.

La **rentabilidad** de un activo  $S$  en ese periodo de tiempo se mide mediante

$$R = \text{rentabilidad} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

Los valores  $S_0$  y  $S_1$  son los que el activo tiene, respectivamente, al principio, hoy, tiempo 0, y al final, tiempo 1, del periodo de tiempo en consideración. La rentabilidad  $R$  descrita es la llamada rentabilidad simple <sup>1</sup> efectiva. Mide la variación porcentual del activo en el periodo de tiempo bajo consideración.

$S_1$  es una cantidad desconocida hoy. La **modelizamos** como una variable aleatoria. Es decir, como si sus valores se escogieran de una cierta urna, como en una lotería.

Pero conviene centrarse en  $R$ .  $R$  también es, claro, una variable aleatoria. La ventaja de considerar la rentabilidad  $R$  y no el nivel de precios  $S$  es que  $R$  es una cantidad homogénea: se trata de valores relativos. Dado  $S_0$ , conocer  $R$  y conocer  $S_1$  son cuestiones equivalentes. Para comparar dos activos nos fijamos en sus rentabilidades.

De un activo, nos interesarán sólo dos estadísticos referidos a su rentabilidad: la rentabilidad media, es decir, la esperanza de su rentabilidad, el valor esperado de su rentabilidad:  $\mu = E(R)$ . Y la varianza de su rentabilidad:  $\sigma = V(R)$ .

Las decisiones sobre cómo invertir van a venir determinadas por el conocimiento de  $\mu$  y de  $\sigma$  de los activos en que podamos o en que nos interese invertir en un periodo de tiempo determinado. ¿De dónde se obtiene esta información? Ésta es una cuestión clave. Normalmente este dato lo obtiene el inversor a través de análisis de la evolución previa de los activos y de información que tenga sobre la posible evolución futura de esos activos. Es todo un arte.

<sup>1</sup>Hay otra forma de medir la rentabilidad que será de más cómodo uso más adelante, en la teoría de opciones, y es la rentabilidad continua (efectiva)  $R_{\text{continua}} = \log(S_1/S_0)$

Lo que vamos a ver aquí es **cómo usar esa información para tomar decisiones sobre las inversiones**.

Desde Bernoulli, a la varianza de la rentabilidad se la conoce como **riesgo** del activo. Hay que tener cuidado con lo que esto significa. Si de un activo sabemos que su precio va a bajar un 10% con absoluta seguridad, ahí no hay riesgo. Por el contrario, si el precio de un activo va a subir entre un 10% y un 20%, pero no sabemos cuánto, ahí hay riesgo. Normalmente, en el lenguaje usual, riesgo viene asociado a sucesos con repercusiones negativas. Sin embargo, no es éste el caso en finanzas.

A la rentabilidad media la denominaremos **retorno**.

### 2.1.2 Representación

Como hemos dicho más arriba, de cada activo sólo necesitamos su retorno y su riesgo.

Utilizaremos un sistema de coordenadas para representar la información sobre los activos. En el eje de las  $X$  pondremos el riesgo y en el eje de las  $Y$  pondremos el retorno. Es el **plano de riesgo-retorno**.

En la figura (1) aparecen dos activos  $A$  y  $B$  con coordenadas respectivas  $(2, 1)$  y  $(3, 4)$ .

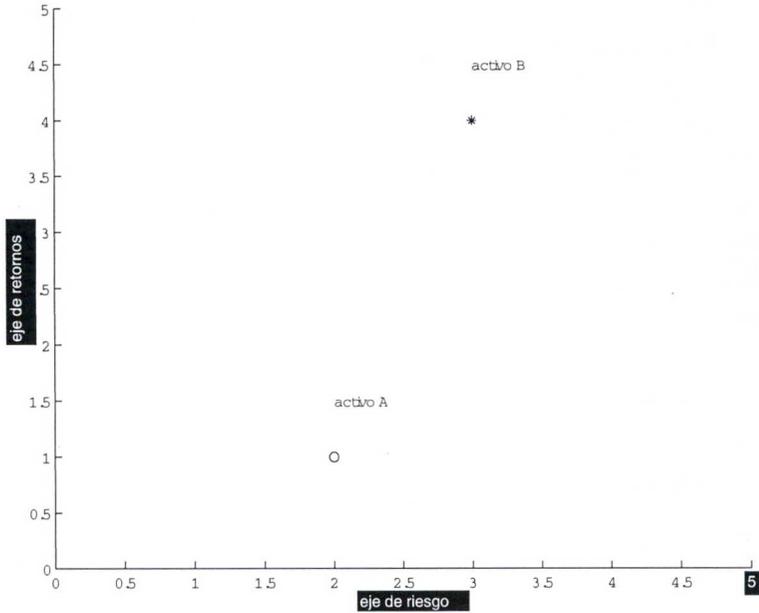


Figura 1: Plano riesgo-retorno.

## 2.2 Preferencias.

En cuanto tenemos varios activos representados en el plano de riesgo-retorno, como en la figura (2), enseguida nos preguntamos. ¿Cuál preferimos?

Este es un ingrediente clave. Las **preferencias** son inherentes al inversor. Cada uno de nosotros tenemos un sistema personal de preferencias, aunque hay varios ingredientes que son comunes, o casi, a todos los inversores. En general, somos **aversos al riesgo**. A igualdad de riesgo preferimos el activo con mayor retorno y a igualdad de retorno, el de menor riesgo.

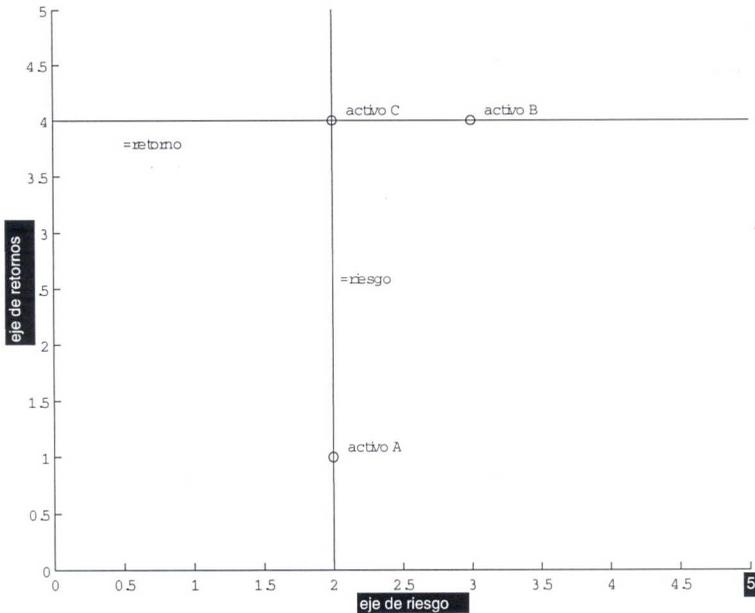


Figura 2: Preferencias.

En la figura (2) todos preferimos el activo *C* al *A* y el activo *C* al *B*, pero cada uno tendrá sus preferencias entre *A* y *B*. Por ejemplo, para un inversor para el que el riesgo sea irrelevante (neutro ante el riesgo), es decir, para un inversor que sólo se fija en el retorno, será preferible *B* a *A*, a pesar de su mayor riesgo. Mientras que para un inversor profundamente averso al riesgo, es decir, que huye del riesgo, *A* es preferible a *B*, a pesar de su menor retorno. La mayoría de los inversores tiene preferencias que se encuentran en una situación intermedia a los dos extremos que acabamos de describir.

### 2.2.1 Función de utilidad

Vamos a describir, a modelizar, nuestras preferencias dando a cada punto del plano de riesgo-retorno un valor entre 0 y 1, por ejemplo. Los puntos con valor 1 son los más apreciados y los puntos con 0 los menos apreciados. Tenemos pues una función real  $u$  definida en el plano de riesgo-retorno. Lo importante son las curvas de nivel de esta función  $u$  y su posición relativa unas de otras; los valores concretos de la función de utilidad no son tan importantes. Esta

función  $u$  es la **función de utilidad**.

Consideremos la función de utilidad (de un cierto inversor) como la de la figura (3). La pendiente de las curvas de nivel es pequeña y eso significa que el inversor no es particularmente averso al riesgo.

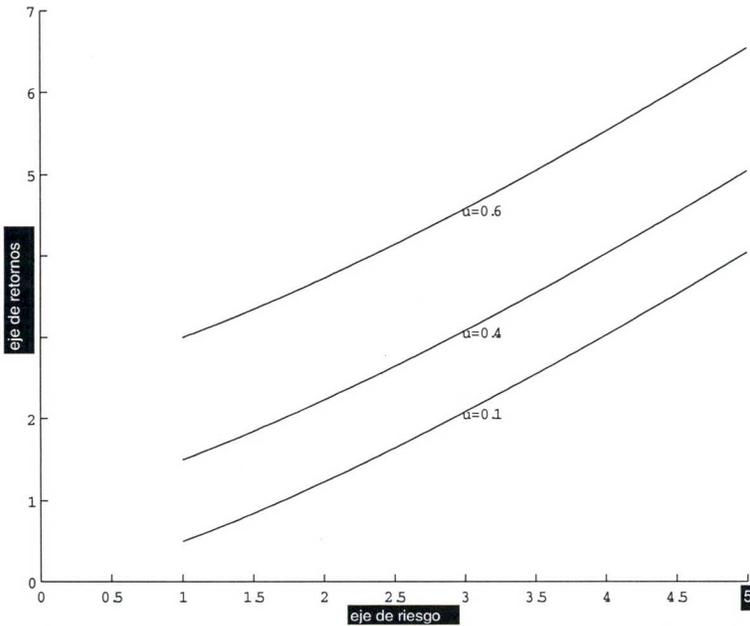


Figura 3: Función de utilidad de un inversor.

Vamos a ver de qué nos informa sobre los activos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura (2). Basta superponer las dos gráficas (de las figuras (2) y (3)) como en la figura (4).

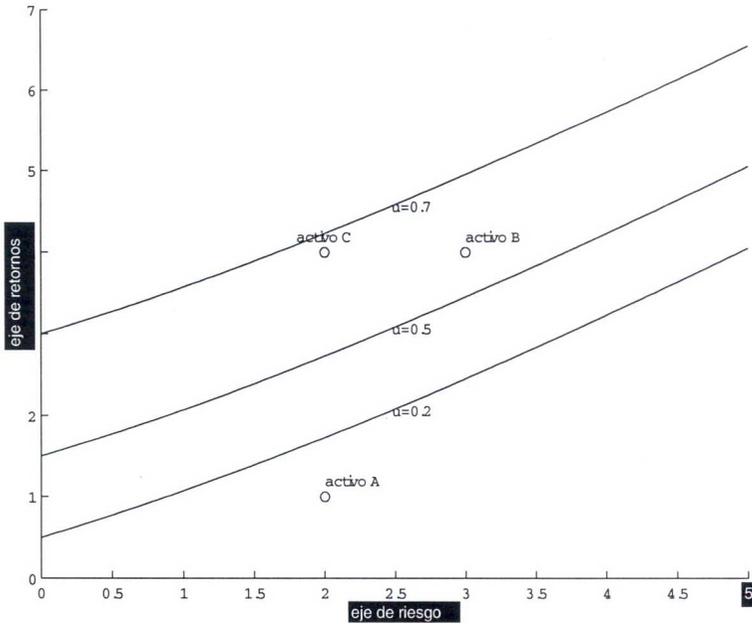


Figura 4: Comparación de activos.

La conclusión es que este inversor prefiere  $B$  a  $A$ . Obsérvese que si la pendiente de las curvas de nivel de la función de utilidad fuera muy grande, entonces  $A$  sería preferible a  $B$ .

## 2.3 Carteras

Tenemos dos activos  $A$  y  $B$ . Vamos a invertir en esos dos activos para formar una cartera. Lo relevante no es la cantidad de dinero a invertir (lo que por otra parte requeriría los datos de los precios actuales de los dos activos) sino los porcentajes a invertir en los dos activos.

Pongamos que en  $A$  invertimos una proporción  $\lambda$ , un número entre 0 y 1, y, claro, en  $B$ , invertimos  $1 - \lambda$ . (Resulta más cómodo usar números entre 0 y 1 que porcentajes.) Denotemos la cartera así formada por  $C$ .

Queremos calcular el retorno y el riesgo de la cartera  $C$ : para el retorno no necesitamos más información, pero para calcular el riesgo de  $C$  necesitamos la correlación entre las rentabilidades de  $A$

y de  $B$ . Supongamos que ésta es  $\rho$ .

**Significado** de  $\rho$ . Recordemos que  $\rho$  está comprendido entre  $-1$  y  $1$ . A (muy) grandes rasgos, el significado cualitativo de  $\rho$  es el siguiente: si  $\rho$  es próximo a  $1$ , y si la rentabilidad de  $A$  es alta, entonces la rentabilidad de  $B$  será alta, si  $\rho$  es próximo a  $-1$ , entonces una rentabilidad alta de  $A$  presupone una rentabilidad baja de  $B$ , y, finalmente,  $\rho$  próximo a cero no permite extraer conclusiones de relación, como las anteriores, entre las rentabilidades de  $A$  y  $B$ .

Un cálculo directo nos da que el retorno,  $\mu_C$ , y el riesgo,  $\sigma_C$ , de  $C$  vienen dados por

$$\begin{cases} \mu_C = \lambda\mu_A + (1 - \lambda)\mu_B \\ \sigma_C = \sqrt{\lambda^2\sigma_A^2 + (1 - \lambda)^2\sigma_B^2 + 2\rho\lambda(1 - \lambda)\sigma_A\sigma_B} \end{cases}$$

La situación es la siguiente. En el plano riesgo-retorno de la figura (5) hemos puesto dos activos  $A$  y  $B$ , de coordenadas riesgo-retorno respectivas  $(3, 1)$  y  $(4, (4.5))$  y todas las carteras a que dan lugar cuando los combinamos, suponiendo distintos valores de correlación entre ellos.

Las carteras marcadas con "o" en la figura (5) tienen todas un 80% de  $A$  y un 20% de  $B$ , es decir, corresponden a  $\lambda = 0.8$ . Obsérvese que todas estas carteras tienen la misma rentabilidad, 1.7, pero que sus riesgos disminuyen según el coeficiente de correlación va bajando desde  $1$  a  $-1$ .

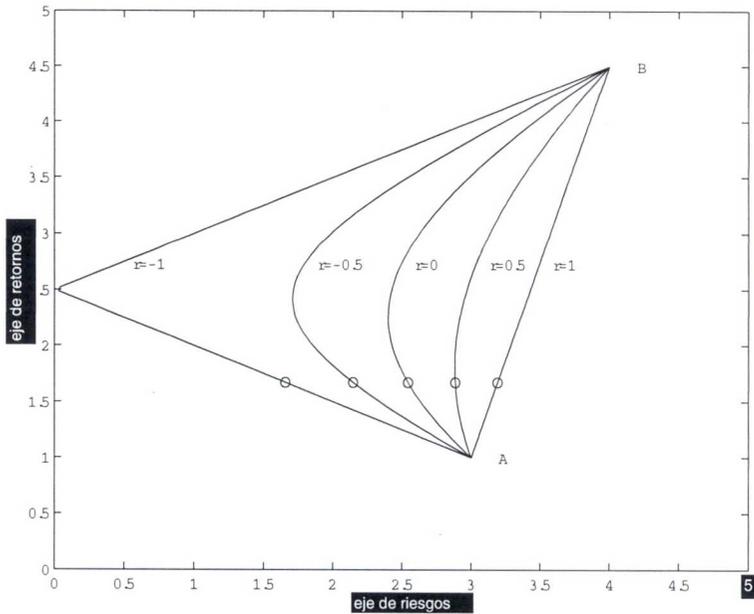


Figura 5: Carteras con dos activos.

La conclusión es muy importante. Quiere decir que **conviene diversificar** la inversión entre activos que tienen entre sí correlación negativa. En lenguaje llano, se trata de no poner todos los huevos en el mismo cesto, porque en ese caso, puede que no se nos caiga el cesto, pero si se nos cayera los perderíamos todos. Al ponerlos en cestos distintos, puede que se nos caiga uno de los cestos, pero es improbable que se nos caigan los dos. Cestos distintos significa  $\rho \approx 0$ .

### 2.3.1 La región de carteras

Cuando tenemos activos  $A, B, C$ , por ejemplo, la colección de todas las carteras formadas utilizando estos tres activos es la de la figura (6). La denominaremos **región de carteras**.

Se trata de todas las carteras en las que se invierte  $a$  en  $A$ ,  $b$  en  $B$ , y  $c$  en  $C$ , donde  $a, b, c$  son todos positivos y suman 1.

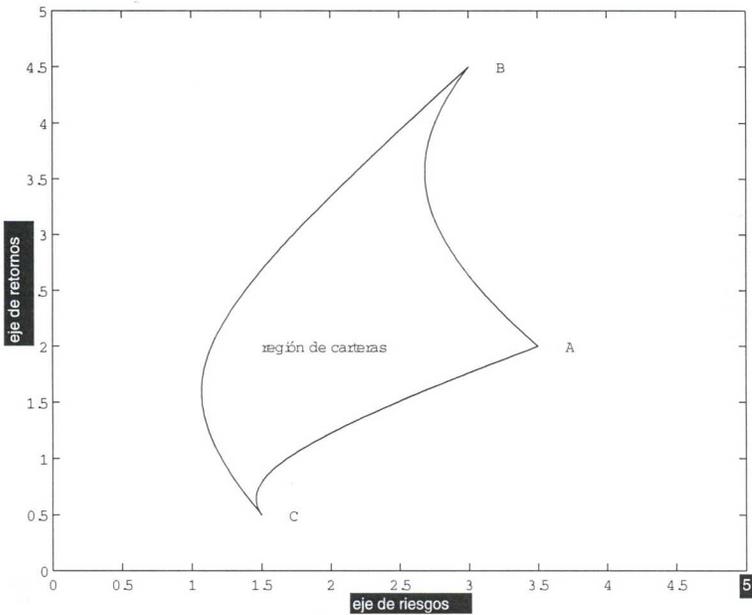


Figura 6: Carteras a seleccionar.

### 2.3.2 Selección de carteras

La selección ahora consiste en averiguar qué punto de la región de carteras (que estará necesariamente en su borde) tiene un valor máximo de la función de utilidad. Gráficamente esto es muy fácil: vamos mirando curvas de nivel de la función de utilidad (en el sentido de utilidad creciente) hasta el último valor de nivel para el cuál todavía tocamos a la región de carteras. Ese punto de tangencia determina la **cartera óptima**. Véase la figura (7)

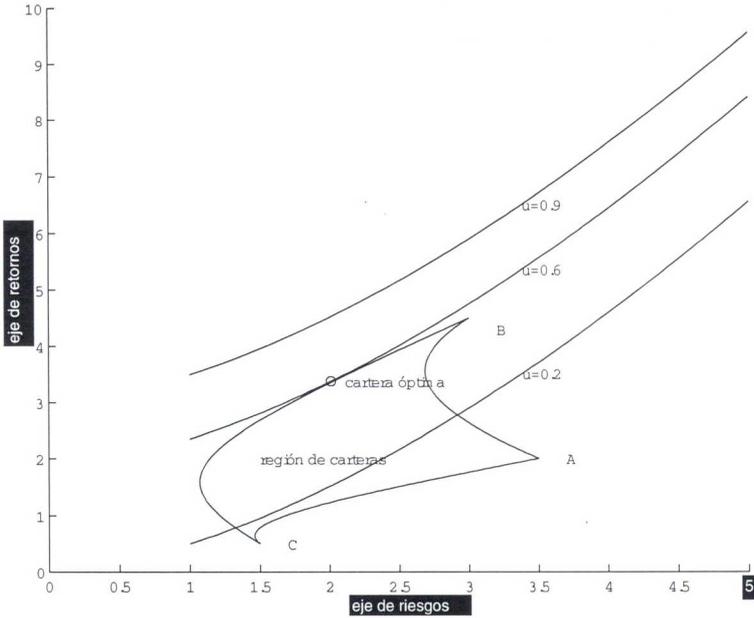


Figura 7: Cartera óptima.

### 2.3.3 Incluyendo renta fija

Hay una inversión especial: la renta fija, el préstamos al Estado. Su riesgo es cero.

Denotemos esa inversión por  $O$ . Como el riesgo de  $O$  es cero, su rentabilidad no es aleatoria, es una constante. Pongamos que ese valor constante es  $r$ . Las coordenadas riesgo-retorno de  $O$  son  $(0, r)$ . Lo que esto significa es que si invertimos 1 euro en  $O$ , al final del periodo de tiempo en consideración, tendremos  $1 + r$  euros.

$O$  es especial: si formamos una cartera  $D$  con un activo con riesgo  $A$  y con  $O$  en las proporciones respectivas  $\lambda$  y  $1 - \lambda$  tenemos

$$\begin{cases} \text{retorno de } D &= \lambda(\text{retorno de } A) + (1 - \lambda)r \\ \text{riesgo de } D &= \lambda(\text{riesgo de } A) \end{cases}$$

Es decir, la posición de la cartera  $D$  en el plano riesgo-retorno está en el segmento que une las posiciones de  $A$  y de  $O$ .

Al incluir el activo sin riesgo, la región de carteras se agranda conectando cada punto de la región de carteras original con el punto

$(0, r)$ . Así, por ejemplo, la región de carteras de los activos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura (6) se transforma en la región de carteras de la figura (8) al incluir el activo sin riesgo  $O$  que tiene rentabilidad  $r = 0.5$ .

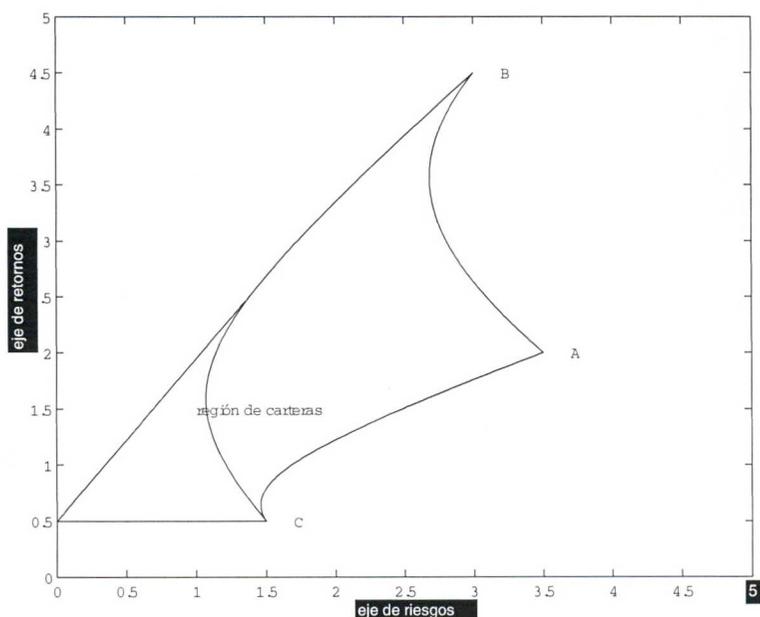


Figura 8: Región de carteras con renta fija.

La selección de carteras opera ahora de la misma manera que antes pero utilizando esta región más grande.

## 2.4 Determinación cualitativa de una función de utilidad

El concepto más difícil de aprehender en todo esto es, sin duda, el de función de utilidad.

Vamos a describir a continuación un sencillo ejemplo de cómo determinar (o mejor, consensuar) una cierta función de utilidad. Es un planteamiento un tanto ingenuo (digamos que de primer orden), pero contiene las ideas esenciales y puede dar lugar a una discusión participativa en la que se inste a pensar en las distintas actitudes ante el riesgo inversor (un concepto en realidad mucho más amplio que el de las inversiones, de hecho, un capítulo de la Psicología).

Recordemos que lo importante no es la función de utilidad sino sus curvas de nivel.

En lo que sigue, vamos a buscar una función de utilidad en la que las curvas de nivel son rectas paralelas. Basta pues que se determine una de las rectas.

- Necesitamos un punto de referencia en el plano riesgo-retorno.

Pensemos en una lotería,  $A$ , juego de cara/cruz, en la que si apostamos 10000 obtenemos 20000 a cambio, con probabilidad  $1/2$ , o perdemos lo apostado, con probabilidad  $1/2$ .

La rentabilidad  $R_A$ , de  $A$ , es la variable aleatoria

$$R_A = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -1, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

Así que el retorno de  $A$  es 0 y el riesgo es 1. Las coordenadas de  $A$  son  $(1, 0)$ .

A este juego/activo le adjudicamos una determinada utilidad, cuyo valor concreto no es importante. Admitamos que no es un juego muy atractivo, no nos interesa ni mucho ni poco, casi nos da igual.

- Planteamos ahora una segunda lotería,  $B$ , en la que hay que especificar un determinado ingrediente para que lo consideremos de la misma utilidad/interés que el anterior.

La lotería  $B$  a la que nos referimos es una en la que para entrar hay que apostar 100000. Con probabilidad de  $8/9$  perdemos la apuesta. Y con la probabilidad restante,  $1/9$ , obtenemos una cierta cantidad  $x$  por especificar.

Se trata ahora de decidir, de consensuar, qué valor tiene que tener  $x$  para que esta lotería empiece a resultarnos “razonable”, más precisamente, para que lo consideremos equivalente en utilidad al insulso  $A$ . Conviene no perder de vista el nivel de la apuesta requerida (de 100000).

Pongamos que hemos determinado que un valor de  $x$  de  $10_1000000$  ya es razonable. Para este caso la rentabilidad  $R_B$  viene dada por

$$R_B = \begin{cases} 99, & \text{con probabilidad } 1/9 \\ -1, & \text{con probabilidad } 8/9 \end{cases}$$

que tiene retorno 10.11 y riesgo 29.86

La recta que une a las dos loterías/activos  $A$  y  $B$  en el plano riesgo-retorno determina una curva de nivel de la función de utilidad. Las otras curvas de nivel son las rectas paralelas a ésta. Véase la figura (9).

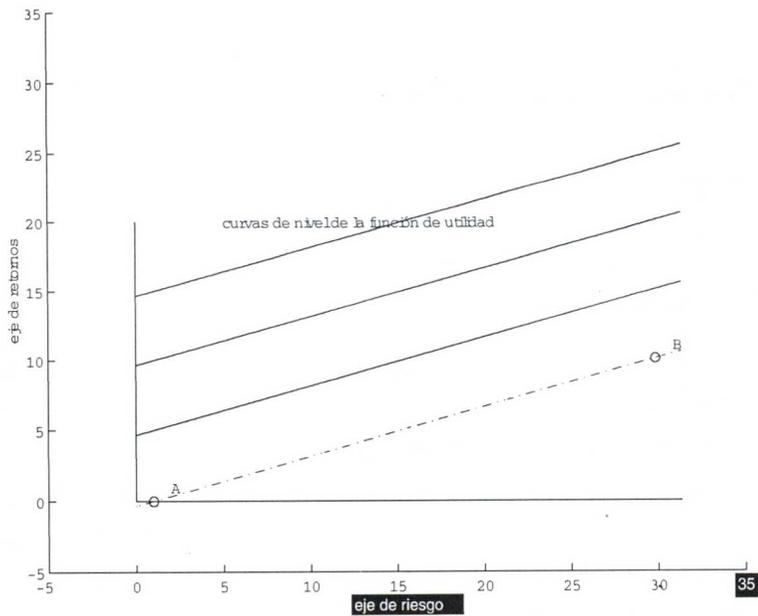


Figura 9: Una función de utilidad.

## 3 Teoría de opciones

### 3.1 Riesgo financiero

En la teoría de carteras que hemos discutido hasta ahora, nos enfrentábamos con un panorama de riesgo-retorno de distintos activos de inversión y, ante él, tomamos decisiones basándonos en nuestra función de utilidad y en nuestro conocimiento de esos activos, más concretamente, de sus riesgos y retornos.

Recordemos que en finanzas riesgo e incertidumbre son casi sinónimos.

Los riesgos con los que uno se enfrenta en finanzas son múltiples. Hasta ahora sólo hemos considerado el riesgo de la rentabilidad de activos de inversión, tanto de renta fija como de renta variable. Se trata del llamado riesgo de precio.

Pero la gestión financiera incluye riesgos tales como:

- Riesgo de divisas. Tenemos dólares que queremos usar para invertir en euros dentro de un mes: el tipo de cambio de dólares a euros es incierto.
- Riesgo de reinversión. ¿A qué tipo de interés podremos reinvertir los cupones que vamos a percibir por nuestra cartera de bonos del Tesoro?
- Riesgo de crédito. Hace unos meses, Rusia decidió no cumplir con el pago de los cupones de su deuda. Es el riesgo de impago.
- Riesgo de liquidez. En mi planificación financiera cuento con poder vender unos activos. Además del riesgo de precio tenemos el riesgo de que el mercado, en la jerga usual, sea poco líquido y que nadie quiera comprar ni vender a la cotización establecida.
- [...]

Ante tal diversidad de riesgos el mundo financiero ha creado instrumentos que tienen como misión transferir riesgos financieros entre dos partes. Una parte elimina su incertidumbre transfiriéndosela

a otra parte. Vaya por delante que eliminar la incertidumbre puede suponer tanto perder como ganar, en cuanto a valor. Hay dos tipos fundamentales de estos instrumentos que pasamos a describir en la sección siguiente.

### 3.2 Los derivados. Futuros y Opciones

Veamos dos ejemplos básicos de instrumentos de gestión del riesgo: los futuros y las opciones.

- FUTUROS SOBRE CÍTRICOS

Como productor de naranjas, contrato hoy la venta dentro de tres meses (al término de la campaña) una parte de mi producción a un determinado precio  $K$  por tonelada a un comercializador. Esto es un contrato de futuro (a plazo). Ambas partes del contrato están obligadas a ejecutar la transacción. Esto me permite programar mis finanzas: compras, deudas ...

Si dentro de tres meses el precio por tonelada resulta ser  $P$ , y  $P > K$ , he perdido dinero: me hubiera compensado no entrar en ese contrato de futuro. Por el contrario, si  $P < K$  habré ganado.

En suma, cuando vence el contrato habré incurrido en una ganancia neta de

$$\boxed{K - P}$$

pero he eliminado la incertidumbre del precio.

Quedan riesgos tales como posibles incumplimientos de contrato, por ejemplo. Esa es la razón de que exista un mercado organizado.

- OPCIONES SOBRE ACCIONES

Una opción **put** (opción de venta) me da el derecho (pero no la obligación) a vender a un determinado precio de ejercicio  $K$ , que en la jerga financiera se conoce como *strike*, una acción, por ejemplo, de BSCH, y en un determinado tiempo futuro, digamos dentro de 3 meses.

¿Cuál es el uso de esa opción *put*? He aquí un ejemplo:

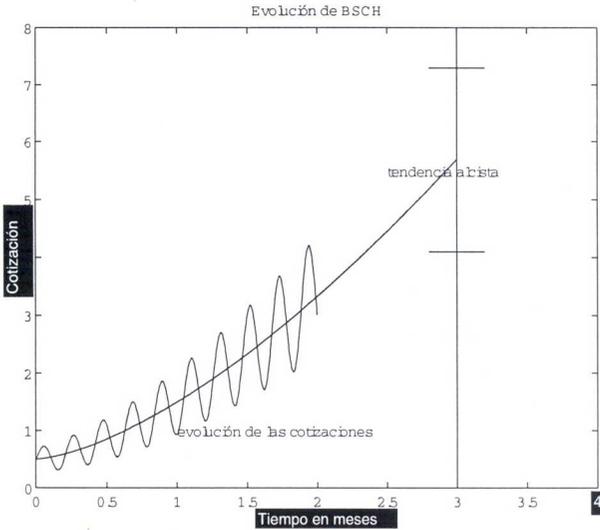


Figura 10: Cotización alcista volátil.

- Dentro de 3 meses necesitaré liquidez,
- para ello venderé mi cartera de BSCH esperando que el precio esté por encima de  $K$ ,
- podría vender ahora,
- pero creo que su cotización tiene una marcada tendencia alcista y no quiero vender ahora,
- pero BSCH está muy volátil, es decir, su cotización oscila mucho ¿y si su cotización baja dentro de 3 meses?

En la evolución de la figura (10) aunque la tendencia es alcista, al ser tan oscilante (volátil) en el preciso instante de dentro de 3 meses su cotización podría ser muy alta o muy baja.

La compra de una opción *put* me garantiza un precio mínimo al que podré vender. He comprado un seguro. ¿A quién? A un banco o a un particular o a una contrapartida en un mercado organizado, como MEFF.

En un contrato de futuro una parte ha de vender al precio  $K$  y la otra ha de comprar a ese precio. En una opción *put* una parte tiene el derecho a vender al precio  $K$  (pero no la obligación: no venderá a ese precio si no le interesa) y la otra tiene la obligación

de comprar (si la otra parte lo exige) a ese precio  $K$  (pero no tiene el derecho).

### 3.2.1 Las opciones

El derecho que he adquirido al comprar una opción *put* no es gratuito, he de pagar una prima. ¿Cuánto debe ser esa prima? Este es el problema de **valoración**.

El banco que me ha vendido esa *put* asume mis riesgos, y debe ser capaz de cubrirlos con la prima percibida: ¿qué ha de hacer para “cubrir” el compromiso que ha adquirido? Esta es la cuestión de **cobertura**.

Como veremos, valorar y cubrir son esencialmente equivalentes.

Podemos codificar el pago que supone esa opción *put* a vencimiento como:

$$\boxed{\text{máximo entre } (K - P) \text{ y } 0}$$

siendo  $P$  el precio de dentro de 3 meses, que por supuesto es desconocido hoy.

- A los futuros y las opciones se los conocen como instrumentos **derivados**. El pago

$$\text{máximo}\{(K - P), 0\}$$

de una *put* y por tanto la prima correspondiente, como vemos, se *deriva* del nivel de precios de otro activo (las acciones).

- Una opción **call** es una opción de compra. Obsérvese que estas opciones de venta y de compra pueden ser compradas y vendidas.
- Las opciones son instrumentos más sutiles y delicados de lo que pudieran aparecer a primera vista:
  - Apalancamiento. La prima de una *put* es una fracción del precio de la acción sobre la que se basa. A vencimiento, el comprador puede perder el valor de esa prima pero puede llegar a ganar hasta el precio de ejercicio. Una inversión pequeña supone una ganancia potencial grande.

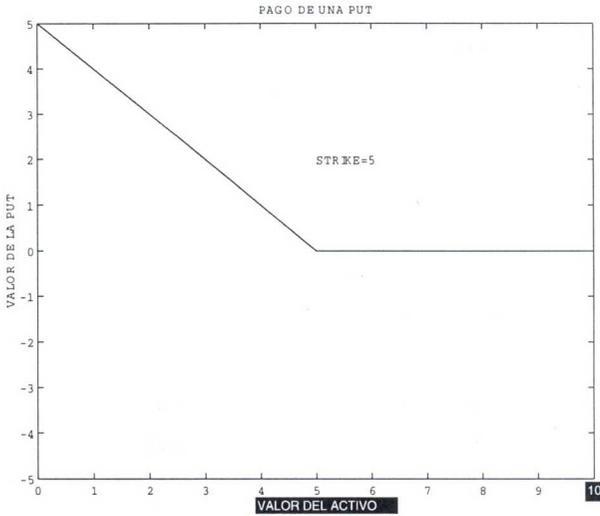


Figura 11: Flujos de una put.

- Los pagos tales como

$$\text{máximo entre } (K - P) \text{ y } 0$$

no son lineales en  $P$ , es decir, las variaciones en esos pagos no son proporcionales a las variaciones en el valor de  $P$ . Esto dificulta su valoración y cobertura y hace que sean instrumentos delicados de manejar.

- De vez en cuando aparecen en la prensa ejemplos de desastres financieros que han sido consecuencia de gestión especulativa (combinada, quizá, con avaricia y arrogancia) de instrumentos derivados: la banca Barings y el fondo de riesgo Long Term Capital son ejemplos recientes que han recibido mucha publicidad.

#### ● OPCIONES POR TODAS PARTES

Pero no creamos que los derivados son instrumentos esotéricos que un reducido número de inversores manejan. Nada más lejos de la realidad. Los derivados están por todas partes.

- Fondos de inversión en los que nos garantizan, por una inversión inicial de 100 hoy, que dentro de un año la inversión se ha revalorizado en al menos un 80% de lo que se ha revalorizado un índice de bolsa como el Ibex.

- Amortización anticipada de un crédito. Por el derecho a anticipar la amortización de un crédito nos imputan una prima. Se trata de una opción sobre el montante de ese crédito.
- Préstamos con techos. Son préstamos en los que pagamos un tipo de interés variable, como el tipo Euribor a 1 año; pero si este tipo Euribor pasa de, por ejemplo, 6% entonces pagamos sólo un 6%. Esa garantía adicional es una opción, que cuesta una prima.
- He aquí un ejemplo de un contrato de opción que se diseñó para cubrir los riesgos asociados al pago de las primas que el Comité Olímpico Español había acordado con nuestros representantes en la Olimpiada de Atlanta. Con motivo de la última Olimpiada en Atlanta, el COE y su programa ADO habían prometido a nuestros deportistas olímpicos primas substanciosas. Estas primas dependían del metal de la medalla y de si se trataba de un deporte individual o de una competición por equipos. En cualquier caso, para cubrir el riesgo económico y así eliminar la incertidumbre que éste conlleva, el ADO contrató con un consorcio de aseguradoras un seguro en los siguientes términos:

si pago total $< 250M$	ADO lo asumía todo
si pago total entre $250M$ y $400M$	ADO pagaba $250M$ y el resto el consorcio
si pago $> 400M$	ADO lo asumía todo

Al ADO le preocupaba tener que pagar una cifra superior a  $250M$ , y quería cubrir ese riesgo (económico, que no deportivo). Pero parecía estar seguro de que no tendría que pagar más allá de  $400M$ , y por eso no quería asegurarse contra un riesgo de algo que no creía que fuera a ocurrir.

En la terminología al uso: el contrato del que hablamos es una *call* con precio de ejercicio  $250M$  con una barrera

FUTUROS Y OPCIONES IBEX 35									
Índice: 9.045,10 (+249,10)									
Futuros	Precio al cierre		Último cruceado	Máximo sesión	Mínimo sesión	Volúmen contratos	Posición abierta	Liquid. día	
	Demanda	Oferta							
17/06/99	9.940	9.943	9.943	9.966	9.658	13.096	40.723	9.042,35	
15/10/99	9.935	9.963	9.917	9.917	9.662	95	273	9.047,35	
19/11/99	9.867	9.973	9.910	9.910	9.910	1	2	9.073,00	
17/12/99	9.989	9.996	9.795	9.795	9.795	0	1.702	9.092,20	
Opciones de compra									
Opciones de compra	Precio al cierre		Último cruceado	Máximo sesión	Mínimo sesión	Volúmen contratos	Posición abierta		
	Demanda	Oferta							
17/06/99	10.000	141	151	151	199	80	136	3.172	
17/06/99	10.100	98	128	127	107	30	65	1.298	
17/06/99	10.200	41	47	45	45	22	58	592	
17/06/99	9.900	193	227	170	190	90	93	613	
17/06/99	10.250	51	59	55	53	59	45	245	
17/06/99	10.300	0	0	0	2	2	2	40	96
17/12/99	10.350	353	371	350	350	277	34	692	
17/06/99	9.700	329	343	353	353	176	34	485	
Opciones de venta									
17/05/99	0.000	0	15	15	39	15	160	1.506	
17/05/99	0.200	19	23	26	32	26	131	1.116	
17/05/99	0.300	150	164	154	212	172	151	303	
17/05/99	0.500	48	56	48	115	48	47	1.303	
17/12/99	0.600	224	242	260	288	250	41	0	
15/10/99	0.800	72	80	87	117	87	34	562	
17/06/99	0.750	100	110	209	209	199	26	158	
15/10/99	0.900	150	155	240	240	240	25	22	
Total contratos: Futuros: 13.203 Opciones: 1.455 Total: 14.658									
Posiciones abiertas: Futuros: 44.723 Opciones: 83.273 Total: 127.996									
Fuente: MEFV. Fuente: Intrae									

Figura 12: Cotizaciones de derivados.

*knock-out* (de desactivación) situada en 400M. Si bien se trata de una opción particularmente sencilla, pues sólo involucra un intervalo de tiempo.

La variedad de opciones es un mundo enorme que no para de crecer. Los derivados se diseñan a medida del riesgo específico que se quiere transferir.

### 3.3 Modelización

Un contrato de opción es un contrato de seguro y como tal tiene asociada una prima. Queremos dar un marco, un modelo, en el que se pueda valorar esa prima.

Para fijar ideas pongamos que tenemos una opción *call* sobre una acción. El precio de esa acción a vencimiento lo denotamos por  $P$ .  $P$  es incierto y lo consideraremos como una variable aleatoria. El pago de la *call* viene dado por

$$C = \max \{P - K, 0\} = (P - K)^+$$

donde  $K$  es el precio de ejercicio.

Conocemos cuánto vale hoy el activo,  $P_0$ , que no es sino su cotización. Y lo que queremos saber es cuánto debemos pagar por la *call*. Es decir, en notación paralela, queremos determinar  $C_0$ .

La prima de un seguro de automóvil, por ejemplo, que nos va a pagar una cantidad incierta  $S$  es el valor medio actualizado de  $S$ . Esto es una consecuencia de las leyes de los grandes números.

En el caso de una *call* se tendrá una relación análoga. Esperamos que  $C_0$  sea una media (actualizada) de los posibles valores de  $C$ .<sup>2</sup>

Pero la clave, y sobre la que hasta ahora hemos pasado de puntillas, es de qué probabilidad se trata. En el caso de la prima de un seguro la probabilidad se obtiene a partir de la información histórica, de la estadística acumulada (frecuencias) de los posibles pagos  $S$ . Pero en el caso de las opciones, de los derivados, es un asunto mucho más sutil. Y descubrir cuál era la probabilidad correcta es la razón del premio Nobel de Merton y Scholes (y Black).

La diferente probabilidad a usar para calcular la prima de un seguro y la prima de una opción es la misma que la que hay entre la valoración de un billete de lotería y la valoración de una quiniela.

Resulta conveniente discutir antes esa diferencia tan crucial.

### 3.4 Las matemáticas de la porra, de las quinielas

#### 3.4.1 Lotería. Trilero

Un juego de azar que paga 10 con probabilidad  $1/3$  y paga 0 con probabilidad  $2/3$  vale  $10/3$ . Simplemente, grandes números. Por eso, ante un trilero, por una apuesta de 1 nos deberían dar, en caso de acierto 3, y no 2. El trilero, la ruleta o la lotería nacional son todos, claro, juegos injustos. La prima que pagamos es siempre demasiado alta.

Lo relevante, pues, en esta valoración son los datos históricos o, si lo preferimos, las frecuencias observadas históricamente que nos hacen inferir qué esquema de probabilidad debemos usar.

Las quinielas o las porras, sin embargo, se valoran de diferente manera. En ellas interviene un mercado, una negociación.

En las quinielas (si hacemos caso omiso de la substanciosa comisión que cobra el Estado) todo lo recaudado se distribuye entre los acertantes. Es decir, se trata de una (gigantesca) porra.

<sup>2</sup>El lector avisado percibirá que en todo esto subyace el teorema de representación de funcionales positivos lineales.

### 3.4.2 Quiniela. Porra

Supongamos que sólo hay dos resultados en, por ejemplo, una final de Copa. Victoria de  $X$  o victoria de  $Y$ . Y que los datos de apuestas son como sigue:

- Cada apuesta cuesta 1 euro.
- Hay un total de 1 millón de apuestas.
- 30% apuestan por  $X$ .
- 70% apuestan por  $Y$ .

Las distintas decisiones individuales de apuesta ya recogen toda la información y los diversos análisis personales técnicos o fundamentales. Las estadísticas de partidos similares arrojan el siguiente balance

- Victoria de  $X$  en un 40%.
- Victoria de  $Y$  en un 60%.

Si valoráramos nuestra apuesta como una prima de seguro o como un billete de lotería usaríamos estos últimos datos: las frecuencias históricas.

Pero, como veremos, en asuntos de valoración (y cobertura) de quinielas (y de derivados) estos datos resultan irrelevantes. Aunque claro, no son irrelevantes como información para decidir a quién apostar.

UNA APUESTA POR  $X$ . Tal y como hemos convenido, el valor hoy, 1 euro, debe ser la media de los flujos actualizados, promediados con una cierta probabilidad  $\mathcal{P}$ . Los datos son

- precio: 1 euro,
- no hay actualización<sup>3</sup>,

<sup>3</sup>Actualizar significa utilizar el tipo de interés sin riesgo (del Tesoro) para poner los dineros futuros en términos actuales. En el ejemplo de las quinielas el lapso de tiempo es pequeño y la actualización resulta ser irrelevante.

$$\bullet \text{ pagos: } \begin{cases} \text{si } X \text{ gana, pago de } \frac{1.000.000}{300.000} = \frac{10}{3} \\ \text{si } Y \text{ gana, pago de } 0 \end{cases}$$

El cálculo es el siguiente:

$$1 = \left[ \underbrace{\frac{10}{3}}_{\text{pago}} \cdot \underbrace{1}_{\text{no hay actualización}} \cdot \mathcal{P}(X \text{ gana}) \right] + [0 \cdot 1 \cdot \mathcal{P}(Y \text{ gana})]$$

Lo que nos permite inferir que:

$$\mathcal{P}(X) = 0.3$$

y, claro, también

$$\mathcal{P}(Y) = 0.7$$

Otra probabilidad, la histórica, adjudica a  $X$  una probabilidad de 0.4. La relación entre el valor actual y los posibles pagos futuros no se cumpliría con la probabilidad histórica.

En qué sentido hay un mercado. Hay cotizaciones: un nuevo apostante cambia mis expectativas de ganancia. Cuanta más gente apueste como yo, menos vale mi apuesta.

**DERIVADOS.** ¿Cuál es la utilidad de esa probabilidad  $\mathcal{P}$ ? Veamos como la podemos utilizar para valorar un derivado.

He aquí un ejemplo de derivado. Supongamos que un revendedor me ofrece el siguiente contrato

- si gana  $X$ ,  $\rightarrow$  me pagan 5
- si gana  $Y$ ,  $\rightarrow$  me pagan 3

¿CÓMO VALORAR ESTA OFERTA? ¿CÓMO OBTENER SU PRECIO (JUSTO DE MERCADO)? (Hacemos caso omiso de comisiones.)

Si ciegamente actualizamos y promediamos las expectativas obtenemos un

$$\text{precio} = 5 \cdot \mathcal{P}(X) + 3 \cdot \mathcal{P}(Y) = 3.6$$

**JUSTIFICACIÓN: LA REPLICACIÓN.** Una *cartera* que se compone de

1.5 de boletos de  $X$  y 2.1 de boletos de  $Y$

*cuesta* precisamente 3,6 euros. Y, esto es lo importante, equivale al contrato que ofrece el revendedor, pues

- si sale  $X$ , paga  $\rightarrow (1, 5) \cdot \frac{10}{3} = 5$  euros,
- si sale  $Y$ , paga  $\rightarrow (2, 1) \cdot \frac{10}{7} = 3$  euros

Esta justificación parece *ad hoc*. Pero en seguida veremos que es realmente el fundamento de la valoración.

EN SUMA, el derivado se valora con la probabilidad que da el mercado, es decir, con la probabilidad que inferimos a partir de los precios. Esa valoración equivale y es consistente con la replicación. Los datos históricos son irrelevantes en cuanto a la valoración, no así en la toma de decisiones. Forges, en la figura (13) lo describe con fina ironía y particular agudeza.

### 3.5 Ausencia de oportunidad de arbitraje. Replicación

El principio de equilibrio que determina la formación de precios en un mercado financiero es la **ausencia de oportunidad de arbitraje**. La siguiente cita de Paul Krugman explica en lenguaje llano el significado de esta hipótesis.

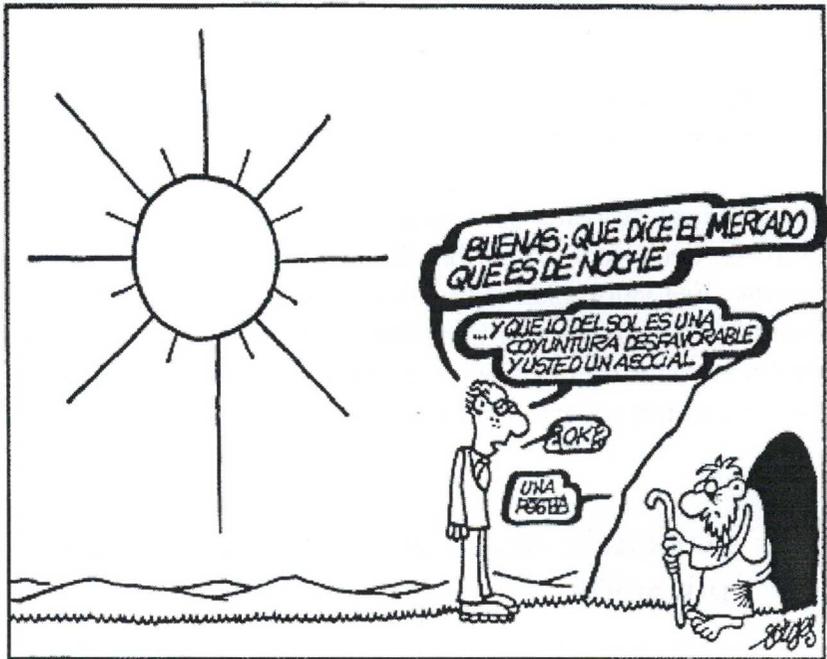


Figura 13: *Forges* en EL PAIS.

*En su base, la teoría económica descansa en dos observaciones:*

- *las oportunidades de beneficio obvias raramente se dejan sin explotar,*
- *y las cosas cuadran.*

*O, tal como lo digo a veces,*

- *un billete de veinte dólares no permanece en el suelo de una calle transitada durante mucho tiempo,*
- *y cada venta es también una compra.*

*Cuando uno se propone construir un modelo matemático formal, estos principios tan toscos se convierten en las ideas mucho más exactas de maximización (de algo) y de equilibrio (de alguna forma).*

*Sin embargo es aconsejable no olvidar su versión más imprecisa, por dos razones opuestas: para acordarnos de no tomar ninguna formalización matemática demasiado en serio, y para acordarnos de que los principios básicos de la economía no son del todo estúpidos o poco razonables.*

En términos precisos, una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión que con una inversión inicial nula garantiza una ganancia segura.

EJEMPLO. Datos de mercado:

- Un contrato de futuro con *strike*  $K$ , a tres meses,
- sobre una acción que hoy vale  $P_0$ .
- El tipo de interés simple a 3 meses es  $R$ .
- Supongamos que  $K > P_0(1 + R)$

Hay una oportunidad de arbitraje:

- Entrar en un contrato de futuro (como vendedor) (no cuesta dinero)
- Compramos una acción, lo que supone una inversión de  $P_0$

- pero con dinero prestado.

La inversión inicial es 0. Pero dentro de 3 meses, si la acción cotiza en un valor  $P$ , la situación de nuestra cartera será la siguiente:

- el futuro nos dará  $K - P$ ,
- la acción valdrá  $P$ ,
- y deberemos  $P_0(1 + R)$ ,

lo que da un total seguro, independiente de cuanto pueda ser el valor  $P$ , de

$$K - P_0(1 + R).$$

La hipótesis contraria,  $K < P_0(1 + R)$ , también da lugar a oportunidad de arbitraje. Este análisis fuerza a que, si no hay oportunidades de arbitraje,

$$K = P_0(1 + R),$$

es decir, nos permite determinar unos precios en términos de otros.

**EJEMPLO.** Tenemos un contrato que nos paga 1 si dentro de tres meses el precio  $P$  de una acción de BSCH cumple  $P \geq K$ . El precio de este contrato es  $U_0$ . También tenemos otro contrato análogo pero que paga 1 si  $P < K$ , su precio es  $D_0$ . Si  $R$  es el tipo de interés simple efectivo a tres meses se tendrá que cumplir que

$$U_0 + D_0 = 1/(1 + R)$$

puesto que tener los dos contratos equivale a la garantía de recibir 1 dentro de tres meses.

Las oportunidades de arbitraje existen, pero como afirmaba Krugman, duran sólo unos instantes. Podemos suponer que no las hay.

### 3.6 El modelo binomial de valoración de opciones

Ya estamos preparados para presentar el llamado modelo binomial de valoración de opciones. Se trata de una versión simplificada del modelo de Black-Merton-Scholes. Sólo vamos a considerar el modelo bajo la hipótesis de que hay un único periodo de tiempo. Esto significa que estamos suponiendo que sólo podemos negociar el principio y al final de ese periodo de tiempo.

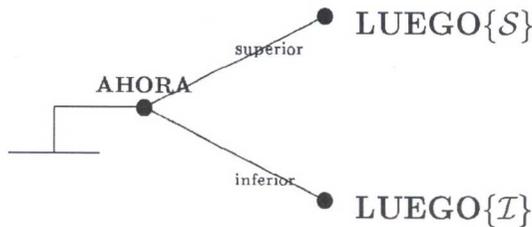
Veremos ahora cómo actúan la hipótesis de ausencia de oportunidad de arbitraje y la replicación en el diseño del modelo.

#### 3.6.1 1 periodo, 2 estados, 3 activos

Disponemos de **tres** activos *distintos*. Cada activo se identifica con su flujo, es decir, con lo que paga o vale.

Sólo analizamos **un** intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ).

Y suponemos que el mundo sólo puede evolucionar del estado actual a **dos** estados futuros, que denotamos convencionalmente por  $\mathcal{S}$  =superior e  $\mathcal{I}$  =inferior.



Representemos los valores de los activos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el futuro, al final del periodo de tiempo, en cada uno de los estados  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{I}$  por  $A_s, A_i; B_s, B_i; C_s, C_i$  y resolvamos el sistema (con  $\alpha$  y  $\beta$  como incógnitas).

$$\begin{cases} C_s = \alpha A_s + \beta B_s \\ C_i = \alpha A_i + \beta B_i \end{cases}$$

Las dos carteras siguientes:

(1) 1 unidad del activo  $C$

(2)  $\alpha$  unidades de  $A$  más  $\beta$  unidades de  $B$

tienen los mismos flujos. Por tanto, si no hay oportunidad de arbitraje, debe darse además que sus precios en el tiempo presente deben coincidir:

$$C_{\text{ahora}} = \alpha A_{\text{ahora}} + \beta B_{\text{ahora}}$$

La conclusión es que si “conocemos” los activos  $A$  y  $B$  y además conocemos los flujos (futuros) del activo  $C$  podemos hallar su valor actual. En otros términos, si conocemos  $A$  y  $B$  podremos valorar  $C$  en términos de sus flujos.

### 3.6.2 Valoración de un derivado

Concretemos el análisis anterior en un caso particular, cuyos ingredientes son

**A:** El activo sin riesgo:  $1 \rightarrow 1 + R$ .

**B:** Un activo subyacente.

**C:** Un activo derivado.

El activo  $A$  es el dinero. La rentabilidad (efectiva simple) del dinero es  $R$ . Es decir, por 1 euro de hoy nos devuelven  $1 + R$  euros al final de ese periodo de tiempo. El factor  $1 + R$  permite comparar dinero del final del periodo con dinero de hoy, es pues el factor de escala que permite actualizar.

$B$  es el activo (por ejemplo, una acción de BSCH) sobre el que está escrito el contrato derivado (por ejemplo, una *call*).

Los estados futuros del mundo vendrán determinados por lo único relevante: la **cotización de  $B$** , de la que supondremos que si  $P_0$  es su cotización actual, entonces los valores futuros podrán ser sólo

$$\text{Superior: } P_0 \rightarrow P_0 \cdot u$$

$$\text{Inferior: } P_0 \rightarrow P_0 \cdot (1/u)$$

La rentabilidad (continua) de  $B$  tiene dos posibles valores  $\pm \log u$ . Este parámetro  $u$  juega un papel muy importante y da lugar a la **volatilidad**.

Como “conocemos”  $A$  y  $B$ , podemos valorar  $C$  en términos de sus contingentes valores futuros. Tras resolver el sistema con incógnitas  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{cases} C_s = \alpha(1 + R) + \beta P_0 u \\ C_i = \alpha(1 + R) + \beta P_0 (1/u) \end{cases}$$

haciendo el álgebra correspondiente se obtiene:

$$C_{\text{ahora}} = \frac{1}{1 + R} \left[ (1 - p) C_i + p C_s \right]$$

donde  $p$  viene dado por

$$1 + R = pu + (1 - p)(1/u).$$

Importa observar que

- $0 < p < 1$ , y **podemos interpretar** a  $p$  como una probabilidad:  $p$  es la probabilidad de subir y  $1 - p$  es la probabilidad de bajar.
- $C_{\text{ahora}}$  resulta ser **el valor promediado (con  $p$  y  $1 - p$ ) actualizado** de los posibles valores de  $C$  al final del periodo.
- Además,

$$1 + R = pu + (1 - p)(1/u)$$

o también,

$$R = p(u - 1) + (1 - p)((1/u) - 1)$$

Es decir, la probabilidad  $p$  es aquella para la que la rentabilidad promediada del activo subyacente es justamente la del activo sin riesgo. Por eso a  $p$  se le conoce como la probabilidad *riesgo-neutro*: es la probabilidad subjetiva que un inversor indiferente al riesgo le adjudicaría a la evolución de  $B$ .

En palabras:

$$\text{prima} = \text{actualización} \star \text{valor medio de pagos}$$

promediando de manera que se cumpla

$$\begin{aligned} &\text{rendimiento } \mathbf{medio} \text{ del activo con} \\ &\text{riesgo} = \\ &\text{rendimiento } \mathbf{seguro} \text{ del activo sin} \\ &\text{riesgo} \end{aligned}$$

Es importante señalar que en el argumento anterior no sólo se dice qué prima debe tener el derivado (la valoración), sino que además nos dice cómo invertir esa prima (la replicación), basta resolver el sistema y obtener  $\alpha$  y  $\beta$ .

La valoración y la cobertura o replicación son aspectos inseparables de la misma cuestión.

Al comienzo del periodo de tiempo sabemos qué cartera replicará el valor del derivado en el periodo siguiente.

### 3.7 La volatilidad

La conclusión de todo lo anterior es que si se ha determinado  $u$  podemos determinar precios de derivados por arbitraje.

Pero, y ¿ $u$ ? La varianza  $\sigma$  de la rentabilidad (continua) de  $B$  es

$$\sigma^2 = (\log u)^2 4p(1-p)$$

De manera que podemos determinar  $u$  y  $p$  si conocemos la varianza de la rentabilidad en ese periodo de tiempo. Es decir, el riesgo determina los precios de los derivados. Como  $u$  mide la varianza de la rentabilidad,  $u$  una medida de riesgo.

Por ejemplo, si el periodo de tiempo es una semana y  $P_1, P_2, P_3, \dots$  son cotizaciones de semana en semana. Entonces podemos formar la serie  $x_1, x_2, x_3, \dots$  donde

$$x_i = \log(P_{i+1}/P_i)$$

y la varianza muestral  $s$  de estos  $x_i$ 's es un estimador de  $\sigma$ .

En realidad, en el mercado, la volatilidad es lo que cotiza. Los agentes del mercado se ponen de acuerdo en qué volatilidad usar para así determinar los precios a partir de ella.

### 3.8 La fórmula de Black-Scholes

Todo esto es una primera aproximación. Cuando se supone que la negociación es continua hay que iterar el análisis anterior y pasar al límite para obtener la famosa fórmula de Black-Scholes.

Si  $R$  es el tipo de interés anual continuo, y si  $\sigma$  es la desviación típica anual del rendimiento de  $B$ , entonces la prima de una put sobre una acción de  $B$  con strike  $K$  y vencimiento en  $T$  (medido en años) es

$$\text{prima} = Ke^{-RT} \Phi(-d_-) - S\Phi(-d_+)$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución de la normal y donde:

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \log(S/K) + (R \pm \frac{\sigma^2}{2})T \right)$$

Esta fórmula desempeña en el mundo financiero un papel fundamental y es comparable a algo tan simple como la noción de interés continuo.

Lo espectacular, contraintuitivo (¡la intuición se educa, claro!) de esta fórmula es que, aparte de los datos del contrato, todo queda determinado por la volatilidad, por el nivel de riesgo, y no por la rentabilidad, que no aparece.

Cuanto más grande es  $\sigma$  mayor es la prima. Como debe ser. Cuanto mayor es la incertidumbre, el riesgo, mayor es la prima que hay que pagar por ese contrato que es un seguro.

### 3.9 Algunas referencias y lecturas recomendadas

*Theorie de la spéculation.* **L. Bachelier** Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, tome 17, pp. 21-86, 1900. Existe una edición facsímil de editions Gabay, Paris, 1995.

*The pricing of Options and Corporate Liabilities.* **F. Black, M. Scholes:** Journal of Political Economy, 1973

*Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis.* **D. Bernoulli** Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae 5, 1738, pp. 175-192. Hay traducción al inglés en *Econometrica*.

*Desarrollo, Geografía y Teoría Económica.* **P. Krugman.** Antoni Bosch, Editor

*Continuous time finance.* **R. Merton.** Blacwell, 1990

*Confusión de confusiones.* **Joseph de la Vega.** Amsterdam, 1688

◆ Un excelente tratado de reciente publicación sobre Matemática y Finanzas es

*Derivatives. The theory and practice of financial engineering* **P. Wilmott** J. Wiley, 1998

# El Problema Isoperimétrico

Antonio Ros  
Universidad de Granada

El autor explica diferentes problemas isoperimétricos en el espacio tridimensional. Así, las superficies de Delaunay, el problema de la partición o la pompa múltiple.

## 1 Introducción

La sola mención del problema isoperimétrico nos hace soñar con la Grecia clásica, la fundación de Cartago y la perfección y simetría de la esfera. Es difícil introducir este tipo de problemas sin remontarse a la época de los griegos y a la de la reina Dido. Éste es uno de los tópicos más conocidos de la geometría y, en su versión para regiones planas, es uno de los resultados más utilizados en la divulgación de las matemáticas. Nosotros nos vamos a centrar en algunos problemas isoperimétricos en el espacio 3-dimensional. La versión básica de este problema trata la propiedad que enunciamos a continuación de dos maneras equivalentes:

*De entre todas las superficies que encierran un volumen dado, la esfera es la que tiene menor área.*

*De entre todas las superficies cerradas de área dada, la esfera es la que encierra el mayor volumen.*

Aunque el término *isoperimétrico* hace referencia más concretamente a la segunda versión, hoy día se entiende que la primera es más natural (aunque en este caso las dos son equivalentes, en otros problemas relacionados o en otros espacios podrían no serlo).

Si el área de nuestra superficie es  $A$  y el volumen que encierra es  $V$ , entonces la afirmación anterior admite una tercera redacción:

$$A^3 \geq 36\pi V^2,$$

*y la igualdad se da si y sólo si la superficie es una esfera. Es la llamada Desigualdad Isoperimétrica.*

Si en lugar de trabajar en el espacio consideramos dominios planos, entonces se tiene un resultado bien conocido por todos: *de entre todas las curvas que encierran un área dada, la de menor longitud es la circunferencia.*

Los problemas isoperimétricos fueron ya tratados por los geómetras de Alejandría. En particular Zenodoro (entre el 200 a. C. y el 100 d. C.) escribió un libro (que no ha llegado directamente hasta nosotros pero sí a través de otros autores como Pappus) sobre este tema. Su resultado más conocido es la demostración de que, de entre todos los polígonos planos de  $n$  lados con área dada, el polígono regular es el que tiene perímetro mínimo. Esta propiedad implica directamente, módulo un trabajo previo de formalización de los conceptos involucrados, la propiedad isoperimétrica de la circunferencia. A estas demostraciones, al igual que a otros argumentos posteriores sobre el mismo tema (el más famoso de los cuales es debido a Steiner) se les suele reprochar en los trabajos de divulgación y en los comentarios sobre la “evolución histórica de la idea del rigor” en matemáticas, el hecho de que pasan por alto el problema de la existencia de la solución y sólo razonan que, supuesta la existencia de ésta, la solución debe ser redonda. Con cierta arrogancia, y al hilo de este tema, se aprovecha la ocasión para recriminar a algunos de los más sesudos y venerables geómetras del pasado (en ocasiones estos reproches alcanzan al mismísimo Riemann).

Sin embargo, en la actualidad, la situación con la que nos encontramos al estudiar este tema es exactamente la contraria. Disponemos de resultados de existencia plenamente satisfactorios que cubren casi todas las cuestiones isoperimétricas naturales, mientras que la descripción explícita de las soluciones es un asunto prácticamente inexplorado, mas allá de unos pocos casos sencillos. Contrariamente al problema de la existencia donde se han podido desarrollar métodos generales, los métodos para identificar las regiones óptimas son escasos y de alcance limitado. Es ahora cuando esos argumentos clásicos, a veces denostados, manifiestan todo su

valor.

A los dominios de volumen prefijado que tienen área mínima, de entre todos los que encierran un volumen dado bajo cierta condición natural dada se les llama *dominios isoperimétricos*.

En particular, en el caso clásico enunciado arriba, es decir, el problema de encontrar los dominios isoperimétricos del espacio, tenemos garantizada por resultados generales la existencia y regularidad de estos dominios. Aunque no vamos a entrar a considerar cómo se consiguen estos resultados de existencia y, sobre todo, de regularidad, sí diremos al menos que éste es un problema difícil y que sólo se ha conseguido resolver satisfactoriamente en las últimas décadas mediante el desarrollo de la llamada teoría geométrica de la medida.

La superficie que resuelve el problema isoperimétrico en el espacio es regular y tiene *curvatura media constante*. La curvatura media es el invariante numérico más simple que se puede asociar a un punto de una superficie (aquí invariante significa que no cambia cuando la superficie se transforma mediante un movimiento rígido). Si, alrededor de un punto, la superficie viene dada como el grafo de la función  $u$ , la curvatura media de la superficie en ese entorno viene dada por la fórmula

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}},$$

donde  $\operatorname{div}$  es el operador divergencia y  $\nabla u$  es el gradiente de la función  $u$ .

De la condición de tener curvatura media constante se pueden deducir, gracias a la expresión anterior, muchas propiedades agradables. Por ejemplo, la superficie solución del problema es regular en su grado más extremo ya que de hecho se tiene la propiedad siguiente:

**H1.** *Una superficie de curvatura media constante es analítica.*

Creo que el hecho de que se tenga a priori, no sólo la existencia sino también la analiticidad de la solución, habría sorprendido a los clásicos ya que ésta tiene consecuencias importantes sobre los argumentos geométricos que se pueden aplicar a la superficie.

Otra consecuencia geométrica útil de la forma concreta que tiene la expresión de la curvatura media es que:

**H2.** Si dos superficies con la misma curvatura media constante tienen una curva frontera común y el mismo plano tangente a lo largo de esa curva, de manera que la unión de ambas forma una superficie de clase  $C^1$ , entonces la unión de las dos superficies es una superficie de curvatura media constante (y por tanto analítica).

A partir de estas propiedades y utilizando las simetrías del espacio, la demostración de la propiedad isoperimétrica de la esfera se hace como sigue.

Sea  $S$  la superficie que resuelve el problema en el espacio y  $\Omega$  la región que encierra.

1. *La región  $\Omega$  es conexa.* En efecto si  $\Omega$  tuviera varias componentes, podríamos trasladar una de ellas hasta que tocara por primera vez a alguna de las restantes. La nueva región  $\Omega'$  es también una región isoperimétrica que, sin embargo, presenta una singularidad. Esta contradicción demuestra la conexión de  $\Omega$ .

2. *Dado un plano  $P$ ,  $\Omega$  es simétrica respecto de un plano paralelo a  $P$ .* Para demostrar esta afirmación, desplazamos continua y paralelamente el plano  $P$  hasta que conseguimos una posición  $P'$  que divide a  $\Omega$  en dos partes de igual volumen  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Sean  $\Omega'_1$  y  $\Omega'_2$  las imágenes simétricas de los dominios anteriores. La propiedad minimizante de  $\Omega$  implica que  $P'$  biseca también el área de  $S$  (en otro caso alguno de los dominios  $\Omega_1 \cup \Omega'_1$  o  $\Omega_2 \cup \Omega'_2$  tendría igual volumen que  $\Omega$  pero menor área en su frontera). Además  $\Omega_1 \cup \Omega'_1$  es una nueva región isoperimétrica y, por tanto, su frontera es regular. Puesto que las superficies que bordean a  $\Omega$  y a  $\Omega_1 \cup \Omega'_1$  coinciden en una parte abierta y no vacía, la analiticidad de la solución implica que ambas superficies son iguales. Así, concluimos que  $\Omega$  es simétrica respecto de  $P'$ .

3. *Si una región acotada verifica la propiedad 2, entonces su frontera consiste en una familia de esferas concéntricas.* Para demostrar esta propiedad basta con observar que todos los planos de simetría de la región tienen que ser concurrentes (ya que otra cosa contradeciría la acotación de la región). El resto de la afirmación se sigue trivialmente.

Uniendo 1,2 y 3, y usando que esferas de distinto radio tienen curvaturas medias distintas, obtenemos que  $S$  está formado por una única esfera y que  $\Omega$  es la bola encerrada por ésta. Esto termina la demostración de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbf{R}^3$ .

Claro está que la situación estudiada hasta ahora no es la única en donde se desea conocer explícitamente los dominios isoperimétricos. En geometría existen otros espacios interesantes, además del euclideo, y aun limitándonos al caso euclideo existen variantes importantes del problema. Como hemos dicho anteriormente, se conocen resultados de existencia y regularidad pero, prácticamente, no se disponen de descripciones exactas de estas superficies salvo en muy pocos casos. Por ejemplo, los dominios isoperimétricos del espacio hiperbólico o de la esfera de dimensión tres son las bolas métricas. La demostración es exactamente la misma que para el espacio euclideo ya que estos espacios tienen muchas simetrías. Hay muy pocos espacios, además de los ya citados, en donde se conozca la lista completa de sus dominios isoperimétricos. El conocimiento más completo de estos dominios tendría sin duda consecuencias importantes. Como botón de muestra de los resultados obtenidos en los últimos años pensemos en las dos cuestiones siguientes:

**P1.** *De entre todas las superficies cerradas que dividen la esfera 3-dimensional en dos regiones con el mismo volumen, encontrar la de menor área.*

**P2.** *De entre todas las superficies cerradas que dividen la esfera 3-dimensional en dos regiones con el mismo volumen y que además sean simétricas respecto del centro de la esfera, encontrar la de menor área.*

La respuesta a la primera cuestión es clásica y se puede obtener por el método esbozado anteriormente para el caso euclideo: El ecuador.

En el segundo caso, el ecuador no es la solución puesto que no cumple las hipótesis (las piezas en las que divide a la esfera no son invariantes por antípoda). Tampoco puede usarse el método de simetrización anterior. La solución correcta se conoce desde hace poco: el toro de Clifford (es decir la superficie  $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\} \cap \{z^2 + t^2 = \frac{1}{2}\}$  en  $\mathbf{R}^4$ ). La solución del problema **P2** ha permitido, a su vez, resolver la conjetura de Willmore en el caso invariante por antípoda (un problema en el que se quiere minimizar un funcional geométrico que lleva asociada una ecuación de Euler-Lagrange de cuarto orden).

## Superficies de Delaunay

Describiremos en este apartado las superficies de revolución de curvatura media constante llamada usualmente superficies de Delaunay. Necesitaremos conocer algunas propiedades de estas superficies en los apartados restantes. En 1841, Delaunay demostró que las curvas generatrices de estas superficies se obtienen haciendo rodar una cónica a lo largo de una recta y siguiendo la trayectoria que describe uno de sus focos. Las curvas construidas mediante este método mecánico se conocen como *ruletas* (la más famosa de las ruletas es la *Cicloide*, que se obtiene haciendo rodar una circunferencia y siguiendo la trayectoria de uno cualquiera de sus puntos). El ejemplo más sencillo de superficie de Delaunay es el cilindro que se obtiene haciendo rodar una recta alrededor de un eje paralelo a la misma (la recta, es la ruleta que engendra el centro de la circunferencia cuando ésta rueda a lo largo de una recta dada).

Los tipos de superficies de Delaunay son los siguientes:

- *El Plano.*
- *La Esfera.*
- *El Cilindro.*
- *El Onduloide.* Obtenido a partir de la elipse. No tiene autointersecciones. Es una superficie periódica.
- *La Catenoide.* Obtenida a partir de la parábola. Tampoco tiene autointersecciones. Tiene curvatura media nula.
- *El Noduloide.* Obtenido a partir de la hipérbola. Tiene autointersecciones. Es periódico.

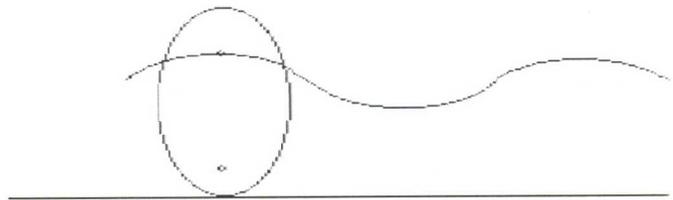


Figura 1: El onduloide es una ruleta de la elipse.

Resaltamos también las siguientes propiedades.

**D1.** La única superficie de Delaunay compacta sin borde es la esfera.

**D2.** La única superficie de Delaunay que corta al eje de revolución es la esfera.

**D3.** Sea  $S$  una superficie de Delaunay, no plana ni esférica, cuyo eje pase por el origen y  $v$  un vector unitario no contenido en su eje  $L$ . Entonces la curva de ceros de la función  $u(p) = \det(p, v, N(p))$ , donde  $N$  es el campo normal unitario de  $S$ , contiene a la sección plana  $S \cap P$ , siendo  $P$  el plano que engendrado por  $L$  y  $v$ , y a las circunferencias (invariantes por las rotaciones de  $S$ ) definidas por los puntos en donde  $N(p)$  es paralelo a  $p$ .

En lo que sigue, vamos a estudiar el problema isoperimétrico en dos situaciones interesantes:

1. *El problema de partición.* Dada una región regular del espacio  $W \subset \mathbf{R}^3$ , encontrar de entre todas las superficies que están incluidas en  $W$  y encierran (en esa región) un volumen dado aquellas que tienen área mínima.

2. *El problema de la pompa múltiple.* Entre todas las superficies del espacio que encierran y separan  $n$  volúmenes prefijados, encontrar las de área mínima.

Para estos dos tipos de problemas se tienen resultados completos de existencia y regularidad. Respecto de la descripción explícita o cualitativa de las soluciones, los progresos son pocos y corresponden a temas de investigación en los que se trabaja actualmente.

## 2 El Problema de Partición

Dada una región regular del espacio  $W$  y prefijado un número positivo  $V$  menor que el volumen de  $W$ , queremos estudiar, de entre todas las superficies en  $W$  que separan un volumen  $V$ , las que tienen área mínima. Nótese que ahora, las superficies pueden tener borde en cuyo caso éste debe estar contenido en el borde de  $W$ . También debe tenerse en cuenta que, si la región de espacio encerrada por la superficie está bordeada también por puntos de  $\partial W$ , el área que aporta esta parte de su frontera no se computa, ver figura 2.

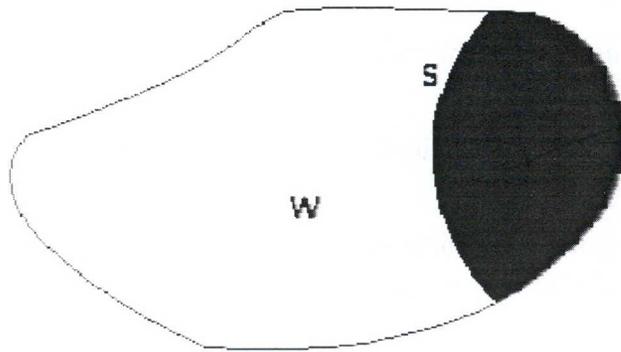


Figura 2: El problema de partición en  $W$ .

La teoría general garantiza la existencia y la regularidad de la solución  $S$  (al menos cuando  $W$  es compacto). Además, las superficies que resuelven el problema tienen curvatura media constante y, caso de tocar a la superficie  $\partial W$ , la cortan ortogonalmente en todos los puntos de contacto (esta condición en el borde, se verifica por la misma razón que hace que el segmento más corto que une un punto con una recta exterior al mismo es perpendicular a esa recta).

Si  $W$  es una región estrictamente convexa, se puede demostrar que  $S$  es conexa y que su topología (es decir, su género y el número de curvas que forman su borde) está acotada. La conjetura natural en esta situación es la siguiente:

**Conjetura.** *Toda solución al problema isoperimétrico en una región estrictamente convexa es homeomorfa a un disco.*

### El Problema Isoperimétrico en un Semiespacio

Empezamos tratando el caso en el que la región  $W$  es la más sencilla posible. En este caso se trata de encontrar las superficies de área mínima en el semiespacio  $z \geq 0$  entre todas las que separan una región de volumen dado. Las soluciones a este problema existen (claramente prefijados dos volúmenes distintos, las soluciones asociadas son homotéticas). El problema para el semiespacio es algo más complicado que para el espacio total porque ahora el número de

simetrías del problema es menor (aunque aún es bastante grande). Veamos que:

**Teorema.** *Los dominios isoperimétricos del semiespacio son las semi-bolas que descansan sobre el plano  $z = 0$ .*

**Demostración.** Sea  $\Omega$  la región isoperimétrica de  $z \geq 0$  que encierra un cierto volumen dado  $V$ .

1.  $\Omega$  corta al plano  $z = 0$ . En otro caso su frontera sería una superficie cerrada completamente regular. Desplazando la región hasta que contacte con el plano  $z = 0$  obtenemos una nueva región isoperimétrica que tiene un comportamiento no admitido (corta al plano  $z = 0$  de forma no ortogonal).

Los argumentos utilizados cuando el espacio ambiente era todo el espacio, demuestran que  $\Omega$  es conexo y tiene un eje de revolución paralelo al eje  $z$  (téngase en cuenta que, ahora, las únicas simetrías que preservan el problema son las simetrías respecto de planos verticales).

Reflejando cada superficie de  $\partial\Omega$  al otro lado del plano  $z = 0$ , se obtienen superficies de Delaunay compactas y sin borde. Por la propiedad **D1** se tiene que el borde de  $\Omega$  está formado por semiesferas del mismo radio. Por tanto,  $\Omega$  es una semi-bola.

### El Problema Isoperimétrico en una Bola

Si consideramos ahora el caso de que  $W$  sea una bola, usando los argumentos de simetrización anteriores concluimos que cualquier superficie minimizante  $S$  es una superficie de revolución que corta al borde de la bola ortogonalmente. Existen superficies de este tipo que no son esféricas (por ejemplo, existen piezas de una Catenoide que verifican todas estas condiciones, ver la figura 3).

Vamos a demostrar el siguiente resultado.

**Teorema.** *Los dominios isoperimétricos de la bola son los dominios encerrados por los casquetes esféricos que cortan ortogonalmente el borde de la bola y el disco plano a través del centro de la bola.*

Para ello tenemos que introducir un concepto nuevo y comentar algunas de sus propiedades. Se trata de las *variaciones* o deformaciones infinitesimales de una superficie. Un campo de vectores  $X$  en el espacio representa una deformación infinitesimal. Si quere-

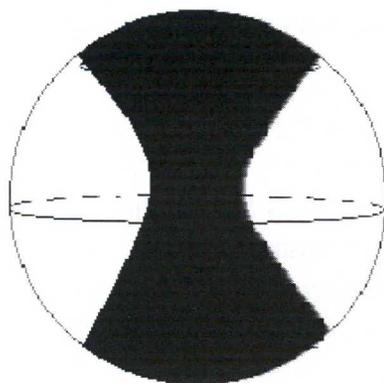


Figura 3: un candidato a dominio isoperimétrico de la bola

mos estudiar cómo las transformaciones asociadas a  $X$  afectan a la forma de  $S$  sólo tenemos que considerar la parte normal  $\langle X, N \rangle$  de  $X$  a lo largo de  $S$  ( $N$  representa el campo normal unitario de  $S$ ) ya que la parte tangente de  $X$  induce transformaciones de  $S$  en sí misma. Por tanto tenemos

**V1** Las variaciones infinitesimales de una superficie  $S$  en el espacio vienen representadas por funciones definidas sobre  $S$ .

De lo anterior, se sigue que la variación infinitesimal de los distintos funcionales naturales definidos sobre la superficie, como su área o el volumen del dominio que encierra, se puede expresar en términos de estas funciones. Por ejemplo, se puede comprobar con algunos cálculos sencillos, que:

**V2.** La deformación inducida por una función  $u$  preserva (infinitesimalmente) el volumen encerrado por  $S$  si y sólo si

$$\int_S u dA = 0.$$

Sea  $Rot_\theta$  el grupo 1-paramétrico de las rotaciones alrededor de una recta  $L$  engendrada por un vector unitario  $v$ . El campo de vectores infinitesimal asociado a este grupo de transformaciones viene dado por  $X(p) = p \wedge v$  y la parte normal es la función  $u(p) = \det(p, v, N(p))$  ( $\det$  representa el determinante). Si la superficie  $S$  es localmente invariante por  $Rot_\theta$ , entonces  $u \equiv 0$ . En

otro caso, el conjunto de ceros de  $u$  forma un sistema de curvas en  $S$ .

El resultado siguiente se puede demostrar usando el enfoque infinitesimal que acabamos de esbozar. La idea de la demostración es la de construir, suponiendo falsa la tesis, una deformación de la superficie que preserva el volumen encerrado y haga decrecer el área de la superficie (aunque no hemos podido encontrar un argumento geométrico libre de cálculos que justifique la existencia de esta deformación).

**V3.** *Sea  $W$  una región invariante por el grupo de rotaciones  $Rot_\theta$  de eje  $L = L(v)$  y  $S$  una superficie minimizante para el problema de partición de  $W$ . Entonces  $S$  es localmente invariante bajo  $Rot_\theta$  o la curva de ceros de la deformación infinitesimal  $u = \det(p, v, N)$  separa a  $S$  a lo más en 2 piezas.*

Volviendo al caso de la bola, supongamos que la solución  $S$  no es esférica y sea  $L'$  la recta que pasa por el origen y por el punto de  $S$  más próximo al centro de la bola (supondremos que la bola está centrada en el origen). Sea  $v$  el vector unitario que va en la dirección de  $L'$ . Por la propiedad **D2** sabemos que  $L'$  no coincide con el eje de revolución  $L$  de  $S$ . Por la propiedad **D3** el conjunto de ceros de  $u$  divide a  $S$  en al menos 4 partes, lo que contradice la propiedad **V3**.

Como muestra de otras variantes interesantes que se pueden presentar, tenemos el problema de encontrar las superficies de área mínima de entre todas las de la bola que encierran un volumen dado y son simétricas respecto del centro de la bola. Es probable que los dominios isoperimétricos de este problema sean de revolución pero no sean todos esféricos.

### El Problema Isoperimétrico en una Caja

Consideremos la región convexa  $W$  determinada por las ecuaciones

$a \leq x \leq a'$ ,  $b \leq y \leq b'$  y  $c \leq z \leq c'$ , para ciertas constantes arbitrariamente elegidas. A las regiones de este tipo las llamaremos *cajas*. La conjetura más plausible para la región  $W$  es la siguiente:

**Conjetura.** *Las superficies que limitan los dominios isoperimétricos de la caja  $W$  son un octante de esfera (centrado en uno de los vértices de  $W$ ), un cuarto de cilindro (cuyo eje es una de las*

aristas de  $W$ ) o un trozo de plano (paralelo a alguna de las caras de  $W$ ) dependiendo del valor de  $V$  y de las constantes concretas que definen a  $W$ .

Por el momento lo que se sabe es lo que sigue:

- La conjetura es cierta salvo, tal vez, para una región compacta del espacio de las cajas (modulo homotecias).

- Las soluciones son superficies de curvatura media constante con la topología de un disco, que cortan ortogonalmente al borde de  $W$  y que se expresan como grafos simultáneamente sobre los tres planos coordenados.

En el caso, algo más sencillo, de que una de las aristas tenga longitud infinita, se pueden construir utilizando pompas de jabón todas las superficies candidatas, pero también se pueden obtener otras pompas distintas que cumplen todas las restricciones anteriores. El problema radica justamente en demostrar que esos otros candidatos más complicados no son minimizantes. El hecho de que se puedan construir esas superficies usando pompas de jabón nos dice que las superficies son al menos mínimos locales del problema isoperimétrico.

Una situación simple, parcialmente relacionada con la anterior, que si está resuelta es la del problema isoperimétrico en una región del espacio de la forma  $0 \leq z \leq 1$ : las soluciones son semiesferas, si el volumen prefijado es pequeño y trozos de cilindro vertical en los casos restantes.

### 3 La Pompa Múltiple

#### El Problema de La Pompa Doble

La pompa doble *standard* es la figura que se forma cuando, al jugar con pompas de jabón aparecen dos de ellas unidas como en la figura 4. Está compuesta por tres casquetes esféricos (alguno de los cuales puede degenerar en un disco plano) bordeados por una misma circunferencia. Además, los tres casquetes se cortan de manera equiangular a lo largo de esa circunferencia. El problema consiste en demostrar la siguiente.

**Conjetura.** *Entre todas las superficies que encierran y separan dos cuerpos de volúmenes prefijados en  $\mathbf{R}^3$ , la pompa doble standard*

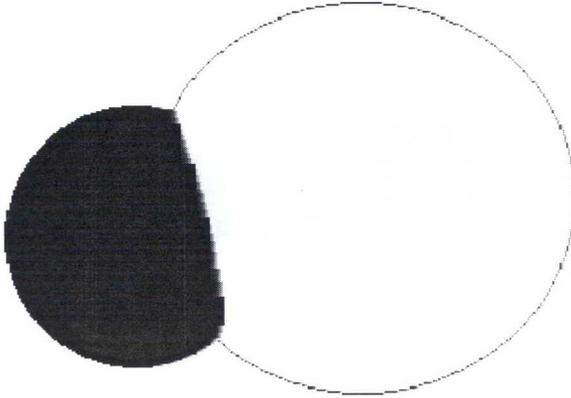


Figura 4: La pompa doble standard

es la que tiene menor área.

Una consecuencia del llamado teorema del bocadillo de jamón (que asegura que dados tres cuerpos en el espacio, existe un plano que divide cada uno de ellos en dos partes de igual volumen) nos permite demostrar que la pompa doble de área mínima es una superficie de revolución.

La propiedad **V3** se puede adaptar a la situación que tratamos ahora, y por ejemplo, nos permite concluir que una pompa doble del tipo de la que aparece en la figura 5 no puede ser minimizante. La dificultad principal que queda por resolver en este problema es la de demostrar que, en la solución minimizante, las regiones encerradas son conexas (pompa triple de la figura 6 puede interpretarse como una pompa doble en donde una de las regiones encerradas tiene dos componentes).

### La Pompa múltiple

Evidentemente, podemos preguntarnos también cuál es la superficie de menor área que encierra y separa  $n$  volúmenes prefijados del espacio. Existen teoremas que garantizan la existencia de un mínimo para este problema. Sabemos además que la solución es una *pompa múltiple*: está formada por trozos regulares de superficies de curvatura media constante que se pegan de tres en tres y

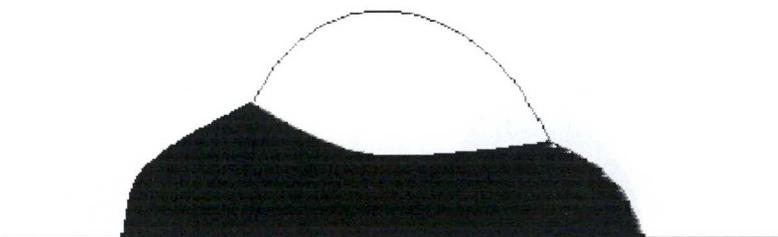


Figura 5: Una pompa doble de revolución no *standard*

de manera equiangular a lo largo de curvas regulares. Estas curvas se encuentran de cuatro en cuatro y de manera equiangular en una cantidad finita de vértices, el ejemplo más simple es la *pompa múltiple standard* (cuyas piezas son esféricas o planas) que encierra y separa 2, 3 o 4 volúmenes prefijados. Fijados 2, 3 o 4 volúmenes arbitrariamente, existe una pompa *standard* y sólo una que encierra esos volúmenes. La conjetura general es la siguiente.

**Conjetura** *La pompa standard es la solución minimizante cuando  $n \leq 4$ .*

Para  $n > 4$  ni siquiera se tiene un candidato natural para el problema de minimización del área. Los resultados que se conocen están muy cerca de la demostración completa para el caso de la pompa doble.

El problema abierto de más interés en este contexto es el de demostrar la propiedad minimizante de la *pompa triple*. En este caso, el teorema del bocadillo de jamón nos permite concluir que la solución es simétrica respecto de algún plano.

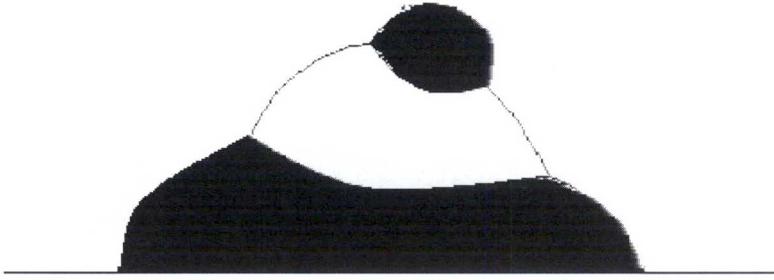


Figura 6: Una pompa triple de revolución no *standard*

## Bibliografía

- [1] Richard Courant and Herbert Robbins, *What is mathematics?* Oxford univ. press 1941.
- [2] David Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination* Chelsea publ. com. 1952.
- [3] Stefan Hildebrandt y Anthony Tromba, *Matemática y formas óptimas*, Biblioteca Scientific American, 1990.
- [4] Frank Morgan, *Geometric measure theory, a beginner guide*, 2nd ed., Academic Press, 1995.



# ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES

Gilbert Strang

En este trabajo se estudia una nueva factorización para una matriz. El autor describe como la misma surgió a partir del intento de crear códigos de *MATLAB* para facilitar la enseñanza de álgebra lineal y desarrollar unos ejemplos.

## REDUCCIÓN POR FILAS DE UNA MATRIZ y FACTORIZACIÓN $A = c a r$

Steven L. Lee  
[slee@matrix.llnl.gov](mailto:slee@matrix.llnl.gov)  
[www.llnl.gov/CASC/people/lee](http://www.llnl.gov/CASC/people/lee)  
[math.mit.edu/~gs](http://math.mit.edu/~gs)

Gilbert Strang  
[gs@math.mit.edu](mailto:gs@math.mit.edu)  
[http://www-](http://www-math.mit.edu/~gs)

### Resumen

Cada matriz tiene una única forma canónica reducida por filas  $R = \mathbf{rref}(A)$ . Algorítmicamente, la matriz  $A$ , de orden  $m \times n$ , se reduce a  $R$  por una sucesión de operaciones elementales entre filas. El producto de esas operaciones es una matriz de eliminación  $E$  tal que  $EA = R$ . Parte de  $E$  está unívocamente determinada y parte depende de la secuencia de los pasos. Análogamente, parte de  $E^{-1}$  está determinada y parte no lo está. Mostraremos cómo  $E$  y  $R$  producen bases naturales de los cuatro subespacios fundamentales (los espacios columna y los espacios nulos de  $A$  y  $A^T$ ). Ellos también producen la factorización  $A = C^* R^*$  en columnas pivotes por las filas reducidas.

Esto lleva a la factorización escalonada  $A = c a r$ , en la que  $r$  contiene las filas no nulas de  $\mathbf{rref}(A)$ ,  $c$  contiene las columnas

no nulas de  $(\mathbf{rref}(A'))'$ , y  $a$  es la submatriz no singular formada por las filas y columnas pivote de  $A$ . Esta factorización nos dice todo sobre las bases escalonadas reducidas del espacio fila y del espacio columna.

Todos estos pasos están convenientemente descritos mediante sencillos comandos en nuestro *Códigos para Enseñar Álgebra Lineal*. Los comandos también se encuentran en la página de internet <http://web.mit.edu/18.06/www>. Los estudiantes encuentran de gran valor en el terreno práctico (¡y también teórico!) los pasos básicos del curso de álgebra lineal.

Es difícil decir algo nuevo sobre las formas de reducción de una matriz. Es muy probable que este trabajo tampoco lo logre. Pero escribiendo nuevamente sobre álgebra lineal (y creando pequeños códigos para enseñar a los estudiantes durante el curso), encontramos algunas ideas que eran nuevas para nosotros. Estamos siempre trabajando con la matriz  $A$   $m \times n$  de rango  $r$ . Estábamos seguros de que la forma canónica reducida por filas  $R = \mathbf{rref}(A)$  podría aclararnos los cuatro subespacios fundamentales, y así lo hizo.

Nuestro primer ejemplo será muy simple, una matriz  $2 \times 2$  de rango 1. Si los estudiantes pueden hacer la reducción a mano, nosotros también podemos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ se reduce a } R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma reducida tiene una submatriz identidad  $r \times r$  en las  $r$  primeras filas. Todos los elementos no nulos que quedan, van a la derecha de los unos y  $R$  termina con  $m - r$  filas de ceros. Nuestro ejemplo tiene una submatriz identidad  $1 \times 1$  y una fila de ceros. La primera pregunta es, ¿cómo llegamos a  $R$  desde  $A$ ?

En este ejemplo podríamos haber multiplicado la primera fila por  $\frac{1}{2}$  y después restársela a la fila segunda. El resultado es  $R$  y el producto de esas dos operaciones elementales es  $E$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = E$$

También podríamos intercambiar las filas 1 y 2 de  $A$  y después restar el doble de la fila 1 a la fila 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = E_{new}$$

Cuando aplicamos  $E$  o  $E_{new}$  (o alguna tercera posibilidad todavía no identificada) a  $A$ , el resultado es la misma  $R$ :

$$EA = R \quad \text{y} \quad E_{new}A = R$$

Algebraicamente,  $R$  está determinada de forma única por  $A$ . Las "operaciones elementales entre filas" restan  $c$  veces la fila  $j$  de la fila  $i$ , o intercambian las filas  $i$  y  $j$ , o multiplican por  $c$  la fila  $i$  ( $c \neq 0$ ). El ejemplo incluye las tres operaciones y consigue una única  $R$  (pero  $E$  no es única). Este es un punto importante en este escrito y queremos analizar como es  $E$ .

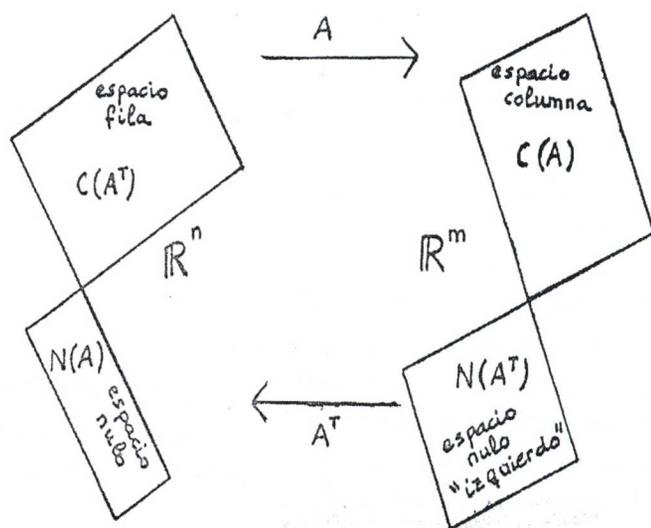
## Los Subespacios Fundamentales

Esas matrices  $E$  y  $R$  deben contener toda la información crucial sobre  $A$ , en una forma muy conveniente. La factorización de la matriz  $EA = R$  contesta virtualmente a cada pregunta que se formula, tradicionalmente, en un curso de álgebra lineal (excepto los autovalores).

Una cosa está clara desde el principio. Si  $A$  es cuadrada e invertible, su forma reducida debe ser  $R = I$ . Entonces la matriz de eliminación  $E$  es necesariamente  $A^{-1}$ . Los espacios nulos de  $A$  y  $A^{-1}$  sólo contienen el vector cero (lo cual no es muy interesante). Pero cuando el rango  $r$  es menor que  $m$  y  $n$ , tenemos cuatro subespacios de importancia fundamental:

Los cuatro subespacios son los espacios columna y los espacios nulos de  $A$  y  $A^T$

Dos subespacios están en  $\mathcal{R}^n$  y los otros dos en  $\mathcal{R}^m$ . El Teorema Fundamental nos da la dimensión de esos subespacios. Los espacios columna tienen la misma dimensión  $r$ . Los espacios nulos tienen dimensiones  $n-r$  y  $m-r$ . En nuestro ejemplo los subespacios son todos unidimensionales, simples rectas de  $\mathcal{R}^2$ . La importancia para un curso de álgebra lineal del siguiente dibujo, reside en que muestra los cuatro subespacios y su perpendicularidad.



Nuestra primera pregunta es *¿cómo puede ser que  $E$  y  $R$  se revelen como una base de cada subespacio?*. Las  $r$  columnas pivote son cruciales. Esas columnas no son combinaciones de columnas anteriores; son las  $r$  primeras columnas independientes de  $A$ . MATLAB crea una lista **pivcol** de los números de las columnas pivote. En la forma reducida de  $R$ , éstas son las columnas que contienen la submatriz identidad  $r \times r$ . Por eso, tres de las cuatro bases provienen directamente de  $R$ :

1. Base para el espacio columna  $C(A)$ :  
las  $r$  columnas de  $A$  están listadas en **pivcol**
2. Base para el espacio fila  $C(A^T)$ :  
las  $r$  primeras filas de  $R$ .
3. Base para el espacio nulo  $N(A)$ :  
las  $n-r$  "soluciones fundamentales" de  $Rx=0$  (y de  $Ax=0$ ).
4. ¿Cuál es una base natural para el otro espacio nulo  $N(A^T)$ ?

Volvemos a nuestro ejemplo. La primera columna de  $R$  contiene el pivote, así que

**pivcol** = [1]. Entonces, la primera columna de  $A$  (¡no de  $R$ !) es una base para su espacio columna. Las columnas de  $A$  y  $R$  son distintas, pero *los números de columna en pivcol son la clave*.

Las filas de  $A$  y  $R$  generan el mismo espacio de fila. Las  $r$  primeras filas de  $R$  son base. Y las soluciones de  $Ax=0$  y  $Rx=0$  producen el mismo espacio nulo (este era el motivo de la eliminación). Pronto propondremos una base de soluciones especiales. Primero contestaremos la pregunta todavía abierta, identificar el espacio nulo "izquierdo"  $N(A^T)$ .

Este subespacio no se revela en  $R$ , pero una base es inmediatamente visible en  $E$ :

Las últimas  $m-r$  filas de  $E$  son una base del espacio nulo izquierdo  $N(A^T)$

El motivo es que  $EA=R$  acaba en  $m-r$  filas de ceros. Esas últimas filas de  $E$  están multiplicando a  $A$  (por la izquierda) para producir las filas nulas de  $R$ . Nuestro ejemplo tiene una fila de ceros en  $EA=R$  y de nuevo en  $E_{new}A=R$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente destacamos: las últimas filas de  $E$  y  $E_{new}$  generan el mismo espacio. Este es el cuarto subespacio perdido, el espacio nulo de  $A^T$

## Los códigos de enseñanza

Nuestro punto de partida era crear códigos de enseñanza que ayudaran en el curso básico de álgebra lineal. Esos códigos están disponibles en nuestra página de web. Los comandos fueron escritos para encajar exactamente con la segunda edición del libro *Introducción al Álgebra Lineal* [3]. La belleza de esos códigos es que necesitan sólo pequeñas líneas de MATLAB o Maple o Mathematica, y esperamos que sea útil incluirlos aquí.

El comando **rref** está disponible en todas las versiones de MATLAB. La lista **pivcol** también está disponible como segundo argumento de salida:

$$[R, \text{pivcol}] = \text{rref}(A)$$

Entonces, nuestra base de columnas pivote, viene dada de forma inmediata por las columnas de

$$C^* = A(:, \text{pivcol})$$

Los dos puntos anteriores a la coma producen todas las filas de las columnas listadas en **pivcol**. Igualmente, los dos puntos después de la coma producen todas las columnas de las  $r$  primeras filas de  $R$ :

$$R^* = R(1: \text{rank}(A), :)$$

Las soluciones fundamentales de  $Rx = 0$ , cuya discusión ha quedado pospuesta hasta ahora, serán las columnas del espacio nulo de la matriz  $N$ . El espacio nulo tiene dimensión  $n-r$ , así que  $N$  tiene  $n-r$  columnas. La matriz del espacio nulo toma su forma más simple cuando las  $r$  columnas pivote son las primeras columnas de  $R$ :

$$RN = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡ La multiplicación por bloques es especialmente útil !

Generalmente, **pivcol** debe localizar la matriz identidad  $r \times r$  que está en  $R$ . Los códigos de enseñanza lo llaman **nulbasis**:

```
function N = nulbasis(A)
[R,pivcol] = rref(A) ;
[m,n] = size(A) ;
r = length(pivcol) ;
freecol = 1:n ;
freecol(pivcol) = [ ] ;
N = zeros(n,n-r) ;
N(freecol, : ) = eye(n-r) ;
N(pivcol, : ) = -R(1:r , freecol) ;
```

¡Siempre  $RN = 0$ ! Tras el comando que contiene la matriz vacía  $[ ]$ , **freecol** contiene la lista de las columnas sin pivotes. La parte de  $N$  correspondiente a las variables libres es una matriz identidad de orden  $n-r$ . Entonces,  $Rx = 0$  determina las  $r$  variables pivote :

$$Rx = I \begin{pmatrix} \text{variables} \\ \text{pivote} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} \text{variables} \\ \text{libres} \end{pmatrix} = 0$$

Así las variables pivote vienen dadas por  $-F$  en las últimas líneas del código.

Ejemplo: suponiendo que  $R$  es  $2 \times 4$  con **pivcol**=[1 3]. Entonces  $N$  tiene 4-2 columnas:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ produce } N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La construcción de la base nula es muy simple, pero bonita. El espacio nulo de la matriz  $N$  está "en forma escalonada inversa". Sus elementos no nulos extras, están por encima de los de la submatriz identidad. La lista **freecol** para  $R$ , que es [2 4], nos da los números de la fila de esa matriz identidad en  $N$ .

El espacio fila tiene una única base canónica y su complemento ortogonal, el espacio nulo tiene una única base canónica inversa. Los dos se conectan por la **nulbasis**.

Finalmente llegamos a  $E$ , el producto de todos los pasos elementales de eliminación. Sus últimas  $m-r$  filas forman una base para el espacio nulo izquierdo. El modo más sencillo de construir  $E$  sigue la idea de Gauss-Jordan de ampliar  $A$  a  $(A \ I)$ . Entonces se produce la reducción  $(R \ E)$ . El comando es  $E = \text{elim}(A)$  y el código de enseñanza separa  $R$  de  $E$ :

```
function [E, R] = elim(A)
[m, n] = size(A);
I = eye(m);
RE = rref ([A I]);
R = RE (: , 1:n);
E = RE (: , (n+1) : (m+n) );
```

La operación que transforma  $A$  en  $R$  transformará al mismo tiempo  $I$  en  $E$ . La matriz ampliada  $(A \ I)$  simplemente se multiplica por la matriz de eliminación:

$$\boxed{E \text{ multiplica } (A \ I) \text{ para dar } (R \ E)}$$

En el caso de una matriz cuadrada e invertible  $EA = R$  se convierte en  $EA = I$ . Así es como el método Gauss-Jordan halla (eficientemente)  $E = A^{-1}$ .

Sólo queda una pregunta más. ¿Es  $E$  o  $E_{\text{new}}$  o una tercera matriz la que se produce por **elim**(A)? Es un comando concreto

que va a producir una  $E$  en concreto. ¿Cómo podemos decir cuál, cuando toda una familia de  $E$ 's satisface  $EA = R$ ? Probaremos primero con el ejemplo:

$$(A \ I) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se reduce a } (R \ E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El código de enseñanza **elim** ha recogido  $E_{new}$  en las dos últimas columnas. ¿Por qué esta elección? Porque  $(R \ E)$  siempre tiene una matriz identidad de tamaño completo en las columnas pivote de  $(A \ I)$ . ¡Esas columnas pivote están unívocamente determinadas! El comando **elim** debe haber elegido esta particular matriz eliminatoria porque  $E_{new}^{-1}$  tiene todas las columnas pivote de  $(A \ I)$ :

$$E_{new}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ contiene las columnas 1 y 3 de } \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**La factorización**  $A = E^{-1}R$  y  $A = C^*R^*$

Las grandes factorizaciones del álgebra lineal se escriben tradicionalmente en la forma  $A = ( \ ) ( \ )$  o  $A = ( \ ) ( \ ) ( \ )$ . El lado derecho contiene matrices triangulares o matrices diagonales o matrices ortogonales. La más famosa es  $A = LU$  con eliminación que produce factores triangulares. Después viene  $A = QR =$  (ortogonal) (triangular) del proceso Gram-Schmidt (o reducción de Householder). De alguna manera  $A = E^{-1}R$ , debe ser una factorización más, con sus especiales características.

Ya sabemos lo que es especial de la forma canónica de  $R$ . Pero  $E^{-1}$  sigue siendo un misterio. Todo lo que hemos podido descubrir es que las últimas  $m-r$  filas de  $E$  son una base para el espacio nulo de  $A^T$ . Si logramos saber algo de las filas de  $E$ , ¿qué nos revelará sobre  $E^{-1}$ ? Si sólo conocemos la última fila de  $E$ , entonces todo salvo la última columna de  $E^{-1}$  sería ortogonal. Este hecho se expresa en la última fila de  $EE^{-1} = I$  y, más generalmente, con:

Las  $r$  primeras columnas de  $E^{-1}$  son perpendiculares a las últimas  $m-r$  filas de  $E$ .

En nuestro caso, esas últimas  $m-r$  filas producen el espacio nulo de  $A^T$ . Por ello, las  $r$  primeras columnas de  $E^{-1}$  deben producir el subespacio ortogonal. El Teorema Fundamental dice que éste es el espacio columna de  $A$ . Mirando la primera columna de nuestro ejemplo:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_{new}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esa primera columna (compartida por  $E^{-1}$  y  $E_{new}^{-1}$ ) es una base para el espacio columna de  $A$ .

Más que eso, la primera columna es exactamente la columna pivote de  $A$ . Es la base especial que identificamos usando **pivcol**. Debe haber alguna razón que explique esta primera columna tan particular y lo vemos en las factorizaciones de  $E^{-1}R$  y  $E_{new}^{-1}R$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las  $r$  primeras columnas de  $E^{-1}$  están multiplicando la matriz identidad en  $R$  para producir las columnas pivote de  $A$ . Así que, esas primeras columnas son precisamente las columnas pivote y tenemos una factorización útil.

**Teorema 1.** Cada matriz  $m \times n$  de rango  $r$  puede factorizarse en  $A = E^{-1}R$ , donde

$R = \text{rref}(A)$  y las  $r$  primeras columnas de  $E^{-1}$  son las columnas pivote de  $A$ . Las últimas  $m-r$  columnas de  $E^{-1}$  no están determinadas porque multiplican las filas nulas de  $R$ .

Ilustremos esta factorización cuando las columnas pivote vienen primero:

$$A = E^{-1}R = \begin{pmatrix} C^* & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C^*(I \ F) + Z(0 \ 0)$$

$C^*$  contiene todas las columnas pivote de  $A$  y  $(I \ F)$  contiene todas las filas no nulas de  $R$ . Pero  $Z$  todavía está indeterminada. Viendo que las columnas indeterminadas de  $E^{-1}$  están multiplicando esas filas cero de  $R$ , ¿por qué no simplemente

quitarlas? Esto deja una factorización canónica de  $A$  en una matriz  $C^*$  ( $r$  columnas)  $m \times r$  y en una matriz  $R^*$  ( $r$  filas)  $r \times n$ :

$$\text{Corolario.} \quad A = C^* R^* = \begin{pmatrix} \text{columnas} \\ \text{pivote} \\ \text{de } A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{filas} \\ \text{no nulas} \\ \text{de } R \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estos factores contienen nuestras bases favoritas para el espacio columna y el espacio fila de  $A$ . No se asume que las columnas pivote vengan primero. La factorización  $C^* R^*$  es conocida, *pero no lo suficiente*. Describámosla en palabras simples:  $C^*$  contiene las columnas pivote de  $A$ , y  $R^*$  nos dice cómo cada columna de  $A$  es una combinación de esas columnas pivote.

### La factorización $A = c a r$

Hans Schneider señaló una factorización más simétrica que es realmente canónica [2]. Tiene tres factores en lugar de dos, y no somos los primeros en encontrar esta factorización. Hemos visto páginas escritas a mano por Albert Tucker (Princeton) y por R. H. Bruck (Wisconsin) conteniendo la misma idea. Es poco probable que seamos los primeros que lo publican. No seremos desgraciados, ocurra lo que ocurra, es una factorización adecuada y sencilla.

Hasta ahora tenemos una base canónica reducida para el espacio fila de  $A$  (en las filas de  $R^*$ ). Es natural buscar una base canónica reducida para el espacio columna. Entre las dos matrices canónicas se encuentra la no singular submatriz  $r \times r$  de  $A$ . La llamamos  $a$ .

**Teorema 2.** Cada matriz  $m \times n$  de rango  $r$  se factoriza en

$$A = c a r = (m \times r)(r \times r)(r \times n) \quad (2)$$

La matriz  $r = R^*$  contiene las filas no nulas de  $\mathbf{rref}(A)$ . La matriz  $c$  contiene las columnas no nulas de  $(\mathbf{rref}(A'))'$ . La matriz  $a$  es la submatriz no singular formada por las columnas pivote de  $A$  y sus filas pivote (las columnas pivote de  $A^T$ ).

El algoritmo siguiente produce una prueba y el razonamiento escrito es igualmente rápido. Empezamos por la factorización  $C^*R^*$ , con las columnas pivote de  $A$  en  $C^*$ . Entonces, se factoriza  $C^*$  en  $ca$ . Esto nos dice que cada fila de  $C^*$  es una combinación de sus filas pivote (que son las filas de  $a$ ). La matriz canónica  $c$  ejecuta esas combinaciones lineales de las filas pivote.

Realmente estamos utilizando la ecuación (1) para producir  $C^*R^*$ , y después la usamos de nuevo (traspuesta) para factorizar  $C^*$  en  $ca$ . Con  $R^*=r$  tenemos  $A=car$ .

Así,  $r$  y  $c$  contienen las únicas "bases reducidas canónicas" para el espacio fila y el espacio columna. Ambas incluyen una submatriz identidad  $I_{r \times r}$ . Todos los demás elementos no nulos están debajo de  $I$  (en  $c$ ) y a la derecha (en  $r$ ). Si  $I$  viene primero en las dos matrices, la factorización  $car$  es simplemente

$$A = \begin{pmatrix} I \\ G \end{pmatrix} (a) \begin{pmatrix} I & F \end{pmatrix}$$

y la submatriz no singular  $a$  está en la esquina superior izquierda de  $A$ . En general, está en las columnas pivote y en las filas pivote. Un pequeño teorema se esconde aquí: la lista **pivcol** permanece igual después de premultiplicar por una matriz invertible. Un breve código de factorización canónica produce  $c$ ,  $a$  y  $r$ :

```
function [c, a, r] = car (A)
[R, pivcol] = rref(A) ;
[S, pivrow] = rref(A') ;
r = R(1: rank(A) , : ) ;
c = S(1: rank(A) , : ) ;
a = A(pivrow, pivcol) ;
```

Ejemplo de  $car$  con **pivcol** = [1 3] y **pivrow** = [1 2]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La submatriz  $a$  tiene rango completo y está "tan arriba y a la izquierda" como es posible en  $A$ . Es la primera submatriz invertible  $r \times r$  de  $A$ , porque **pivrow** y **pivcol** recogen las primeras  $r$  filas y  $r$  columnas independientes.

Un aspecto final. Cada matriz  $B$  con el mismo espacio columna y espacio fila que  $A$  debe tener la forma  $B = c b r$ . La matriz invertible  $r \times r$  del medio parametriza todas las matrices que comparten los mismos cuatro subespacios fundamentales. ¡Y si  $A$  es cuadrada e invertible,  $c = I$ ,  $r = I$  y también  $a$  es  $A$ !

*Nota histórica.* Es interesante preguntar dónde irán los factores. ¿Debemos poner matrices invertibles  $P$  y  $Q$  en el primer miembro, multiplicando  $A$ ? ¿o deben los factores ir en el segundo miembro como ocurre en  $A = c a r$ ? El teorema clásico, perfectamente discutido por Cohn [1, pg. 61], elige  $P$  y  $Q$  para dejar el rango como el único invariante:

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos gusta la forma moderna porque  $c$ ,  $a$  y  $r$  heredan directamente significados de  $A$ . Un ejemplo más famoso compara  $A = LU$  con  $L^{-1}A = U$ . Los elementos de  $L$  son los multiplicadores en la eliminación (tienen significados individuales). Por contraste,  $L^{-1}$  es una importante matriz (triangulariza  $A$ ) pero sus entradas son oscuras.

### Reducción de matrices por bloques

Esta breve sección menciona algunos ejercicios que ayudan a los estudiantes a entender  $R$ . Tras practicar con matrices ordinarias  $A$ , preguntamos sobre algunas matrices por bloques. Probablemente las preguntas serán evidentes por sus respuestas.

1. **rref** aplicado a  $\begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix}$  produce  $\begin{pmatrix} R & R \end{pmatrix}$

2. **rref** aplicado a  $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$  produce  $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

(¿quién es  $E$ ?)

3. **rref** aplicado a  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  produce  $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$

No del todo! las filas nulas del bloque superior  $R$  deben moverse

abajo para producir  $\begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & R^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. **rref** aplicado a  $\begin{pmatrix} A & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$  ¿qué forma reducida produce?

Podemos ciertamente llegar a  $\begin{pmatrix} R & R \\ R & 0 \end{pmatrix}$  y luego  $\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & -R \end{pmatrix}$  y

entonces  $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$

de nuevo, todas las filas nulas deben pasar abajo.

¿Cuáles son los principios que gobiernan estos ejemplos? Son todos productos de pequeñas matrices  $B$  con  $A$ . Las pequeñas matrices de los ejemplos 1 a 4 son simplemente

$$B = (1 \ 1); \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma canónica reducida por filas de esas matrices  $B$  es respectivamente:

$$\mathbf{rref}(B) = (1 \ 1); \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parece que la regla es: la forma reducida de  $B \otimes A$  es  $\mathbf{rref}(B) \otimes \mathbf{rref}(A)$ , excepto que todas las filas de ceros se muevan abajo. Es interesante el hecho de que sumar o multiplicar matrices convierte en un caos sus formas reducidas, mientras que la operación por bloques de productos tensoriales es muy razonable.

## Sumas e Intersecciones

Los mismos comandos pueden producir bases para la suma y la intersección de dos subespacios de  $\mathfrak{R}^m$ . Suponiendo que las columnas de  $A$  son bases para  $S$  y que las columnas de  $B$  son bases para  $T$ ; entonces las columnas de  $(A \ B)$  generan la suma  $S + T$ . El comando

$$\mathbf{sumbasis} = \mathbf{colbasis} ([A \ B])$$

rápida produce la base para  $S + T$ . Su dimensión es el rango de  $(A \ B)$ . La intersección  $S \cap T$  no es tan obvia. Uno espera que venga del espacio nulo de  $(A \ B)$ , Así la fórmula de conexión

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) \quad (3)$$

es inmediata a partir del Teorema Fundamental. El lado derecho es el número de columnas en  $(A \ B)$ . A la izquierda está la

dimensión del espacio columna y (esperamos) del espacio nulo. Pero, ¿cómo identificamos  $S \cap T$  en  $\mathbb{R}^m$  con el espacio nulo de  $(A \ B)$ ?

En nuestros problemas más duros, pedimos a la clase de álgebra lineal que crearan simples ejemplos de  $S + T$  y  $S \cap T$ . De sus ejemplos podían adivinar la fórmula (3). La mayoría de ellos utilizaron el comando **colbasis** ( $[A \ B]$ ) para obtener la suma  $S + T$  (como arriba). Pero la pregunta difícil (encontrar una base para  $S \cap T$  de las matrices  $A$  y  $B$ ) separó lo mejor de lo mediocre. Los profesores se encontraron a sí mismos dentro de los mediocres, como humildemente explicamos ahora.

Nuestra idea para  $S \cap T$  vino de un escrito reciente de Yang [4]. El segundo autor recordó una sugerencia similar en uno de sus libros anteriores: cada vector en el espacio nulo de  $(A \ B)$  combina las columnas para producir el vector cero. Así, una combinación de columnas de  $A$  (un vector en  $S$ ) iguala una combinación de columnas de  $B$  (un vector en  $T$ ). Esto sitúa un vector en  $S \cap T$ . El problema es verificar que esta aplicación desde el espacio nulo de  $(A \ B)$  a  $S \cap T$  es un isomorfismo, así que las dimensiones cuadran:

$$\text{dimensión del espacio nulo} = \text{dimensión de } S \cap T$$

Nuestra clase nunca había oído hablar de un isomorfismo, así que esto era un terreno difícil. Dos estudiantes vinieron después de clase con otra idea. Ellos sabían que la intersección de dos conjuntos es el complemento de la unión de los complementos:

$$S \cap T = (S^c \cup T^c)^c \quad (4)$$

Así que si "unión" se reemplaza por "suma" y el complemento de un conjunto se cambia por el complemento ortogonal de un subespacio, tienen lo que quieren. Y también sabían el teorema fundamental: **nulbasis** ( $A'$ ) produce un complemento a **colbasis** ( $A$ ). Así que la identidad (4) se convierte en una fórmula base para la intersección de subespacios:

$$\text{intbasis} = \text{nulbasis}([\text{nulbasis}(A') \ \text{nulbasis}(B')])' \quad (5)$$

Sus nombres son Yan y Dianne. Tuvieron sobresaliente.

## Referencias

- [1] P.M.Cohn, *Elements of Linear Algebra*, Chapman and Hall, London, 1994.
- [2] Hans Schneider, personal communication.
- [3] Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra, Second Edition*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 1998.
- [4] K.-W. Yang, *A Basis for the Intersection of Subspaces*, Mathematics Magazine, Vol.70, October 1997, pg. 297.



# Ondas Continuas y Discretas

Enrique Zuazua

Universidad Complutense Madrid

El trabajo repasa conceptos clásicos relacionados con la ecuación de ondas desde un punto de vista histórico, para después presentar algunos avances que permiten entrever la problemática que esta ecuación encierra.

## 1 Introducción

La ecuación de ondas es sin duda uno de los ejemplos más clásicos y relevantes a los que se recurre en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Pero no es un ejemplo meramente académico, ni mucho menos. En efecto, los primeros estudios sobre esta ecuación a los que nos referiremos más adelante, se realizan a finales del siglo XVIII, época en la que se estaban estableciendo los pilares fundamentales del Análisis Matemático, tal y como lo entendemos hoy. Los desarrollos posteriores que se han producido han ido frecuentemente ligados a avances importantes en Análisis de Fourier, Óptica Geométrica, Análisis Numérico, etc. de modo que, se podría decir, la ecuación de ondas ha sido uno de los protagonistas más destacados de las Matemáticas de estos dos últimos siglos.

En estas notas no pretendemos describir exhaustivamente la historia de la ecuación de ondas y/o de las Matemáticas que han intervenido o se han generado a través de ella. Tampoco haremos una descripción rigurosa del estado en el que hoy se encuentra la investigación sobre la ecuación de ondas y sus variantes. Nuestro objetivo, al escribir las notas de esta conferencia, no es más que introducir algunos conceptos clásicos relacionados con la ecuación de ondas desde un punto de vista histórico, para después presentar algunos avances más recientes que, si bien no exigen unas Matemáticas muy

avanzadas, permiten entrever la riqueza de la problemática que esta ecuación encierra y las ideas necesarias para su comprensión.

Buena parte de estas notas están dedicadas al caso de una sola dimensión espacial, en la que la ecuación de ondas es un modelo simple para la descripción de las vibraciones de una cuerda. Mencionaremos muy brevemente cómo la Óptica Geométrica ha de intervenir de manera crucial al pasar de una a varias dimensiones espaciales. En varias dimensiones, la ecuación de ondas es un modelo válido para describir las vibraciones de un tambor o la propagación de ondas acústicas. Ilustraremos a través de un artículo reciente dedicado a los terremotos en el entorno de la ciudad de Grenoble (Francia), cómo las ecuaciones de tipo ondas pueden ser de gran utilidad a la hora de simular y predecir la propagación de ondas sísmicas y sus efectos en nuestras ciudades y construcciones. Este ejemplo muestra con claridad lo que antes mencionábamos. La ecuación de ondas no es sólo un bello ejemplo de EDP sino que es un instrumento útil para entender el mundo que nos rodea.

Normalmente, en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, nos encontramos ante *problemas directos*. Por ejemplo, dada una ecuación diferencial y los datos iniciales, calcular la solución correspondiente. Se trata del *problema de Cauchy*. Esto es así cuando, conociendo las propiedades del medio que nos rodea, las leyes que gobiernan un determinado fenómeno físico y la situación en el presente, pretendemos hacer una previsión de futuro. En definitiva, se trata de aquellas situaciones en las que disponemos de un modelo matemático. Pero en muchas de las aplicaciones más relevantes (prospección petrolífera, tomografía computerizada, etc.) nos encontramos ante *problemas inversos*. Se trata, como su propio nombre indica, de realizar el proceso inverso y, más concretamente, de identificar los parámetros de una ecuación diferencial de la que desconocemos, por ejemplo, el valor de sus parámetros, que modelice un determinado fenómeno del que conocemos las soluciones o alguna información sobre las mismas. Se trata por tanto de invertir la aplicación que hace corresponder a una ecuación diferencial sus soluciones. Por lo tanto, en esta ocasión, pretendemos determinar las propiedades de un medio o material o las leyes que gobiernan un determinado fenómeno, a través de observaciones y mediciones experimentales reales. Mostraremos mediante un ejemplo cómo, mediante informaciones suficientes sobre el problema directo, puede también re-

solverse el problema inverso.

Por último, en el capítulo 6, abordaremos el problema de las aproximaciones numéricas. Si bien confiamos que las conclusiones fundamentales sean accesibles a un amplio grupo de lectores, esta sección contiene algunos desarrollos más técnicos que, en cualquier caso, deberían ser asimilables por aquellos que dispongan de una formación básica en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

La motivación de esta última sección es bien simple. Hoy en día cualquier estudio que tenga como objetivo una aplicación tecnológica o industrial real, ha de ir acompañado de simulaciones numéricas que permitan realizar cálculos efectivos en el ordenador. Al discretizar la ecuación de ondas o, de manera más general, cualquier sistema continuo, nos encontramos con sistemas discretos o semi-discretos que confiamos reproduzcan la dinámica de la ecuación de ondas original. Pero frecuentemente nos encontramos ante una situación aparentemente paradójica. A pesar de haber elegido la discretización con criterios más que razonables, a menudo el esquema discreto o semi-discreto posee soluciones espurias que nada tienen que ver con la ecuación de ondas original. Se nos plantea entonces un problema que irremediamente hemos de abordar de forma rigurosa. ¿Cómo podemos identificar las informaciones espurias que un método numérico proporciona y qué podemos hacer para eliminarlas? En otras palabras, a pesar de la creciente potencia de los ordenadores, ¿cómo podemos saber que lo que calculamos es efectivamente una buena aproximación de la realidad? ¿Cómo discernir entre la realidad virtual que sólo es producto del proceso de aproximación en el ordenador y la realidad del mundo que nos rodea? Veremos que el Análisis Matemático es una manera eficiente (si no indispensable) en este proceso de discernimiento. Éste nos permite llegar a conclusiones interesantes: a pesar de la creciente potencia de cálculo de los ordenadores, el método matemático no puede ser suplantado por éstos.

La ecuación de ondas que aquí analizamos es un sistema puramente conservativo en el que hemos ignorado todo efecto disipativo y de rozamiento. Sin embargo, en muchos procesos físicos, estos efectos están presentes y son también relevante desde el punto de vista de la simulación numérica, puestos que estos efectos disipativos pueden eliminar o compensar la presencia de estas soluciones numéricas espurias.

Hay muchos otros temas relacionados con la ecuación de ondas, igualmente interesantes, de los que podría hablarse y la elección realizada en esta conferencia no es más que una de las muchas posibles. El lector interesado podrá consultar, entre otros, el artículo divulgativo de A. Nachbin [N].

Antes de concluir esta introducción, deseo agradecer a A. Rodríguez-Bernal por haber llamado mi atención sobre el artículo [CBBH], a J. Duoandikoetxea por haberme clarificado algunos aspectos históricos del Análisis de Fourier, a M. Pinillos por la atenta lectura de estas notas y sus constructivas sugerencias. Finalmente, agradezco a R. Rodríguez del Río sus correcciones y haber realizado las figuras del artículo.

## 2 Las fórmulas de d'Alembert y D. Bernoulli

Consideremos la *ecuación de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (1)$$

El sistema (1) es un modelo simple para el análisis de las *vibraciones de una cuerda* de longitud  $L$  (que ocupa el intervalo espacial  $x \in (0, L)$ ) y fija en sus extremos  $x = 0, L$ . La incógnita  $u = u(x, t)$ , que depende del espacio  $x$  y del tiempo  $t$ , denota la altura a la que se encuentra el punto  $x$  de la cuerda (del intervalo  $(0, L)$ ), en el instante de tiempo  $t$ . Se trata de una ecuación en derivadas parciales de orden dos, complementada por dos condiciones de contorno que reflejan el que la cuerda esté fija en sus extremos.

En la última ecuación de (1) se establecen las *condiciones iniciales* que la solución ha de satisfacer en el instante  $t$ . Al tratarse de una ecuación de segundo orden en tiempo, imponemos tanto la configuración inicial de  $u$ ,  $u_0$ , como la velocidad  $u_1$ .

Mediante  $u_t$  (resp.  $u_x$ ) denotamos la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). De este modo,  $u_{tt}$  representa la derivada parcial de orden dos de  $u$  con respecto de  $t$  dos veces. Más adelante también utilizaremos la notación  $\partial_t$  (resp.  $\partial_x$ ) para denotar el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). Asimismo  $\partial_t^2$

(resp.  $\partial_x^2$ ), denotará el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ) dos veces.

Este es uno de los modelos más clásicos que se analiza sistemáticamente en todos los textos básicos de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En 1747, d'Alembert en [D1,2] propuso la siguiente expresión para la solución general de la ecuación de ondas sin condiciones de contorno

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t). \quad (2)$$

Conviene observar que la expresión de la solución  $u$  que (2) proporciona no es más que la superposición de dos *ondas de transporte*:  $f(x + t)$  que se desplaza sin deformarse a velocidad uno en la dirección negativa del eje de las  $x$ , mientras que  $g(x - t)$  lo hace hacia la derecha. No es difícil llegar a la conclusión de que (2) proporciona la expresión de la solución general de la ecuación de ondas. En efecto, basta observar que el operador diferencial  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  involucrado en la ecuación de ondas se puede factorizar como

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x). \quad (3)$$

Vemos entonces que las dos ondas de transporte en las que se descompone la solución, corresponden a las soluciones de las ecuaciones

$$(\partial_t + \partial_x)u = 0; (\partial_t - \partial_x)u = 0 \quad (4)$$

respectivamente. En efecto, la solución de la primera ecuación es de la forma  $u = g(x - t)$  mientras que la de la segunda es  $u = f(x + t)$ .

Posteriormente, D. Bernouilli en 1753 en [Be] obtuvo soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante de la siguiente forma:

$$u = \sum_{k \geq 1} \left[ a_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} t \right) + b_k \cos \left( \frac{k\pi}{L} t \right) \right] \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (5)$$

De este modo se dieron los primeros pasos en el establecimiento de uno de los métodos clásicos en la resolución de las EDP: *el método de separación de variables o de Fourier*.

Cabe plantearse por qué este método lleva el nombre de J. Fourier si D. Bernouilli ya lo utilizó. Esto es así porque sólo en el histórico trabajo de 1822 de J. Fourier sobre la ecuación del calor [F] quedó completamente establecido el programa a seguir a la hora de resolver una EDP a través de este método y que involucra varias etapas:

- Descomposición de los datos del problema en series de Fourier.
- Obtención de la evolución de cada coeficiente de Fourier en función de la EDP y de los datos.
- Reconstrucción de la solución como superposición de cada una de las componentes de Fourier (serie de Fourier).

Si bien D. Bernouilli obtuvo efectivamente una expresión del tipo (5), en su tiempo aún no estaban claras las nociones de función y de representación analítica de una función ([L]) por lo que era aún demasiado pronto para establecer de forma sistemática el método de Fourier. Sólo J. Fourier en [F] indicó con claridad cómo, dada una función, se pueden calcular sus coeficientes de Fourier y de este modo estableció las bases de una de las herramientas más potentes de las Matemáticas: el Análisis de Fourier o Análisis Armónico. El lector interesado por este apasionante pasaje histórico puede consultar el artículo de N. Luzin [L].

Una primera cuestión importante que se plantea de manera natural es la coincidencia de expresiones del tipo (2) y (5). Efectivamente, en la medida en que para datos iniciales fijados (posición y velocidad inicial de la cuerda) la solución de (1) es única, y si las dos representaciones (2) y (5) son válidas, ambas han de coincidir.

Esto es efectivamente así. Consideremos uno de los términos involucrados en (5). Por ejemplo  $\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales vemos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[f_k(x+t) + f_k(x-t)]\end{aligned}$$

donde

$$f_k(z) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right).$$

Tratando de un modo análogo los demás términos de (5) vemos que efectivamente, la función desarrollada en series de Fourier (5) puede ser escrita en la forma (2) como superposición de dos ondas de transporte.

Esta simple observación ilustra el modo en que en un desarrollo en serie de Fourier puede detectarse la velocidad a la que se

propaga la función representada por dicha serie. Efectivamente, tal y como mencionábamos anteriormente, como se desprende de la fórmula de d'Alembert (2), la velocidad de propagación en el modelo (1) es uno. Esto puede observarse también en el desarrollo en serie de Fourier (5) por el simple hecho de que a una oscilación espacial  $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$  le corresponda una respuesta temporal de la forma  $a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)$ . Se observa asimismo que en la ecuación de ondas considerada hay una ausencia de *dispersión*, entendiéndose por dispersión el fenómeno según el cual los diferentes componentes de Fourier se propagan a velocidades distintas, tal y como ocurre en el clásico modelo de Korteweg-de Vries [KdV] para el avance de las olas o en la ecuación de Schrödinger.

### 3 La óptica geométrica

La expresión (2) de la solución de la ecuación de ondas como superposición de dos ondas de transporte indica que en el modelo (1) la información se propaga a lo largo de las curvas características. Las curvas características son poligonales a trozos en el espacio-tiempo constituidas por segmentos de pendiente  $\pm 1$  que se reflejan en la frontera de la cuerda (tanto en el extremo  $x = 0, L$ ) (véase fig. 3.1)

La misma filosofía es válida en varias dimensiones espaciales. Consideramos por ejemplo las vibraciones de una membrana o tambor que ocupa un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . En este caso, si  $u = u(x, y, t)$  representa la deformación de la membrana, i.e. la altura a la que se encuentra el punto  $(x, y)$  de la membrana en el instante  $t$ , el sistema que describe la evolución de  $u$  viene dado por la ecuación de ondas bidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

En (6)  $\Delta$  denota el *operador Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (7)$$

La primera ecuación de (6) es la ecuación de ondas bidimensional. La segunda ecuación de (6) proporciona una *condición de contorno*

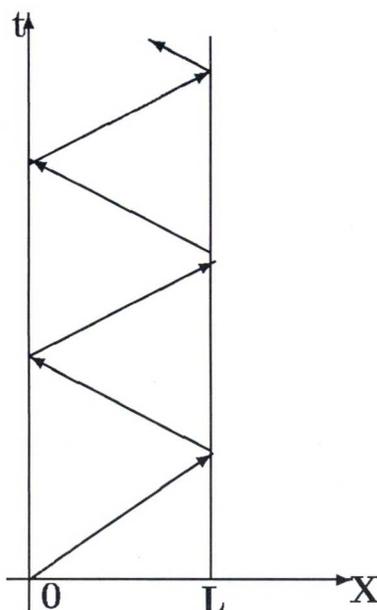


Figura 3.1.

que, en este caso, representa que la membrana está fijada en su borde (como en el caso de un tambor). Las dos últimas condiciones establecen los datos iniciales que proporcionan la configuración y velocidad inicial de la membrana en el instante  $t = 0$  y que permiten determinar de manera única la solución  $u$ .

También en el caso de la ecuación de ondas bidimensional o, incluso, en más dimensiones espaciales la evolución subyacente en el modelo (6) puede entenderse a través de la propagación a lo largo de las curvas o rayos característicos. Sin embargo, con el objeto de definir con claridad lo que es un rayo hemos de utilizar las nociones básicas de *Óptica Geométrica*. Un rayo es una poligonal a trozos que en el interior de la membrana  $\Omega$  se propaga en el espacio tiempo en una dirección constante y a velocidad uno. Sin embargo, al alcanzar la frontera, el rayo rebota según las leyes de óptica geométrica: ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión. Véase la figura 3.2.

Conviene observar que esta ley de propagación y reflexión está bien definida siempre y cuando el rayo no sea tangente a la frontera de  $\Omega$ , en cuyo caso pueden ocurrir dos cosas: o bien el rayo no se modifica al tocar la frontera (véase la figura 3.3) o bien el rayo entra en la frontera y adopta su forma curva hasta salir nuevamente

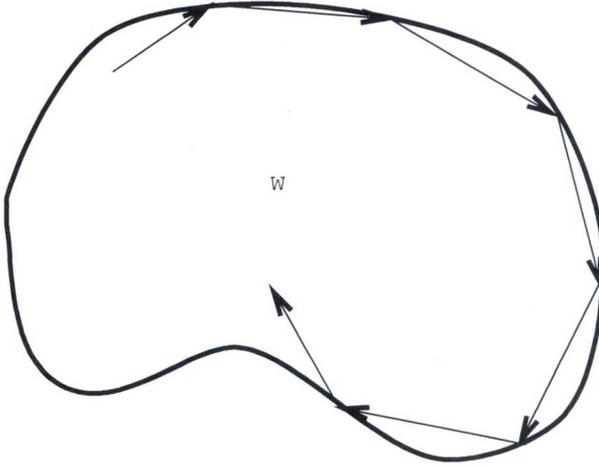


Figura 3.2.  
Proyección sobre  $\Omega$  de un rayo.

(véase la figura 3.4).

De este modo hemos definido los rayos. Sin embargo, el análisis de las soluciones del modelo (6) a lo largo de estos rayos dista de ser tan simple como en una dimensión espacial quedó de manifiesto a través de la fórmula de d'Alembert (2). En realidad este análisis exige de desarrollos asintóticos sofisticados. El lector interesado podrá consultar en particular los trabajos [B], [K], [R], [T] y [CLOT].

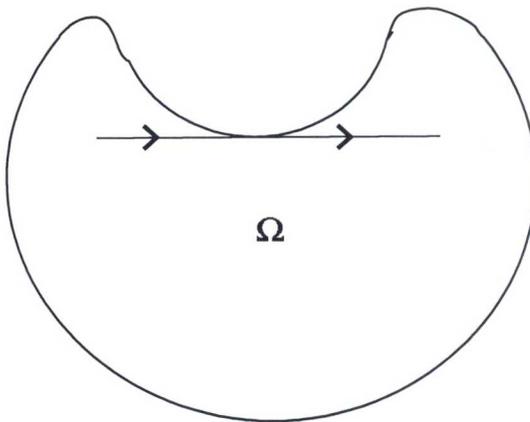


Figura 3.3.

Pero hasta ahora no hemos hablado más que de la propagación

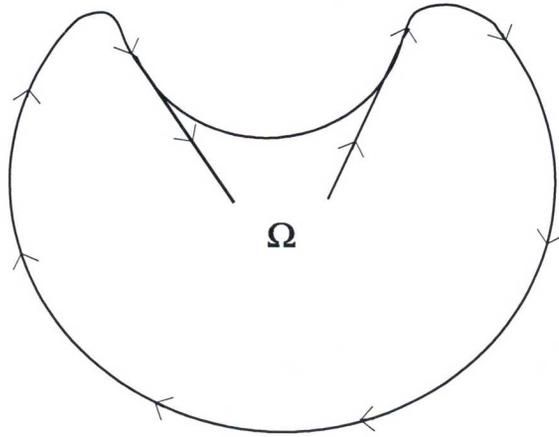


Figura 3.4.

de ondas en un *medio homogéneo*, constituido por un único material distribuido con una densidad constante sobre un dominio  $\Omega$ . Como describimos seguidamente, en el ámbito de los *medios heterogéneos*, parte de lo dicho hasta ahora deja de ser válido y surgen nuevos fenómenos debidos al comportamiento de las ondas en las *interfases*, i.e. en los lugares en los que el material o su densidad cambian de tipo.

Con el objeto de ilustrar estos nuevos fenómenos, consideremos el ejemplo de un tambor  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  constituido por dos materiales. El interno que ocupa la región central  $\Omega_i$  y el externo que ocupa la corona  $\Omega_e$  tal y como ilustra la figura 3.5.

Como decíamos, el tambor está constituido por dos materiales distintos. Suponemos que en  $\Omega_i$  la velocidad de propagación de las ondas es  $a_i$ , mientras que en  $\Omega_e$  la velocidad es  $a_e$ , con  $a_i > 0$ ,  $a_e > 0$  y  $a_i \neq a_e$ . Para describir las vibraciones de este tambor conviene introducir dos funciones  $u_i = u_i(x, y, t)$  y  $u_e = u_e(x, y, t)$ , definidas en  $\Omega_i$  y  $\Omega_e$  respectivamente. Estas funciones han de resolver las ecuaciones

$$u_{i,tt} - a_i^2 \Delta u_i = 0, (x, y) \in \Omega_i, t > 0 \quad (8)$$

$$u_{e,tt} - a_e^2 \Delta u_e = 0, (x, y) \in \Omega_e, t > 0. \quad (9)$$

Además, si suponemos que el tambor está fijado en su borde exterior  $\Gamma$  habremos de imponer la condición de contorno

$$u_e = 0, (x, y) \in \Gamma, t > 0. \quad (10)$$

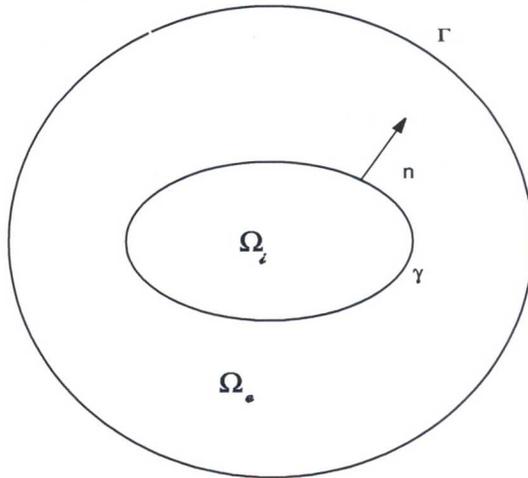


Figura 3.5.

Tambor constituido por dos materiales que ocupan respectivamente  $\Omega_i$  y  $\Omega_e$ .

Pero el sistema no estará completo hasta que hayamos introducido también las *condiciones de interfase* o *de transmisión* en la frontera común  $\gamma$ . Con el objeto de que ambas partes del tambor permanezcan unidas a lo largo de la vibración hemos de imponer la condición de continuidad de los desplazamientos:

$$u_i = u_e, (x, y) \in \gamma, t > 0. \quad (11)$$

Pero también la tensión del tambor habrá de ser la misma a ambos lados de  $\gamma$ . Obtenemos así la condición:

$$a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = a_e \frac{\partial u_e}{\partial n}, (x, y) \in \gamma, t > 0, \quad (12)$$

siendo  $n$  el vector normal unitario a  $\gamma$  que apunta hacia  $\Omega_e$ , de modo que  $\partial \cdot / \partial n$  denota la derivada normal en esta dirección, i.e.

$$\partial f / \partial n = \nabla f \cdot n, \quad (13)$$

siendo  $\cdot$  el producto escalar euclideo.

La noción de rayo o de curva característica ha de ser modificada de acuerdo a las condiciones de transmisión (11)-(12). Consideremos, por ejemplo, un rayo que arranca de un punto de  $\Omega_i$  en una

determinada dirección tal y como se indica en la Figura 3.6. Mientras el rayo permanece en  $\Omega_i$  se trata de un segmento rectilíneo que se traslada a una velocidad  $a_i$ . Al cabo de un cierto tiempo el rayo alcanza la interfase  $\gamma$ . En ese momento caben esencialmente tres posibilidades:

- El rayo se refleja según las leyes de la Óptica Geométrica en  $\Omega_i$
- El rayo se refracta pasando a  $\Omega_e$
- El rayo se divide en dos. Un rayo refractado que pasa a  $\Omega_e$  y otro reflejado en  $\Omega_i$  (véase la Figura 3.6).

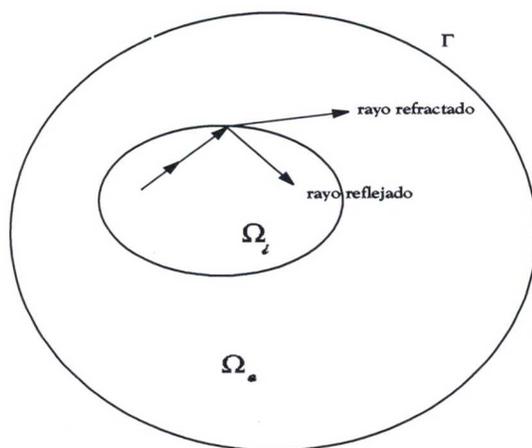


Figura 3.6.

Conviene recordar que el ángulo  $\theta_e$  de refracción en función del ángulo de incidencia  $\theta_i$  viene dado por la fórmula (véase la Figura 3.7):

$$a_i |\sin \theta_e| = a_e |\sin \theta_i|. \quad (14)$$

De la fórmula (14) se desprende en particular que cuando

$$a_e > a_i, \quad (15)$$

si el rayo proveniente de  $\Omega_i$  incide sobre la interfase  $\gamma$  de manera casi tangente de modo que  $|\sin \theta_i|$  sea muy próximo a la unidad, entonces

$$a_e |\sin \theta_i| > a_i > a_i |\sin \theta_e|. \quad (16)$$

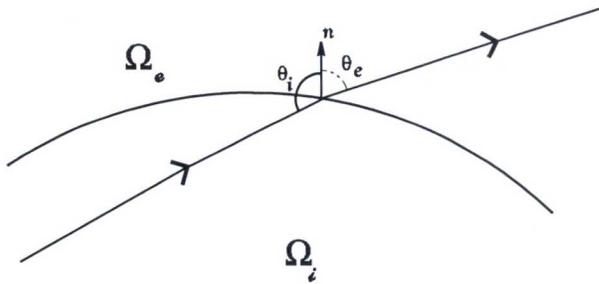


Figura 3.7.  
Rayo refractado.

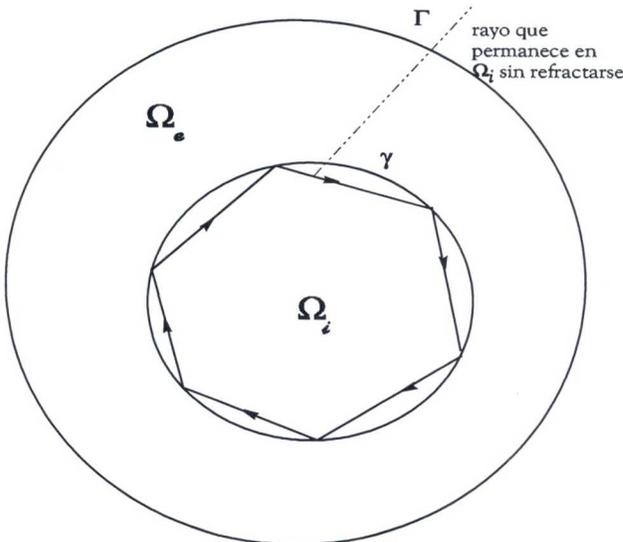


Figura 3.8.

Cuando (16) ocurre, la ecuación (15) evidentemente no admite ninguna solución  $\theta_e$ . Por tanto no existe dirección de refracción y el rayo es completamente reflejado en  $\Omega_i$ . Este hecho, en geometrías adecuadas ( $\Omega_i$  convexo, por ejemplo), puede dar lugar a rayos que permanecen eternamente capturados en el medio  $\Omega_i$  (véase la Figura 3.8).

Esto puede ser interpretado de dos maneras distintas si bien equivalentes: como decíamos anteriormente, hay rayos y por tanto vibraciones del tambor que permanecen capturadas en  $\Omega_i$ . O, visto de otro modo, hay vibraciones que son invisibles o imperceptibles desde el medio exterior  $\Omega_e$ .

Este hecho tiene consecuencias evidentes en muchos problemas

inversos o de control que se plantean en el marco de las vibraciones en medios heterogéneos. En la siguiente sección describiremos algunas consecuencias importantes en la propagación de señales sísmicas.

Conviene sin embargo hacer una matización. Las vibraciones que se localizan en  $\Omega_i$  no lo están al 100%. Es decir, estas vibraciones dan también lugar a una pequeña vibración de la membrana exterior  $\Omega_e$ . Lo que ocurre es que el ratio entre la energía de la vibración en  $\Omega_e$  y el de la vibración en  $\Omega_i$  puede hacerse más y más pequeño a medida que la vibración se concentra a lo largo del rayo capturado en  $\Omega_i$ . El ínfimo de este ratio es por tanto cero, lo cual no garantiza que haya vibraciones que dejen inmóvil  $\Omega_e$ . De hecho este tipo de vibraciones (aquellas en las que la corona exterior de la membrana  $\Omega_e$  permanece inmóvil) no puede existir como se deduce fácilmente del Teorema de Unicidad de Holmgren (véase [J]).

## 4 Propagación de señales sísmicas

Un reciente artículo aparecido en *Mundo Científico* [CBBH] de cuatro geólogos franceses, ilustra muy claramente la importancia de las ondas localizadas que acabamos de describir.

El problema que preocupa a este grupo de geólogos es la gran intensidad con la que se perciben en la ciudad de Grenoble (Francia) seismos de escasa amplitud que en zonas no muy lejanas apenas son observados. Tal y como los autores del artículo explican, se trata de un *fenómeno local*. En efecto,

“la ciudad está construida en el centro de un valle excavado por los glaciares y repleto de sedimentos mucho más flexibles que la roca subyacente”

tal y como ellos indican.

Lo que ocurre entonces es que, reproduciendo literalmente parte del texto de [CBBH],

“Las ondas se propagan más deprisa en un medio rígido que en un medio blando, y el contraste de velocidad en el límite entre los dos, sólo deja pasar bien la energía sísmica de lo rígido a lo blando. La consecuencia es

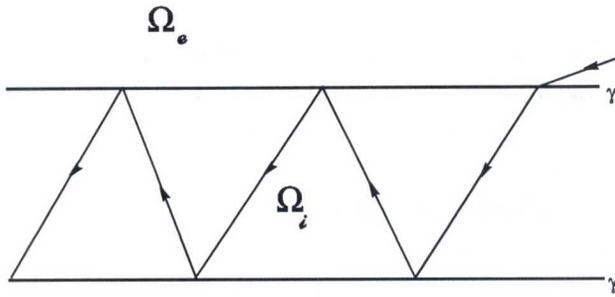


Figura 4.1.

Rayo que, proveniente de  $\Omega_e$ , queda indefinidamente capturado en  $\Omega_i$ .

que una vez en la cuenca las ondas casi no pueden escapar. Se reflejan entonces en la superficie y en las paredes rocosas. Estas reflexiones sucesivas conducen a fenómenos de resonancia a determinadas frecuencias que se traducen en la superficie en fuertes amplificaciones de los movimientos del suelo y en un aumento de su duración. Se comprende fácilmente que las consecuencias pueden ser dramáticas cuando estas frecuencias amplificadas corresponden a frecuencias de resonancia de los edificios”.

Estos pasajes de este artículo divulgativo ilustran con claridad cómo los fenómenos de localización de ondas descritos en el apartado anterior pueden observarse en la naturaleza en el contexto de las ondas sísmicas y hasta qué punto pueden ser importantes en nuestra vida cotidiana.

En la figura 4.1 ilustramos el fenómeno que se describe en este artículo y que es coherente con el análisis de la sección anterior. El medio blando  $\Omega_i$  está rodeado por el medio más rígido  $\Omega_e$ . Una onda proveniente de  $\Omega_e$  entra en  $\Omega_i$  pero queda capturada en su interior indefinidamente puesto que la energía no se transmite desde  $\Omega_i$  a  $\Omega_e$ .

A medida que aumenta el ratio entre la velocidad de propagación en el medio rígido y el medio blando este fenómeno se acentúa. En efecto, con la notación de la sección anterior, cuanto más grande es el cociente  $a_e/a_i$ , mayor es el abanico de ángulos de incidencia  $\theta_i$  que dan lugar a ondas que permanecen atrapadas en  $\Omega_i$  sin refractarse

en absoluto. Esto hace posible que se tenga la situación de la figura 4.1 en la que la onda, una vez en  $\Omega_i$  puede incidir en la interfase con un ángulo de  $45^\circ$  sin que haya transmisión de energía a  $\Omega_e$ . Basta para ello con que  $a_e/a_i > \sqrt{2}$ .

El artículo antes citado, concluye subrayando la importancia de los estudios teóricos y numéricos que se están desarrollando en este terreno. Efectivamente, tal y como ellos explican, el reto en la actualidad consiste en predecir si las normas impuestas a las empresas de construcción de edificios tradicionales son suficientes o no para garantizar la robustez de los edificios en caso de seísmos de una magnitud 5,5 que no se pueden excluir.

La predicción del comportamiento de las construcciones humanas durante los seísmos y su control, constituyen uno de los grandes retos de la ingeniería en nuestros días en los que las Matemáticas y la simulación numérica necesariamente desempeñan, y habrán de seguir desempeñando, un papel central (véase por ejemplo [BR] y [Si]). Tal y como ha quedado de manifiesto, el “ingenuo protagonista” es, una vez más, la ecuación de ondas.

## 5 Problemas inversos

Tal y como hemos mencionado en la introducción, con frecuencia, los problemas que se plantean en el ámbito de las aplicaciones tecnológicas, si bien involucran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o Parciales

(EDO/EDP), no pueden formularse en el marco clásico de los problemas de Cauchy o de contorno en los que se suponen conocidos los parámetros de la ecuación y los diversos datos y se trata de calcular (analítica o numéricamente) la solución (o probar su existencia y unicidad), sino que se trata de problemas inversos en los que hemos de identificar los parámetros de la ecuación a través de informaciones, parciales o globales, sobre las soluciones que somos capaces de medir y observar de forma experimental.

La teoría matemática sobre problemas inversos está hoy en día muy desarrollada y ha adquirido un alto grado de sofisticación. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, la monografía de V. Isakov [I] y su bibliografía.

Son muchos los problemas de la vida real en los que nos en-

contramos con problemas inversos. Cabe mencionar por ejemplo la prospección petrolífera, la exploración del subsuelo y diversas aplicaciones médicas como por ejemplo la tomografía computerizada, entre otros. Hay otros problemas de carácter más académico pero de gran belleza. Entre ellos cabe destacar el problema clásico conocido como “Can one hear the shape of a drum?”, o, ¿Puede escucharse la forma de un tambor? Obviamente, estamos aquí haciendo referencia a “tambores matemáticos” en los que la forma puede ser la de un abierto arbitrario del plano.

Desde un punto de vista matemático, para formular de manera precisa el problema, hemos de introducir el espectro del Laplaciano con condiciones de contorno de Dirichlet en un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Conviene recordar que el Laplaciano es el operador de Laplace introducido en (7). Se trata de los números  $\lambda$ , denominados *autovalores*, para los cuales la ecuación elíptica

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda e, & (x, y) \in \Omega \\ e = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

admite una solución no trivial  $e = e(x, y) \neq 0$ .

La analogía de este problema de autovalores con el asociado a una matriz es clara. Cabe sin embargo resaltar que, en el marco del Laplaciano, hemos de imponer también la condición de Dirichlet que garantiza que  $e = 0$  en la frontera del dominio  $\Omega$ , lo cual refleja que el tambor está fijo en su borde. Obviamente, pueden considerarse otras condiciones de contorno, en función del problema físico considerado.

Conviene observar que este problema espectral surge de manera natural cuando se desarrolla en series de Fourier las soluciones de la ecuación de ondas o del calor. Por tanto, su relevancia va mucho allá del problema inverso que aquí nos ocupa.

La teoría de descomposición de operadores autoadjuntos compactos permite probar la existencia de una sucesión de autovalores reales positivos de multiplicidad finita  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$  que tienden a infinito y de forma que la sucesión de autofunciones correspondientes constituyan una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$  (el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable definidas en  $\Omega$ ). Más brevemente, a cada dominio  $\Omega$  (a cada forma del tambor) le asignamos de este modo una sucesión creciente de números positivos  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$  que tiende a infinito.

El problema inverso al que hacíamos referencia consiste en determinar la forma del tambor  $\Omega$  a través del espectro.

Recientemente se dio una respuesta negativa al problema exhibiendo dos dominios poligonales (y no convexos) distintos que daban lugar al mismo espectro pero, a nuestro entender, el problema permanece aún abierto si nos limitamos a clases de dominios regulares y/o convexos. El lector interesado puede consultar el artículo recapitulativo de A. Sánchez-Calle a este respecto [SC].

Antes de continuar describiendo otras situaciones en las que estos problemas inversos intervienen, conviene reflexionar un momento sobre las herramientas matemáticas a nuestra disposición a la hora de abordarlos. No tardaremos mucho en caer en la cuenta de que la herramienta por excelencia a la hora de estudiar este tipo de problemas es el Teorema de la Función Inversa (TFI). En efecto, los problemas inversos que normalmente se plantean suelen ser de carácter genuinamente no lineal. Esto quiere decir que la aplicación involucrada en el problema y que hemos de invertir es habitualmente no-lineal. En el ejemplo anterior la aplicación a invertir en cuestión es aquella que a un dominio  $\Omega$  asocia su espectro  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ . Se trata efectivamente de una aplicación genuinamente no-lineal.

Como decíamos, el TFI es la herramienta adecuada para abordar los problemas inversos puesto que garantiza la invertibilidad local de una aplicación siempre y cuando ésta sea regular (basta con que sea diferenciable) y su diferencial sea invertible. Vemos, por tanto, que la resolución del problema inverso pasa por un estudio detallado del problema directo puesto que hemos de comprobar si la aplicación a invertir, la que proporciona el problema directo, es regular y su linealizada invertible.

Es por ello que el análisis de un problema inverso viene habitualmente precedido por el estudio detallado del problema directo correspondiente.

Conviene observar que el TFI proporciona resultados de carácter puramente local y que la obtención de resultados globales, necesita normalmente de desarrollos adicionales puesto que rara vez se pueden aplicar directamente las versiones globales del TFI (que garantizan que la aplicación no-lineal es globalmente invertible si la diferencial en todo punto lo es y con normas uniformemente acotadas, i. e. con una cota independiente del punto donde calculemos la

diferencial). Para ilustrar este hecho consideremos un par de ejemplos. Consideramos la función real de una variable real  $f(x) = e^x$ . Su derivada es  $f'(x) = e^x$  que es distinta de cero en todo punto. En cada punto  $x_0$  la diferencial  $f'(x_0) = e^{x_0}$  actúa como una aplicación lineal:  $L_{x_0}y = \langle f'(x_0), y \rangle = e^{x_0}y$  que es invertible, siendo su inversa,  $L_{x_0}^{-1}y = e^{-x_0}y$ . Por tanto se deduce del TFI que la función  $e^x$  es localmente invertible ( $e^x$  establece una biyección de un entorno de cada punto  $x_0$  en un entorno de su imagen  $e^{x_0}$ ). Pero, obviamente, no es globalmente invertible pues  $e^x$  es un número real positivo para cada real  $x$ , y por tanto los números negativos quedan fuera de la imagen de  $e^x$ . Esto es debido a que la inversa de la diferencial,  $e^{-x_0}$ , no está acotada cuando  $x_0$  tiende a  $-\infty$ . Sin embargo la función  $g(x) = 2x + \sin(x)$  es globalmente invertible puesto que su diferencial  $g'(x) = 2 + \cos(x)$  es invertible en cada punto con inversa  $[2 + \cos(x)]^{-1}$  uniformemente acotada entre  $1/3$  y  $1$ .

Para concluir esta sección presentamos un problema inverso relacionado con la ecuación de ondas que nos ocupa y que podemos resolver completamente.

Consideramos una cuerda de longitud  $L$  desconocida que vibra según el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (18)$$

al estar fija en sus extremos  $x = 0$  y  $L$ .

Suponemos que, a través de un sensor, podemos medir la tensión que las vibraciones de la cuerda producen en el extremo  $x = 0$ . Obviamente, al desconocer la longitud total de la cuerda  $L$  desconocemos la ubicación del otro extremo  $x = L$ . Lo que si sabemos es que la cuerda está fija también en el otro extremo.

¿Podemos identificar la longitud  $L$  a través de las mediciones que el sensor proporciona de la tensión en el extremo conocido  $x = 0$ ?

La respuesta es, como vamos a ver, afirmativa.

Como indicamos anteriormente las soluciones de (18) pueden desarrollarse en series de Fourier del siguiente modo:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)] \sin(k\pi x/L). \quad (19)$$

La tensión en el extremo  $x = 0$  viene dada por

$$u_x(0, t) = \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{L} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)]. \quad (20)$$

Se observa que la tensión es siempre una función periódica de período  $2L$ . Por tanto, la periodicidad de la tensión ( $2L$ ) está relacionada de manera unívoca (y en este caso lineal) con la longitud  $L$  de la cuerda. Esto responde afirmativamente al problema inverso planteado.

Pero cabe plantearse aún una cuestión más. ¿Cuántas mediciones hemos de hacer en  $x = 0$  para determinar completamente la longitud? Dejamos esta cuestión para el lector interesado.

Como hemos mencionado en la introducción, son muchos los contextos en los que se plantean problemas inversos. Entre ellos cabe destacar la prospección petrolífera, las numerosas aplicaciones médicas (tomografía computerizada, etc.), radares, etc. En realidad, como hemos visto, cada vez que el TFI se aplica estamos, esencialmente, resolviendo un problema inverso. Si reflexionamos un poco a este respecto nos daremos cuenta de cómo de habitual es enfrentarse a problemas inversos en la vida diaria que, sin embargo, resolvemos a menudo, afortunadamente, sin apelar al TFI.

## 6 Simulación numérica y ondas espúreas

Tal y como mencionábamos más arriba y como se pone de manifiesto en el artículo sobre ondas sísmicas al que hemos hecho referencia en la sección 4, en muchos problemas de la vida real es necesario un análisis riguroso de fenómenos de ondas que han de ir acompañados de simulaciones numéricas.

La gran potencia de cálculo de los ordenadores de hoy nos permite realizar en nuestro ordenador personal y/o portátil cálculos muy sofisticados que hasta hace unos años exigían trabajar con los más grandes ordenadores. Esta potencia de cálculo no va a hacer más que aumentar en los próximos años. Cabe entonces plantearse la siguiente cuestión ¿Es necesario continuar con un análisis matemático riguroso de las ondas o podemos simplemente confiar en nuestra creciente capacidad de cálculo y de simulación numérica?

No es fácil responder a esta pregunta. Si uno reflexiona con rigor sobre la misma, enseguida se dará cuenta, que, para responder

con total certeza a esta cuestión es necesario realizar un análisis matemático riguroso de la adecuación de los esquemas numéricos planteados al problema en cuestión. Pero entonces, implícitamente, estamos respondiendo negativamente a la pregunta planteada.

Nos encontramos pues ante la paradoja de necesitar responder negativamente a la cuestión para poder reflexionar seriamente sobre la misma.

A pesar de esta aparente paradoja son muchos los que creen que las Matemáticas, en el sentido que las hemos entendido en este siglo, tienen sus días contados, al menos en el contexto de los problemas abordados en estas notas, y que todos y cada uno de los problemas pueden ser resueltos a base de calcular más y más con nuestro ordenador que mejorará sus prestaciones cada día.

En esta sección vamos a retomar el problema del final de la sección anterior para concluir que, efectivamente, mediante métodos numéricos adecuados, se puede simular la realidad del modelo continuo de manera satisfactoria. Pero, el desarrollo de métodos numéricos adecuados exige un análisis matemático previo muy fino.

Al final del camino nos encontraremos pues con una respuesta sumamente salomónica y tendremos que rendirnos ante la evidencia de que sólo combinando un estudio teórico riguroso y los métodos numéricos se puede avanzar con paso firme, aun a riesgo de hacerlo un poco más lentamente.

Retomemos por tanto las ecuaciones de la vibración de una cuerda de longitud  $L$  fija en sus extremos  $x = 0, L$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (21)$$

Como ya habíamos indicado, las soluciones de (21) pueden desarrollarse en series de Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)] \sin(k\pi x/L) \quad (22)$$

con coeficientes  $\{a_k, b_k\}_{k \geq 1}$  que vienen determinados unívocamente por los datos iniciales  $\{u_0(x), u_1(x)\}$  de modo que

$$u_0(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right); \quad u_1(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{k \geq 1} k a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (23)$$

Conviene también observar que (21) es un modelo puramente *conservativo* en el que no se tiene en cuenta ningún fenómeno de rozamiento y/o disipación. Este hecho queda perfectamente de manifiesto en la *ley de conservación de la energía*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [ |u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2 ] dx = Cte. \quad (24)$$

En efecto, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (25)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L [u_x u_{xt} + u_t u_{tt}] dx \\ &= \int_0^L \{ [-u_{xx} + u_{tt}] u_t \} dx + u_x(x, t) u_t(x, t) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

gracias a la ecuación y a las condiciones de contorno.

A la hora de aproximar numéricamente las soluciones de (21) la primera idea que surge de manera natural es la de introducir una semi-discretización en espacio para aproximar (21) mediante un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para ello, dado un número natural  $N$  descomponemos el intervalo  $[0, L]$  que ocupa la cuerda en reposo en  $N$  subintervalos iguales. Con este objetivo, introducimos la partición del intervalo  $[0, L]$ :

$$x_0 = 0, x_j = jh, j = 1, \dots, N + 1 \quad (27)$$

donde

$$h = L/(N + 1). \quad (28)$$

Aproximamos la función  $u(x, t)$  mediante  $N + 2$  funciones que dependen exclusivamente del tiempo  $t$ :

$$u_0(t), \dots, u_{N+1}(t). \quad (29)$$

Cada función  $u_j(t)$  proporciona una aproximación de  $u(x, t)$  en el punto  $x_j = jh$  del mallado.

Hemos de introducir un sistema de EDO que determine las funciones  $\{u_j(t)\}_{j=0, \dots, N+1}$  de manera única y que proporcione una buena aproximación de  $u$ . Para ello, mediante el desarrollo de Taylor observamos que

$$u_{xx}(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) + u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t)}{h^2}.$$

Por lo tanto parece natural reemplazar la ecuación de ondas por las ecuaciones diferenciales

$$u_j''(t) - \frac{[u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)]}{h^2} = 0, t > 0$$

para los puntos interiores del mallado correspondientes a los índices  $j = 1, \dots, N$ .

Por otra parte, las condiciones de que la cuerda está fija en sus extremos se reflejan en que

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, t > 0.$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{u}'' + \frac{1}{h^2} A \vec{u} = 0, t > 0 \quad (30)$$

donde el vector  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$  (excluimos los valores extremos  $u_0$  y  $u_{N+1}$  puesto que  $u_0 \equiv u_{N+1} \equiv 0$ ) siendo  $A$  la matriz tridiagonal  $N \times N$  con valor constante 2 en la diagonal principal y con valor constante  $-1$  en las diagonales superior e inferior. En el caso  $N = 5$  esta matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Se trata de una matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva.

Los autovalores y autovectores de  $A$  se conocen explícitamente. Recordemos que el número  $\lambda$  es un autovalor de la matriz  $A$  si existe un vector  $e$  tal que  $Ae = \lambda e$ . En efecto, en el caso que nos ocupa,

$$\frac{1}{h^2} A \vec{\phi}^k = \lambda^k \vec{\phi}^k \quad (32)$$

si y solamente si

$$\lambda_h^k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right) \quad (33)$$

y

$$\vec{\phi}_h^k = \begin{bmatrix} \sin(k\pi h/L) \\ \sin(2k\pi h/L) \\ \dots\dots\dots \\ \sin(Nk\pi h/L) \end{bmatrix} \quad (34)$$

para  $k = 1, \dots, N$ .

Conviene observar que los autovalores y autovectores dependen de  $h = L/(N+1)$  o, lo que es lo mismo, de  $N$ , puesto que la matriz  $A$  es de dimensión  $N \times N$ .

Conociendo el espectro de  $A$  se puede dar la expresión de la solución general de la semi-discretización (30). En efecto, tenemos

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=1}^N \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_h^k} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_h^k} t\right) \right] \vec{\phi}_h^k. \quad (35)$$

La expresión (35) es análoga a la obtenida en (22) para la solución general de la ecuación de ondas mediante series de Fourier. Conviene observar que:

- En (35) tenemos una suma finita para  $k = 1, \dots, N$ , pero  $N \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Es decir, la suma finita (35) se convierte en una serie de la forma (22) cuando el peso  $h$  del mallado se afina;
- Para cada  $k$  fijo, los autovalores

$$\lambda_h^k \rightarrow \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (36)$$

cuando  $h \rightarrow 0$  que son los autovalores que surgen en la descomposición en series de Fourier (22) de las soluciones del problema continuo;

- Los autovectores  $\vec{\phi}_h^k$  no son más que la evaluación de las autofunciones  $\sin(k\pi x/L)$  del problema continuo en los puntos del mallado.

Por todo ello, (30) es, a todas luces, una buena aproximación de la ecuación de ondas (21). En realidad, no es difícil comprobar que, *conocidos los datos iniciales*  $\{u_0, u_1\}$ , si resolvemos (30) con los datos iniciales naturales

$$\begin{cases} u_j(0) = u_{0,j} = u_0(x_j), & j = 1, \dots, N \\ u'_j(0) = u_{1,j} = u_1(x_j), & j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (37)$$

las soluciones de (30) cuando  $h \rightarrow 0$  convergen a las de (21).

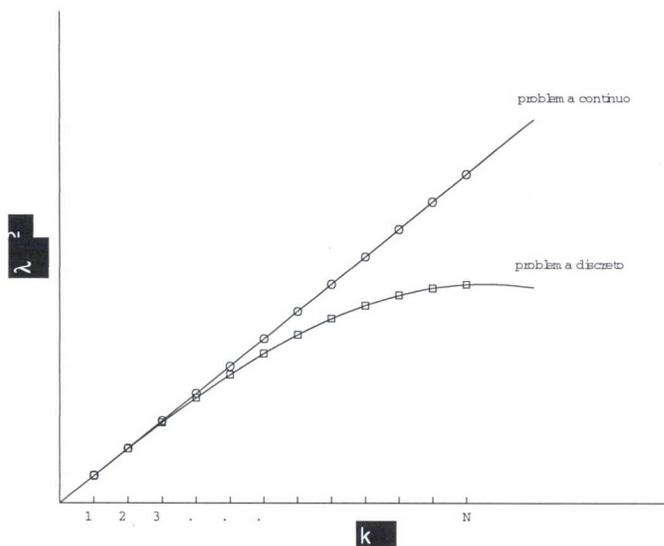


Figura 6.1.

Problema continuo:  $\sqrt{\lambda} = k$ .

Problema discreto:  $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{h} \sin(kh/2)$ .

Un análisis un poco más riguroso de la proximidad entre (35) y (22) plantea de manera natural cómo de uniforme es la convergencia de los autovalores  $\lambda_h^k$  con respecto a  $k$ .

En la siguiente figura representamos las raíces cuadradas de los autovalores del problema continuo y del problema discreto para  $L = \pi$ .

Esta gráfica pone de manifiesto que la curva de autovalores del problema discreto se separa de manera importante de la curva (recta) correspondiente a los autovalores del problema continuo en cuanto  $k$  aumenta.

¿Qué repercusión tiene este hecho?

Volvamos al problema inverso, analizado en la sección anterior, en el que se trataba de identificar la longitud  $L$  de la cuerda a través de las mediciones de la tensión de sus vibraciones en el extremo  $x = 0$ . Obtuvimos una respuesta satisfactoria observando que las soluciones de la ecuación de ondas en el intervalo de longitud  $L$  son periódicas de período  $2L$ .

Calculemos ahora la tensión en  $x = 0$  asociada al sistema semi-

discreto. Habida cuenta que

$$u_x(0, t) \sim [u(x_1, t) - u(0, t)] / h \quad (38)$$

parece natural definir la *tensión discreta* del siguiente modo:

$$\tau(t) = \frac{u_1(t)}{h}. \quad (39)$$

En virtud de (35) la tensión  $\tau(t)$  asociada a una solución del sistema semi-discreto (30) viene dada por

$$\tau(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left[ a_k \sin \left( \sqrt{\lambda_h^k} t \right) + b_k \cos \left( \sqrt{\lambda_h^k} t \right) \right] \sin \left( \frac{k\pi h}{L} \right). \quad (40)$$

Comparemos el comportamiento de las tensiones discretas (40) en relación a las de la cuerda vibrante real (que, sabemos, son funciones periódicas del período  $2L$ ).

Para hacerlo, consideramos soluciones particulares de (30) lo más simples posible. Para ello tomamos coeficientes

$$b_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (41)$$

y

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \quad k = 1, \dots, N - 2; \\ a_{N-1} &= \frac{h}{\sin((N-1)\pi h/L)}; \quad a_N = \frac{-h}{\sin(N\pi h/L)}, \end{aligned} \quad (42)$$

de modo que la solución correspondiente de (30) sea

$$\vec{u}(t) = h \left[ \frac{\sin \left( \sqrt{\lambda_h^{N-1}} t \right) \vec{\phi}_h^{N-1}}{\sin((N-1)\pi h/L)} - \frac{\sin \left( \sqrt{\lambda_h^N} t \right) \vec{\phi}_h^N}{\sin(N\pi h/L)} \right] \quad (43)$$

y la tensión discreta correspondiente

$$\tau(t) = \sin \left( \sqrt{\lambda_h^{N-1}} t \right) - \sin \left( \sqrt{\lambda_h^N} t \right). \quad (44)$$

Es fácil comprobar que los coeficientes  $a_{N-1}$  y  $a_N$  son del orden de  $L/2\pi$  y  $-L/2\pi$  respectivamente cuando  $h \rightarrow 0$ . Por tanto la energía de la solución (43) del problema semi-discreto (43) es del orden de la unidad.

Sin embargo, ¿qué ocurre con la tensión semi-discreta  $\tau(t)$  de (44)?

Conviene observar que

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_h^N} &= \\ &= \frac{2}{h} \sin\left(\frac{N\pi h}{2L}\right) = \frac{2}{h} \sin\left(\frac{((N-1)+1)\pi h}{2L}\right) \\ &= \frac{2}{h} \left[ \sin\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) + \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{L}\right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_h^N} - \sqrt{\lambda_h^{N-1}} &= \sqrt{\lambda_h^{N-1}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{L}\right) \\ &= O(h^2) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + O(h) = O(h). \end{aligned}$$

Utilizando entonces el desarrollo de Taylor vemos que

$$|\tau(t)| = O(h) |t|. \quad (45)$$

¿Qué quiere decir (45)?

Esta cota significa que, para detectar que la solución del problema semi-discreto tiene una energía total del orden de la unidad, habremos de medir su tensión durante un intervalo temporal del orden de  $1/h$ . Evidentemente, este fenómeno no hace más que agravarse cuando  $h \rightarrow 0$ , pues las mediciones habrían de hacerse en intervalos temporales que tienden a infinito.

De este modo se pone de manifiesto la inadecuación del esquema semi-discreto (30) a la hora de abordar el problema inverso de la determinación de la longitud de la cuerda a través de la tensión.

Y, sin embargo, tal y como habíamos mencionado, (30) es un esquema satisfactorio a la hora de obtener una buena aproximación de las soluciones de (21) para datos iniciales fijos.

¿Qué está ocurriendo entonces? En un problema inverso desconocemos absolutamente la forma en que la energía de las soluciones puede distribuirse sobre las diferentes componentes de Fourier. Por

ello, una convergencia puntual del espectro como en (37), para cada  $k$  fijo, es insuficiente y precisamos convergencias uniformes con respecto a  $k$ .

Pero, tal y como se desprende de la figura 6.1, en el caso presente, la tasa de convergencia se deteriora muy rápidamente cuando  $k$  aumenta.

¿Qué podemos hacer entonces? ¿Hay alguna forma de “arreglar” el esquema numérico (30) para garantizar su buen comportamiento en el problema inverso? Curiosamente esto puede hacerse pero a base de despreiciar parte de la información que el esquema numérico proporciona.

Retomemos la solución (35) que el esquema numérico proporciona. De la figura 6.1 se desprende que la proximidad del espectro continuo y numérico mejora cuando nos limitamos a considerar autovalores correspondientes a índices  $k \leq \delta N$  con  $\delta > 0$  pequeño.

¿Qué ocurre entonces cuando truncamos la suma (35) para considerar

$$\vec{u}_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\delta N} \left[ a_k \sin \left( \sqrt{\lambda_h^k t} \right) + b_k \cos \left( \sqrt{\lambda_h^k t} \right) \right] \vec{\phi}^k \quad (46)$$

con  $0 < \delta < 1$ ?

Evidentemente, al hacerlo, estamos despreiciando parte de la información que el esquema numérico proporciona. Pero estamos precisamente despreiciando aquéllo que corresponde a las altas frecuencias que producen las patologías que acabamos de describir.

Se puede efectivamente probar que la *solución filtrada* tiene un mejor comportamiento que la solución completa. En efecto, por una parte, para datos iniciales fijos y  $0 < \delta < 1$  también fijado, la solución truncada (46) del problema semi-discreto converge cuando  $h \rightarrow 0$  a la del problema continuo. Por otro, utilizando resultados clásicos de series de Fourier no armónicas (véase [IZ]), se puede probar que, en el contexto del problema inverso, las soluciones numéricas filtradas (46) tienen un buen comportamiento pues la medición de la tensión a lo largo de un intervalo temporal del orden de  $2\sigma(\delta)L$  proporciona una información completa sobre la solución.

De acuerdo con la figura 6.1 y el sentido común se observa que el parámetro  $\sigma(\delta)$  satisface:

- $\sigma(\delta) \rightarrow 1, \delta \rightarrow 0$ ;

- $\sigma(\delta) \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 1$ .

¿Qué quiere esto decir?

Que a medida que  $\delta$  decrece, la solución numérica filtrada reproduce un comportamiento más próximo a la solución real del sistema continuo (21).

Nos encontramos así ante un hecho aparentemente paradójico. Filtrando más y más las altas frecuencias numéricas, i.e. usando cada vez menos información de todo lo que el esquema numérico proporciona, nos encontramos más cerca de la realidad.

Tal vez esto contribuya a que todos reflexionemos un poco sobre si la creciente capacidad de cálculo que los ordenadores proporcionan es, en si misma, una garantía de progreso.

## Bibliografía

- [B] V.M. Babich, “The Higher-Dimensional WKB Method or Ray Method”, en *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, **34**, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- [BR] A. Baratta y J. Rodellar eds., *Proceedings of the First European Conference on Structural Control*, Series on Stability, Vibration and Control of Systems, **13**, World Scientific, 1996.
- [Be] D. Bernouilli, Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l’Académie de 1747 et 1748, *Hist. de l’Acad. Roy. de Berlin*, **9** (1753), 147-172 y 173-195.
- [Br] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, 1983.
- [CH] S. L. Campbell y R. Haberman, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor frontera*, McGrawHill, Mxico, 1998.
- [CLOT] S.J. Chapman, J.M.H. Lawry, J.R. Ockendon y R.H. Tew, On the theory of complex rays, *SIAM Review*, **41** (3) (1999), 417-509.

- [CBBH] F. Cotton, P.-Y. Bard, C. Berge y D. Hatzfeld, ¿Qué es lo que hace vibrar Grenoble?, *Mundo Científico*, **203** (1999), 21-23.
- [D1] J.R. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration, *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, **3** (1747), 214-219 y Suite des recherches, **3** (1747), 220-249.
- [D2] J.R. d'Alembert, Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration, *Hist. de l'Acad. Roy de Berlin*, **6** (1750), 355-360.
- [F] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, Paris, 1988. (reedición del trabajo inicialmente editado por Firmin Didot, Père et Fils, en Paris en 1822).
- [IZ] J.A. Infante y E. Zuazua, Boundary observability for the space semi-discretizations of the  $1 - d$  wave equation, *M2AN*, **33** (2) (1999), 407-438.
- [I] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [J] F. John, *Partial Differential Equations*, 4. ed., Springer Verlag, Nueva York, 1982.
- [K] J. B. Keller, Semiclassical mechanics, *SIAM Rev.*, **27** (1985), 485-504.
- [KdV] D.J. Korteweg y G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Meq.*, **39** (1895), 422-423.
- [L] N. Luzin, Function: Part I, *Amer. Math. Monthly*, **105** (1998), 59-67; Part II. 263-270.
- [M] F. Macía, *Ondas Gaussianas y aplicaciones a la observación, estabilización y control de vibraciones*, Tesina, UCM, 1999.

- [N] A. Nachbin, Some Mathematical Models for Wave Propagation, *Cubo Matemática Educacional*, Universidad de la Frontera, Chile, en vías de publicación.
- [R] J. Ralston, Solution of the wave equation with localized energy, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 807-823.
- [SC] A. Sánchez-Calle, El problema espectral inverso. ¿puede oírse la forma de un tambor?, *Fronteras de la Ciencia*, CSIC, **14** (1997), 43-46.
- [Si] SIAM, *Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective*, SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.
- [T] M.E. Taylor, *Partial Differential Equations. Basic Theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [VSPG] L. Vázquez, L. Streit y V.M. Pérez-García, eds., *Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems: Theory and Applications*, World Scientific, 1996.
- [We] H. F. Weinberger, *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Reverté, Barcelona, 1986.
- [W] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Willey, Nueva York, 1974.



# Matemáticas en el Aula de Informática

Roberto Rodríguez Del Río  
Universidad Complutense Madrid

El trabajo se centra en la realización de prácticas en la enseñanza de las Matemáticas con paquetes informáticos de cálculo simbólico, y estudia en detalle los programas DERIVE y MATLAB.

## 1 Introducción

En este curso veremos algunos de los recursos que puede ofrecer el Aula de Informática para la enseñanza de las Matemáticas, centrándonos particularmente en la realización de prácticas con paquetes informáticos de Cálculo Simbólico. Los paquetes informáticos que se han elegido han sido DERIVE y MATLAB.

Las razones para elegir DERIVE son evidentes, se trata de uno de los programas informáticos de Matemáticas más populares, de fácil manejo y con pocos requerimientos sobre el ordenador en el que se utiliza. Estas razones hacen de él una herramienta muy útil para apoyar el aprendizaje de las Matemáticas en niveles elementales y no tan elementales.

Las razones para elegir MATLAB son más subjetivas, sin embargo, hay que decir que actualmente es uno de los paquetes informáticos más utilizados en la Universidad y en la Industria. A pesar de que un conocimiento completo de MATLAB es prácticamente imposible, la incorporación en las últimas versiones del programa de ciertos elementos más básicos han hecho que empiece a difundirse su uso entre estudiantes de primer ciclo de carreras universitarias. En las Enseñanzas Medias no se puede decir que sea muy conocido, más bien todo lo contrario, y ésta es una de las razones que nos han animado a introducirlo en este curso. Existen otros programas

de Cálculo Simbólico muy eficaces, como MAPLE o MATHEMATICA, que estarían a medio camino entre DERIVE y MATLAB. Su aprendizaje es algo más complicado que el de DERIVE, aunque a cambio su potencia es bastante mayor.

Estas notas están divididas en cuatro partes fundamentales: dos de ellas son breves introducciones a los programas, la de MATLAB es algo más extensa debido a la complejidad, y posiblemente, novedad del programa. Las otras dos partes son prácticas y tienen la intención de ilustrar cuestiones relacionadas con la utilización de cada programa y, de paso, actualizar algún conocimiento de Matemáticas. Por último, se han incluido otros dos apartados, uno que pretende ser una reflexión sobre la utilización del ordenador en la enseñanza de las Matemáticas y, el otro, es una pequeña lista de direcciones de Internet en las que se pueden encontrar materiales relacionados con el contenido de las notas.

## 2 Sobre DERIVE

DERIVE es un asistente matemático que permite realizar cálculo simbólico, cálculos numéricos (con ciertas limitaciones), gráficas en dos y tres dimensiones y en el que se pueden programar ciertas fórmulas aunque no se puede decir que sea un paquete ideal para hacer programas complejos. Vamos a ver, o recordar, a continuación algunas de las muchas posibilidades que nos ofrece para realizar después algunas prácticas concretas.

Las indicaciones que vienen a continuación están referidas a la versión 4.11, *DERIVE for Windows*, la versión en inglés. Existe ya alguna versión en castellano del programa, sin embargo, la mayoría de los textos de Matemáticas en los que se utiliza DERIVE aparecen referidos siempre a la versión en inglés.

### 2.1 Cuestiones Básicas

Supongamos que ya estamos dentro del programa DERIVE. Si hemos sido capaces de abrir el programa correctamente nos encontramos ante una ventana en la que, en la parte superior, aparece una línea de comandos: `File Edit Author Simplify Solve Calculus, etc.`, dentro de cada uno de estos aparecen varias opciones y dentro de algunas de éstas, algunas otras. Para activarlos hay

que ponerse con el cursor del ratón sobre el nombre del comando elegido y pulsar una vez, aparecerá una nueva lista de opciones y volvemos a hacer lo mismo. Así, si queremos ejecutar el comando **File Load Demo**, tendremos que abrir **File**, seleccionar la opción **Load** y aquí volver a seleccionar **Demo**.

Veamos en primer lugar algunas cuestiones básicas relacionadas con el funcionamiento del programa:

- *Cómo salir del programa DERIVE*: Basta con pulsar **File Exit**. Nos preguntará si queremos guardar las expresiones que hayamos escrito. Si decimos que **No**, todas las operaciones previas se perderán.
- *Cómo introducir datos y funciones*: Para esto se utiliza el comando **Author Expression**. En la pantalla aparecerá una nueva ventana donde podemos introducir la fórmula, comando o datos que necesitemos. Para escribir símbolos o letras especiales hay una lista en la misma ventana. Basta con pulsar el carácter deseado con el cursor del ratón. La ventana de **Author** también se puede activar pulsando las teclas **Ctrl A** del teclado simultáneamente. Una vez que hayamos acabado, pulsamos **OK**, y aparecerá la fórmula o expresión que hayamos puesto numerada.

Estos números son útiles para evitar tener que repetir fórmulas. Si en una nueva expresión queremos usar o sustituir alguna expresión anterior numerada, en la ventana de **Author** escribimos en el lugar que deseemos poner la fórmula, **#número de la expresión**.

- *Cómo se pueden borrar todas las expresiones de la pantalla*: Con la opción **Edit Remove**.
- *Cómo se pueden grabar en un fichero las operaciones de una sesión*: Esto es algo muy importante, si queremos aprovechar el trabajo que hemos realizado para empezar a partir de él en la próxima sesión. Los ficheros se guardan como en cualquier otro programa de Windows, con **File Save** o con **File Save as**. El fichero se guardará con extensión **.mth** que es la extensión que entiende Derive. Sin embargo, **no hay manera de guardar las gráficas**.

- *Cómo recuperar un archivo que se hubiera grabado previamente:* Para recuperar algo que se grabó en una sesión anterior, también se hace como en cualquier programa de Windows, con File Open. A veces los archivos no se recuperan de la forma que esperamos, en particular si el fichero contiene resultados numéricos; al guardar y volver a cargar el fichero esos resultados vuelven a aparecer en forma racional (!).

En la parte de debajo de la línea superior de comandos aparecen una serie de iconos con los que se pueden realizar casi todas las operaciones que se pueden llevar a cabo con las opciones de los comandos.

En Derive la manera de trabajar consiste en dar los siguientes pasos: en primer lugar se introduce una cierta expresión matemática y a continuación se ejecuta un comando sobre esa expresión. Los comandos pueden ser de dos tipos: comandos que se pueden ejecutar directamente o comandos que estén contenidos en un fichero de utilidades.

Vamos a ver en primer lugar algunas de las cosas que se pueden hacer con los comandos incorporados al propio programa, después comentaremos qué son los ficheros de utilidades y veremos algunos ejemplos del uso de algunos de ellos en las prácticas que se proponen a continuación.

## 2.2 Números y Ecuaciones

Las expresiones matemáticas se introducen en Derive usando funciones, operadores y constantes. Los operadores matemáticos básicos son (+, -, \*, /), que junto con los paréntesis forman la base de la construcción de expresiones. Para la potenciación se usa  $\wedge$ .

El resultado de un cálculo que sea un número se ofrece siempre, por defecto, en forma algebraica. Sin embargo, se puede convertir a un resultado con decimales.

**Ejemplo 1** *Queremos calcular  $\pi^2$ , con 10 decimales exactos.*

*Escribimos Author: pi $\wedge$ 2*

*Elegimos la opción Simplify Approximate y nos aparece una ventana en la que podemos modificar el número de decimales, que*

es 6 por defecto. En la ventana aparecen la opción OK que indica la operación, pero no la ejecuta, habría que volver a pulsar Simplify y Simplify que nos da el resultado definitivo.

**Ejercicio 1** Calcular el valor de  $e^2\sqrt{3}$ , con 8 cifras decimales exactas. (Para escribir la expresión, Author: #e^2sqrt(3).)

Para resolver ecuaciones se utiliza el comando Solve.

**Ejemplo 2** Queremos resolver la ecuación,  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

La introducimos en Author:  $x^2-5x+6=0$  y seleccionamos la opción Solve Algebraically después de pulsar OK y el icono que contiene =, tendremos

$$[x = 2, x = 3]$$

También se pueden encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones que no tengan solución exacta.

**Ejemplo 3** La ecuación  $x \operatorname{sen}(x) = 1$  tiene una raíz entre 0 y 2. Escribimos Author:  $x\sin(x)=1$  y pulsamos Solve Numerically, aparece una ventana en la que tenemos que especificar el intervalo en el que creemos que está la solución, en este caso,  $[0, 2]$ . El resultado

$$[x=1.11416]$$

También se pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (siempre que se puedan resolver de una manera más o menos sencilla).

**Ejemplo 4** Queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2a^2x + 3y = 7 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

Se puede pulsar Solve System e introducir los datos en la ventana, o bien escribir directamente

Author: SOLVE([2a^2x+3y=7, x-5y=0], [x, y])

Obtendremos como solución

$$1\# : \left[ x = \frac{35}{10a^2 + 3}, y = \frac{7}{10a^2 + 3} \right]$$

## 2.3 Vectores y Matrices

Para introducir un vector en Derive, se escribe entre corchetes y sus coordenadas separadas por comas

**Author:** [1,2,3,4]

Para escribir una matriz, se hace fila a fila, cada fila en forma de vector, separamos las filas por comas y lo encerramos todo entre paréntesis

**Author:** [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]

Estas dos operaciones también se pueden hacer directamente con las opciones **Author Vector** y **Author Matrix** respectivamente. Aparecen ventanas donde, habiendo especificado previamente el tamaño del vector o de la matriz, no hay más que escribir los números.

Vamos a ir viendo algunas operaciones que se pueden llevar a cabo con vectores y matrices:

- Las *operaciones* de suma de vectores, suma de matrices, producto de matrices, producto de un escalar por un vector o una matriz, se hacen utilizando los operadores aritméticos básicos.
- La *traspuesta* de una matriz se hace con el acento grave, por ejemplo,  $[[a, b, c], [1, 2, 3]]'$ .
- Para calcular el *determinante* de una matriz se utiliza el comando **det**. (En Derive, no se distingue entre mayúsculas y minúsculas.) Por ejemplo,  $DET([[2, 3], [a, b]])$ , produciría, después de simplificar

$$2b - 3a$$

**Importante:** A veces es necesario aplicarle a una expresión, por ejemplo una matriz, varios comandos sucesivamente. Para evitar tener que volver a introducir la matriz, podemos identificarla con una letra que representará a la matriz y de esta forma evitar reescribirla cada vez que vayamos a realizar un cálculo, esto también es válido para cualquier otra expresión, aunque no sea una matriz. Se hace

**Author:** a:=[matriz]

A partir de este momento y durante la misma sesión a representa a la matriz a la que se ha identificado. Se puede usar

cualquier letra, pero hay que tener precaución, evidentemente, de no identificar con la misma letra expresiones distintas.

- Con el operador  $\wedge$  se puede elevar una matriz cuadrada a cualquier exponente entero.
- Para calcular la *inversa* de una matriz también se utiliza el operador anterior. Si  $a$  es la matriz, escribir **Author:**  $a\wedge(-1)$ , pulsamos OK y después simplificamos.
- Para encontrar la forma escalonada reducida por filas de una matriz se utiliza el comando **ROW\_REDUCE**. (Este comando es similar a uno que aparecerá en Matlab **rref** y que estudiaremos en profundidad en la primera práctica de Matlab).
- El *polinomio característico* de una matriz cuadrada es el determinante de la diferencia entre la matriz y la matriz identidad multiplicada por una variable. Si ponemos **Author:** **CHARPOLY(A,  $\lambda$ )** nos aparecerá el polinomio característico de la matriz  $A$  en función de  $\lambda$ .
- Los *autovalores* de una matriz cuadrada son los ceros de su polinomio característico, esto se puede calcular directamente con **EIGENVALUES(A,  $\lambda$ )**.

## 2.4 Cálculo Diferencial e Integral

### • Calculus Limit

Este es el comando que se utiliza para calcular límites. Una vez que está escrita la expresión, pulsando el comando aparece una ventana en la que hay que especificar la variable, el punto hacia donde tiende (que puede ser infinito, **inf**) y si es por la derecha, por la izquierda o ambos. Si se pulsa OK aparecerá el límite indicado en la pantalla y ya sólo queda simplificar, con el icono  $\approx$ , por ejemplo.

### • Calculus Differentiate

Se usa para calcular derivadas de funciones en forma simbólica, es decir, para calcular la función derivada. Pulsándolo aparece una nueva ventana en la que hay que especificar la variable

con respecto de la cual se quiere derivar y el orden de la derivada que se quiere calcular. Lo mismo se puede conseguir escribiendo en Author: directamente

`DIF(LN(COS(x)),x,2)`

es decir, derivada segunda de la función  $\text{LN}(\text{COS}(x))$ , con respecto de  $x$ .

- **Calculus Taylor Series**

Sirve para calcular polinomios de Taylor, en una de las prácticas veremos cómo se utiliza.

- **Calculus Integrate**

Es el comando para calcular Integrales. En la ventana que aparece hay que especificar la variable, si la integral es definida o indefinida y, en el primer caso, los límites de integración, que pueden ser infinito. Es decir, que también se pueden calcular integrales impropias.

- **Calculus Sum**

Sirve para calcular sumatorios, también será analizado en una de las prácticas.

## 2.5 Ficheros de Utilidades

Los ficheros de utilidades son unos ficheros con extensión .MTH que vienen incorporados con el programa en los que están definidas o programadas ciertas fórmulas. Se pueden cargar para utilizar las fórmulas contenidas en ellos de dos formas diferentes:

Eligiendo la secuencia **File Load Math** aparecerá una ventana en la que aparecen todos los ficheros disponibles. Basta con elegir con el ratón el que queremos que se cargue. Y aparecerán todas las fórmulas en pantalla. Esta posibilidad es la recomendada cuando no se conoce bien el contenido del fichero, o la sintaxis de la fórmula que queremos utilizar.

Sin embargo, si elegimos la secuencia **File Load Utility**, una vez seleccionado el fichero se cargarán todas las fórmulas y se podrán utilizar, pero no aparecen en pantalla. Esta opción es la recomendada cuando vamos a utilizar alguna fórmula del fichero que conocemos perfectamente.

Dependiendo de la versión de DERIVE que estemos utilizando podemos disponer de más o menos ficheros de utilidades, además de los que el propio usuario vaya generando. Por ejemplo, en la versión que se ha utilizado para preparar estas notas, la 4.11 aparecen los siguientes ficheros:

**SOLVE.MTH** - Sirve para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales.

**VECTOR.MTH** - Contiene funciones que automatizan algunas operaciones que se realizan habitualmente con vectores y matrices.

**NUMERIC.MTH** - Sirve para hacer derivación e integración numérica.

**DIF\_APPS.MTH** - Contiene algunas aplicaciones de las derivadas, tales como, derivación implícita, cálculo de rectas tangentes, planos tangentes, etc.

**INT\_APPS.MTH** - Aplicaciones de la Integración. Transformadas de Laplace, Series de Fourier, cálculo de longitudes de arco, etc.

**ODE1.MTH** - Contiene comandos para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, soluciones de forma exacta, cuando es posible.

**ODE2.MTH** - Lo mismo que el fichero mencionado antes, pero para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden.

**ODE\_APPR.MTH** - Contiene comandos para resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada. Métodos numéricos como el Método de Euler, Runge-Kutta, Taylor, etc. y Métodos geométricos para dibujar campos de direcciones de la ecuación.

**RECUREQN.MTH** - Contiene funciones que sirven para calcular soluciones exactas de ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden.

**APPROX.MTH** - Contiene sólo una función que sirve para calcular la aproximación racional Pade.

**EXP\_INT.MTH** - Contiene fórmulas que permiten aproximar las integrales exponencial, logarítmica, seno y coseno.

**PROBABIL.MTH** - Fórmulas de Probabilidad. Distribución Binomial, Hipergeométrica, t de Student,  $\chi^2$ , etc.

**FRESNEL.MTH** - Integrales de Fresnel.

**BESSEL.MTH** - Funciones de Bessel y de Airy.

**HYPERGEO.MTH** - Funciones Hipergeométricas.

**ELLIPTIC.MTH** - Fórmulas para calcular Integrales Elípticas.

**ORTH\_POL.MTH** - Contiene fórmulas para hacer cálculos relativos a polinomios ortogonales.

**ZETA.MTH** - Contiene varias fórmulas que permiten aproximar funciones relacionadas con la función Zeta.

**GRAPHICS.MTH** - Contiene comandos que permiten dibujar gráficas de objetos como esferas, toros, conos, etc., como proyecciones en la pantalla 2D.

**NUMBER.MTH** - Comandos de Teoría de Números.

**MISC.MTH** - Contiene una mezcla de fórmulas de todo tipo.

### Demos

Además de los ficheros de utilidades, **DERIVE** lleva también unos ficheros con demostraciones de algunas de sus capacidades básicas. Para activar estas demostraciones hay que utilizar la secuencia **File Load Demo**, y después elegir uno de los ficheros de entre los siguientes:

**ARITH.DMO** - Aritmética elemental.

**ALGEBRA.DMO** - Ejemplos de cálculos algebraicos.

**TRIG.DMO** - Demo sobre trigonometría.

**FUNCTION.DMO** - Sobre construcción de funciones.

**CALCULUS.DMO** - Demo sobre Cálculo Diferencial e Integral.

**MATRIX.DMO** - Demo sobre matrices y vectores.

## 3 Prácticas con DERIVE

### 3.1 Práctica Primera: Gráficos con DERIVE

#### 3.1.1 Gráficas 2D.

El programa DERIVE es capaz de dibujar gráficas de curvas y funciones en el plano de tres formas diferentes. Funciones o curvas en coordenadas cartesianas, dadas en forma explícita, es decir, de la forma  $y = f(x)$ ; o también dadas en forma implícita, es decir, de la forma  $g(x, y) = 0$ . También curvas en forma paramétrica, es decir, de la forma  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  con  $a \leq t \leq b$ . Y también curvas en coordenadas polares, de la forma  $r = r(\theta)$  con  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ .

#### Comandos Básicos de la pantalla de gráficos 2D

Para pasar a la pantalla de gráficos en 2 dimensiones del programa DERIVE, hay que pulsar la opción `window 2D-plot` y aparecerá superpuesta la pantalla 2D. Para volver a la ventana de expresiones, en la nueva pulsar la opción `window algebra`. También se puede hacer con iconos que aparecen debajo de la línea de comandos. Recorriendo con el ratón los iconos descubriremos fácilmente cuáles son. En la línea superior de nuevos comandos que aparece en la ventana 2D, algunas de las opciones más importantes son:

**Plot:** Esta es la opción que ejecuta la gráfica.

**Edit Delete Plot:** Permite borrar las gráficas, una o todas.

**Set Center:** Centra la imagen tomando como centro el punto que indiquemos.

**Set Range:** Permite cambiar el rango en el que aparece la gráfica.

**Options Coordinate System:** Con esta opción se puede cambiar el sistema de coordenadas, rectangulares, polares.

La mayoría de estas opciones vuelven a aparecer en forma de iconos debajo de la línea de comandos, junto con algunos otros, en particular son interesantes los iconos de las "flechitas" que permiten llevar a cabo diversas modalidades de Zoom sobre la gráfica.

## Coordenadas Cartesianas

**Ejemplo 1** Dibujar la gráfica de la función, dada en forma explícita

$$y = x^2$$

Introducimos la función, que se puede hacer de dos formas, poniendo: Author:  $y=x^2$ , o sin poner la  $y$ .

Pulsamos window 2D-plot y a continuación, en la ventana 2D, Plot y ya tenemos la gráfica, que aparece en un rango  $-4 < x < 4$ ,  $-4 < y < 4$ , por defecto.

**Ejercicio 1** Dibujar las gráficas de las siguientes funciones dadas en forma explícita eligiendo, si fuera necesario, un rango adecuado para que aparezcan los aspectos más representativos de la función:

a)  $f(x) = x(x^2 + 4)^2$

b)  $f(x) = x - \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$

d)  $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

e)  $f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$

p)  $f(x) = \frac{x}{e^{|x-1|}}$

La función valor absoluto se puede escribir con  $\operatorname{abs}()$ .

**Ejemplo 2** Dibujar la curva, dada en forma implícita, siguiente:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Introducimos la ecuación en Author:  $x^2+y^2=1$ .

Y seguimos los mismos pasos que en el ejemplo anterior, es decir, que el programa entiende perfectamente la fórmula sin necesidad de despejar  $y$ . Nos debe salir una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Sin embargo, lo que se aprecia en el dibujo no tiene el aspecto de una circunferencia, esto es debido al rango que aparece por defecto.

**Ejercicio 2** Dibujar las siguientes curvas dadas en forma implícita:

$$a) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$c) x^2 - y^2 = 0$$

$$d) x^2 y^2 = 1$$

## Ecuaciones Paramétricas

**Ejemplo 3** Dibujar la gráfica de la curva

$$\vec{r}(t) = \left( \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right); \quad -5 \leq t \leq 5$$

Escribimos en Author el vector entre corchetes:

$[(t(t^2-1))/(t^2+1), (2(t^2-1))/(t^2+1)]$ . Pasamos a la ventana 2D y al pulsar Plot aparece una ventana en la que tenemos que indicar el intervalo de variación de  $t$ , en este caso, Minimum value: -5 Maximum value: 5. Pulsamos OK y sólo queda elegir, si fuera necesario, un Rango adecuado para la función.

**Ejercicio 3** Dibujar las curvas en paramétricas siguientes:

$$a) \vec{r}(t) = (2 \cos^3 t, 2 \operatorname{sen}^3 t); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$b) \vec{r}(t) = (3 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} (2t)); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$c) \vec{r}(t) = \left( \frac{t}{\pi} \left( 12 \left( \frac{t}{\pi} \right)^2 - 9 \right), \left( \left( \frac{t}{\pi} \right)^2 - 1 \right) 16 \left( \frac{t}{\pi} \right)^2 + 2 \right);$$

$$-3 \leq t \leq 3$$

$$d) \vec{r}(t) = \left( \frac{3}{2} \cos t (\cos t + 1), 2 \operatorname{sen} (2t) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$e) \vec{r}(t) = (\operatorname{sen} (2t) + \operatorname{sen} t, -\cos(2t) - \cos t); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$f) \vec{r}(t) = \left( e^{\frac{t}{4}} \operatorname{sen} (2t), e^{\frac{t}{4}} \cos(2t) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$g) \vec{r}(t) = \left( \frac{2}{3} t \cos\left(\frac{7t}{2}\right), \frac{2}{3} t \operatorname{sen}\left(\frac{7t}{2}\right) \right); \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$h) \vec{r}(t) = \left( t - \frac{11}{10} \operatorname{sen} (3t), -\frac{22}{10} \cos(3t) \right); \quad -3\pi \leq t \leq 3\pi$$

## Coordenadas Polares

### Ejemplo 4 Dibujar la gráfica de

$$r = 2 - 4 \cos(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Escribimos la función en Author: `r:=2-4cos(theta)`. (También podemos utilizar otra variable,  $p$  por ejemplo).

Pasamos a la ventana 2D y antes de pulsar Plot, con la opción Options Coordinate System... lo ponemos en coordenadas polares.

Pulsamos Plot e indicamos el intervalo de variación de la variable, en este caso se pueden dejar los que aparecen por defecto, que son precisamente  $-\pi$  y  $\pi$ . Por último, ajustamos con los iconos de Zoom hasta ver la gráfica completa.

### Ejercicio 4 Dibujar las gráficas de las siguientes funciones, dadas en coordenadas polares:

$$a) r = 7 - 7 \operatorname{sen}(\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$b) r = 3 - 6 \sin(\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$c) r = \operatorname{sen}(6\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$d) r = \cos(8\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$e) r = \sqrt{5} \cos(2\theta); \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

### 3.1.2 Gráficas 3D

Con DERIVE se pueden hacer gráficas de funciones de dos variables en el espacio, es decir, funciones de la forma  $z = f(x, y)$  (forma explícita). Sin embargo, utilizando el fichero de utilidades GRAPHICS.MTH, también se pueden dibujar curvas y ciertas superficies (que no sean funciones) en la pantalla de gráficos 2D. Para pasar a la pantalla de gráficos 3D, una vez que se ha escrito la expresión que se quiere representar, se pulsa el icono que hay más a la derecha y entramos en una nueva pantalla de la que sus comandos más importantes son:

**Plot:** El comando que hace que se dibuje la gráfica.

(Aquí no existe un comando para borrar gráficas, ya que cuando se dibuja una nueva desaparece la anterior.)

**Window algebra:** Que permite volver a la ventana de expresiones.

**Set Grids:** Que permite modificar el número de puntos que aparecen en el mallado de la gráfica. Si se pone un mallado muy denso, puede tardar mucho en hacer la gráfica o incluso, en algunos casos, bloquear el ordenador.

De manera análoga a como ocurre con la ventada de gráficos 2D los comandos se pueden ejecutar con los iconos, entre los que se encuentran los correspondientes al Zoom.

## Curvas en el Espacio

En primer lugar, cargamos el fichero GRAPHICS.MTH. Con File Load. Escribimos Author: axes.

Entramos en la pantalla de gráficos 2D. Quitamos los ejes 2D con la opción Options axes y pulsamos Plot para que aparezcan los tres nuevos ejes (isométricos). Habrá que especificar las longitudes de cada uno de los tres ejes. Por ejemplo, Min: 0 Max: 3.14159 (tres veces).

Ahora estamos en condiciones de dibujar gráficas de curvas en forma paramétrica.

Realmente, lo que se hace es proyectar las curvas que están en el espacio sobre el plano 2D. Esto lo produce un comando definido en el fichero que hemos cargado, isometric.

### Ejemplo 5 Dibujar la curva

$$\vec{r}(t) = \left( \cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{t}{48} \right) \quad -50 \leq t \leq 50$$

y rotarla después un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianes en torno al eje de las X.

Para dibujar la curva, escribimos en

Author: `isometric([cost,sint,t/48])` y pulsamos Simplify. (La función `isometric` es la que nos permite proyectar la gráfica sobre el plano 2D.) Quizá sea conveniente definir la función previamente con `r:=.....`, sobre todo si la vamos a rotar después.

Vamos a la pantalla de gráficos y pulsamos Plot y nos preguntará por el intervalo, especificamos =Min: -50 Max: 50. (Si todo ha ido bien saldrá una hélice a lo largo del eje Z).

Para rotarla bastará con escribir:

Author: `isometric(rotate_x(pi/2)*[cost,sint,t/48])`, y proceder como antes. Ahora aparecerá la misma hélice, pero a lo largo del eje Y.

**Ejercicio 5** Representar las curvas siguientes y después rotarlas alrededor del eje que se indica, con el ángulo que se indica:

a)  $\vec{r}(t) = (2 \cos^3 t, 2 \sin^3 t, t)$   $-4 \leq t \leq 3$ . Eje X.  $\frac{3\pi}{4}$  radianes.

b)  $\vec{r}(t) = (\cos t, 2 \cos^2 t, \frac{1}{4} \sin t)$   $-\pi \leq t \leq \pi$ . Eje Z.  $-\frac{3\pi}{2}$  radianes.

c)  $\vec{r}(t) = (\frac{t}{6} \cos t, \frac{t}{6} \sin t, \frac{t}{36})$   $-12 \leq t \leq 19$ . Eje Y.  $180^\circ$ .

d)  $\vec{r}(t) = (e^{\frac{t}{4}} \sin(2t), e^{\frac{t}{4}} \cos(2t), \frac{t}{4})$   $-10 \leq t \leq 4.8$ . Eje X.  $30^\circ$ .

e)  $\vec{r}(t) = (\sin(2t) + \sin(t), -\cos(2t) - \cos(t), \frac{t}{6})$   
 $-9 \leq t \leq 10$ . Eje Y.  $-\frac{\pi}{2}$  radianes.

f)  $\vec{r}(t) = (\cos(3t), 2 \cos^2(t), \sin(2t))$   $-\pi \leq t \leq \pi$ . Eje Z.  $\pi$  radianes.

## Superficies Parametrizadas

**Ejemplo 6** Representar la superficie esférica de radio 1.

Escribimos en Author:

`isometrics(sphere(1,theta,phi),theta,-pi,pi,12,phi,0,pi,12)`

(Cuidado, ahora hay que escribir `isometrics`. Las variables pueden ser otras. El 12 puede variar, para dar más o menos detalle al dibujo.)

A continuación pulsar `Simplify approximate`, nos aparecerán unas matrices de números con las coordenadas de los puntos que se van a representar.

Pulsamos `Plot` y aparecerá el dibujo. Si sólo aparecen puntos, habrá que cambiar el modo con:

`Options Points` y especificamos `Connect: Yes`. Volvemos a pulsar `Plot` y ahora se conectan los puntos.

**Ejercicio 6** Representar las superficies siguientes: (en todas ellas utilizar 12 puntos para cada variable.) En algunos ejemplos es posible que sea necesario hacer Zoom o ajustar el Rango para visualizarlos correctamente. Para cada caso hay que buscar el comando adecuado en el fichero de utilidades.

- El Hemisferio Norte de una esfera de radio 1.
- La parte de la esfera de radio 1 situada en el primer octante.
- El Hemisferio Sur de una esfera de radio 1.
- Un cilindro de radio 2, con  $0 \leq z \leq 2$ .
- Un Toro con  $r_c = 2$ ,  $r_s = 0.7$ .

**Gráficas de funciones  $z = f(x, y)$**

**Ejemplo 7** Representar la gráfica de la función

$$z = x^2 + y^2$$

Dibujando algunas curvas de nivel y alguna traza (curvas que son intersección de la gráfica de la función con los planos coordenados).

Introducimos la función Author:  $z=x^2+y^2$ . Pulsamos Plot en la ventana gráfica 3D y nos aparece una primera versión de la gráfica.

Para dibujar las curvas de nivel y la de las trazas: Volvemos a la ventana de expresiones y pulsamos la opción Simplify Substitute for Variables y aquí indicamos los valores a sustituir por las variables. Por último, tendríamos que representar esta gráfica en la pantalla 2D.

**Ejercicio 7** Representar las gráficas de las siguientes funciones de 2 variables, dibujando en cada caso, al menos 4 curvas de nivel diferentes y una traza:

$$a) z = \frac{1}{9 + x^2 + y^2}$$

$$b) z = -\sqrt{|xy|}$$

$$c) z = \frac{\cos\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}{3 + x^2 + y^2}$$

$$d) z = \frac{y^2}{5} - 3|x|$$

$$e) z = e^{-(x^2+y^2)}$$

### 3.2 Práctica Segunda: Series de Taylor y de Fourier.

Se llama polinomio de *Taylor* de la función  $f(x)$  desarrollado en torno a  $x = a$ , de grado  $n$  a la expresión:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Para que se pueda calcular el polinomio de Taylor de una función en un punto, esta función debe poseer derivadas, al menos, hasta el orden  $n$ . En el caso en que  $a = 0$  se suele llamar polinomio de *McLaurin*, y quedaría reducido a

$$P_{n,a}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

La serie de *Fourier* asociada a una función  $f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que sea continua a trozos es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

donde los coeficientes de Fourier se calculan mediante las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Con *Derive*, o con cualquier otro programa, lo que se puede calcular o representar realmente es una suma parcial de la serie de Fourier, esto es

$$s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

Para calcular el polinomio de Taylor con *DERIVE*, se utiliza el comando `TAYLOR(f(x), x, a, n)`. Esto también se puede hacer

directamente con los comandos de la parte superior de la pantalla, una vez que hemos introducido la fórmula de la función en **Author**, pulsamos la secuencia **Calculus Taylor Series...**, aparece una nueva ventana en la que podemos especificar el punto en torno al cual hacemos el desarrollo, **Expansion Point:** y el grado del polinomio, **Order:**.

Para calcular una suma parcial de la serie de Fourier de una función  $f(x)$  hasta el grado  $k$ , es decir,  $s_k(x)$ , se utiliza el comando **FOURIER(f(x), x, -T, T, k)** (siguiendo la notación anterior), que se encuentra en el fichero de utilidades **INT\_APPS.MTH**. Así que habrá que cargar el fichero previamente para poder utilizar el comando.

### 3.2.1 Polinomios de Taylor

**Ejercicio 1** Sea la función  $f(x) = e^x$ :

a) Calcular los polinomios de McLaurin de grados  $n=2,4,10$  y representarlos junto a la función.

b) Calcular los polinomios de Taylor  $P_{n,1}$  para los grados  $n=2,4,10$  y representarlos junto a la función.

**Ejercicio 2** Sea la función  $f(x) = \text{sen}(x)$ :

a) Calcular los polinomios de McLaurin de grados  $n = 3, 5, 11$  y representarlos junto a la función.

b) Calcular los polinomios de Taylor  $P_{n,\frac{\pi}{2}}(x)$  para los grados  $n = 3, 5, 11$  y representarlos junto a la función.

c) Utilizar el polinomio de McLaurin con  $n = 3$  y el polinomio de Taylor  $P_{3,\frac{\pi}{2}}(x)$  para calcular aproximadamente en valor de  $\text{sen}(0.1)$  y el valor de  $\text{sen}(1.5)$ . Compararlo con los valores reales. Para sustituir en los polinomios, una vez calculados, pulsar la secuencia **Simplify Substitute for Variables**, aparecerá una ventana en la que indicamos el valor de la  $x$ . ¿En qué casos nos sale una mejor aproximación? ¿Por qué?

### 3.2.2 Series de Fourier

**Ejercicio 3** Convergencia

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Calcular las sumas parciales de la Serie de Fourier asociada a la función hasta  $k = 2, 3, 4, 6, 10, 20$ .

b) Representarlas, con la gráfica de la función.

c) ¿Qué valor toman las sumas parciales en el punto de continuidad  $x = \frac{\pi}{2}$ , a qué número deberían aproximarse?

c) ¿Qué valor toman las sumas parciales en el punto de discontinuidad  $x = \pi$ , a qué número deberían aproximarse?

Indicación: En primer lugar habrá que escribir la función  $f(x)$ . Para las funciones definidas a trozos Derive dispone de una función que hace fácil su sintaxis. Se trata de la función  $\text{chi}(a, x, b)$ , que toma el valor 1 en el intervalo  $(a, b)$  y vale 0 en el resto. ( $a$  y  $b$  pueden

ser infinito, inf). En este ejemplo, habría que poner  
 Author:0\*chi(-pi,x,0)+x\*chi(0,x,pi).

#### Ejercicio 4 Fenómeno de Gibbs

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Calcular las sumas parciales de su Serie de Fourier asociada hasta  $k = 2, 4, 10$ .

b) Representarlas, con la gráfica de la función.

Se puede observar que en los puntos cercanos a la discontinuidad de la función  $f(x)$  la Serie de Fourier (sus sumas parciales, que es lo que realmente estamos dibujando) pueden exceder hasta en un 9% el valor del salto de la discontinuidad. A este hecho se le conoce con el nombre de Fenómeno de Gibbs. Para observarlo mejor, se puede agrandar la imagen en torno a los puntos de coordenadas  $(0, 1)$  y  $(\pi, 1)$ . Esto se consigue pulsando el icono que hay en la pantalla de gráficos 2D con la leyenda Set range with box, después se pone el cursor en un punto de la pantalla y pulsando el botón izquierdo del ratón se marca la zona a ampliar.

#### Ejercicio 5 Método de Sumación de Fejér

El Método de Sumación de Fejér de una serie de Fourier consiste en sumar los promedios de las sumas parciales y pasar al límite. Se obtiene así una nueva sucesión de funciones que también converge a la función inicial incluso mejor que la propia Serie de Fourier

(Teorema de Fejér, ver [A]), de hecho, no se produce el Fenómeno de Gibbs mencionado anteriormente.

En otras palabras, si tenemos las sumas parciales de la Serie de Fourier

$$s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]$$

Construimos una nueva sucesión con el promedio de las sumas parciales

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m s_k(x)$$

La Suma de Fejér es el límite

$$s(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(x)$$

Sea la función del ejercicio anterior

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Dibujar las sumas parciales de Fejér  $\sigma_2(x)$ ,  $\sigma_5(x)$ ,  $\sigma_{10}(x)$ ,  $\sigma_{15}(x)$  y  $\sigma_{30}(x)$ . Observar en la gráfica que la convergencia de las sumas parciales a la función  $f(x)$  es completamente distinta a la de la Serie de Fourier y no hay fenómeno de Gibbs.

Para hacerlo es conveniente seguir los siguientes pasos:

1) Definimos la función  $f(x)$

$$1\# : f := (-1).\text{CHI}(-\pi, x, 0) + 1.\text{CHI}(0, x, \pi)$$

2) Definimos la suma parcial de Fourier

$$2\# : S(x, k) := \text{FOURIER}(f, x, -\pi, \pi, k)$$

3) Y, por último, definimos la suma parcial de Fejér

$$3\# : \sigma(x, m) := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m S(x, k)$$

Esta fórmula se puede conseguir escribiendo

$$\text{Author: } \sigma(x, m) := (1/(m+1))\text{sum}(S(x, k), k, 0, m)$$

Ahora para calcular y dibujar una suma concreta, por ejemplo  $\sigma_5(x)$ , basta con escribir en Author:  $\sigma(x, 5)$ , simplificar y dibujar.

**Ejercicio 6** Sea la función

$$f(x) = |x|$$

Calcular las sumas parciales de la serie de Fourier asociada a  $f(x)$  para  $k = 5, 10, 15$ . Representarlas junto a la función. Observar que, al tratarse de una función bastante regular, incluso con pocos términos, la sucesión de sumas parciales converge muy rápidamente a la función  $f(x)$ .

Utilizar los comandos creados en el ejercicio anterior para dibujar las sumas de Fejér para  $m = 5, 10, 15$ .

Indicación: La función  $|x|$  se puede escribir en Derive,  $\text{abs}(x)$ .

**Ejercicio 7** En los siguientes casos calcular las sumas parciales de la Serie de Fourier para las funciones indicadas y el valor de  $k$  que se da. Representarlas después junto a la gráfica de la función  $f(x)$ :

- a)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .  $k = 10$ .  
 b)  $f(x) = \cos(3x)$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .  $k = 3$ .

**Ejercicio 8** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -1, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Calcular las sumas parciales de Fourier y representarlas junto a la función para los casos  $k = 4, 5, 10$ .

**Ejercicio 9** Función de Weierstrass

La función de Weierstrass es un ejemplo de una función continua en todos los puntos pero que no tiene derivada en ninguno. Un caso concreto de esta función sería

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n x)$$

En cierto modo se puede considerar que se trata de una serie de Fourier. Vamos a dibujar la gráfica de algunas de las sumas parciales de esta función. Para ello resulta conveniente definir la expresión anterior mediante algún nombre que nos permita trabajar

con ella de una manera cómoda, sin tener que arrastrar toda la expresión cada vez que queramos dibujar una de las sumas parciales.

Esto se puede conseguir de la siguiente forma

Author: WEIER(x, k) := sum(2<sup>-n</sup>COS(3<sup>n</sup>x), n, 1, k)

O utilizando cualquier otro nombre que sea distinto de los comandos existentes en Derive. El resultado debería ser una expresión como la siguiente

$$1\# : \text{WEIER}(x, k) := \sum_{n=1}^k 2^{-n} \cos(3^n x)$$

Si queremos calcular o representar ahora una suma parcial, por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^3 2^{-n} \cos(3^n x)$$

Sólo tenemos que escribir Author: weier(x,3) y pulsar Simplify o pasar directamente a la pantalla de gráficos 2D.

Representar algunas de las sumas parciales, por ejemplo, los casos  $k = 1$ ,  $k = 5$ ,  $k = 10$  y  $k = 15$ .

## 4 Sobre MATLAB

El nombre MATLAB es una abreviatura de las palabras MATrix LABoratory. MATLAB es un sistema interactivo para cálculos científicos y de ingeniería basado en las matrices. Con él se pueden resolver complejos problemas numéricos sin necesidad de escribir un programa específico para ello. Aunque también es posible programar. Además, el programa MATLAB dispone, dependiendo de la versión, de diferentes módulos (*Toolboxes*) que permiten resolver problemas específicos. Nosotros nos vamos a centrar en lo que se puede hacer con el módulo de cálculo simbólico (*Matlab Symbolic Toolbox*). Aunque veremos en primer lugar algunas generalidades del programa.

### 4.1 Comandos Básicos

Supongamos que hemos sido capaces de abrir el programa. En Matlab las órdenes se introducen escribiéndolas una a una a continuación del *prompt* (`>>`) que aparece en la ventana del usuario. Veamos en primer lugar algunas de las operaciones matemáticas más elementales.

Para sumar dos números:

```
>>2+2
```

```
ans =
```

```
4
```

Después de escribir cada comando hay que pulsar al Intro para que lo ejecute.

El valor que queremos calcular también se puede asignar a una variable. Por ejemplo:

```
x=3^2
```

```
x=
```

```
9
```

La notación para las operaciones matemáticas elementales es la habitual en todos los programas de Cálculo Simbólico:

suma	+
resta	-
división	/
exponenciación	^
multiplicación	*

También están definidas algunas las funciones más comunes utilizadas en Matemáticas. Su sintaxis coincide con la que se utiliza en el programa DERIVE, aunque hay algunas diferencias. Algunas de estas funciones son:

<code>sin</code>	seno
<code>sinh</code>	seno hiperbólico
<code>asin</code>	arcoseno
<code>cos</code>	coseno
<code>cosh</code>	coseno hiperbólico
<code>acos</code>	arcocoseno
<code>tan</code>	tangente
<code>atan</code>	arcotangente
<code>exp</code>	exponencial
<code>log</code>	logaritmo neperiano
<code>log10</code>	logaritmo decimal
<code>sqrt</code>	raíz cuadrada
<code>abs</code>	valor absoluto

De todas formas, para obtener listas completas de todas las funciones que puede utilizar Matlab, así como para saber el uso de cada una de ellas o de cualquier comando siempre se puede acudir al `help`. Esto se puede hacer de varias formas, poniendo `>>helpwin`, es el propio programa quien nos ofrece la ayuda (como en cualquier otro programa), o poniendo `>>helpdesk`, que nos ofrece ayuda interactiva, conectándose a Internet si este recurso está disponible en nuestro ordenador.

## 4.2 Interfaz de usuario. Variables

Con las flechas del cursor se pueden recuperar las órdenes anteriores, sin tener que volver a teclearlas. Esto resulta útil en caso de una equivocación o cuando se quiere repetir un comando con alguna pequeña modificación.

A veces, puede resultar necesario, hasta imprescindible, que el resultado de un cálculo no aparezca en pantalla. Por ejemplo, si generamos una matriz de orden muy alto con el objeto de hacer después una gráfica. El hecho de que aparezca la matriz en pantalla puede resultar un poco engorroso. Para conseguir esto se pone un punto y coma al final de la instrucción.

Por ejemplo,

```
x=sin(3);
```

No aparece ningún resultado, pero ha realizado el cálculo, porque si escribimos el valor de  $x$ , aparecerá el valor 0.1411.

En Matlab lo normal es ir asignando valores escalares o matriciales a variables, si en un momento determinado queremos saber con qué variables estamos trabajando, se puede escribir `>>who`. O bien, en el ítem *File* con *Show Workspace*.

En algunos momentos necesitaremos cargar o guardar ficheros. Para saber en qué directorio estamos, cambiar de directorio, etc.:

```
pwd                directorio en el que estamos
cd nombre         cambia al directorio cuyo nombre indiquemos
dir               nos da una lista de ficheros del directorio actual
```

### 4.3 Matrices

Los vectores y las matrices son los elementos con los que trabaja Matlab. Veamos cómo se introducen y cómo se pueden hacer algunas de las operaciones básicas con ellos.

Un vector se puede definir introduciendo sus coordenadas, separadas por espacios o por comas, entre corchetes:

```
>> x=[1 2 3]
x =
    1 2 3
```

Si queremos definir un vector columna, se separan las filas por puntos y comas, o bien se calcula el transpuesto de un vector fila con `>>x'`.

Otra forma de crear vectores es la siguiente:

```
>> x=1:0.5:3
x =
    1.0000 1.5000 2.0000 2.5000 3.0000
```

que genera un vector que va desde 1 hasta 10 con un paso de 0.5 unidades.

Para introducir una matriz, se separa cada fila con un punto y coma

```
A=[3 2 1; 6 5 4; 9 8 7]
A =
     3     2     1
     6     5     4
     9     8     7
```

**Ejercicio 1** Después de definida la matriz, probar los siguientes comandos e intentar descubrir para qué sirven:

- `>>A(2,3)` o por ejemplo `>>A(1,2)`
- `A(:,1)` y también `A(2,:)`
- `A^2` y `A.^2`. ¿En qué se diferencian estos dos comandos?

## 4.4 Gráficos con Matlab

Veamos cómo se pueden generar gráficos sencillos de funciones de una y de dos variables directamente. También veremos después que es posible hacerlos utilizando la *Matlab Symbolic Toolbox*.

### Gráficas 2D

Para hacer gráficas de funciones de una variable con Matlab primero tenemos que crear una tabla de valores de la variable para después dibujar la función. Por ejemplo queremos dibujar la gráfica de la función  $y = \sin(t)$ :

Primero creamos una tabla de valores para  $t$ :

```
>> t = 0:pi/100:2*pi;
```

Definimos la función:

```
>> y = sin(t);
```

y por último la dibujamos (ver figura 1):

```
>> plot(t,y)
```

Realmente lo que hemos hecho es dibujar 200 puntos de la función en el intervalo  $[0, 2\pi]$

Veamos un ejemplo algo más complicado. Queremos dibujar ahora la gráfica de la función  $y = xe^{-x^2}$ .

Definimos los valores para los que queremos que hacer la gráfica:

```
>>x = -3:0.01:3;
```

Definimos la función:

```
>> y = x.*exp(-x.^2);
```

(¿Por qué hay que poner los puntos antes de las operaciones?)

Y por último se escribe el comando para que ejecute el dibujo (figura 2):

```
>> plot(x,y)
```

### Gráficas 3D

Veamos ahora cómo se pueden dibujar gráficas de funciones  $z = f(x, y)$ . Consideremos el ejemplo de la función  $z = e^{-x^2-y^2}$ . Vamos a hacer su gráfica en el dominio  $[-3, 3] \times [-3, 3]$ . En primer

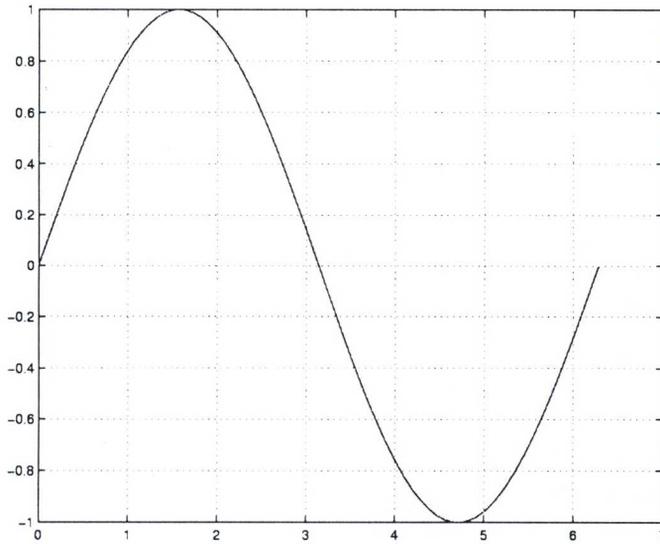


Figura 1: Gráfica de  $y = \text{sen}(t)$

lugar debemos generar las tablas de valores para  $x$  e  $y$ . Esto se consigue con el comando:

```
[x,y]=meshgrid(-3:0.1:3);
```

Ahora definimos la función:

```
z=exp(-x.^2-y.^2);
```

Y por último se ejecuta el comando que produce la gráfica (figura 3):

```
>>mesh(x,y,z)
```

La presentación gráfica puede ser mucho más *artística*. Por ejemplo, con la secuencia de comandos siguiente:

```
>>surf1(x,y,z)
```

```
shading interp;
```

```
colormap(pink)
```

Se puede conseguir la gráfica siguiente (ver figura 4, la gráfica debería ser de color rosado).

Otro comando interesante en las gráficas 3D es: `rotate3d`, que nos permite, utilizando el ratón sobre la figura rotarla de manera interactiva en tres dimensiones.

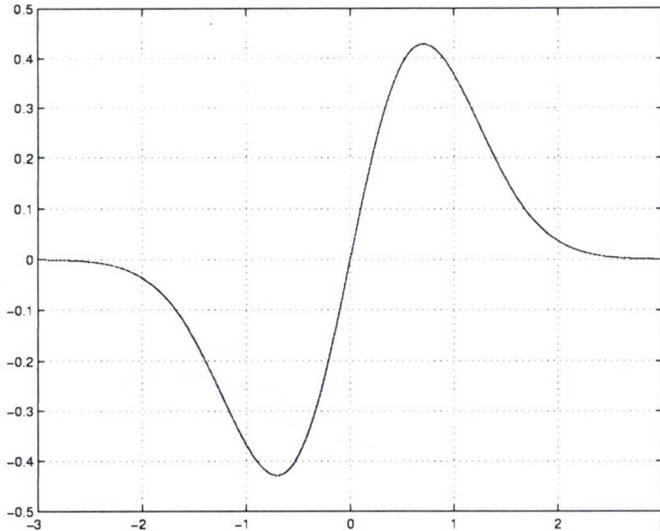


Figura 2: Gráfica de  $y = xe^{-x^2}$

## 4.5 Archivos de órdenes. Programación en Matlab

La manera de guardar comandos y construir programas que ejecuten determinadas rutinas consiste en crear lo que se llaman ficheros-M o *Scripts*.

Para crear un fichero-M necesitamos abrir un editor de texto (como el Bloc de Notas de Windows) y escribir los comandos. Luego ese fichero de texto debe guardarse con la extensión `.m` y a eso se le llama un *Script*. La versión 5 (Student Edition) incorpora un editor de *Scripts* basta abrir la opción File M-File de la barra superior.

Vamos a ver algunos ejemplos de ficheros-M:

**Ejemplo 1** *Escribamos lo siguiente en el editor de Matlab y guardémoslo con el nombre evaluar.m (si se utiliza el editor de Matlab no hace falta poner .m).*

```
% m-fichero para evaluar la función
% y= a*exp(-1.2t) - 3.0*exp(-2t)
% INPUT: coeficiente a y tiempo t
% OUTPUT: función y(t)
fprintf('Evaluar y=a*exp(-1.2*t)-3.0*exp(-2*t) \n')
a=input('Coeficiente a, a= ');
```

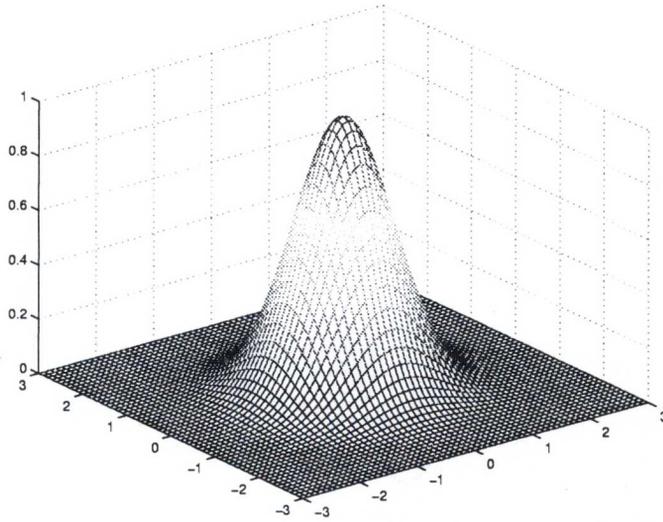


Figura 3: Gráfica de  $z = e^{-x^2 - y^2}$

```
t=input('Variable t, t= ');
%
% Resultados
fprintf('\n Func.:y=%g*exp(-1.2*g)-3.0*exp(-2*g) \n',a,t,t)
y=a*exp(-1.2*t) - 3.0*exp(-2*t)
% Fin
```

#### Observaciones:

1. Lo que se ha escrito en cada línea detrás de % no forma parte del programa, son comentarios. Si hacemos

```
>>help evaluar
```

*aparecen precisamente esos comentarios.*

2. Si hacemos

```
>>type evaluar
```

*aparecerá en pantalla todo el programa escrito.*

3. Por fin, para ejecutarlo basta con escribir el nombre. Por ejemplo,

```
>>evaluar
```

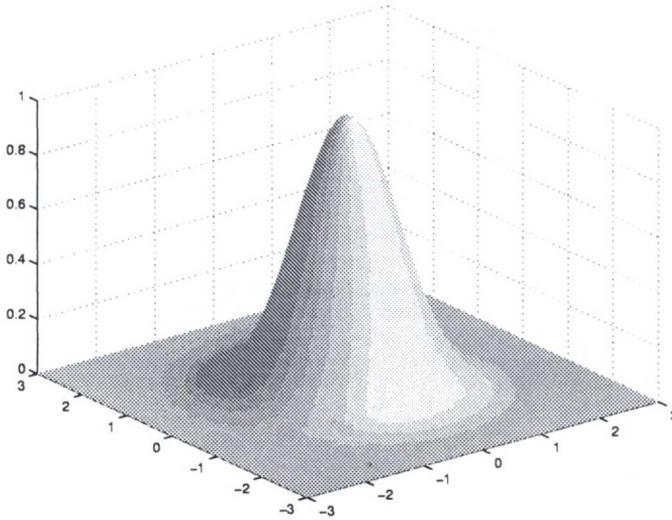


Figura 4: Gráfica artística de  $z = e^{-x^2 - y^2}$

Evaluar  $y = a \cdot \exp(-1.2 \cdot t) - 3.0 \cdot \exp(-2 \cdot t)$

Coefficiente  $a$ ,  $a = 2$

Variable  $t$ ,  $t = 3$

Func.:  $y = 2 \cdot \exp(-1.2 \cdot 3) - 3.0 \cdot \exp(-2 \cdot 3)$

$y =$

0.0472

4. Las dos líneas de `INPUT` son para pedir los datos.

5. La línea

```
fprintf('\n Func.:y=%g*exp(-1.2*%g)-3.0*exp(-2*%g) \n',a,t,t)
```

sirve para que aparezca en pantalla y sustituya en los lugares en los que aparece `%g` los valores `a,t,t`, así en este orden.

6. Los acentos no funcionan del todo bien con Matlab, podemos ponerlos en el fichero, pero pueden no aparecer al ejecutarlo o incluso, en algunos casos, producir errores, de manera que no conviene empeñarse demasiado en este asunto.

Vamos a ver ahora, a modo de curiosidad, un ejemplo de programa mucho más complicado. En el que se dibujan las series de

Fourier de una función. Para profundizar más en programación en Matlab se puede consultar [H], donde se pueden encontrar muchos ejemplos comentados.

**Ejemplo 2** Escribir el siguiente programa y guardar en un fichero.m. Aquí se le puso de nombre grafour, pero por supuesto el nombre puede ser cualquier otro.

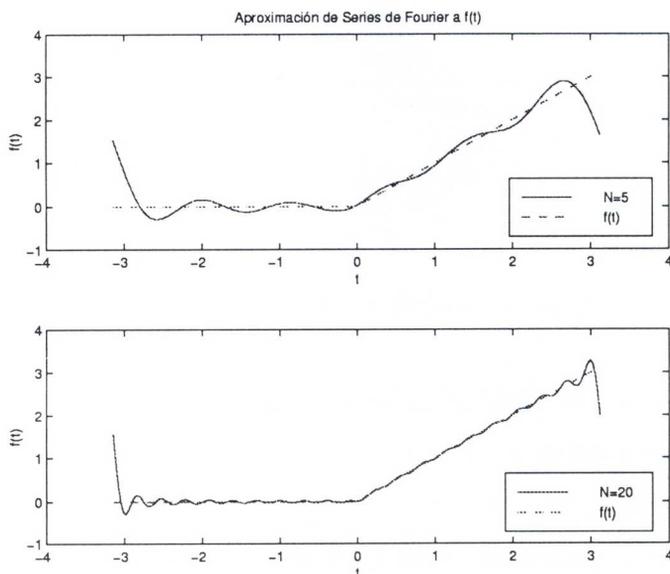


Figura 5: Series de Fourier

```
% grafour.m Gráfica series de Fourier.  funcion f(t)
% f(t)=0  -pi < t < 0
% f(t)=t  0 < t < pi
%
% Gráfica f(t) para 5 y 20 términos de la serie
clear % Borrarnos todas las variables
t =[-pi:.031:pi]; % Rango de t para las gráficas
sized=size(t); % número de puntos de t
fn=pi/4*(ones(sized)); % Aproximación de Fourier en t
yplt=zeros(sized); % para la gráfica de f(t)
% 5 términos
for n=1:5
fn=
```

```

fn=(1/pi)*(-2*cos((2*n-1)*t)/(2*n-1)^2)...
-((-1)^n*sin(n*t)/n);
end
%
for k=1:length(t)    % Crea f(t)
    if t(k) < 0
        yplt(k)=0;
    else
        yplt(k)=t(k);
    end
end
clf    % Borra anteriores figuras
subplot(2,1,1),plot(t,fn,t,yplt,'--');
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
title('Aproximación de Series de Fourier a f(t)')
legend(['N=',num2str(n)],'f(t)',4) % Nota en gráfica
% Se suman 15 términos más
for n=6:20
fn=fn+(1/pi)*(-2*cos((2*n-1)*t)/(2*n-1)^2)...
-((-1)^n*sin(n*t)/n);
end
subplot(2,1,2),plot(t,fn,t,yplt,'--');
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
legend(['N=',num2str(n)],'f(t)',4)
%Fin

```

*Si ejecutamos el programa obtendremos la gráfica de la figura 5.*

**Ejercicio 2** *Escribir un programa que resuelva la ecuación de segundo grado:  $ax^2 + bx + c = 0$*

## 4.6 Cálculo Simbólico con MATLAB

Las últimas versiones de Matlab incluyen lo que se llama *Matlab Symbolic Toolbox*. Dependiendo de la versión de Matlab que estemos utilizando, con ella vendrán incluidas diferentes *Toolboxes* que no son otra cosa que un conjunto de ficheros, programas, instrucciones, herramientas para un fin concreto. Las hay comerciales, que se

venden con el producto y las hay de dominio público, que se pueden encontrar en Internet, incluso nosotros mismos podemos crearlas.

La versión 5 de Matlab, sobre la cual están preparadas estas notas, incluye, entre otras, la *Matlab Symbolic Toolbox* que, como su propio nombre indica, sirve para hacer Cálculo Simbólico. Hasta ahora, las operaciones que se han mostrado se han realizado con números. Vamos a ver ahora cómo se pueden realizar cálculos abstractos.

## ★ Expresiones Simbólicas y Operaciones

Las expresiones simbólicas son cadenas de caracteres que representan números, funciones, operadores y variables. Las variables no necesitan tener valores predefinidos, a diferencia de todo lo comentado anteriormente.

Ejemplos de expresiones simbólicas y cómo se representan:

Expresión Simbólica	Representación en Matlab
$\frac{1}{2x^n}$	'1/(2*x^n)'
$y = \frac{1}{\sqrt{3x^3}}$	'1/sqrt(3*x^3)'
$\frac{d}{dx}(\cos(x))$	diff('cos(x)')
$f = \int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} dx$	f=int('x^3/sqrt(1-x)', 'a', 'b')
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	M=sym(' [a,b;c,d]')

Obsérvese que se trata de escribir las expresiones simbólicas entre apóstrofes. Sin embargo, en algunos casos si no se pone el comando `sym`, puede dar lugar a confusión. Por ejemplo, si pudiéramos `M=' [a,b;c,d]'` lo entendería como una cadena de caracteres. Para que lo entienda como una matriz simbólica debemos escribirlo como en el último. Por otra parte, también resulta conveniente utilizar `sym` para poder utilizar posteriormente el comando `pretty`, que explicaremos más adelante, ya que de otra forma no funcionaría.

Para todas las variables simbólicas hay que utilizar letras minúsculas ( $a, b, c, \dots, z$ ).

## Operaciones algebraicas comunes

Supongamos que tenemos dos funciones:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad y \quad g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

En primer lugar las definimos como expresiones simbólicas:

```
>>f=sym('3*x^2-2*x+1')
```

```
f =
```

$$3*x^2-2*x+1$$

```
>>g=sym('2/(x^2-1)')
```

```
g =
```

$$2/(x^2-1)$$

- Para sumar las dos funciones:

```
>>symadd(f,g)
```

```
ans =
```

$$3*x^2-2*x+1+2/(x^2-1)$$

La expresión se puede simplificar, si ello es posible, con:

```
>>simplify(ans)
```

```
ans =
```

$$(3*x^4-2*x^2-2*x^3+2*x+1)/(x^2-1)$$

Por último, como a veces resulta difícil interpretar el resultado debido a la estructura de la sintaxis de Matlab, se puede utilizar el comando `pretty`, que produce la impresión en pantalla de la expresión de una forma más parecida a como la escribimos habitualmente en Matemáticas.<sup>1</sup> (Importante: El comando `pretty` sólo funcionará si previamente las expresiones simbólicas se han definido con `sym`).

```
>>pretty(ans)
```

<sup>1</sup>También existe otro comando, `latex`, que produce como resultado la fórmula escrita en  $\text{\LaTeX}$ . Esto puede resultar muy útil para pasar directamente a un fichero `.tex` sin más que copiar y pegar. La sintaxis es `latex(ans)` o el nombre de la expresión de que se trate. Este comando se ha utilizado continuamente en la elaboración de estas notas, que han sido escritas usando  $\text{\LaTeX}$ 2e.

$$\frac{3x^4 - 2x^2 - 2x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

- Para restar las dos funciones:

```
>>symsub(f,g)
```

```
ans =
```

$$3x^2 - 2x + 1 - 2/(x^2 - 1)$$

```
>>pretty(ans)
```

$$3x^2 - 2x + 1 - \frac{2}{x^2 - 1}$$

- Para multiplicar las dos funciones:

```
>>symmul(f,g)
```

```
ans =
```

$$2*(3x^2 - 2x + 1)/(x^2 - 1)$$

```
>>pretty(ans)
```

$$2 \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

- Para dividir las dos funciones:

```
>>symdiv(f,g)
```

```
ans =
```

$$1/2*(3x^2 - 2x + 1)*(x^2 - 1)$$

```
>>pretty(ans)
```

$$1/2 (3x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)$$

- Para calcular potencias de una función a elevada a otra expresión:

```
>>sympow(f,'3*x')
```

```
ans =
```

$$(3x^2 - 2x + 1)^{(3x)}$$

```
>>pretty(ans)
```

$$(3x^2 - 2x + 1)^{(3x)}$$

## Otras operaciones

Tomemos ahora las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad y \quad g(x) = \sin(x)$$

- Composición de funciones. Para calcular  $f(g(x))$  hacemos:

```
>>compose(f,g)
```

```
ans =
```

$$1/(1+\sin(x)^2)$$

```
>>pretty(ans)
```

$$\frac{1}{1 + \sin(x)^2}$$

Si queremos calcular  $g(f(x))$  tendremos que hacer

```
>>compose(g,f)
```

- Para calcular la inversa de una función:

```
>>finverse(g)
```

```
ans =
```

$$\text{asin}(x)$$

Incluso nos avisa cuando la inversa no es única:

```
>>finverse(f)
```

```
Warning: finverse(1/(x^2+1)) is not unique.
```

```
ans =
```

$$1/x*(-x*(x-1))^{(1/2)}$$

## ★ Derivadas e Integrales

### Derivadas

Para derivar simbólicamente se utiliza el comando `diff` de alguna de las formas siguientes:

En primer lugar creamos una función, en este caso, va a ser la función:

$$f(x) = \frac{3x^4 - 5ax - 1}{x + 2}$$

```
>>f=sym('(3*x^4-5*a*x-1)/(x+2)')
```

```
f =
```

$$(3*x^4-5*a*x-1)/(x+2)$$

Para calcular la derivada primera de la función con respecto de  $x$ :

```
>>diff(f)
```

```
ans =
```

$$(12*x^3-5*a)/(x+2)-(3*x^4-5*a*x-1)/(x+2)^2$$

La simplificamos:

```
>>simplify(ans)
```

```
ans =
```

$$-(-9*x^4-24*x^3+10*a-1)/(x+2)^2$$

Y por último, usamos el comando `pretty` para visualizarla mejor:

```
>>pretty(ans)
```

$$-\frac{-9x^4 - 24x^3 + 10a - 1}{(x + 2)^2}$$

Sin embargo, si queremos que derive con respecto de la variable  $a$ :

```
>>diff(f,'a')
```

```
ans =
```

$$-5*x/(x+2)$$

Para calcular derivadas de orden superior, por ejemplo, la derivada segunda:

```
>>diff(f,2)
```

```
ans =
36*x^2/(x+2)-2*(12*x^3-5*a)/(x+2)^2...
+2*(3*x^4-5*a*x-1)/(x+2)^3
Simplificamos:
>>simplify(ans)
ans =
2*(9*x^4+48*x^3+72*x^2+10*a-1)/(x+2)^3
Y,
>>pretty(ans)
```

$$2 \frac{9x^4 + 48x^3 + 72x^2 + 10a - 1}{(x + 2)^3}$$

Si queremos evaluar esta derivada en un punto, por ejemplo, queremos calcular  $f''(2)$ . Una vez que está calculada la derivada basta con sustituir  $x$  por 2, que se hace con el comando:

```
>>subs(ans,'x','2')
ans =
815/32+5/16*a
>>pretty(ans)
```

$$\frac{815}{32} + \frac{5}{16}a$$

## Integrales

El comando que se utiliza para integrar es `int(f)` donde  $f$  es una expresión simbólica. Veamos algunos ejemplos:

Consideramos la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Para calcular una primitiva, primero la definimos

```
>>f=sym('1/(x^2+2)')
f =
1/(x^2+2)
>>int(f)
ans =
1/2*2^(1/2)*atan(1/2*x*2^(1/2))
>>pretty(ans)
```

$$1/2 2^{1/2} \arctan(1/2 x 2^{1/2})$$

Si quisiéramos calcular la integral definida

$$\int_0^1 x^2 dx$$

```
>>int('x^2',0,1)
ans =
    1/3
```

Obsérvese que los resultados numéricos, cuando trabajamos con expresiones simbólicas, aparecen por defecto en forma algebraica. Para obtener un resultado en forma decimal, basta con utilizar el comando `>>numeric(ans)`, y lo calculará en forma decimal.

## ★ Representación Gráfica de Expresiones Simbólicas

La *Toolbox* de Matemática Simbólica de Matlab dispone de un comando, `ezplot` que permite dibujar gráficas de funciones de una variable.

Por ejemplo, queremos dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = x \ln(x^2)$$

Podemos hacer directamente

```
>>ezplot('x*log(x^2)')
```

Entonces aparece la figura 6. Si no se especifica intervalo la gráfica aparece, por defecto, representada en el intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ , siempre que esté definida en este intervalo, salvo conjuntos de medida cero. (Nótese que, en este caso, la función tiene una singularidad en el origen que aparece reflejada en la figura, aunque no se aprecie muy bien). Si probáramos con la función  $f(x) = x \ln(x)$ , sólo aparecería el dibujo en la parte positiva.

Una vez que tenemos la gráfica podemos agrandarla para ver algún detalle. Esto se consigue con el comando `>>zoom on` y después pulsando con el ratón sobre la figura, experimentando un poco se puede descubrir fácilmente de qué manera funciona el Zoom.

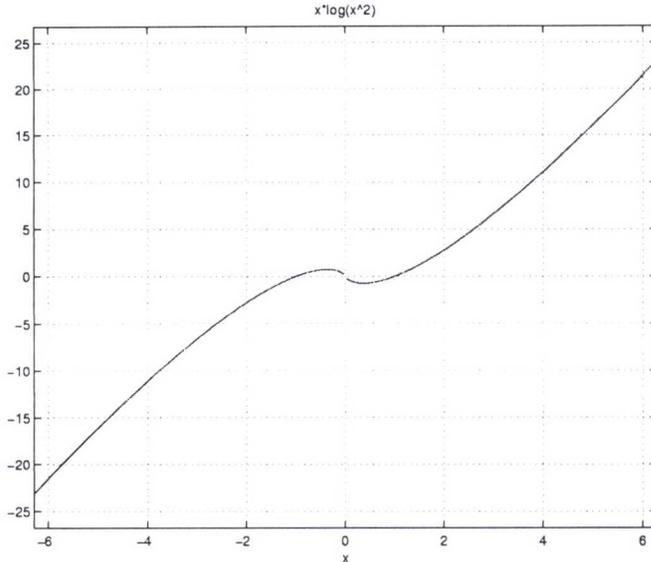


Figura 6: Gráfica de  $f(x) = x \ln(x^2)$  generada con `ezplot`

Si queremos que la gráfica la haga en un determinado intervalo, tendremos que utilizar el comando de la forma

```
>>ezplot(funcion,[a,b])
```

**Ejercicio 3** Dibujar la gráfica de la función  $f(x) = e^{-x^2}$  en diferentes intervalos.

## ★ Resolución de Ecuaciones

### Ecuaciones Algebraicas

Matlab dispone de un comando, `solve`, que de la misma forma que en Derive permite resolver ecuaciones algebraicas. Veamos algunos ejemplos de su utilización:

- Queremos resolver la ecuación de segundo grado  $ax^2+bx+c = 0$ .

```
>>solve('a*x^2+b*x+c')
```

```
ans =
```

```
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

```
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

Como vemos no es necesario escribir  $=0$ , aunque no pasa nada si se escribe. Si no se especifica la variable con respecto de la cual queremos que despeje optará por la  $x$ . Aunque se puede especificar otra.

- Por ejemplo, si queremos resolver la misma ecuación, pero con respecto de la variable  $b$

```
>>solve('a*x^2+b*x+c', 'b')
```

```
ans =
```

```
-(a*x^2+c)/x
```

- Si la ecuación tiene soluciones complejas, también las encuentra. Por ejemplo, la ecuación  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$  tiene las soluciones complejas  $1, +i, -i$ .

```
>>solve('x^3-x^2+x-1')
```

```
ans =
```

```
[ 1]
```

```
[ i]
```

```
[-i]
```

- Los resultados que ofrece el comando `solve` son por defecto en forma algebraica. Sin embargo, se pueden convertir a formato numérico. La ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$  tiene por soluciones  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

```
>>solve('x^2-x-1')
```

```
ans =
```

```
[ 1/2*5^(1/2)+1/2]
```

```
[ 1/2-1/2*5^(1/2)]
```

Pero si queremos ver los resultados numéricos

```
>>numeric(ans)
```

```
ans =
```

```
1.6180
```

```
-0.6180
```

- También se pueden resolver sistemas de ecuaciones. Basta con poner todas las ecuaciones separadas por comas. Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

```
>>[x,y]=solve('x^2+y^2=1','x+y=1')
```

```
x =
```

```
 [ 1]
```

```
 [ 0]
```

```
y =
```

```
 [ 0]
```

```
 [ 1]
```

En este caso, es necesario especificar previamente las variables, `[x,y]=`, ya que de otra forma no nos daría las soluciones sino que indicaría que  $x$  e  $y$  son dos matrices simbólicas  $2 \times 1$  pero sin escribirlas.

- Si no se puede encontrar una solución en forma algebraica, devuelve una aproximación numérica de la solución. Por ejemplo, la solución de la ecuación  $\sin(x) = x - 1$

```
>>solve('sin(x)=x-1')
```

```
ans =
```

```
1.9345632107520242675632614537689
```

## Ecuaciones Diferenciales

La cantidad de problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales que se pueden resolver con Matlab harían necesario un libro completo sobre el tema y no unas notas introductorias como éstas. Sin embargo, comentaremos algunas cuestiones elementales para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias simbólicamente. Para profundizar más sobre este tema se puede consultar [H].

El comando que se utiliza para este fin es `dsolve` que tiene un funcionamiento muy parecido al descrito en el apartado anterior (`solve`) para las ecuaciones algebraicas.

Recordemos, en primer lugar, que una Ecuación Diferencial Ordinaria es una ecuación en la que la incógnita es una (o varias funciones) de una variable y en la que aparecen derivadas de la función con respecto de la variable. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (porque la derivada más alta que aparece es la primera) en la que la variable es la  $x$  y la función incógnita es la  $y$ . Para resolverla con Matlab

```
>>dsolve('Dy=1+y^2', 'x')
```

```
ans =
```

```
tan(x-C1)
```

Como se puede observar la derivada se representa por Dy, si hubiera sido una derivada de otro orden, por ejemplo,  $\frac{d^3y}{dx^3}$ , habríamos puesto D3y. También hemos de especificar cuál es la variable, si no lo hacemos escribirá la solución por defecto en función de  $t$ .

Lo que acabamos de hacer es calcular la solución general de la ecuación, por lo que aparece la constante  $c1$  que es la constante de integración. Si queremos resolver un problema de valores iniciales, es decir, la ecuación junto con una condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
>>dsolve('Dy=1+y^2', 'y(0)=1', 'x')
```

```
ans =
```

```
tan(x+1/4*pi)
```

Otro ejemplo, una ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$$

Ahora la variable es  $t$  y la función  $x(t)$ .

```
>>dsolve('D2x-2*Dx-3*x=0')
```

```
ans =
```

```
(C1*exp(3*t)*exp(t)+C2)/exp(t)
```

donde  $c1$  y  $c2$  son las constantes de integración. Si quisiéramos resolverlo con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

```
>>dsolve('D2x-2*Dx-3*x=0')
ans =
    (1/4*exp(3*t)*exp(t)-1/4)/exp(t)
```

## ★ Sumas de Riemann

Una herramienta interesante que tiene Matlab se consigue con el comando `rsums`, su sintaxis es `rsums(f)`, donde  $f$  es una función simbólica. Aparece una ventana gráfica (ver figura 7). Debajo de la gráfica hay un deslizador (que no se aprecia en nuestra figura) que permite cambiar con el ratón el número de rectángulos usados para aproximar el área de la curva, desde 2 hasta 256 rectángulos como máximo. En la parte superior aparece la función junto con el resultado numérico de la suma.

Veamos un ejemplo:

```
>>f='10*x*exp(-5*x^2)'; % creamos una función
f =
    10*x*exp(-5*x^2)
>>vpa(int(f,0,1),6) % evaluamos la integral de 0 a 1
ans =
    .993262
>>rsums(f) % aproximación de Riemann desde 0 hasta 1
```

Y aparece la figura interactiva mencionada antes, en principio aparecen 10 rectángulos, aunque este número se puede cambiar como se ha indicado antes. Esta herramienta tiene una limitación, sea cual sea la función sólo la representa en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 4** *A pesar de que el comando `rsums` sólo aproxima la integral en el intervalo  $[0, 1]$ . También se puede utilizar para aproximar en un intervalo  $[a, b]$  cualquiera, basta con encontrar el cambio de variable adecuado:*

a) *Encontrar el cambio de variable que convierte la integral  $\int_a^b f(x)dx$  en la integral  $\int_0^1 g(t)dt$ .*

b) *Utilizar el cambio anterior para aproximar la siguiente integral usando `rsums`.*

$$\int_1^2 \log(x)dx$$

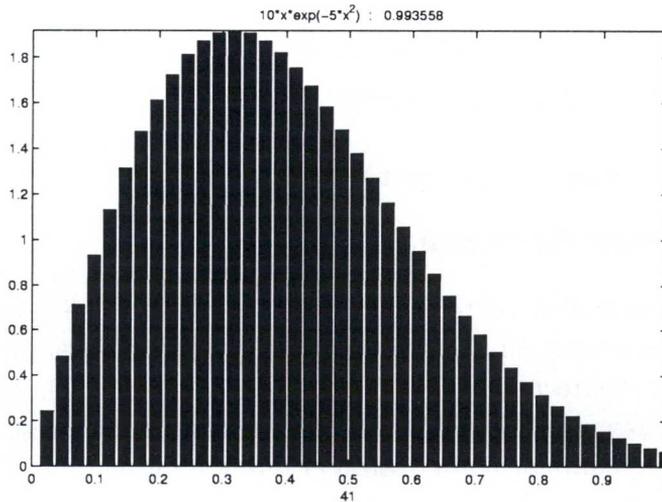


Figura 7: Sumas de Riemann para la función  $f(x) = 10xe^{-5x^2}$

Utilizar el comando `vpa(int(funcion,a,b),6)` para calcular la integral con 6 decimales exactos y comprobar el resultado con el de las Sumas de Riemann.

## ★ Calculadora de Funciones

Otra herramienta interesante de la que dispone Matlab es la Calculadora de Funciones (`funtool`). Se activa escribiendo el comando

```
>>funtool
```

Entonces aparecen tres nuevas pantallas, dos de ellas conteniendo sendas gráficas de funciones y la tercera es la calculadora (figura 8).

FUNTOOL es una calculadora gráfica interactiva que manipula funciones de una variable. En todo momento hay dos funciones que aparecen en las dos gráficas,  $f(x)$  y  $g(x)$ . El resultado de la mayoría de las operaciones afecta a  $f(x)$ .

En las ventanitas etiquetadas con "f =" y "g =" se puede escribir y cambiar las funciones que aparecen por defecto para introducir nuevas funciones. Lo mismo que las etiquetadas con "x =", que puede ser cambiada para introducir un nuevo dominio, y la "a =" en la que se puede introducir un nuevo parámetro.

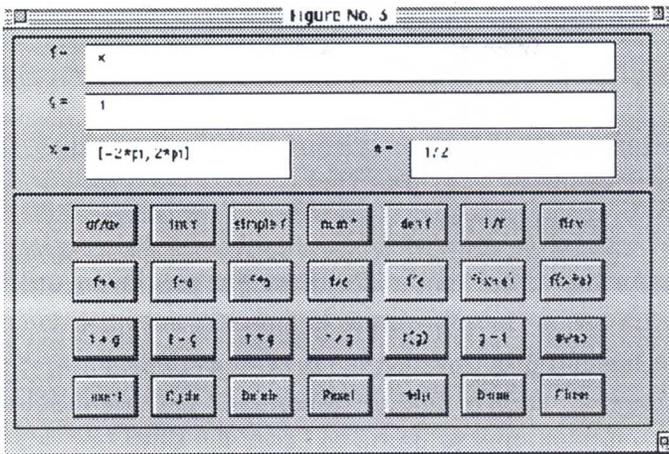


Figura 8: Calculadora de Funciones

La fila superior de teclas de la calculadora son operaciones que sólo afectan a la función  $f(x)$ . Estas operaciones son:

$df/dx$  - Derivada de  $f(x)$ .

$\text{int } f$  - Integral de  $f(x)$ .

$\text{simple } f$  - Simplifica la expresión, si es posible.

$\text{num } f$  - Extrae el numerador de una expresión racional.

$\text{den } f$  - Lo mismo, pero ahora el denominador.

$1/f$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $\frac{1}{f(x)}$ .

$\text{finv}$  - Calcula la inversa de  $f(x)$ .

Evidentemente, las operaciones  $\text{int}(f)$  y  $\text{finv}$  no siempre funcionan.

La segunda fila de teclas trasladan y reescalan la función  $f(x)$  según el valor del parámetro  $a$ . Las operaciones son:

$f + a$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x) + a$ .

$f - a$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x) - a$ .

$f * a$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $a \cdot f(x)$ .

$f / a$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $\frac{f(x)}{a}$ .

$f \wedge a$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x)^a$ .

$f(x+a)$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x + a)$ .

$f(x*a)$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(ax)$ .

La tercera fila de teclas son operaciones en las que intervienen las dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . Las operaciones son:

$f + g$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x) + g(x)$ .

- $f - g$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $f(x) - g(x)$ .
- $f * g$  - Reemplaza  $f(x)$  por el producto  $f(x).g(x)$ .
- $f / g$  - Reemplaza  $f(x)$  por  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .
- $f(g)$  - Reemplaza  $f(x)$  por la composición  $f(g(x))$ .
- $g = f$  - Reemplaza  $g(x)$  por  $f(x)$ .
- swap - Intercambia  $f(x)$  y  $g(x)$ .

Las tres primeras teclas de la cuarta fila producen una lista de funciones. La tecla **Insert** añade la función actual a la lista. La tecla **Cycle** hace aparecer todas las funciones de la lista. Y la tecla **Delete** borra la función actual de la lista. La lista de funciones está en un fichero interno que se llama **fxlist** que lleva por defecto una serie de funciones interesantes.

La tecla **Reset** devuelve los valores de  $f$ ,  $g$ ,  $x$ ,  $a$  y **fxlist** a sus valores iniciales por defecto. La tecla **Help** imprime en pantalla ayuda (lo mismo que en estas instrucciones pero en inglés).

La tecla **Demo** propone un curioso problema: ¿Es posible generar la función  $\sin(x)$  sin tocar el teclado, utilizando sólo el ratón pulsando las teclas adecuadas de la calculadora? La **Demo** lo hace con un **Reset** y nueve “clics” del ratón y proponen como problema intentar hacerlo con menos “clics”. Si alguien lo consigue, ruegan que se pongan en contacto con la siguiente dirección electrónica: [moler@mathworks.com](mailto:moler@mathworks.com). ¿Habrà premio? Por último, con la tecla **Close** se acaba el juego.

**Ejercicio 5** *¿Cuáles son los pasos que se siguen en la Demo para obtener la función  $\sin(x)$ ?*

*Intentar obtener la función  $\sin(x)$  con menos clics que en la Demo. (Es posible, no es una broma.)*

**Ejercicio 6** *Escribir un breve guión de una práctica para realizar en un Aula de Informática utilizando la Calculadora de Funciones de Matlab.*

## 5 Prácticas con MATLAB

Se proponen a continuación algunas prácticas con el Programa Matlab. Una referencia muy interesante en la que se pueden encontrar numerosas prácticas con muy distintos niveles de dificultad es el libro *Mathematical Explorations with MATLAB*. (ver Bibliografía, [Ch]).

### 5.1 Práctica Primera: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

En esta práctica vamos a profundizar un poco en las capacidades de Matlab para trabajar con matrices. Veremos, en primer lugar, algunas operaciones y comandos básicos y no tan básicos que tiene el programa para trabajar con matrices. Después, como aplicación de algunos de esos comandos comentaremos algunas maneras de afrontar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

#### 5.1.1 Operaciones y Comandos para Matrices

Hemos visto en la introducción anterior cómo se introducen las matrices en Matlab. Veamos un ejemplo para introducir algunos de los comandos básicos:

##### Ejemplo 1 Operaciones Elementales

*Definimos dos matrices*

```
>>A=[2 1;3 2]
```

```
A =
```

```
     2     1
     3     2
```

```
>>B=[3 4;-1 5]
```

```
B =
```

```
     3     4
    -1     5
```

- *Para sumar las dos matrices*

```
>>A+B
```

```
ans =
```

```
    5    5
    2    7
```

- *Para multiplicar una matriz por un escalar*

```
>>3*A
```

```
ans =
```

```
    6    3
    9    6
```

- *Producto de matrices*

```
>>C=A*B
```

```
C =
```

```
    5    13
    7    22
```

*Siempre que los tamaños de las matrices sean los adecuados. Para saber cuál es el tamaño de una matriz con la que estamos trabajando*

```
>>size(A)
```

```
ans =
```

```
    2    2
```

*Que quiere decir, evidentemente, 2 filas y 2 columnas.*

- *Para calcular la matriz transpuesta*

```
>>A'
```

```
ans =
```

```
    2    3
    1    2
```

**Ejercicio 1** *Utilizando las matrices definidas en el ejemplo anterior, comprobar que  $(AB)^t = B^t A^t$ . ( $A^t$  es la transpuesta de  $A$ ).*

**Ejemplo 2** *Matrices especiales con Matlab*

- *Para generar la matriz identidad cuadrada*

```
>>eye(3)
```

```
ans =
```

```
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

¿Por qué habrán elegido el nombre **eye**?

- Una matriz  $3 \times 2$  llena de unos

```
>>ones(3,2)
```

- Y si queremos que esté llena de ceros

```
>>zeros(3,2)
```

- Para generar una matriz con números **aleatorios** uniformemente distribuidos entre 0 y 1

```
>>rand(3,2)
```

Si se usa el comando **randn** los números aleatorios son normalmente distribuidos, siguiendo la Normal Estandar  $N(0,1)$ .

### Ejemplo 3 Rango, Inversa y Determinante

- Definimos la matriz

```
>>X=[2 3 4; 1 -1 0]
```

```
X =
```

```
    2    3    4
    1   -1    0
```

Para calcular su **rango**

```
>>rank(X)
```

```
ans =
```

```
    2
```

- Supongamos que tenemos definida la siguiente matriz

```
H =
```

```
    8    1    6
    3    5    7
    4    9    2
```

Para calcular su **inversa**

```
>>inv(H)
ans =
    0.1472    -0.1444    0.0639
   -0.0611     0.0222    0.1056
   -0.0194     0.1889   -0.1028
```

*Y si queremos ver el resultado en forma racional*

```
>>format rational
>>inv(H)
ans =
    53/360    -13/90     23/360
   -11/180     1/45     19/180
   -7/360     17/90    -37/360
```

*(Para ver todas las opciones del comando format hacer help format.)*

- *Para calcular el determinante de la matriz anterior H*

```
>>det(H)
ans =
   -360
```

**Ejercicio 2** *Generar una matriz cualquiera, por ejemplo  $25 \times 25$ , y calcular su inversa, su rango y su determinante. (Ni que decir tiene que no disponemos de tiempo para escribir todos los elementos de la matriz uno a uno.)*

**Ejemplo 4** Los comandos especiales `rref` y `rrefmovie`

- *El comando `rref` produce una forma reducida escalonada por filas de una matriz usando la eliminación de Gauss-Jordan, es decir, haciendo ceros por debajo y por encima de la diagonal principal sin mover las columnas.*

*Por ejemplo, definimos la matriz*

```
>>A=[-1 2 -1;2 1 2;2 4 2]
```

```
A =
```

```
   -1         2        -1
    2         1         2
    2         4         2
```

*Ahora escribimos el comando aplicado a la matriz*

```
>>R=rref(A)
```

```
R =
```

1	0	1
0	1	0
0	0	0

• *El comando rrefmovie produce exactamente el mismo resultado pero nos indica, paso a paso, cómo se va obteniendo la matriz resultado e incluso qué filas o columnas son despreciables (por ser linealmente dependientes de las otras), información muy útil si queremos calcular el rango de la matriz por ejemplo. Es decir, produce una especie de película (movie) de todo el proceso.*

```
>>rrefmovie(A)
```

```
Original matrix
```

```
A =
```

-1	2	-1
2	1	2
2	4	2

```
Press any key to continue. . .
```

*Ahora pulsamos una tecla para continuar*

```
swap rows 1 and 2
```

```
A =
```

2	1	2
-1	2	-1
2	4	2

```
Press any key to continue. . .
```

Nos indica que ha intercambiado la primera y segunda filas, pulsamos de nuevo una tecla

pivot = A(1,1)

A =

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Press any key to continue. . .

Ahora nos indica que va a pivotar sobre el elemento (1,1) de la matriz

eliminate in column 1

A =

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Press any key to continue. . .

Ahora nos está indicando que va a eliminar (hacer ceros) en la primera columna y así sucesivamente hasta obtener el mismo resultado que nos dio el comando rref.

**Ejercicio 3** a) Calcular el rango de la matriz siguiente utilizando el comando rref o rrefmovie:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz  $A$  es cuadrada y no singular, es decir  $\det(A) \neq 0$ , ¿cuál será la matriz  $R = \text{rref}(A)$ ?

c) ¿Cómo podemos utilizar estos comandos para calcular la inversa de una matriz invertible? Aplicarlo a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Para verificar el resultado se puede calcular la inversa directamente con  $\text{inv}(B)$ .

## 5.1.2 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas se puede escribir en forma matricial

$$Ax = b$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vamos a ver, mediante algunos ejemplos y ejercicios cómo se pueden resolver los sistemas de ecuaciones lineales utilizando algunos de los comandos de Matlab descritos anteriormente.

**Ejemplo 5** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y = 3 \\ y - 3z = -7 \end{cases}$$

entonces, siguiendo la notación anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

*Se trata de un sistema con solución única, ya que el determinante de A es distinto de cero*

```
>>det(A)
ans =
    -8
```

*Entonces, una forma de resolver el sistema consiste en despejar x*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

*Con Matlab, primero introducimos el vector b*

```
>>b=[3 3 -7]'
b =
     3
     3
    -7
>>x=inv(A)*b
x =
     1
     2
     3
```

*Sin embargo, hay otra forma de hacerlo, utilizando lo que en Matlab se denomina como **división matricial a la izquierda**:*

```
>>x=A\b
x =
     1
     2
     3
```

*En este caso, el resultado es el mismo, pero es diferente la forma en la que trabaja el ordenador. En este segundo caso el método que utiliza es el de la **factorización LU**, que es una modificación de la eliminación gaussiana.*

**Ejercicio 4** *Vamos a contar el número de operaciones elementales (sumas y productos) que se utilizan para resolver el sistema utilizando los dos métodos. Para ello vamos a utilizar el comando flops.*

Este comando cuenta el número de operaciones elementales que se han realizado en una sesión determinada.

Poner el contador a cero con `>>flops(0)`. Resolver el sistema de una de las formas y contar las operaciones, escribiendo `>>flops` y repetir la operación resolviéndolo de la otra forma. ¿En cuál de los dos casos se utilizan menos operaciones?

**Ejercicio 5** Vamos a ver cómo resuelve Matlab en realidad el sistema cuando se utiliza la opción: `>>x=A\b`. El proceso se puede describir dividir en tres etapas:

1) Calcula una matriz triangular inferior  $L$ , una matriz triangular superior  $U$  y una matriz de permutación  $P$  tales que  $PA = LU$ .  $P$  es simplemente la matriz identidad  $I$  con sus filas cambiadas de orden.

2) Resuelve  $Ly = Pb$ .

3) Por último, se resuelve  $Ux = y$ .

La primera etapa es lo que se conoce con el nombre de **factorización LU** y es el paso más importante.

Por lo tanto, en Matlab sería equivalente utilizar:

```
>>x=A\b
```

que utilizar el siguiente proceso:

```
>>[L,U,P]=lu(A); % Calcula las matrices L, U, P
>>B=P*b;
>>y=L\b;
>>x=U\b
```

Resolver el siguiente sistema utilizando los dos procedimientos anteriormente descritos y comprobar que sale la misma solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 6** El método `>>x=A\b` funciona si hay más ecuaciones que incógnitas (siempre que tenga solución única) e incluso en el caso en el que hay menos ecuaciones que incógnitas, con infinitas soluciones, Matlab ofrece dos de estas soluciones directamente:

Con  $\gg x=A \backslash b$  nos da una solución que tiene ceros para algunas de las incógnitas.

Con otro comando,  $\gg x=\text{pinv}(A)*b$  se obtiene una solución del sistema donde la norma euclídea de  $x$  es la más pequeña de todas las posibles. ¿Es siempre única esta solución con longitud mínima?

Aplicando lo anterior encontrar las soluciones de los sistemas

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Investigar qué hace el comando  $\gg \text{pinv}(A)$ .

## 5.2 Práctica Segunda: Iteraciones y Diagramas de Telaraña

En esta práctica, utilizando como ejemplo el estudio de sucesiones obtenidas a partir de la iteración de funciones, vamos a ver algún ejemplo más de fichero-M. En este caso, gráficos especiales llamados *Diagramas de Telaraña*.

Sea una función  $y = f(x)$ , tomemos un punto cualquiera  $x_0$ , sea  $x_1 = f(x_0)$ , volvemos a sustituir en la función y obtenemos  $x_2 = f(x_1)$ , si repetimos el proceso indefinidamente obtenemos una sucesión por iteración

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

que queda determinada por  $f(x)$  y el valor de  $x_0$ , mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Para estudiar el comportamiento de tales sucesiones se utilizan los llamados *diagramas de telaraña*, que se construyen de la siguiente manera: empezamos con la gráfica de  $y = f(x)$  y con la recta  $y = x$ . Del punto  $(x_0, 0)$  sobre el eje  $X$  se dibuja una recta vertical hasta la gráfica de la función en el punto  $(x_0, x_1)$ , después una recta horizontal desde este punto hasta la recta  $y = x$  en el punto  $(x_1, x_1)$ . Ahora el proceso se vuelve a repetir: una recta vertical hasta la gráfica en  $(x_1, x_2)$ , una recta horizontal hasta  $y = x$  en el punto  $(x_2, x_2)$  y así sucesivamente. Las sucesivas rectas verticales tienen como coordenada  $x$ ,  $x_1, x_2, \dots$ . De esta manera se puede seguir gráficamente el proceso de la sucesión. La figura 9 muestra 8 iteraciones de la función  $f(x) = 3x(1 - x)$  tomando  $x_0 = 0.5$ .

### 5.2.1 Iteraciones de la Función Cuadrática $f(x) = \lambda x(1 - x)$

El fichero-M, descrito a continuación, permite dibujar el diagrama correspondiente a la sucesión que aparece al iterar la *función cuadrática*. Grabarlo siguiendo las instrucciones indicadas en la sección 4.5. Para ejecutarlo, bastaba con poner el nombre con el que se haya guardado, aquí se guardó con el nombre: `telaq.m`, e

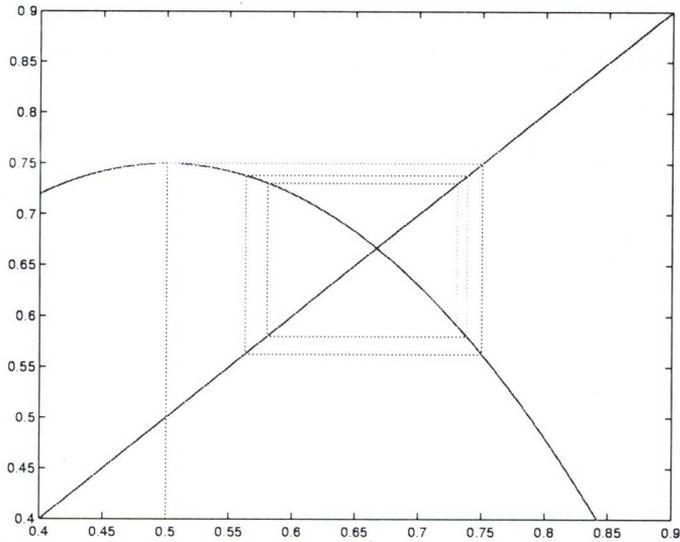


Figura 9: Diagrama de Telaraña

ir introduciendo los datos que va solicitando. Después habrá que pulsar INTRO tantas veces como el número de iteraciones que se haya indicado.

#### Fichero telaq.m

```
% Dibuja un diagrama de teleraña
% para  $y=\lambda \cdot x \cdot (1-x)$ ,
% empezando con el valor  $x_0$ .
% Se piden los extremos superior e inferior
% de  $x$  e  $y$  para la ventana gráfica.
% Hay que pulsar INTRO sucesivamente hasta
% que se hayan dibujado todas las iteraciones
%
% Al final se imprimen en pantalla los valores
% de las iteraciones.
```

```
lambda=input('Escribir el valor de lambda ');
x0=input('Escribir el valor de x0 ');
xl=input('Escribir el extremo inferior de x ');
xu=input('Escribir el extremo superior de x ');
yl=input('Escribir el extremo inferior de y ');
yu=input('Escribir el extremo superior de y ');
```

```

n=input('Escribir el numero de iteraciones ');
dx=(xu-xl)/100;
x=xl:dx:xu;
y=lambda*x.*(1-x);

plot(x,y) axis([xl xu yl yu]);

hold on

plot([xl xu],[xl xu],'b')% Dibuja la diagonal en azul

clear x y iterate x(1)=x0;
y(1)=0;
x(2)=x0;
y(2)=0;
x(3)=x0;
y(3)=lambda*x0*(1-x0);
iterate(1)=x0;
iterate(2)=y(3);

plot(x,y,'g') i=3;
x(1)=x0+.1;

while abs(x(3)-x(1)) > .001 & i <= n
    x(1)=x(3);
    y(1)=y(3);
    x(2)=y(1);
    y(2)=x(2);
    x(3)=x(2);
    y(3)=lambda*x(2)*(1-x(2));
    iterate(i)=y(3);
    plot(x,y,'g')
    pause
    i=i+1;
end

iterate'

hold off

```

**Ejercicio 1** Dibujar el diagrama de la función cuadrática correspondiente al valor  $\lambda = 3.922193334$ , con  $x_l = 0$ ,  $x_u = 1$ ,  $y_l = 0$ ,  $y_u = 1$ ,  $x_0 = 0.5$ . ( $x_l$ ,  $x_u$  son los extremos inferior y superior, lo mismo con  $y$ ). Aplicar 20 iteraciones. Se observará que se produce lo que se denomina un ciclo.

**Ejercicio 2** Utilizar el fichero `telaq.m` para probar los casos que se enumeran en la tabla siguiente.

$\lambda$	$x_0$	$x_l$	$x_u$	$y_l$	$y_u$	iteraciones
2.5	0.5	0.5	0.7	0.5	0.7	20
3.2	0.5	0.4	0.9	0.4	0.9	20
3.4	0.5	0.4	0.9	0.4	0.9	40
3.5	0.5	0.3	0.9	0.3	0.9	20
3.8	0.5	0	1	0	1	50
3.83	0.5	0	1	0	1	20

## 5.2.2 Iteraciones de la Función Exponencial $f(x) = k^x$

**Ejercicio 3** Modificar el fichero `telaq.m` para que aparezca la gráfica de la función exponencial  $f(x) = k^x$ , donde  $k$  es un número real fijo. Llamar al nuevo fichero `telaexp.m`. (Tener en cuenta que, dado que en el fichero  $x$  es un vector, habrá que usar  $k \cdot \mathbf{x}$ ). Investigar si las sucesiones que empiezan en  $x_0$  son convergentes o divergentes y, si son convergentes, cuál es el límite. Si depende del valor de  $k$ , encontrar los valores en los que el comportamiento cambia. (Sugerencia: probar con los valores  $k = 0.05$ ,  $k = 0.5$ ,  $k = 1.4$ ,  $k = 1.5$ . Pensar en lo que ocurre entre  $k = 1.4$  y  $k = 1.5$ .)

**Ejercicio 4** ¿Cuál es el valor máximo que alcanza  $f(x)$ ? ¿De qué manera está relacionado esto con el comportamiento de las sucesiones que genera la función?

## 6 Matemáticas en el Aula de Informática

Una vez que sabemos utilizar un asistente matemático, DERIVE, MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, etc., surge una cuestión importante: ¿cómo podemos utilizarlo en una clase con los alumnos? La respuesta a esta pregunta no es ni mucho menos trivial ya que, a la hora de llevar a la clase de Matemáticas el ordenador, aparecen multitud de problemas que pueden desanimar al más entusiasta.

Por ejemplo: problemas de tipo técnico, inadecuación de los equipamientos informáticos, problemas con las licencias de los programas y sobre todo, el tiempo que lleva planificar un curso en el que queramos introducir prácticas informáticas.

En la Sección Departamental de Matemática Aplicada de la Facultad de Químicas de la UCM llevamos algunos años enfrentándonos a todos estos problemas, con lo que hemos adquirido cierta experiencia para salvar algún que otro obstáculo.

Uno de los mayores problemas a la hora de hacer prácticas informáticas en la Universidad y también en los Institutos, es el elevado número de alumnos que hay en cada grupo, en relación con la capacidad de las aulas de informática. Así, llevar a un grupo de 100 alumnos a un aula con 30 puestos de ordenador, de los cuales después sólo funcionan en la práctica 20, es una tarea imposible. Lo que no es imposible es elaborar unos guiones muy autocontenidos para que un alumno que disponga de ordenador en su casa, que son prácticamente todos, o pueda acudir al aula de informática en algún rato libre, trabaje por su cuenta. La elaboración de este tipo de guiones suele llevar bastante tiempo, pero es un esfuerzo que después se puede amortizar en cursos sucesivos. Es decir, que incluso en situaciones poco favorables siempre es posible hacer algún intento.

No cabe ninguna duda de que la situación ideal es crear asignaturas específicas para hacer Matemáticas con el ordenador. Por otra parte, a medida que pasa el tiempo las dotaciones en equipos informáticos de los centros de enseñanza van mejorando considerablemente.

Sin embargo, tampoco conviene ilusionarse demasiado. La utilización del ordenador como herramienta en Matemáticas no puede sustituir al aprendizaje de las Matemáticas en un sentido más

clásico. Si los alumnos no disponen de unos conocimientos mínimos, todos los medios técnicos a nuestro alcance pueden resultar inútiles y, en los últimos tiempos, hay que lamentar que la situación tiende a empeorar por momentos en la Enseñanza Media y, como consecuencia, en los primeros cursos de la Enseñanza Universitaria.

## 7 Recursos en Internet

Tanto para el programa DERIVE como para el programa MATLAB se pueden encontrar en internet diversas direcciones que ofrecen información, ejemplos de programas, instrucciones, etc. La lista que se expone a continuación no es desde luego exhaustiva, lo cual sería simplemente imposible, dado el elevado número de direcciones de Internet en las que aparecen referencias a estos programas. Pero sí que puede dar algunas ideas de por dónde empezar:

- <http://www.derive.com>: La página web de la compañía que ha creado DERIVE. Contiene información relativa a nuevas versiones, actualizaciones, etc. Desde aquí se puede acceder a prácticamente toda la información que hay en Internet en relación con DERIVE.
- <http://www.math.duke.edu/modules/materials>: En esta página se pueden encontrar ejemplos de muchas prácticas de diferentes niveles de dificultad y diversos temas de Cálculo fundamentalmente, en muchos casos aparecen preparadas para realizarlas con varios programas: Maple, Mathematica y Matlab, principalmente.
- <http://www.mathworks.com>: La página web de la compañía que ha creado MATLAB. Se puede encontrar información sobre actualizaciones, cuestiones técnicas referentes a la instalación del programa y muchos enlaces relacionados con el programa.
- <http://texas.math.ttu.edu/~gilliam/m5399/symbolic.html>: Una descripción con muchos ejemplos de la *Matlab Symbolic Toolbox*.

- [http://www.ius.cs.cmu.edu/help/Math/vasc\\_help\\_matlab.html](http://www.ius.cs.cmu.edu/help/Math/vasc_help_matlab.html) y la dirección <http://www.unm.edu/cirt/info/software/apps/matlab.html>: Contienen guías muy detalladas sobre Matlab.
- <http://www.mat.ucm.es/deptos/ma/ich/manual-matlab.html>: Una introducción muy esquemática pero muy completa a Matlab, en español, realizada por el Prof. Uwe Brauer del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid.
- <http://web.mit.edu/18.06/www> y la dirección [http://www.math.columbia.edu/~psorin/linear\\_algebra/Matlab/index.html](http://www.math.columbia.edu/~psorin/linear_algebra/Matlab/index.html): Contienen una *toolbox* con comandos de Álgebra Lineal que se pueden utilizar junto con el libro de G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Segunda Edición, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 1998.

También existe la posibilidad de buscar, nosotros mismos, más direcciones de interés. Utilizando algún buscador como Altavista, por ejemplo, si queremos buscar algo relacionado con las Series de Fourier con Matlab, podemos poner en la ventana del buscador: *Fourier & Matlab*, y nos aparecerá una extensa lista conteniendo estas dos palabras. Lamentablemente ocurre con los buscadores de Internet que, al ser tan grande la cantidad de información que circula actualmente, mucha de la información es poco útil. Pero con un poco de paciencia se pueden encontrar cosas interesantes.

## Bibliografía

- [A] Apostol, T.M. *Análisis Matemático, Segunda Edición* pp. 390-391. Reverté, Barcelona, 1982.
- [C] Carrillo, A. y Llamas, I. *DERIVE: Aplicaciones Matemáticas para PC*. Ra-ma, Madrid, 1994
- [Ca] Castro Chadid, I. *Cómo hacer Matemáticas con DERIVE*. Reverté Colombiana, Bogotá, 1992.

- [Ch] Chen, K.; Giblin, P. e Irving, A. *Mathematical Explorations with MATLAB*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [H] Harman, Thomas L.; Dabney, J. y Richert, N. *Advanced Engineering Mathematics using MATLAB V.4*. PWS, Boston, 1997.
- [P] Paulogorrán, C. y Pérez, C. *Cálculo Matemático con DERIVE para PC*. Rama, Madrid, 1994.
- [S] Sanz, P.; Vázquez, F.J.; Ortega, P. *Problemas de Álgebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE*. Prentice Hall, Madrid, 1998.
- [Si] Sigmon, K. *MATLAB Primer*. 1989. (Apuntes clásicos sobre Matlab, algo anticuados, se pueden conseguir en la dirección <http://www.mathworks.com> también se pueden conseguir mediante anonymous ftp de <ftp://math.ufl.edu>, directorio pub/matlab, fichero primer35.tex)
- [V] Varios Autores. *MATLAB Edición de estudiante. Versión 4. Guía de usuario*. The Mathworks Inc.-Prentice Hall, Madrid, 1998. (Esta es, de momento, la última edición en español de esta guía.)

## El reformismo educativo

Mikel Bilbao

Universidad del País Vasco

El escritor inglés Thomas Love Peacock (1785-1866), en una de sus novelas, presenta a uno de los personajes de esta manera: “El tercero era el aburrimiento por excelencia. Su tema no tenía principio, ni centro, ni final. Era la educación. Nunca hice un viaje igual por el desierto de la mente, por el Gran Sahara del intelecto. Me produce sed el solo hecho de recordarlo.”

Marcus Cunliffe, que recoge esta cita en un artículo sobre el desarrollo del sistema docente en los Estados Unidos, cree que el motivo de esta aridez del tema educativo se encuentra en su inmensidad (por ejemplo, la enorme variedad de sus instituciones) y, también, en el perpetuo desacuerdo sobre las aplicaciones del concepto de educación y sus realizaciones: “lo que unos consideran como un logro importante, para otros no es sino un desastre”. Ahí comienza una controversia sin principio ni fin, tan monótona como el desierto.

Este desierto también está minado. Y las minas en este campo son, sobre todo, ideológicas. Dado que, como se dice en el Preámbulo de la LOGSE, “en la educación se transmiten y ejercitan los valores que hacen posible la vida en sociedad”, que es plural en ideas e intereses, es obvio que hay pocas instituciones sociales tan propicias a las ideología, esa mezcla características de ideas explícitas con intereses implícitos, como la educativa.

Es estrategia ya antigua que, cuando se debe tratar sobre un asunto en que la ideologización acecha, la presentación del tema ha de ser histórica. Siguiendo el curso de la historia podemos observar la formación de situaciones e ideas que en el momento presente aparecen como realidades naturales, como datos inamovibles, o bien parecen incomprensibles.

Además, sin salirse del mundo matemático, es posible seguir el consejo de Henri Poincaré: “Para prever el futuro de las matemáticas el verdadero método consiste en estudiar su historia y su situación actual.”

Hace unos años algunos escribieron que la Historia había acabado o estaba a punto de hacerlo. Si estuviésemos de acuerdo con esa tesis — que la Historia ha llegado a su fin—, uno de los argumentos más fuertes para defenderla podríamos encontrarlo en la enseñanza. La educación se ha apoderado de los niños y los jóvenes (en nuestro país obligatoriamente hasta los 16 años y de hecho hasta los 18, 23 o más) y pretende ser una actividad permanente para todos. Es difícil imaginarse nuevos campos para su extensión (hoy todo es motivo de educación), salvo que el mundo occidental quiera hacer realidad, al menos sobre el papel de sus leyes, la utopía de la república de los sabios. Esta sensación de fin de la Historia fácilmente conduce a pensar que nada podemos aprender del pasado, idea muy contemporánea, pero posiblemente poco prudente.

Según Emile Durkheim, demasiados pedagogos, incluyendo los más ilustres, han edificado sus sistemas haciendo abstracción de los que habían existido antes de ellos. Este desamor de los pedagogos por el pasado tal vez explique la escasa atención que en la Historia general, por muy moderna y social que sea, se presta a la historia de la educación. Sería de gran interés disponer de estudios bien hechos, abiertos en sus premisas y ponderados en sus conclusiones, sobre la evolución de los sistemas educativos.

La situación actual de institucionalización universalizada de la enseñanza, que es para nosotros el paisaje natural, contrasta enormemente con la realidad cultural de la Europa en que se creaban las primeras universidades, hace ocho o nueve siglos. Desde entonces hasta ahora se ha producido una larga evolución, muy acelerada en los dos últimos siglos, que no sólo ha acabado convirtiéndonos a todos en estudiantes sino que, al mismo tiempo, ha ido dando cuerpo a las materias de estudio.

La educación, por ser transmisión entre generaciones, tiene una fuerte tendencia a la inercia, pero en nuestra tradición europea reforma y educación son palabras inseparables. Ya el primer “studium generale” (Bolonia) se proclamaba “universitas semper reformanda”. En la larga reforma de la educación se deben destacar momentos de cambios más profundos y voluntarios: movimientos reformistas que han incidido en

las generaciones posteriores con consecuencias muchas veces imprevistas e incluso imprevisibles para los reformadores.

Una parte importante de la historia de la educación es la de sus asignaturas, la historia de los temas que transmite. Salvo las más imprescindibles, es decir, leer y escribir —sin las que no hay educación letrada—, todas las demás disciplinas son contingentes y por ello, están obligadas a exponer sus razones (o sus poderes) para hacerse un hueco en las tareas estudiantiles. Es en los proyectos reformistas donde se expresan más claramente esas razones. De la relación entre las matemáticas y los sucesivos reformismos educativos, evidentemente es imposible hacer aquí una historia completa. Vamos, por ello, a limitarnos a algunas circunstancias e ideas relacionadas con experiencias de cambio en la enseñanza de las matemáticas y que han marcado esta disciplina en el siglo XX.

Emile Durkheim, que comenzó su carrera de profesor en 1887 en Burdeos como catedrático de Pedagogía y Ciencias Sociales, decía en su libro *Educación y sociología*: “cuando se estudia históricamente la manera como se han formado y desarrollado los sistemas de educación, se descubre que dependen de la religión, de la organización política, del grado de desarrollo de las ciencias, del estado de la industria, etc.. Si se los desliga de todas estas causas históricas, se convierten en incomprensibles.”

Un dato muy simple, que convierte la afirmación final de Durkheim en una obviedad, es la gran diversidad entre las tradiciones educativas de los diferentes países. Pero esta diversidad no ha impedido las influencias (en algunos casos muy fuertes), ni la proximidad de los contenidos educativos. A partir de su idiosincrasia cada país ha tenido que responder a problemas similares y a los retos de los otros países.

Posiblemente la complejidad de causas, a la que Durkheim hacía referencia, está en la base de la facilidad con que, al echar una mirada superficial sobre la educación, se encuentran situaciones paradójicas.

Una paradoja resaltable es que, habiendo tenido lugar enormes acontecimientos históricos (revoluciones, guerras mundiales) durante ese periodo histórico, “en la educación matemática a nivel internacional apenas se habían producido cambios de consideración desde principios de siglo hasta 1960”, en expresión de Miguel de Guzmán, voz autorizada en cuanto Presidente del ICMI (International Commission in Mathematical Instruction).



El ICMI, creado en el Congreso Internacional de Matemáticas de Roma en 1908, tuvo como primer Presidente al matemático alemán Felix Klein (1849-1925). Difícilmente podía haberse elegido entonces persona más adecuada, ya que Klein estaba siendo el motor de la reforma de la enseñanza global de las matemáticas en Alemania y, este país, era el modelo que, desde sus propias realidades, tenían presente los otros países salvo, posiblemente, Inglaterra.

La celebración de los Congresos Internacionales, desde comienzos del siglo XX, era consecuencia del enorme crecimiento de la actividad matemática y su internacionalización. La creación del ICMI respondía a una nueva situación de confluencia educativa entre países, que venía produciéndose en el último cuarto del siglo XIX. En la primera mitad de ese siglo, en cambio, había aumentado la diversidad, al menos formal, de los sistemas de enseñanza.

Las reformas kleinianas se realizaron sobre un entramado educativo desarrollado y pueden por ello, en cierto modo, seguir sirviendo de referente para las reformas modernas.

### *Las reformas kleinianas.*

A finales del XIX, en Alemania, la enseñanza superior de la matemática vive una dicotomía entre las universidades, dedicadas a la matemática pura fundamentalmente, y las Escuelas Técnicas que deseaban desarrollar una matemática aplicada. En los otros niveles educativos a la variedad de tradiciones de los diversos Estados, unidos en el nuevo II Reich, se habían superpuesto nuevas tendencias de enseñanza de la matemática en los centros secundarios y primarios. Mientras en la Universidad lo que se llamó aritmetización, es decir, la nueva fundamentación del análisis, era el modelo de desarrollo de las materias, en muchos centros escolares era la geometría, y con diversos enfoques, el modelo de enseñanza de las matemáticas.

Klein ocupó la primera cátedra expresamente dedicada a la geometría en 1880 en Leipzig. Klein, discípulo de Julius Plücker, era el último vestigio de la geometría en la universidad prusiana y había tenido experiencia como profesor en el Politécnico de Munich. En 1872 había presentado el programa de Erlangen con una dinámica y renovadora concepción unificada de la Geometría. Parecía, por tanto, la

persona predestinada para abordar la tarea de integrar las diversas tradiciones matemáticas en la nueva Alemania, tanto en el nivel universitario como en el elemental.

Poco antes de 1890 Felix Klein, entonces catedrático en Göttingen, estableció un plan para conseguir un equilibrio entre matemática pura y aplicada y poder así reorganizar la enseñanza global de las matemáticas en los Estados germánicos, integrándolas coherentemente en la cultura de su tiempo. Este plan fue apoyado por asociaciones profesionales de matemáticos, maestros e industriales...

Se hicieron cambios en los planes de estudio no universitarios, pasando las materias más básicas del Cálculo a los tres tipos de escuelas secundarias. El concepto llave de estas reformas fue el de función, que permitió dar agilidad a la tradicional forma de presentación de las matemáticas.

Afortunadamente, tenemos la posibilidad de conocer, publicadas en castellano, las ideas pedagógicas de Felix Klein. La Biblioteca matemática, colección científica dirigida por Julio Rey Pastor, editó, en 1927 el primer tomo (Aritmética, Álgebra, Análisis) y en 1931 el segundo (Geometría), la traducción de la obra *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, es el resultado de dos cursos de conferencias pronunciadas por Klein ante un público de profesores, fundamentalmente de enseñanza secundaria.

En la introducción de esta obra, el autor plantea el problema de lo que él llama doble discontinuidad y que por su actualidad (perenne) citamos textualmente: “El joven estudiante (universitario o similar) se encuentra al comenzar los estudios ante problemas que no le recuerdan nada de las cosas que hasta ahora le habían ocupado y, naturalmente, olvida pronto y por completo todas ellas. Pero, después de aprobar sus estudios, pasa al profesorado y entonces se ve obligado de pronto a enseñar la Matemática elemental en la forma que exige el grado de enseñanza, primaria o secundaria, a que se dedica; y como no puede realizar esta labor estableciendo el debido enlace con la Matemática aprendida en los establecimientos de grado superior, pronto acepta la enseñanza tradicional, y de los estudios hechos sólo le queda un recuerdo, más o menos agradable, pero que no ejerce ni la más remota influencia en el desempeño de su ministerio.”

Para Klein, la formación del profesorado tiene como finalidad que “de las grandes cuestiones científicas... puedan sacar abundantes estímulos y orientación para el ejercicio de su actividad docente”.

En sus cursos Klein no se limita a hacer “su” presentación de las matemáticas, sino que reflexiona sobre la enseñanza de las mismas e, incluso, da una considerable información histórica.

He aquí, de forma resumida, algunas de las ideas kleinianas:

El objetivo de la escuela moderna debe ser capacitar a gran número de individuos para la colaboración en los fines de la cultura humana, cuya tendencia actual (principios del siglo XX) es la actuación práctica. Debe concederse cada vez más atención a la ciencia natural y a la técnica en el estudio de la matemática.

Esta cultura, cada día más técnica, debe alcanzar a todos. Esto plantea un problema pedagógico o psicológico. Klein plantea el problema de la diferente capacidad individual para las matemáticas. Su optimismo científico le lleva a decir que, con los nuevos métodos pedagógicos, la creencia de que sólo unos pocos pueden comprenderlas ha desaparecido. Reconociendo que personas inteligentes pueden tener nula aptitud para esos estudios, concede que “tal vez debe permitírseles hacer sus estudios prescindiendo de las matemáticas”. Pero, “nunca debe permitirse esa excepción a los que por comodidad o pereza contribuyen a justificar la antigua creencia de la incapacidad general para los estudios matemáticos”.

“La exposición en la Escuela debe ser psicológica, no sistemática. Sólo en los grados superiores se puede revestir la doctrina de forma abstracta.”

En cuanto a los contenidos, aunque defiende el método genético, piensa que la enseñanza no debe dejarse influir por consideraciones de orden histórico y no deben mantenerse tópicos en los programas por su carácter tradicional únicamente. El objeto de la enseñanza debe orientarse a “la formación de conceptos matemáticos que hoy se utilizan en las aplicaciones de las matemáticas a todas las ramas de las ciencias”. Por ello la presentación debe ser lo más integrada posible. Klein utiliza la palabra fusión: fusión de la enseñanza de la Planimetría y la Estereometría, fusión de la Aritmética con la Geometría, etc. Un concepto clave en el proyecto de Klein para la enseñanza es el de función, que debe introducirse lo antes posible, y aboga por culminar el nivel secundario con los elementos del Cálculo infinitesimal.

En palabras de Klein: “yo me siento progresista. Los llamados reformadores queremos colocar el centro de la enseñanza en el concepto de función como concepto que desempeña el papel fundamental en cuantos sitios intervienen las matemáticas. (...) Ante todo... una fuerte educación de la intuición espacial, después debe ir(se) ascendiendo en la enseñanza hasta llegar a los umbrales del Cálculo infinitesimal, de modo que el naturalista o el técnico de seguros... saque de la Escuela... (lo que) haya de necesitar en todos sus trabajos.”

Pero Klein no es un utilitarista. Comentando las técnicas didácticas del ingeniero inglés John Perry dice que, siendo apropiadas “para escuelas técnicas inferiores y medias (obreros y peritos) (...) no lo son para la enseñanza superior en general, pues también hay que disciplinar la mente y no son de despreciar los recursos que la enseñanza matemática puede aportar para el desarrollo de la facultad de pensar lógicamente.”

Morris Kline, en su libro *La pérdida de la certidumbre*, cita varias frases de Felix Klein defendiendo que la matemática no se aisle de las ciencias. Una de ellas es: “Las matemáticas de nuestros días se parecen a una fábrica de armas en tiempos de paz. Los escaparates están llenos de piezas de desfile, cuya ejecución ingeniosa, hábil y vistosa atraen a los expertos. La auténtica finalidad y propósito de esos objetos, hacer frente al enemigo y derrotarlo, han retrocedido hasta el fondo de las conciencias hasta el punto de haber sido olvidados”. Procede de una obra publicada póstumamente, en 1928, de título *Desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX*. En el momento de escribirla (1925), Klein dirigía el Departamento de Matemáticas de Göttingen, centro mundial de las matemáticas en esos años.

Pero en la introducción a ese libro Felix Klein también expresa una idea complementaria: “Uno debe intentar dar a las matemáticas la posición que se les debe como una de las más viejas y nobles actividades del espíritu humano y una de las fuerzas que dirige su desarrollo - una posición que, desgraciadamente, rara vez se admite en las mentes de los educados, al menos en Alemania.”

Estas dos frases son representativas de la posición central de Felix Klein en su época. No renuncia a la visión cultural de Jacobi ni a la tradición de matemática aplicada. La matemática no es sólo práctica y técnica sino que tiene un valor cultural en sí misma, pues es una de las fuerzas que dirige el desarrollo de la humanidad.

Felix Klein consiguió incorporar a la Universidad de Göttingen en 1895 a David Hilbert. De la colaboración entre ambos surgió una producción de matemáticas sin precedentes. Jóvenes estudiantes de muchos países prepararon sus Doctorados y Habilitaciones en esa Universidad. Se crearon nuevos puestos de profesores y, parcialmente financiados por la industria, se abrieron Institutos de investigación para materias técnicas. Entre los estudiantes extranjeros fueron numerosos los americanos. Entre 1899 y 1907 Hilbert dirigió a once norteamericanos. Entre 1862 y 1930 fueron 34 los estadounidenses que consiguieron un Doctorado en Göttingen.

### *Modernismo americano*

La matemática alemana influyó también en Estados Unidos debido la emigración de profesores germanos a América. El resultado más importante, producto de esta aportación, fue la creación del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago en 1893. Estaba formado por tres catedráticos: E. H. Moore (como director), Oskar Bolza y Heinrich Maschke, estos dos, alumnos alemanes de Klein. Hasta 1908 en que falleció Maschke y Bolza regresó a Alemania, fue el centro más dinámico en matemáticas de toda la Unión. Moore fue el principal impulsor de la creación de la American Mathematical Society.

De la Universidad de Chicago fue profesor (emérito en 1928) J.W.A. Young que en 1906 publicó la primera edición de un libro sobre la enseñanza de la matemática: *The teaching of mathematics in the elementary and secondary school*. La versión castellana de su última edición (1928) fue publicada, con el expresivo título de *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática - en la escuela primaria y secundaria*, por la Editorial Losada de Buenos Aires en 1947. Los libros de esta editorial proporcionaron una educación subterránea a muchos españoles en la larga posguerra y este libro, a través de los matemáticos que tuvieron que exiliarse o emigrar a América en busca de un mejor ambiente profesional, tuvo eco entre nosotros.

El libro de Young ilustra la defensa de la enseñanza de las matemáticas cuando se estaba produciendo un gran debate sobre el carácter y utilidad de la educación en Estados Unidos. Pasemos a conocer los argumentos de J. W. A. Young para enseñar matemáticas a

los jóvenes.

Comienza Young afirmando que para el buen resultado de la educación el maestro debe saber el valor y el propósito real de lo que enseña. Es también privilegio del alumno considerar esta cuestión. “Generalmente el alumno apreciará bastante lo que se le enseña para reconocer la importancia y el valor de la materia en cuestión”. Pero no hay que dejar piedra sobre piedra sin mover, para conseguir una cooperación inteligente del estudiante, en vez de su aquiescencia involuntaria o aun voluntaria.

Estas normas generales son especialmente aplicables a las Matemáticas, cuya utilidad educativa puede ser puesta en duda a causa de su carácter abstracto y de su forma técnica.

Para contestar a la pregunta de los propósitos y valor de la enseñanza matemática, Young se plantea otra pregunta: ¿que es la educación? Su respuesta: la educación trata principalmente de desarrollar las facultades de pensar y hacer del alumno.

Y entonces, ¿cómo puede contribuir la matemática en ese resultado por sí sola, o incluso mejor que con otros medios? Young enumera para responderse varios valores de la matemática:

**Valor práctico:** Si se removiera la columna vertebral de la matemática, nuestra civilización material se derrumbaría. No hay materia, salvo el idioma materno, más íntimamente ligado con la vida diaria. Pero el hombre de la calle tiene poca necesidad de hacer uso de los conocimientos matemáticos más allá de los elementos de aritmética. No obstante, emplea aún menos cualquier otra materia de estudio, salvo el idioma.

**Valor práctico circunstancial:** Hay un número creciente de ocupaciones que requieren el empleo de resultados matemáticos.

**Valor informativo:** La matemática es un tipo de pensamiento del que la mente humana parece estar impregnada. Es esencialmente la misma, cualquiera que sea la civilización en que se encuentra, y es algo que ninguna mente bien informada puede ignorar hoy día.

**La matemática en la Naturaleza:** La matemática impregna la Naturaleza, “al menos, como la ve e interpreta la mente humana”. Se mide el progreso de una ciencia, en buena parte, por la aproximación a la formulación ideal de la existencia de relaciones matemáticas entre sus conceptos más profundos.

**Principal valor del estudio de la matemática:** Ella ejemplifica en el modo más tópic, claro y simple algunas formas del pensamiento que son de la mayor importancia para todos nosotros. Concretamente por su certeza, simplicidad y posibilidad de graduación en sus deducciones, la matemática forma al estudiante para las situaciones en que se requiere comprensión de los elementos, distinción de los datos y realización de las deducciones.

En su libro, Young recoge una definición de la Matemática debida al lógico matemático americano Charles Sanders Peirce (1839-1914): “La matemática es la ciencia de las conclusiones necesarias”. Definición que hace difícil distinguir la matemática de la lógica, pero que Young utiliza para demostrar que el hábito de pensamiento matemático es útil para toda profesión donde deban alcanzarse conclusiones.

El sistema educativo norteamericano ha ido por delante de la mayoría de los europeos en cuanto a su institucionalización y extensión a la población, aun cuando buena parte de los métodos se hayan inspirado en las experiencias del viejo continente. Por ejemplo, la división sistemática en clases o “grados” de edad, fue importada de Prusia por el secretario del Consejo Estatal de Enseñanza de Massachusetts, Horace Mann, en la década 1840-50. Los educadores americanos del siglo XIX estuvieron siempre bien informados de los métodos pedagógicos ensayados en Europa. Y algunas universidades americanas, la primera Harvard, introdujeron el nuevo estilo de especialización prusiano antes de 1870, aplicándolo, si cabe, de manera más sistemática.

A finales del siglo XIX la expansión de la educación era muy amplia y, sobre todo en los núcleos urbanos, el sistema de escuelas públicas —financiadas y controladas por la comunidad local— había superado el sistema de pequeñas academias, creadas por iniciativa privada, que habían educado a los americanos en los años anteriores a la Guerra Civil. En 1900 casi el 90 por ciento del millón de jóvenes que recibían educación de grado medio acudían a centros públicos. A partir de la Morrill Act (1862), que establecía el apoyo del Gobierno a la educación superior, y con el sostén financiero de grandes fortunas privadas, se constituyeron poderosas Universidades que adoptaron la ética de investigación y profesionalización. Este crecimiento educativo planteó con crudeza el problema de la adecuación de los métodos y

contenidos de la enseñanza a las necesidades sociales. En los años finales del siglo, empiezan a aparecer en los programas docentes disciplinas no tradicionales y se popularizan las competiciones deportivas interuniversitarias, en resumen, empieza a mostrarse el modelo “típicamente americano” de enseñanza, que hasta hace poco nos parecía insólito.

### *Europa entre Guerras*

En el medio siglo transcurrido entre los primeros años del XX, antes de la Gran Guerra, y los años casi inmediatamente posteriores a la Segunda Guerra Mundial, no se producen grandes cambios en la educación matemática en los países poderosos. Hay que precisar que esta continuidad es fundamentalmente “ideológica”, es decir, no varía la imagen que de la matemática y de su enseñanza tienen los profesionales.

Tras el final de la Primera Guerra, es imposible posponer en los países europeos el problema de la democratización de la enseñanza que exige acabar con la separación de clases sociales en el sistema educativo.

En Alemania, la República de Weimar impulsa y reforma la educación. En 1920 se plantea la ley de creación de la enseñanza primaria unificada cuyo principio recogía la Constitución del año anterior. En pocos años, en los centros públicos, se implanta la educación común para los niños de 6 a 10 años (primaria elemental), separándose después en varios tipos de enseñanza secundaria o profesional.

Es en Francia, en plena contienda bélica (1918), donde se plantea el problema de sentar a los niños de todos los niveles sociales en los mismos bancos escolares. Los avances son muy escalonados. La equiparación de los programas de las clases preparatorias de la secundaria con los de la primaria se hace en 1926. La enseñanza secundaria llega a ser gratuita en 1930, con lo que comienza un crecimiento sostenido del número de sus estudiantes.

En los años treinta comienza a reunirse un grupo de jóvenes profesores de Universidades francesas bajo el patronazgo de Nicolás Bourbaki. Su trabajo será de gran importancia para la matemática posterior a la inminente guerra. El deseo del grupo era levantar la

escuela matemática francesa que la sangría de la Gran Guerra había debilitado gravemente. El motivo inmediato que los reunió fue el malestar ante los textos en uso en las Universidades donde enseñaban, que encontraban anticuados y poco claros. En su autobiografía *Souvenirs d'apprentissage*, André Weil se refiere a los comienzos del grupo en estos términos: “En cuanto a la naturaleza de la empresa, no nos apareció clara desde el principio. Al comienzo nuestro objetivo era de algún modo pedagógico; se trataba de traer las grandes líneas de las Matemáticas al nivel de la licenciatura. Pronto fue cuestión de redactar a ese nivel un curso o tratado de análisis que reemplazaría el ‘Goursat’ y serviría de base a la enseñanza.”

Cuando empiezan a publicarse los tomos de los *Elements de Mathematiques*, el empeño del grupo se ha transformado en el armazón de una enciclopedia sistemática que tiene su comienzo y el lenguaje unificador de la obra en la teoría de conjuntos. La profunda reforma de los programas universitarios, que se produce necesariamente poco después de finalizada la guerra, encuentra en la obra de Bourbaki un modelo acabado. El estilo bourbakista ha servido de norma para la forma de presentación de buena parte de las matemáticas escritas y enseñadas en la segunda mitad del siglo.

### ***La matemática moderna y su crítica.***

En la mayoría de los países afectados por la Segunda Gran Guerra se realizaron rápidamente reformas de los programas universitarios que se completaron antes de 1950. Se introdujeron materias que ahora nos parecen clásicas como la Topología, el Análisis funcional, la Teoría de Grupos, etc., No considerando oportuno prolongar los estudios se tuvieron que eliminar otras, hasta entonces consideradas imprescindibles. Se planteó el problema de trasladar parte de los temas más sencillos o básicos a la enseñanza secundaria. Muchos opinaban que en ese nivel debían añadirse otros temas adecuados a las nuevas necesidades sociales. Esta ambición, obviamente obligaba a plantearse nuevas presentaciones más comprimidas y, por tanto más abstractas, de los viejos y nuevos contenidos, así como a eliminar algunas materias tradicionales.

Por otro lado, las necesidades militares en la Segunda Guerra habían hecho conscientes a los Gobiernos y clases dirigentes de la

escasa cultura matemática de la población, fuese el que fuese su nivel de titulación académica. Ya en 1952 se organizó en EE.UU. un primer comité para elaborar un nuevo plan de estudios de matemáticas en los niveles no universitarios. Paralelamente, en Europa, una Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas organizó reuniones interdisciplinarias desde 1950.

A instancia de la O.E.E.C. (actual O.C.D.E.), se organizan seminarios internacionales en Royaumont (invierno de 1959) y Dubrovnik (agosto-setiembre de 1960). Y en el año 1962, en el Congreso Internacional de Matemáticas de Estocolmo, fue presentado por el profesor John G. Kemeny un informe que recogía los resultados de una encuesta contestada por 21 países y encargada por el I.C.M.I. en el Congreso Internacional de Edimburgo (1958).

El tema de la encuesta era: ¿cuáles son los aspectos de la matemática moderna y de sus aplicaciones que han de incluirse en los programas de la enseñanza secundaria?. Para la mayoría eran: elementos de la teoría de conjuntos, introducción a la lógica, probabilidades y estadística y álgebra moderna.

Los conceptos básicos de teoría de conjuntos debían introducirse y usarse lo antes posible. Se proponía estudiar el cálculo de proposiciones simultáneamente al álgebra de Boole, por ser estructuras isomorfas. Las probabilidades y estadística deben estudiarse por su utilidad y posiblemente limitándose a los casos discreto y finito que son más próximos a la experiencia del alumno. Respecto al álgebra moderna se daban dos posturas: la primera, utilizar las estructuras algebraicas (grupos, etc.) para generalizar y profundizar las experiencias matemáticas del alumno con diversos tipos de números; la segunda proponía utilizar el álgebra lineal como base para desarrollar las ideas geométricas. Se pensaba que la introducción axiomática de las estructuras permitiría acabar con la idea estudiantil de que sólo hay demostraciones en la Geometría.

Algunos países eran partidarios de introducir conceptos básicos de topología. Como desarrollos aplicados de las matemáticas se señalaban la estadística, la física, las máquinas calculadoras y la programación lineal.

Para no hacer inmensos los programas debía sacrificarse parte del contenido tradicional. La opinión general era partidaria de reducir el tiempo dedicado a la geometría sintética, y sobre todo a la

trigonometría, la geometría del espacio y prácticas de cálculo aproximado ya poco utilizadas.

Dos características son destacables de esta gran actividad reformadora. En primer lugar la urgencia. La primera de las conclusiones del Seminario de Royaumont comienza así: “Declarar la urgente necesidad de adaptar la enseñanza de la geometría y del álgebra de la enseñanza secundaria a los progresos de la matemática moderna”. Los trabajos de muchas de las comisiones, en los diversos países, acabaron centrándose en la redacción de textos orientadores en los que, pretendidamente, se recogían experiencias realizadas. Pero la urgencia no propició aclarar los resultados de las experiencias en los casos en que se realizaron.

Recordando el espíritu de las reformas de principios de siglo, el otro rasgo característico fue el deseo de conseguir una presentación unificada de la matemática: “Creemos haber logrado cierta unificación del contenido, de manera que el álgebra, la geometría y los elementos del análisis no están en compartimentos estancos, sino presentados como teniendo íntimas y fructíferas relaciones entre sí. Puesto que la tendencia a la unificación es una de las características del desarrollo de la matemática, en este siglo XX, resulta esencial que nuestros programas presten el debido énfasis a la subyacente unidad de las matemáticas”. (Seminario de Dubrovnik).

El lógico E.W. Beth, en un artículo escrito para la Comisión Internacional, plantea las relaciones de la nueva reforma con la kleiniana. A su modo de ver, Klein sólo pudo abordar un cambio de método, no una reforma de programa, pues el papel intermedio de su geometría, en 1900, no era funcional respecto a los centros de interés de ninguno de los niveles de enseñanza, superior y elemental. Pero el desarrollo de las estructuras algebraicas, en parte desde la propia geometría, ha conseguido integrar muchos de los temas de estudio en un ámbito de ideas coherentes, según Beth, quedando aparte sólo cuestiones del análisis que necesitan una mayor sutileza lógica.

Incluso para los adalides más entusiastas de la matemática moderna, como Jean Dieudonné —que ha sido denostado por su eslogan blasfemo: “¡Abajo, Euclides!” en el Seminario de Royaumont—, la reforma de la enseñanza matemática tenía límites dentro de un realismo pedagógico. Proponía Dieudonné: “Hasta los 14 años, es

probablemente razonable dar a la enseñanza de la matemática un carácter experimental, tanto en álgebra como en geometría, y no hacer ningún intento de axiomatización, lo cual no impide el uso de ciertos razonamientos lógicos. A los 15 años, los alumnos pueden entrar en la axiomática de la geometría, vía espacios vectoriales.”

Pero estas cautelas, y otras, fueron superadas por un entusiasmo reformador que en algunos países, llevó hasta la utilización de la teoría de conjuntos para la introducción de los números naturales. Posiblemente el abuso de teorías psicopedagógicas, como las de Piaget, que fueron interpretadas como la existencia de una relación íntima entre los conceptos algebraicos más básicos y las estructuras mentales en formación en los niños, unido a la urgencia reformadora, condujo a situaciones de caricatura como la que presenta Morris Kline en el primer capítulo de su libro *El fracaso de la matemática moderna*.

El año en que se publica este libro (1973) casi la mitad de las escuelas americanas enseñaban con el nuevo plan de matemáticas modernas. Se habían publicado cientos de textos y millones de niños habían pasado por la experiencia. Pero entonces, empezó a crecer la opinión de que los resultados eran los contrarios de los esperados. Los nuevos titulados tenían menos habilidades matemáticas que los educados tradicionalmente: “Juanito no sabía sumar”.

Kline manifiesta una postura crítica respecto al programa tradicional. Lo tacha de demasiado tradicional, de abusar de la memorización y no tener en cuenta la motivación del alumno. Como resumen de su crítica, Kline ataca el mito de que las matemáticas enseñan a pensar. Y lo rebate desde la experiencia: estas matemáticas no lo hacen.

Defendiendo la necesidad de cambios, Kline analiza el movimiento reformador de la matemática moderna. Muy resumidamente, las críticas de Kline se centran en:

- 1.- Toda la nueva reforma no se ha preocupado mas que de hacer un cambio de programa. Ha olvidado por ejemplo el importante problema de disponer del profesorado adecuado.
- 2- Se ha reducido la matemática a un aspecto muy característico, el deductivo, que es muy poco pedagógico.
- 3.- Se ha insistido en el rigor con la esperanza de que hablar en un lenguaje claro es la mejor manera de acceder a la mente de los jóvenes,

olvidando que ese rigor va unido a una abstracción a la que el educando no tiene acceso. “El rigor puede salvar a las matemáticas pero seguramente perderá a los alumnos.”

4.- La preocupación por enseñar en un lenguaje formalizado oscurece, para quien no está en el secreto de lo que se le habla, las ideas.

5.- La nueva matemática se presenta como autosuficiente. Desde esa postura no es posible dar a los estudiantes conciencia de la utilidad de las matemáticas.

6.- Los nuevos contenidos, de los que la teoría de conjuntos es la base, favorecen la abstracción como forma de aproximación a lo concreto. Pero en el desarrollo de las matemáticas la abstracción no es primer paso, sino el último.

En un capítulo de título: “La verdadera justificación de las nuevas matemáticas”, Kline critica duramente la situación de la matemática profesional, que para él ha arrinconado los temas clásicos de la matemática aplicada y se ha “pasado a los problemas puramente matemáticos, a la axiomatización y generalización de lo ya conocido”. “La mayor parte de los matemáticos se ha separado de la ciencia”. Para Kline, “los matemáticos profesionales constituyen la amenaza más seria para la vida de las matemáticas, por lo menos en lo que se refiere a su enseñanza”, ya que la extrema especialización los ha recluido en un mundo para el que las capacidades intelectuales necesarias son muy diferentes de las que convienen a un educador.

Es curioso que Kline se olvide de las responsabilidades de las administraciones educativas, cuando muchas páginas antes ha recogido las iluminadas opiniones del comisario de educación de Estados Unidos, Francis Keppel, que defiende con entusiasmo la reforma afirmando al mismo tiempo, que la mayoría del profesorado no será capaz de enseñarla.

Finalmente, Morris Kline expone la dirección en que piensa debe orientarse la necesaria reforma. No considera que la reforma deba ser de contenidos en el programa tradicional, salvo pequeñas modificaciones, pues “todo lo que se diga acerca de que la sociedad moderna requiere una clase totalmente nueva de matemáticas es un completo sin sentido”. Para Kline la educación debería ser una verdadera educación en humanidades, en la que se aprendiera el contenido de cada materia, pero también su papel en nuestra cultura y

sociedad. Las matemáticas son la llave de nuestra comprensión del mundo físico, indispensables para nuestra tecnología. La motivación para enseñar matemáticas es cultural: “Si incluso los niveles elementales de las matemáticas no tuvieran íntima relación con las ramas principales y más vivas de nuestra cultura, la materia no merecería un lugar importante en el plan de estudios.”

Queda el problema de la motivación, que la matemática tradicional no aborda suficientemente y que la moderna ha olvidado, y al que Kline da suma importancia. Para él, la respuesta está en el interés de los jóvenes por los problemas reales. “Los jóvenes viven en el mundo real y, como todos los seres humanos, sienten alguna curiosidad acerca de los fenómenos reales, o al menos es más fácil interesarles en ellos que interesarles en las matemáticas abstractas.”

Evidentemente en esta formulación asoma una duda. Kline remite su solución al futuro: “Ciertamente queda mucho trabajo para buscar problemas que sean motivos de interés genuino y significativos para el estudiante.”

En las páginas 130-136 del libro de Kline se recoge un manifiesto “Sobre el plan de matemáticas de enseñanza secundaria” firmado por sesenta y tantos matemáticos de Colleges y Universidades americanas, que por la variedad de sus especialidades tal vez quitan fuerza a la mala opinión de Kline sobre los matemáticos puros. Sus planteamientos son similares a los defendidos en el libro: el plan de bachillerato debería contribuir a la formación cultural del estudiante y ofrecer preparación profesional a quienes usarán las matemáticas. En su significado cultural y en su uso práctico las matemáticas están conectadas con las otras ciencias. Sería desastroso quitar alguno de los temas clásicos: álgebra elemental, geometría plana y de sólidos, trigonometría, geometría analítica o cálculo infinitesimal, pues estos temas pueden ofrecer valores culturales a los estudiantes en general.

Las consecuencias de la aplicación de los nuevos programas de matemática moderna fueron diversas: Estados Unidos y Francia han sido dos de los países más afectados. En Inglaterra, en cambio, la influencia ha sido bastante escasa.

## *Antes de ayer*

Tras el experimento de la reforma de los años sesenta y setenta, que popularizó la “matemática moderna”, los diferentes países iniciaron una recomposición de sus programas. En buena parte se fue volviendo a los contenidos de la matemática tradicional aunque dejando algún “cadáver” en el camino: la geometría sintética, heredera de la verdaderamente clásica geometría de Euclides, ha sido una víctima propiciatoria y con ella, la intuición geométrica.

Las ideas de Kline, y otros como E. H. Moore, de combinar lo más posible la enseñanza de las matemáticas y la de las ciencias, no parecen tener grandes defensores. La inmensa mayoría de los matemáticos universitarios se han olvidado del tema educativo. La enseñanza de las matemáticas, como toda la educación, ha entrado en una época de renovación y experimentación permanente. El sistema educativo crece prolongándose los años de escolarización y, sobre todo, multiplicándose el número de asignaturas.

En la actualidad, la Enseñanza es tan extensa y diversa que probablemente para definirla deba utilizarse la misma técnica que se ha utilizado para definir la Física, por ejemplo. Si la Física, por definición, es aquello a lo que se dedican los físicos, la enseñanza debe ser aquello que hacen los enseñantes

Pero en las diferentes posiciones, incluso contrapuestas, a propósito de la enseñanza de las matemáticas, se encuentra siempre una definición de enseñanza menos aséptica. Tradicionalmente se ha entendido por enseñanza la transmisión social de saberes (teóricos o prácticos) que, por ser especialmente valorados socialmente, se identifican como culturales. Entendiendo por cultural lo que cultiva, por dar mayor capacidad humana, al que lo aprende.

Las matemáticas habían adquirido el prestigio suficiente para ser casi universalmente reconocidas como cultura y, por lo tanto, materia que, a su nivel de capacidad y necesidad social, todo ciudadano debe estudiar.

La capacidad de definir lo que es culturalmente importante y, en consecuencia, objeto de enseñanza, ha sido potestad de diferentes grupos sociales a lo largo de la historia. En la Edad Media fue la Iglesia, o al menos los que contaban con su beneplácito, la que decidía. En las sociedades modernas ha sido el Estado, de un modo u otro

dirigido por los poderosos.

En nuestras sociedades ese poder ha pasado a manos del Estado democrático. Al menos en teoría, porque el Estado no es nadie, siendo todos. Especialistas y administradores se encargan, en nombre del Estado, de hacer la selección.

Pero en estos siglos también la palabra cultura se ha transformado. De la cultura subjetiva, la que cultiva al sujeto, se ha llegado a la cultura objetiva. Cultura ésta que consiste en los caracteres propios de una comunidad que, por ello, desea transmitirlos a las generaciones siguientes para su pervivencia como tal comunidad: cultura alemana, francesa, etc.

En la segunda mitad del siglo XX se ha popularizado la crítica a la idea de la existencia de valores culturales universales. Y al mismo tiempo el tipo de cultura objetiva se ha diversificado. Actualmente no sólo existen culturas nacionales, sino también culturas o fragmentos de culturas de grupos sociales cuya identidad reside en compartir su cultura. Muchos de esos grupos culturales desean su propia educación o, al menos, que sea tenida en cuenta su idiosincrasia, incluso cuando se trata de enseñar materias pretendidamente universales (transculturales), como las matemáticas. En Estados Unidos está de moda la enseñanza de la matemática multicultural.

Con esta situación social, junto al recuerdo de los fracasos de la reforma de la matemática moderna, parece que los responsables de los programas de educación tienen un difícil papel. En los países que han conservado una fuerte tradición educativa, ésta tradición se mantiene a duras penas frente a los nuevos requerimientos. Donde la tradición es débil, la inseguridad del legislador es obvia y todo son argumentos para no decidir. Nuestros actuales programas de educación secundaria son buen ejemplo de ello.

## BIBLIOGRAFÍA

- Cockcroft (Informe), *Las matemáticas sí cuentan*, Estudios educación MEC, 1985.
- Cunliffe, Marcus, “VIII. La enseñanza”, *Historia de las civilizaciones*. Tomo 12, Alianza/Labor, 1989.
- Dieboldt, Claude, *Education et croissance économique (Le cas aleman)*, L’Harmattan, 1995.
- Durkheim, Emile, *Educación como socialización*, Sígueme, 1976.
- Grattan-Guinness (Edit.), *Companion Encyclopedia of the history ... of Mathematican Sciences*, Routledge, 1992.
- Klein, Felix, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Biblioteca Matemática, 1927-31.
- Klein, Felix, *Development of Mathematics in the 19th Century*, Math Sci Press, 1979.
- Kline, Morris, *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, 1976.
- Kline, Morris, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, 1985.
- Mehrtens y otros (Edit.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Birkhäuser, 1981.
- Piaget, J. y otros, *La enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, 1963.
- Prost, Antoine, *L’enseignement en France (1800-1967)*, Armand

Colin, 1968.

- Rey Pastor, J.y Babini, J., *Historia de la matemática*, Espasa Calpe, 1951.

- Santaló, Luis A., *La matemática en la escuela secundaria*, Eudeba, 1966.

- Young, J.W.A., *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática*, Losada, 1947.



# Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España y otros países de la Unión Europea

Alicia Delibes

Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE)

## I. LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EUROPA

Antes de hablar de Matemáticas quisiera hacer un breve recorrido por los diferentes planes de estudio que rigen en los países europeos que, por razones geográficas y culturales, podemos considerar más cercanos a España.

A Francia, Alemania, Italia y Portugal he añadido Noruega por haber sido un país tomado como referencia para evaluar los resultados del T.I.M.S.S. (Third International Mathematics and Science Study).

Conocer el sistema británico es imprescindible para comprender el origen de nuestra Ley Orgánica General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.).

### LA SECUNDARIA EN FRANCIA

17-18 16-17 15-16	ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL	18-19 17-18	LYCÉE PROFESSIONNEL
		16-17 15-16	LYCÉE PROFESSIONNEL (BEP, CAP)
14-15 13-14 12-13 11-12	COLLÈGE		

(edad)

**Exámenes**

11 años: Examen de escritura, lectura y aritmética

15 años: Examen nacional: *Brevet* al final del *Collège*

18 años: Examen nacional: *BAC* (en la nota final influyen poco las calificaciones obtenidas durante el curso)

El paso de un curso a otro dentro de cada etapa se hace por decisión de los consejos de clase en el *Collège* y del claustro de profesores en el *Lycée*.

**LA SECUNDARIA EN ALEMANIA**

	Estudios superiores	Fachhochschule	Formación en el lugar de trabajo	
18-19 17-18 16-17	GYMNASIALE OBERSTUFE (3 años)	FACHOBER SHULE (2 años)	BERUFSFACH SCHULE (1 a 3 años)	Empleo
15-16 14-15 13-14 12-13 11-12 10-11	GYMNASIUM (6 años)	REALSCHULE		HAUPTSC HULE

**Exámenes**

- Se realizan exámenes orales y escritos para pasar de un curso a otro.
- Para acceder al Gymnasium o a la Realschule es necesaria la autorización del centro.
- Para pasar del Gymnasium al Gymnasium superior también se necesita la autorización del centro.
- Hay un examen oficial al final de Gymnasium superior llamado *Abiturprüfung* que permite el acceso a estudios superiores.

**LA SECUNDARIA EN ITALIA**

18-19	LICEOS (5 años)	INSTITUTOS
17-18	Clásico	Magistrale
16-17	Científico	D'Arte
15-16	Artístico	Tecnico
14-15		Professionale
13-14	SCUOLA MEDIA (3 años)	
12-13		
11-12		

**Exámenes**

- Al final de cada curso se hacen exámenes orales y escritos.  
El consejo de clase y después el claustro de profesores decide el paso al curso siguiente.
- Hay un examen final con un profesor de la escuela y un examinador externo al final de la *Scuola Media* que determina el acceso del alumno al Liceo o a un Instituto.
- Hay un examen nacional para los que aprueban el Liceo que les permite acceder a la Universidad (*Diploma di maturità*)

**LA SECUNDARIA EN PORTUGAL**

17-18	CURSOS	CURSOS	ESCOLAS
16-17	CARÁCTER GENERAL	TECNOLÓGICOS	PROFISSIONAIS
15-16	(CSPOPE)	(CT)	
14-15	ENSINO BÁSICO (3 años)		
13-14			
12-13			

## Exámenes

- Durante el curso se hacen exámenes finales y al terminar se realiza un examen final. A la vista de los resultados el consejo de clase es el que determina el paso al curso siguiente.
- A los 18 años hay un examen nacional que permite conceder dos tipos de certificados:
  - CSPOPE: certificado de Educación Secundaria que se obtiene haciendo media entre el examen y los cursos
  - CT: certificado de educación Secundaria + profesional
- Hay pruebas de Selectividad para acceder a Estudios superiores, ya sea o no de tipo universitario.

## LA SECUNDARIA EN NORUEGA

18-19	VIDERAGÄENDE KURS II	Formación en el lugar de trabajo	Formación y trabajo
17-18	VIDERAGÄENDE KURS I		
16-17	GRUNNKURS		
15-16	GRUNNSKOLE (9 años)		
14-15			
13-14			
12-13			
11-12			
10-11			
9-10			
8-9			
7-8			

## Exámenes

- En la *Grunnskole* el paso de curso es automático
- Al final de la *Grunnskole* (16 años) hay un examen oficial establecido por las autoridades educativas.
- En la segunda etapa se hacen exámenes finales escritos y orales, al final de la secundaria superior se dan dos tipos de certificados: uno permite continuar estudios superiores y el otro a un trabajo especializado.

## LA SECUNDARIA EN EL REINO UNIDO

La Ley de Educación de 1944 disponía que la enseñanza secundaria empezara a los 11 años y terminara a los 16 o 18 años. Al final de la enseñanza primaria los niños debían pasar un examen de matemáticas y lengua inglesa, conocido con el nombre de “11+” y, según los resultados obtenidos, se distribuían en tres tipos de escuelas secundarias:

- *Grammar Schools*, sólo cuando aprobaban el examen.

- *Technical Schools*

- *Modern Schools*

Era muy difícil el cambio posterior de un sistema al otro, lo que hacía que a una edad muy temprana y por los resultados de un solo examen se decidiera el futuro académico de los niños. Esta situación estaba siendo cada vez más criticada por un amplio sector de la sociedad británica. La necesidad social de un cambio en el sistema dio origen a la creación de lo que se llamaron *Comprehensive Schools*.

Desde 1951 el partido laborista ha abogado por las *Comprehensive Schools* que suprimían el examen “11+” y unificaban los tres sistemas en un modelo de escuela única. La defensa de las *Grammar Schools* se convirtió, a partir de entonces, en una cuestión casi de principios para los conservadores.

El relevo en el poder de laboristas y conservadores fue acompañado del apoyo de uno u otro modelo de escuela. Así, en 1976, el gobierno laborista de James Callaghan ordenó a las autoridades locales de educación (LEAS) que reorganizaran sus sistemas escolares de acuerdo con el principio que ahora llamamos “comprensivo”, pero que en un principio se tradujo por “integrador”. Mientras que cuando Margaret Thatcher llegó al poder, en mayo del 79, abolió dicha disposición.

Tras su segunda reelección, Mrs. Thatcher prometió una nueva ley de educación que viniera a sustituir a la ya caduca del 44. En 1987 se preparó el *National Curriculum* que establecía normas y niveles de lo que se enseña en las *Comprehensive Schools*.

Actualmente, casi el 90 por ciento de los escolares británicos estudia en una *Comprehensive School*.

Es importante hacer notar que dentro de este sistema unificado existen *Comprehensive Schools* buenas, malas y regulares. En teoría,

los padres tienen absoluta libertad para elegir una u otra, pero, en la práctica, las buenas escuelas no disponen de plazas suficientes para acoger a todos los niños que desean ir a ellas.

17-18 16-17	SIXTH FORM COLLEGE	
15-16 (o 18) 14-15 13-14 12-13 11-12	COMPREHENSIVE SCHOOL	SECONDARY SCHOOL (13 a 16 o 18 años)
		MIDDLE SCHOOL (10 u 11 a 13 años)

### Exámenes

- A los 16 años, al terminar la secundaria se realizan los antes llamados *O levels* y que las *Comprehensive* han rebautizado con el nombre de *GCSE (General Certificate of Secondary Education)*. Los alumnos eligen una serie de asignaturas para examinarse. Los examinadores dependen de la Universidad, y se ocupan de preparar y corregir las pruebas.
- A los 18 años se realizaban los llamados *A Levels* que se han mantenido con el mismo nombre y el mismo sistema de elección de asignaturas.
- El *National Curriculum* ha introducido una división en ciclos, llamados *Key Stage*, dos en primaria y dos en secundaria que dan lugar a los exámenes de:
  - Key Stage 2, national examination* al final de la primaria
  - Key Stage 3* a los 14 años.

## LA SECUNDARIA EN IRLANDA DEL NORTE

Irlanda del Norte tiene un modelo educativo propio, diferente del Reino Unido:

	Estudios universitarios	Estudios no universitarios
17-18	GRAMMAR SCHOOL	FURTHER EDUCATION
16-17		COLLEGE
15-16		
14-15	GRAMMAR SCHOOLS	SECONDARY SCHOOL
13-14		
12-13		
11-12		

En los *Further Education College* parte del horario se dedica a la iniciación profesional. Al terminar pueden abandonar los estudios, continuar con una formación no universitaria o pasar sus exámenes GCSE para acceder a la Universidad.

### Exámenes

- A los 14 años hay un examen nacional con dos niveles de dificultad (*Junior Certificate*)
- A esa edad deciden las asignaturas que prepararán para el examen GCSE que se realiza a los 16 años.
- A los 18 años otro examen nacional, con tres niveles en matemáticas y en irlandés. Los realizan examinadores externos que informan a la inspección: *GCE A-Level (Leaving Certificate)*

## LA SECUNDARIA EN ESPAÑA

	Estudios Superiores (+ Selectividad)	F.P. GRADO SUPERIOR
17-18 16-17	BACHILLERATO	
15-16 14-15 13-14 12-13	E.S.O.	
		F.P. GRADO MEDIO

### Exámenes

Textualmente, la información que se sirve a *Eurydice* es la siguiente:

“Los resultados y el progreso académico de los alumnos se toman en consideración en relación a sus capacidades personales. No hay pruebas estandarizadas en la ESO ni en el Bachillerato. Sin exámenes.”

Conviene hacer notar que España es un caso único. El que más ha avanzado en la educación igualitaria y el que menos condiciona estudios posteriores a la realización de exámenes.

## II. LA SECUNDARIA EN LAS ESCUELAS EUROPEAS

### Introducción

La primera Escuela Europea empezó a funcionar en Luxemburgo en octubre de 1953. Nació de la iniciativa de un grupo de funcionarios de la CECA y contó con el apoyo de las instituciones de la Comunidad Europea y del gobierno luxemburgués.

Actualmente hay 8 establecimientos en Europa: tres en Bélgica, uno en Italia, dos en Alemania, uno en los Países Bajos y otro en el Reino Unido.

El BAC europeo permite acceder a las universidades de los 15 países miembros. En todas ellas se puede estudiar cualquiera de las

lenguas de la Comunidad, pero no en todas existe una sección lingüista completa.

#### Organización de la enseñanza secundaria

En las Escuelas Europeas la enseñanza secundaria empieza a los 11 años y termina a los 18. Los 7 cursos se dividen en tres ciclos diferenciados:

17-18 16-17	6e, 7e SECONDAIRE
15-16 14-15	4e, 5e de l'ÉCOLE SECONDAIRE
13-14 12-13 11-12	1re, 2e, 3e du CYCLE SECONDAIRE

Los cursos se aprueban o suspenden globalmente. No hay asignaturas pendientes ni exámenes en septiembre. Para tener el título de Bachillerato es preciso aprobar el examen del BAC común a todas las Escuelas Europeas.

Las Matemáticas, Física, Química se dan en la lengua materna propia de la sección lingüística correspondiente.

Al empezar la primaria se debe elegir una lengua comunitaria distinta de la materna, lengua en la que se cursarán la Historia y Geografía a partir de 4e. En segundo de secundaria es preciso elegir una tercera lengua.

Tienen 4 periodos (de 45 minutos) semanales de Matemáticas en el primer ciclo, 4 o 6 en el segundo y 3 o 5 en el tercero.

#### Porcentaje del tiempo dedicado a cada asignatura sobre el horario lectivo

	Lengua Mater.	Matem.	II Lengua	Deporte	Ciencias	Humanidades	Otros
13 años	13	13	13	9,5	13	9,5	29
16 años	13	13 o 19	9,5	6,5	19	4	35 o 32

A los 13 años (3e) “otros” engloba: III Lengua, Religión, Educación artística y musical y Latín (opcional)

A los 16 años (5e) el término “otros” supone: III Lengua, Religión y optativas como Latín, Griego, Economía, Educación artística y musical.

En los dos últimos años, las opciones cobran importancia. Las matemáticas de tres periodos son obligatorias para todos.

### Programa de Matemáticas

El programa de Matemáticas que rige actualmente en las Escuelas Europeas fue aprobado por *Le Conseil Supérieur des Écoles Européennes* en Berlín, el 28 de abril de 1987 y en 1988 en Chios.

Incluyo una muestra del programa de Álgebra facilitado por la Escuela Europea de Luxemburgo. En él se percibe claramente un enfoque tradicional de la didáctica matemática que nada tiene que ver con el desarrollo curricular de nuestra LOGSE.

### 3º de secundaria (equivalente a nuestro 2º de ESO)

Temas	Saber y saber hacer Ser capaz de....	Consejos metodológicos
Ecuaciones e inecuaciones de 1er grado con una incógnita	<p>Resolver una ecuación (o inecuación)</p> <p>Representar las soluciones sobre la recta.</p> <p>Despejar algún elemento de una fórmula</p> <p>Reemplazar las ecuaciones por otras equivalentes</p> <p>Resolver problemas donde intervienen varias inecuaciones</p>	<p>No olvidar los casos siguientes:</p> <p><math>0x &lt; -3</math></p> <p><math>0x = 4</math></p> <p><math>0x = 0</math></p> <p>Ejemplo: calcular una de las bases de un trapecio conociendo su altura, su área y su otra base.</p>

**5º de secundaria (equivalente a 4º de ESO)**

Temas	Saber y saber hacer Ser capaz de...	Consejos metodológicos
Ecuaciones $a x^2 + b x + c = 0$	Distinguir las soluciones de la ecuación $x^2 = a$ , $a \in \mathbb{R}$ en función de $a$ ;  Resolver la ecuación general de segundo grado.	$X = \pm\sqrt{a}$ ; $\forall a$ si $a > 0$ ; si $a=0$ y sin solución si $a < 0$ .  Tratar los casos particulares: $a x^2 + c = 0$ $a x^2 + b x = 0$ $x^2 + p x + q = 0$ El profesor elegirá el método para la resolución de la ecuación general.

**III. RESULTADOS EN EL TIMSS****(Third International Mathematics and Science Study)****Introducción**

La IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) es un organismo internacional que tiene como finalidad promover y desarrollar iniciativas internacionales de evaluación.

En 1995 realizó una evaluación de los estudiantes de 13 y 14 años en la que participaron 45 países de todo el mundo, que ha sido conocida con el nombre de TIMSS.

En Estados Unidos la publicación de los resultados levantó un gran revuelo ya que sus escolares se situaron por debajo de la media internacional, delante sólo de países sin ninguna tradición matemática como España, Grecia y Portugal.

Los resultados se hicieron públicos en Boston el 20 de noviembre de 1997, de allí salió el acuerdo de la elaboración de un currículo internacional para Matemáticas.

España, participó con 7.569 alumnos (3.855 de 8º y 3741 de 7º). Según el número de respuestas acertadas se situó por debajo de la media internacional. Entre los escolares de 13 años ocupó el puesto 32 e 39 clasificados y entre los de 14, algo mejor, el 31 de 41 clasificados.

## Resultados

En las tablas que vienen a continuación, los países europeos que están en negrita tienen una enseñanza secundaria con un nivel de “comprensividad” alto (15 o 16 años).

PAÍS	MEDIA (13 años)	MEDIA (14 años)	
Singapur	601	643	
Corea	577	607	
Japón	571	605	
Hong Kong	564	588	
Bélgica (fl)	558	565	1
Rep. Checa	523	564	2
Eslovaquia	508	547	3
Suiza	506	545	4
Eslovenia	498	541	5
Holanda	516	541	6
Bulgaria	514	540	7
Austria	509	539	8
Francia	492	538	9
Hungría	502	537	10
Rusia	501	535	11
Australia	498	530	12
Irlanda	500	527	13
Canadá	494	527	14
Bélgica (fr)	507	526	15
Israel		522	16
<b>Suecia</b>	<b>477</b>	<b>519</b>	<b>17</b>
Alemania	484	Media 509	18
N. Zelanda	472	508	19
<b>Inglaterra</b>	<b>476</b>	<b>506</b>	<b>20</b>
<b>Noruega</b>	<b>461</b>	<b>503</b>	<b>21</b>
<b>Dinamarca</b>	<b>465</b>	<b>502</b>	<b>22</b>
<b>EE.UU.</b>	<b>476</b>	<b>500</b>	<b>23</b>
<b>Escocia</b>	<b>463</b>	<b>498</b>	<b>24</b>
Islandia	459	487	25
España	448	487	26
<b>Grecia *</b>	<b>440</b>	<b>484</b>	<b>27</b>
Rumania	454	482	28
<b>Portugal*</b>	<b>423</b>	<b>454</b>	<b>29</b>
Irán	401	428	30
Colombia	369	385	31
Sudáfrica	348	354	32
<i>Media</i>	<i>484</i>	<i>513</i>	

\* Grecia y Portugal tienen una educación secundaria común hasta los 15 años

Italia no se presentó a las pruebas

**Se propusieron 151 cuestiones de matemáticas, que se pueden clasificar en 5 bloques:**

*Aritmética:* recoge cuestiones sobre números, operaciones y proporciones, 62 preguntas (41%)

*Geometría:* 23 preguntas (18%)

*Álgebra:* 27 preguntas (18%)

*Medida:* 18 preguntas (12%)

*Estadística y probabilidad:* 21 preguntas (14%)

La participación española se hizo a través del INCE, organismo que se encargó de recoger y estudiar los resultados.

De un estudio realizado por el INCE en el que se comparaban los resultados de España con los de Estados Unidos, Noruega, Francia e Irlanda he recogido los siguientes datos:

**Porcentaje de respuestas acertadas por países y por bloques**

13 años	Media Inter	España	EE.UU.	Noruega	Francia	Irlanda
Aritmética	51	44	51	46	51	59
Geometría	49	43	44	42	58	43
Álgebra	44	41	44	32	39	47
Medida	45	38	36	44	49	46
Estadística	57	52	60	59	63	64
Prueba completa	49	42	48	44	51	53

14 años	Media Inter	España	EE.UU.	Noruega	Francia	Irlanda
Aritmética	56	50	56	55	60	63
Geometría	56	49	48	51	66	51
Álgebra	52	54	51	45	54	53
Medida	51	44	40	51	57	53
Estadística	62	60	65	66	63	69
Prueba completa	55	51	53	54	61	59

**Clasificación por bloques**

País	Mejor bloque	Peor bloque	Mejoría global
España	Álgebra	Aritmética y Geom.	A los 14
EE.UU.	Estadística	Geometría	No hay
Noruega	Estadística	Álgebra	A los 14
Francia	Geometría	Álgebra	A los 14
Irlanda	Aritm. y Estad.	Geometría	No hay

**País con media más alta y más baja en cada bloque**

Bloque	Media más alta		Media más baja	
	13 años	14 años	13 años	14 años
Aritmética	Irlanda	Irlanda	España	España
Geometría	Francia	Francia	Noruega	USA
Álgebra	Irlanda	Francia	Noruega	Noruega
Medida	Francia	Francia	USA	USA
Estadística	Irlanda	Irlanda	España	España

Es alarmante el resultado de los escolares españoles de 13 años en Aritmética.

No son demasiado malos nuestros escolares de 14 años. En el bloque de Álgebra el porcentaje de respuestas acertadas es incluso superior a la media internacional.

Estados Unidos parece haber olvidado totalmente la Geometría en sus programas y Noruega el Álgebra y la Geometría.

**Otros datos reflejados en el TIMSS**

La IEA al realizar el TIMSS no se conformó con las pruebas de conocimientos, su proyecto era más ambicioso, quería comparar los métodos pedagógicos y los currículos de los diferentes países. Con este fin se pasaron distintos cuestionarios a alumnos, profesores y organismos de los países participantes.

Algunas conclusiones obtenidas de estos cuestionarios pueden ser interesantes a la hora de comparar nuestro sistema de enseñanza con el de los demás países que participaron en las pruebas.

- Clasificados los países participantes según el porcentaje de alumnos con profesores mayores de 40 años, España se encuadró

dentro del grupo más pequeño, aquel que tenía más de un 70% de profesores “no jóvenes”.

- Resultó que, en la mayoría de los países participantes, los alumnos recibían sus clases de matemáticas de profesores que dedicaban más del 75% de su horario lectivo a esta asignatura. Extrañamente, en España, sólo un 5% de los alumnos cumplía este requisito. Este dato no es de extrañar pues fuera de España, es inusual el que los alumnos de 13 y 14 años aprendan las matemáticas con profesores no licenciados ni especialistas en la materia.
- Se constató que, internacionalmente, los profesores confían más en las guías curriculares que en los libros de texto a la hora de decidir qué enseñar.
- En general, el horario dedicado a la enseñanza de las matemáticas varía entre 2 y 5 horas semanales.
- La media de alumnos por clase no sobrepasa los 30. Es curioso que Hong-Kong, Singapur, Japón y Corea, los cuatro países que encabezan la lista de clasificados, tengan clases de más de 30 alumnos.
- En la mayoría de los países, los alumnos realizan cálculos matemáticos rutinarios en todas o en casi todas sus clases. En España el 30% asegura no realizarlos nunca o casi nunca, el 42% dice que algunas veces y sólo el 28% contesta que lo hace casi siempre.
- En la mayoría de los países, entre ellos España, los alumnos realizan tareas en clase que requieren razonamientos más o menos elaborados.
- En más del 50% de los países, España entre ellos, casi siempre se pide a los alumnos que resuelvan problemas haciendo uso de objetos y situaciones de la vida diaria.
- En más del 75% de los países la calculadora se usa a diario en clase. Curiosamente en Corea y Japón es donde menos se utiliza.

#### IV. LAS MATEMÁTICAS EN LA LOGSE, LA ESO

El 21 de diciembre de 1998, Francisco López Rupérez, entonces Secretario General del Ministerio de Educación y Cultura, presentó

ante la prensa el borrador del Real Decreto que quería establecer el plan de estudios de la Educación Secundaria Obligatoria.

Este proyecto contemplaba un incremento en la asignación horaria de “Ciencias Sociales, Geografía e Historia”, “Lengua Castellana y Literatura” y “Matemáticas”. Así mismo, se introducían las necesarias modificaciones en los programas de dichas asignaturas.

El borrador del programa de Matemáticas fue encargado a un grupo de profesores de universidad y de secundaria que trabajó durante 4 meses en su elaboración.

El proyecto de Real Decreto fue enviado a la Real Academia, a distintas Sociedades y Asociaciones de profesores de Matemáticas pidiéndoles que hicieran un estudio crítico del proyecto.

El Grupo Socialista del Congreso que, ante el Decreto de Humanidades de la entonces ministra, Esperanza Aguirre, había presentado una Proposición no de Ley por la que instaba al Gobierno a retirarlo, decidió no entrar en discusión y repetir la estrategia anterior. El 18 de enero de 1999 se dio entrada en el Congreso de Diputados a una nueva Proposición no de Ley en la que, otra vez, se instaba al Gobierno a que retirara este nuevo proyecto. Al día siguiente Mariano Rajoy sustituía a Esperanza Aguirre en la cartera de Educación y Cultura y el borrador del Real Decreto duerme hoy en los cajones de los despachos.

El 5 y 6 de febrero asistí a unas jornadas convocadas por el académico y catedrático Miguel de Guzmán en la Real Academia de Ciencias. El objetivo era cambiar impresiones sobre la situación conflictiva de la enseñanza de las Matemáticas en España.

El borrador de programa de Matemáticas incluido en el Real Decreto estaba sobre la mesa y en el pensamiento de todos los asistentes, pero ninguno quiso entrar a discutir sobre su contenido. Tuve la impresión de que la opinión de la mayoría de los presentes estaba ya tomada, no había nada que decir sobre este “programa fantasma”, la reforma que las Matemáticas necesitaban ya se había hecho, el currículo de Matemáticas incluido en la LOGSE era incuestionable. Si existían problemas se deberían a una mala implantación de dicho currículo, la Administración debía limitarse a procurar los medios para la aplicación completa de la ley.

## BACHILLERATO Y SELECTIVIDAD

Los resultados recogidos en Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad en el curso 97-98, convocatoria de junio, son los siguientes:

### *Selectividad COU*

MATEMÁTICAS I: Muestra: 39.611 alumnos  
Aptos: 19.657 que supone el 49,62 %

MATEMÁTICAS II: Muestra: 20.166 alumnos  
Aptos: 6.862 que supone el 34,03 %

### *PAAUS: Selectividad LOGSE*

MATEMÁTICAS II: Muestra: 4.311 alumnos  
Aptos: 1.886 que supone el 43,75%

MATEMÁTICAS APLICADAS: Muestra: 4.061  
Aptos: 1.388 que supone el 34,18 %

Los exámenes de selectividad arrojan resultados preocupantes en el COU a extinguir, en cuanto a las PAAU, realizadas por alumnos que han cursado el Bachillerato LOGSE, no nos permiten ser muy optimistas.

Las Matemáticas II del nuevo Bachillerato son propias de alumnos que quieren iniciar carreras de Ciencias o Ingenierías superiores. El bajo porcentaje de aprobados entre los alumnos calificados ya como aptos en su centro de Enseñanza Secundaria pone de manifiesto, al menos, una falta de coordinación entre el profesorado de Bachillerato y los elaboradores de pruebas de acceso a la Universidad.

Esta coordinación es necesaria, no solamente ante la realización de las pruebas de acceso a la Universidad, sino también con los profesores

encargados de impartir la docencia los primeros años de carrera universitaria. Estos profesores deberían conocer mejor los contenidos de los programas del último curso de Bachillerato, es muy frecuente constatar que dan por sabidos temas que sus alumnos no han estudiado nunca o lo han hecho de forma muy superficial.

Con la implantación de la LOGSE aparece un nuevo factor que, lejos de resolver el problema que ya se venía observando en los últimos años en COU y su correspondiente selectividad, puede agravarlo. Este factor es el llamado carácter no exclusivamente “propedéutico” del Bachillerato.

Se entiende que el nuevo Bachillerato debe planificarse no como una mera preparación para la Universidad sino como un fin en sí mismo. Deberá suponer una ampliación de la cultura matemática del alumno con vistas a su formación profesional superior o a su incorporación a la vida laboral. La preparación de un alumno que abandona las Matemáticas no puede ser la misma que la de aquel que quiere acceder a la Universidad para seguir estudios científicos superiores. En mi opinión, es necesario abrir vías distintas que satisfagan las necesidades de unos y de otros.

Por otra parte, el fracaso de las Matemáticas II de COU continúa y se acentúa en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales del Bachillerato LOGSE. El programa de esta asignatura es inalcanzable, resulta más duro que el de las Matemáticas de los Bachilleratos Científicos y Tecnológicos. El retraso en la aparición de libros de texto y el pésimo resultado en la selectividad pueden ser razón suficiente para replanteárselo seriamente.

Y, por último, un punto negro del plan anterior: la preparación matemática de los alumnos de Económicas no se resuelve con el nuevo currículo. El hecho de que los futuros economistas puedan acceder a su carrera cursando las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales no debería forzar a que el programa de Matemáticas de los futuros historiadores, psicólogos, pedagogos, etc. se complicara de forma exagerada.

## Educación Matemática: una oportunidad y una necesidad social.

Tomás Recio  
Universidad de Cantabria

1- El término "Educación Matemática" puede entenderse de un modo más amplio que el de "Enseñanza de las Matemáticas", del mismo modo que la "Educación Vial" no se limita a la enseñanza de las técnicas para la obtención del carnet de conducir, ni la "Educación para la Salud" se refiere sólo a la enseñanza de ciertos aspectos de la biología humana, ni la "Educación Musical" es, simplemente, el aprendizaje de un instrumento...

La Educación Matemática debería consistir en la adquisición de una serie de actitudes, destrezas y conocimientos básicos, que capaciten a cada ciudadano para enfrentarse, en la medida de sus posibilidades, a diversas situaciones en la vida que requieren una perspectiva matemática.

2- Estamos en una sociedad que es mucho más proclive al tratamiento textual o factual que al tratamiento matemático de la información que recibe; es decir, es una sociedad poco alfabetizada (o, con más precisión, poco "numerizada") en el sentido matemático del término. Paradójicamente, estamos rodeados de aparatos (piénsese en los costosísimos instrumentos de la medicina hospitalaria, por los que, tarde o temprano, pasamos todos) cuya invención y modo de funcionamiento sólo ha sido posible con la intervención de las matemáticas; pero incluso muchos de los técnicos que los venden, reparan o manipulan se limitan a manejar tablas y normas (elaboradas por otros). No tienen que pensar matemáticamente para realizar su trabajo: otros ya lo han hecho por ellos.

Este fenómeno se repite en situaciones mucho más cotidianas. Hemos estrenado en España, hace bien poco, la extensión de la

enseñanza obligatoria hasta los dieciséis años. ¿Vamos a desaprovechar esta oportunidad de educar matemáticamente a tantos, durante tantos años? Se alzan voces que claman contra el descenso de exigencia matemática en el nuevo esquema educativo, contra la falta de concreción en los contenidos, contra la ausencia de una secuenciación reglamentada de las enseñanzas de los mismos. Todo ello es, en mi opinión, un debate estéril, porque, tanto con el modelo de enseñanza anterior como el actual:

- ¿Cuántos conciudadanos tienen, tras la enseñanza obligatoria, instrumentos matemáticos para estimar, aún groseramente, en sus casas, las cuotas mensuales de amortización de una hipoteca, a 15 años y con un interés fijo del 6%?
- ¿Cuántos pueden hacer un cálculo mental para decidir que han equivocado un orden de magnitud al hacer la declaración de la renta o para adelantar cuál sería —aproximadamente— el resultado final de la misma si incluyeran tal ingreso de rentas del trabajo, que se les había casualmente "olvidado" al realizar el primer borrador de la declaración?
- para entender que no se está acortando la ventaja de un ciclista escapado en la Vuelta, porque disminuya la diferencia de tiempos respecto del pelotón de perseguidores, si el escapado está subiendo un puerto de montaña y el pelotón está bajando otro puerto previo.
- ¿Qué número de aficionados al deporte rey se haría una idea del número de viviendas que se pueden construir (100 metros cuadrados por vivienda, cuatro por planta, seis plantas) si derribaran el viejo estadio municipal?
- ¿Qué ecologista de pro pondría sobre la mesa, en una discusión con los amigos, el volumen de escombros que acarrearía la construcción de tal túnel del nuevo trazado de un ferrocarril, o las dimensiones pertinentes que habría de tener el lugar que se considera idóneo para ubicarlos?

Pero, sobre todo, ¿cuántos acuden de modo "natural" a las matemáticas que aprendieron para abordar estos problemas sin preguntar al empleado del banco, o sin usar el programa de ordenador que entrega Hacienda? Hace falta, insisto, que el momento de la extensión de la enseñanza obligatoria sea el momento, también, de la Educación Matemática. Creo que, al igual que la alfabetización de la población ha conllevado unos cambios sociales que van mucho más

allá de la mera capacidad de más ciudadanos para leer documentos (por ejemplo, consecuencias políticas ante las posibilidades de acceso y crítica de la información que reciben los ciudadanos), la numerización progresiva de amplias capas de la sociedad tendría repercusiones importantes.

3- Sabemos poco sobre cómo enseñar y sobre cómo se aprenden las matemáticas pero, me temo, sabemos aún menos sobre cómo abordar la Educación

Matemática. El instituto o el colegio han sido concebidos y organizados, tradicionalmente, para transmitir unos conocimientos específicos, para instruir en unas disciplinas científicas o literarias. Sólo recientemente se ha encomendado a estas instituciones la tarea de educar en ciertos valores o actitudes: tolerancia ante la diversidad de opiniones, razas o religiones, desarrollo de hábitos de alimentación saludables, peligros de las drogodependencias, sensibilidad ante la fragilidad del medio natural, etc. La Educación Matemática, tal como la hemos descrito arriba, comparte muchos aspectos en común con este tipo de "materias", que hoy proliferan.

No es fácil, y puede ser incluso discutible, la exclusiva encarnación de estas tareas en el medio escolar. La sociedad —las sociedades matemáticas, en particular— tiene que idear otros medios, al menos complementarios, para transmitir la necesaria educación matemática a los ciudadanos.

Mientras tanto, el conflicto entre "educar matemáticamente" frente a "enseñar matemáticas" se libra, exclusivamente, en el ámbito escolar. He aquí algunas dificultades:

- La Educación Matemática debe justificarse en la enseñanza obligatoria por su utilidad, pero las matemáticas deben interesar por el reto mental que suponen. Los alumnos no pueden ser nunca los culpables de su propia falta de motivación. Enseñar a alumnos mediocres e interesados (¡naturalmente!) en otros asuntos, estimar sus límites y ajustar las enseñanzas (objetivos y medios) a los mismos, es la tarea permanentemente mejorable en cualquier sistema educativo.
- Fomentar la adquisición de ciertas actitudes personales (pensamiento heurístico) para la resolución de problemas, para la estimación de los sucesos aleatorios, para el tratamiento cualitativo de la información numérica. etc., podría ser mas importante que la

adquisición de destrezas en la manipulación y simplificación de expresiones algebraicas, por ejemplo.

- Familiarizar a los alumnos como usuarios de diversos utensilios técnicos para el análisis de datos y de situaciones numéricas y geométricas (a través de programas de ordenador o calculadoras simbólicas o geométricas) puede ser una información más valiosa para el alumno que empeñarse en que conozcan los rudimentos teóricos de este análisis.
- No se puede considerar que se ha educado matemáticamente, de forma correcta, si las nuevas generaciones terminan su educación obligatoria sin conocer las herramientas que podrían usar cotidianamente para resolver muchos problemas matemáticos elementales... Pero el equipamiento informático de nuestros centros, para su uso normal y cotidiano por parte de los alumnos, deja mucho que desear. Hay millones de ordenadores en los hogares españoles, y muchos adolescentes sólo saben que sirven para jugar o como máquina de escribir.

Pero no hay tiempo para todo en la jornada escolar, ni profesores diestros en las nuevas responsabilidades que se les asignan, ni modelos de organización escolar adecuados a los nuevos desarrollos metodológicos que se precisarían. La tarea de educar matemáticamente a todos los jóvenes hasta los 16 años necesita recursos humanos y materiales, de formación del profesorado y de tiempo. La importancia de las matemáticas en el mundo de hoy requiere dedicar más tiempo a su educación.

4- El sistema educativo público debería garantizar la oportunidad de una educación matemática, por ejemplo de excelencia, para aquellos alumnos que sean excelentes y opten por ese sistema. Va contra la necesaria construcción de la cohesión social el que el sistema público de educación se convierta, por falta de medios para atender a la diversa capacidad y circunstancias de los alumnos, de facto, en un sistema de garantía de mínimos educativos. Este hecho afecta, particularmente, a las posibilidades de desarrollo de la Educación Matemática en nuestro país.

Un país en donde sólo se puedan educar adecuadamente a unos pocos, en pocos sitios, no será nunca un país matemáticamente educado.

## Conclusiones

La mesa redonda referente a la Educación, junto con un debate posterior celebrado entre todos los asistentes al curso, dieron lugar a una serie de conclusiones que resumimos seguidamente.

La mayoría de los Profesores que participaron en el curso, tanto conferenciantes como asistentes, eran profesores de la Enseñanza Pública. Por tanto, se consideró oportuno solicitar de las autoridades competentes un trato preferente de dicha enseñanza.

Se puso de manifiesto la necesidad de recuperar las horas de clase de Matemáticas perdidas en la última reforma y de desdoblar las clases prácticas, tal y como ya ocurre en otras materias, para de este modo poder atender de manera más adecuada las necesidades de los alumnos.

Se indicó también la necesidad de definir claramente los conocimientos mínimos de Matemáticas en cada etapa del proceso formativo, de revisar los mecanismos de titulación y promoción de los alumnos, así como mejorar la conexión entre los distintos niveles educativos y en particular entre la educación secundaria y universitaria.

Se resaltó que, si bien una formación básica en Matemáticas es imprescindible para desenvolverse en la sociedad, las Matemáticas son también importantes en tanto que asignatura formativa y como herramienta básica de la Ciencia y la Tecnología.

La universalidad alcanzada en la educación se consideró un logro importante, pero se subrayó también la necesidad de establecer grupos de alumnos con un nivel homogéneo de conocimientos dentro de cada curso, con el fin de garantizar una educación de excelencia a los estudiantes que la reclamen.

El papel del ordenador y del aula de informática en la educación fueron también objeto de debate. Se consideró conveniente fomentar un uso racional del ordenador como elemento de apoyo docente, evitando confundir la enseñanza de las Matemáticas con clases de informática.

La figura y el papel del profesor fue también objeto de interés y se puso de manifiesto la necesidad de que recobre la dignidad y el prestigio perdidos, a la vez que se hizo una llamada para recordar que la educación de los jóvenes no es responsabilidad única de la Escuela sino que es tarea del conjunto de la sociedad.

Se enfatizó la necesidad de recuperar el valor del esfuerzo. Hubo, asimismo, una llamada de atención en relación a la permisividad existente ante actitudes de quebranto del orden normal de las clases y se subrayó la necesidad de que los centros y las autoridades competentes se sientan implicados en este tema.

## DIRECCIONES

*Mikel Bilbao*

Facultad de Económicas  
Universidad del País Vasco  
Avda. Lehendakari Aguirre, Bilbao

*Alicia Delibes Liniers*

Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE)  
General Oraá, 55  
28006 Madrid  
[Alicia\\_delibes@Mat.UCM.es](mailto:Alicia_delibes@Mat.UCM.es)

*Javier Duondikoetxea Zuazo*

Departamento de Matemáticas  
Universidad del País Vasco  
Apartado 644, 48080 Bilbao  
e-mail [mtpduzuj@lg.ehu.es](mailto:mtpduzuj@lg.ehu.es)

*José Luis Fernández*

Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid  
E-28049 Madrid  
e-mail [joseluis.fernandez@uam.es](mailto:joseluis.fernandez@uam.es)

*Enrique Fernández-Cara*

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico  
Universidad de Sevilla  
Apdo. 1160  
41080 Sevilla  
e-mail [cara@numer.us.es](mailto:cara@numer.us.es)

*Victoria Pinillos Laffón*

Departamento de Matemática Aplicada

Facultad de CC. Químicas

Universidad Complutense

28040 Madrid

e-mail [Victoria\\_Pinillos@Mat.UCM.es](mailto:Victoria_Pinillos@Mat.UCM.es)

*Tomás Recio*

Departamento de Matemáticas, Estadística y Ciencias de la Computación

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Avda. de los Castros, s/n

39071 Santander

e-mail [recio@matesco.unican.es](mailto:recio@matesco.unican.es)

*Roberto Rodríguez del Río*

Departamento de Matemática Aplicada

Facultad de CC. Químicas

Universidad Complutense

28040 Madrid

e-mail [Rr\\_delRio@Mat.UCM.es](mailto:Rr_delRio@Mat.UCM.es)

*Antonio Ros Mulero*

Departamento de Geometría y Topología

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

18071 Granada

e-mail [aros@ugr.es](mailto:aros@ugr.es)

*Gilbert Strang*

MIT

Cambridge MA

02139 USA

e-mail [gs@math.mit.edu](mailto:gs@math.mit.edu)

*Enrique Zuazua Iriondo*

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Complutense

28040 Madrid

e-mail [zuazua@eucmax.sim.ucm.es](mailto:zuazua@eucmax.sim.ucm.es)

















MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN,  
CULTURA Y DEPORTE

**UIMP**

*Universidad Internacional  
Menéndez Pelayo*