RECCION GENERAL DE
SEÑANZA PRIMARIA
ntro de Documentación
Orientación Didáctica

Vida escolar

N.º 118 - 119, ABRIL - MAYO 1970

Año XII
Números 118-119
Abril-mayo 1970

Vida escolar

REVISTA DEL CENTRO DE DOCUMENTACION Y ORIENTACION DIDACTICA DE ENSEÑANZA PRIMARIA

Director
ROGELIO MEDINA RUBIO

Secretario
AMBROSIO J. PULPILLO RUIZ

Jefe de Redacción
MARIA JOSEFA ALCARAZ LLEDO

Consejeros
VICTORINO ARROYO DEL CASTILLO
ISABEL DIAZ ARNAL
MANUEL MARTINEZ LOPEZ
JUAN NAVARRO HIGUERA
MANUEL RIVAS NAVARRO

Administrador
LUIS ELICES GARCIA

Edita
Centro de Documentación y Orientación Didáctica de Enseñanza Primaria

Redacción y Administración
Calle Pedro de Valdivia, 38, 2.°
MADRID - 6
Apartado de Correos 13.084

Depósito legal: M. 9.712-1958

Portada: M. CANDELA
TIRADA:
91.000 ejemplares.

C·E·D·O·D·E·P

Imprime
A. HERVAS, A. G.
Athos, 40 - MADRID-11
MADRID, 1970

sumario

Págs.

Valores y objetivos de la Matemática Moderna

Por ALBERTO AIZPUN
Catedrático de Matemáticas de la Escuela Normal Femenina de Madrid

1. INTRODUCCION

Para la Escuela Primaria la evolución de la Matemática en estos años es importante por los cambios de métodos didácticos que lleva consigo, desde luego mucho más que por los eventuales cambios de programas. Es muy posible, sin embargo, que esa renovación de métodos haya sido inducida porque los conceptos que en la Escuela Primaria resultan nuevos han probado que son de gran importancia para la educación, en general, y no solamente para la información matemática, en particular. Es por esto que tantas veces se reclama el apoyo del psicólogo en la programación de la Matemática; no sólo por el conocimiento de las etapas del desarrollo mental del niño, sino porque los conceptos fundamentales en la Matemática actual parecen serlo también en el pensamiento humano, cualesquiera que sean los contenidos sobre los que actúe.

En esta interpretación de los nuevos conceptos, que lo son únicamente, se repite, por cuanto no aparecían antes en la Escuela Primaria, es en donde encuentra la Matemática actual sus valores y sus objetivos. En cuanto se refiere a su aprendizaje, los métodos de enseñanza han de tener un doble apoyo:

— En los conceptos mismos.
— En la jerarquía que tales conceptos ocupan en el desarrollo mental del alumno.

El carácter del primero es estrictamente matemático y corresponde a los matemáticos profesionales aclarar cuáles son fundamentales para su ciencia y en qué grado; el segundo tiene carácter psicológico y sobre la cuestión se han realizado ya muchas investigaciones, algunas de las cuales, como las de Piaget y su escuela, han quedado como clásicas.

Así que todo profesor a quien agrade estar al día debe saber que ha de profundizar en tres direcciones:

a) La de los contenidos matemáticos, convenciéndose de que estará mejor preparado para su labor cuando posea un mayor dominio de conocimientos.

b) La de los resultados que se han obtenido y se van obteniendo en las investigaciones psicológicas sobre el aprendizaje de la Matemática.

c) La de los métodos de enseñanza deducibles.

Aquí no podemos comentar exhaustivamente ninguno de los tres puntos y nos limitaremos a exponer esquemáticamente algunas cuestiones sobre **a)** y **c)** señalando el valor educativo que encierran y el objetivo que se persigue con ellas.

2. ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA MATEMATICA ACTUAL

Tanto los especialistas como los aficionados han admitido siempre que la Matemática actúa con abstracciones y los profanos llegan a disociar el pensamiento matemático del pensamiento sobre la realidad. Sin embargo, muchas veces la Matemática ha tomado sus problemas de la experiencia, sobre todo de la Física, y ha sido después, al estudiar sus derivaciones formales, cuando han sido planteados sobre ellas otros problemas cuyos elementos ya no se tomaban del mundo sensible y de los que nadie recordaba su origen experimental. Por eso la naturaleza abstracta de la Matemática era entendida en el sentido de que la abstracción la realiza a partir de la vida real y de que los elementos con que trabaja son meras idealizaciones de los que componen el mundo sensible. Esta interpretación conducía de modo natural a un procedimiento de enseñanza consistente en comenzar por la observación de los objetos exteriores a fin de idealizar algunas de sus propiedades, que habían de tener siempre y forzosamente un carácter meramente numérico o geométrico; sobre estas idealizaciones, obtenidas de modo empírico e intuitivo, se construía una teoría matemática que posteriormente se aspiraba a comprobar actuando de nuevo sobre la experiencia externa.

Este modo de entender las cosas parece que da a la Matemática un carácter estático, de descubrimiento; una propiedad observada, un teorema demostrado, son puntos de llegada, verdades que se nos aparecen, cosas que siempre existieron, pero que sólo nos son conocidas a partir del momento en que las descubrimos, pequeñas o grandes Américas de la investigación.

Los profesionales actuales no comparten este punto de vista y para ellos uno de los valores de la Matemática es precisamente su carácter marcadamente dinámico; no se trata de descubrir y contemplar, sino de inventar y construir. Con esta concepción, la Matemática no será un sistema cerrado de conocimientos, susceptible de agotarse, sino un campo abierto a todas las iniciativas y, por tanto, en constante desarrollo.

Por otro lado, y sin que suponga ninguna contradicción con lo anterior, la Matemática realiza actualmente un esfuerzo de síntesis; avanzar en esta síntesis es precisamente su principal objetivo. Intenta buscar las conexiones existentes en dominios que hasta ahora se presentaban como independientes, y posiblemente tal aspiración a la unidad es un hecho que en el fondo del pensamiento humano ha aparecido más de una vez. Con este objetivo, intencionado o inconsciente, la meta está todavía muy lejos, y si llamamos moderna a la Matemática de ese estilo, no habrá hecho más que empezar. Profundizará y se extenderá mucho más, siendo ya un camino irreversible.

Una de las ideas que consigue en parte esta unidad entre teorías aparentemente no relacionadas entre sí es la de estructuras isomorfas, que por ser una de las claves del pensamiento matemático es también uno de los más fuertes instrumentos de la enseñanza. Según la escuela Bourbaki, «el objeto de la Matemática es el estudio de las estructuras matemáticas»; y dejando aparte esta opinión, sea o no la más acertada y precisa, revela por lo menos la importancia del concepto de estructura. Para hablar de estructura es necesario fijar un conjunto y establecer entre sus elementos una o varias relaciones. Por ejemplo: tomemos el conjunto $C = \{a, b, c, d\}$ y establezcamos entre sus elementos la operación descrita por la tabla de la figura 1; se podrá hablar entonces de la estructura de C.

Fig. I

$\oint$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Si es $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y la operación $*$ consiste en obtener de cada par de elementos el resto que da su suma al dividirla por 4 (así $2 * 3 = 1$), se obtiene la tabla de la figura 2 y se podrá hablar de la estructura de A.

Fig II

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tomemos ahora un cuadrado y llamemos:

m al giro de 360° respecto al centro, en cualquier sentido.

n al giro de 90° respecto al centro, en el sentido de las agujas del reloj.

p al giro de 180° respecto al centro, en cualquier sentido.

q al giro de 90° respecto al centro, en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

Tendremos entonces el conjunto B = { **m, n, p, q** } en que la composición de movimientos, que designamos por o, proporciona la tabla de la figura 3, pudiéndose hablar entonces de la estructura del conjunto B.

Fig. III

o	m	n	p	q
m	m	n	p	q
m	n	p	q	m
p	p	q	m	n
q	q	m	n	p

Como se ve, estas tres tablas son intercambiables así:

& ↔ * ↔ o
a ↔ 0 ↔ m
b ↔ 1 ↔ n
c ↔ 2 ↔ p
d ↔ 3 ↔ q

Por eso se dice que las estructuras adquiridas por A, B y C con las operaciones respectivas son estructuras isomorfas; basta estudiar una de ellas, por ejemplo la de C, cuyos elementos no han sido concretizados, para poder traducir los resultados en las otras dos, aparentemente tan inconexas como las dadas, al menos en lo que se refiere al tipo de elementos que manejan.

La estructura puesta en los tres ejemplos anteriores es del tipo de las llamadas estructuras algebraicas, donde el adjetivo significa que la relación establecida entre los elementos del conjunto tiene carácter operativo, es decir, que consiste en un procedimiento mediante el cual de cada par de elementos del conjunto se obtiene un elemento del mismo conjunto. Otras veces la relación establecida sirve para ordenar de algún modo el conjunto (como la relación «estar contenido» entre los subconjuntos de un conjunto), y entonces se habla de una estructura de orden. Finalmente, si la relación establecida hace referencia a los conceptos de entorno, continuidad, límite, etc., se dirá que tratamos con una estructura topológica. Cualquier estructura que se construya puede retrotraerse a una o varias de esos tipos.

Pues bien, resulta conocida de hace tiempo la tesis de Piaget según la cual los mecanismos mentales del niño pueden describirse mediante ciertas estructuras (también mentales) que en algún modo son comparables a aquellas otras matemáticas, aunque sin la pretensión de establecer entre unas y otras un completo isomorfismo. Así, las estructuras matemáticas tendrían un carácter «natural», resultando en gran medida una prolongación formal de las estructuras de la inteligencia. En realidad la tesis de Piaget se encuentra subyacente en la mayor parte de los procedimientos didácticos que se ensayan en la actualidad, y se comprende que la confluencia de los tres hechos que hasta ahora hemos marcado (interpretación constructiva y por tanto eminentemente activa de la Matemática, tendencia a la unidad con el concepto de estructura, interpretación de los trabajos de Piaget) conducen necesariamente a una modificación total de los procedimientos didácticos seguidos hasta hoy, así como que este campo de la Pedagogia de la Matemática está por eso mismo prácticamente inexplorado.

Y aún hay otras cuestiones sobre la Matemática actual que repercuten en su enseñanza y que no hemos considerado. Por ejemplo, que ese objetivo de unidad que parece intentarse a través del concepto de estructura está apoyado en el método puramente axiomático, hasta el punto que puede citarse éste como otro de los valores de la Matemática actual. Es cierto que la palabra axioma referida a lo que se acepta de partida sin demostración y en lo que se basa el razonamiento deductivo para desarrollar una teoría es muy vieja, pero ahora no se trata de esto. Se trata de que las estructuras de que hablamos se crean y diferencian en virtud de los axiomas impuestos de partida. Si éstos son pocos la estructura creada será observable en campos de la Matemática muy distintos, y a medida que aumentemos el número de axiomas, es decir, a medida que compliquemos la estructura creada, aquellos campos se irán singularizando. De modo que si los elementos de un conjunto C satisfacen a **n** condiciones pre-

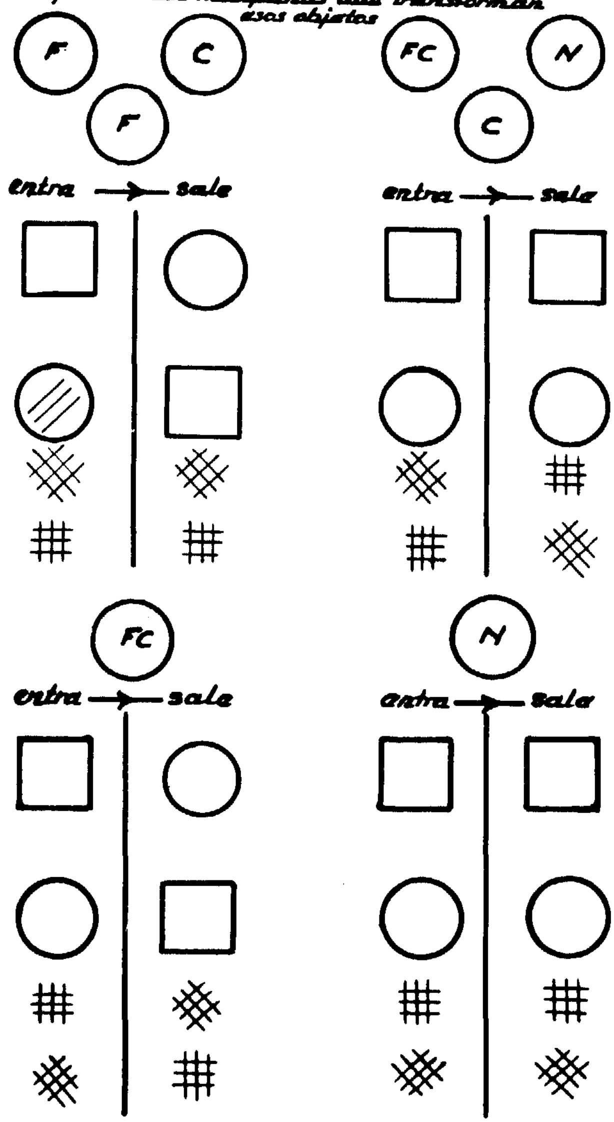
FICHA DE ACTIVIDAD Y CONTROL DE LA COMPRENSION

FICHA de INFORMACION

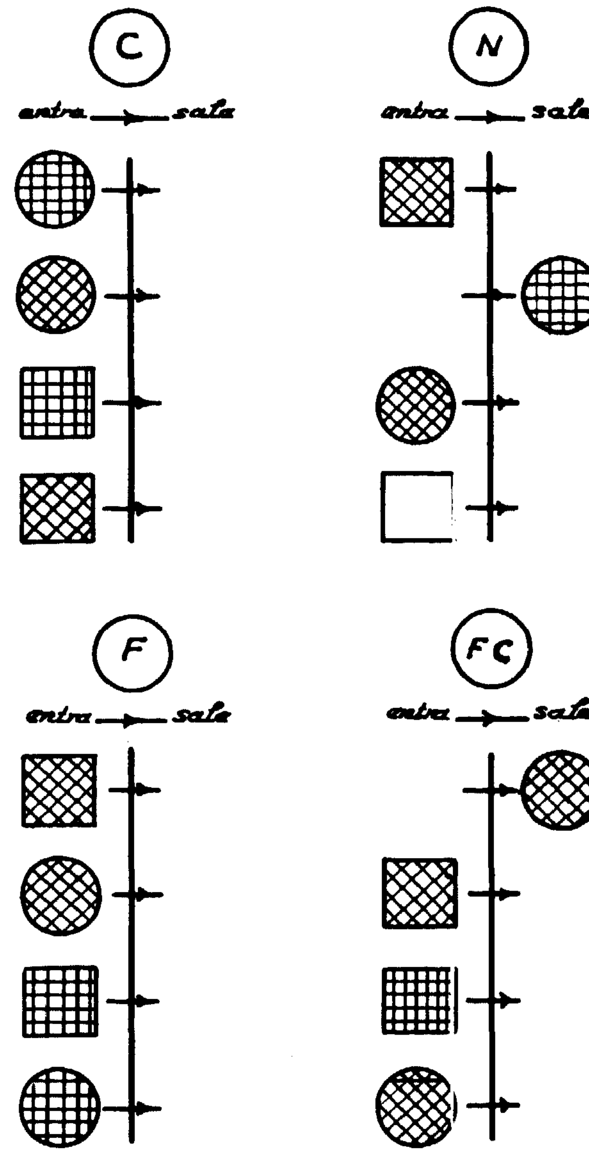
Fig. IV

Aquí tienes objetos:

Aquí tienes máquinas que transforman esos objetos



Usa las máquinas antes para completar lo que falta:



vias, al añadir una nueva condición independiente de las anteriores es de esperar que ya no sea satisfecha por todos los elementos de C, sino sólo por los de una parte de éste. Así el método axiomático actúa como un mecanismo de disgregación, de individualización, de caracterización.

Por otro lado, el concepto de axioma ha pasado a ser, quizá desde diferente punto de vista, algo así como regla permitida, encontrándose aquí la fuerte relación entre Matemática y Lógica. Siempre se ha reconocido este parentesco y afirmado que la Matemática es eminentemente lógica porque es rigurosamente deductiva. Ahora son los propios métodos matemáticos los que actúan sobre alguna parte de la Lógica, y las obras existentes con el nombre de Lógica Matemática son muchas. Sólo por poner un ejemplo de este entronque puede citarse la aportación de la Matemática a la programación de las computadoras y los interesantes y atractivos problemas que plantean los cálculos asociativos. He aquí uno de los motivos por los que cada día se insiste más en hacer aparecer en la Escuela Primaria el cálculo lógico en conexión con la clase de matemáticas.

No es cuestión ahora de realizar una exposición de las principales cuestiones de contenido matemático; pero hay que convencerse de que teoría de conjuntos (no tan fundamental hoy como suele decirse, aunque importantísima en Matemática), relaciones, aplicaciones, leyes de composición, estructuras, axiomatización de una teoría, cálculo lógico, por citar cosas que aparecen como nuevas en la Escuela Primaria, es algo de conocimiento indispensable a todo profesor, cualesquiera que sean sus alumnos, bachilleres o párvulos, aúnque no suficiente. Sin ello resulta **completamente imposible** realizar una enseñanza que sirva al alumno para algo. Y conste que no se trata de utilizar las palabras, sino el sentido que dan a la enseñanza todas esas ideas.

3. EL OBJETIVO DE LA MATEMATICA EN LA E. P. Y MODO DE ALCANZARLO

El objetivo que se propone la Matemática en la Escuela Primaria no es que el alumno adquiera mecánicamente el conocimiento de una colección de hechos y de relaciones matemáticos. En realidad son pocas las ideas a tratar, y se aspira más bien a que el niño adquiera el **hábito de pensar** sobre ellas; el gran valor de la Matemática en la Escuela consiste precisamente en que es un modo de pensar y, consecuentemente, un modo de actuar. Pero aprender a pensar exige tener oportunidad de construir el propio pensamiento. Al principio éste tendrá muchas lagunas, será reiterativo y al mismo tiempo impreciso, como ocurre en todo aprendizaje; no sabrá conducirse con soltura y rigor, etc. Pero la reiteración en el entrenamiento, el contraste que los alumnos hagan de sus mutuos modos de pensar, la búsqueda de contraejemplos, etc., lo irán perfilando. Este es un modo de trabajar que requiere por parte del maestro paciencia para esperar, habilidad para sugerir, imaginación para proponer situaciones aprovechables...

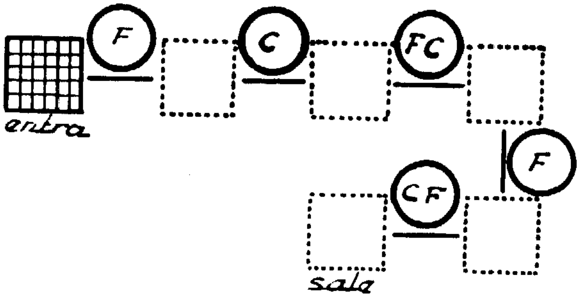
En la actualidad nuestros estudiantes no saben, en general, pensar a partir de una información escrita previa; ni en Primaria, ni en Media, ni siquiera en los primeros cursos de Universidad, salvo excepciones y refiriéndonos únicamente a informaciones de tipo matemático. Muchos métodos de enseñanza actuales tienden fuertemente, sin embargo, a que el alumno trabaje, sea individualmente, sea en grupos, a partir de informaciones que recibe por escrito. No han sido experimentados con la suficiente extensión como para preferirlos a otros, pero de entrada tienen la ventaja de habituar al alumno a esa necesaria facilidad de interpretar y explotar tales informaciones, así como saber aplicarlas a cuestiones que se le presenten. A modo de ejemplo se dan adjuntas algunas fichas individuales que intentan realizar este trabajo (1).

Las fichas de este estilo se continúan para descubrir la conmutatividad y asociatividad de la composición, la observación de *N* como neutra y la de que cada máquina tiene su inversa, que en este ejemplo es ella misma. En realidad ha sido una motivación aprovechable para dar ese sentido operacional al cálculo numérico, que se realiza partiendo de fichas parecidas en las que las máquinas son $+a$, $\times b$, $-c$, $:d$ (donde a, b, c, d, son números naturales), permitiendo así que los alumnos descubran, cada uno a su ritmo, las propiedades de las operaciones (asociativa, conmutativa, existencia de neutro...) y sus mutuas rela-

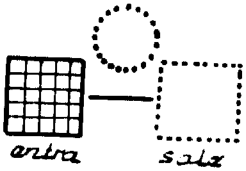
(1) Estas fichas son debidas a Nicole Picard, del Instituto Pedagógico Nacional de Francia. Algunos centros y manuales españoles las aprovechan en parte, lo que es cómodo; pero no citan su origen, lo que es feo.

Ficha de actividad y descubrimiento

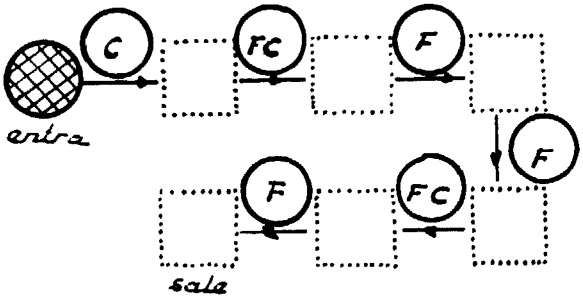
Aquí hay una cadena de 5 máquinas.



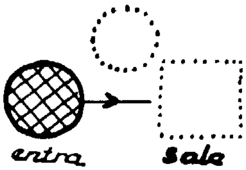
¿Se puede hacer el mismo trabajo con una sola máquina?



Aquí hay otra cadena: ésta tiene 6 máquinas.



¿Puede hacerse el mismo trabajo con una máquina sola?



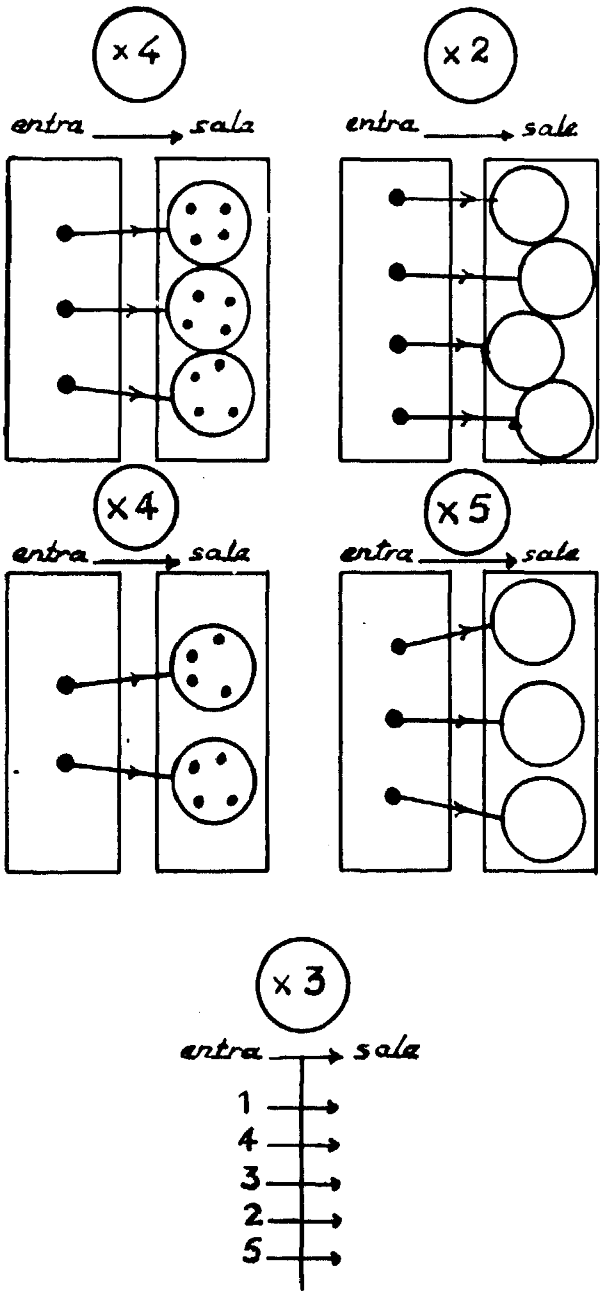
Inventa otras cadenas de máquinas y mira si cada vez puedes sustituirla por una sola.

FIG. VI

ciones (distributividad, pares de inversas). En la figura 7 aparece, por ejemplo, una primera ficha informativa sobre la multiplicación.

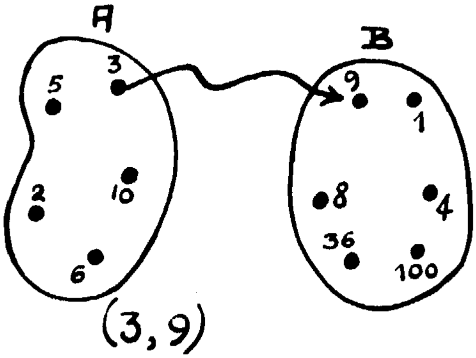
Este sistema de fichas no tiene edad dentro de la Enseñanza General Básica. Aunque las mostradas pertenecen al momento en que se investigan las propiedades de las operaciones, pueden emplearse en cualquier otro momento. En la figura 8 se presenta otra (del autor) que utilizamos a los once-doce años y que corresponde al juego de ellas en que se pretende fijar el concepto de función. Queda por decir

MAQUINAS DE MULTIPLICAR



que estas fichas, aisladamente utilizadas, tienen poco valor; hace falta una colección de ellas para acceder al concepto que se busca y otra colección para evaluar los resultados obtenidos. Muy probablemente, la técnica de la enseñanza programada será aprovechable en su confección, aunque el método tiene orientaciones distintas.

I. Aquí tienes el conjunto A y el conjunto B. Se ha trazado una flecha de 3 a 9, porque el cuadrado de 3 es 9. Más abajo se ha escrito la pareja (3, 9).



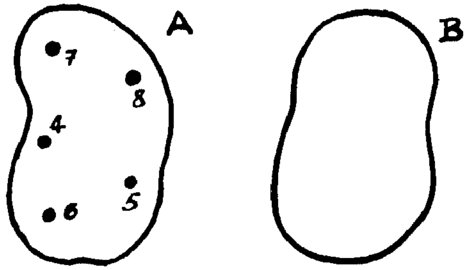
II. Traza las flechas posibles y escribe las parejas que resulten.

Di si puedes hablar de función.

Escribe los números que pertenecen al conjunto de definición.

Escribe los números que pertenecen al conjunto final.

III. Escribe en B los números que hagan falta para que puedas trazar una flecha de cada uno de los números de A. Escribe las nuevas parejas.



IV. Completa las parejas: (2, 4), (3, 9), (4,), (5,), (10,), (n,).

Tacha en rojo los pares que no pueden escribirse: (1, 1), (4, 8), (6, 35), (7, 49), (8, 64), (9, 80).

V. La pareja (4, 16) puede escribirse, porque $16 = 4^2$. La pareja (7, 49) puede escribirse, porque $49 = 7^2$. Sé que la pareja (x, y) puede escribirse; llena entonces lo que falta: $y =$

FIG. VIII

Este procedimiento de trabajo mediante fichas individuales tiene otras ventajas aparte de esa, a nuestro juicio grandísima, de habituar al alumno a interpretar con exactitud y precisión lo que un escrito le dice, falta de hábito que es, seguramente, una de las causas de que el libro de texto no sirva a casi ningún alumno para otra cosa que aprendérselo de memoria, y son:

— que permite a cada alumno adelantar a su ritmo propio;

— que evita la rémora que para la marcha de la clase como grupo suelen representar los alumnos más atrasados, por cuanto permite poner a éstos al mismo nivel que la mayoría en tiempo breve;

— que todos realizan algún trabajo con acierto;

— que permite un control auténtico de los avances de cada uno;
— que suministra una información clarísima sobre el modo de proceder de cada alumno;
— que las fichas son susceptibles de confección por el propio Maestro, conocedor de las necesidades de sus alumnos.

Por otro lado, exige del Maestro:

— una preparación concienzuda de cada ficha, sin perder de vista el objetivo final;
— disponer de fichas suplementarias para los alumnos más lentos de comprensión y de otras para aquellos más rápidos;
— tener una máquina multicopista que le reproduzca las copias.

Si nos hemos detenido un tanto, aunque sea esquemáticamente, en esta exposición del trabajo por fichas individuales, es porque permite al Maestro actuar con independencia de lo que los textos le marcan y queda libre para mejor dirigir a sus propios alumnos, a quienes, sin duda, conoce mejor que nadie. Pero como antes se ha dicho, no es todavía un procedimiento contrastado como mejor que otros; quizá, en el fondo, sea un método socrático disfrazado y la tal inventiva del alumno no exista. Efectivamente, ¿es que en las fichas que se ponen como ejemplo puede actual el alumno de algún modo que no sea el correcto? ¿Existe realmente la posibilidad de dirigir la acción y el pensamiento por caminos diferentes? He aquí un punto de investigación que cada uno puede hacer en su escuela... si tiene una multicopista.

1. PROCEDIMIENTOS UTILIZABLES EN NUESTRAS ESCUELAS

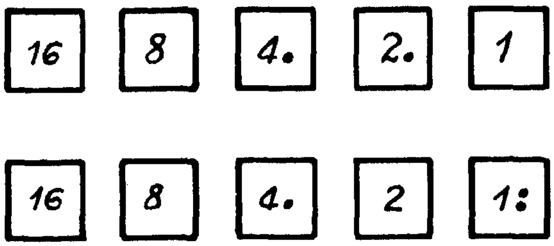
La mayor parte de los métodos que hoy se exponen como deseables presentan ciertos condicionamientos (de medios, de material, de mobiliario incluso) a los que el maestro casi nunca puede atender en su realidad escolar, pero esto no es obstáculo importante para poder realizar una labor plena de sentido y de eficacia. En efecto, aquellos medios pueden aparecer como deseables, pero resulta dudoso que sean necesarios e indiscutible que no son suficientes; en cambio, la auténtica preparación del Maestro y el interés por su propia labor resultan decisivos.

En la actualidad se da una circunstancia afortunada, y es que hoy más que nunca se ofrece al alumno la actividad matemática en forma de juego, es decir, que se le motiva la construcción matemática proponiéndole juegos. No es necesario recurrir a las bellas exposiciones de Claparède para justificarlo, principalmente porque el objetivo que se persigue con ello no está plenamente entre las reflexiones de aquél. Se le ofrece un juego porque éste exige un material sobre el que actuar, ya sea sensorial o mental, de igual modo que las teorías matemáticas actúan con ciertos elementos (puntos, números, movimientos, funciones, conjuntos, etc.); exige además unas reglas previamente aceptadas, como la Matemática impone de partida sus axiomas; finalmente, la aplicación de aquellas reglas a las manipulaciones del material sensorial o a las consrucciones mentales permite encontrar resultados, como la deducción lógica a partir de los axiomas permite formar la teoría matemática. Esto no quiere decir, claro está, que la matemática se entienda construible como un juego ni que sólo sean juegos lo que se proponga a los alumnos; quiere decir que tales juegos, si están apropiados a la edad, resultan una buena fuente de motivaciones y un recurso eficaz.

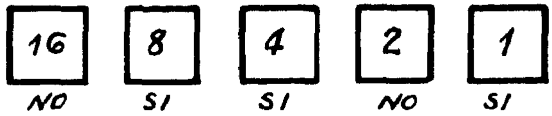
He aquí un juego apropiado a cualquier niño de nuestras escuelas, que cualquier lector puede experimentar en su clase y que lleva a manejar de modo natural la numeración de base 2: el maestro debe disponer de cuatro o cinco chapas de hojalata visibles para toda la clase cuando se cuelguen de la pizarra; tendrá además fichas de plástico o de madera en las que habrá pegado pequeños torozos de imán para que se adhieran a las chapas. Si no puede disponer de ese material usará cuadrados de cartón, en cada uno de los cuales habrá un orificio donde pueda encajar un corcho. Las chapas se presentan a toda la clase al objeto de dar simultáneamente las reglas del juego a todos los alumnos; aparecerán así (fig. 9):

Esto es un juego de feria; compro fichas y con ellas tiro sobre los cuadros. Me apunto la suma de los tantos que marque. Así, si pongo una ficha en el 8, otra en el 2 y otra en el 1, me apunto 8 + 2 + 1 tantos. **No se dan más reglas,** aunque sí los ejemplos necesarios. Todo lo demás irá siendo propuesto por los niños, bien espontáneamente o bien como consecuencia de sugerencias del Maestro. Como cada vez que se desarrolla esta actividad con niños distintos son también distintas las incidencias que surgen, sólo podemos dar a continuación alguno de los posibles matices.

Después de conocida por todos la regla inicial se propone que los niños, en equipos de cinco a seis, jueguen a este juego, disponiendo cada uno sobre la mesa de los cartones, que ahora pueden ser papeles, y de las necesarias fichas, monedas o piedras. Uno de los niños del equipo hace de juez y está encargado de escribir en un papel, sin que nadie lo vea, un número; cuando ya lo tiene escrito, cada uno de los demás hace su jugada, y aquel cuyo número formado coincida con el escrito es quien gana. El maestro observa por las mesas, y muy pronto verá el caso de dos niños del mismo equipo que han formado el mismo número, pero de distinto modo. Uno presenta, por ejemplo, la primera jugada de la figura 10 y otro presenta la segunda jugada de la misma figura.



Si, efectivamente, el número premiado es el 6, ¿cuál de los dos jugadores habrá ganado más? Las fichas se compran y, por tanto, valen dinero. ¿Quién ha gastado menos? ¿Quién ha ganado más? Hay que jugar con el mínimo de gasto, y esta observación hace decidir que, en adelante, no darán más de un golpe en cada casilla. El juego en equipos continúa hasta que el maestro ve que todos conocen ya la mecánica del mismo, y entonces propone lo siguiente: yo también quiero jugar en esa feria, pero como no puedo ir daré a uno la jugada que quiero hacer o, mejor, se la escribiré en un papel. Quiero reunir 13 puntos; ¿daré en el 16? ¿Y en el 8? ¿Y en el 4? ¿Y en el 21? ¿Y en el 1? Conforme se dan las respuestas el Maestro escribe bajo cada cartón las palabras SI o NO, de modo que en el ejemplo anterior aparecerá la figura 11.



Aparentando rectificar añade que escribirá siempre empezando en el primer SI, de modo que su escritura en el papel que dará va a ser SI, SI, NO, SI. ¿Qué quiere decir? Entendido esto prosiguen los niños de cada equipo escribiendo en esta clave, haciendo las jugadas correspondientes y autocorrigiéndose las posibles faltas. Finalmente, y para que la clase de escritura sea conocida sólo por nosotros, se propone que en lugar de cada palabra escribiremos una sola de sus letras, la más sencilla de ellas; así aparecerá la escritura I I O I para el ejemplo anterior, de la que muy fácilmente se pasa, debido al parecido tipográfico, a 1 1 0 1.

Obsérvese que respecto a esta escritura 1101 caben tres cuestionarios que conviene distinguir:

a) ¿Qué pone? (uno, uno, cero, uno).

b) ¿Qué significa? (SI en el 8, SI en el 4, NO en el 2, SI en el 1).

c) ¿Cuántos puntos ganará? (trece) (2).

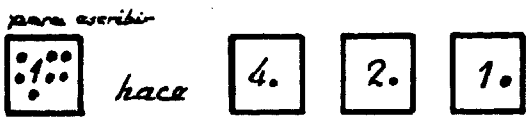
A partir de aquí los niños escriben la sucesión de los números naturales en base dos con toda facilidad: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000..., entendiendo su auténtico significado de SI para el 1 y NO para el 0; como es bien sabido, toda clasificación dicotómica puede expresarse numéricamente recurriendo a la base 2.

Queremos subrayar que todo lo anterior es tanto mejor construido y con más rapidez dominado cuanto menos automatismos de cálculo hayan sido dados al niño por pura memorización. Por ejemplo, si la actividad se desarrolla con niños de diez años (y los cuestiona-

(2) En realidad, la respuesta es: ganará uno, uno, cero, uno, ya que *trece* es el nombre del número que se escribe 13, precisamente en base diez.

rios vigentes es de nueve a diez años cuando hablan de «idea general de numeración»), al proponer la suma 1101 + 101 el alumno convierte cada sumando en base 10, de modo que suma 13 + 5 = 18, y luego retrocede escribiendo 18 en forma 10010; en cambio, el de seis a siete años descubre la jugada más barata 10010 sin ningún cálculo, y muchos niños aun antes de saber lo que significa 16.

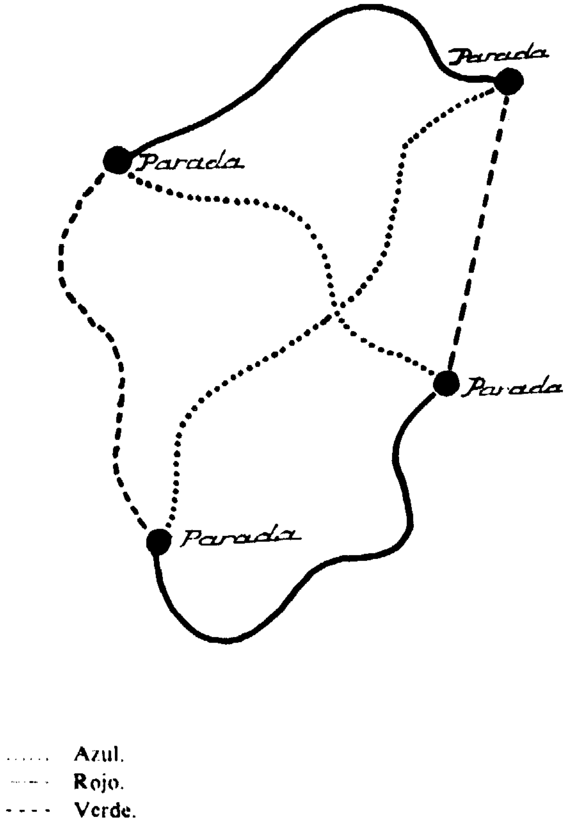
Aunque la actividad descrita tal y como se ha hecho es más adecuada para niños de cuarto curso, es más fácil y beneficiosa con los de primero, que es donde debiera estar incluido el tema, porque no hace falta que el alumno sepa sumar, sino que basta hacerle decidirse por «la jugada más barata», lo que se traduce por el cambio de dos fichas de una casilla por otra en la casilla inmediata de su izquierda, de modo que ocurre lo que se describe en la figura 12.



Procediendo así, esta actividad hace simultanear la comprensión de la escritura y la adición. Queda por advertir que la cuestión ha de tener obligadamente mayor extensión, hasta provocar con juegos análogos el conocimiento de qué es la numeración y cómo hay tantos sistemas cuantos se quieran, así como el modo de formarlos; pero ha sido puesta ahora solamente como ejemplo del tipo de juegos a proponer, muy lejos de lo que puede entenderse por «motivaciones a partir de experiencias de la vida real» y perfectamente posibles en cualquiera de nuestras escuelas.

A continuación se expone un segundo ejemplo de situación en forma de juego y que es susceptible de amplias derivaciones. Es desarrollable con alumnos de doce-catorce años que pueden ya razonar sobre hipótesis verbales, sobre todo si están representadas por imágenes concretas.

La situación es ésta: por mi barrio (o mi pueblo o mi calle) pasan tres líneas de autobuses: la línea roja, la línea azul y la línea verde, que llevan los carteles R, A, V, respectivamente, y cuyos trayectos son los del dibujo (figura 13).



Cuando llega un autobús, el viajero que está en la parada tiene dos opciones, que son dejarlo pasar o subirse a él. Este descubrimiento suele ir precedido de una corta discusión, pues hay quien dice que toma siempre el autobús aunque vaya lleno, mientras que otro le argumenta que puede ocurrir que el autobús que llega no sea el que espera. Entonces los niños realizan cuantos viajes deseen en el dibujo, y una vez familiarizados con la situación se pasa a simbolizar las combinaciones posibles, comenzando por la de solo dos viajes. Para ello, R quiere decir no ya el autobús de la línea roja, sino el hecho de viajar en él, así como A y V significarán el viajar en una u otra de las restantes líneas y N el no subir. Para expresar que viajar en el autobús rojo y luego en el azul equivale a un solo viaje en el verde, escribir AoR = V, interpretando el símbolo **o** como «después de». Realizadas las 16 operaciones posibles se escribe en una tabla de doble entrada, encontrando

o	N	R	A	V
N	N	R	A	V
R	R	N	V	A
A	A	V	N	R
V	V	A	R	N

Como se ve, estamos haciendo que el niño trate con una estructura de grupo conmutativo, en especial con el llamado grupo de Klein, que es el modo como se organizan las operaciones entre proposiciones en la Lógica y cuya forma quiere ver Piaget también en el modo como se relacionan las transformaciones mentales que el niño puede realizar a partir de los once-doce años.

La actividad puede derivar a observar la asociatividad, la existencia de elemento neutro y de un simétrico para cada uno, así como la conmutatividad por tratarse de un grupo con cuatro elementos. Puede también derivarse hacia la investigación de otros grupos isomorfos mediante situaciones parecidas, lo que llevará a poder extraer las condiciones que ha de reunir una tabla para llamarla de grupo.

Podemos también derivarla hacia la iniciación con los cálculos asociatitvos, lo que resulta en la práctica a los niños sumamente entretenido. Para ello comenzamos por hacer que sobre el dibujo se abrevien lo más posible viajes muy largos en los que intervengan muchos autobuses. Por ejemplo, se comprueba que el viaje ARRRVAVAVVRRVA se reduce al A solamente, y que el RAVVAVRAVRARAR se reduce al V; se buscan después reglas que nos permitan saber si dos largos viajes son equivalentes, para lo que se necesita observar las sustituciones posibles. Para ello elegimos dos líneas, por ejemplo A y V, encontrando que:

a) en toda palabra (que es el lenguaje del cálculo lógico, en éste casi fácilmente aceptado por los niños) se puede alterar el orden de letras a voluntad;

b) dos letras consecuetivas pueden sustituirse por una N;

c) dos N consecutivas pueden borrarse;

d) R puede sustituirse por AV.

Como se ve, conservamos el apoyo experimental, porque siempre puede recurrirse a traducir las letras por sus significados, pero la mayor parte de los niños convierten esto en un cálculo simbólico; además, son muchos los capaces de encontrar razonadamente la paridad que han de tener las letras en sus apariciones para que una larga palabra equivalga a otra preestablecida.

Quizá algún lector se pregunte que a qué viene hablar de grupos, de isomorfismos, de cálculos asociativos en la Escuela Primaria. Aunque se trata de auténticos valores de la Matemática, también los especialistas, es decir, lo que la gente llama matemáticos puros, suelen poner reparos iniciales cuando se habla de tratar en la Escuela Primaria cuestiones que consideran inaccesibles en todo su rigor al alumno de esa edad. Es muy cierto que en tales condiciones de rigor hay conceptos inalcanzables antes de los catorce años; pero cuanto más abstracta sea una idea más necesaria será una previa experimentación concreta sobre los elementos que la forman. Los estudios de psicopedagogia lo han probado muchas veces y las abundantes experiencias que existen por el mundo lo confirman. Los trabajos de Piaget, varias veces citados aquí, así como los de Fletcher, Dienes, Cuisenaire, Gategno, Picard, etc., reiteran una y otra vez lo mismo: el camino de acceso a la abstracción empieza mucho antes que el alumno llegue a la edad mental adecuada para alcanzarlo y exige pasar por etapas previas de concretizaciones que le familiaricen con los componentes de aquel concepto. De otro modo, la enseñanza pasa de un empirismo a rajatabla a una completa abstracción, en oposición completa al desarrollo de las estructuras y mecanismos mentales del alumno. Y luego buscamos frases vacías pretendiendo encerrar en ellas una dificultad intrínseca del alumno para no reconocer que ha sido el profesor y el sistema de estudio, desde la escuela maternal a la Universidad, quien la ha provocado. «Bloqueo afectivo», «shock mental», «pasividad intelectual», son tres ejemplos de lo que decimos.

5. LA ACTUACION DEL PROFESOR

Los razonamientos anteriores llevan a reconsiderar los modos de actuación del Maestro ante la clase que hasta ahora seguimos. El profesor viene siendo la persona de autoridad indiscutida que decide y da normas. Ha procurado reflejarse en el alumno y conseguir que éste razone según las directrices que le marca. El prototipo de este modo de actuar es el método heurístico (en el sentido de socrático) en el que el niño recorre un camino previamente acotado. En él se encadenan las observaciones y conclusiones según una estrategia mental deductiva que es precisamente la del profesor, y ésta no tiene por qué coincidir con la de todos los alumnos. En esta afirmación está implícito el reconocimiento de que, efectivamente, no existe un camino único para cada meta; sobre este punto otra vez los estudios de muchos psicólogos parecen concluyentes. Por este mismo motivo es dudoso que la enseñanza programada resulte eficaz en Matemáticas al salirse de la mera información, aunque en esa técnica queda todavía mucho por descubrir y perfeccionar.

Si se persigue que el alumno construya matemáticamente, lo habrá de hacer según su propia estrategia, y entonces la función del profesor será distinta de la tradicionalmente admitida. Deberá crear situaciones de trabajo personal o en pequeños grupos para que la construcción mental se realice por el camino que resulte óptimo para el alumno. Esto no es nada de fácil y exige una fuerte preparación tanto en Matemáticas como en los procedimientos didácticos. Una preparación fuerte en Matemáticas porque los caminos seguidos por el alumno le pueden ser inéditos y ha de poder comprender con rapidez todas sus consecuencias y derivaciones, ha de saber si ese ángulo de ataque que efectúa el alumno es inadecuado o, por el contrario, susceptible de explotarse para llegar aún más allá del objetivo inicial (3).

Por otra parte, como cada alumno trabaja a su propio ritmo, no todos llegan al mismo punto en el mismo tiempo, y resulta casi indispensable un cambio de impresiones en la clase, lo que plantea al Maestro dificultades para encontrar el junto punto de equilibrio entre lo que entendemos por disciplina y la libre exposición de ideas, entre el diálogo eficazmente espontáneo y el barullo ininteligible.

De todos modos, el maestro ha de abandonar en Matemáticas el método exclusivamente expositivo y dogmático apoyado fundamentalmente en el verbalismo. Los motivos que obligan a este abandono se han expuesto muchas veces y no es cuestión de repetirlos aquí, pero el nuevo modo de actuar no es de fácil acomodación, y para quedar en el punto justo es necesario estar convencido de que la exposición únicamente verbal no resulta eficaz.

6. NECESIDAD DE UNA PEDAGOGIA ESPAÑOLA DE LA MATEMATICA

Los métodos a que se ha hecho alusión pretenden que el niño, en la mayor medida en que pueda hacerlo aisladamente, sea quien investigue, quien construya y quien descubra. Queda mucho por aclarar y mucho por ensayar en este campo de la Didáctica matemática. Efectivamente, cada vez se ve más claro que la Pedagogía de la Matemática se va convirtiendo en una parcela independiente de la Didáctica General, o por lo menos en una parcela autónoma y en la que hay mucho por hacer.

A nuestro juicio, esta situación es una oportunidad que se ofrece para comenzar a crear una Pedagogía Matemática auténticamente española. En la actualidad y por lo que se refiere a la enseñanza hasta los catorce años, no la tenemos, y no ciertamente por falta de voluntad de los Profesores de Normal, todos los cuales, mediante un trabajo personal no siempre fácil, poseen completa información de los métodos actuales. Pero no basta con tener información completa de lo que se hace por el mundo porque la idiosincrasia de nuestros alumnos, las peculiaridades de nuestras escuelas, la orientación educativa general y hasta la organización administrativa de nuestro país nos son propias, como ocurre por otra parte en los demás.

Aquella información es necesaria, entre otras cosas, para no descubrir lo que ya sabe todo el mundo; pero con ello no se hace gran cosa, como no sea autoimponerse una dependencia intelectual inevitable. No se puede confundir la información con el descubrimiento, y para conseguir éste resulta imprescindible una previa experimentación con los niños, pues así como en Matemática pura no hay más prueba que la demostración, en Didáctica no hay más demostración que la prueba con los alumnos. Sin embargo, esta experimentación sistemática no puede hacerla el profesor de Normal porque la organización actual no se lo prohíbe, pero se lo impide.

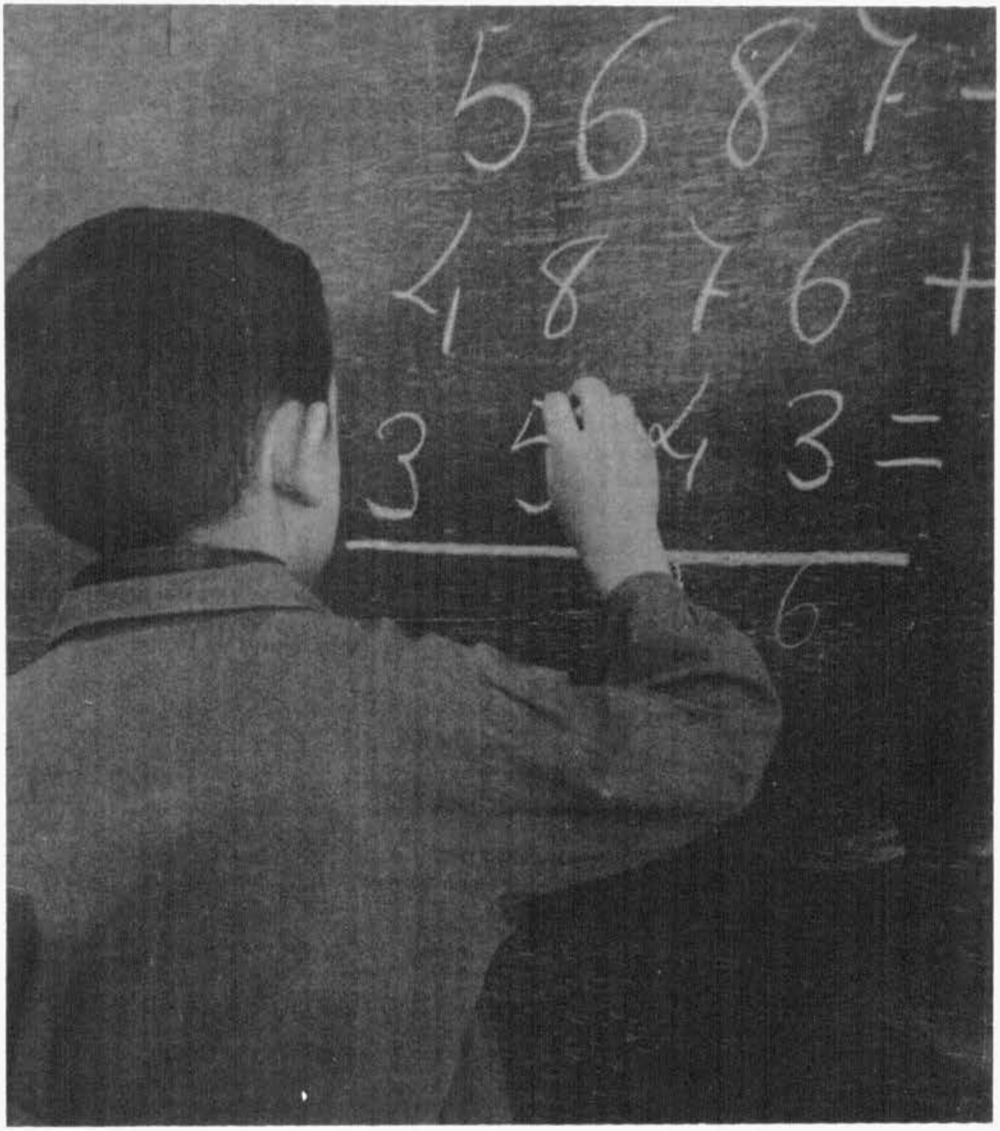
Por otro lado, una pedagogía nacional podrá

(3) Frente a esto, dos opiniones escritas en documentos que aún podemos leer: una, en la que se propone que los alumnos mayores se ocupen de los más pequeños para resolver el problema escolar, y otra, en la que se dice, sin más argumento, que un curso y medio de clase alterna es demasiado tiempo para dedicarlo a la didáctica de las Matemáticas.

caracterizarse por los modos de actuación de las escuelas genéricas, y si éstos han de cambiar tenemos una espléndida ocasión para que siquiera por una vez la orientación y las normas las den los especialistas, no los que tienen a gala desconocer las Matemáticas o los que tienen de ellas la referencia de un corto cursillo en algún lugar del extranjero, o la de unos breves apuntes de su Didáctica dictados por un profesor que no es de Matemáticas.

En realidad, lo necesario es crear condiciones de trabajo. Condiciones óptimas para la información del Magisterio (de todo el Magisterio), para la investigación de los especialistas (de todos los especialistas), para la formación de equipos de experimentadores (de todos cuantos deseen experimentar).

Cómo podría organizarse todo ello, cómo podría aspirarse a una Pedagogía Matemática netamente española, cómo podría conseguirse de nuestras escuelas un mayor rendimiento cae fuera de las intenciones de este trabajo.



Escuela unitaria de niños de Cueva de la Mora. ALMONASTER LA REAL (Huelva).

Amplitud de la Matemática Moderna: Referencia especial a la geometría y vectores

Por CONSTANTINO MARCOS
Licenciado en Ciencias Físicas

I. EL CAMPO DE LA MATEMATICA MODERNA

El término *matemática moderna* tendrá diferente significado para personas distintas. Aquí usamos ese término para referirnos esencialmente a las ideas matemáticas desconocidas (o no ampliamente aceptadas) hasta hace unos cien años y que han adquirido gran desarrollo en los últimos cincuenta años.

Entre estas ideas son notables los fundamentos lógicos de las matemáticas, el álgebra abstracta, la lógica simbólica o álgebra de proposiciones, la teoría contemporánea de la probabilidad y deducción estadística.

Más especialmente, este nuevo enfoque se refiere al desarrollo histórico de los sistemas de numeración; a la evolución del concepto de número; al papel de los postulados y definiciones en las matemáticas; a la generalización, abstracción y formalismo; a la naturaleza de la demostración matemática; a la intuitiva teoría de los conjuntos; a los símbolos, relaciones y operaciones; a la base lógica del sistema de números; a la medición; a las aproximaciones; a las variables y funciones; a los conceptos estadísticos.

Esta evolución rápida de la ciencia matemática, el desarrollo considerable de sus diversas ramas, tanto aquellas que interesan a las aplicaciones de las ciencias físicas, humanas y económicas, como a las partes más profundas de las investigaciones teóricas, han creado un peligroso hiato entre la ciencia viviente, es decir, entre la ciencia que se hace y la ciencia que se enseña en las clases.

Este desfase es ciertamente inevitable entre la formulación audaz de las nuevas ideas, que permiten progresar a la investigación, y la utilización pedagógica de algunas de estas ideas, que se consideran fecundas y asimilables a un nivel determinado de la formación de los alumnos. Aunque este desfase no signifique retraso o esclerosis de la enseñanza.

Para que los buenos efectos de las nuevas ideas se hagan sentir en las clases, evidentemente es necesario, en primer lugar, que los profesores estén exactamente informados sobre el progreso de las matemáticas.

Además se necesita que una experimentación pedagógica permita extraer las grandes líneas de una concepción didáctica, que cada profesor adaptará entonces a las condiciones en que se encuentra para enseñar.

También es necesario que este trabajo nunca se considere acabado; la ciencia continúa su vida; otras ideas, más fecundas aún, exigirán nuevas revisiones de los conocimientos adquiridos y de los métodos usados.

Es igualmente indispensable:

1.° Que un público más amplio que el de los solos especialistas esté informado de esta evolución de las ideas y de la profunda reforma de la enseñanza de las matemáticas que aquélla motiva, para evitar que los padres se opongan a que sus hijos sigan esta nueva orientación en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

2.° Enseñar las matemáticas sin separar artificialmente el aspecto "puro" y el aspecto "aplicado". Este es un punto extremadamente importante. Hay que multiplicar las motivaciones reales en el aprendizaje del pensamiento matemático y conseguir el mayor número posible de espíritus aptos para captar lo que puede ser matematizado en una situación real y observar la ayuda matemática que se puede aportar.

3.° Enseñar las matemáticas de manera dinámica, manteniendo constantemente en actividad la inteligencia de los alumnos para que aquélla se desarrolle y fortifique.

¿Qué causas han originado la matemática moderna? ¿Cuál es la base común a todas sus ramas? Responderemos brevemente a estas dos cuestiones.

La matemática moderna ha surgido como superación de la matemática clásica para atender y poder resolver cuestiones originadas en los más diversos campos de las matemáticas y que la matemática clásica no podía resolver. A la matemática moderna corresponde, en efecto, lograr una fundamentación y sistematización precisa para el estudio de los *conjuntos* en que se definen las operaciones y, sobre todo, las reglas de cálculo en aquéllos.

Porque en geometría y en análisis, en el cálculo diferencial e integral, se opera en realidad sobre conjuntos infinitos. Y cualquiera que desee conocer a fondo las diversas ramas de las matemáticas debe asimilar la teoría de los conjuntos, que es fundamento común.

Ciertas ideas en matemáticas, a causa de su esfera de acción y sencillez, constituyen manantiales de incalculable riqueza. La teoría de los conjuntos, que es una de tales ideas, fue desarrollada por Jorge Cantor (1845-1918), filósofo y matemático alemán, profesor de la Universidad de Halle desde 1878 al 6 de enero de 1918, en que murió.

Pocos conceptos en los últimos cien años han producido tan gran impacto sobre las matemáticas como la noción de conjunto. La teoría de los conjuntos ha contribuido a establecer una base, que aclara y unifica las matemáticas, ya desarrolladas. Suministra un lenguaje y un simbolismo que le permite utilizar lo clásico y lo nuevo, examinar conceptos ya conocidos y considerar nuevos e interesantes descubrimientos de la matemática superior.

Pues mediante la teoría de los conjuntos se generalizan las reglas de cálculo para los números finitos más allá de su dominio. Y se puede calcular con los conjuntos infinitos, aplicando los mismos métodos que para los conjuntos finitos.

Merced a algunas nociones bien definidas, tales como la correspondencia biunívoca, la potencia de un conjunto, su numerabilidad, etc., para la teoría de los conjuntos no existe barrera fundamental entre el finito y el infinito matemático y nos permite comprender los grados del infinito.

Como ejemplo de la utilidad de la teoría de los conjuntos y de cómo la matemática moderna resuelve cuestiones que parecen infantiles, pero que la matemática no da respuesta satisfactoria, hagamos estas preguntas:

¿Hay más números enteros que números pares?

¿Una recta ilimitada contiene más puntos que un segmento de recta?

¿Un plano contiene menos puntos que el espacio?

¿El conjunto de los números racionales es mayor o menor que el conjunto de los números irracionales?

¿Qué significan los símbolos: $\infty + 5$, $\infty \cdot 9$, $\infty 2$?

La teoría de los conjuntos permite dar a éstas y a otras cuestiones respuestas claras y precisas matemáticamente. Pues la teoría de los conjuntos, que tienen por punto de partida cosas intuitivas y concretas, se eleva, sin embargo, a un alto nivel de abstracción.

El renovador de la enseñanza de la matemática en Europa, Papy, profesor en la Universidad de Bruselas, al terminar una conferencia que dio a un grupo de profesores en París hace muy pocos años, les dijo: "Vosotros, que durante muchos años habéis explicado matemáticas, ahora tenéis que volver a empezar a estudiar." Lo cual es cierto; primero, porque hay que abandonar, en cierta medida, procedimientos y métodos tradicionales a que nos hemos acostumbrado desde la infancia; segundo, porque hay que adquirir otros nuevos, pero que sin darnos cuenta de ello, al principio de nuestra renovación, los sustituimos por los antiguos en la resolución de las cuestiones y problemas.

Pero la renovación es necesaria.

II. BASES DE LA GEOMETRIA MODERNA

II.1. *Geometría abstracta*

Durante unos mil trescientos años siguientes a la era de los matemáticos griegos nada de gran importancia se llevó a cabo, hasta que a mediados del siglo XVII Descartes inventó la geometría analítica.

Tan importante fue esta invención, que condujo a los comienzos de la matemática moderna (cálculo y análisis), y fue eclipsada por un descubrimiento, aún más trascendental, hacia mediados del siglo XIX, el de la geometría no-euclídea, llevada a cabo, en rápida sucesión, por Ganss, Lobachevsky y Bolay.

Sin entrar en detalles, basta decir que este desarrollo es quizá uno de los mayores logros de la inteligencia humana; *liberada de las restricciones del postulado de la paralela permite, al finalizar el siglo, hacer de la geometría un sistema, basado en postulados abstractos, completamente formal y lógicamente riguroso.*

Este avance se debió al trabajo pionero, entre los años 1890 al 1900, de Pash, Peano, Hilbert, Veblen, Huntington y otros.

Al distinguir entre *geometría concreta o física*, por una parte, y *geometría abstracta o formal*, por otra, hemos de notar que cuando la mente generaliza experiencias, alguna abstracción puede también tener lugar. Aun nociones aparentemente sencillas, tales como la de una línea recta, pueden conducir a una interpretación ideal o de pura abstracción.

Así, una línea recta no tiene anchura, ni espesor, ni peso, ni extremos.

No hay líneas rectas. Formamos ideas acerca de estas imposibilidades no existentes y las trazamos en papel, pero no existen.

Análogamente sucede con el punto: éste no tiene extensión, ni existencia, ni definición.

Toda ciencia matemática o sistema axiomático comienza con un número relativamente pequeño de palabras que se dejan indefinidas, aunque podemos desear explicarlas o *interpretarlas* intuitivamente. Aunque no se dan definiciones formales de estas palabras, sin embargo están sujetas a las restricciones impuestas sobre ellas por los postulados dados después.

En este punto debe entenderse que la elección de términos indefinidos, como también la elección de los postulados, puede estar determinada por ciertas condiciones que quizá puedan hacer violencia al sentido matemático de adecuación, pero las cuales se conciben justificables por motivos pedagógicos. Así, el *matemático maduro* está decidido a reducir a un mínimo el número de términos indefinidos y de proposiciones no demostradas.

Pero bien puede ser que *el principiante no maduro* se beneficie absteniéndose de tal rigor matemático por el momento y adopte algunos postulados adicionales al principio, aunque estos postulados puedan derivarse de los otros.

Teniendo presentes estas consideraciones, sugerimos *la siguiente lista de términos indefinidos y postulados* para poner la geometría plana elemental sobre una base rigurosa razonable para el *principiante*.

Términos indefinidos

1. Punto.	4. Sobre.	7. Igual.
2. Recta.	5. Entre.	8. Congruente.
3. Plano.	6. Número	9. Distancia.

Postulados

P.1. *Dos puntos distintos determinan una recta.*—Es decir, dados dos puntos distintos, A y B, existe una recta y sólo una que contiene ambos puntos.

P.2. *Dos rectas distintas tienen, a lo más, un punto común.*—Este postulado no dice que dos rectas distintas *deben tener un punto común.* Pueden no tener punto alguno común; pero si lo tienen, no será más que uno.

P.3. *Toda recta puede ser provista de escala graduada.*—Cada punto de una recta puede numerarse de modo que los valores absolutos de los números diferencien las distancias medidas.

P.4. *Toda recta tiene dos lados.*—Una recta *separa* o divide el plano en dos partes; del mismo modo, un punto sobre una recta divide a ésta en dos partes, llamadas *rayos o semirrectas.*

P.5. *Todo círculo puede ser provisto de una escala graduada.*—Todos los rayos que tienen el mismo extremo pueden numerarse de modo que los números diferencien los ángulos medidos.

P.6. *Un triángulo está determinado cuando se dan dos ángulos y el lado común* ("a, l, a").

P.7. *Un triángulo está determinado cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido* ("l, a, l").

P.8. *Por un punto fuera de una recta existe una y solo una recta paralela a la dada.*—Es decir, dos rectas que se cortan no pueden ser ambas paralelas a la misma recta. Este es el famoso *Postulado de la paralela.*

II.2. *Los fundamentos de la geometría*

Una de las principales contribuciones al desarrollo de la geometría moderna fue la publicación de los *Fundamentos de la geometría*, por David Hilbert, en el año 1899. Su base de postulados de la geometría ha llegado a ser clásica. Es extraordinariamente rigurosa.

Hilbert emplea sólo cinco términos indefinidos: *punto, recta, sobre, entre* y *congruente.* Después enuncia quince postulados. Los dos primeros son esencialmente los mismos P.1 y P.2 anteriores.

Los cuatro inmediatos siguientes se refieren a las nociones de *orden* y estar *entre.* Aquí es donde se corrige la evidente endeblez lógica de Euclides. Estos cuatro postulados son como sigue:

1. *Si un punto C está entre los puntos A y B, entonces A, B y C están todos en la misma recta, y C está entre B y A, y B no está entre C y A, y A no está entre C y B.*
2. *Para dos puntos distintos cualesquiera A y B hay siempre un punto C, el cual está entre A y B, y un punto D, el cual es tal que B está entre A y D.*
3. *Si A, B y C son tres puntos distintos sobre la misma recta, entonces uno de los puntos está entre los otros dos.*
4. *Una recta que corta a un lado de un triángulo, pero que no pasa por cualquiera de los vértices del triángulo debe cortar a otro lado del triángulo.*

Estos cuatro postulados implican:

a) La extensión indefinida de una recta.
b) La existencia de un número infinito de puntos en una recta.
c) Que los puntos sobre una recta estarán en orden consecutivo y no en orden cíclico.

El cuarto postulado evita las dificultades lógicas que se presentarían en la demostración de muchos teoremas de no tener este postulado explícito.

Los seis postulados inmediatos se refieren al concepto de *congruencia.* Son bastante técnicos y refinados y no los estudiamos aquí. Baste decir que estos seis postulados vencen las dificultades lógicas, originadas por las ideas de *movimiento rígido* y *superposición*, tan ampliamente usadas en los desarrollos menos rigurosos de geometría.

El postulado trece es el postulado de la paralela.

Los dos postulados últimos se refieren al concepto de continuidad de una recta. Técnicamente establecidos, estos dos postulados podrían reemplazarse por un solo postulado, propuesto por otro matemático alemán, Richard Dedekind, y que puede enunciarse como sigue: *Si todos los puntos de una recta caen en dos conjuntos, tales que todo punto del primer conjunto está a la izquierda de todo punto del segundo conjunto, entonces existe uno y sólo un punto que crea esta división en dos conjuntos, esto es, corta a la recta en dos partes.*

Este concepto de continuidad hace posible la idea de medida. También nos permite establecer una correspondencia, uno a uno, entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta, haciendo así posible la geometría analítica.

III. INICIACION AL ESTUDIO DE LOS VECTORES

III.1. *Vectores-fila y vectores-columna*

Un vector es un solo objeto que necesita varios números para describirlo; por consiguiente, viene dado por una lista de números, llamados sus *componentes*. Estos pueden escribirse en fila o en columna, por ejemplo:

$$(3\ 5\ 0) \text{ o bien: } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al primero se le llama *vector-fila*, y al segundo, *vector-columna;* algunas veces es conveniente usar las dos clases. El *orden* de los componentes es importante: (3 5 0) no es el mismo vector que (3 0 5). Para un geómetra o un matemático técnico o un físico, los números ordinariamente serán distancias o coordenadas, de modo que un vector es una especie de indicación de caminar cierta distancia en una dirección definida: (3 —1 0) significaría *caminar 3 unidades en el sentido positivo del eje* x; *1 unidad en el sentido negativo del eje* y; *y 0 unidades en la dirección del eje* z. Para un algebrista un vector puede significar eso mismo, pero puede también ser cualquier lista de números. (3 5 0) puede significar: *3 empanadas, 5 peras y 0 plátanos ó 3 hombres, 5 niños y 0 mujeres* o también *3 libros, 5 bolígrafos y 0 lápices* o cualquier otra cosa que a un matemático le parezca conveniente o necesario.

Un vector es así una clase particular de *matriz;* un vector-fila con n componentes es una matriz $1 \times n$; un vector-columna con n componentes es una matriz $n \times 1$.

III.2. *Sumas*

Supón que vas a una tienda y compras 3 manzanas, 4 naranjas y 5 plátanos. Tu compra puede describirse como (3 4 5). Si también va tu hermano y compra 4 manzanas, 2 naranjas y 1 plátano, su compra es: (4 2 1). La compra total es 7 manzanas, 6 naranjas y 6 plátanos, esto es: (7 6 6). Por consiguiente, podemos escribir:

$$(3\ 4\ 5) + (4\ 2\ 1) = (7\ 6\ 6)$$

Los elementos individuales se llaman componentes del vector, y se dice que *la suma de dos vectores es el vector cuyos componentes son las sumas de sus respectivos componentes.*

Un vector es una especie de inventario.
Se tratan los vectores-columna de la misma manera.
Se define:

$$(u_1\, u_2\, u_3) + (v_1\, v_2\, v_3) = (u_1\, v_1\, u_2\, v_2\, u_3\, v_3);$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

III.3. *Multiplicación por un solo número*

Si dos personas van a la tienda y cada una efectúa el mismo vector-compra de 3 manzanas, 4 naranjas y 5 plátanos, entonces es evidente que su compra total es:

$$2 \times (3\ 4\ 5) = (6\ 8\ 10)$$

En palabras: *un vector se multiplica por un número cuando cada componente está multiplicado por ese número:*

$$k \times (v_1\, v_2\, v_3) = \ldots ?$$

$$k \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \ldots ?$$

Esta propiedad y la de la suma son las propiedades esenciales que pueden tener los vectores.

a) Si a es el vector $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$ y b es el vector $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots)$, entonces $a + b$ es el vector:
$$(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \ldots)$$

b) Si k es un número, entonces ka es el vector:
$$(ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \ldots)$$

Puede haber cualquier número de componentes, pero evidentemente siempre será el mismo número en cualquier conjunto de vectores de que se hable. También podemos escribir los vectores como filas o como columnas, pero *es necesario* escribir todos los vectores de la misma clase de igual manera.

Cuando se usa una sola letra para nombrar un vector, es conveniente escribirle *a*, y en imprenta se le escribe con negrita, **a**.

EJERCICIOS

1. Un sintonizador de radio contiene 3 lámparas, 12 resistencias, 10 condensadores y 4 bobinas. Expresa esto como un vector y di cómo obtienes los elementos necesarios para 50 sintonizadores.

2. Suma, donde sea posible, los siguientes vectores.

Si esto no es posible, di por qué:

a) $(2, 1, -1) + (0, 4, 3)$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + (3, -1)$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (5, -2, 4)$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

e) $(6, 4) + (0, 0)$ *f)* $(6, 4) + (-6, -4)$

g) $(3, -2, 5) + (-3, 3, -1)$

h) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\,(4, 0, -1)$ *b)* $2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ *d)* $2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1)$

g) $p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

III.4. *Vectores y traslaciones*

La aplicación más común de la idea de vector es a *la traslación.* Si aplicamos a un plano una traslación que mueva todo punto tres unidades paralelamente al eje x, entonces el punto (a, b) llega a ser $(a + 3, b)$ y éste puede obtenerse de añadir $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. (Escribimos el vector como columna para distinguirlo del par de coordenadas.)

De la misma manera, podemos aplicar una traslación que implique un desplazamiento de 3 unidades paralelamente al eje *ox* combinado con un desplazamiento de -2 unidades paralelamente a *oy,* esto es, un desplazamiento *hacia abajo* de dos unidades paralelo al eje *y.* Tal traslación (fig. 1) lleva el punto (a, b) al punto $(a + 3, b - 2)$; esto suma $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Evidentemente también lleva el origen $(0, 0)$ al punto $(3, -2)$ y ésta es la manera más fácil de identificar una traslación.

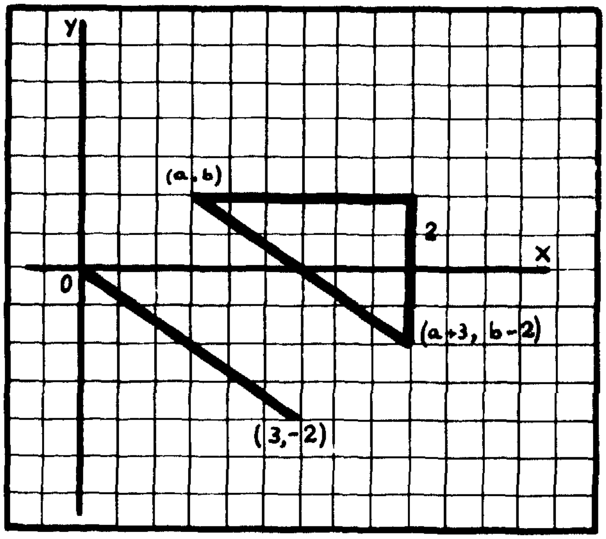


Fig. 1

Se ve que: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ahora hay que introducir algunos términos técnicos para hacer el asunto más preciso y evitar largas explicaciones.

III.5. *Vectores de posición*

El vector-desplazamiento de una traslación es un vector-columna, *cuyos componentes* son los componentes-distancia de la traslación en las direcciones de *ox* y *oy.* Por ejemplo:

La traslación de la figura 1, que lleva (a, b) a $(a + 3, b - 2)$, tiene los *componentes-distancia* $+3$ y -2 y su *vector-desplazamiento* es $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Este desplazamiento lleva el origen a $(3, -2)$ y el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ se llama *vector de posición* de este punto.

Es decir, el *vector de posición de un punto es el vector-desplazamiento de la traslación que lleva el origen a ese punto.* Así, el vector de (a, b) es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, porque para moverse desde $(0, 0)$ a (a, b) sumamos *a a* la coordenada *x y b a la coordenada y; damos un paso de longitud a* paralelamente a *ox* y de longitud *b* paralelamente a *oy.*

Se puede mirar esto de otra manera. Una traslación mueve todos los puntos del plano *la misma distancia* en la misma dirección (fig. 2). Aquélla lleva A a B, O a P, C a D, E a F, G a H. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{OP}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, son todos iguales y paralelos. Cualquiera de ellos se llama frecuentemente un *desplazamiento;* por ejemplo: A sufre el desplazamiento de $\overline{AB}$.

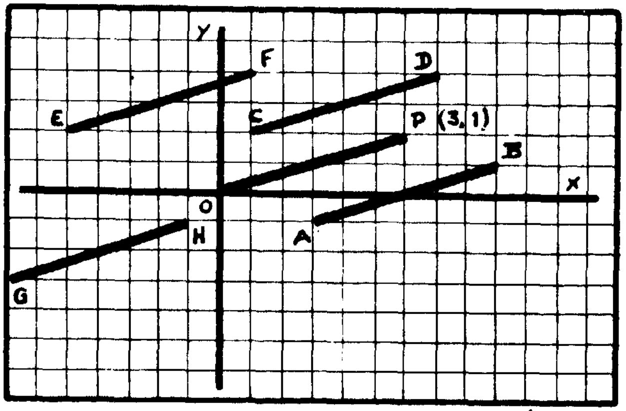


Fig. 2 *El vector* $\binom{3}{1}$

Entre estos desplazamientos uno es de particular interés: el que parte del origen O. Si éste es $\overline{OP}$, las coordenadas de P, es decir (a, b), determinan completamente la traslación $\binom{a}{b}$ es el *vector-desplazamiento* de la traslación y el *vector de posición de P*.

Se escribe $\mathbf{OP} = \mathbf{r} = \binom{a}{b}$ como nombres de este vector. Hay que tener presente que el vector describe la traslación de todo el plano, no sólo la de O. Cualquiera de los desplazamientos iguales $\overline{AB}$, $\overline{OP}$, $\overline{CD}$, ..., puede usarse para describir aquélla. En efecto:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OP} = \mathbf{CD} = \ldots = \binom{a}{b}$$

Estos son nombres del mismo vector.

La traslación con el vector-desplazamiento $\binom{3}{-2}$ lleva el punto (4, 5) al punto (4 + 3, 5 — 2), o sea (7, 3); es decir, se suma el vector-desplazamiento $\binom{3}{-2}$ de la traslación al vector de posición $\binom{4}{5}$ del punto, ya que

$$\binom{3}{-2} + \binom{4}{5} = \binom{7}{3}$$

el nuevo vector de posición es $\binom{7}{3}$ y el nuevo punto es (7, 3).

En la figura 3 se adopta un convenio útil; la suma de los dos vectores con una sola flecha es el vector con doble flecha.

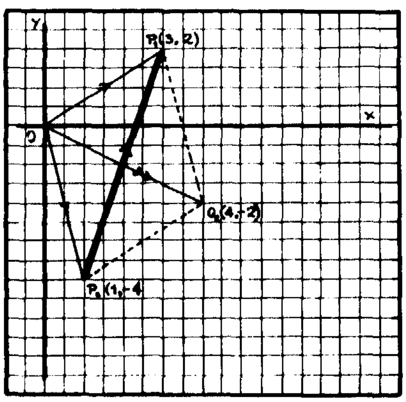


Fig. 4

Se puede escribir:

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PP'} = \mathbf{OP'}$$

con tal que esté claro lo que esto significa (la cuadrícula lo aclara).

EJERCICIOS

Escribir las imágenes de los siguientes puntos después de aplicarles la traslación dada por el vector $\binom{5}{-2}$

1. (2, 3).
2. (— 3, 4).
3. (0, 0).
4. (10, 10).
5. (— 5, 2).
6. (x, y).
7. La traslación $\binom{p}{q}$ ¿a qué punto lleva el origen?
8. Si una traslación lleva (0, 0) a $\binom{a}{b}$, ¿cuál es su vector?
9. ¿Qué traslación lleva (4, — 3) a (— 2, 5)?
10. ¿Qué traslación única tiene el mismo efecto que $\binom{3}{4}$ seguida de $\binom{-2}{1}$?
11. Sea O (0, 0), B (— 2, 3) y C (4, 5). Escribir los vectores de las traslaciones que llevan O a A (**OA**), A a B (**AB**) y O a B (**OB**). Comprobar que **OA** + + **AB** = **OB**.

III.6. *Sumas de vectores de posición*

Ya sabemos que el vector de posición de P (a, b) es el vector-desplazamiento que lleva el origen a P; sus componentes son las coordenadas de P. Escribimos este vector $\binom{a}{b}$ o **OP** y frecuentemente conviene designarle por una sola letra, **p**.

Si

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{OP}_1 = \binom{3}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{OP}_2 = \binom{1}{-4}$$

será:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \binom{3}{2} + \binom{1}{-4} = \binom{4}{-2}$$

que es el vector de posición de un punto Q (4, — 2) (figura 4).

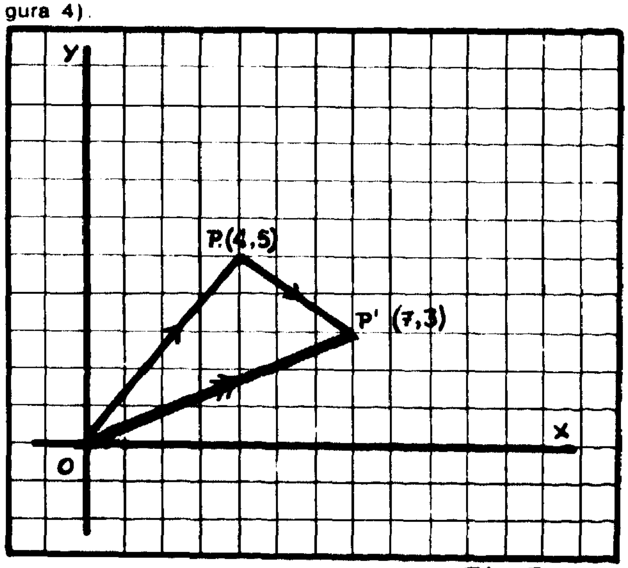


Fig. 3

Como la traslación que aplica O en P_2 aplica P_1 en Q, la figura OP_1QP_2 es un paralelogramo.

La misma figura 4 nos dice que:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$$

Enuncie el lector una regla para hallar:

$$\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2$$

III.7. *Diferencias*

Definida la suma de $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, veamos cómo se define la diferencia $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Recordemos lo que significa, por ejemplo, -5; -5 es el número que sumado con 5 produce 0. Y el 0 es el elemento neutro de la adición, el número que sumado con otro le deja a éste invariable; $0 + n = n$, cualquiera que sea n.

También existe un *vector cero*, una traslación nula; ésta aplica 0 en (0, 0); éste es el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Y así se tiene:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a \\ b-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si hacemos $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, entonces será $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -\mathbf{p} = \mathbf{p}_2$ y $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Es decir, la diferencia de dos vectores $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ es un vector que sumado con el vector sustraendo nos da el vector minuendo.

Geométricamente, si $\mathbf{p}_1$ es el vector de posición P_1 y $\mathbf{p}_2$ es el vector de posición P_2, $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ es el vector de la traslación que lleva P_2 a P_1 y $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ es el desplazamiento que lo representa (fig. 4).

III.8. *Multiplicación por un número*

Si

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{OP}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$2\,\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad 3\,\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente.

Estos son los vectores de posición de puntos que están en la recta OP_1, pero distan, respectivamente, doble y triple del origen que el punto P_1 (fig. 5)

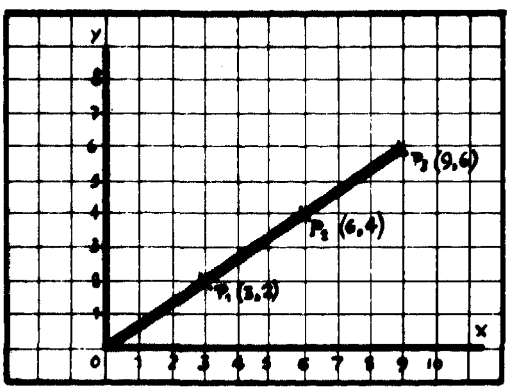


Fig. 5

Traza el triángulo OPQ, donde P es (3, 2) y Q es (1, 4), y multiplica los vectores de posición de cada punto por 3, obteniéndose así un triángulo OP'Q'. ¿Qué relación hay entre estos triángulos?

III.9. *Leyes conmutativa, asociativa y distributiva*

Hasta ahora hemos definido dos operaciones sobre los vectores: *a)* adición, *b)* multiplicación por un número. Estas operaciones sobre vectores satisfacen las mismas leyes que los números ordinarios.

Estas leyes son:

1.ª $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$.
2.ª $\mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_3$.
3.ª $k\,(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = k\mathbf{p}_1 + k\mathbf{p}_2$.
4.ª $(k + 1)\,\mathbf{p} = k\mathbf{p} + 1\,\mathbf{p}$.

Es fácil comprobar la verdad de estas leyes mediante las definiciones de adición y multiplicación de vectores. Lo que significan geométricamente está sugerido por algunos de los ejercicios siguientes:

EJERCICIOS

1. Si $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OQ}$, hallar las coordenadas de Q en cada uno de los siguientes casos y establecer las posiciones de P_1, P_2 y Q en un diagrama:

a) P_1 es (1, 4), P_2 es (—2, 3).
b) P_1 es (2, —1), P_2 es (—3, 1).
c) P_1 es (0, 3), P_2 es (0, —3).
d) P_1 es (—4, 0), P_2 es (—1, 0).
e) P_1 es (4, 5), P_2 es (—3, —2).

2. En cada parte del ejercicio 1 da las coordenadas de R y S si $\mathbf{OR} = 2\,\mathbf{OP}_1$, $\mathbf{OS} = 2\,\mathbf{OP}_2$. Comprueba que $\mathbf{OR} + \mathbf{OS} = 2\mathbf{OQ}$.

3. Supongamos que P_1 es (1, 2), P_2 es (—2, 1) y P_3 es (—3, —4).

a) Hallar Q si $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2$ y construye su diagrama.

b) Hallar R si $\mathbf{OQ} + \mathbf{OP}_3 = \mathbf{OR}$ y construye R en el mismo diagrama.

c) Hallar S si $\mathbf{OP}_2 + \mathbf{OP}_3 = \mathbf{OS}$ y construye S en el mismo diagrama.

d) Si $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OS} = \mathbf{OT}$, ¿dónde está T?

4. Escribir las coordenadas de R en cada parte del ejercicio 1 si $\mathbf{OP}_1 - \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OR}$ y situar la posición de R en un diagrama.

5. Supongamos que A es (4, 0), B es (2, 6) y $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OC}$. Hallar las coordenadas de C y sitúa C en un diagrama. ¿Dónde está C respecto a A y B?

6. ¿Qué son $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $2\,\mathbf{p}$, $2\,\mathbf{p} - 3\,\mathbf{q}$, cuando

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

7. ¿Cuál es el cuarto vértice del paralelogramo O A B C si A es (2, — 1) y C es (1, 3)?

8. Supongamos que O P Q R es un paralelogramo (en ese orden), P es (— 1, 4) y Q es (2, 1). ¿Dónde está R?

9. Un paralelogramo tiene un vértice en el origen, otro vértice en (— 1, 3) y sus diagonales se cortan en (1, 2). Hallar las coordenadas de sus otros dos vértices.

10. P Q R S es un paralelogramo; P es (— 3, — 2), Q es (1, — 1), S es (— 1, 5); ¿dónde está R?

III.10. *Vectores base*

Anteriormente definimos una traslación diciendo que ésta implicaba un desplazamiento de 3 unidades al eje O*x*, combinado con un desplazamiento de — 2 unidades paralelo a O*y*.

Estos desplazamientos son también traslaciones. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puede darse un paso más:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son desplazamientos de longitud unidad a lo largo de los ejes y cualquier vector puede expresarse en función de ellos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cualesquiera que sean *a* y *b*. Por esta razón se les llama vectores base y se les da nombre:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{j}$$

Luego cualquier vector:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

El vector de posición del punto P con ordenadas (*a*, *b*) puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \text{OP} \quad \text{o} \quad a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

La Matemática Moderna en la Enseñanza Básica

Por JACINTO MARTINEZ UGARTEMENDIA
Doctor en Ciencias Exactas

En estos momentos asistimos a una renovación completa en los métodos de enseñanza de las Matemáticas como consecuencia de la transformación verdaderamente copernicana de la sociedad y de las ciencias todas.

Para pasar de la rueda a la máquina de vapor transcurrieron miles de años. Para pasar del vapor al motor de explosión hicieron falta unos setenta y cinco años; para pasar del motor de explosión a la turbina de reacción bastaron veinticinco años; y para pasar del *jet* al cohete fueron suficientes diez años. Y cuando hace solamente unos doce años se comenzaba a hablar de la posibilidad de llegar a la Luna, se ponía como meta el año 2000. Pues bien, el hombre ha llegado ya a la Luna a mediados del año 1969. La sociedad y la ciencia actual se adelantan a sus proyectos. Los descubrimientos se suceden a un ritmo vertiginoso, en verdadera progresión geométrica.

Así, ocurre que cuando nuestros niños, dentro de unos quince años, terminada su carrera, vayan a aplicar en el ejercicio de su profesión los conocimientos que aprendieron en el colegio, resultará que las ciencias habrán cambiado tan completamente en dicho lapso de tiempo que prácticamente lo que aprendieron no les servirá casi de nada. Lo que contará entonces serán las facultades de todo orden que hayan desarrollado: si han aprendido a razonar, a estudiar, a observar, a inventar.

Por tanto, al enseñar las Matemáticas, más que hacer aprender muchos detalles interesa desarrollar las facultades que más interesarán al alumno el día de mañana: observación, imaginación, adaptación, creación e inventiva.

DESARROLLAR EL INSTINTO DE INVESTIGACION

Hay que colocar al niño en la actitud de descubridor, excitando su sentimiento de curiosidad y su deseo de adivinación, tan fuertes en él. No hay que darle la doctrina hecha, sino sugerirle problemas que ha de resolver por sí mismo.

El niño siente una curiosidad innata, un inmenso deseo de aprender el porqué de las cosas, de hacer por su cuenta hallazgos y descubrimientos. Es todo un instinto de investigación el que manifiesta al romper los juguetes de movimiento para descubrir su mecanismo.

Gracias a este instinto la Humanidad progresa. Por eso hemos de poner tanto empeño en cultivarlo y desarrollarlo. Que no adquiera el niño la falsa idea de que ya está todo hecho en el campo de la ciencia, sino, al contrario, que se dé cuenta de que la mayor parte de las cosas están todavía por descubrir.

Por consiguiente, el método a emplear consiste en ofrecer series o cadenas de ejercicios o ejemplos prácticos, cortos y sencillos, cuyas soluciones estén al alcance de los alumnos; de dificultad creciente, y de tal modo enlazados que cada uno prepare el siguiente. Nada de aplicar reglas dadas de antemano. Que vaya descubriéndolas él. Para ello generalmente no es suficiente proponerle una serie de ejercicios, sino varias. Hoy ya es un axioma que no debemos enseñarle nada que no sea él capaz de descubrir y de saber el porqué se opera así.

ABUSO DEL MEMORISMO

Se ha abusado mucho, y se sigue abusando demasiado, del memorismo. No insistamos en que el escolar enuncie a la perfección las reglas que ha descubierto o las definiciones más o menos abstractas en que se basan. Quédese esto para un segundo estadio, cuando su vocabulario y facilidad de dicción se hayan desarrollado. De momento nos contentamos con que conozca las cosas y sepa nombrarlas. Nunca hemos de martirizarle exigiéndole definiciones científicas y rigurosas, cuya necesidad no es todavía capaz de comprender.

No queremos decir que no deba desarrollarse la memoria. Es una facultad que también precisa cultivo. Pero nunca empleando para ello las Matemáticas, a base de aprender de memoria cosas que no se entienden.

ENSEÑANZA EXPERIMENTAL Y ACTIVA

Hasta ahora los libros que poníamos en manos de los alumnos eran ni más ni menos que los Elementos de Euclides, un tanto modificados. Y este libro, con sus construcciones tan maravillosas para las personas mayores, resulta totalmente indigesto para los pequeños escolares. No hay que tener mucho sentido pedagógico para comprobar desde el primer instante que a ellos no les dice nada tanta cadena de razonamientos, teoremas, hipótesis y escolios.

La *ley biogenética* nos dice que el desarrollo del individuo reproduce en pequeño el desarrollo de la especie. Existe una notable semejanza entre el desarrollo de la facultad de raciocinio en los niños y en la humanidad. Esta pasó por un primer período de acumulación de materiales obtenidos por la observación de la naturaleza, período que podríamos llamar *experimental*. Sigue otro período de *clasificación* de dichos materiales. Sólo cuando está muy adelantada la ciencia entra en la fase deductiva y racional, en la que sentados determinados principios o postulados todo lo demás se deduce por silogismos.

Aunque esta forma de exposición es evidentemente más elegante y perfecta, sería un gravísimo error pedagógico el emplearla con escolares de enseñanza básica. Porque su espíritu debe pasar primero por la fase experimental de manejo de materiales, de observación y clasificación de los mismos. Sólo en los cursos superiores se planteará la neesidad de la deducción lógica.

Hay que comenzar, pues, por una fase experimental de manejo y observación de figuras. Todo ello a base de acción, mediante un material muy sencillo, al alcance de cualquier fortuna: simples cuartillas, hojas de cuaderno, forros de los mismos, tiras de papel, regletas de los números en color, hoy que éstas se van introduciendo en los colegios para el aprendizaje del cálculo.

Hoy se siente la necesidad de una *didáctica activa*. Y aquí radica la mayor fuerza formativa de las Matemáticas: en que con mucho mayor facilidad que en otras ciencias se puede lograr el ideal de convertir la clase en un taller, en el que todos estén trabajando bajo la dirección del profesor, con un material fácil de adquirir.

LA MATEMATICA MODERNA

Se basa principalmente en la teoría de *conjuntos*, iniciada por el matemático alemán Cantor, a la que al principio se le concedió poca importancia, pero que poco a poco se vio que estaba a la base de todo en las Matemáticas. Así, el concepto de *número*, fundamental en la Aritmética, no es una cualidad de los objetos, sino de los conjuntos. Podemos hablar de balón redondo, pero no de casa *tres*, sino de tres casas, refiriéndonos a un conjunto de tres casas. Análogamente, el concepto de *función*, base del cálculo infinitesimal, diferencial e integral, no es otra cosa que una correspondencia entre conjuntos. Y lo mismo digamos de la noción de *transformación geométrica*, base de la Geometría moderna.

La teoría de conjuntos viene, en primer lugar, a llenar un vacío que existía en la didáctica antigua: se ponen unos cimientos firmes y sólidos al edificio de la ciencia Matemática. Los resultados a que se llega son los mismos que anteriormente, pero quedan mejor fundamentados y expuestos de modo más claro, sin lagunas ni saltos en el vacío, como ocurría a veces en la Matemática clásica.

En segundo lugar, la enseñanza resulta ahora más concreta y, por tanto, más asequible para los peque-

Grupo escolar Nuestra Señora de la Aurora. MONTILLA.

ños escolares. Durante los dos primeros meses del curso el alumno se dedica a estudiar los conjuntos en vez de comenzar, como anteriormente, por los números, que son entes abstractos que nuestra mente elabora, como consecuencia de la comparación de los conjuntos que diariamente manejamos. Pues bien, el niño está acostumbrado a hacer colecciones de cromos, de canicas, etc. El estudio de los conjuntos resulta para él la cosa más natural del mundo. Después de lo cual ya podemos abordar el manejo de los números, con garantías de que no resulten ininteligibles para las tiernas inteligencias infantiles.

Dados algunos principios generales, pasemos a considerar unos cuantos problemas específicos de la didáctica de las Matemáticas en cada uno de los cursos de la Enseñanza básica:

PRIMER CURSO

El niño debe captar la noción de CONJUNTO como colección de objetos. Más tarde deducirá el concepto de número al tratar de comparar los conjuntos y de establecer entre ellos CORRESPONDENCIAS BIUNÍVOCAS, que al nivel del alumno podemos denominar CORRESPONDENCIAS UNO A UNO; esto es, aquellas correspondencias en que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno en el segundo, y a cada elemento del segundo conjunto, le corresponde uno y sólo uno en el primero.

Efectivamente, la idea abstracta de número surge en el espíritu humano al considerar la analogía o parecido que existe entre los conjuntos que se pueden poner en correspondencia biunívoca, y este parecido lo expresamos diciendo que dichos conjuntos tienen el mismo *número* de elementos. En esta frase está contenida, en realidad, la definición de *número natural.*

Evidentemente, no pretendemos que a esta edad capte el escolar todo el profundo significado de la noción de número, pero sí intentamos ponerle en el verdadero camino para que poco a poco vaya entendiéndolo. Deberá ser la profesora quien haga notar a los alumnos que los conjuntos que van apareciendo se pueden o no poner en correspondencia biunívoca, lo que se representa por las flechas que los niños han de trazar de los objetos del primer conjunto al segundo, y de los de éste a los de aquél.

El método que hay que aplicar para enseñar las tablas de sumar y de multiplicar ha de ser eminentemente operacional y activo. El antiguo método de aprenderlas canturreando, sin comprender absolutamente nada de lo que se dice, ha debido quedar desterrado hace ya mucho tiempo. Dado que el sistema de los NÚMEROS EN COLOR se está difundiendo cada vez más, conviene emplearlo decididamente u otro parecido. Es el propio niño, manejando el material, e intentando responder a las preguntas que le hace la maestra, el que debe descubrir los resultados de las operaciones que se le plantean. El memorizar dichos resultados será objeto de un trabajo lento de resolución de problemas utilizando las regletas u otro material análogo, sin perjuicio de que al final del curso se realice una labor más intensa de memorización, una vez que se haya comprendido perfectamente su significado.

La experiencia ha demostrado la rapidez y seguridad sorprendente de cálculo que los niños adquieren por este método. Evidentemente, esto no quiere decir que las regletas constituyan algo así como la panacea universal, ni que convenga aplicarlo a todas las cuestiones. Hay que reducir a sus exactos límites los méritos del sistema, que son los que en educación se asignan a todo medio o instrumento de primer orden puesto al servicio del educador, pero que en ningún caso puede sustituir al educador mismo.

El material que empleemos no ha de ser meramente comprobatorio con el que tratamos de que se convenza de las verdades que previamente le hemos enseñado, sino que hemos de lograr que mediante su manejo descubra dichas verdades. Siempre hemos de colocar al alumno en la actitud de descubridor que piensa y busca.

La didáctica tradicional enseñaba los mecanismos de las operaciones matemáticas mediante hábitos estereotipados a partir de esquemas aprendidos mecánicamente. Posteriormente, el recurso didáctico consistió en hacer imaginar, sin que el niño viera o actuara. La didáctica operatoria y activa que hoy se emplea consiste, por el contrario, en hacer actuar y manipular al mismo alumno, dándole la posibilidad de realizar a su gusto operaciones de composición, descomposición, traslado o transformación.

El niño ejecuta sobre material concreto lo que luego interiorizará, siendo de notar que si en un principio necesita el soporte de lo real y concreto, posteriormente prescinde con toda facilidad de la realización material del acto, pues ya es capaz de hacerlo interiormente.

SEGUNDO CURSO

Comienzan a estudiarse las propiedades de las operaciones. Esto no se hace para fastidiar a los escolares, sino porque son verdaderamente importantes e indispensables para poder manejar los números sin equivocarse y dándose cuenta de lo que se hace. En este sentido, las propiedades de las operaciones son como las reglas de un juego, sin las cuales no se puede jugar. Más que el saber operar interesa que el niño sepa por qué se opera así, y esto se logra mediante las propiedades descubiertas por el propio alumno.

Cada vez se extienden más las máquinas de calcular, los cerebros electrónicos, computadoras, etc. En otro tiempo en todas las empresas necesitaban hombres que supieran ejecutar rápidamente y con gran seguridad sumas y más sumas, lo mismo que multiplicaciones y divisiones. Hoy cada vez interesa menos hacer de nuestros alumnos grandes calculistas, porque hasta la empresa más modesta tiene sus máquinas de calcular, que lo hacen mucho más rápidamente y sin equivocaciones. Por eso, sin desdeñar el que el niño calcule rápida y seguramente, interesa más desarrollar en él aquello en que el hombre es superior a la máquina, que es la inteligencia y la creatividad.

Importa dar a los escolares ideas claras sobre los conceptos de las operaciones. Muchas veces si al ponerle un problema no sabe si hay que restar, multiplicar o dividir, se debe a que no sabe exactamente lo que es restar, lo que es sumar o lo que es multiplicar, aunque sepa muy bien dar sus definiciones, como un perfecto papagayo.

Así hay que hacerle distinguir bien claramente entre lo que es sumar conjuntos, que es simplemente juntarlos para formar un solo conjunto, y lo que es sumar números, el 5 y el 8, por ejemplo, que es hallar el cardinal del conjunto C que resulta al sumar un conjunto A, de cinco elementos, y otro B, de ocho elementos. Por tanto, *adición* de los números 5 y 8, llamados *sumandos*, es una regla que nos permite obtener un tercer número, 13, llamado *suma*, mediante los siguientes pasos:

Grupo escolar "Caja de Pensiones", LA VERNEDA-BARCELONA.

1.° Formar un conjunto A, de cinco elementos, sean cinco papelitos o cinco tizas, y un conjunto B, de ocho elementos.
2.° Sumar los dos conjuntos A y B para formar un solo conjunto $C = A + B$.
3.° Hallar el número de elementos de C, que es 13; éste es la suma de 5 y 8.

Importa sobremanera llevar de frente la adición y la sustracción. Así, restar los dos números 7 y 4, llamados *minuendo* y *sustraendo*, respectivamente, es hallar un tercer número, 3, llamado *diferencia*, que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.

$$7 - 4 = 3, \text{ significa que } 3 + 4 = 7$$

Pero de la igualdad $3 + 4 = 7$, ¿no podríamos deducir otra igualdad de restar distinta de la anterior?

Sí, es la siguiente: $7 - 3 = 4$. Esto quiere decir que las tres igualdades:

$$7 - 4 = 3 \quad ; \quad 3 + 4 = 7 \quad ; \quad 7 - 3 = 4$$

son equivalentes, lo que quiere decir que se deducen una de otra: si una es cierta, lo son también las otras dos, y si una es falsa, lo son igualmente las otras dos.

No interesa en modo alguno que el niño sepa dar como un papagayo la definición de sustracción. Pero, en cambio, es del mayor interés que sepa escribir las igualdades anteriores o equivalencias fundamentales de la sustracción. Dada una cualquiera de ellas, debe saber escribir inmediatamente las otras dos. Cuando sepa hacer esto, estaremos seguros de que entiende el concepto de sustracción.

La multiplicación debe presentarse como suma de sumandos iguales. El niño se ejercitará en una doble serie de ejercicios: primero se le darán adiciones de sumandos iguales, que tendrá que reemplazar por multiplicaciones, indicando en cada caso cuál es el *multiplicando*, cuál el *multiplicador* y cuál es el *producto;* en segundo lugar, se le darán las multiplicaciones y deberá sustituirlas por adiciones de sumandos iguales. En seguida se plantearán problemas sencillos de multiplicar y se invitará al niño a que invente él otros.

Lo mismo que respecto de la adición y sustracción, debe llevarse de frente la multiplicación y división. El escolar debe darse cuenta que dividir 12 entre 4 es hallar un tercer número, 3, que multiplicado por 4 dé 12. O sea, de

$$12 = 3 \times 4$$

deducimos que

$$12 : 3 = 4 \quad ; \quad 12 : 4 = 3$$

Estas tres igualdades son equivalentes, esto es, que se deducen una de otra: si una es cierta, lo son igualmente las otras dos, y si una es falsa, lo son igualmente las otras dos.

Con variados ejemplos, el alumno debe llegar a escribir dos de las equivalencias fundamentales dada la tercera. Así estaremos seguros de que ha llegado a comprender el concepto de división, aunque no sepa dar su definición.

TERCER CURSO

La enseñanza de la Geometría en estos primeros cursos de enseñanza primaria ha de ser eminentemente operacional y activa. La idea de plano se consigue a partir de una cuartilla colocada sobre la mesa, con objeto de darle rigidez, que es una de las características del plano. Además es necesario establecer la idea de infinitud del plano; para ello se hace observar al alumno que se puede prolongar el plano tanto como se desee pegando unas cuartillas a otras. Conviene insistir suficientemente sobre estas dos características del plano, haciendo ver que llamamos plano a un papel colocado sobre la mesa, pero no al mismo papel curvado, y que se puede prolongar en todas direcciones. Por consiguiente, la hoja de papel será en lo sucesivo una materialización del plano.

La *recta* se presenta como un doblez hecho en el papel. Se comenzará por invitar a los alumnos a que efectúen varios dobleces en el papel y proponerles que les pongan nombre para distinguir unos de otros. Debe convencerse al alumno de la infinitud de la recta, como consecuencia de la del plano.

Obsérvese que los conceptos de recta y plano son *primarios*, esto es, no pueden definirse, o sea, descomponerse en otros conceptos más sencillos, porque son los más sencillos que existen en nuestra mente. Basta evocar la imagen que los recuerde y que ya existe en la mente humana. En particular, sería un absurdo pretender definir la recta como el conjunto de puntos situados en la misma dirección, pues el concepto de dirección es más complejo que el de recta, y definir una cosa es descomponerla en otros conceptos más sencillos y ya definidos anteriormente. El concepto de dirección se deduce del de recta y no al revés. *Dirección* es la clase de rectas paralelas entre sí. A veces se presenta la recta como un hilo tenso entre dos puntos. Esto está bien, pero tiene sus peligros. Por ejemplo, los hilos de la luz, de telégrafos, etc., tendidos entre dos postes, aunque estén bien tensos, forman una curva llamada *catenaria*. Lo más científico y exacto es presentar la recta como un doblez dado en un papel.

De un modo parecido se presentan los conceptos de *semiplano, semirrecta, segmento rectilíneo, líneas poligonales*, siempre a base de un material sencillo, formados por simples cuartillas u hojas de cuaderno.

El niño ha de entender claramente que *medida de un segmento* es un número, el número por el que hay que multiplicar la unidad para que nos dé dicho segmento. Que multiplicar un segmento por un número natural es repetirlo como sumando tantas veces como lo indica dicho número. Que llamamos *longitud* de un segmento al número que expresa su medida seguido del nombre de la unidad empleada.

Si los niños están habituados al uso de las regletas de los números en color, les haremos observar que la regleta blanca tiene 1 cm. de longitud; la roja, 2 cm.; la verde claro, 3 cm., etc., y la naranja, 10 cm., o sea, 1 dm.

Pasamos de lo conocido, la regleta naranja, a lo desconocido, el decímetro. No será difícil conseguir que todos los niños tengan una regla graduada o doble decímetro, mediante el cual puedan medir la longitud de los objetos. También se calculará a ojo lo largo y lo ancho de un campo y luego se medirán efectivamente con el metro.

A falta de metro, enseñaremos al niño a medir longitudes a pasos, a palmos o con cualquier otra unidad, por ejemplo, con cuadernos. Un cuaderno mide aproximadamente 2 dm. de longitud. Si queremos medir la longitud de la clase, haremos que vayan colocando los cuadernos uno a continuación de otro hasta cubrir toda la longitud buscada. Cada cinco cuadernos hacen un metro. Y si no disponemos más que de un cuaderno, ¿cómo haríamos? Haríamos una señal con tiza en el extremo del cuaderno y lo colocaríamos de nuevo a continuación de dicha señal, etc.

Hay que insistir en que la *distancia* entre dos puntos no es un segmento, sino un número, el número que mide la longitud del segmento, que tiene por extremos dichos puntos.

Ha de cuidarse mucho para dar de un modo experimental la definición de ángulo, como conjunto de semirrectas de mismo origen. La construcción de ángulos rectos mediante doblado de papel ha de ser una operación enteramente familiar al alumno. La importancia del *ángulo recto* proviene de que es la *unidad natural* de ángulos.

En la medida de segmentos no hay ninguna unidad natural. El metro es una unidad que se toma arbitrariamente como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. El metro patrón ha de guardarse cuidadosamente en las Oficinas de Pesas y Medidas, para que no se altere. No es fácil la comprobación de la exactitud de un metro de los corrientemente empleados. En cambio, en los ángulos hay una unidad natural: el ángulo recto. Cualquier niño puede construirlo con un sencillo doblez en una cuartilla y con toda exactitud y precisión. No se necesita conservarlo en ninguna Oficina.

También ha de insistirse mucho en el trazado de rectas perpendiculares a una recta dada, ya por doblado, ya mediante la escuadra. Ha de cuidarse de colocar en posiciones muy variadas las rectas a las cuales ha de trazar perpendiculares. Igualmente, el punto desde el que ha de trazar la perpendicular, unas veces ha de tomarse en la recta dada; otras, fuera de dicha recta.

CUARTO CURSO

En este curso se profundiza el estudio de los números decimales, tan corrientes en la vida práctica, tan útiles, por otra parte, para dar a los niños la idea de aproximación. Así, por ejemplo, se les hará ver que si se trata de medir la distancia entre la tierra y la luna basta usar como unidad los 1.000 km., y así, decimos que dicha distancia es de 380.000 km. Sin embargo, si se trata de medir la longitud de una tela conviene apreciar hasta los centímetros, ya que si el valor del metro de tela es de 400 pesetas, cada centímetro valdrá cuatro pesetas.

Convendrá proponer multitud de ejemplos análogos y significativos, con los cuales el alumno llegue a comprender que la mayor o menor aproximación en cada caso no es debida al capricho, sino a la naturaleza de la cuestión de que se trate.

Si se trata de hallar la anchura de una habitación basta dar una aproximación de centímetros; pero si se tratara del espesor de yeso que el albañil ha de poner a la pared, quizá no fuera suficiente la de milímetros. Es importante que el escolar adquiera la noción de los decimales que serán necesarios en cada caso.

La introducción de los decimales ha de hacerse de un modo gradual y progresivo, comenzando por las décimas, siguiendo por las centésimas, milésimas, etc. No por introducir de golpe muchas ideas hemos adelantado más. Al contrario, puede ocurrir que ello sólo sirva para confundir y desorientar al escolar. Los submúltiplos del metro, que el niño ya conoce, serán un auxiliar poderoso para lograr la perfecta comprensión de los números decimales. También pueden servirnos para entender el modo de operar con los mismos, de forma que sea el mismo niño quien descubra la regla a emplear. Si se trata, por ejemplo, de la multiplicación, han de proponérsele varios ejercicios en que se trate de hallar el área de una figura rectangular, cuyas dimensiones vienen dadas por números decimales. No sabiendo multiplicar éstos, pero sí los números enteros, se les invita a transformar los metros en centímetros, operar con éstos y a continuación transformar los centímetros cuadrados en metros cuadrados. El niño constata así que el producto tiene tantas cifras decimales como hay en el multiplicando y multiplicador.

La noción de fracción y las operaciones con las mismas se hacen fácilmente accesibles al alumno mediante el empleo de las regletas de los números en color. Constituye éste un método con el que se obtienen resultados sorprendentes.

Cada fracción se considera como un *operador*, que actúa sobre las cantidades o números. Así, de $4 = 2 \times 2$, deducimos que $2 = 1/2 \times 4$.

El niño debe acostumbrarse a que "*un medio* de 4 se escribe $1/2 \times 4$. La expresión "1/2 de" es el operador fracción, es decir, el operador que hace sustituir 4 por 2.

Hay que hacer también ejemplos en que las fracciones actúen sobre cantidades, como segmentos, círculos, pasteles, naranjas, etc. Después de estos ejercicios el niño está preparado para adquirir la noción de fracción como par de números enteros dados en un orden determinado.

QUINTO CURSO

La representación de los conjuntos mediante *diagramas* es de relevante interés. En primer lugar, porque el diagrama es fácilmente inteligible, como estilización de un conjunto de objetos cualesquiera; luegó, porque una vez acostumbrados a su manejo, permiten estudiar las propiedades y operaciones entre conjuntos con gran calidad "visual"; finalmente, suponen ya una introducción al aspecto geométrico de la teoría de conjuntos, cuya importancia quedará patente en el estudio de la Geometría.

El *diagrama lineal* es un recurso soberanamente fecundo para dar una imagen intuitiva de un conjunto *ordenado*. Se usará en adelante con frecuencia para hacer comprender a los niños las propiedades de los conjuntos ordenados de números naturales.

Aparte de que lo concreto entusiasma al niño y de que el dibujo suministra pábulo excelente a su actividad desbordante, esta representación le ayudará a comprender más adelante la *ordenación* de los conjuntos y, en particular, de los números naturales. Así vamos preparando en su mente el concepto de *número ordinal*.

En este curso debe profundizarse en el estudio de las figuras geométricas del plano, comenzando por los triángulos. Primeramente mediante doblado de papel, después mediante la escuadra, debe construir las tres alturas de un triángulo. Que compruebe que en todos los casos las tres concurren en un punto u *ortocentro*.

Por doblado hallará el alumno el punto medio de cada lado del triángulo. En seguida trazará las medianas con la regla, uniendo cada punto medio con el vértice opuesto. Comprobará que en todos los casos las tres medianas concurren en el *baricentro*. Comprobará también que éste está a dos tercios del vértice y un tercio de la base.

La construcción de las *mediatrices* de un triángulo por doblado resulta sumamente sencilla, por lo que no es necesario aquí que utilice la regla o la escuadra. Aplicará la construcción a varios triángulos y hallará que siempre concurren en el *circuncentro*. Uniendo éste con los tres vértices, verá que los tres segmentos son iguales, por lo que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

La construcción de las *bisectrices* de un triángulo por doblado resulta también sumamente sencilla. Determinará el *incentro* y trazará desde él las perpendiculares a los lados, comprobando que los tres segmentos de perpendicular son iguales, por lo que el incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

De un modo análogo, completamente experimental y activo, ha de realizarse el estudio de las restantes figuras geométricas: cuadriláteros, paralelogramos, trapecios, círculos, polígonos, etc.

SEXTO CURSO

Introduciéndolos a base de elementos materiales, como cartón, regletas, papeles, dibujo, etc., la experiencia ha indicado que los muchachos a esta edad son capaces de captar o, por lo menos, atisbar los conceptos de *grupo* y *semigrupo*, sinónimos del de *magnitud*, al que hasta ahora nos referíamos sin saber exactamente de qué estábamos hablando.

En la enseñanza de las Matemáticas se ha venido cometiendo el error de medir las magnitudes antes de conocerlas, con lo que se llegaba a una petición de principio o círculo vicioso, en virtud del cual se producía una desorientación mayúscula en la mente de los pequeños escolares, que, por milagro, y siempre a trompicones, podían entender lo que les explicábamos. Hay que establecer, pues, netamente la distinción entre la magnitud y su medida.

El trazado de diagramas ayudará mucho a estudiar de un modo intuitivo las propiedades de las *relaciones binarias* en un conjunto, y en especial las de las *relaciones de equivalencia*, tan corrientes en la vida diaria y de tanta importancia en las Matemáticas. Han de darse muchos ejemplos de relaciones de equivalencia, haciendo aplicación de las mismas al concepto de número natural. A esta edad el alumno puede adquirir una idea bastante clara del concepto de número natural como clase de equivalencia. Ha de comprender que los números son siempre abstractos: no existen más que en nuestra mente. Es un absurdo hablar de números concretos. Hemos de cuidar para que los niños no confundan el concepto de número con el símbolo que lo representa. Este ha variado a lo largo de la historia. En cambio, el concepto de número es el mismo desde los comienzos de la humanidad. Tampoco ha de confundir el número con los conjuntos de cuya comparación surge el mismo. En este curso se introduce también el concepto de *número entero*, como par ordenado de números naturales. Se les hace ver que el resultado de un partido, el balance de una empresa, la variación de una temperatura, etc., se pueden expresar mediante un par de números naturales, y que éste es un representante de un nuevo ente, al que llamamos número entero.

Se hará aplicación de lo anterior a los conjuntos de doble sentido o magnitudes vectoriales, haciendo ver que su medida viene dada por números enteros. También se hablará de los sentidos de una *recta orientada* o *eje*, explicando la correspondencia entre los puntos de la misma y los números enteros.

A base de ejemplos deben introducirse también las operaciones con números enteros, insistiendo en que las definiciones que se introducen no son arbitrarias, sino que cumplen el principio de permanencia de leyes formales.

En este curso se hace también un estudio descriptivo de los cuerpos más corrientes de la Geometría del espacio y de sus aplicaciones más usuales, al mismo tiempo que una determinación empírica y puramente experimental de sus volúmenes. Se hallan igualmente las fórmulas de sus áreas laterales y totales, por ser datos que hay que manejar con frecuencia en el quehacer diario. Todos estos cuerpos debe construirlos el alumno a base de cartulina y papel celofán. Con ellos en la mano descubrirá sus elementos y observará sus características. Convendrá que los construya con plastilina siempre que tenga que hacer determinadas secciones en los mismos y estudiar sus propiedades.

SEPTIMO CURSO

Estudiados los números naturales hasta el sexto curso y los números enteros en el curso anterior, es ahora el momento de considerar de un modo detenido y profundo los números racionales, como pares ordenados de números enteros. El primer elemento del par lo llamamos *numerador*, y al segundo, *denominador*. Hay que desarrollar esta teoría con gran extensión y abundancia de ejemplos, ya que es fundamental que los alumnos distingan claramente entre números naturales, números enteros y números racionales.

Los tres cursos, el estudio detenido de las propiedades de las operaciones con los números de que se trate, ha de llevar a la resolución de ecuaciones con un campo cada vez más ampliado. En este curso hay que realizar un tratamiento más exhaustivo y profundo de dichas ecuaciones, utilizando ya las propiedades del campo de los números racionales.

La resolución de ecuaciones es un punto a menudo descuidado y que, sin embargo, tiene una importancia considerable y una aplicación constante en toda clase de problemas, por lo que debiera ya iniciarse decididamente desde el sexto curso. Los problemas de cálculo comercial, mezclas, aleaciones, repartimientos proporcionales, etc., no son, en realidad, más que meras aplicaciones de la ecuación lineal o de primer grado, y como tales deben estudiarse. Incluso la regla de tres simple y compuesta se reduce a una ecuación de primer grado.

En el estudio de la proporcionalidad y semejanza se caía frecuentemente en un círculo vicioso o petición de principio, que consistía en demostrar el teorema de Tales basándose en la teoría de la medida de segmentos, que, a su vez, se basa en el teorema de Tales y en la teoría de los números reales, que no se estudian hasta mucho más adelante. Deben cuidarse estos puntos para no desorientar a los alumnos con demostraciones incorrectas o falsas.

Toda la teoría de la proporcionalidad y semejanza debe desarrollarse de un modo experimental, a base del trazado de paralelas con regla y escuadra, realizando todas las construcciones necesarias para la demostración de las propiedades de las proporciones.

OCTAVO CURSO

En el estudio del Algebra, y puesto que el alumno maneja ya la noción de aplicación o función uniforme, hay que hacer una distinción clara entre los conceptos de *polinomio con una indeterminada* y de *función polinomio*, entendida como aplicación entre conjuntos de números, y en que la letra x designa una variable, esto es, cualquiera de los elementos de un conjunto de números. Con ello se elimina la expresión *valor numérico de un polinomio*, que venía utilizándose hasta ahora. Hay que insistir en las propiedades de los polinomios hasta llegar a demostrar su estructura de *anillo conmutativo*. El cálculo con radicales ha de reducirse a aquellos teoremas que son indispensables para el manejo de las raíces de la ecuación de segundo grado.

Deben darse en este curso unas nociones de Estadística, procurando que sean muy claras y prácticas.

La Geometría del espacio ha de estudiarse de un modo eminentemente intuitivo y experimental, evitando la demostración de teoremas, que la experiencia demuestra que son sumamente farragosos y abstractos.

La Teoría de conjuntos

Por DIEGO GUTIERREZ GONZALEZ

En el desarrollo de la Historia el hombre ha ido día a día perfeccionándose. La ciencia y la técnica han avanzado grandemente, llegando a extremos insospechados. Pero hoy día tanto una como otra necesitan de la base matemática; es, por tanto, muy importante instruir al niño en esta disciplina desde que comienza su formación, que en un futuro no lejano serán las matemáticas útil indispensable de su trabajo. Es por esto por lo que nadie que se dedique a la enseñanza debe permanecer al margen del nuevo enfoque de esta ciencia, es decir, de la llamada *Matemática Moderna,* que pronto pasará a ser antigua.

La Matemática Moderna se usa hoy en todas las ciencias y la llamada "Teoría de conjuntos" se considera como su nacimiento u origen. Dicha Teoría fue descubierta por George Cantor, un ruso de nacimiento, que cursó sus estudios en varias Universidades alemanas. Sus estudios sobre la Teoría de conjuntos los inició hacia el 1879.

Conjunto es sinónimo de colección; la idea de conjunto es intuitiva en la mente del niño, numerosas palabras de uso corriente indican conjuntos. Verbigracia, grupo, equipo, tribu, regimiento, sociedad, etc.

Sin embargo, hay dos maneras de determinar un mismo conjunto:

a) Enumerando todos y cada uno de los elementos que forman parte del conjunto.

b) Diciendo una propiedad que posean todos los elementos y sólo ellos.

Ejemplo: *a)* a, e, i, o, u (extensión), *b)* vocales (comprensión).

Pasar lista en una clase es definir el conjunto de los alumnos por EXTENSION. Si digo números impares menores de 13, defino un conjunto por COMPRENSION.

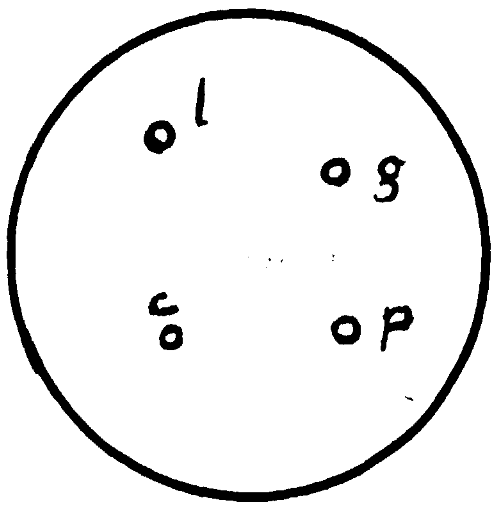
DIAGRAMAS

Para representar los conjuntos que se van a manejar, puede hacerse de dos maneras:

a) Diagramas de Venn.
b) Diagramas de llaves.

Veamos en qué consiste cada uno: Supongamos que hemos formado un conjunto con los objetos que tenemos al alcance, por ejemplo, un lápiz, una pluma, la cartera. Tenemos que representar este conjunto. En principio, el niño comenzará dibujando los objetos, pero posteriormente representará cada objeto con una letra o un número. Por ejemplo, en el conjunto anterior designaremos la goma por *g*, el lápiz por *l*, la pluma por *p* y la cartera por *c*.

Para expresar que el conjunto antes citado está formado solamente por los objetos enumerados anteriormente, se escriben dentro de un recinto cerrado así:



Cada punto representa un objeto. Este es el llamado diagrama de Venn.

O bien, encerrar los elementos entre dos llaves, separados por comas, así:

$A = \{ l, g, c, p \}$ diagrama de llaves

ELEMENTOS. SIGNOS DE PERTENENCIA

Para designar los conjuntos empleamos, en general, letras mayúsculas; así, en el ejemplo anterior, A designa el conjunto antes citado.

Los objetos que componen o forman el conjunto se denominan "elementos del conjunto". Y en lugar de decir que un objeto es "ELEMENTOS DEL CONJUNTO", se dice que pertenece a este conjunto. Así, en la figura 1, esta goma pertenece al conjunto A. Ahora bien, si pertenece a A, escribimos:

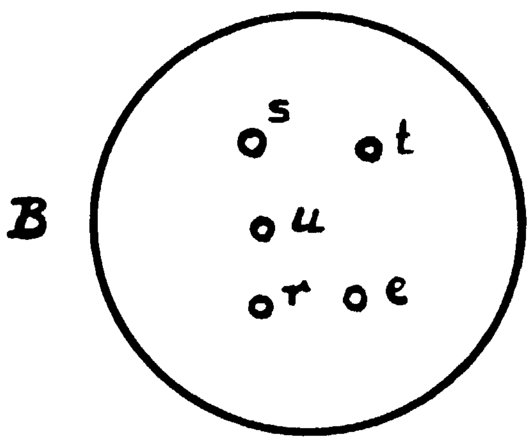
$$g \in A$$

En caso contrario, escribiríamos:

$$a \notin A$$

Los signos y son los de pertenencia. El primero, el de afirmación, y el segundo, la negación.

Ejemplo:



En este conjunto podemos escribir: $s \in B$, $v \in B$ y $a \in B$, que se leen: *s* y *v*; son elementos del conjunto B o pertenecen a B y *a* no pertenece a B.

Es decir, entre un elemento y un conjunto sólo se puede dar una de estas dos situaciones:

a) El elemento pertenece al conjunto.

b) El elemento no pertenece.

Sea x un objeto cualquiera y A un conjunto. O bien, $x \in A$ o $x \notin A$.

SUBCONJUNTO

Toda parte de un conjunto forma un subconjunto de aquél, es decir:

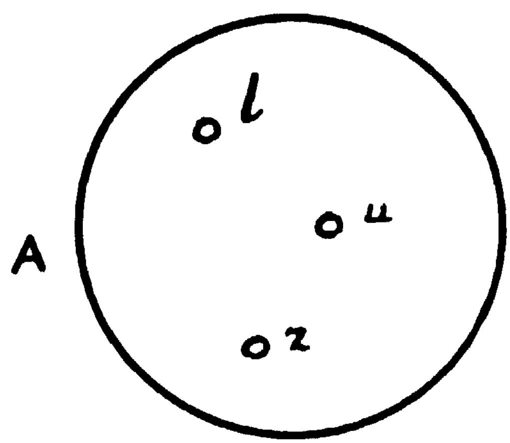
Si los elementos de un conjunto A están también en el conjunto B, se dice "A es subconjunto de B" y se escribe: $A \subset B$. A está contenido o incluido en B o bien A es subconjunto de B.

Ejemplo:

$$V \subset A \quad \text{siendo:} \quad \begin{array}{l} V = \text{vocales} \\ A = \text{abecedario} \end{array}$$

Ahora bien, dado un conjunto podemos formar todos los subconjuntos de él que tengan un solo elemento; a estos conjuntos se les denominan unitarios. O bien los subconjuntos de dos elementos: binarios. De tres: ternarios, etc.

Ejemplo:



Subconjuntos:

Unitarios: $\{ l \}$ $\{ u \}$ $\{ z \}$.

Binarios: $\{ l, u \}$ $\{ l, z \}$ $\{ u, z \}$.

Ternarios: $\{ l, u, z \}$.

Puede ocurrir que al buscar un subconjunto no encontremos ningún elemento.

Por ejemplo: En una clase podemos buscar el subconjunto de los niños que lleven gorra y puede ocurrir que ningún niño tenga gorra. ¿Cómo expresar esta situación? Es lógico que la expresemos. En este caso se dice que el subconjunto de los que tienen gorra está vacío y se representa por la letra finlandesa: $\varnothing$.

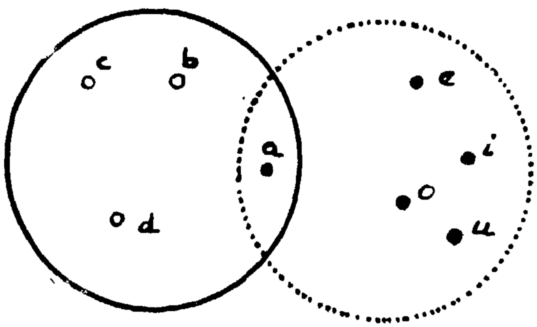
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión ($\cup$), intersección ($\cap$) y diferencia (—).
Sean los conjuntos siguientes:

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

$$B = \{ a, e, i, o, u \}$$

Puestos en diagramas de Venn:



Este diagrama nos sugiere tres nuevos conjuntos:

a) La unión o reunión $A \cup B$, formada por todos los elementos que pertenecen, al menos, a uno de los conjuntos:

$$A \cup B \{ c, b, d, a, e, i, o, u \}$$

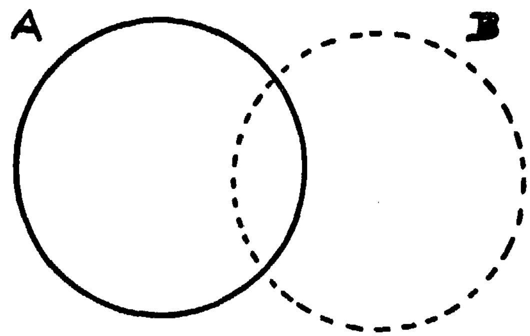
b) La intersección $A \cap B$, formada por los elementos que pertenecen, a la vez, al conjunto A y al conjunto B:

$$A \cap B = \{ a \}$$

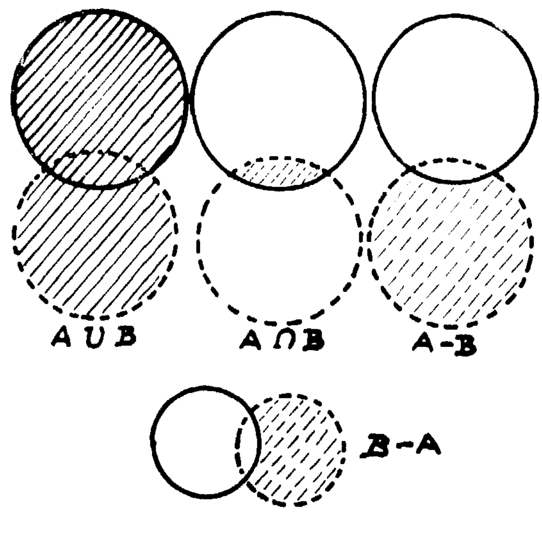
c) La diferencia $A — B$, formada por los elementos de A que no pertenecen a B:

$$A — B = \{ b, c, d \}$$

Ejemplo: en el diagrama de Venn siguiente.

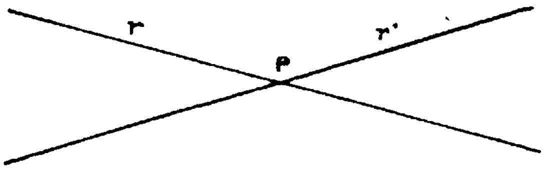


Vamos a ir rayando cada uno de los conjuntos citados anteriormente.

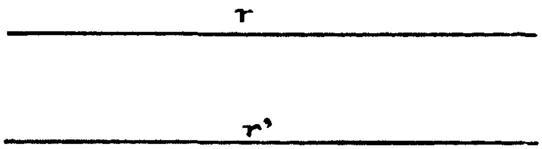


Otro ejemplo: sean r y r' dos rectas secantes:

$$r \cap r' = P$$



Si r y r' son paralelas:



$$r \cap r' = \emptyset$$

Cuando al buscar la intersección de dos conjuntos utilizamos el conjunto vacío, ambos conjuntos se denominan DISJUNTOS.

Las rectas paralelas son dos conjuntos disjuntos.

BIBLIOGRAFIA

Mathematique Moderne, de Papy. Edit. Marcel Didier. Bruxelles.

La Matemática moderna en la enseñanza elemental, de Lucienne de Felix.

Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media.

La Matemática moderna en la enseñanza primaria, de Dienes. Edit. Teide.

La Matemática y su enseñanza actual. El material didáctico-matemático actual, de Puig Adam. Edit. Magisterio Español.

Lecciones de Matemáticas modernas, de Etayo. Edit. Magisterio Español.

La enseñanza de la numeración en cualquier base

Por MIGUEL AREIZ

Para lograr que los niños comprendan los sistemas de numeración en base distinta de la decimal, preparémonos el siguiente material:

Conjunto de piedrecitas, garbanzos o judías, etc.

Papeles de distintos colores: rojo, azul, verde y negro.

Colocamos el conjunto de garbanzos, por ejemplo, sobre la mesa. Dividimos el papel rojo en unos cuantos trocitos, capaces para envolver con cada uno un garbanzo. Envolvemos cada garbanzo con un trocito de este papel rojo. Vamos a contar los elementos de este conjunto en base 4. Para ello hacemos montoncitos de 4 garbanzos hasta que acabemos con todos los elementos de color rojo. Puede ser que nos sobren 1, 2 ó 3 elementos.

Si el número de elementos del conjunto era múltiplo de 4 no nos habrá sobrado ninguno. Supongamos que nos han sobrado 3 elementos de color rojo.

De la misma forma que contando en base 10 agrupamos de 10 en 10, y al averiguar el número de decenas que hay en el conjunto, si nos sobran 7 elementos, este 7 lo colocamos en el primer lugar de la derecha—llamándolo unidades—, al contar en otra base cualquiera, como en el ejemplo presente, este 3, que indica el número de elementos que nos han sobrado de la primera agrupación de 4 en 4, también lo colocaremos en el primer lugar de la derecha, al cual llamaremos unidades de primer orden.

Así, pues, tenemos ya 3 unidades de primer orden constituidas por elementos de color rojo. Cada uno de estos montoncitos de 4 elementos lo envolvemos con un trocito de papel azul. Un trocito de «cello» nos ayudará a que los elementos de color rojo no se salgan de su envoltorio azul.

Imaginémonos que en el conjunto de elementos de color rojo (el total) había 91 elementos. Al agruparlos de 4 en 4 hemos obtenido 22 subconjuntos de color azul y otro subconjunto integrado por 3 elementos de color rojo. Estos 22 subconjuntos de color azul son las unidades de segundo orden, al igual que en el sistema decimal los subconjuntos de 10 unidades son las unidades de segundo orden o decenas.

Hacemos de nuevo montoncitos de 4 de estos elementos azules. Como había 22 elementos azules, habremos obtenido 5 subconjuntos del conjunto de elementos azules (unidades de segundo orden), o sea, 5 unidades de tercer orden; lo mismo que agrupando las decenas de 10 en 10 obtenemos unidades de tercer orden o centenas. Observemos que nos han sobrado 2 unidades de segundo orden (elementos azules).

El 2 ya lo podemos colocar en el segundo lugar:

2.º orden	1.º orden
2	3

Envolvemos estos 5 subconjuntos, integrados cada uno por 4 elementos azules, con un papel negro. Así, pues, subconjuntos negros son unidades de tercer orden.

Volvemos a agrupar de 4 en 4 y obtenemos un nuevo subconjunto, formado por 4 elementos negros y otro en el que sólo hay 1 elemento negro. Este elemento negro que nos ha sobrado será una unidad de tercer orden. Luego ya podemos colocar en el lugar de las unidades de tercer orden un 1:

3.° orden	2.° orden	1.° orden
1	2	3

El subconjunto que tiene cuatro elementos negros (unidades de tercer orden) lo envolvemos con papel verde, serán las unidades de cuarto orden. Luego colocaremos en el lugar de las unidades de cuarto orden un 1:

4.° orden	3.° orden	2.° orden	1° orden
1	1	2	3

Como ya no podemos agrupar de 4 en 4 las unidades de cuarto orden, porque sólo tenemos 1, hemos terminado de contar los 91 elementos rojos en el sistema de numeración en base 4. Leamos, pues, este número, $1\,123_4$: uno, uno, dos, tres, en base cuatro.

Podemos ahora traducir estas operaciones que hemos hecho: con los 91 elementos de color rojo que tenía el conjunto primitivo hemos hecho grupos de 4, o sea, hemos dividido por 4 91, obteniendo 22 unidades de segundo orden y nos han sobrado 3 de primero.

De nuevo hemos hecho con los 22 elementos azules grupos de 4, o sea, hemos dividido entre 4 22 y hemos obtenido 5 unidades de tercer orden y nos han sobrado 2 de segundo orden.

Al hacer con estas 5 unidades de tercer orden grupos de 4, hemos vuelto a dividir por 4.

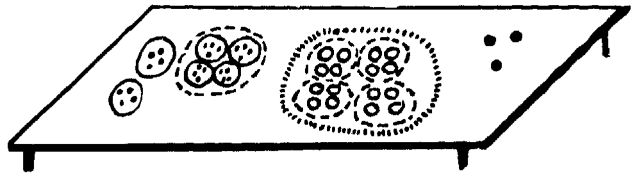
Luego para operar con rapidez, una vez hayan visto los niños todo lo que les hemos hecho en la mesa con los garbanzos y los papeles de colores y hayan hecho lo mismo cada uno en su mesa y con material parecido al que hemos empleado nosotros, podemos indicarles el procedimiento:

```
91 | 4
11  ----
 3  22 | 4
     2  ---
         5 | 4
         1  ---
             1
```

El encerrar la cifra de cada resto puede facilitar la operación de recordar cuáles son las cifras que figurarán en el número 1123_4. Las flechas pueden servir también para que vean en el orden en que deben escribirlas.

COMO PASAR UN NUMERO DE CUALQUIER BASE A BASE 10

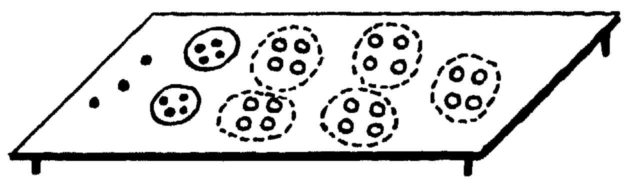
Volvamos a lo que había sobre la mesa. El dibujo lo recuerda:



Un envoltorio verde, uno negro, dos azules y tres rojos. El número en base 4 era: 1123_4.

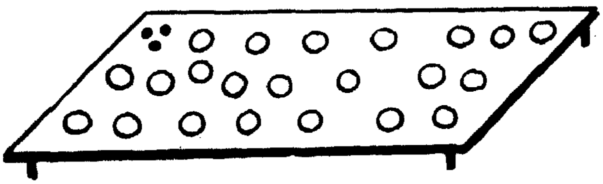
Deshacemos el envoltorio verde, que son unidades de cuarto orden, y hallamos 4 envoltorios; luego, de un envoltorio que había (verde) (unidades de 4.° orden), hemos obtenido 4 envoltorios negros, o sea, prácticamente hemos multiplicado por 4 el número de envoltorios. Esto es lógico, nos puede servir para que vean cómo una unidad de un orden contiene 4 veces a la unidad de orden inmediato inferior, lo mismo que cada centena contiene 10 veces a la decena. De una unidad de cuarto orden hemos obtenido, pues, 4 unidades de tercer orden. Luego para convertir las unidades de cuarto orden en unidades de tercero, hemos de multiplicar por la base (4), al igual que para convertir unidades de millar en centenas hemos de multiplicar por 10 (la base).

Ya tenemos, pues, 4 de tercer orden (obtenidas al deshacer el envoltorio verde) y otra más que había sobre la mesa; son 5 de tercer orden.



Luego hemos hecho esto: $1 \times 4 = 4$; $4 + 1 = 5$.

Deshacemos los envoltorios negros, y en cada uno de los 5 hallamos 4 azules. Luego pasamos de tener 5 envoltorios negros a tener 20 azules, o sea, hemos multiplicado por 4 el número de envoltorios, o sea, por la base. También pueden ver los niños que cada unidad de tercer orden está formada por cuatro unidades de segundo. Observamos ahora el número de envoltorios azules que hay sobre la mesa: 20 obtenidos de los envoltorios negros y dos que había sobre la mesa son 22.

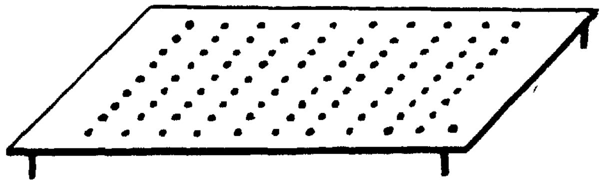


Operaciones que hemos hecho: $5 \times 4 = 20$; $20 + 2 = 22$.

Deshacemos, por último, cada uno de los 22 envoltorios azules (unidades de segundo orden), y vemos también que cada uno contiene 4 elementos de color rojo. Observamos ahora el número de elementos de color rojo que hay sobre la mesa: 22 azules a 4 rojos cada uno son 88 rojos, más 3 rojos que había son 91.

Operaciones que hemos hecho: $22 \times 4 = 88$; $88 + 3 = 91$.

En total, las operaciones que hemos hecho para escribir el número 1123_4 en base decimal (10) son las siguientes:



$$
\begin{array}{l}
1 \times 4 = 4 \\
\quad\;\; + 1 \\
\quad\;\; \overline{} \\
\qquad 5 \times 4 = 20 \\
\qquad\qquad\;\; + \;\; 2 \\
\qquad\qquad\;\; \overline{} \\
\qquad\qquad\;\; 22 \times 4 = 88 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; + \;\; 3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; \overline{} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\; 91
\end{array}
$$

91 es, pues, el número que corresponde en base 10 a 1123.

El material para la enseñanza de la matemática moderna. Sus características y aplicación

Por ANGEL RAMOS SOBRINO
Inspector de Enseñanza Primaria, Valencia

FUNDAMENTACION PSICOLOGICA DE LA NECESIDAD DE UN MATERIAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA MODERNA ELEMENTAL

De los estudios minuciosos de epistemología y psicología genéticas de Piaget, se desprende:

a) Las estructuras de la Matemática moderna y las estructuras mentales guardan una estrecha correspondencia.
b) El pensamiento se apoya en la acción.
c) En el desarrollo de las operaciones mentales se siguen una serie de etapas o estadios.

a) *Las estructuras matemáticas y las estructuras mentales guardan una estrecha correspondencia*

Inspirándose en las tendencias bourbakistas, la Matemática moderna pone el acento en la teoría de los conjuntos. Piaget, a quien nos vemos obligados a acudir siempre que tratamos de la génesis de los procesos mentales, nos dice que las intersecciones y reuniones de conjuntos, las correspondencias..., son precisamente operaciones que la inteligencia construye y utiliza de manera espontánea desde los siete u ocho años y aún mucho más, desde los once-doce años, a cuya edad llega a la estructura compleja del conjunto de partes, origen de la combinatoria.

Las Matemáticas, después de la escuela Bourbaki, ya no se nos presentan como un conjunto de capítulos separados, sino como una jerarquía de estructuras que se engendran unas a otras a partir de unas "estructuras madres". Estas estructuras madres son:

- Las estructuras algébricas, cuyo prototipo es el grupo.
- Las estructuras de orden, cuyo prototipo es la red.
- Las estructuras topológicas, que se refieren a los conceptos de entorno, límite y continuidad.

Estas estructuras matemáticas están en perfecta correspondencia con las estructuras operatorias fundamentales del pensamiento. Así, desde los siete-ocho años, etapa de las operaciones concretas, encontramos:

- Estructuras algébricas en los "agrupamientos" lógicos de clases.
- Estructuras de orden en los "agrupamientos" de relaciones.
- Estructuras topológicas en la geometría espontánea del niño.

Por tanto, según Piaget, las estructuras más abstractas y más generales de la Matemática moderna se encuentran en más íntima relación con las estructuras operatorias naturales de la inteligencia que las estructuras particulares, que constituían el armazón de las Matemáticas clásicas.

b) *El pensamiento se apoya en la acción*

Piaget sostiene que todo pensamiento se apoya en la acción y que los conceptos matemáticos tienen su origen en los actos que el niño lleva a cabo con los objetos y no en los objetos mismos.

Las operaciones del pensamiento son acciones interiorizadas, reversibles y coordinadas en sistemas.

"En una expresión matemática cualquiera, tal como $(x^2 + y = z - u)$, cada término designa, en definitiva, una *acción;* el signo (=) expresa la posibilidad de una *sustitución;* el signo (+), una *reunión;* el signo (—), una *separación;* el cuadrado (x^2), la acción de reproducir equis veces x, y cada uno de los valores u, x, y, z, la *acción* de reproducir cierto número de veces la unidad" (1).

Cada uno de los símbolos representa, como dice Piaget, una acción que podría ser real, pero que el lenguaje matemático se limita a designar abstractamente, bajo la forma de acciones interiorizadas, es decir, de operaciones del pensamiento.

c) *En el desarrollo de las operaciones mentales se siguen una serie de etapas o estadios*

El desarrollo de la inteligencia sigue unas etapas, que Piaget resume así:

- Etapa senso-motriz, hasta el año y medio o dos años.
- Etapa preoperatoria, de los dos a los siete años. Dentro de esta etapa cabe distinguir la del pensamiento simbólico, de los dos a los cuatro años, y la del pensamiento intuitivo, de los cuatro a los siete años. El pensamiento antes de los seis-siete años carece de reversibilidad, es decir, de la capacidad de hacer y deshacer mentalmente un camino, de descomponer y recomponer un todo, de percibir que un conjunto de objetos permanece invariable si se le quita y agrega luego la misma cantidad.
- Etapa de las operaciones concretas, de los siete-ocho años a los once-doce años. Es el primer período operativo, puesto que ya se da la reversibilidad, pero las operaciones sólo se logran en situaciones concretas, en donde el niño maneja activamente datos materiales, que puede ver y tocar. Si en esta etapa hacemos razonar al niño con proposiciones verbales, a menudo se encuentra incapaz de llevar a cabo la misma operación que él realiza cuando se aplica a situaciones concretas.
- Etapa de las operaciones formales, de once-doce años a catorce-quince años. El niño llega a desprenderse de lo concreto orientándose hacia lo inactual, ha superado el aquí y el ahora, se hace capaz de sacar consecuencias necesarias de verdades simplemente posibles, lo que constituye el principio del pensamiento hipotético-deductivo o formal.

(1) PIAGET, J.: *Psicología de la inteligencia.* Ed. Psique, página 51.

ALGUNAS CARACTERISTICAS DEL MATERIAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA MODERNA

- *Manipulable*

De lo anteriormente expuesto se desprende que para el logro de las estructuras lógico-matemáticas en el niño, especialmente en el estadio preoperatorio (cuatro-siete años) y concreto (ocho-once años), será muy conveniente la utilización de un material manipulable, a fin de que las acciones que con él realice puedan pasar, mediante un proceso de interiorización, a constituir operaciones mentales.

Hasta edades bastante avanzadas se observa el hecho de que el niño, antes de poder deducir un resultado, se ve obligado a comprobarlo empíricamente para admitir su verdad. En los niveles preoperatorios, es decir, antes de los siete años, ocurre así con todas las verdades lógico-matemáticas descubiertas por el niño, comprendidas incluso las más evidentes, como la transitividad de la igualdad.

Hay que hacer constar, sin embargo, que en la utilización de este material por el niño no es la experiencia física lo que nos interesa, sino la lógico-matemática. No son los objetos, sino las acciones que con ellos se realizan, los que tienen un interés didáctico, porque las nociones matemáticas no se derivan de los materiales, sino de la captación del significado de las operaciones realizadas con dichos materiales.

- *Atributos claramente definidos*

Este material manipulable, que podrá ser figurativo, como en el caso de las fichas de personas, animales, vehículos, frutos, del método K M L de Touyarot, o no figurativo, como en los bloques lógicos de Dienes, regletas de Cuisenaire o plaquetas de Touyarot, deberá tener los atributos claramente diferenciados para la constitución de los conjuntos, pues no olvidemos que ya en 1872 Georg Cantor, el creador de la teoría de conjuntos, definía un conjunto como "la reunión de un todo de objetos de nuestra intuición o de nuestro pensar, bien determinados y diferenciables los unos de los otros". Desde un principio, por tanto, la definición de Cantor deja fuera de los conjuntos, considerados en el sentido matemático, aquellos cuyos objetos no están bien determinados.

● *Variabilidad*

La variabilidad es una cualidad del material para la enseñanza de la Matemática moderna, señalada por Dienes. El que se logre un concepto matemático dependerá de la habilidad para identificar y definir algo que tengan en común diversas experiencias concretas y distintas. La hipótesis de Dienes es que mientras más variados sean los modelos perceptivos a disposición del niño, más fácil será adquirir los conceptos.

Conforme con este criterio de variabilidad del material, Dienes ofrece numerosas estructuras distintas, sobre las cuales pueden efectuarse tareas matemáticas equivalentes. Así, al diseñar materiales estructurados en forma tal que faciliten el logro del concepto de *valor de posición*, en vez de usar bloques de base 10 exclusivamente, como otros autores, varía las bases en los llamados bloques multibase, que más tarde describiremos, y los niños, al jugar sucesivamente con los bloques de distintas bases, logran abstraer el concepto del valor de posición.

MATERIAL MAS UTILIZADO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA MODERNA ELEMENTAL

Vamos a limitarnos a la descripción de algunos de los materiales de uso más frecuente para la enseñanza de la Matemática moderna elemental, tales como:

- Bloques lógicos, de Dienes.
- Bloques multibase, de Dienes.
- Números en color, de Cuisenaire.
- Material Discart.
- Material K M L, de Touyarot.
- Minicomputador, de Papy.
- Geoplano, de Gattegno.
- Geoespacio, de Puig Adam.
- "Construyamos la geometría", de Emma Castelnuovo.

LOS BLOQUES LOGICOS, DE DIENES

Tienen como finalidad iniciar a los niños de cinco a siete años en la teoría de los conjuntos y en la lógica. William Hull fue el primero que utilizó estos bloques como auxiliares en el aprendizaje de la lógica. Posteriormente los ha utilizado Dienes en las escuelas de Australia y Canadá.

Los bloques lógicos constan de 48 elementos, que tienen cuatro atributos:

- Forma.
- Color.
- Tamaño.
- Grosor.

Según la forma, existen cuatro variantes: cuadrado, círculo, triángulo y rectángulo.

Según el color, tres variantes: rojo, azul, amarillo.

Según el tamaño, dos variantes: grande y pequeño.

Según el grosor, dos variantes: grueso y delgado.

Hay, por tanto, 12 bloques de cada una de las cuatro formas.

24 bloques delgados y 24 bloques gruesos.

24 bloques grandes y 24 bloques pequeños.

16 bloques rojos, 16 azules y 16 amarillos.

Para distinguir un bloque de los otros 47 es necesario dar sus cuatro atributos. Estas cuatro categorías de atributos sirven de criterio para reunir los bloques cuando se constituyen los conjuntos.

Permiten adquirir jugando las nociones fundamentales sobre conjuntos. Las primeras experiencias matemáticas de los niños deben ser precisamente a propósito de los conjuntos, el número vendrá después como propiedad de los conjuntos equivalentes.

Los bloques lógicos suministran al niño numerosas situaciones que le obligan a realizar investigaciones lógicas y matemáticas. Juegan con problemas y situaciones que encontrarán más tarde en el plano del pensamiento abstracto.

Los primeros juegos con este material tienen por finalidad conducir a los niños al conocimiento de los bloques. Dentro de estos juegos preliminares tenemos el llamado del "retrato", que consiste en describir cada uno de los bloques, precisando sus cuatro atributos. Así: "éste es un bloque redondo, amarillo, pequeño, delgado". Sucesivamente, cada niño tomará un bloque y lo describirá.

El juego inverso es la elección de un bloque entre los 48, dando la descripción: "Busca un bloque que sea..." Aquí puede hacerse el juego más divertido no fijando más que dos o tres atributos: "Busca todos los bloques que sean redondos y azules".

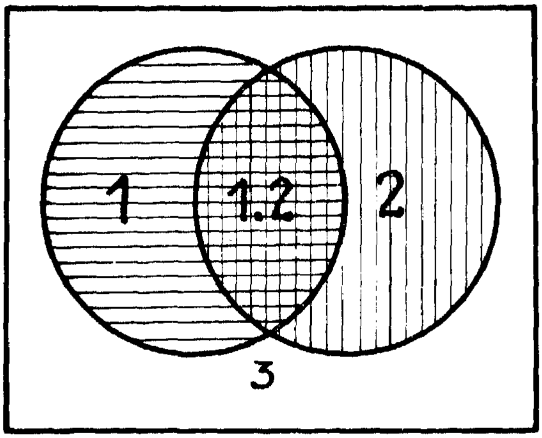
Juegos de diferencias y semejanzas, en los que intervienen varios niños. Son juegos sociales. Se trata de hacer, como en los juegos de dominó, una cadena de bloques, poniendo un bloque a continuación del otro, de forma tal que tengan con el precedente una, dos o tres diferencias o semejanzas de atributos. El juego da lugar a discusiones interesantes entre los niños.

Después de bien conocidos los bloques mediante los juegos preliminares, se pasa a la constitución de los conjuntos. Los bloques con sus cuatro atributos permiten la formación de gran variedad de conjuntos. Primero se comenzará con la formación de conjuntos cuya característica esté constituida por un solo atributo: "Formad el conjunto de los bloques redondos o bien el de los bloques azules..." Después se pasará a los conjuntos cuya característica esté constituida por dos atributos: el conjunto de los bloques rojos y redondos, o por tres atributos: rojos, redondos y gruesos...

Otros juegos interesantes son los de dos aros para la búsqueda de las intersecciones. Se dice al niño:

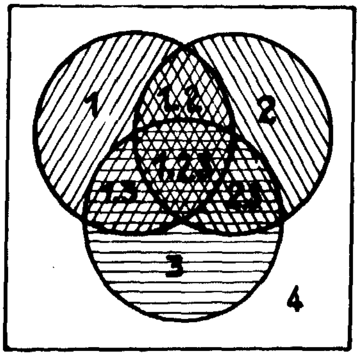
— Forma el conjunto de los bloques rojos metiéndolos dentro de un aro (diagrama de Venn).
— Forma otro conjunto, el de los bloques redondos, por ejemplo.

Los niños descubrirán que existen bloques que son rojos y redondos. ¿Dónde los colocarán? Unos los pondrán con los redondos, otros niños los quitarán de este conjunto y los pondrán en el de los rojos. Se procurará que sean los mismos niños quienes descubran que estos bloques rojos y redondos tienen que colocarse en el espacio en que los dos aros se superponen, porque este sector pertenece tanto al interior del aro rojo como al del aro de los redondos.



1. Rojos, no-redondos.
2. Redondos, no-rojos.
1.2. Rojos y redondos.
3. No-redondos, no-rojos.

Complicando el ejercicio, pueden hacerse juegos con tres aros:



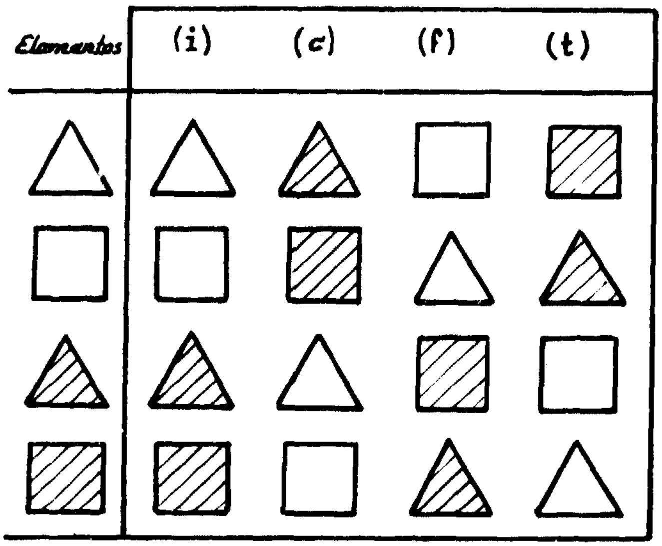
1. Redondos, no-rojos, no-pequeños.
2. Rojos, no-redondos, no-pequeños.
3. Pequeños, no-redondos, no-rojos.
1.2. Redondos, rojos, no-pequeños.
1.3. Redondos, pequeños, no-rojos.
2.3. Rojos, pequeños, no-redondos.
1.2.3. Redondos, rojos, pequeños.
4. No-redondos, no-rojos, no-pequeños.

Entre los elementos de un conjunto pueden separarse los que tienen una propiedad no poseída por otros, constituyendo subconjuntos. Así, en el conjunto de los bloques redondos se pueden aislar tres subconjuntos, según el color, o dos subconjuntos, según la magnitud, y otros dos, según el espesor. Dentro del aro mayor, con cuerdas o aros menores, podrán los niños aislar los subconjuntos y adquirirán así la idea de inclusión.

Los juegos de *transformaciones*, que conducen al niño al descubrimiento de las propiedades de los grupos matemáticos; así:

- Juego de reproducción o copia (i).
- Juego de copia con cambio de colores (c).
- Juego de copia con cambio de forma (f).
- Juego de copia con cambio de color y forma (t).

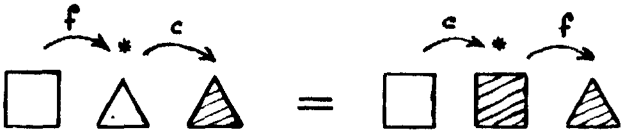
Naturaleza de las transformaciones



Este tipo de juegos, al principio, suelen jugarse en dos equipos. Sea, por ejemplo, el de copia con cambio de colores. Cada equipo dispone de los mismos bloques, pero todos ellos son solamente dos colores: rojo y azul. El primer equipo construye una combinación y el segundo copia la construcción, pero con la condición de que si los primeros ponen un bloque azul, los segundos pondrán un bloque de la misma forma, pero rojo e inversamente.

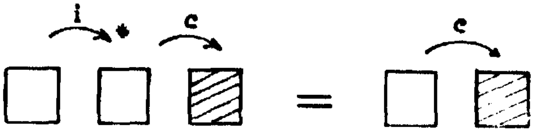
Con estos juegos podrán descubrir los niños las propiedades de:

- Cerradura.
- Conmutatividad:

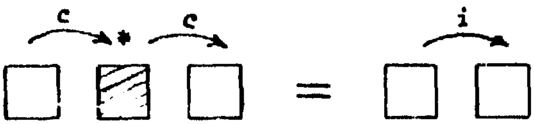


- Asociatividad:

- Elemento neutro:



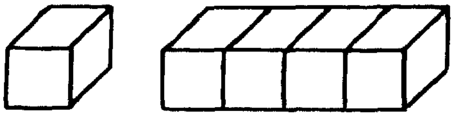
- Elementos simétricos:



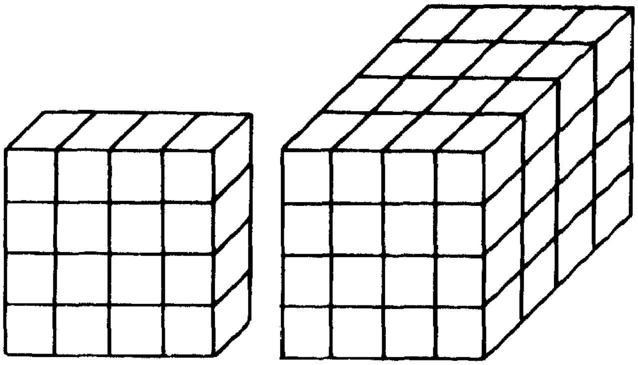
BLOQUES ARITMETICOS MULTIBASE (BAM), DE DIENES

Este material está orientado hacia la comprensión del concepto del valor de posición.

El material se presenta en cajas, una por cada base de numeración. En cada caja se encuentran: unidades, barras, placas y bloques. Así, en la caja para la base 4 encontraremos piezas como éstas:



Unidad 1 — barra 4



placa 16 — bloque 64

Antes de llegar a los ejercicios estructurados, los niños jugarán libremente con este material. Siguen después juegos como los siguientes:

Supongamos que dos niños tienen la caja de base 3, por ejemplo. En las caras opuestas de un cubo unidad se ponen, pegando papeles, las cifras 0, 1, 2 y se utiliza como dado. La primera tirada del dado es para sacar bloques. Cada niño coge tantos bloques como el número que ha sacado al tirar. Vuelven a tirar el dado para sacar las placas, después para sacar las barras y, por último, para sacar las unidades. El niño que consigue mayor montón de madera, gana.

Pronto llega a comprender, especialmente el niño que pierde antes, que es la primera tirada de dados la que tiene más importancia y que quien gana en esa tirada ha ganado ya prácticamente la partida.

Si los dos sacan cero en la primera tirada, entonces es la segunda la que tiene una importancia vital, y así sucesivamente.

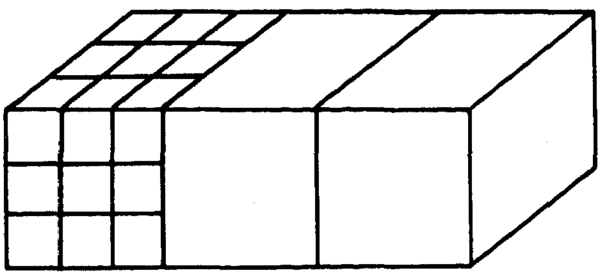
Después de algún tiempo se cambiará el orden del juego, comenzando por las unidades y terminando por los bloques. El juego así es más apasionante, puesto que los niños no saben quién gana hasta el final. Esto enseña al niño, además del valor de posición, que el orden, en realidad, es arbitrario; antes las potencias eran decrecientes, ahora son crecientes.

Harán juegos semejantes con las demás cajas para que no se liguen a la propiedad particular de una determinada base y darles así ocasión de comprender las propiedades comunes a todas las bases.

En una segunda etapa, el maestro puede sugerir juegos más estructurados. En ellos, el niño se dará cuenta que en la caja de base 3, por ejemplo, 3 unidades forman una barra, 3 barras una placa, 3 placas un bloque.

El pensamiento, según Dienes, procede según un camino constructivo y según un camino analítico. En esta primera etapa, constructiva todavía, no es consciente el niño del aspecto analítico de su construcción: la razón 1 : 3, pero las construcciones que realiza con materiales son muy importantes en la comprensión ulterior de la razón, de las progresiones geométricas, de las potencias, de la comprensión de los distintos sistemas de numeración.

Cuando el niño ha comprendido la estructura de todas las cajas se plantea el problema de qué hay después de los bloques. Los niños generalizan pronto y ponen tres bloques juntos en la caja de base 3, cuatro en la de base cuatro y así sucesivamente para constituir el orden inmediato superior. A esta construcción se suele llamar barra de bloques, por analogía con las barras, pero Dienes nos dice que muchos niños las llaman torres, porque hacen sus construcciones poniendo los bloques unos encima de otros.



barra de bloques = 81 unidades

Cuando los niños ya no tienen más madera en la caja pueden continuar el ejercicio imaginativamente y, al menos en teoría, se puede proseguir el proceso indefinidamente. Esta es, tal vez, dice Dienes, la primera puerta que se abre sobre el concepto de "infinito", que todos los niños encuentran extremadamente apasionante.

Asimilada la naturaleza abierta y la estructura del material se puede pasar a otros ejercicios, que conducen a las operaciones aritméticas. Veamos la adición, por ejemplo. Sea la base 3:

1 bloque	2 placas	2 barras	2 unidades
	1 placa	2 barras	2 unidades

Adicionando las piezas semejantes y aplicando las equivalencias, se obtiene:

2 bloques	1 placa	2 barras	1 unidad

Los niños se acostumbrarán después a anotar lo que realizan con los bloques multibase. Así:

$$\begin{array}{rcccc} & B & P & B & U \\ & 1 & 2 & 2 & 2 \\ + & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Es conveniente, igualmente, que en las operaciones los niños utilicen las cajas de las diferentes bases.

NUMEROS EN COLOR, DE CUISENAIRE

Este material fue creado por Georges Cuisenaire, maestro de Thuin (Bélgica), y dado a conocer internacionalmente en 1954 por C. Gattegno, profesor de la Universidad de Londres.

El material está constituido por 241 regletas de 1 a 10 cm. de longitud y de 1 cm.^{2} de superficie de base:

50 regletas de 1 cm., de color madera natural.
50 regletas de 2 cm., de color rojo.
33 regletas de 3 cm., de color verde claro.
25 regletas de 4 cm., de color rosa.
20 regletas de 5 cm., de color amarillo.
16 regletas de 6 cm., de color verde oscuro.
14 regletas de 7 cm., de color negro.
12 regletas de 8 cm., de color marrón.
11 regletas de 9 cm., de color azul.
10 regletas de 10 cm., de color naranja.

Las regletas están agrupadas en tres familias:

- Familia de los rojos: 2-4-8, que ponen en evidencia los dobles, las mitades y las potencias del 2.
- Familia de los azules: 3-6-9, que ponen en evidencia los triples, tercios y la segunda potencia del 3.
- Familia de los amarillos: 5-10.
- El blanco y el negro están solos.

Es un material muy rico en posibilidades para la actividad creadora del niño, que guiado por el maestro llegará a descubrir por sí mismo las relaciones matemáticas que se deseen.

Los ejercicios primeros, espontáneos, suministran al niño la experiencia de la equivalencia de regletas de igual color y de la equivalencia de cada regleta con alineaciones compuestas de otras dos o más.

La acción de adosar y alinear sugiere al niño las ideas de igualdad y suma.

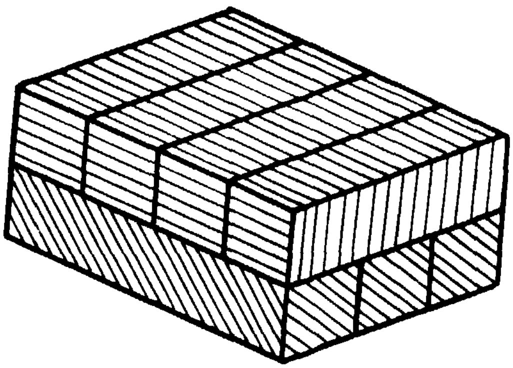
El niño al buscar la regleta que falta para completar con otra una regleta mayor invierte la operación de suma, es decir, resta complementando.

La formación de trenes de igual color, mediante alineación de regletas iguales, origina simultáneamente los conceptos de múltiplo y divisor, de producto y cociente.

La idea de número primo se pone de manifiesto al comprobar que no todas las regletas se pueden descomponen en otras de igual color.

Puede descubrir las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, asociando y permutando las regletas.

Hay niños que empiezan el juego ordenando escaleras. La estructura de orden es ejercitada por este material.

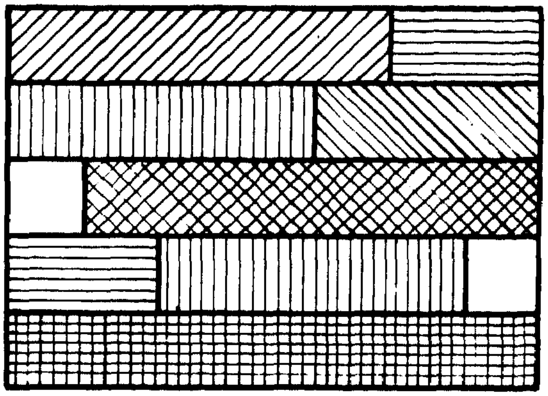


$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

Otros niños clasifican adosando unas al lado de otras las regletas de igual longitud. Forman así placas que pueden ser cubiertas por otro sistema de regletas en el sentido del ancho. Esta experiencia sugiere la conmutatividad del producto.

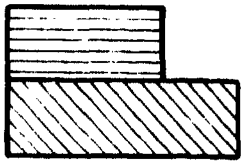
Puede descubrir manipulando las regletas familias de:

- Sumas equivalentes.
- Diferencias equivalentes.
- Productos equivalentes.
- Cocientes o fracciones equivalentes.

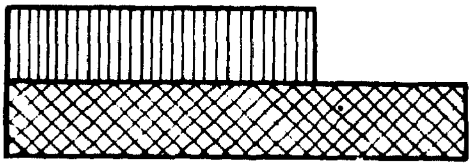


$$5 + 2 = 4 + 3 = 1 + 6 = 2 + 4 + 1 = 7$$

Es interesante el uso que hace Gattegno de este material para la enseñanza de las fracciones, consideradas como pares ordenados, comparando dos regletas, con lo que el concepto de fracción como razón que lleva implícito el par ordenado desplaza al concepto tradicional de fracción como operador.

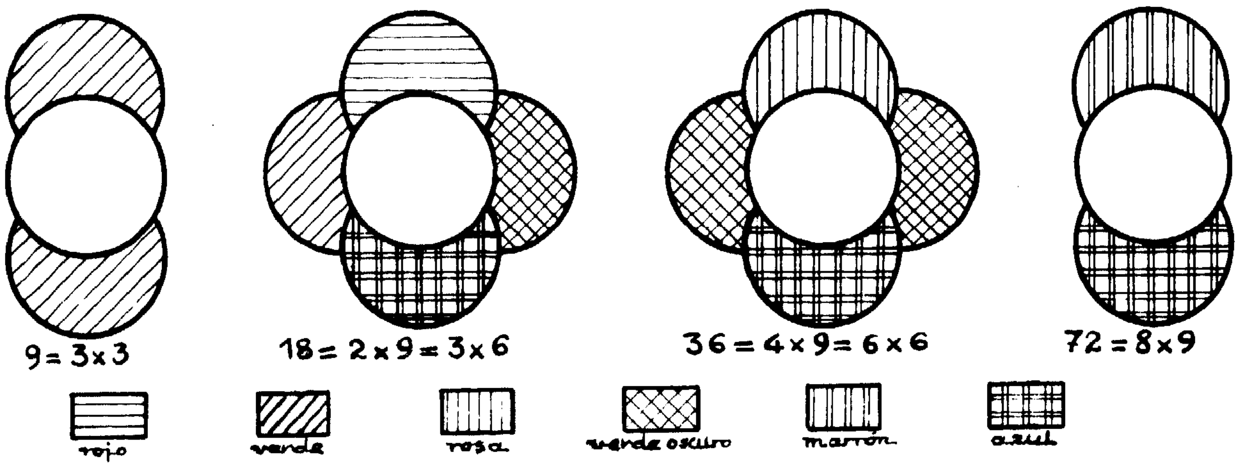


$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{4}{6}$$

Como complemento del material básico de las regletas existe en el material Cuisenaire-Gattegno una tabla de productos. Estos productos están expresados por dos lúnulas, coloreadas de acuerdo con los colores y valores de las regletas. Esta tabla se utiliza después que el niño ha descubierto los productos con las regletas.



Este material incluye también un juego de lotería de productos y un juego de naipes con productos, que consta de 37 tarjetas, cada una de las cuales lleva un producto expresado en la misma forma que se ha indicado anteriormente.

EL METODO DISCAT

Este material fue creado en Ginebra por las señoras Audemars y Laffendel, bajo la dirección de Claparède y de Piaget, para la "Maison des Petits", del Instituto J. J. Rousseau. Está compuesto por:

- Las columnas de evaluación, en número de cuatro, formadas por esferas, cubos, paralelepípedos y ovoides, en diez dimensiones crecientes. Todos estos volúmenes están perforados según un eje para que sea posible ensartarlos verticalmente en una varilla de metal. Permiten la clasificación según la forma y la seriación según el tamaño.

- Los bloques, en número de 66, son paralelepípedos con base cuadrada de 1 cm.^{2} y alturas que van de 1 a 20 cm. Son el precedente de los números en color de Cuisenaire. Los niños utilizan estos bloques como piezas de juego de construcción antes de realizar equivalencias entre dos o más bloques y un bloque suma de éstos. Permiten realizar sumas y diferencias, de 1 a 20, y el estudio de dobles y mitades.

- Las superficies, en número de 576, son figuras de cartón de distintas formas y colores. Cada forma se presenta en cuatro tamaños: la mitad, el cuarto y el octavo de la primera. Los rectángulos y los triángulos guardan una razón constante con los cuadrados. Así, el rectángulo menor es 1/8 del cuadrado mayor; el triángulo menor es 1/2 del rectángulo menor y, por tanto, 1/16 del rectángulo mayor y 1/32 del cuadrado mayor. Este material tiene grandes posibilidades para la comprensión de las áreas, de las fracciones...

- La tabla de las 100 bolas, en la que hay 100 pequeñas varillas de metal, en las que el niño puede fijar 10 decenas de bolas de 10 colores diferentes. Partiendo de simples composiciones de mosaico, el niño llega a descubrir los números cuadrados y triangulares, calcula el aumento del cuadrado...

- Las pilas de discos, que comprende 100 discos de madera, en 10 colores, perforados en el centro; las construcciones, las pirámides, el ábaco de las 55 bolas, son otros materiales de este método.

De acuerdo con las ideas de Piaget, con este material se quiere conducir al niño de la experiencia sensomotriz a la abstracción; llevarle a realizar clasificaciones, ordenaciones; darle el sentido del número, la noción de medida, el sentido de las operaciones...

Este material está destinado especialmente a niños de tres-siete años.

MATERIAL DEL METODO K M L. DE TOUYAROT

Tiene como finalidad este material iniciar en la Matemática y en la Lógica, de ahí su designación K M L (K es el símbolo internacional que reemplaza a la conjunción y M y L son las iniciales de Matemática y Lógica, respectivamente).

Consta de:

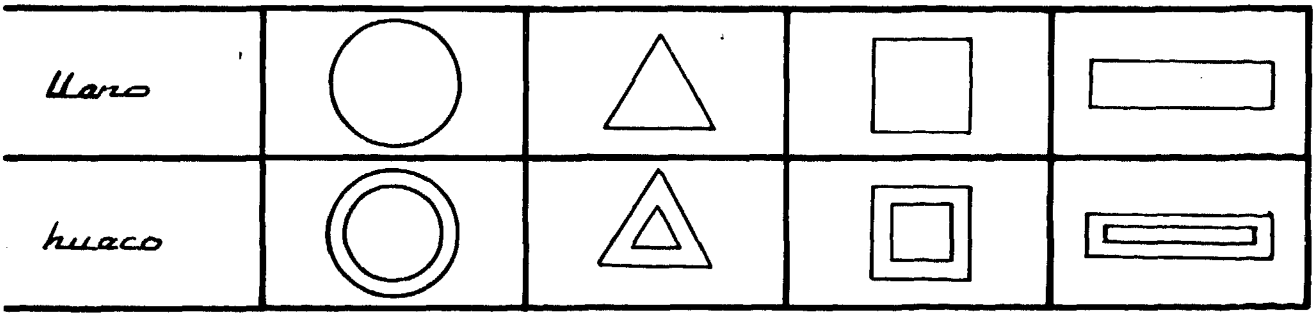
- Seis series de figuras:
  - — Personas y objetos.
  - — Animales.
  - — Vehículos.
  - — Frutos.
  - — Cifras.
  - — Signos y cualidades de las placas.

- Tres series de 10 cubos iguales encajables, en material plástico, en tres colores:
  - — Azul.
  - — Rojo.
  - — Amarillo.

- Seis cordones de color, para limitar los conjuntos.

- Cuarenta y ocho placas en material plástico. Estas placas se caracterizan por cuatro atributos:
  - — Forma: círculo-triángulo-cuadrado-rectángulo.
  - — Tamaño: grande-pequeño.
  - — Color: rojo-azul-amarillo.
  - — Interior: lleno y hueco.

Las 24 placas de cada tamaño tienen superficies equivalentes.



Se completa este material con fichas para la enseñanza individualizada. Estas fichas son material puramente gráfico. Se trata con ellas de que el niño descubra las ideas de:

- Conjunto.
- Pertenencia a un conjunto.
- Correspondencia biyectiva entre los elementos de dos conjuntos.

- Descubrimiento del número a partir de los conjuntos equivalentes.
- Subconjuntos.
- Inclusión.
- Conjunto complementario.
- Intersección de conjuntos.
- Unión de conjuntos.
- Estructura del número y sentido de las operaciones.

Estas fichas proponen a los niños problemas con imágenes. Cada paso del pensamiento es traducido por un trazo conveniente: flecha que señala una relación entre objetos, línea cerrada en torno a los elementos de un conjunto, etiqueta unida a un conjunto...

De aquí los niños pasarán a representar los objetos por medio de signos: cruces, puntos..., en lugar de emplear dibujos figurativos, y progresan así hacia la esquematización de las situaciones concretas.

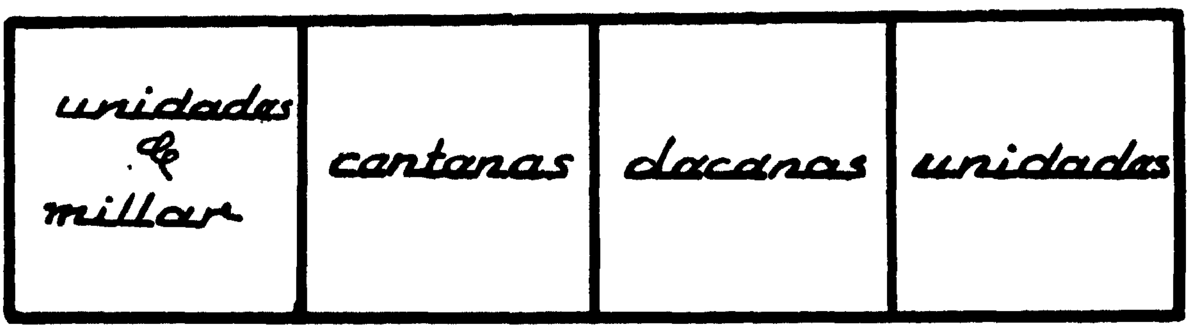
EL MINICOMPUTADOR, DE PAPY

Fue presentado por su autor en el XXI Encuentro Internacional de Profesores de Matemáticas celebrado en Gandía en abril de 1968. Papy lo presentó como una auténtica máquina de calcular que funciona como un pequeño ordenador que realiza de manera mecánica lo que es automático en el cálculo. Está inspirado en los trabajos de monseñor Lemaitre, publicados entre 1954 y 1956. Ha sido utilizado por Mme. Frédérique Papy en clases de niños de seis y siete años a partir de septiembre de 1967.

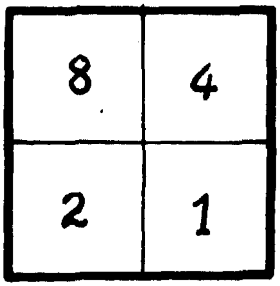
El minicomputador combina el sistema decimal y el sistema binario. Así como Dienes y otros consideran que es conveniente que los niños conozcan distintos sistemas de numeración, Papy da preferencia al binario, ya que es el sistema de las calculadoras y además nos permite con números pequeños introducirle en la idea del valor de posición. Pero, por otra parte, nuestro contexto es decimal, no podemos prescindir de este sistema.

Es un material distinto de las regletas de Cuisinaire o los bloques de Dienes. Cuando se da al niño regletas o bloques, dice Papy, los niños hacen con este material cierto número de experiencias matemáticas. Cuando se les da el minicomputador los niños no están en condiciones de hacer experiencias válidas por sí solos hasta que los inicia el maestro.

El minicomputador consiste en un ábaco de placas que se alinean de derecha a izquierda según las reglas de la numeración decimal: en la primera placa se colocan las unidades; en la segunda, las decenas...

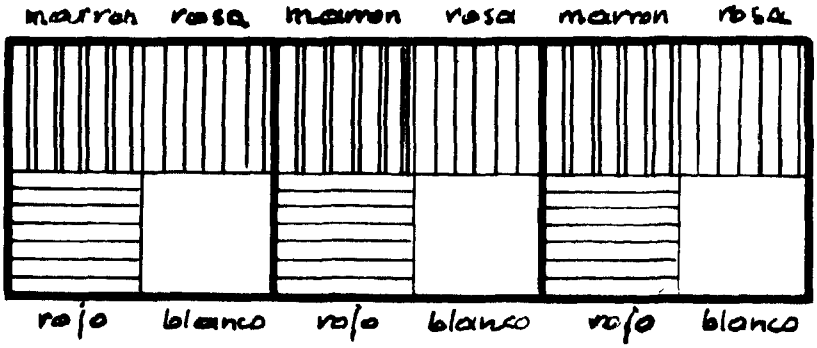


Cada placa está dividida en cuatro casillas, en las que se utiliza el sistema binario.



Estas casillas son de color blanco, rojo, rosa y marrón. Estos colores son los correspondientes a las regletas de Cuisinaire 1, 2, 4 y 8, respectivamente.

Por eso, Papy define el minicomputador como un ábaco bidimensional binario sobre cada placa, decimal lineal de placa a placa.



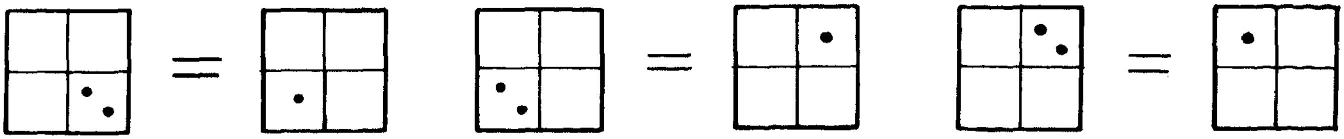
Los niños a los que anteriormente ya se ha enseñado el manejo de las regletas, cuando ven el minicomputador reconocen los colores y los valores de las casillas.

Los niños saben que:

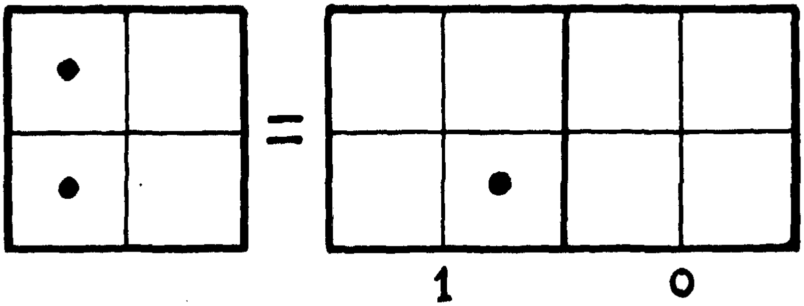
Dos regletas blancas = una roja.
Dos rojas = una rosa.
Dos rosas = una marrón.

Así, la primera regla del minicomputador se introduce con gran facilidad:

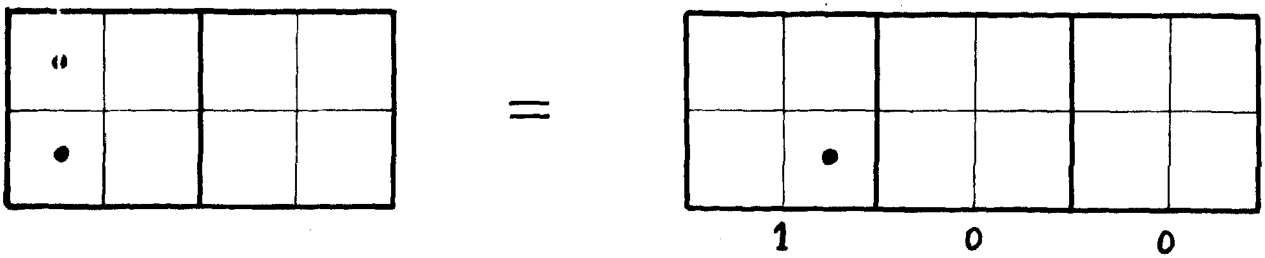
Dos dichas en el casillero blanco = una ficha en el rojo.
Dos fichas en el casillero rojo = una ficha en el rosa.
Dos fichas en el casillero rosa = una ficha en el marrón.



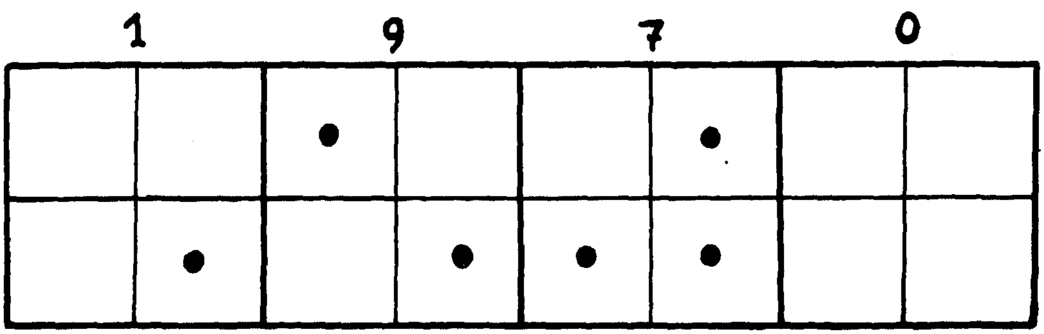
Cuando se pasa de una placa a la otra la regla cambia.



Al principio los niños juegan con dos placas. Después el propio niño siente la necesidad de llegar a las centenas. Mme. Frédérique Papy dice que algunos niños a los quince días de usar el minicomputador manifestaron esta necesidad.



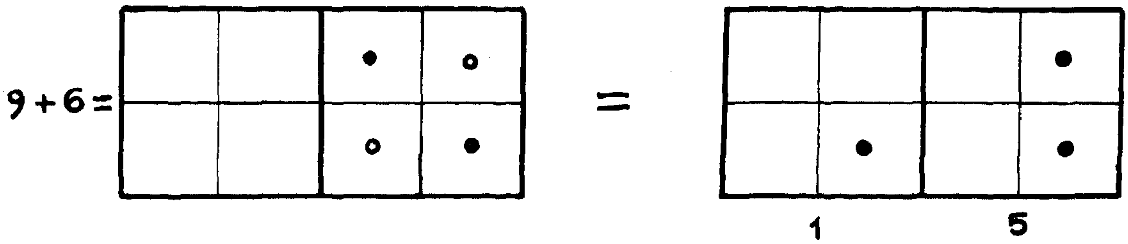
Papy llama formaciones a las disposiciones que permiten leer inmediatamente un número en el minicomputador. Así la formación de 1970 sería:



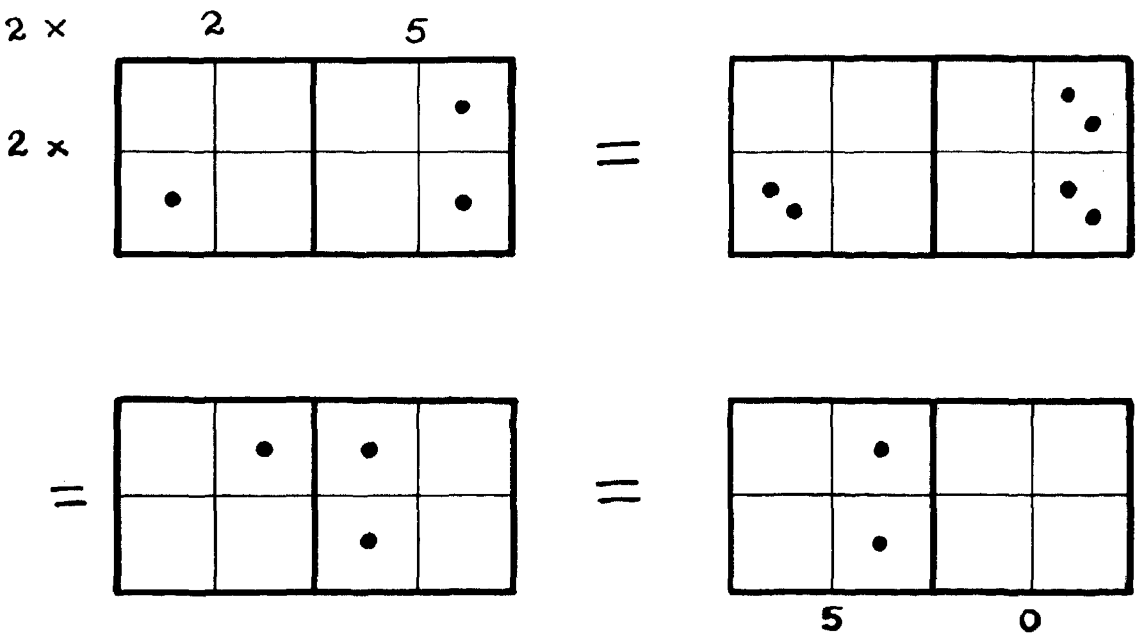
En una formación:

- Nunca hay más de una ficha por casilla.
- Si una ficha está en la casilla marrón entonces no debe haber ninguna ficha ni en el casillero rojo ni en el rosa.

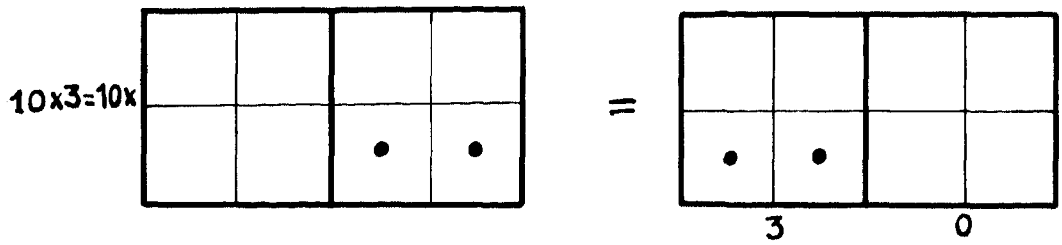
Con el minicomputador pueden realizarse adiciones. Basta escribir en la máquina cada uno de los sumandos y después hacer las sustituciones de acuerdo con las reglas anteriores. Así:



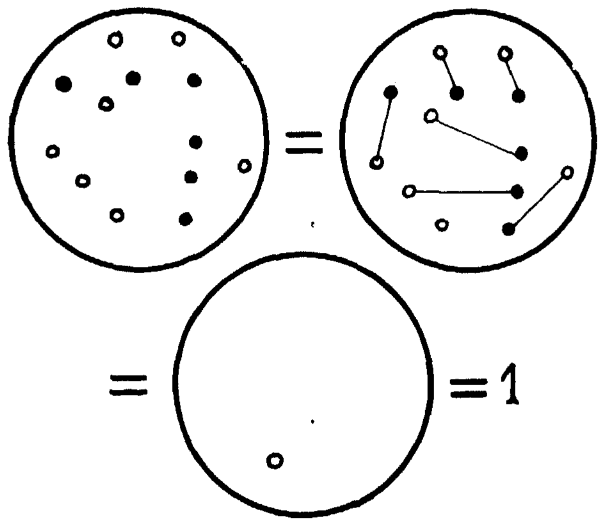
Igualmente pueden realizarse multiplicaciones. Para multiplicar por 2 un número, cada ficha de una casilla se reemplaza por dos fichas en esa casilla y después se hacen las sustituciones correspondientes. Así:



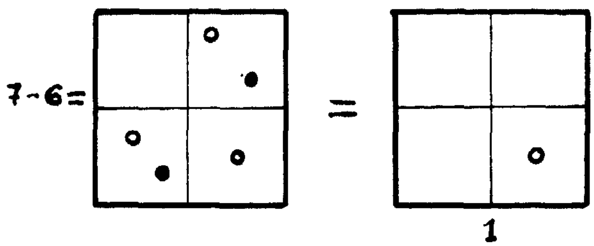
Multiplicar por 4 en el minicomputador sería multiplicar por 2 dos veces. Multiplicar por 8 sería multiplicar por 2 tres veces. Multiplicar por 3 un número equivaldría a juntar su doble a este número. Para multiplicar un número por 10 bastará pasar dicho número a la placa inmediata a la derecha. Así:

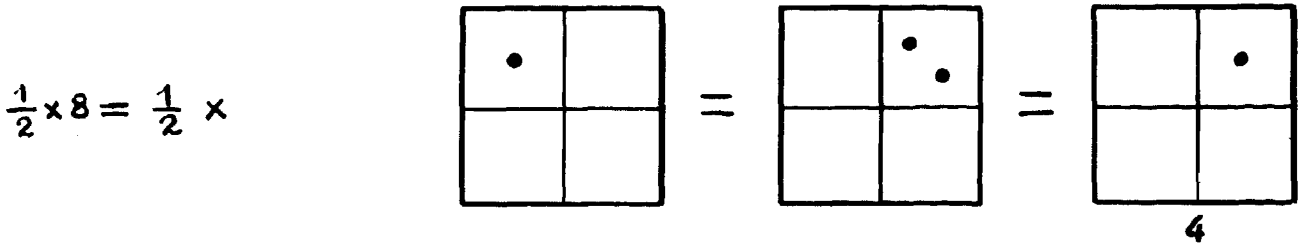


Para la sustracción. Papy comienza enseñando a los niños los números negativos. Comienza presentando un ejército constituido por fichas rojas y otro por fichas azules. Las fichas soldados de ambos colores son igualmente valerosas individualmente e igualmente batalladoras. Cada vez que una ficha roja y una ficha azul se encuentran en el campo de batalla, se eliminan mutuamente.



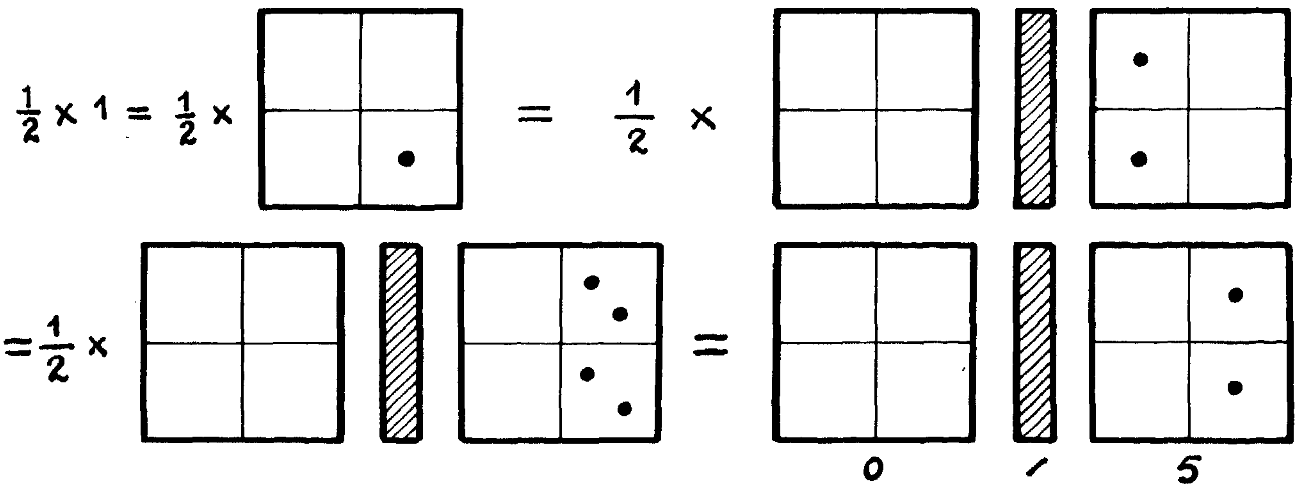
Y en el minicomputador sería:





En el minicomputador, para hallar la mitad se reemplaza cada par de fichas de una casilla por una sola ficha en esa misma casilla.

Al pasar a la mitad de la unidad se llega a la idea de operación con decimales.



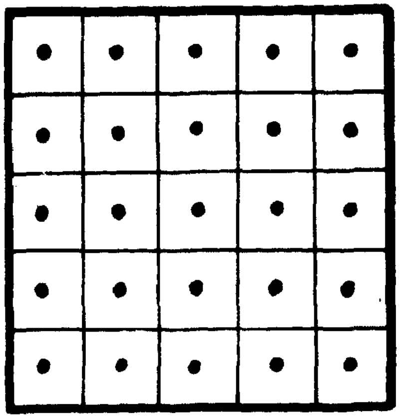
El listón verde de madera que se coloca separando la placa que se adjunta a la derecha hace el papel de la coma en la notación decimal. Así puede operar el niño con decimales con las nuevas placas introducidas después del listón verde siguiendo las mismas reglas anteriormente dadas.

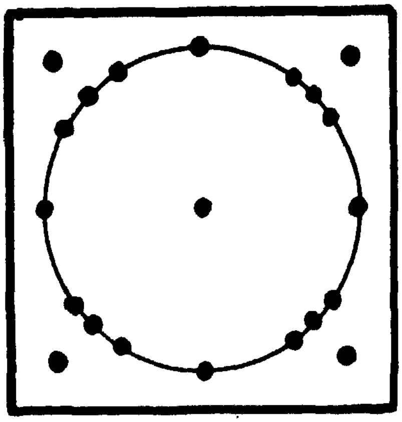
El minicomputador puede ser un magnetógrafo grande, del tamaño de un encerado, o también placas pequeñas de madera o metálicas para que los niños sobre la mesa realicen las operaciones individualmente.

EL GEOPLANO

Es un material imaginado por Gattegno para que los niños tomen conciencia de las relaciones geométricas. Se trata de un tablero sobre el que se colocan clavos formando una red. Estos clavos sirven de soporte para tender sobre ellos gomas elásticas de colores.

Los dos tipos más corrientes de geoplano son los que se presentan en las figuras. Las redes que ha utilizado Gattegno son el dodecágono, el decágono y el octógono regulares, y las cuadriculadas de 9, 16, 25, 49 y 121 puntos.





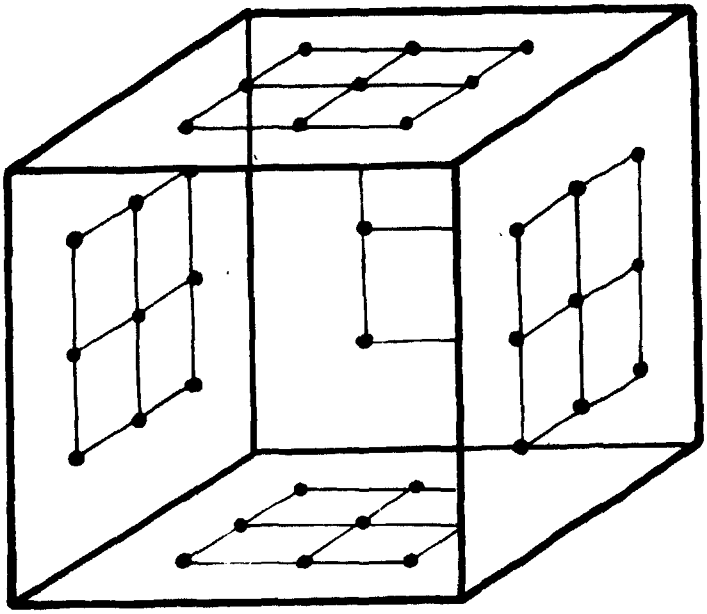
La gran ventaja que tiene el geoplano es que el tablero puede girar y el niño se habitúa a percibir las figuras desde distintos ángulos visuales y a reconocerlas independientemente de su posición, lo que no suele ocurrir ni con el encerado ni con el libro.

Este material permite la investigación personal del alumno y puede ser utilizado a lo largo de toda la enseñanza general básica.

EL GEOESPACIO

Ampliando la idea del geoplano al espacio ha surgido el geoespacio. Puig Adam en España, Pescarini en Italia y Chiavone en Uruguay fueron quienes idearon estos modelos didácticos.

Para la construcción de un geoespacio—dice Puig Adam—puede servir una caja de embalar de dimensiones no inferiores a 25 cm. en la que se ha suprimido una de sus caras de mayores dimensiones, con objeto de poder manipular cómodamente en su interior, atornillándose, en cada una de las otras caras, redes de tornillos con gancho distribuidos uniformemente. Entre estos tornillos podemos tender gomas elásticas o cordeles, que unas veces tendrán la significación de rectas indefinidas y otras representarán aristas de figuras poliédricas transparentes.



También pueden construirse geoespacios conservando únicamente las aristas de madera o de otro material rígido y poniendo en sustitución de las cinco caras de madera rejas metálicas resistentes.

OTROS MATERIALES

En modo alguno pueden considerarse los materiales citados como únicos en la didáctica de la Matemática Moderna. Muy interesantes son entre otros materiales el de Emma Castelnuovo denominado "Construyamos la geometría", constituido por tiras de plástico de diferente longitud y color, parecidas a las piezas de mecano. Con ellas se puede realizar gran número de sistemas articulados con los que el niño se da cuenta que al modificar un polígono cualquiera el perímetro permanece invariable mientras que el área cambia. Así vemos que un rectángulo construido de este material, al transformarse en romboide, sufre ciertos cambios: varía la superficie, la medida de cada ángulo, la longitud de las diagonales, en tanto que otros caracteres permanecen invariables: el perímetro, la medida de cada lado, la suma de los ángulos internos y externos...

Los films para la enseñanza de las matemáticas como los utilizados por el suizo Nicolet, el inglés Fletcher, los franceses Cantegral, Jacquemard y Motard.

Las fichas de Mme. Picard. Las fichas de trabajo individualizado del alumno de Somosaguas para niños de diez, once y doce años. Las placas de madame Herbinière-Lebert para la iniciación al cálculo...

A lo largo de este artículo nos hemos estado refiriendo a materiales más o menos estructurados, pero podemos utilizar en la enseñanza de la Matemática Moderna otros muchos materiales ambientales.

Las nuevas directrices en la Enseñanza Matemática y su resonancia internacional

Por ISABEL DIAZ ARNAL
Jefe del Departamento de Educación Especial

I. La renovación matemática y la lógica infantil

¿En qué medida la evolución de la ciencia matemática, de una parte, y el desarrollo simultáneo y convergente de los estudios lógicos, de otra, abren muchas perspectivas para la enseñanza elemental?

La renovación actual de los estudios matemáticos, que ha afectado a la enseñanza superior, después a la secundaria y ahora a la elemental, debe ser comparada a un mar de fondo que remueve el océano en sus profundidades y no a una luz de bengala que encante un instante la mirada para desvanecerse después sin dejar rastro.

Las razones del fenómeno son tan múltiples e intrincadas a la vez, que no se las puede asignar como origen ni la sola progresión de las ciencias teóricas, como matemática o psicología, ni las exigencias pedagógicas exclusivas. Se trata más bien de la reunión asombrosa de varias corrientes de pensamiento de las cuales las más importantes son de orden matemático, lógico, psicológico y pedagógico; este encuentro está favorecido, además, por una coyuntura histórica marcada por la modificación de estructuras de la enseñanza, por necesidades socioprofesionales modificadas y por la vetustez del cuerpo de doctrinas y métodos que ha regido hasta el presente la enseñanza de las matemáticas.

Para apreciar el valor del cambio conviene, en primer lugar, explicar las razones:

Rigurosamente hablando, sólo las comprobaciones precisas permiten zanjar la dificultad: por el momento se puede tomar conciencia de la **actitud de los niños**—mayor interés, dinamismo, esfuerzos creadores y de **las impresiones de éxito**—, mejor comprensión, aptitud de analizar, de razonar, de transferir el todo sin verbalismos ni mecanismos.

La evolución de la matemática es, sin duda alguna, **el motor principal del cambio.** Los matemáticos no gustan mucho de la expresión «matemática moderna» porque saben que esta ciencia no ha dejado de avanzar jamás desde la antigüedad a nuestros días; y como ocurre en las demás ciencias, el avance ha tenido en algunas ocasiones impulsos más violentos, como Euclides en la Grecia clásica, con Descartes en el siglo XVII y con Galois, Cantor e Hilbert en el XIX.

El último impulso ha modificado al aspecto de la matemática y a la vez ha reorganizado la arquitectura y multiplicado el poder.

De una matemática desarrollada en abanico, subdivida en ramas y subramas, Galois comprende la necesidad urgente de garantizar la coherencia de las teorías empleando la atención en la estructura de los razonamientos, y Cantor prosigue este trabajo de unificación creando la teoría de los conjuntos, que suponía un apoyo adecuado para representar en los razonamientos cualquier objeto. Paulatinamente, toda la matemática se remodelaba en torno a las nociones de conjunto, de relación, de estructura, y perdían su hegemonía los números y las figuras, consideradas hasta entonces como seres matemáticos primarios, comienzo de toda enseñanza.

El número, lejos de ser un hecho primario, reposa sobre relaciones entre colecciones; la correspondencia entre elementos de varias colecciones, término a término, permiten concluir que ellas tienen el mismo número de elementos y desembocan en la creación de **clases de conjuntos** que tienen el mismo número de objetos. Cada una de estas clases se caracteriza por un número, pero antes de llegar a está propiedad común será preciso conducir a los niños en el reconocimiento de algunas propiedades; y el descubrir que dos objetos tienen una misma propiedad, es descubrir que estos dos objetos tienen una **relación;** el color, por ejemplo.

Todas las actividades de agrupamiento, de apartado, clasificación, ordenación, vienen a ser el basamento de todo el edificio matemático. Es, pues, fácil de comprender que se queman las etapas y se atropella el orden necesario cuando se pone al niño sin preparación frente al número.

El aprendizaje de las observaciones interviene con la misma impreparación y la misma inoportunidad: el niño no puede comprender de golpe que una reunión de objetos pueda traducirse por la igualdad aritmética $5+x=8$; es preciso primero que sean comprendidas la significación del código $5 + 3$, la del signo $=$ y la identificación de los códigos x y 8. Aquí todavía el punto de vista conjuntista permite organizar una progresión coherente, al mismo tiempo que más cómoda y fecunda. Son las operaciones sobre los conjuntos mismos (intersección y reunión de conjuntos cualesquiera separados) que permitirán plantearse que el número suma de dos números cualesquiera es el cardinal de la reunión de dos conjuntos distintos; el estudio de las operaciones, así como de las relaciones de desigualdad entre números naturales, permitirán en seguida descubrir que el conjunto de estos números está provisto de estructuras asociadas a las operaciones y relaciones consideradas.

En todos los niveles de adquisición el punto de vista conjuntista, que permite jugar con relaciones y estructuras, da a la iniciación matemática una solidez nueva.

Este orden se encuentra apropiado a las leyes psicológicas del desarrollo intelectual y a las enseñanzas (conocimientos) de la psicología del aprendizaje. En efecto, no se puede pasar imprudentemente de las estructuras familiares a las expresiones simbolizadas; la abstracción necesaria se cumple por etapas y se funda en acciones efectivas. Es preciso que el niño dibuje, manipule, compare, clasifique, antes de representar relaciones y conjuntos; ésta es la primera etapa que le permite interpretar una situación real de forma simplificada. Cuando se le deja un margen de iniciativa se puede seguir paso a paso los progresos mencionados de abstracción de un niño a otro. Unos tienen necesidad de dibujar más tiempo que otros.

Después se cumple el paso hacia el número y la operación, pero convendrá siempre sostener los progresos de la conceptualización. Resulta particularmente útil al niño poder interpretar la misma situación por diversos medios (diagrama de Venn, encerado de doble entrada, diagrama sagital, encerado en árbol), pues así dispone de varios medios muy eficaces para comprender y explotar esta situación. Por estos métodos es por lo que se salva un aprendizaje mecánico en provecho de un aprendizaje que puede denominarse «estructural», para dar al niño medios intelectuales coherentes y articulados, capaces de transferir de una situación a otra. Así comprendida la iniciación matemática, suscita en el niño actividades auténticas individuales o colectivas con las que él construye su propio saber en lugar de recibirlo simplemente. El interés comprobado hasta ahora en los niños de las clases experimentales se explica por la variedad de situaciones que no son falsamente concretas, el campo abierto a las iniciativas, el efecto creador y, probablemente, la satisfacción de comprender plenamente.

Contrariamente a ciertas opiniones, las matemáticas llamadas modernas son mucho más concretas, mucho más abordables que otras, su afinidad con los métodos de pedagogía activa constituye una prueba suplementaria.

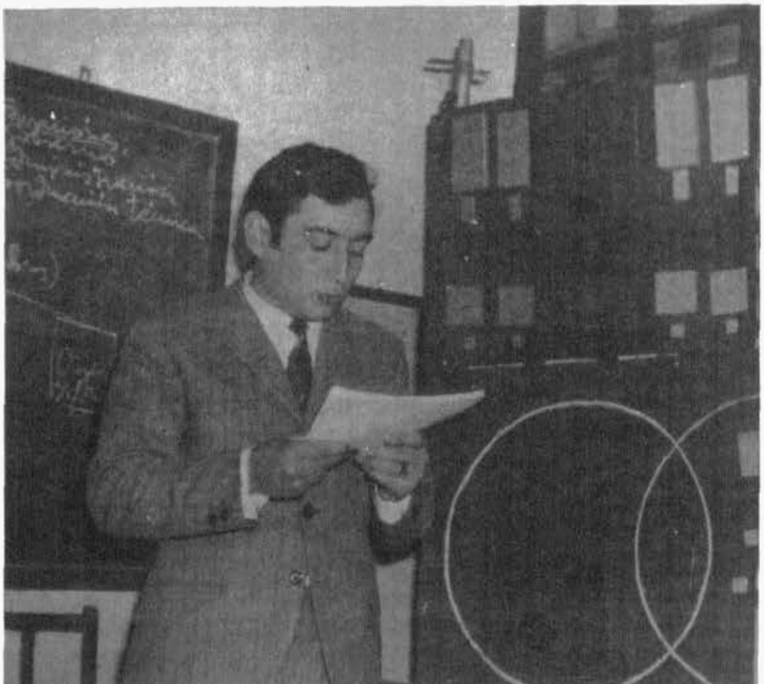
Estos contenidos y formas pedagógicas renovadas permiten, además, poner los fundamentos de una educación verdaderamente lógica. Si nunca se ha hecho cuestión al llegar a formalizaciones lógicas en la escuela elemental, si con Piaget se puede decir que el niño no es verdaderamente consciente de los progresos de su propio pensamiento, que permanece «inocente» durante mucho tiempo, se debe comprobar, sin embargo, que el niño es capaz de operaciones lógicas, múltiples, y se muestra a este respecto más precoz de lo que la escuela de Piaget hubiera pensado.

Es verdad que hasta ahora se habían sondeado las potencias lógicas del niño en situaciones cualesquiera, incluso exigiéndole razonar sobre nociones complejas; por el contrario, el nuevo contenido matemático presenta dos ventajas decisivas para una educación lógica: por una parte, los dominios de razonamiento están muy simplificados y fuertemente estructurados (por ejemplo, un universo de objetos definidos por sus formas, tres colores, dos tamaños); por otra, el pensamiento se apoya siempre sobre una esquematización materialmente realizada, sin tener que desplegarse en el solo dominio del discurso.

Respetadas estas condiciones, la experiencia muestra que el niño de preescolar o de clase elemental utiliza concretamente las conexiones de la conjunción y de la disyunción (lo que se llamaba la adición y la multiplicación lógica y que corresponde en el dominio conjuntista a la intersección y reunión de conjuntos); que sabe expresar la negación de una propiedad, que razona correctamente con la impresión subjetiva de la necesidad de la conclusión. Por ejemplo, si en un conjunto dado los objetos no pueden tener más que uno de los tres colores a, b, c, y si, por otra parte, uno de los objetos no tiene ni el color a ni el b, necesariamente tiene el color c, y a esta conclusión llega el niño por sí solo, pues lo experimenta.

Ahora bien, el razonamiento no se basa en proposiciones, sino en propiedades, y pone en juego cualquier conexión; pero una cosa prepara la siguiente, constituyendo los fundamentos de un edificio que no se terminará hasta la adolescencia, a través de una elaboración continua. El pensamiento debe primero afirmarse teniendo posibilidades de expansión, o más bien el desarrollo depende de afirmaciones sucesivas.

Es preciso no creer que el niño pasa sin transición de un estado simple e intuitivo del pensamiento a un estado consciente y organizado, ni mucho menos que no importa cuáles son los contenidos de enseñanza que podrán producir tal efecto. Si tantos estudiantes no saben tomar la negación de una preposición o se emperran en el establecimiento de una recíproca; si su imprecisión de lenguaje y su ausencia de rigor crean un obstáculo a su pro-



Don Luis Martín Soto, maestro nacional de Villasarracino, explica en el Centro de Colaboración Pedagógica de Buenavista de Valdavia (Palencia) la utilización de los bloques lógicos de Dienes.

greso, la razón está sin duda en la inadecuación entre los fines de la enseñanza y los métodos utilizados hasta ahora.

La perspectiva matemática nueva ofrece indiscutibles promesas y aporta ya resultados sustanciales. Su afinidad con el movimiento pedagógico contemporáneo, su adecuación al desarrollo intelectual del niño, crean condiciones favorables para una renovación. Cada uno debe hacer un esfuerzo sobre sí para comprender el alcance de esta renovación y prepararse para aportar su colaboración, pues el interés del niño no sabrá esperar.

II. Primer congreso internacional de la enseñanza matemática

Más de setecientas personas que representan a treinta y siete países se han reunido en Lyon del 24 al 30 de agosto del último año para estudiar el problema de la enseñanza de la **matemática moderna.**

No deja de tener interés echar un vistazo sobre la lista de los participantes, venidos de Africa del Norte, Argelia, Argentina, Estados Unidos, Rusia, Japón, Senegal, etc. Los congresistas franceses eran los más numerosos, unos 220. Después venían, por orden de importancia en el número: Estados Unidos, 127; Gran Bretaña, 53; Yugoslavia, 32; Italia, 31; Países Bajos, 24; Bélgica, Canadá, España, Suiza y Túnez asistieron también, con unos veinte representantes por cada país.

Entre los congresistas llegados de los más diversos lugares había: profesores de Universidad, maestros e incluso estudiantes. Todo esto prueba cómo, a través del mundo entero, los responsables de esta disciplina sienten la importancia de esta asignatura en nuestro mundo actual y cuán necesario es repensar su enseñanza.

El programa de los trabajos previstos era muy apretado. Cada día, en el auditorium del Palacio de los Congresos, se dieron cuatro conferencias. Los miembros del congreso tuvieron la suerte de oír a personalidades tales como Galinea Maslova (Moscú), Christiaensen (Dinamarca), Z. P. Dienes (Sherbrooke, Canadá), Ham Freudenthal (Países Bajos), Servais (Bélgica).

Todas las conferencias eran traducidas a cuatro idiomas.

Por la tarde los congresistas podían asistir a nuevas conferencias o participar en Mesas redondas.

Las conferencias libres consistían en una serie de exposiciones, de un cuarto de hora cada una, dedicadas a las matemáticas en la escuela primaria, en la enseñanza media, en la enseñanza superior o a la formación de maestros.

En las Mesas redondas se discutían problemas varios: enseñanza de la geometría, enseñanza del análisis, papel de los ordenadores en matemática, lugar de la lógica en la enseñanza, material didáctico, etc.

Todos estos trabajos se seguían con verdadero interés por los congresistas. Y hasta algunos hubieran deseado poseer el don de la ubicuidad muchas de las tardes para poder participar a la vez en dos reuniones de trabajo.

Una exposición de libros y de material de enseñanza permitió a los congresistas el poder darse cuenta de la importancia capital que reviste la nueva enseñanza de las matemáticas. Editores de todos los países tuvieron a bien exponer los libros de su fondo editorial.

Todas las tardes y en una sala diferente alumnos ingleses manipulaban, con gran habilidad, un material de enseñanza sorprendente por su variedad, y se esforzaban, no exentos de cierta gracia, por satisfacer la curiosidad de los espectadores, a los que en ocasiones asociaban a su trabajo.

El 25 de agosto, a las diez de la mañana, el presidente del Congreso Internacional de Enseñanza Matemática, el profesor H. Freudenthal, de la Universidad de Utrech, inauguró el congreso subrayando la importancia de las matemáticas, instrumento indispensable de nuestra civilización; insistió sobre el valor educativo de la enseñanza matemática y destacó que no hay que concebir esta enseñanza como un fin en sí.

Es imposible, teniendo en cuenta el número considerable de exposiciones y de conferencias presentadas en el Congreso, resumirlas todas; por eso nos limitaremos a recordar algunas intervenciones más notables.

A continuación del presidente Freudenthal, M. B. Christiaensen habló sobre «Los métodos deductivo e inductivo en la enseñanza de las matemáticas». Después de recordar las etapas que lleva consigo el método deductivo, el conferenciante, poniendo de manifiesto las experiencias realizadas en Dinamarca, señaló la importancia del acercamiento inductivo de los problemas. Y subrayó que las matemáticas:

— aportan al estudiante, cualesquiera que sean sus opiniones religiosas, filosóficas o políticas, una contribución a su educación intelectual;
— ofrecen un campo de experiencias abierto a todos y en constante cambio;
— constituyen, por su papel fundamental en la solución de numerosos problemas, una actividad intelectual creadora de satisfacciones personales.

M. W. Servais trató por la tarde el tema «Lógica y enseñanza matemática». El conferenciante, después de haber expuesto, hasta con cierto buen humor, algunos problemas de lógica que rozan los dominios sentimentales, habló de la enseñanza de la lógica. La iniciación se debe hacer, con la lógica de relaciones, al nivel de la enseñanza elemental.

Mr. Servais termina su exposición citando a DESCARTES: «Y nuestros nietos se congratularán de las cosas que yo he dicho aquí porque **ellos las podrán inventar.»** Glosa estas palabras diciendo: **«Ya que nosotros vamos a poder discutirlas.»**

M. R. Gauthier, profesor del Liceo Ampére, de Lyon, se refiere al problema de la enseñanza individualizada. Portavoz de un equipo de treinta profesores de la demarcación de Lyon, M. Gauthier expuso, en cierto modo, el balance de su experiencia. Estos profesores han analizado en primer lugar los defectos de la enseñanza colectiva: situación privilegiada del profesor que es el responsable de la elección, pasividad de los alumnos (lo que explica con frecuencia su fracaso en los exámenes), dificultad para poder hacer que todos los alumnos asimilen las explicaciones, teniendo en cuenta que ciertos alumnos son más despiertos que otros.

Los alumnos se limitan a tomar notas; no aprenden a estudiar.

Ahora bien, ¿es posible individualizar la enseñanza? Los profesores han intentado establecer un diálogo entre grupos de alumnos; luego un diálogo de los grupos entre sí. Los alumnos tienen a su disposición fichas. Se distribuyen en equipos de trabajo y responden a las preguntas propuestas. Cada equipo trabaja a su ritmo. A los alumnos mejor dotados se les da fichas suplementarias; éstos pueden ayudar incluso a sus compañeros más lentos o menos dispuestos y hasta pueden llegar a ser los auxiliares del profesor. Este permanece como el consejero, el guía de todo el grupo.

M. Gauthier expone las dificultades y críticas: mayor cansancio para el profesor, clases más movidas: hay alumnos que, en efecto, no charlan, pero sólo hablan de matemáticas; progresión más lenta; distanciamiento entre equipos: hay algunos que llevan cinco o seis fichas de adelanto sobre los otros, etc.

M. Gauthier se guardó muy bien de dar una conclusión concreta a este sistema, pero cree que esta experiencia es apasionante y prometedora.

M. A. Delessert, de Lausana, habló con mucho gracejo de la formación del profesor de matemáticas y evocó la figura de profesores que conceden toda la importancia a la obtención de su título y se imaginan por ello indefinidamente competentes.

La formación del profesorado, según M. Delassert, debe preceder a la puesta a punto de los nuevos programas. Dar una clase de matemáticas es poner en acción las facultades de intuición, de imaginación y de crítica. Finalmente, compara la enseñanza de las matemáticas tradicionales y de las matemáticas modernas a la navegación: el primero es semejante a una navegación de cabotaje; el segundo, se parece a una navegación transoceánica. El profesor moderno debe gozar de cierta autonomía, pero esto exige por su parte, y eso se sobreentiende, un esfuerzo personal. ¿Está preparado para ello?

El tema de la conferencia de M. A. Revuz, profesor de la Sorbona, fue «Los primeros pasos en análisis».

El conferenciante precisó desde el principio que en realidad iba a hablar «de los primeros pasos en la dirección del análisis». M. Revuz destacó la importancia del análisis, campo en el cual intervienen las diferentes situaciones de las matemáticas. Lo corriente es introducir la enseñanza del análisis después de los dieciséis años; hay que esperar, se dice, porque esta enseñanza está considerada como difícil. Esto es un error: ¿acaso no se enseñan en esta edad cosas más difíciles de geometría? Si se quiere lograr una buena enseñanza del análisis, hay que prepararlo. Se le debe enseñar pronto y progresivamente. El conferenciante estima que se puede hacer algo ya en el primer ciclo, pero ¿con qué disposición? Logrando hacer que los alumnos de primaria salgan de ella sin esa falsa formación en que se han visto sumergidos. ¿Cómo proceder? M. Revuz propone tres frentes de ataque:

1.° La elaboración de un utillaje numérico. El conferenciante dice, de paso, cuán irritante es oír frases como ésta: «Es preciso que los alumnos adquieran perfectamente los mecanismos...» Como si el hombre fuera un ser mecánico, un autómata.

2.º La elaboración de una teoría elemental de la medida. Esta noción no tiene todavía el puesto que le corresponde en la enseñanza de grado medio. ¿Cómo lograrlo? Quizá se pudiera partir del área para volver sobre la noción de longitud.

3.º El estudio de algunos tipos de funciones simples. Es preciso hacer comprender muy bien que se trata de aplicaciones particulares.

El profesor Z. P. Dienes desarrolló en su charla el problema de «las matemáticas en la escuela primaria». La adquisición de las nociones abstractas en matemáticas se puede hacer en seis etapas. En la primera etapa, llamada **lúdica,** se rodea al niño de material muy diverso y estructurado; el niño debe sentirse libre. Después la actividad se canaliza bajo la forma de **juegos** bien **reglamentados.** En la tercera etapa se lleva al niño a **comparar los juegos;** se establece un isomorfismo entre los diversos juegos. Hasta aquí sólo se ha hecho pre-matemática. Así se llega a la cuarta etapa, la de la representación en la que la identidad de las estructuras se expresará en grafismos. En quinto lugar, después de haber representado la abstracción, se pasa a la descripción de las propiedades de esta abstracción; esto precisa la intervención de un lenguaje que podemos calificar más tarde de axiomático. En fin, en la sexta y última etapa se aprenderá a utilizar la representación.

Para ilustrar su exposición, el profesor Dienes proyectó dos filminas: una sobre la lógica y la otra sobre las rotaciones del tetraedro regular.

El Congreso terminó sus trabajos el 30 de agosto: la sesión de clausura estuvo presidida por M. Pierre Louis, rector de l'Académie de Lyon, que representaba al ministro de Educación Nacional.

Con respecto a la enseñanza de las matemáticas, en el Congreso se redactaron las siguientes conclusiones:

1.ª La modernización de la enseñanza de las matemáticas debe exigirse enérgicamente, tanto en el contenido de los programas como en el modo de presentarlos. Contenido y métodos, que son inseparables, deben ser el objeto de un estudio permanente.

2.ª Los conceptos matemáticos forman parte de otras disciplinas (ciencias físicas, biológicas, económicas, humanas, etc.). Mucha de la teoría matemática ha tenido su origen en la construcción de modelos matemáticos partiendo de situaciones reales, y por ello la enseñanza de las matemáticas se debe tener en cuenta. Se debe fomentar la colaboración de los profesores de matemáticas con los de otras disciplinas.

3.ª Debe ampliarse la cooperación internacional. La información sobre la enseñanza de las matemáticas se puede difundir por medio de conferencias, de publicaciones o intercambio de profesores. Cada país debería estar informado lo más completamente posible de los esfuerzos y resultados de los demás. En especial los países más desarrollados deben continuar colaborando con los países en vías de desarrollo en la búsqueda de soluciones que sean apropiadas.

4.ª La evolución acelerada del contenido de los métodos de la enseñanza de las matemáticas exige que cada profesor de matemáticas esté en condiciones de aprovecharse de una formación continua que debe estar integrada en su actividad profesional.

5.ª La pedagogía de las matemáticas es, cada día más, una ciencia autónoma, con sus problemas propios de contenido matemático de experimentación.

Esta ciencia nueva debe encontrar un hueco en los Departamentos de Matemáticas de las Universidades o en los Institutos de Investigación; y los que destaquen en esta disciplina deben poder tener acceso a todos los grados universitarios.

Nos hemos esforzado por dar una referencia objetiva de este Congreso que señalará una etapa en la historia de las matemáticas en el sentido que hará tomar conciencia a todos los que en él participaron del papel que han de realizar y que encontrará eco cerca de los responsables de la Educación Nacional de numerosos países.