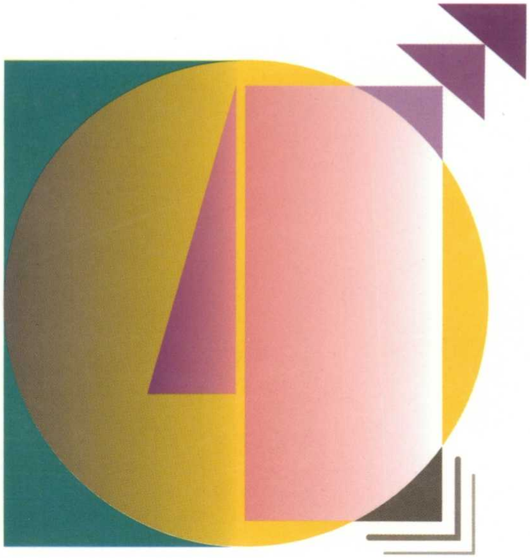


Didáctica de la Educación Primaria: Área de Matemáticas

Curso de actualización científica y
didáctica de Educación Primaria

Ministerio de Educación y Ciencia

Didáctica de la Educación Primaria: Área de Matemáticas

Carmen Calvo Aldea
Isabel Callejo Olmos
Rosa Fornies Rejas
Angelines García Gil
María F. Jiménez Garijo
Lidia Vivas Arce
Seminario Permanente de Matemáticas
de Acción Educativa

Curso de actualización científica y didáctica de Educación Primaria

Los libros que componen los materiales de apoyo para los *Cursos de Actualización Científica y Didáctica de la Educación Primaria* han sido coordinados por:

- Manuel Fort Hernández, de la Subdirección General de Formación del Profesorado.
- Ana Pérez Figueras, de la Subdirección General de Formación del Profesorado.

Ministerio de Educación y Ciencia

Dirección General de Renovación Pedagógica

Subdirección General de Formación del Profesorado

N. I. P. O.: 176-93-177-0
I. S. B. N.: 84-369-2497-5
Depósito legal: M-6283-1994
Imprime: MARÍN ÁLVAREZ HNOS.

Índice general

Presentación

El presente trabajo sobre las Matemáticas en Educación Primaria pretende ser un documento de estudio y reflexión para el profesorado y, a la vez, proporcionar elementos, ideas y materiales para el trabajo en el aula. Está fundamentalmente centrado en los procesos de resolución de problemas, debido a la importancia intrínseca del tema y al tratamiento que, por esa razón, tiene en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria.

El documento consta de tres partes:

En la primera parte se hace una panorámica por el área de Matemáticas en la que se reflexiona sobre la necesidad de la enseñanza de las mismas, sobre qué son y cómo deben entenderse los hechos y conceptos, los procedimientos y las actitudes, así como algunas consideraciones que deben tenerse en cuenta para una mejor adquisición de los mismos.

La segunda parte está dirigida a propiciar el estudio y la reflexión del profesorado sobre la resolución de problemas. Se distinguen claramente dos aspectos: uno centrado en la importancia que los problemas tienen en el currículo de Matemáticas. En él se abordan cuestiones sobre qué es un problema y sus diferencias con los ejercicios. También se hacen algunas consideraciones sobre el sentido de la resolución de problemas en clase, la necesidad de la enseñanza de los heurísticos, las fases de la resolución de un problema, las dificultades que en cada una de ellas puede encontrar el alumnado y las pautas y sugerencias que pueden ayudarles a superarlas.

Se estudian también, en esta parte, algunas estrategias generales de resolución de problemas induciendo al profesorado a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento a lo largo de la resolución de diversos problemas. Por último, se sugiere qué heurísticos podrían trabajarse en Educación Primaria.

La tercera y última parte está orientada a la actividad en el aula y ofrece una posible secuencia de las estrategias de resolución de problemas para cada uno de los ciclos de la etapa primaria. A continuación se presenta una colección de problemas "tipo" que pueden trabajarse con los alumnos y alumnas para abordar aspectos parciales de las estrategias generales presentadas en la segunda parte del documento. Por último, se sugiere cómo plantear una misma estrategia, "búsqueda de regularidades", en los tres ciclos de Educación Primaria.

Asimismo, se ofrecen algunas sugerencias sobre posibles recursos y diversidad de situaciones que pueden utilizarse para trabajar los problemas como aplicación de otros contenidos matemáticos (numeración, operativa, medida...).

Por último, se acompaña una breve bibliografía en la que el profesorado puede encontrar más información para profundizar en los aspectos abordados en el documento o buscar sugerencias y ejemplos de actividades problemáticas para trabajar con el alumnado.

1

Las Matemáticas en Educación Primaria

Introducción

Existe el convencimiento general de que las Matemáticas deben ser estudiadas por los niños y niñas en la Escuela. Quizá, si preguntáramos por qué, habría diversas respuestas, pero sin duda entre las más frecuentes estaría la de su "utilidad". Sin embargo, esta utilidad es percibida de distintas formas: para muchos hace referencia a que los conocimientos aritméticos son necesarios en la vida cotidiana (casa, oficina, taller, etc.); para otros, las Matemáticas son la base del desarrollo científico y tecnológico moderno, y aún podríamos encontrar una tercera respuesta en aquellos que encuentran en las Matemáticas la herramienta de gestión del comercio y la industria. La razón fundamental que subyace en todas las interpretaciones es, sin duda, el hecho de que las Matemáticas constituyen un modo de comunicar universal, conciso y sin ambigüedades y que puede tomar formas muy diversas: números, letras, tablas, diagramas, gráficos, dibujos técnicos o geométricos.

Una segunda razón, que tradicionalmente ha tenido gran peso, es que esta área debe estudiarse porque desarrolla capacidades de razonamiento lógico, de precisión y de percepción espacial. Hoy, esta razón no es suficiente en sí misma, pues aun contribuyendo las Matemáticas a dichos fines y siendo éste un aspecto que no ha de olvidarse, el resto de las áreas del currículo contribuyen también a desarrollar estas capacidades.

Por último, cabe hablar del aspecto lúdico y atractivo que las Matemáticas pueden tener para algunas personas tanto en la infancia como en la madurez, como se comprueba por la aparición en revistas, periódicos, etc., de problemas de ingenio, que, además de ser un divertimiento para algunos, pueden contribuir a la comprensión de determinados conceptos matemáticos y a un mayor razonamiento lógico.

Todo esto justifica el hecho de que el área de Matemáticas haya estado presente en todas las propuestas curriculares y nunca se haya cuestionado su importancia. En el momento actual, tampoco se cuestiona su presencia en los currículos escolares, pero sí existen diferentes posturas sobre el enfoque que debe darse y sobre el papel que juegan las Matemáticas en Educación Primaria.

Hay un acuerdo bastante generalizado a propósito de que las Matemáticas merecen ser enseñadas con contenidos y métodos bien diferentes de los tradicionales y, además, nadie ignora que no puede hacerse de espaldas al progreso y desarrollo tecnológico de la sociedad; más aún, la introducción y aplicación de nuevas tecnologías en el aula obliga a modificar nuestros planteamientos y formas de enseñarlas.

Todo esto nos lleva a formular dos preguntas claves: ¿Qué Matemáticas hay que enseñar? ¿Cómo debemos enseñarlas?

Actividad número 1

1. Trabajo en pequeño grupo:
   - Cada persona del grupo explica qué hace en la clase de Matemáticas y se analizan los aspectos comunes a todas las clases (contenidos habituales, aspectos menos trabajados o ausentes).
   - Extraer conclusiones sobre por qué los contenidos indicados en el apartado anterior se trabajan menos: ¿tienen menos importancia para desarrollar capacidades en el alumnado?, ¿es lo que traen los libros?, ¿qué cambiaríamos de lo que estamos haciendo ahora?, ¿qué añadiríamos?
   - Comparar la reflexión anterior con la propuesta del currículo de Matemáticas de Educación Primaria.
2. Puesta en común de lo reflexionado en los grupos.

Tradicionalmente la enseñanza de las Matemáticas se ha centrado, casi exclusivamente, en la adquisición de un tipo de contenidos: los conceptos. Del mismo modo, se le ha dado más importancia a la secuencia lógica y a la estructura formal de la propia área que a los procedimientos intuitivos y adecuados al momento de aprendizaje del alumno y, como consecuencia, a un predominio de la metodología deductiva y memorística en menoscabo de la inductiva.

Las propuestas curriculares de la Reforma consideran que junto a los hechos y conceptos han de tenerse igualmente en cuenta los procedimientos y actitudes como otros contenidos que deben planificarse y enseñarse. Del mismo modo se recuerda que "la construcción del conocimiento matemático transitará por una vía inductiva, tomando como dato primigenio la propia actividad del alumno y utilizando sus intuiciones, tanteos y aproximaciones heurísticas —estrategias personales elaboradas por los alumnos para afrontar las tareas y situaciones planteadas— como punto de partida para una reflexión que conduzca, de forma progresiva, a planteamientos más formales y deductivos" [1].

Esto quiere decir que la experiencia práctica y la comprensión intuitiva de nociones, relaciones y propiedades matemáticas han de ir enriqueciéndose progresivamente con formas de representación (por ejemplo, dibujos, esquemas, etc.) que permitan trascender la manipulación concreta de objetos y situaciones, hasta llegar a una comprensión plena de los mismos mediante el manejo adecuado de notaciones y operaciones simbólicas de tipo numérico, algebraico o geométrico.

En relación con la primera pregunta que hacíamos, basándonos en el informe Crockcoft, creemos que en la enseñanza de las Matemáticas cabe distinguir: hechos y conceptos, procedimientos (algoritmos y destrezas, estrategias generales) y actitudes.

Cada uno de estos elementos debe tener su consideración propia y su tratamiento específico.

Aprendizaje de hechos y conceptos

Es importante comprender la diferencia entre estos dos tipos de conocimiento, ya que aunque se hallan estrechamente vinculados, en muchos casos los objetivos de la educación suelen estar dirigidos a unos más que a otros. Además, tanto desde el punto de vista de los procesos implicados en su adquisición como de las estrategias de enseñanza necesarios para su instrucción o de las técnicas de evaluación, ambos tipos de conocimientos son diferentes.

[1] D. C. B. de Educación Primaria, pág. 384. M. E. C., 1989.

Los hechos o datos son informaciones concretas y aisladas que deben aprenderse literalmente, de un modo reproductivo, y deben recordarse o reconocerse de modo literal. Por ejemplo, saber de memoria el nombre de los dígitos, la secuencia contadora o el valor de "pi". Sin embargo, además de conocer una serie de datos es preciso establecer relaciones significativas entre ellos, para lo cual se requiere no sólo conocer datos, sino también tener conceptos que den significado a los datos. Dicho de otra forma, para que los datos y los hechos cobren significado, los alumnos deben disponer de conceptos que les permitan interpretarlos.

Para aprender un concepto es necesario establecer relaciones significativas con otros conceptos. Cuanto más entretejida esté la red de conceptos que posee una persona en un área determinada, mayor será su capacidad para establecer relaciones significativas y, por tanto, para comprender los hechos propios de esa área. En todo caso, ni el aprendizaje de hechos ni la comprensión de conceptos pueden aislarse de los contenidos procedimentales y actitudinales.

El aprendizaje de hechos

En general, el aprendizaje de hechos suele consistir en la adquisición de información verbal literal o numérica. Una característica de estos aprendizajes es que el alumnado hace una copia más o menos literal o exacta de la información proporcionada y la almacena en su memoria. Este carácter reproductivo del aprendizaje de hechos hace que el proceso fundamental para conseguirlo sea la repetición que da lugar a una automatización y en el cual juega un papel importante la memoria.

Aparentemente el aprendizaje repetitivo resulta fácil y no requiere apenas planificación e intervención externa. Sin embargo, hay algunas condiciones relacionadas con la materia de estudio y otras referidas a las características del alumnado que pueden afectar a su eficacia.

En relación con la materia de estudio:

— Un factor importante es la cantidad de información que contenga la tarea: cuanto mayor sea el número de elementos distintos que contiene, más difícil será aprenderla.

— El recuerdo de hechos o datos se verá facilitado si éstos se agrupan de alguna manera, adoptando una mínima organización. El recuerdo se favorece cuando el material que debemos memorizar tiene algún significado u organización lógica para nosotros.

— Otros factores que favorecen su retención pueden ser la presentación atractiva del material, el carácter lúdico y variado de las actividades para su aprendizaje. Las actividades han de propiciar la repetición presentando tareas breves y continuadas en el tiempo, referidas a hechos muy selectivos, relevantes y de uso frecuente, y en contextos significativos que faciliten la comprensión e interpretación.

En relación con las características de los alumnos que deben aprenderlo:

— La edad. No sólo influye en la capacidad de memoria, sino en el uso que se hace de la misma. Para el aprendizaje de datos debe recurrirse a diferentes procedimientos o estrategias que faciliten el recuerdo: la simple memorización, asociaciones (lógicas, afectivas...), recursos o trucos mnemotécnicos, etc.

— La predisposición al aprendizaje memorístico. No debe olvidarse que la enseñanza dirigida esencialmente al aprendizaje memorístico de datos genera en los alumnos una orientación pasiva en su estudio, que va a hacer más difíciles los esfuerzos posteriores para orientarlos a la comprensión.

En definitiva, aunque es necesario que los alumnos aprendan hechos "de memoria", se ha de restringir una proporción adecuada, evitando que sea la forma predominante de aprender una materia. Es importante, asimismo, que retengan algunos datos, pero siempre con el objetivo de que sepan interpretarlos. En este sentido, el aprendizaje de hechos y datos debe acompañarse de un dominio de las técnicas y procedimientos útiles para acceder a nuevos datos cuando éstos sean relevantes, es decir, cuando ayuden a comprender una tarea o un problema o sirvan para adquirir nuevos conceptos.

Aprendizaje de conceptos

Los conceptos son un conjunto de conocimientos interrelacionados que suponen el desarrollo de estructuras mentales. Su adquisición es progresiva, lenta, y supone el desarrollo de capacidades tales como comprensión, relación, clasificación, análisis, etc. Por ejemplo, la adquisición del concepto de polígono supone, entre otros pasos, distinguirlos de otras figuras planas, nombrarlos en función del número de lados y, posteriormente, establecer relaciones entre lados, ángulos y vértices. Su adquisición es progresiva, de forma que a medida que se profundiza sobre cada uno de los elementos citados y sus relaciones, el concepto de polígono es más completo.

El aprendizaje de conceptos requiere, de la misma forma que el de hechos, una planificación de la intervención externa que tenga en cuenta algunas condiciones relativas a los conceptos que se están trabajando y a las características de los alumnos.

En relación con los conceptos:

— Que tengan una organización interna, es decir, que no constituyan una lista arbitraria de elementos yuxtapuestos, relacionados unos conceptos con otros: comparando, representándolos mediante un esquema, jerarquizándolos, etc.

— Que la terminología y el vocabulario utilizado no sean excesivamente novedosos ni difíciles para el alumnado.

Las condiciones anteriores, siendo necesarias, no resultan suficientes para que haya un aprendizaje significativo, sino que, además, se requieren unas determinadas condiciones relacionadas con los alumnos y alumnas:

— Que los nuevos aprendizajes se relacionen con los conocimientos previos del alumnado. Cuando una persona intenta comprender algo, necesita activar un conocimiento previo que le sirva para organizar esa situación y darle sentido. Los conocimientos que poseen los alumnos y alumnas son construcciones personales (elaboradas en su experiencia diaria), que poseen coherencia desde el punto de vista del alumnado (no desde el punto de vista científico), son bastante estables y resistentes al cambio, tienen carácter implícito y buscan la utilidad más que la "verdad".

— Que el alumnado realice un esfuerzo deliberado e intencional para relacionar la nueva información con los conocimientos previos que posee. Se trata de encontrar significado a lo que está haciendo. Comprender conceptos requiere acercarse con una determinada actitud que le lleva a implicarse en cierto tipo de actividades o procedimientos de aprendizaje (hacerse preguntas, comparar, relacionar, representarlos mediante un esquema...). Se suele decir que el aprendizaje significativo está vinculado a una motivación intrínseca.

— Que las actividades faciliten la relación entre los conocimientos previos y los nuevos aprendizajes. En las actividades podemos diferenciar las de investigación o descubrimiento y las expositivas:

Una Unidad Didáctica basada en *el aprendizaje por investigación* o descubrimiento consistiría en presentar a los alumnos un material de trabajo que no está explícitamente estructurado, de tal modo que son los propios alumnos y alumnas, guiados por el profesor, los que, mediante el uso de ciertos procedimientos de observación y análisis, deben descubrir el significado de la tarea y las relaciones conceptuales que subyacen a la misma. Por ejemplo, a partir del trabajo con varillas de "mecano", descubrir: condiciones de los lados para formar triángulos, clasificación de los triángulos atendiendo a los lados y ángulos, etc. En líneas generales, en estas actividades no se persiguen como únicos objetivos los aprendizajes conceptuales, sino que cumplen también una función importante en la adquisición de procedimientos y actitudes. Casi siempre responden a estas fases:

— Confrontación del alumno o alumna con una situación problemática.

— Observación y recogida de datos.

— Organización de la información recogida e interpretación de la misma.

— Reflexión sobre la estrategia seguida y los resultados obtenidos.

Las actividades de investigación dirigidas al aprendizaje significativo de conceptos deberían tener en cuenta las siguientes condiciones:

— Para que puedan conducir a la comprensión del concepto es necesario restringir el ámbito de búsqueda, especificando los objetivos y medios disponibles.

— Tener en cuenta los conocimientos previos del alumno y cómo éste va a interpretar inicialmente la actividad que se le plantea.

— El aprendizaje de conceptos por descubrimiento muestra claramente el estrecho vínculo entre los diversos tipos de contenidos del currículo. Para aprender por descubrimiento es preciso disponer de procedimientos de observación, búsqueda, medición, comprobación de hipótesis... En otras palabras, cuando se utiliza un procedimiento como medio de acceder a un nuevo conocimiento, debemos asegurarnos de que el procedimiento empleado ha sido aprendido con anterioridad.

— Es conveniente que las tareas de descubrimiento se presenten en un contexto no sólo con significado, sino además con funcionalidad. Por ejemplo, descubrir qué polígonos rellenan el plano le es útil para diseñar modelos para embaldosar el suelo o hacer cenefas para decorar sus trabajos.

Junto a esto debe tenerse en cuenta la complejidad conceptual de los contenidos que se están estudiando. En general, cuanto más complejo sea un concepto, mayores dificultades habrá para su aprendizaje y mayor será la necesidad de intervenir por parte del profesorado en el contexto de las propias actividades de descubrimiento de los alumnos, y en otras ocasiones dentro de sesiones organizadas de modo específico como actividades expositivas.

Las actividades expositivas, tan frecuentes en las clases de Matemáticas, no siempre garantizan la adquisición de conceptos. Para hacerlas más efectivas, además de cuidar con esmero la organización y estructura interna de la exposición, convendría respetar las siguientes partes:

— Encabezamiento o introducción que contextualice los nuevos conceptos, los conecte con algún conocimiento del alumnado de forma que adquieran significado para él. Pueden utilizarse preguntas, plantear situaciones-problemas o preguntarles algo que les sorprenda y atraiga su interés.

— Presentación del nuevo contenido de aprendizaje, que puede tomar formas muy diversas (exposición del profesor, lectura de textos, exposiciones de los alumnos...), procurando que esté muy organizado tanto en su estructura como en su presentación. Es muy importante que haya coherencia entre los diferentes apartados y que se establezcan relaciones entre las ideas, resaltando las más importantes mediante recursos complementarios (material gráfico, esquemas, énfasis en la voz...).

— Consolidación de la estructura conceptual explicitando las relaciones y diferencias entre los conceptos o presentando ejemplificaciones y aplicaciones a casos prácticos.

Aprendizaje de procedimientos

Los procedimientos hacen referencia a unos contenidos que, con diversos nombres (técnicas, algoritmos, habilidades, estrategias...) y que sin estar explícitos en los programas escolares, se han venido trabajando de forma más o menos sistemática. Por tanto, no es algo completamente nuevo ni diferente a lo que siempre se ha enseñado, pero es justo reconocer que en la Reforma Educativa, y en concreto en el área de Matemáticas, adquieren una mayor importancia.

"Los procedimientos son un conjunto de acciones ordenadas y orientadas hacia la consecución de una meta" [2]. Con ellos se designan conjuntos de acciones, de formas de actuar y de llegar a resolver tareas y se refieren a saber hacer, saber actuar de manera eficaz. Al incluirlos en el cu-

[2] D. C. B. de Educación Primaria, págs. 41-42. M .E. C., 1989.

rrículo de Matemáticas se nos recuerda que hay que prestar mayor atención a las actuaciones, es decir, no es suficiente conocer y recordar una fórmula, un algoritmo, sino que es necesario saber aplicarlos de manera eficaz.

Dentro de los procedimientos se incluyen contenidos de índole y grado muy diversos; sin ánimo de hacer una clasificación estricta, podemos considerar tres grandes categorías de procedimientos.

La primera hace referencia a las *habilidades* en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, al vocabulario y a la simbología específica de cada una de las habilidades tanto por escrito como oralmente; también incluye las habilidades referentes a la traducción entre unos y otros lenguajes (representación gráfica o mediante esquemas de un problema numérico, asociación entre una gráfica y los datos numéricos correspondientes...).

En la segunda se incluyen las *rutinas o algoritmos* particulares (algoritmo de la suma, de la división...), las destrezas de tipo práctico (medir ángulos, dibujar paralelas o perpendiculares...) que se caracterizan por tener un propósito muy concreto y unas reglas de uso claras y bien secuenciadas, de forma que su aplicación correcta conduce siempre a la solución exacta.

Trabajar un procedimiento en general, y en concreto los algoritmos y destrezas, supone no sólo que se conozcan los pasos necesarios y el orden en que éstos se dan, sino que, conseguido lo anterior, es preciso atender al grado de automatización del procedimiento, a la corrección y precisión con que se realiza y a la capacidad de aplicar el procedimiento en contextos diferentes y a situaciones particulares.

Por tanto, el aprendizaje de los procedimientos no es cuestión de todo o nada, sino que admite grados; es decir, el alumnado lo va construyendo de forma progresiva y lo perfecciona cada vez más, aumentando con ello el valor funcional del procedimiento o la posibilidad de aplicarlo a nuevas situaciones. Por ejemplo, la adquisición del algoritmo de la multiplicación por dos cifras supone:

— Conocer el algoritmo y aprender los pasos de que consta y el orden en que se aplican (se multiplica cada número del multiplicador por todos los del multiplicando..., se colocan los resultados parciales en el lugar correspondiente, se suman los productos parciales...).

— Realizar las operaciones con seguridad. Además, es necesario atender a la automatización del procedimiento.

— Repetirlo muchas veces hasta conseguir no sólo ejecutarlo con rapidez, sino con precisión, sin errores. Para ello es conveniente prever situaciones y ejercicios muy variados y, a ser posible, lúdicos.

— Además, es preciso identificar, saber reconocer en qué situaciones concretas la aplicación de este algoritmo le conduce a la consecución de una meta. Por ejemplo, es útil para saber si puedo cargar 246 sacos de 38 kilogramos cada uno en un vehículo que admite una carga máxima de 6.000 kilogramos.

— Por último, ser capaz de aplicar el algoritmo en contextos diferentes.

Un análisis similar podríamos hacer con otros algoritmos y destrezas de las que aparecen en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria. Con ello queremos recordar que el trabajo del algoritmo exige tener en cuenta todos estos aspectos y no reducir su trabajo a alguno de ellos.

En la tercera categoría pueden agruparse aquellas *estrategias* más generales que se conocen con el nombre de estrategias heurísticas o simplemente heurísticos; se caracterizan porque no hay pautas bien definidas sobre el modo de usarlas. Es más complejo que el de los algoritmos, ya que requieren la puesta en juego de una gran cantidad de conocimientos y relaciones entre ellos. Por ejemplo estimar, formular conjeturas e hipótesis, generalizar relaciones o propiedades, buscar regularidades y simplificar tareas.

No entramos en un análisis más detenido, puesto que en la propuesta de trabajo que presenta a continuación se hace el estudio detallado de procedimientos para LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Como ya se ha indicado, al hacer la enumeración de procedimientos en tres grandes epígrafes no se quiere hacer una clasificación, sino únicamente llamar la atención sobre la necesidad de tomarlos todos en consideración a la hora de trabajar los contenidos matemáticos.

Aprendizaje de actitudes

En el ámbito de lo actitudinal, los aprendizajes que se realizan podrían sistematizarse en dos grandes categorías estrechamente relacionadas entre sí. La primera hace referencia a la apreciación y valoración positiva de las Matemáticas en cualquiera de sus múltiples aspectos y a la confianza del alumnado en su propia capacidad para aprenderlas y utilizarlas pertinentemente. En definitiva, se trata de desarrollar una actitud positiva hacia las Matemáticas y hacia las capacidades que cada uno tiene para alcanzar los aprendizajes específicos del área.

En la segunda categoría se consideran las actitudes más directamente relacionadas con el ámbito de la organización y hábitos frente al trabajo. La actividad matemática no sólo es sistemática, sino que fomenta la curiosidad y el interés para resolver problemas, lo que requiere dedicación tenaz.

"Una actitud es una tendencia a comportarse de una forma consistente y persistente ante determinadas situaciones, objetos, sucesos y personas. Las actitudes traducen a nivel comportamental el mayor o menor respeto a unos determinados valores y normas: actitud de compartir, de respetar, de ordenar, de ayudar, de cooperar...." [3].

Sabater (1990), después de analizar diferentes definiciones sobre actitudes, señala como características comunes las siguientes:

1. La actitud se entiende como una predisposición existente en el sujeto y adquirida por aprendizaje, que impulsa a éste a comportarse de una manera determinada.
2. Se supone que la infraestructura de esta predisposición es algún estado mental.
3. Este estado mental se halla integrado por alguno/s de los siguientes elementos: elemento comportamental, elemento afectivo y elemento cognitivo.

De todo ello podemos deducir que las actitudes pueden ser, indirectamente, medidas y observadas; que son modificables y que, por ello, tienen relevancia educativa.

Las actitudes, además de contenidos concretos de la enseñanza, impregnan la totalidad del proceso educativo dentro y fuera del aula y ocupan un papel central en todo acto de aprendizaje. Las actitudes guían los procesos perceptivos y cognitivos que conducen al aprendizaje de cualquier tipo de contenido educativo, ya sea conceptual o procedimental; juegan un papel activo en el proceso de aprendizaje, interviniendo de modo decisivo en él. Así, la curiosidad y el interés por la búsqueda de la verdad son factores que favorecen dicho aprendizaje. Además, los aspectos afectivos y emocionales pueden contribuir al éxito o fracaso; por ejemplo, una valoración positiva

[3] *Psicología y Currículo*, pág. 139. C. Coll, 1987. Ed. Laia, Barcelona.

del ambiente que reina en el aula puede fomentar el interés del alumno por el contenido concreto de la asignatura. Por último, una actitud positiva hacia un objeto concreto es posible que se manifieste en un comportamiento acorde con dicha actitud; sería el caso de una actitud positiva hacia las Matemáticas que se traduce en el interés por otros aprendizajes matemáticos.

Desde este planteamiento, al hablar del trabajo de actitudes en el área de Matemáticas, no debemos considerar solamente aquellos que tienen relación directa con los contenidos del área, sino que es necesario trabajar las actitudes desde tres ámbitos o aspectos diferentes referidos a:

- **Integración social**
  - *Actitudes consigo mismo*: estado emocional, autonomía, iniciativa, seguridad, cumplimiento de normas, capacidad crítica, higiene.
  - *Actitudes con los demás*: agresividad, respeto hacia los compañeros y los objetos, sociabilidad, participación, aceptación, dependencia, confianza, respeto hacia los adultos (maestros, profesores, personal no docente).
  - *Actitudes de proyección social*: solidaridad, participación, sentido crítico.
- **Actitudes y hábitos de trabajo** (autonomía)
  - *Actitudes respecto del trabajo*: responsabilidad, constancia, aprovechamiento del tiempo, ritmo de trabajo, concentración, organización, iniciativa, memoria.
  - *Actitudes en la realización del trabajo*: limpieza, orden, terminación, profundidad, creatividad...
- **Actitudes vinculadas a rasgos más significativos de aprendizajes propios del área de Matemáticas**:
  - *Actitudes globales ante el aprendizaje*: interés, motivaciones.
  - *Actitudes específicas de Matemáticas:* rigor, precisión, exactitud, perseverancia en la búsqueda de soluciones.

La adquisición de las actitudes desde un planteamiento constructivista es un proceso lento y no puede determinarse el tiempo necesario para conseguirlas. Son múltiples los factores que configuran las actitudes, pero es necesario destacar un ***componente cognitivo***, por el cual el alumnado conoce una actitud y es sensible hacia ella, es capaz de verbalizarla; un ***componente afectivo***, que implica que el alumno acepta o no una actitud por las ventajas o inconvenientes que conlleva, y un ***componente comportamental***, mediante el cual el alumno y la alumna asumen una actitud de forma responsable y la incorporan a su conducta.

La educación en estos tres tipos de componentes de los valores y las actitudes se realiza tanto a partir de lo que se enseña como de la forma cómo se enseña y aprende; es inmanente, por tanto, a todo el proceso educativo e implica a toda la comunidad educativa. Por ello es necesario analizar su desarrollo a dos niveles:

— **A nivel de centro** es necesario clarificar qué actitudes y valores se van a promover y, posteriormente, tratar de que las normas y criterios que rigen el funcionamiento del centro sean coherentes con lo que se pretende que el alumnado desarrolle. Para que sea efectiva es necesario que los alumnos perciban que en todos los ámbitos de su trabajo escolar hay un componente actitudinal, que es considerado y reflexionado como tal junto con todos los contenidos propios de cada área. También es importante a nivel de ciclo priorizar y secuenciar las actitudes que se van a desarrollar en función de las características específicas del alumnado.

— **A nivel de aula,** se debe tener en cuenta que las actitudes son aprendidas principalmente como resultado de un proceso constructivo a través de la reflexión y el diálogo, y que en su adquisición tienen un gran peso el currículo oculto del profesorado y los valores vigentes en la sociedad. También es necesario considerar que, por el carácter estable y permanente de las actitudes, su aprendizaje es lento, y supone persistencia por parte del profesorado.

Como se ha dicho, el diálogo será un instrumento esencial, tanto para consensuar las actitudes que se han de promover como para facilitar el proceso de interiorización y personalización que cada alumno y alumna debe hacer de las actitudes y valores. El diálogo con el profesor y entre iguales posibilita el contraste de puntos de vista, la coordinación de intereses, la cooperación o el ponerse en el lugar del otro.

Asimismo, es importante promover la reflexión sobre conflictos morales más que sobre normas y reglas, con diferentes estímulos (debates, argumentos, discusiones, dramatizaciones, contraste de hipótesis), tratando de que no se reduzca a un mero proceso intelectual sobre las actitudes, sino que el alumnado se implique vivencialmente y la traduzca en comportamientos habituales de su conducta diaria.

Sin embargo, la utilización de algunas normas muy claras es muy útil en el aprendizaje de actitudes relacionadas con hábitos de presentación ordenada, de utilización correcta de signos y de instrumentos de medida, de expresión de datos en gráficas, así como aquellas relativas al respeto por soluciones distintas a las propias.

Las actitudes relacionadas con la confianza en la propia capacidad matemática se desarrollan, como bien sabe todo el profesorado, mediante el refuerzo positivo ante todo avance, por pequeño que sea.

Las actitudes relativas al desarrollo del gusto por las Matemáticas y la valoración de las mismas están profundamente influenciadas por la metodología empleada y por el acento que se ponga en la funcionalidad de las Matemáticas. El gusto por ellas se potencia mediante una metodología activa, que promueva en el alumnado la creatividad y el descubrimiento, en la que se utilicen materiales y elementos lúdicos, en la que se haga referencia a la historia de las Matemáticas, en la que tenga un papel importante la resolución de problemas entendida como un reto asumible, en la que se utilice la calculadora y se desarrolle el cálculo mental, y, sobre todo, en la que todo el alumnado se sienta en situación de éxito.

Conclusión

Todas estas consideraciones nos llevan, a modo de conclusión, a señalar una serie de criterios que conviene contemplar a la hora de seleccionar los contenidos y la metodología del área:

— El aprendizaje de las Matemáticas debe ser funcional y posibilitar que el alumnado aplique sus conocimientos fuera del ámbito escolar.

— Debe reforzarse el uso del razonamiento a partir de situaciones concretas y cercanas al alumno.

— Es conveniente dedicar una especial atención a la adquisición de destrezas de tipo general susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares.

— Es imprescindible fomentar la confianza de los alumnos y alumnas en sus propias habilidades evitando en todo momento las frustraciones, bloqueos y rechazo que provocan las descalificaciones globales.

— Deben favorecerse las estrategias propias de cada alumno y alumna para desarrollar su nivel de autoestima y autoeficacia y para facilitar un aprendizaje funcional, creativo y original.

— Deben considerarse como actividades formativas de primer orden la resolución de problemas propiciando todas las posibles vías de solución, lo que permitiría que los alumnos y alumnas adquieran una visión de las Matemáticas como ciencia abierta y asequible.

2

Estudio de la resolución de problemas

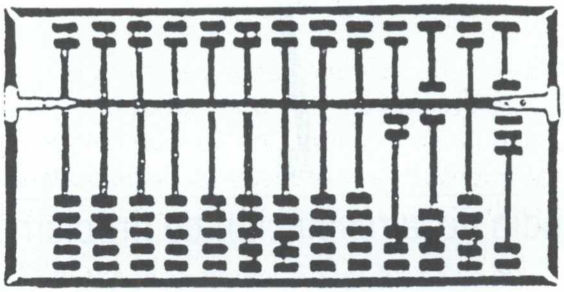
Los problemas en el currículo de Matemáticas

¿Qué es un problema?

Debido al tratamiento coloquial de la palabra "problema" en la clase de Matemáticas, existe una confusión bastante generalizada entre el significado de "problema" y "ejercicio". Es frecuente que el profesor o profesora, después de haber explicado determinado concepto o haber puesto ejemplos de cómo se realiza un algoritmo, proponga: "Ahora vamos a hacer problemas sobre lo que hemos visto", refiriéndose a lo que en realidad son ejercicios de consolidación de algoritmos. Se entiende que consolidar la operativa es una tarea a realizar en la clase de Matemáticas, pero de naturaleza fundamentalmente distinta a la resolución de problemas. Por ello, es necesario reflexionar sobre qué es un problema, qué es un ejercicio y qué lugar ocupan ambos en la clase de Matemáticas.

Problema del ábaco chino

Este ábaco chino es uno de los muchos que se han utilizado a lo largo de la Historia para representar números y para hacer cálculos. Los egipcios, los griegos, los romanos, los japoneses *y los chinos han conocido este instrumento, que todavía se utiliza. En éste se lee el número 2.608. ¿Lo ves?*[1].



Actividad número 1

1. Problema del ábaco chino:
   — Resolución.
   — Una vez resuelto, dibujar en el ábaco chino cantidades o leer las cantidades dibujadas en el ábaco.
2. Reflexionar sobre la distinta naturaleza de las dos tareas anteriores:
   — ¿Qué ocurría cuando no conocíamos el funcionamiento del ábaco?
   — Una vez conocido, ¿ha sido el mismo tipo de trabajo?
3. Trabajo en pequeño grupo: discusión sobre el siguiente cuestionario:
   — ¿Cuándo proponemos problemas en clase...?
   — ¿Qué diferencias fundamentales creemos que hay entre “problema” y “ejercicios”?
   — ¿Estamos de acuerdo con la siguiente afirmación?: “Un problema es algo que hay que hacer, pero que no se sabe cómo hacerlo.”
4. Puesta en común.

[1] *Breve viaje al mundo de las Matemáticas*, Museu de la Ciència, Barcelona.

Veamos la definición que hacen de "problema" distintos autores:

— Para Wheathey (1984): *"Resolver un problema es lo que haces cuando no sabes lo que hay que hacer."*

— Para el Grupo 0 de Valencia (1987): *"Un problema matemático es una situación que implica un objetivo o propósito que hay que conseguir, hay obstáculos para alcanzar ese propósito y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo. La situación es habitualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su resolución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema."*

— Para Kantowski (1977): *"Una tarea es un problema para el estudiante si implica una pregunta que no sabe responder o una situación que es incapaz de resolver usando los conocimientos que tiene inmediatamente disponibles. En un ejercicio, sin embargo, el estudiante conoce un algoritmo que una vez aplicado le llevará, con seguridad, a una solución."*

Si se analizan las tres definiciones podemos ver que un problema se caracteriza porque:

— Parte de una situación.

— Pretende llegar a otra.

— No hay una vía directa y evidente para pasar de la una a la otra.

Entendido así, la resolución de problemas es fundamentalmente un proceso, no un camino previamente conocido. En palabras del Grupo 0 de Valencia (1987, pág. 93), es un viaje, no un destino.

Sentido de los problemas dentro del currículo

En el Informe Crockoft (realizado por la Comisión de la Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas de Inglaterra y Gales, en 1982), después de señalar que no es posible ni deseable indicar el método más idóneo para enseñar Matemáticas, considera que hay "ciertos elementos que deben estar presentes en una enseñanza acertada de las Matemáticas a alumnos de todas las edades:

— Exposición por parte del profesor.

— Discusión entre el profesor y los alumnos y entre estos últimos.

— Trabajo práctico apropiado.

— Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas.

— Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las Matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.

— Realización de trabajos de investigación.

En las obras sobre didáctica de las Matemáticas publicadas desde el inicio de los años ochenta hasta aquí se remarca la importancia de realizar actividades de resolución de problemas. De los ocho objetivos generales que establece el currículo de la etapa de Enseñanza Primaria, cuatro (4, 6, 7 y 8) hacen referencia explícita a la resolución de problemas o a la búsqueda de soluciones, y en todos los bloques aparecen contenidos, tanto procedimentales como actitudinales, encaminados a desarrollar las capacidades relativas a la resolución de problemas expuestos en los objetivos. Ahora bien, ¿para qué y qué pretendemos desarrollar en el alumnado mediante la resolución de problemas?

Actividad número 2

1. Trabajo en pequeño grupo:

   — Realizar un listado de conceptos, actitudes y procedimientos que, a juicio del grupo, se desarrollan mediante la resolución de problemas.

2. Puesta en común y debate sobre las aportaciones de los grupos:

   — Recoger las aportaciones de los grupos en la pizarra.

   — Señalar aquellas en las que hay mayor grado de consenso.

   — Debatir sobre las que no estén de acuerdo.

Al realizar esta misma actividad en la primera sesión de un curso sobre resolución de problemas, y después de agrupar las aportaciones que tenían el mismo sentido, se llegó al siguiente listado (se transcribe literalmente):

— Aprenden a pensar antes de actuar.

— Se desarrolla la creatividad.

— Se aprende a analizar las situaciones.

— Flexibilidad de pensamiento y revisión.

— Alegrarse por el enriquecimiento propio que supone que otra persona te aporte otro punto de vista diferente al tuyo.

— Espíritu de colaboración.

— Capacidad de trabajar en grupo.

— Se consolidan conceptos.

— Persistencia en la tarea.

— Se desarrolla la confianza en sí mismo.

— Se aprende a disfrutar del trabajo.

— Se desarrolla el gusto por las Matemáticas.

— Se aplican las Matemáticas al mundo real.

— Se aprenden procedimientos.

— Se desarrolla la capacidad de reflexión lógica.

— Se desarrolla la comprensión lectora.

Cuando un profesor o profesora propone a su alumnado la resolución de un problema, implícita o explícitamente, desea que se desarrollen unas capacidades, procedimientos o actitudes. Cuanto más se haya reflexionado sobre ellas, más adecuado será el problema escogido para el desarrollo de las capacidades que desea.

Sólo se añaden dos consideraciones a la reflexión personal y de grupo sobre el sentido de la resolución de problemas en clase:

— Mediante la resolución de problemas adecuados, aun con alumnos y alumnas de edades tempranas, se van desarrollando procesos matemáticos fundamentales: abstracción, representación, utilización de modelos, generalización, comprobación y simbolización.

— Resolver un problema auténtico requiere pensar, y en palabras de Miguel de Guzmán, citando a Polya, *"... en el aprendizaje de pensar, sólo la práctica de pensar es verdaderamente útil"* (Guzmán, 1991, pág. 2).

Por tanto, la resolución de problemas en la clase de Matemáticas debe trabajarse desde una doble perspectiva:

Como método: Para aprender y consolidar conceptos, procedimientos y actitudes. "Aprender resolviendo problemas" [2].

Como contenido: En sí mismo, desarrollando estrategias de resolución de problemas y reflexionando sobre los procesos comunes a los problemas planteados en las distintas partes de las Matemáticas. "Aprender a resolver problemas".

Ello implica que habrá ocasiones en que al proponer uno a nuestro alumnado nuestra intención irá claramente dirigida al desarrollo de algún tipo de estrategia, a resaltar la importancia de alguna de las fases de resolución de problemas, etc. En este caso, el contenido que pretendemos que adquieran es una herramienta heurística encaminada a capacitarles para resolver problemas. En otros momentos, nuestra intención será la consolidación de los conceptos que se trabajan en ellos, la adquisición de determinados procedimientos (recogida de datos, algoritmos, etc.) o bien el desarrollo de determinadas actitudes (cómo fomentar la curiosidad para indagar y explorar, la disposición a aceptar puntos de vista distintos, etc.).

Ambas concepciones están interrelacionadas y no son excluyentes: cuando se resuelve un problema utilizando determinada estrategia se está consolidando el contenido sobre el que se aplica, y cuando proponemos un problema para consolidar determinado concepto, el alumnado aplica las estrategias que haya adquirido.

Sin embargo, la adquisición de ese equipamiento heurístico requiere una enseñanza específica que se traduce en proponer en clase de forma sistemática y organizada problemas adecuados para desarrollar cada una de las estrategias que deseamos que adquiera nuestro alumnado.

Necesidad de trabajar los heurísticos

Se denominan heurísticos o estrategias heurísticas a las "operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas". Estas operaciones pueden ser sencillas o muy complejas. Así, forma parte del equipamiento heurístico de una persona tener un modelo mental

---

[2] Luis Puig en la revista *Aula*, número 6, septiembre, 1992.

de las fases del proceso de resolución de un problema, lo que le facilita el acercamiento al mismo; también son recursos heurísticos tener interiorizadas una serie de preguntas adecuadas en cada una de las fases que permitan comprobar si se pueden argumentar los pasos dados en el proceso de resolución o bien salir de un bloqueo. Son heurísticos de mayor alcance las estrategias generales de resolución de problemas, que después se estudiarán. Son, como se ha dicho, operaciones mentales útiles para el acercamiento confiado a la resolución de un problema. Útiles no quiere decir infalibles: son procedimientos que ofrecen grandes posibilidades de conseguir la solución (o al menos de acercarnos a ella), pero sin garantía de que funcionen.

Conviene, por tanto, diferenciarlos de los algoritmos, que, como ya se ha dicho, son prescripciones efectuadas paso a paso para alcanzar un objetivo particular garantizando la consecución de aquello que se quiere conseguir. Así, se utilizan algoritmos cuando se resuelven ejercicios, es decir, cuando se sabe exactamente qué pasos dar para llegar a la solución: hacer una división, aplicar una fórmula...

Los heurísticos se han desarrollado sobre todo en contextos matemáticos, aunque cabe preguntarse si son transferibles a otras situaciones. Su aplicación, aunque no resuelvan definitivamente el problema, vale para clarificar la tarea; por tanto, deben estar considerados como objetivos claros en cualquier enseñanza matemática.

Existen muchos trabajos de investigación referidos al estudio y desarrollo de heurísticos. Algunos han intentado descifrar qué diferencias hay entre los métodos que utilizan las personas expertas en resolución de problemas de las que utilizan las no expertas. Otros se han centrado en analizar la capacidad de resolución de problemas de un grupo experimental antes y después de haber recibido formación en estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

De los resultados de estos trabajos, entre los que cabe mencionar los llevados a cabo por Rubenstein y Schoenfel (1979), se deducen los siguientes hechos:

— Cuando los estudiantes conocen y saben aplicar los heurísticos resuelven más problemas.

— Los heurísticos no se aprenden de forma espontánea o a través de ejemplos, sino que deben enseñarse de modo explícito.

  Según las investigaciones de Kantowski (1979), es necesaria una instrucción intensiva de cada heurístico, usando una colección de problemas especialmente escogida para tal fin. Después de adquirir una serie de heurísticos específicos o de nivel medio, el alumnado va adquiriendo la capacidad de aprender y usar otros más generales.

Fases en la resolución de un problema: modelo de Polya

Resolver problemas es una actividad mental compleja, pero, como se ha dicho, hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito y proporcionan, si no una garantía, al menos una confianza en que no se está carente de herramientas.

Por ello es importante proporcionar al alumnado un modelo de proceso general para la resolución de problemas, que le sirva de apoyo y le dé confianza al enfrentarse con la tarea.

Actividad número 3

El sentido de la siguiente actividad es reflexionar sobre la propia actividad mental a lo largo de la resolución de un problema. Para ello se proponen dos ejemplos. Una vez que se haya resuelto cada uno de ellos, el profesor o profesora asistente escribirá de la manera más coloquial posible todos sus pensamientos desde que ha comenzado la lectura del enunciado hasta que ha dado el problema por concluido.

1.° *Un alumno le hizo el siguiente razonamiento a su profesor de Matemáticas: "Resulta que no tengo tiempo para venir a la escuela en todo el año. Verá usted: duermo ocho horas diarias, que sumadas dan 112 días al año; no hay clase los sábados ni los domingos, que son 104 días al año; tenemos 60 días de vacaciones de verano; necesito tres horas diarias para comer, lo que supone más de 45 días al año; necesito al menos dos horas diarias para divertirme, que suman más de 30 días al año." El alumno hizo la siguiente suma:*

Sueño: 122 días	*Comidas: 45 días*
Sábados y domingos: 104 días	*Distracción: 30 días*
Vacaciones de verano: 60 días	*Total: 361 días*

"Ya ve: todo esto sólo me deja cuatro días para estar enfermo y para disfrutar de las fiestas del pueblo, por lo que este curso no tenemos ni un solo día de clase."

El profesor repasó la suma y vio que no había ningún error, y después de estudiar el problema encontró por qué no quedaba ningún día al año para asistir a clase. ¿Dónde está el error? [3].

2.° ¿Cuáles son los números que sólo tienen tres divisores?

[3] Problema propuesto en la VII Olimpiada Thales. Fase regional. Revista *Epsilon*, núm. 19, 1991.

El modelo clásico de Polya, del que han surgido posteriormente muchas variantes, distingue cuatro fases en la resolución de problemas:

1. *Comprender el problema*, es decir, familiarizarse con él, ver claramente lo que se pide y desear resolverlo; por tanto, no debe ser ni demasiado fácil ni demasiado difícil.

2. *Trazarse un plan*: supone analizar las relaciones que existen entre los diversos datos, pensar qué razonamientos, construcciones o cálculos han de hacerse para responder al problema. Es la fase esencial en la resolución de problemas y habitualmente la que menos se trabaja; como dice Polya (1982, pág. 33), en ella hace falta "conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración y, lo que es más, buena suerte".

3. *Ejecutar el plan*, es decir, realizar aquellas operaciones o construcciones que se derivan del plan trazado. Es importante, ya desde Primaria, acostumbrar al alumnado a estimar el resultado antes de iniciar las operaciones.

4. *Volver atrás*: una vez encontrada la solución, compararla con la estimación hecha, verificarla y discutirla, analizar los diversos procedimientos de resolución del problema que hayan surgido en la clase y formular otros problemas que puedan surgir a partir del mismo.

Actividad número 4

1. Trabajo individual (pequeño grupo-gran grupo):

   — Una vez analizado el modelo de Polya, intentar identificar las cuatro fases en la resolución de los problemas de la actividad número 3. Ver que, casi con toda seguridad, no se ha seguido una secuencia lineal, pero sí el proceso general.

2. Analizar si se ha seguido un modelo similar, si se ha obviado alguna de las fases y la conveniencia de aplicar el modelo propuesto por Polya.

A pesar de que cuando se resuelve un problema el proceso no sigue de forma lineal las cuatro fases, y se producen retrocesos y avances, sí es cierto que es un buen modelo del proceso general.

Es muy importante que el alumno y la alumna vayan interiorizando cada una de las fases en la resolución del problema. Para ello es bueno acostumbrarles a trabajarlos con fichas de tipo sistemático, o bien, en los últimos cursos de la etapa, proporcionarles un gráfico similar al que se adjunta.

ENUNCIADO-HISTORIA

GRÁFICO-VIÑETAS

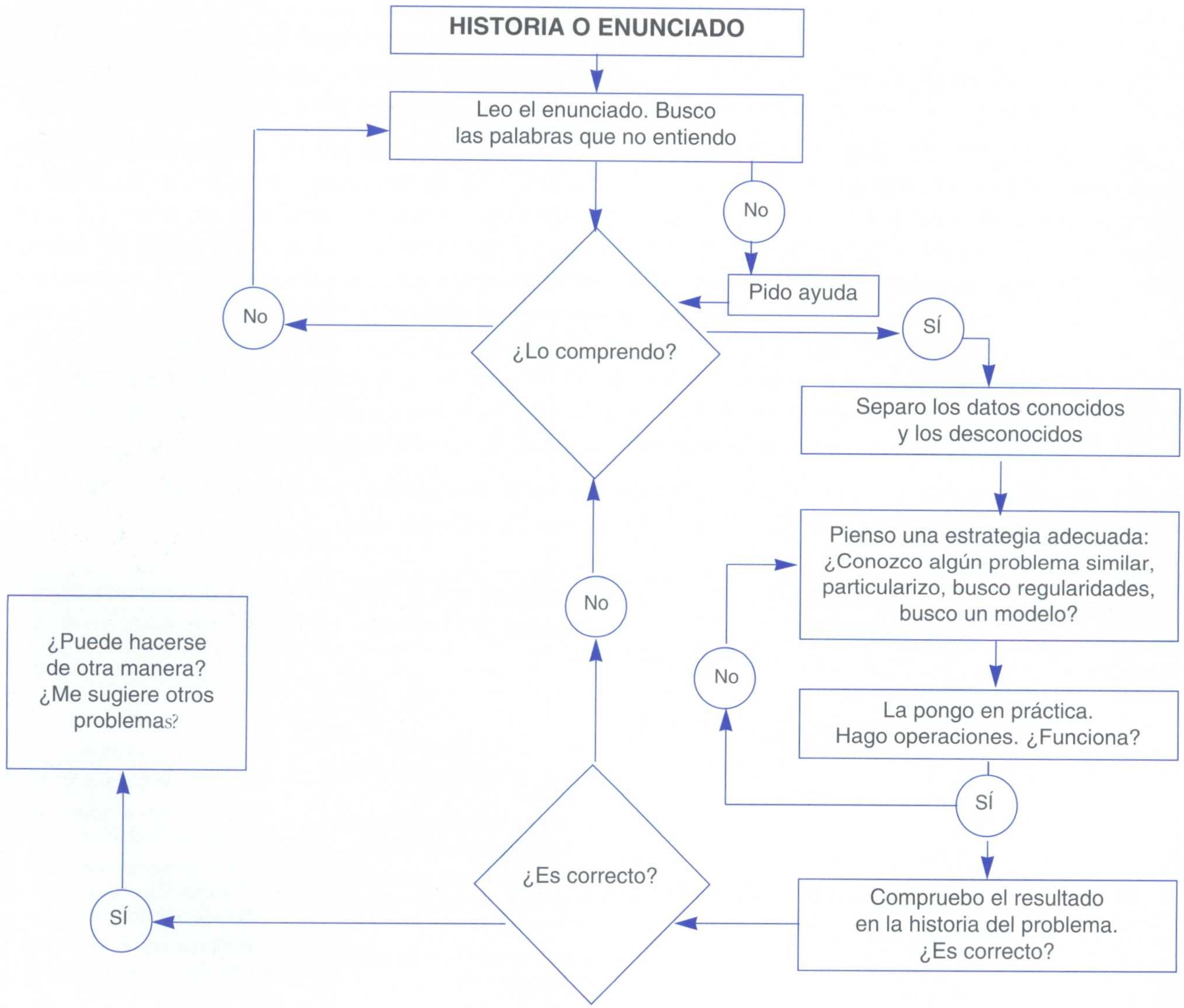
¿QUÉ DATOS TE DAN? ¿QUÉ DATOS TE PIDEN?

CALCULA LO QUE TE PIDEN SIN HACER OPERACIONES

OPERACIONES RESULTADO

ESCRIBE LA HISTORIA CON EL RESULTADO OBTENIDO

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA [4]



[4] Adaptado de un gráfico original de Luis Ferrero.

Dificultades del alumnado en cada una de las fases. Pautas heurísticas

En cada una de las fases pueden aparecer dificultades específicas que el profesorado debe tener presentes antes de proponer el problema y durante el proceso de resolución del mismo para analizar dónde y por qué tienen dificultades cada uno de sus alumnos y alumnas. Un diagnóstico cabal es el primer paso para una intervención educativa adecuada y para poner al alumnado en situación de éxito.

Antes de proponer un problema es conveniente prever una serie de pautas o sugerencias heurísticas (preguntas, comentarios, indicaciones...) para cada una de las fases con el fin de focalizar la atención del alumnado sobre aspectos especialmente importantes en cada una de ellas. De esta forma van adquiriendo el hábito de hacerse preguntas y reflexiones a lo largo del proceso de resolución, con lo que irán interiorizando actitudes similares a las de una persona experta al enfrentarse con la misma tarea. Dependiendo de la edad, las pautas o sugerencias heurísticas pueden ofrecerse de forma oral (para los más pequeños) o escrita. Es importante tener en cuenta que no sirven las mismas pautas para todos los problemas y todo el alumnado. Las preguntas deben promover la reflexión; por tanto, se formularán de manera que el alumnado no pueda contestar con un mero "sí" o "no". El profesorado sugerirá en cada momento aquellas que considere más adecuadas.

En los cuadros adjuntos se ofrecen algunos ejemplos de pautas heurísticas, que, sin duda, el maestro y la maestra podrán ampliar fácilmente desde su experiencia.

Primera fase	Procesos que se realizan	Dificultades que puede encontrar el alumnado	Pautas heurísticas para ayudar en la resolución
Comprender el problema	— Comprensión oral o lectura del enunciado. — Aceptación del reto: interés por resolverlo.	— Falta de comprensión oral (dificultad de atención, vocabulario...). — No interpretar el texto: • Por falta de comprensión lectora. • Por no conocer el vocabulario específico del tema. — La situación que plantea el problema no es familiar al alumnado. — Es demasiado difícil y provoca bloqueos afectivos. — Es demasiado fácil y no es aceptado como un reto.	— ¿Hay alguna palabra que no conozco? — ¿Qué nos piden? — ¿Cuáles son los datos? — Representa el problema. — Haz un gráfico o dibujo con los datos del problema. — Explica o escribe este problema con tus propias palabras para que sea más fácil. — ¿Te ha recordado algún problema que hayas hecho anteriormente?

Segunda fase	Procesos que se realizan	Dificultades que puede encontrar el alumnado	Pautas heurísticas para ayudar en la resolución
Trazarse un plan	— Analizar las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos. — Ver qué procesos se pueden seguir para llegar a la solución: pensar en una estrategia adecuada. — Determinar qué cálculos, razonamientos o construcciones son necesarios en la resolución del problema.	— Bloqueos afectivos: falta de confianza en que son capaces de resolverlos. — Falta de conocimientos previos: • No tener experiencia en resolución de problemas. • Falta de herramientas heurísticas. • Conceptos matemáticos mal asimilados: no saber qué operaciones aplicar y en qué orden.	— Una vez comprendido el problema, ¿puedes resolverlo? — ¿Conoces algún problema parecido a éste? ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian? — Empieza por lo más fácil. — Dibuja una situación simbólica como la del problema. — Pongo un ejemplo concreto, con números. — ¿Cuántas partes tiene el problema? — ¿Qué relación tienen los datos entre sí? ¿Cuáles voy a utilizar primero? ¿Qué voy a conseguir utilizando estos datos? — ¿Se puede hacer de varias maneras? ¿Cuál es más clara? — ¿Puedo enunciar el problema de forma diferente?

Tercera fase	Procesos que se realizan	Dificultades que puede encontrar el alumnado	Pautas heurísticas para ayudar en la resolución
Ejecutar el plan	— Estimar el resultado. — Análisis de las magnitudes. — Aplicar los procedimientos y técnicas pensados en la fase anterior. — Realizar las operaciones.	— Tener poco hábito de estimación de magnitudes. — Falta de dominio de los procedimientos y técnicas. — Falta de dominio del cálculo. — Necesidad de conocimientos más amplios para resolver el problema.	— Verificar cada paso. — Comprueba en qué unidad están los datos. — Pon las unidades de cada resultado y explica lo que es. — A cada paso que des piensa: ¿por qué hago esto?, ¿puedo justificarlo? — Si surgen dificultades en la resolución, no desistas hasta que claramente tu plan no sea válido. — Si ocurre esto, vuelve al principio, corrige los errores y empieza de nuevo.

Cuarta fase	Procesos que se realizan	Dificultades que puede encontrar el alumnado	Pautas heurísticas para ayudar en la resolución
Volver atrás o fase de verificación	— Comparar el resultado con la situación realizada. — Comparar el resultado con el enunciado del problema. — Verificar cada paso del razonamiento. — Ver si el problema se puede resolver de otra manera. — Pensar qué otro tipo de problemas podrían resolverse de manera similar. — Formular problemas que hayan surgido durante la resolución de éste: "¿Y si...?	— Falta de costumbre de analizar el resultado. — Falta de espíritu crítico. — No ser consciente de estar aprendiendo una metodología de resolución de problemas.	— Cuando creas que has terminado el problema, repasa el proceso paso a paso. — ¿Te parece lógica la solución? Si no lo es, estudia el problema otra vez. — No des sólo un número como solución. Pon las unidades y explica qué es. — ¿Puede haber otro resultado o solución? — Intenta resolver el problema de otra manera. — ¿Se te han ocurrido otros problemas mientras resolvías éste? Escribe su enunciado y preséntalos al grupo.

La intervención del profesorado

Para ayudar a los alumnos y alumnas a mejorar su capacidad para resolver problemas es bueno que el profesorado parta de algunas premisas: es más importante el proceso en la resolución, la lucha con el problema, que obtener el resultado correcto sin dudar; en el primer caso se produce más aprendizaje y de más calidad. Otro aspecto aún más fundamental es que la resolución de problemas es una vía muy adecuada para afianzar la autoestima de nuestro alumnado y para fomentar su gusto por las Matemáticas. Asumir estas premisas genera una serie de actitudes en el profesorado que se reflejan en tres momentos de la tarea: antes de plantearlo, en el desarrollo del mismo y después de haberlo resuelto.

Actividad número 5

1. Trabajo en pequeño grupo:
   — Reflexionar sobre las actitudes que, desde su experiencia, consideran que deben tener los y las docentes:
   - antes de plantear un problema,
   - en su desarrollo,
   - después de haberlo resuelto.

Antes de plantear un problema

En este momento los docentes deben tener muy claro qué tipo de capacidad y contenido pretenden desarrollar en el alumnado. En función de ello, buscarán los problemas más adecuados para el grupo y, siempre que sea posible, plantearán varias preguntas que impliquen diferentes grados de dificultad, con el fin de que todo el grupo pueda resolver, por lo menos, algunas de las mismas y que todo el alumnado, incluso los más aventajados, encuentren un reto en la resolución. Parece necesario que el profesorado resuelva los problemas antes de plantearlos, reflexionando sobre sus procesos de resolución para detectar las posibles dificultades y poder sugerir las pautas y estrategias adecuadas y diferentes según el tipo de alumno y el proceso de resolución que esté llevando. Cuando se plantea un problema, se ha de estimular en los alumnos y alumnas la confianza en sí mismos, animándoles a disfrutar con su resolución y con el reto que supone la búsqueda de la estrategia para resolverlo.

En esta primera fase, el papel del profesorado estriba en elegir el problema más adecuado y en convertirse en un animador y estimulador para que el alumnado se pueda enfrentar al problema con entusiasmo, ilusión y seguridad.

En el proceso de resolución del problema

Mientras el alumnado está resolviendo el problema propuesto, el papel del maestro y la maestra es fundamentalmente de ayuda para salir del bloqueo. Se ha de intervenir ***no para contestar*** las preguntas que hagan los alumnos y las alumnas, sino para hacerles reflexionar sobre sus dudas y formularles nuevos interrogantes que les lleven a satisfacer la respuesta. Ha de ser también animador del grupo para que sean los propios alumnos y alumnas los que se respondan entre sí las dudas o preguntas que planteen. Asimismo, el profesorado ha de mantener una actitud lo suficientemente abierta para dejarse sorprender por las diferentes estrategias de resolución, algunas veces inéditas para él y ella.

En determinados problemas, y en los casos en los que los alumnos y alumnas se encuentren bloqueados, el profesorado puede indicar algunas estrategias o plantear preguntas que le ayuden a superar la situación y le permitan poder continuar con éxito la resolución del problema. Es más importante que el alumnado logre la confianza en sí mismo y se sienta con ganas de afrontar otro problema, aunque se le haya ayudado mediante preguntas, que esperar su frustración. Como decía Einstein, *"lo importante es seguir preguntando"*. Hay que estimularlos una y otra vez para que expresen todas las dudas o interrogantes que surjan en la resolución del problema. En esta misma línea nos reafirma Miguel de Guzmán (1991, pág. 43) cuando dice: *"El que pregunta llega lejos, se entera, adquiere interactivamente el conocimiento para integrarlo así en su propia estructura mental. El que no pregunta, entiende a medias, se queda en la penumbra pasivamente y la idea se le escapa como a través de un colador. La pregunta es como el anzuelo para extraer ideas originales. Implica un cierto escepticismo, curiosidad, conciencia de un conocimiento parcial y el reconocimiento de cierta ignorancia ilustrada."*

Por último, en esta etapa no podemos olvidar el papel afectivo que jugará el profesor y la profesora, sobre todo con aquellos alumnos y alumnas que sientan mayor inseguridad a la hora de resolver problemas, motivándoles, estimulándoles y valorando sus logros. También es muy importante tener en cuenta, como se ha dicho, las necesidades del alumnado más capaz, bien teniendo preparada alguna cuestión sobre el mismo problema con mayor grado de dificultad, bien preparando algún trabajo de profundización sobre el tema que se está desarrollando.

Una vez resueltos los problemas

Se valorarán todas las estrategias de resolución comprobando que hay diferentes caminos para llegar a la misma meta, enriqueciéndose el grupo con la puesta en común de todos los trabajos. Igualmente es importante el análisis y la reflexión sobre los errores cometidos: en el alumnado, para que tome conciencia de qué ha ocasionado el error y aprenda de él; en el profesorado, para analizar el proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas y aprender así sobre la propia práctica y para replantear el trabajo en aquellos aspectos que se consideren necesarios.

Por último, siguiendo las etapas de Polya, el profesorado guiará a los alumnos y alumnas para que hagan una visión retrospectiva sobre el problema que han realizado y se convierta en un aprendizaje significativo que le ayude en posteriores resoluciones.

Actividad número 6

1. Trabajo en pequeño grupo:

   — Reflexionar sobre las actitudes señaladas por el grupo en la primera actividad y compararlas con las que se han mencionado.

Además de las actitudes señaladas en cada una de las fases, es importante que en todo momento el docente y la docente transmitan entusiasmo al plantear problemas, que se esfuercen, a su vez, por ser un buen resolutor o una buena resolutora y sean conscientes de que cuando sus alumnos y alumnas resuelven situaciones problemáticas están trabajando procesos matemáticos fundamentales y transferibles al aprendizaje y consolidación de otros tipos de contenidos.

Estrategias heurísticas para la resolución de problemas

Como se ha visto, en la fase "trazarse un plan", uno de los procesos que se realizan es el análisis y elección de las estrategias heurísticas que pueden ser más adecuadas para la resolución del problema. Consciente o inconscientemente, siempre se utilizan estrategias de resolución de problemas que se han ido adquiriendo con la experiencia. La utilización consciente y sistemática es una de las características de los resolutores expertos. Conocer la propia *"disponibilidad de estrategias variadas proporciona, por tanto, una cierta seguridad en la propia capacidad de resolver el problema"*.

A continuación se hacen algunas indicaciones sobre tres estrategias concretas: particularización, generalización y analogía, puesto que se entiende que son especialmente potentes; como dicen Mason-Burton-Stanley (1988, pág. 22), *"a la relación permanente entre particularización y generalización se reduce gran parte del pensamiento matemático"*, y, por otro lado, *"la inferencia por analogía es posiblemente el modo más común de obtener conclusiones"* (Grupo 0 de Valencia, 1984, pág. 121).

Cada una de estas tres grandes estrategias generales de resolución de problemas implica la utilización de heurísticos o estrategias de rango menor, que son las que se pueden trabajar con el alumnado desde Educación Primaria.

La extensión del documento no permite un estudio exhaustivo ni en profundidad de cada una de las estrategias seleccionadas. La lectura de este trabajo puede animar al estudio del tema, para lo que será de gran ayuda la bibliografía recomendada.

Particularización

Actividad número 7

1. Trabajo en pequeño grupo:

— Resolver el siguiente problema:

En una tienda nos hacen siempre el 10% de descuento porque el dueño es amigo nuestro. Hoy, además, es el quinto aniversario de la inauguración, y hacen, a todos los clientes, el 5% de descuento. ¿Qué nos conviene más: que nos hagan primero el 10% de descuento y después el 5%, o al revés?

— Analizar el proceso que se ha seguido en los distintos grupos.

La particularización es una estrategia heurística de resolución de problemas que consiste en fijar la atención en algunos ejemplos para comprender mejor la situación general que se plantea en la pregunta o para comprobar en casos particulares alguna ley general; responde, pues, a los procesos matemáticos de probar y comprobar. En algunos problemas, como el del ejemplo anterior, particularizar significa realizar ejemplos numéricos; en otros, significa experimentar con objetos físicos o matemáticos como figuras o símbolos. Los límites con la analogía en estos casos son difusos, y de hecho algunos autores (Grupo 0 de Valencia) no incluyen la particularización como estrategia general. En cambio, otros (Mason, Burton y Stanley) le dan una importancia preeminente. En este documento se particulariza cuándo se desea probar o comprobar algo mediante la utilización de objetos, símbolos, etc.

Algunas pautas heurísticas que se emplean con problemas de particularización pueden ser: ¿por qué no pruebas con un ejemplo?, ¿qué sucedería con otro número? Comprueba con ejemplos hasta que estés completamente seguro...

Actividad número 8

1. Resolver el siguiente problema justificando cada uno de los pasos, incluso cuando no nos hayan conducido a ninguna conclusión válida:

   Las vacas son habitualmente unos animales muy pacíficos, pero las de nuestro problema se han vuelto rabiosas. ¿Cómo deberemos colocarlas en un campo para que no luchen unas con otras y se aproveche el pasto al máximo?

2. Analizar en qué momento se ha utilizado la particularización.

Utilizamos, por tanto, la particularización para probar y comprobar si se cumplen leyes generales. Por ejemplo, comprobar que la relación entre cualquier circunferencia y su diámetro es siempre igual a “pi”, o comprobar que el perímetro de un cuadrado siempre es igual a cuatro veces el lado.

En cursos superiores es preciso crear en el alumnado la conciencia de que no se puede llegar a la total seguridad de que el resultado obtenido a partir de una particularización es siempre correcto, a no ser que se haya obtenido una justificación matemática.

Concluyendo, el desarrollo de la estrategia de particularización en el alumnado debe ir encaminada conscientemente a:

— Dotarles de una técnica que les permita salir de situaciones de bloqueo ante problemas no definidos.

— Acostumbrarles a no dar por válida la primera ley general que encuentren si no han llegado a una justificación matemática.

Existen algunas estrategias que utilizan la particularización para llegar a la solución del problema, como son “ensayo y error” y “análisis de posibilidades”.

Ensayo y error

Consiste en realizar particularizaciones del problema general y comprobar si el resultado hallado es una solución del problema. El ensayo y error puede ser fortuito, sistemático o dirigido.

Ensayo y error fortuito consiste en realizar pruebas al azar, sin ningún plan prefijado. Es un método fácil, pero poco potente. El **ensayo y error sistemático** consiste en la elección de las particularidades según un orden y agotando todos los casos posibles. Es un método más eficiente que el anterior, pero puede implicar muchas pruebas antes de dar con la solución correcta. El **ensayo y error dirigido** es una estrategia mucho más potente, que se diferencia del ensayo y error sistemático en que cada resultado obtenido se contrasta no sólo con la pregunta del problema, sino también con los resultados obtenidos anteriormente para comprobar si está más cerca o más lejos de la solución, convirtiéndose así cada particularización en una aproximación sucesiva.

Durante la Educación Primaria se debe ir encaminando al alumnado hacia la adquisición de las estrategias de ensayo y error dirigido, introduciendo cada una de ellas cuando haya percibido lo laborioso de las anteriores.

Un ejemplo de problema a resolver mediante la aplicación de estas estrategias es el siguiente:

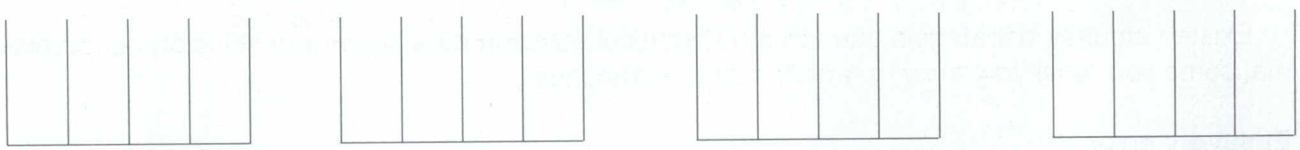
Un palíndromo es un número capicúa: 33, 414, 6336... ¿Cómo deben ser dos números cualesquiera de tres cifras para que su suma nos dé un palíndromo de tres cifras?

Análisis de posibilidades

Supone una serie de particularizaciones encaminadas a explorar todos los posibles casos que cumplen las condiciones del problema. A pesar de que utiliza particularizaciones, la estrategia fundamental en el análisis de posibilidades es el orden sistemático en ese análisis.

Habitualmente, el alumnado, sobre todo en edades tempranas, empieza haciendo particularizaciones al azar, por lo que fácilmente no se rastrean todas las posibilidades. Cuando sucede esto es el momento adecuado para sugerir otra forma de realizarlas siguiendo un orden sistemático.

Escribe todos los números "valle" posibles con 13 bolas.



Generalización

Generalizar supone extraer una ley válida para cualquier caso a partir de la comprobación de las conjeturas que nos sugieren las regularidades obtenidas en algunos ejemplos. Supone el uso significativo de símbolos que permiten presentar el razonamiento de forma concisa.

No se debe pretender en Educación Primaria que el alumnado resuelva problemas utilizando la estrategia de generalización hasta llegar a la simbolización de la ley, pero es importante analizar el proceso y que el profesorado incorpore a su bagaje heurístico esta estrategia general, puesto que sí se pueden trabajar, desde edades muy tempranas, técnicas y estrategias que favorecen la generalización. La experiencia parece indicar que se potencia mediante la siguiente secuencia:

— Realizar particularizaciones, acostumbrando al alumnado a hacerlo de forma sistemática y ordenada.

— Elaboración de tablas para la recogida de los resultados de las particularizaciones.

— Análisis de regularidades sobre las tablas.

— Hacer conjeturas, es decir, afirmaciones que parecen razonables, pero cuya veracidad no ha sido demostrada, sobre qué regularidades parece que se dan.

— Comprobarlas mediante la particularización en casos distanciados.

— Generalización o expresión simbólica de la ley general.

— Plantear la duda ¿se cumple siempre?

Actividad número 9

1. Trabajo en pequeño grupo:

   — Realizar los problemas que se proponen a continuación siguiendo la secuencia anterior (reflexionar sobre la importancia de confeccionar una tabla adecuada):

   ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo, sabiendo el número de lados?

Polígono	N.° de lados	N.° vértices	N.° diagonales en vértice	N.° total de diagonales
Triángulo	3			
Cuadrado	4			
Pentágono	5			
Hexágono	6			
...	...			
n-ágono	n			

   — Hallar la suma de los *n* primeros números impares consecutivos.

Aunque no se pretende que el alumnado llegue a la simbolización de la ley general, como se verá, sí es posible trabajar a lo largo de Educación Primaria: la experimentación de casos particulares, la recogida de datos en tablas, el análisis de regularidades, la expresión de conjeturas y la realización de nuevas particularizaciones encaminadas a comprobar las conjeturas. Son estrategias heurísticas de menor rango que la generalización, pero que desarrollan la capacidad de razonamiento matemático.

Analogía

La analogía es un proceso fundamental del conocimiento cuyo hilo conductor es la comparación; ésta puede ser entre dos objetos, problemas, etc., entre los cuales se descubren similitudes, despreciando las diferencias accidentales entre ambos.

La inferencia por analogía es el modo más común de obtener conclusiones. A lo largo de la vida el ser humano, al encontrarse frente a algo desconocido, busca entre su colección de modelos mentales aquellos que pueden ser aplicables en esencia a la nueva situación o problema con que se enfrenta, aunque no sean absolutamente iguales. En otras palabras, es buscar un modelo o esquema conocido que puede ser aplicado a la situación desconocida.

Se pueden resolver problemas utilizando modelos físicos, modelos gráficos y modelos simbólicos.

Ejemplos de *modelos físicos* muy utilizados o que se pueden utilizar en Educación Primaria, tanto en la adquisición de conceptos como en la resolución de problemas, son:

— Ábaco: para la comprensión del valor posicional en el Sistema de Numeración Decimal, para facilitar la comprensión y la escritura de números de varias cifras en los que aparece el 0.

— Geoplano: permite descubrir propiedades de las figuras geométricas planas...

— Policubos: se puede explorar el concepto de volumen, la situación espacial...

— Espejos: descubrir ejes de simetría, para visualizar propiedades de los polígonos regulares...

Y todos aquellos materiales con los que se puede simular el problema y extraer conclusiones.

Ejemplos de *modelos gráficos* que se utilizan habitualmente en la clase de Matemáticas son las figuras geométricas, los dibujos y esquemas, diagramas, árboles lógicos, etc. Utilizamos la estrategia de analogía cuando realizamos un modelo gráfico para representar el problema.

Un *modelo simbólico* es, por ejemplo, el lenguaje algebraico. Las fórmulas no son sino representaciones de las relaciones entre los elementos que en ellas intervienen. La expresión simbólica adecuada de las relaciones entre los elementos del problema a resolver es otra forma de utilización de la analogía.

Ahora bien, la analogía supone comparación, y esa comparación también puede ser entre dos problemas. Por tanto, al abstraer los aspectos fundamentales de un problema, se puede apoyar en algunas estrategias analógicas sencillas para encontrar otro que sirva como modelo y que al actuar sobre él permita identificar las propiedades o relaciones que se buscaron en el original.

Buscar un problema afín

Se trata de pensar en algún problema ya resuelto y estructuralmente parecido. Algunos pueden también ser similares en la forma, pero otros no, como se verá en la siguiente actividad.

Actividad número 10

1. Trabajo en pequeño grupo y posterior puesta en común:

   Planteamos aquí algunos problemas afines a otros ya propuestos en el documento:

   ¿Qué números son los que tienen número impar de divisores?

   A una reunión van un número determinado de parejas (hombre-mujer). Cada persona saluda con un abrazo a todas las demás menos a su compañero o compañera. Si en total han dado 60 abrazos, ¿cuántas personas se han reunido?

2. Puesta en común:

   ¿De qué problemas son afines cada uno de los dos propuestos?

   ¿Qué estrategias hemos utilizado en cada uno de ellos?

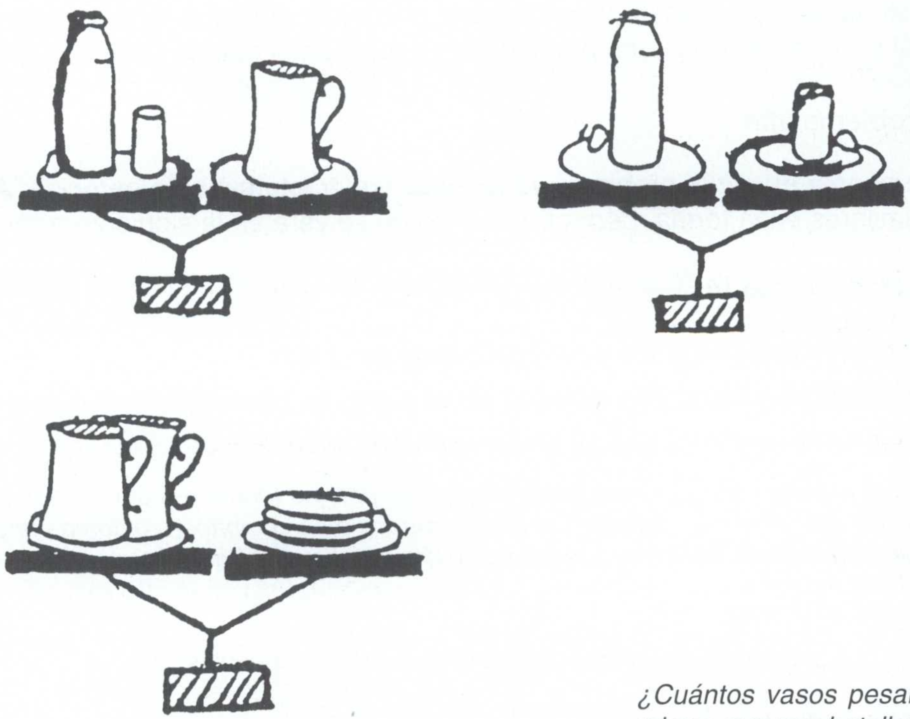
Dividir un problema en subproblemas

Consiste en *"dividir el problema de forma consciente y sistemática en sus partes componentes y resolver cada una de esas partes..., combinando después los resultados hasta constituir una solución al problema global"* (Larry Wood, E., 1987, pág. 49).

Actividad número 11

1. Trabajo en pequeño grupo:

   Resolver el siguiente problema trazando antes un plan, es decir, expresando qué subproblemas se deben resolver para llegar a la solución:



¿Cuántos vasos pesarán lo mismo que una botella?

Esta estrategia es muy utilizada en Educación Primaria en problemas en los que se pretende combinar la utilización de diversas operaciones.

Aquí se aplica la analogía al buscar modelos de problemas afines a cada uno de los subproblemas.

Subobjetivos recurrentes

Larry Wood (*op. cit.*, pág. 60) plantea este tipo de estrategia como un caso especial de la de descomponer problemas en subobjetivos. Se utiliza en aquellos problemas que presentan relaciones recurrentes entre sus elementos, es decir, en aquellos en que la solución del problema es la suma de subobjetivos más pequeños, cada uno de los cuales es a su vez la suma de objetivos más pequeños.

Actividad número 12

1. Trabajo en pequeño grupo:
   - — Intentar resolver el siguiente problema sin utilizar la estrategia de empezar por el final.
   - — Analizar qué estrategias utilizamos.
   - — Resolverlo después empezando por el resultado final.
   - — Analizar la estructura del problema y formular en grupo algunos similares.

Los guardianes de naranjas

Un vagabundo furtivo entró en un huerto para apropiarse de algunas naranjas. Al intentar salir se tropezó con el guardián, que, compadecido, le dejó pasar haciéndole entregar la mitad de las naranjas y otra media naranja.

Con un segundo guardián consiguió, por lástima de sus ruegos, que le dejase pasar, pero dándole también la mitad de las naranjas que tenía, más media naranja.

Lo mismo exactamente sucedió con un tercer guardián. Tras eso salió del campo, libre, con dos naranjas.

¿Cuántas había cogido al principio?

3

La resolución de problemas en el aula

Trabajo de heurísticos en el aula

Esta parte del trabajo está orientada a la actividad en el aula. En ella se pueden diferenciar claramente tres apartados.

En el primero se propone una posible secuencia de los heurísticos adecuados para trabajar en cada ciclo, tanto encaminados a la interiorización de las fases de la resolución de problemas como al desarrollo de estrategias generales. En ella se hace referencia exclusivamente a aquellos aspectos que conviene trabajar sistemáticamente con los alumnos y alumnas, para que al finalizar la Etapa Primaria tengan interiorizado —y, por tanto, incorporado a su forma de hacer— un modelo de resolución de problemas. También ofrece estrategias generales o aspectos de la misma que convendría desarrollar a lo largo de los tres ciclos.

Dicha secuencia es una primera aproximación a los contenidos procedimentales necesarios para la resolución de problemas. Se invita al profesorado a reflexionar y profundizar sobre la misma y a su experimentación en el aula para confirmar algunos aspectos o modificar otros.

En el segundo apartado se presentan y desarrollan un conjunto de problemas tipo adecuados para trabajar con el alumnado. Al principio se abordan los problemas como contenido procedimental, es decir, se trabajan de forma que permitan profundizar en procedimientos encaminados a la resolución de problemas. El trabajo se orienta al desarrollo de estrategias heurísticas concretas.

Si bien, como ya se ha indicado, en todos los problemas es conveniente seguir, más o menos, las fases del modelo de Polya, se hace un análisis más exhaustivo de las mismas en los dos primeros problemas que se presentan; se sugieren, a modo de ejemplo, posibles pautas heurísticas para cada una de las fases, lo que no se hace en el resto de los problemas.

En cada problema se utiliza más de una estrategia, por lo que no es conveniente clasificarlos en función de las mismas, si bien, casi siempre, en cada uno de ellos habrá una estrategia que predomine. Además, cada alumno o alumna utilizará en cada caso aquella estrategia que se adecue mejor a su forma de pensamiento, por lo que el profesorado ha de ser sumamente respetuoso con el plan elegido por el alumno o la alumna, sin tratar de imponerle una estrategia determinada. Es en las puestas en común donde se potenciará la reflexión sobre todas las utilizadas para que cada alumno y alumna pueda interiorizar, poco a poco, las más idóneas para cada tipo de problemas.

En los problemas propuestos se indican algunas sugerencias para trabajarlos con el alumnado: los heurísticos que se ponen en juego y otros contenidos matemáticos que se consolidan. Asimismo se sugiere el momento adecuado para trabajarlos.

Al final de este punto se ofrecen problemas para practicar "búsqueda de regularidades" con diferente profundidad en cada uno de los ciclos.

En el tercer apartado se ofrecen ejemplos de distintos tipos de problemas encaminados a la consolidación y aplicación de otros contenidos matemáticos. Incluimos un subapartado dedicado a la resolución de problemas utilizando la calculadora y otro encaminado al desarrollo del cálculo mental.

Posible secuencia de los heurísticos de resolución de problemas para Educación Primaria

A lo largo de los seis años en los que transcurre la Educación Primaria el pensamiento del alumnado experimenta cambios que suponen un desarrollo del pensamiento lógico que va desde el pensamiento preoperatorio característico de la Educación Infantil hasta la aparición del pensamiento formal, típico de niveles superiores. El período de las operaciones concretas característico de la Educación Primaria supone la capacidad de realizar operaciones mentales sobre objetos; por ello el desarrollo de los diferentes heurísticos se debe secuenciar partiendo de la realidad y del manejo directo de objetos en los primeros años de la Educación Primaria para ir paulatinamente introduciendo otros modos de análisis, como puede ser la utilización de gráficos, tablas, etc.

Por tanto, no se debe pretender conseguir a lo largo de la etapa la consecución completa de estrategias generales de resolución de problemas, entendidas en el sentido matemático estricto, pero sí pueden iniciarse procesos heurísticos que encaminan hacia ellas.

La estrategia de *generalización* tiene sus limitaciones en estas edades, ya que supone llegar a la formulación simbólica de la ley general; sin embargo, sí se puede trabajar la recogida sistemática de datos, la búsqueda de regularidades, la formulación de conjeturas y su verificación, graduando la dificultad de las mismas a lo largo de la etapa y empezando la experimentación a partir de objetos concretos.

En la estrategia de *particularización* es posible probar con ejemplos concretos, aunque no se puede llegar a la demostración matemática; se puede trabajar el método de ensayo y error avanzando desde el ensayo y error fortuito hacia el dirigido y análisis de probabilidades.

Por último, en relación con la estrategia de *analogía* pueden utilizarse modelos físicos, gráficos y la utilización de símbolos (números) dentro del campo numérico de Educación Primaria; también las estrategias de buscar un problema afín y dividir un problema en subproblemas.

Este tipo de actividades, con diferentes grados de profundización, pueden ser trabajadas por todo el alumnado, siempre que se propicie la confianza en sí mismos y se evite que queden bloqueados.

Secuencia de heurísticos en los tres ciclos de Educación Primaria

<table>
<tr><th colspan="3">Posible secuencia de los heurísticos de resolución de problemas</th></tr>
<tr><th>Primer Ciclo</th><th>Segundo Ciclo</th><th>Tercer Ciclo</th></tr>
<tr>
<td>— Aplicación de un modelo sistemático de resolución de problemas que implique:
• Interpretación, escenificación del enunciado.
• Verbalización de las acciones a realizar.
• Realización de esas acciones propuestas.
• Expresión verbal del proceso seguido.
• Comprobación de los resultados.
— Estrategias a desarrollar:
• Ensayo y error.
• Análisis de posibilidades.
• Representaciones gráficas: dibujos que impliquen acciones, uso de simbolismos inventados por el alumnado.
• Recogida de datos en tablas.
• Búsqueda de regularidades.
• Utilizar modelos físicos.</td>
<td>— Aplicación de un modelo sistemático de resolución de problemas que implique:
• Comprensión, expresión del enunciado.
• Búsqueda de posibles caminos.
• Realización de los caminos señalados.
• Comprobación del proceso seguido.
• Expresión oral y escrita de todo el proceso.
— Estrategias:
• Ensayo y error.
• Análisis de posibilidades.
• Representaciones gráficas mediante flechas, dibujos geométricos...
• Recogida de datos en tablas.
• Búsqueda de regularidades.
• Realizar conjeturas.
• Utilizar modelos físicos.
• Utilizar modelos gráficos.
• Problemas afines.</td>
<td>— Aplicación de un modelo sistemático de resolución de problemas que implique:
• Comprensión del enunciado.
• Valoración de posibles caminos a seguir.
• Toma de decisiones del camino más idóneo.
• Resolución.
• Comprobación.
• Expresión del proceso seguido.
— Estrategias a desarrollar:
• Ensayo y error (orientado).
• Análisis de posibilidades.
• Particularizaciones.
• Gráficos: esquemas.
• Recogida de datos en tablas.
• Elaboración de tablas.
• Búsqueda de regularidades.
• Realización de conjeturas.
• Utilizar modelos físicos.
• Utilizar modelos gráficos.
• Problemas afines.
• Subproblemas.
• Subobjetivos recurrentes.</td>
</tr>
</table>

Problemas “tipo” para trabajar estrategias

Aplicación de pautas heurísticas en el aula

Las pautas heurísticas, como ya se ha indicado, son interrogantes, preguntas, afirmaciones que sirven para aclarar y comprender mejor el enunciado, tomar decisiones sobre el camino a seguir, ejecutar el plan trazado sabiendo por qué y para qué se hace, revisar el proceso seguido, etc.

Este tipo de interrogantes, ¿qué me piden?, ¿qué datos me dan?, voy a probar multiplicando..., es necesario trabajarlas con el alumnado para afrontar la resolución de problemas con mayor éxito. Se incluirán y se tendrán en cuenta como contenidos propios de la resolución de problemas.

No todas las pautas sirven para todos los problemas: para cada uno han de elegirse las más adecuadas. Deben dirigirse a las cuatro fases: comprensión del enunciado, trazarse un plan y revisar el proceso seguido.

En todas y en cada situación problemática se formularán de manera específica, por escrito u oralmente. Se enunciarán de tal manera que el alumno o la alumna se vea obligado a dar respuestas diferentes a "sí" o "no".

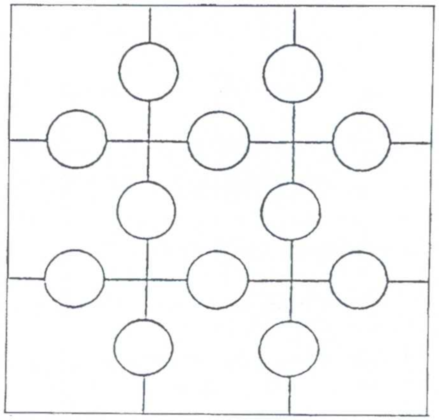
PROBLEMA N.° 1

— *Coloca los números del 1 al 9 en cada casilla o cuadrado.*

— *Escribe en cada uno de los círculos el producto de los números de los dos cuadrados adyacentes.*

— *Suma todos los productos.*

— *Hay que obtener el resultado más grande posible. Investiga cómo colocar los números para obtenerlo.*



Este problema es adecuado para alumnos y alumnas *de final del segundo ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Comprensión del enunciado:

a) ¿Dónde tengo que colocar los nueve primeros dígitos?

b) ¿Qué es adyacente?

c) ¿Qué resultado coloco en los círculos?

d) ¿Sumo el resultado de los círculos o el de los cuadrados?

e) ¿Qué resultado tengo que obtener?

f) Cuento a un compañero o compañera lo que tengo que hacer.

— Concebir un plan:

a) Iré colocando en los cuadrados los nueve primeros dígitos.

b) Reflexionaré sobre la mejor manera de colocarlos para que el resultado de los productos sea el mayor posible.

— Llevar a cabo el plan:

a) ¿Qué voy a hacer primero?

b) ¿Qué consigo con eso?

c) Acompaña la colocación de los números en los cuadrados con una explicación contando lo que haces y para qué lo haces.

— Revisar el plan:

a) ¿Puedo estar seguro o segura de que el resultado es el mayor posible?

b) Expresar el problema otra vez incluyendo la colocación de los dígitos en los cuadrados.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

— Ensayo y error.

— Análisis de posibilidades.

3. Otros contenidos que se consolidan:

— Algoritmo de la suma y de la multiplicación.

— Valoración de los aspectos lúdicos de las Matemáticas.

PROBLEMA N.° 2

Tienes seis objetos: dos botones, dos chapas y dos garbanzos. Colócalos de la siguiente forma:

- *Un botón está a la izquierda de una chapa.*
- *Una chapa está a la derecha de otra chapa.*
- *Dos botones están a la izquierda de una chapa.*
- *Hay dos garbanzos.*

Es adecuado para trabajarlo *al final del primer ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   - La dificultad de este problema reside en la situación espacial. Facilitará su representación manipular los objetos expresados en los datos.
   - Irán probando diferentes maneras de colocar los objetos.
   - Después de cada prueba verificarán si responde al enunciado.
   - Posteriormente se pondrán en cómun las diversas ordenaciones obtenidas.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   - Ensayo y error.
   - Análisis de posibilidades.
   - Modelos físicos.

3. Otros contenidos que se consolidan:
   - Localización espacial.
   - Consolidación izquierda-derecha.

PROBLEMA N.° 3

Tengo en el bolsillo varias monedas de peseta, de duro y de cinco duros. Cojo en la mano tres monedas. ¿Cuánto dinero creéis que tengo en la mano?

Puede trabajarse en *el primer ciclo de Educación Primaria.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

   — Es conveniente trabajar el problema manipulando las monedas.

   — Las soluciones se van colocando en tablas.

1 peseta	5 pesetas	25 pesetas	Total pesetas
3	0	0	3
0	3	0	15
0	0	3	75
1	2	0	11

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

   — Ensayo y error.

   — Análisis de posibilidades.

3. Otros contenidos que se consolidan:

   — Unidades monetarias.

   — Cálculo numérico.

   — Recogida y registro de datos.

PROBLEMA N.° 4

Forma un triángulo grande con los cuatro triángulos dados, de manera que los vértices de los triángulos pequeños que queden juntos lleven el mismo dibujo.

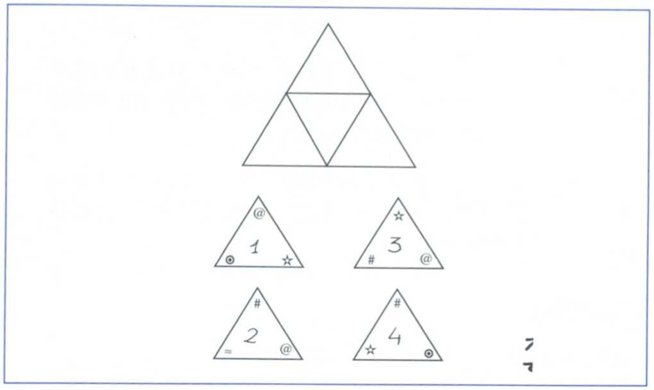
Este problema puede trabajarse en el *segundo ciclo, pero podrá abordarse en algunos casos al final del primer ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

   — Asegurarse que se ha entendido el enunciado y promover la reflexión que lleva a la formulación de un plan de trabajo.

   — Se recortarán los triángulos, y utilizando una estrategia de ensayo y error se irán probando diferentes composiciones hasta dar con la solución. A medida que se realizan pruebas se van viendo posibilidades. Es el momento de ir analizando los triángulos dados.

   — Se observan los dibujos de los vértices:



Tres triángulos (1, 2 y 3) llevan en uno de sus vértices *;
Tres triángulos (1, 3 y 4) llevan en uno de sus vértices #.
Los triángulos 2, 3 y 4 llevan en uno de sus vértices @.
Hay un solo triángulo (3) que lleva en sus vértices *, # y @.

El triángulo 3 ha de estar en el centro del triángulo grande, ya que es el que se puede relacionar con tres vértices.

Los triángulos 1, 2 y 4 hay que ir casándolos con los vértices del triángulo 3.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   — Ensayo y error.
   — Análisis de posibilidades.

3. Otros contenidos que se consolidan:
   — Consolidación del concepto de triángulo y de sus elementos.
   — Traducción del lenguaje escrito (enunciado) al lenguaje gráfico (dibujo).
   — Actitud positiva hacia las Matemáticas.

PROBLEMA N.° 5

Forma tres cantidades que cumplan las normas siguientes:

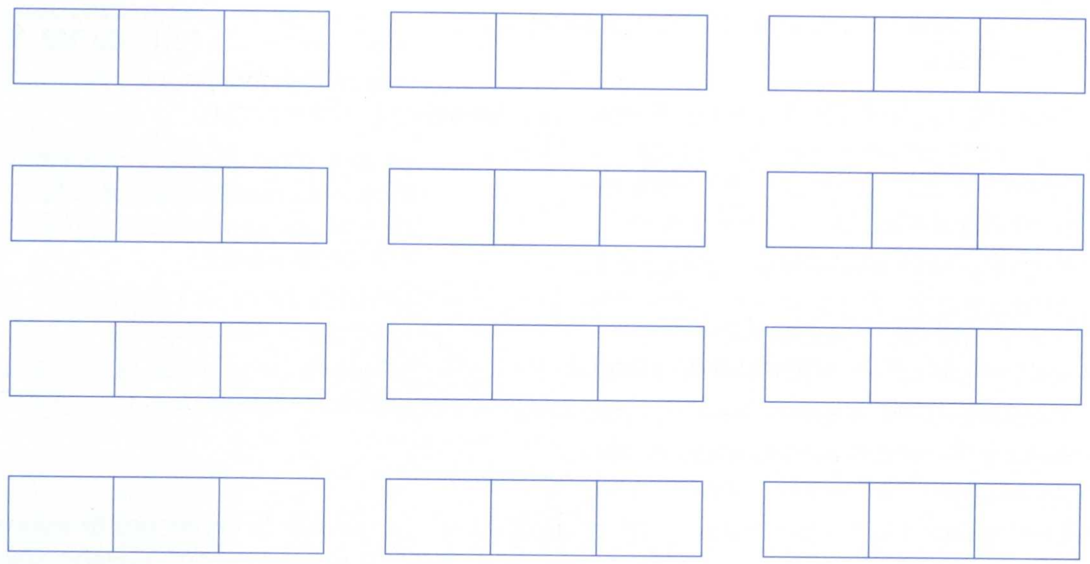
— *Cada cantidad ha de tener tres cifras.*

— *Utiliza todas las cifras del 1 al 9 sin que se repitan ninguna de las tres en cada una de las cantidades.*

— *La segunda cantidad ha de ser el doble que la primera y la tercera el triple que la primera.*

Es un problema que puede trabajarse en el *tercer ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   — La mayor dificultad está en el enunciado. Para facilitar su comprensión es conveniente dar algunas pautas heurísticas que les clarifiquen los términos de cantidad y cifra, así como otras que relacionen correctamente qué cantidad es doble o triple.



— Se les invita a probar en los gráficos que se adjuntan.

— Se analizan las imposibilidades de que algunos números ocupen las unidades y centenas de la primera cantidad.

— Todos juntos explicarán el proceso que han seguido y se aportarán las diversas soluciones.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

   — Ensayo y error.

   — Análisis de posibilidades.

3. Otros contenidos que se consolidan:

   — Algoritmo de la suma.

   — El doble y el triple.

   — Valor posicional.

Se puede trabajar en el *tercer ciclo de Educación Primaria.*

PROBLEMA N.° 6

Utiliza la calculadora para explorar este problema:

- *Escoge cinco dígitos y usa todos para formar un número de dos cifras y otro de tres, de forma que su producto sea el máximo posible.*
- *Después busca la combinación que dé el producto más pequeño.*
- *¿Puedes generalizar la solución para cualquier número de cinco dígitos?*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Su dificultad está, por una parte, en elegir los cinco dígitos y, por otra, en formar con ellos las dos cantidades.

— En un primer momento, utilizando la calculadora, probarán al azar con diferentes combinaciones de números y recogerán los datos en la tabla.

— Posteriormente se reflexionará sobre los datos y se buscarán relaciones entre las cantidades elegidas y los resultados.

— Si el alumnado no descubre estas relaciones, el profesor o la profesora le ayudará utilizando algunas pautas que les facilite la reflexión. Por ejemplo, ¿qué sucede si elegimos el cero como dígito de una cantidad al principio o al final de la misma? Si utilizas el 19 o el 91, ¿en qué caso sale mayor producto?

— Se probará con varios ejemplos.

N.° 2 cifras	N.° 3 cifras	Producto
12	345	4.140
54	321	17.334
53	421	22.313
52	431	22.412

N.° 2 cifras	N.° 3 cifras	Producto
56	789	44.184
96	815	84.000

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

— Análisis de posibilidades.

— Ensayo y error.

3. Otros contenidos que se consolidan:
   — Valor posicional.
   — Manejo de la calculadora.

Puede trabajarse *a partir del segundo ciclo.*

PROBLEMA N.° 7

Ayudándote de una calculadora, multiplica el 9 por sí mismo una vez, dos veces, tres veces... y observa los resultados obtenidos. ¿Qué regularidades encuentras?

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   — Este problema no tiene dificultades en su comprensión ni en el camino a seguir. Puede ser conveniente hacer algunas preguntas dirigidas a aquellos alumnos o alumnas que tienen más dificultades en su aprendizaje.
   — Se realizan las operaciones, con la ayuda de una calculadora, y se recogen los datos en una tabla.

Multiplicaciones	N.° de veces	Resultado
9	1	9
9 x 9	2	81
9 x 9 x 9	3	729
9 x 9 x 9 x 9	4	6.561
9 x 9 x 9 x 9 x 9	5	59.049
9 x 9 x 9 x 9 x 9 x 9	6	531.441

   — Observar regularidades que se dan y escribirlas.
   — Se potencia el análisis de regularidades formulando preguntas como:
     • Al multiplicar el número nueve ocho veces por sí mismo, ¿qué cifra tendrá en las unidades el número que resulta?

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   — Particularizaciones.
   — Recogida de datos en tablas.

— Análisis de regularidades.
— Formulación de conjeturas.
— Comprobación de la conjetura.
— Generalización: formulación de la ley con sus propias palabras.

3. Otros contenidos que se consolidan:
   — Desarrollo de destrezas en el uso de la calculadora.
   — Ordenación de datos y valoración de su importancia.

PROBLEMA N.º 8

Busca una forma rápida de calcular el número de triángulos de cualquier polígono dibujado en una trama isométrica y que no tenga puntos en el interior.

Adecuado para el *tercer ciclo*.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   — Junto con el enunciado se entregará al alumnado hojas de trama isométrica.
   — La importancia de comprender correctamente el enunciado nos lleva a la realización de pautas heurísticas, que se pueden plantear por escrito o verbalmente a todo el grupo.

Después de leer el enunciado el profesorado realizará una serie de preguntas dirigidas a facilitar la comprensión del mismo, así como su realización. Por ejemplo:

— ¿Qué tienes que dibujar en la trama? ¿Tienes que dibujar los polígonos siguiendo alguna condición? ¿Cuál?

— Sobre la trama isométrica se dibujan figuras que no tengan puntos en el interior. Triangular y numerar las figuras.

— Se cuenta el número de triángulos de cada figura y el número de puntos que tiene y se recogen los datos en una tabla.

Figura	Puntos	Triángulo
1	6	4
2	15	13
3	7	5
4	9	7
5	11	9
6	12	10

— Observar la columna de puntos y la de triángulos y formular una conjetura. Por ejemplo: "Hay dos triángulos menos que puntos."

— Comprobar que la conjetura se cumple, dibujando otras figuras.

— Enunciar una ley: NÚMERO DE TRIÁNGULOS = PUNTOS – DOS.

— Ampliar a una trama cuadrada para observar si sucede lo mismo.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   - — Particularización.
   - — Recogida de datos en tablas.
   - — Análisis de regularidades.
   - — Formulación de conjeturas.
   - — Comprobación de la conjetura.
   - — Generalización (con sus propias palabras sin llegar a una formulación simbólica de la ley).

3. Otros contenidos que se consolidan:
   - — Conceptos de polígonos.
   - — Consolidación del concepto de perímetro.
   - — Concepto de unidad para medir superficies.

PROBLEMA N.° 9

¿Cuánto suman los "N" primeros números impares?

Adecuado para el *tercer ciclo*.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— La dificultad mayor de este problema está en el enunciado. El profesorado, junto con el alumnado, irá realizando pautas heurísticas que puedan aclarar tanto lo que hay que hacer como la manera de afrontarlo.

Por ejemplo:

¿Cuáles son los números impares?

¿Cuál es el primer número impar?, y ¿los dos primeros números impares?, y ¿los tres primeros?

¿Qué quiere decir N?

¿Qué números tomarías si quisieras coger los cuatro primeros números impares?

— Explica a un compañero o compañera lo que se pide en el problema.

— Sumar: el primer número impar, los dos primeros números impares, los tres primeros números impares...

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

— Se recogen los datos en una tabla.

Cantidad de números impares	**Suma**
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
...	...
n	n

— Realiza observaciones y a partir de ellas formula conjeturas. Ejemplos:

Algunas observaciones

- Los resultados siguen una serie: impar, par, impar, par.
- Si la cantidad de números es par, el resultado es par; si la cantidad de números es impar, el resultado también es impar.

Posible conjetura

"Si multiplicamos por sí misma la cantidad de números impares, nos sale la suma de esos números impares."

— Comprobar con otros números: los ocho primeros números impares, los nueve primeros números impares...

— Enunciar una ley.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

— Buscar un problema afín.

— Particularizaciones.

— Recogida de datos en tablas.

— Formulación de conjeturas.

— Comprobación de las conjeturas.

— Generalización: formular la ley con sus propias palabras.

3. Otros contenidos que se consolidan:

— Estrategias de cálculo mental y valoración de su importancia.

— Concepto de número impar.

— Secuencia contadora de números impares.

— Afianzamiento del algoritmo de la suma.

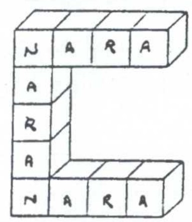
PROBLEMA N.° 10

Constuir con policubos esta figura. Cerrarla añadiendo cinco cubitos más, de forma que se siga la serie de colores

A → *amarilla*

R → *roja*

N → *negra*



Este problema puede trabajarse a partir del *primer ciclo de Educación Primaria.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Se dibujará en la pizarra la figura que tienen que construir.

— Cada miembro del equipo irá construyendo, según el modelo dado, su figura. (Cada equipo dispondrá de un montón de policubos.)

— Si el profesorado observa que tienen dificultades, puede ayudarles sugiriendo algunas pautas:
  - Fijar un cubito para empezar.
  - ¿De qué color es el cubito colocado arriba y a la derecha?

— Una vez construido, añadir cuatro cubitos siguiendo la serie de colores. También en este momento, si se considera necesario, se pueden dar algunas pautas:
  - ¿Qué cubito se colocará encima del negro?
  - ¿Qué cubitos le siguen?, rojo-amarillo-negro.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   — Analogía.
   — Ensayo y error.
   — Búsqueda de regularidades.
3. Otros contenidos que se consolidan:
   — Seriaciones.
   — Conceptos espaciales: arriba, encima, derecha...
   — Contorno.

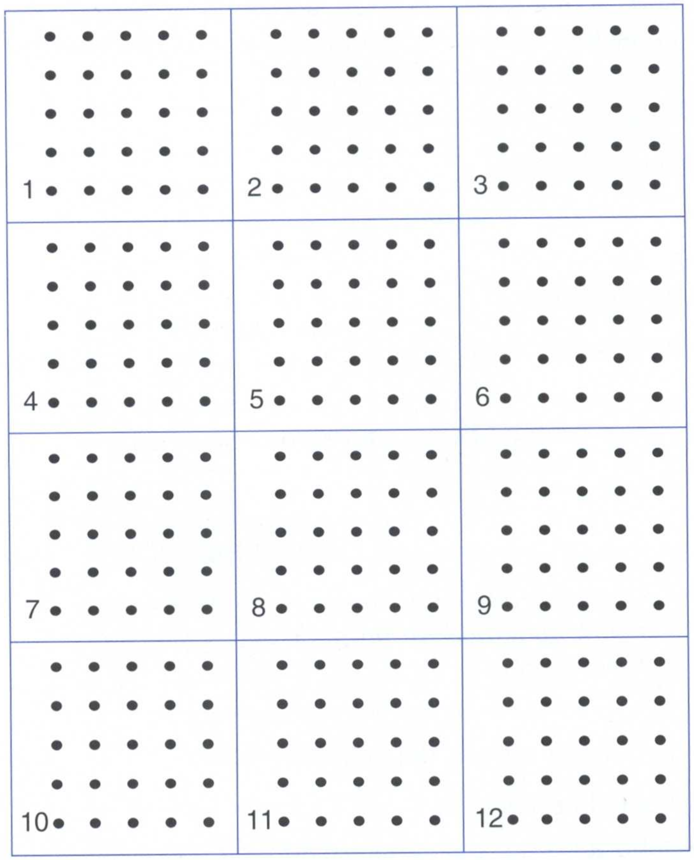
PROBLEMA N.° 11

Busca diferentes maneras de colocar una figura cuadrada en un geoplano, rellenando todo el plano.

Este problema se puede trabajar a partir del *segundo ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   — Cada equipo dispondrá de un geoplano, y cada alumno y alumna, de una hoja en la que estén dibujados varios geoplanos.
   — La mayor dificultad está en comprender que el cuadrado rellena el plano. Una ayuda muy valiosa puede ser partir el cuadrado en los trozos necesarios para ir cubriendo las partes en las que no cabe el cuadrado completo.
   — La observación de las baldosas del suelo de la clase o del pasillo puede ayudarles a entender cómo los cuadrados rellenan el plano.

— Primero ensayan en el geoplano las diferentes maneras de colocar el cuadrado y paralelamente lo irán dibujando en el papel.



2. Estrategias heurísticas trabajadas:

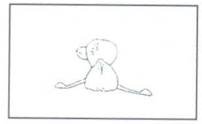
— Analogía.

— Ensayo y error.

— Análisis de posibilidades.

3. Otros contenidos que se consolidan:
   - — Algunas características del cuadrado.
   - — Utilidad del cuadrado para embaldosar.

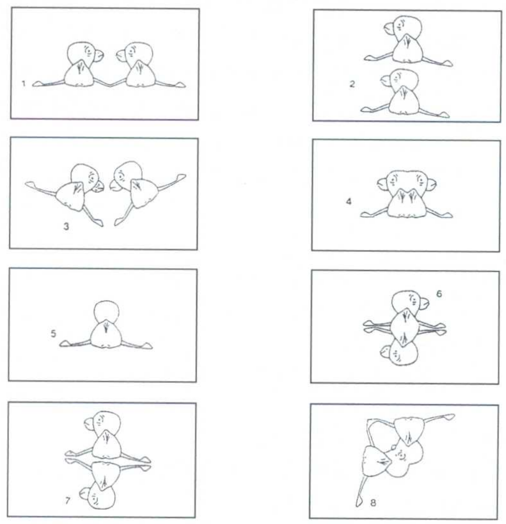
PROBLEMA N.° 12 [1]



A continuación vamos a jugar un poco con las simetrías.

Fíjate en la figura patrón que hay en el recuadro. Vas a intentar reproducir cada una de las siguientes figuras, colocando el espejo en el lugar adecuado de esta figura patrón.

Ten cuidado, pues algunas figuras quizás no se puedan reproducir.



[1] Adaptado de *The Mirror Puzzle Book*, Marion Walter, Tarquin Publication, Norfolk-England.

Este problema es adecuado para el *último ciclo* de *Educación Primaria*.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Se proporciona a cada alumno y alumna un espejo de 8 cm x 12 cm (existen en el mercado materiales no cortantes que cumplen la misma función).

— Después de leer atentamente el enunciado, es muy importante comprobar que todo el alumnado ha entendido que el problema consiste en reproducir, si es posible, cada una de las ocho figuras colocando el espejo adecuadamente en la figura patrón. Pretendemos el acercamiento al concepto de simetría.

— Es un trabajo, en principio, individual. Se pueden dar pautas como: “el espejo se puede inclinar”, “fíjate bien en la figura antes de colocar el espejo en el patrón” o dar alguna pista sobre si sale o no alguna figura.

— Una vez terminado el trabajo, se hace una puesta en común para asegurar qué figuras se pueden obtener y cuáles no.

— Se analizan las figuras que no salen, preguntando qué elementos no son simétricos.

— Posteriormente se puede proponer que inventen otras figuras a partir del patrón y utilizando el espejo.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

— Utilización de modelos físicos.

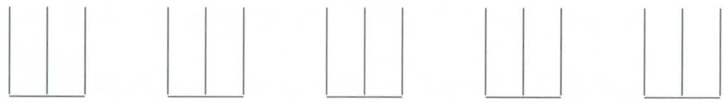
3. Otros contenidos que se consolidan:

— Actitud positiva hacia las Matemáticas.

— Perseverancia en la búsqueda de soluciones.

PROBLEMA N.° 13

Busca todas las posibilidades de representar números en un ábaco de tres varillas con cinco bolas. Escribe debajo de cada ábaco el número correspondiente.



Este problema es adecuado para trabajarlo a partir del *segundo ciclo de Educación Primaria.*

1. Sugerencias para trabajar en clase:
   - Se entrega a cada uno de los alumnos y alumnas una hoja con ábacos de tres varillas.
   - Normalmente empiezan a colocar las cinco bolas de diferentes maneras por ensayo y error. Es importante orientarles para que descubran un criterio propio que al aplicarlo de forma sistemática les permita encontrar todas las posibilidades.
   - Es interesante poner en común las diferentes estrategias que ha utilizado cada uno.
2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   - Modelo gráfico.
   - Ensayo y error.
   - Análisis de posibilidades.
3. Otros contenidos que se consolidan:
   - Sistema de numeración decimal:
     - Escritura de números de tres cifras.
     - Valor posicional.

PROBLEMA N.° 14

En una reunión hay cinco personas y todas ellas se saludan dándose un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado?

Este problema se puede trabajar a partir del *tercer ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   - Es un problema con un enunciado de fácil comprensión; la dificultad está en la fase de trazarse un plan. Da buen resultado escenificar el problema.

— Al constatar la dificultad del recuento de abrazos se puede sugerir empezar por dos personas; luego, por tres, por cuatro y por cinco. Es decir, un camino sería particularizar haciéndolo más sencillo. Se prueba con dos personas, con tres...

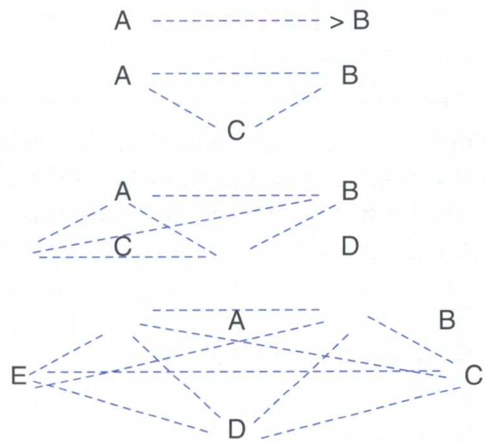
— El uso de representaciones gráficas ayuda y facilita una mejor solución.

2 personas

3 personas

4 personas

5 personas



— Se recogen los datos en una tabla para apreciar con mayor claridad lo que sucede.

Personas	**Saludos**
2	2
3	3
4	6
5	10

— Se observan los datos para descubrir relaciones y poder llegar a una solución más general.

— Es un problema adecuado para trabajarlo en el segundo ciclo, pero puede utilizarse en el tercer ciclo ampliando el número de personas que se saludan, y haciendo reflexionar al alumnado en el número de personas a las que saluda cada una (todas menos él o ella), y un mismo abrazo es dado por dos personas.

En este caso las pautas de la tabla podrían ser:

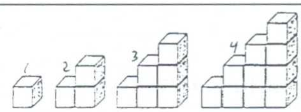
A **n.º personas**	**B** **saludos por persona**	**A x B**	**n.º abrazos**

— Al finalizar el tercer ciclo puede pedirse que relacionen los datos de la 3.ª y 4.ª columnas, lo que les llevará a la conclusión de que el número de abrazos es igual al producto de A x B partido por dos. Se debe entonces comprobar la conjetura aplicándolo a varios casos de mayor número de personas.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   - — Utilización de modelos gráficos.
   - — Particularizaciones.
   - — Recogida de datos en tablas.
   - — Análisis de regularidades.
   - — Al final del tercer ciclo, formulación de conjeturas y comprobación.

PROBLEMA N.º 15

¿Cuántos cubitos necesitas para conseguir 5, 6, 7, 8, 9, 10... escalones? Recoge datos en la tabla[2].



[2] Este problema está tomado del C. P. "Antusana", de Móstoles, Madrid.

Puede trabajarse en *el segundo* y *tercer ciclos de Educación Primaria.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:
   - Los alumnos de segundo ciclo se enfrentan al problema sin mucha dificultad. El enunciado es claro, preciso y sin palabras desconocidas para ellos.
   - Los primeros pasos de la tabla conviene dárselos, para que ellos observen y deduzcan el resto.
   - En el segundo ciclo el alumnado empieza a contar los cubitos observando los dibujos de la fila.
   - A partir del tercer escalón la dificultad del problema estriba en que no tienen los dibujos, por lo que los alumnos y alumnas buscan estrategias que les ayuden a resolver la situación: hacer dibujos de las escaleras.

N.° de pasos	**N.° total de cubos**
1	1
2	3
3	
4	
5	
6	
...	

   - En el primer curso del tercer ciclo pueden hacer el problema sin necesidad del modelo gráfico para todos los escalones. Después de haber dibujado dos, tres o cuatro son capaces de completar la tabla.
   - Al final del tercer ciclo en este problema se puede llegar hasta la generalización:
     $n = n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + ... + [n - (n - 1)]$
     n = número de escalones.
2. Estrategias heurísticas trabajadas:
   - Utilización de modelos gráficos (segundo ciclo).
   - Rellenar tablas.
   - Generalización (tercer ciclo).
3. Otros contenidos que se consolidan:
   - Recuento.

Es un problema adecuado para el *último ciclo de Educación Primaria*.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

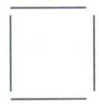
— Analizar el problema en gran grupo para asegurar que se ha comprendido.

— Trabajo en pequeño grupo. Se entrega primero el cuadrado en blanco, y cuando llevan un rato trabajando con él y aparecen dificultades, se ofrece otra hoja con los tres primeros. En ese momento el profesor o profesora debe ir comprobando por los grupos, a partir de la segunda figura, si han tenido en cuenta el cuadrado formado por los cuatro cuadrados pequeños, a fin de evitar bloqueos. En el caso que den "4" como solución, la pauta puede ser: ¿Seguro?

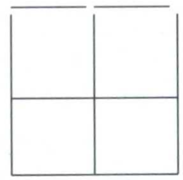
— Terminado el trabajo puede ponerse en común el trabajo de los grupos y analizar todas las estrategias seguidas para el recuento.

PROBLEMA N.° 16 [3]

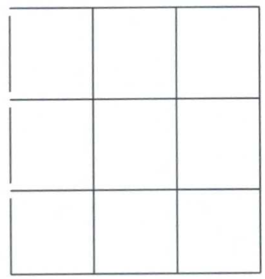
¿Cuántos cuadros hay aquí?



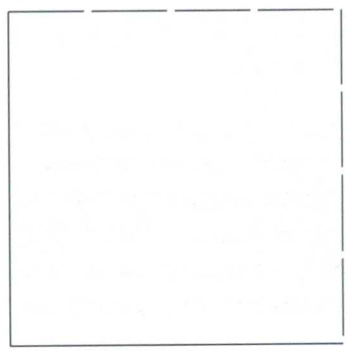
¿Y aquí?



¿Y aquí?



Traza tú ahora las líneas horizontales y verticales. ¿Cuántos cuadrados te salen?



[3] Tomado de Gaztelu, I. (1991): *Situaciones problemáticas*. M. E. C., Madrid.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

   — Dividir un problema en subproblemas.

   — Análisis de posibilidades.

   — Particularización (inferencia: añadir uno).

3. Otros contenidos que se consolidan:

   — Manejo de instrumentos (escuadra y cartabón para trazar líneas).

   — Potencias de los cuatro primeros números naturales.

PROBLEMA N.° 17

"—¿Más bramante? —preguntó la madre sacando las manos de la tina en la que lavaba.

—¡Como si yo fuera de bramante! Ayer mismo te di un ovillo. ¿Para qué necesitas tanto? ¿Dónde lo has metido?

—¿Dónde he metido el bramante? —contestó el muchacho—. Primero tú misma me cogiste la mitad...

—¿Con qué quieres que ate los paquetes de ropa blanca?

—La mitad de lo que quedó se lo llevó Tom para pescar en la charca.

—Debes ser condescendiente con tu hermano mayor.

—Lo he sido. Quedó muy poquito, y de ello el padre cogió la mitad para arreglarse los tirantes, que se le habían roto de tanto reírse con el accidente del automóvil. Luego, mi hermana necesitó un poquito del resto para atarse el pelo.

—¿Y qué has hecho con el resto del bramante?

—¿Con el resto? ¡Pero si no quedaron más que 30 centímetros! Anda, construye un teléfono con un trozo así...

(BARRY PAIN: *El bramante*)

El problema puede trabajarse a partir del *tercer ciclo*.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

   — La primera dificultad con la que se van a encontrar los alumnos y alumnas es la derivada de la extensión del texto. Para facilitar su lectura es necesario que el alumnado materialice el texto mediante cuerdas, tiras de papel, etc., en las que vaya señalando los datos. Este problema se realizará en equipo.

   — Cortar una tira de papel larga, no importa la longitud que cada grupo le dé. Nos imaginamos que es la longitud del ovillo.

   — Señalar el trozo de la madre: 1/2.

   — Busca, de lo que quede, la mitad; preguntar qué fracción es con respecto a todo el ovillo.

   — Preguntar qué fracción del total se lleva el padre.

   — Dividir el trozo que queda (1/8) en cinco partes iguales, marcar 1/5 de ese octavo para la hermana.

   — Preguntar qué fracción del total de la cuerda se lleva la hermana. Si lo que queda son cuatro trozos iguales y son 30 cm, cada trozo medirá 30 : 4 = 7,5 cm. Si el total del ovillo tiene 40 trozos iguales, medirá 40 x 7,5 = 300 cm, o tres metros.

2. Estrategias heurísticas trabajadas:

   — Utilización de modelos gráficos.

   — Empezar por atrás.

3. Contenidos que se trabajan:

   — Concepto de fracción.

   — Consolidación del producto de decimales.

   — Cambio de unidades.

   — Traducción del lenguaje escrito al gráfico e icónico.

Ejemplos para trabajar una estrategia en los tres ciclos: "Búsqueda de regularidades"

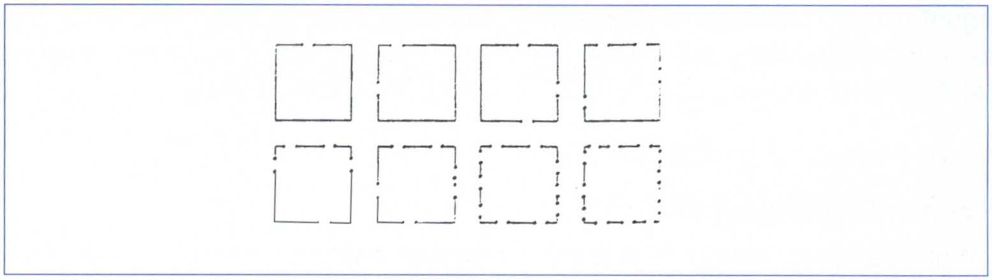
Primer ciclo

PROBLEMA N.° 1

Investigar cuántas puertas puede tener una casa para que estando dentro de ella, se quede uno fuera al pasar una sola vez por cada una de las puertas que tenga la casa.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— En un espacio grande del patio se dibujarán casas con una, dos, tres, cuatro y cinco puertas.



— Situar al alumnado dentro de la casa y que vaya pasando por las puertas una sola vez: ejemplo, casa con dos puertas; salir por la primera puerta y entrar por la segunda, nos quedamos dentro.

— Todo el alumnado, bien de uno en uno o bien en grupos de dos o tres, escenificará situaciones. Los datos se recogerán en una tabla.

N.° de puertas	Me quedo fuera o dentro
1	
2	
3	
4	
5	

— Se hará una puesta en común donde los niños y niñas expresen verbalmente cuáles son las casas que nos sirven y cuáles no.

— Se descubrirá una regularidad al observar que se puede salir por las puertas 1, 3, 5, es decir, por las impares.

PROBLEMA N.° 2

Rellena las cuatro primeras filas realizando la suma de la fila con la columna.

Termina de completar la tabla sin realizar las sumas.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

   — Se da un cuadro de doble entrada con los dígitos encabezando filas y columnas.

   — Después de rellenadas las cuatro primeras filas, pedirles que observen una de las columnas; por ejemplo, la del 2.

   — Leer la columna en voz alta.

   — ¿Qué número vendrá a continuación?

   — Realizar el mismo proceso con otra columna.

Completada la tabla, buscar más regularidades: en las filas, en la diagonal, etc.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4							
2	3	4	5							
3	4	5	6							
4										
5										
6										
7										
8										
9										

PROBLEMA N.° 3

Buscar todos los sumandos de dos números cuyo resultado sea 10.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Se le dan unos sumandos. Por ejemplo:

1 + 9

2 + 8

3 + 7

— El alumnado explicará qué regularidades observa.

— Pedirle que continúe la serie.

— Ampliar al segundo curso con otras decenas: 20, 50…

21 + 9

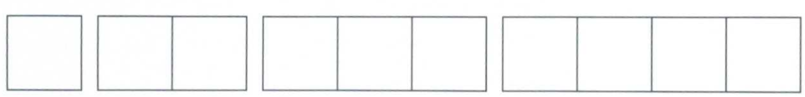
22 + 8

23 + 7

Segundo ciclo

PROBLEMA N.° 1

Construir con palillos estas formas:



1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Se contarán en cada figura los palillos y el número de cuadrados formados y se recogerán los datos en una tabla.

N.° de cuadrados	N.° de palillos
1	
2	
3	
4	

— Realizar preguntas: ¿cuántos palillos se necesitan para hacer un nuevo cuadrado?

— Construir dos composiciones más (han de pedir la cantidad de palillos necesarios para hacerlas).

— Escribir observaciones de la tabla:

- La cantidad de palillos sigue una serie par-impar-par-impar.
- La cantidad de palillos aumenta de tres en tres.

PROBLEMA N.° 2

Observa estos números: 1, 1, 2, 3, 5...

Poner tres números más a la serie y explicar oralmente cómo se obtienen.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— La dificultad de este problema está en descubrir qué relación se da entre los números.

— Se puede sugerir que mediante ensayo y error prueben a descubrir qué operación u operaciones hay que realizar para obtener el número siguiente.

— En la explicación oral es conveniente insistir en el uso correcto del lenguaje matemático.

PROBLEMA N.° 3

Descubrir la regularidad que cumplen las caras opuestas de un dado cúbico.

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Cada alumno dispondrá de un dado cúbico.

— Es necesario asegurarse de que han entendido el enunciado del problema. Se les puede ayudar con algunas pautas. Por ejemplo, ¿cuál es la opuesta de la 2?, ¿y la de la 3?...

— Se recogen los datos en la siguiente tabla:

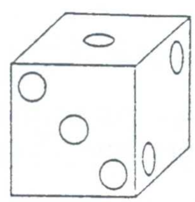
Caras	**Cara opuesta**
1	
2	
3	

— Recogidos los datos en las tablas, se observan las relaciones que se dan entre ellos.

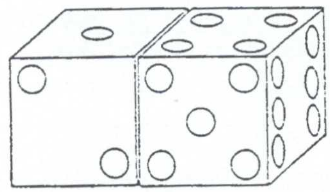
— Descubierta la regularidad que cumple la suma de los números de las caras opuestas, aplicarlo con un dado, dos, etc.

Por ejemplo:

— ¿Qué puntos corresponden a las caras opuestas del dado de este dibujo?



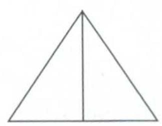
— ¿Cuál es la suma de los puntos de las caras que están unidas?



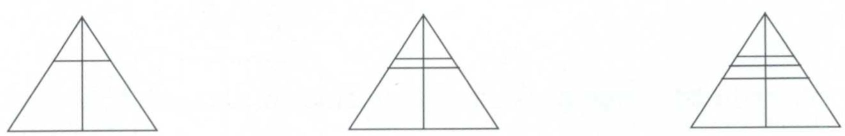
Tercer ciclo

PROBLEMA N.° 1

Según el número de cortes horizontales del triángulo.



¿Cuántos triángulos salen con un corte horizontal?
¿Cuántos triángulos salen con dos cortes horizontales?
¿Y para "n" número de cortes?



Un corte *Dos cortes* *Tres cortes*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

   — La dificultad mayor estriba en que sepan buscar todos los triángulos posibles con un solo corte, es decir, los cinco posibles triángulos para este caso.

   — Se recomienda dar una tabla como la que adjuntamos para facilitar la recogida de datos.

N.° cortes horizontales	N.° de triángulos
1	
2	
3	

— Después de observar el cuadro recogido por ellos mismos, ven que se cumple una regularidad: van saliendo todos los números impares de dos en dos desde el 5, según el número de cortes.

— Algunos alumnos serán capaces de generalizar dicha regularidad con la siguiente fórmula:

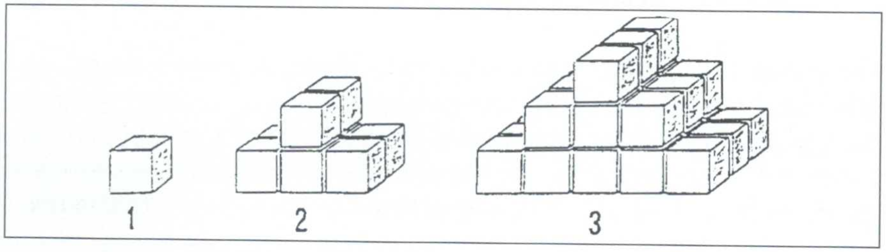
$$T = n \times 2 + 3$$

T = número de triángulos.

n = número de cortes horizontales.

PROBLEMA N.° 2

¿Cuántos cubitos necesitas para construir el ancho de la doble escalera, con 4, 5, 6 ..., ... n escalones en cada lado?



Es adecuado para trabajarlo en el *tercer ciclo.*

1. Sugerencias para trabajarlo en el aula:

— Es conveniente que dispongan de policubos para construir las escaleras.

— Primero harán las que aparecen en el dibujo y, simultáneamente, rellenarán las tablas. Es importante descubrir la serie que siguen.

— Después construirán dos o tres escaleras siguiendo la serie y completando los datos en la tabla.

— A partir de los datos observados pueden formularse conjeturas y posteriormente comprobarlas construyendo otras escaleras.

Figuras	Cubos ancho	Cubos total

Los problemas como aplicación y consolidación de los contenidos matemáticos

El trabajo, en este apartado, se ha centrado en los problemas como método, es decir, se utiliza la resolución de problemas para afianzar, comprender o aplicar otros contenidos matemáticos (operaciones, medida, formas geométricas, azar, tratamiento de la información, etc.) y a resolver situaciones de la vida real. Esto no excluye la utilización de los heurísticos generales desarrollados en el segundo capítulo, utilizados ahora como procedimientos para resolver las nuevas situaciones. De igual forma se aplicará en el proceso un modelo sistemático que respete las fases y se apoye en el uso de pautas.

A la hora de plantear una situación problemática como aplicación de un contenido matemático se tendrá en cuenta:

— Que el enunciado de los problemas se refiera a situaciones que partan de la realidad del alumnado, situaciones que provoquen su interés y que mantengan su atención.

— Que se dominen la operativa y las magnitudes que intervienen para facilitar que se centren en el proceso de resolución. Un problema no afianza la mecánica de las operaciones, sino que da significado a las mismas.

— Que el lenguaje empleado se adecue al nivel de los alumnos y alumnas para que así puedan comprender mejor el problema planteado y el esfuerzo se centre más en descubrir y aplicar los heurísticos adecuados.

— Que el enunciado se presente de formas muy diversas (gráficos, listas de precios, horarios, tablas, mapas...), con datos completos, con datos incompletos donde tengan que buscar los que faltan, con exceso de datos; pueden, asimismo, tener varias soluciones, con preguntas o sin ellas; también puede pedirse que formulen el enunciado de manera que responda a unos datos u operaciones dadas, etc. Esta diversidad en la presentación del enunciado y en los aspectos sobre los que versa ayudan a conceptualizar mejor y de forma más completa los diferentes contenidos matemáticos de los diversos ámbitos. Podemos, asimismo, formular historias sobre situaciones planteadas a través de operaciones o de gráficos.

— No repetir un mismo tipo de problema que lleve a la mecanización, evitando así que el alumnado se enfrente a ellos como si se tratara de la aplicación de un algoritmo.

— Es importante emplear recursos muy variados, como calculadora, geoplano, *tangram*, policubos, espejos, dados, construcciones..., que ayuden a representar el problema, a comprenderlo o a reflexionar sobre la forma de resolverlo. Son, asimismo, múltiples las situaciones de la vida real sobre las que se pueden formular diversos y numerosos problemas. Las listas de precios, las hojas de propaganda, los horarios de trenes y autobuses, las salidas y viajes, los datos de prensa... constituyen algunos ejemplos.

— Que los procesos en la resolución de problemas en los alumnos y alumnas no siempre son los mismos, por lo cual la expresión verbal de dicho proceso es necesaria para enriquecer al grupo y aprender unos de otros.

Se sugieren a continuación ideas, situaciones, ejemplos de problemas, sin ánimo de agotar las posibilidades, con la intención de ayudar al profesorado en formulaciones sugerentes y prácticas que motiven al alumnado y mantengan su interés.

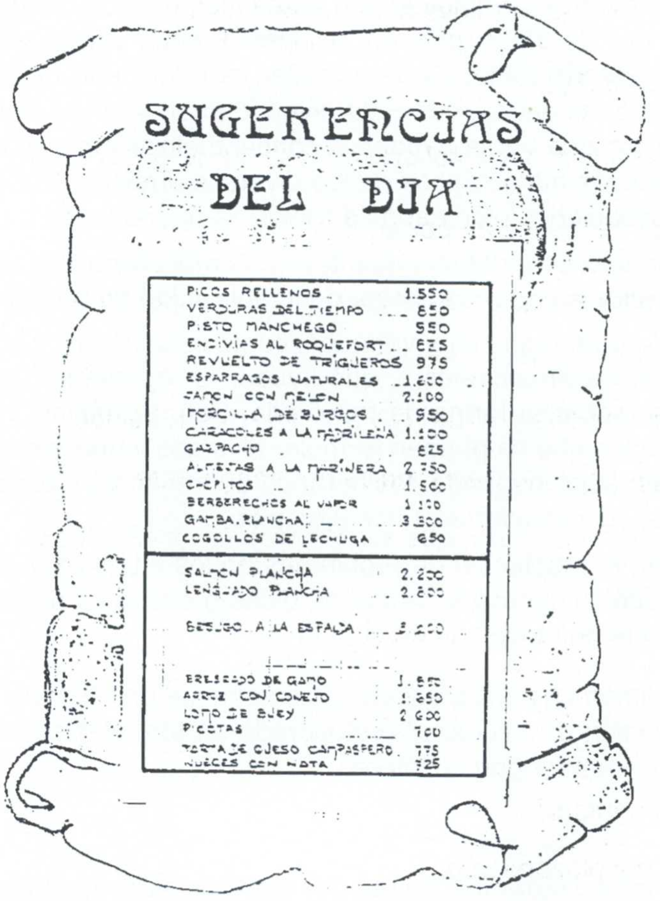
Listas de precios

A partir de la carta de los restaurantes se pueden plantear situaciones muy diversas:

a) Elige un menú para dos personas y calcula el gasto.

b) Tienes 5.000 pesetas y deseas comer en un restaurante. ¿Qué platos elegirías? ¿Cuánto dinero te sobra?

c) Infórmate de lo que vale en el mercado el menú que has elegido en el punto b) y calcula aproximadamente cuánto gana el restaurante.



Presupuestos de viajes

a) Haz el presupuesto para una salida que quiere realizar tu clase. Se visitará un museo de Madrid. Debes informarte:

- Precio de un billete colectivo en metro.
- Precio de un billete colectivo en tren, si tu colegio está fuera de Madrid.
- Precio de un autobús que os lleve al grupo completo.

Recoge los datos con claridad.

Elige el medio de transporte y realiza el presupuesto global y por persona.

(Este tipo de problemas se planteará por equipos.)

b) Organizar un viaje para el equipo de tu clase donde tengan que:

- Elegir el lugar y marcar en un mapa o plano el itinerario a seguir.
- Número de personas que realizan el viaje y días de duración.
- Buscar, en las agencias de viajes, hojas de propaganda.
- Hacer un estudio de las tablas que se emplean en las hojas de propaganda de las agencias de viajes.
- Realizar el presupuesto teniendo en cuenta:

  — Número de personas.

  — Gastos para dormir.

  — Gastos en alimentación.

  — Gastos en el desplazamiento.

  — Otros gastos.

TABLAS, HORARIOS DE TRENES, HORARIOS DE AUTOBUSES

Identificación del tren		TRANV 27003	TRANV 32111	TRANV 27009	TRANV 2771	TRANV 32113	TRANV 2773	SEMID 32775	RAPIDO 2173-3115	ELECTRO 531	TRANV 3117	OMN 2777	RAPIDO 671	TALGO 131	TALGO 161	ELECTRO 623-622	ELECTRO 31623	TRANV 2778	SEMID 2115	RAPIDO 3171	TALGO 30101	EXPRESO 631	EXPRESO 661
Prestaciones: Plazas asiento		2	2	2	2	2	2	2	2	1-2	2	2	1-2	1-2	1-2	1-2	1-2	2	2	2	1-2	1-2	1-2
Cama o litera																							
Restauración														X	Y	Y	Y						
Particularidades			□				□			□			□ □	□ □	□ □	□ □	□ □				□ □	□	□
MADRID Atocha (apd.)	S								8 28				13.10	14.41	15.35				18 42	18 35			
MADRID Chamartín	S								8 42	10 00									18 56	18.48	21 00	22 00	23 30
Villalba de Guadarrama									9 18										19 30	20 23			
El Escorial									9 28										19 40	20 33			
ÁVILA									10 33	11 40			14 50	16.15	17.18				20 46	21.30	22 40	0 50	1 23
Medina del Campo									11.19	12.26	14 40		15.36		18.01				21 51	22.24		1 52	2 35
VALLADOLID			5 50			8 10			11.44	12 52	15 20		16 01	17.23	18.25				22 25	22.48	23 47	2 31	3 09
Venta de Baños			6 25			8 45			12.13	13.21	15 57					17.10	17.28		22 50	23.12		3.10	3 44
PALENCIA	Ll		6 36			8 55			12.23	13.30	16 00		16.33	17.56	18.57	17.15	17.30		23 00	23 22		3 22	3 56
PALENCIA	S		6 38			8 58			12.30		16 11		NARANCO-ESTRELLA		[illegible]		17,33				RÍO PISUERGA	COSTA VERDE · ESTRELLA	ESTRELLA CANTÁBRICA 4.00
Frómista			7 08			9 24			12.54		16 45												4.31
Osorno			7 25			9 41			13.06		17 03												4.47
Herrera del Pisuerga			7 45			10 01			13.23		17 32												5.06
Alar del Rey-San Quirce			7 52			10 07			13.29		17 39												5.18
Aguilar de Campoo			8 09			10 30			13.46		17 56				19 57		18,43						5.37
Mataporquera			8 23			10 45			13.54		18 07												5.48
Reinosa			8 45			11 05			14.15		18 25				20.23		19.14						6.13
Bárcena			9 43			11 41			14.58		19 05												6.53
Los Corrales de Buelna			10 00			11 59			15.20		19 25												7.12
Torrelavega			10 12			12 11			15.40		19 41				21.17		20 07						7.26
Renedo			10 25			12 22			[illegible]		19 55												7.42
SANTANDER	Ll		10 54			12 49			16.10		20 25				21.48		20.40						8 05
PALENCIA	S								12.22	13 31			16.36	17.07		17.20				23 23		3 32	
Paredes de Nava									12.40											23.35			
Villada									12.54											23.48			
Sahagún									13 06	14 03						17.52				23.58		4.12	
LEÓN					7 25		9 38	13 45	13 36	14.48		16 10	17.48	19 01		18 27		19 20		0.31		4.18	
La Robla					7 55		10 14	14 20		15 04		16 45				18.54		19 51					
La Pola de Gordón					8 02		10 28	14 28				16 54						20.00					
Busdongo					8 28		11 01	15 00				17 21						20 30					
Pajares (apd.)					8 40		11.17	15 12										20 41					
Navidiello Parana (apd.)					8 50		11.22	15 23										20 50					
Puente de los Fierros (apd.)		5 30		7 15	9 20		11.47	15 58				18 07						21.16					
Pola de Lena		5 48		7 40	9 41		12 07	16 12		16.44		18 28	19.32			20 20		21 35				7.10	
Ujo		5 58		7 52	9 50		12 16	16 20				18 38						21.44				7.20	
Mieres										16 58		18 50	19.48	21.00		20 34						7.31	
Soto del Rey		6 22		8 20	10 11		12 40	16 41				19 06						22 04					
OVIEDO	Ll	6 35		8 34	10 20		12 50	16 50		17.18		19 16	20 06	21.17		20 52		22 13				7.51	
OVIEDO	S																					8 28	
Villalegre (apd.)																						8 53	
Avilés																						9 12	
San Juan de Nieva	Ll																					9 18	
OVIEDO	S	6 45		8 45	10 25		12 53	16 55		17.21		19 45	20 14	21.27		20 55		22 20				8 11	
Lugo de Llanera		6 54		8 54	10 34		13 02											22 29					
Villabona		6 58		8 58	10 37		13 05											22 32					
Veriña		7 14		9 14	10 53		13 20	17 18										22 48					
Gijón		7 22		9 22	11 00		13 27	17 25		17 47		20 20	20 48	21.47		21 21		22 55				8 40	

□ Entre Alar del Rey y Santander, circula diario. Valladolid-Alar del Rey, circula domingos y festivos.

□ Hasta Pola de Lena, circula sábados y festivos. De Pola de Lena a Gijón diario.

□ Circula los domingos, procede de Alicante.

□ Procede de Barcelona.

□ Tren con servicio de vídeo.

□ Está previsto inaugurar durante el mes de octubre el servicio de vídeo en este tren.

TABLAS, HORARIOS DE TRENES, HORARIOS DE AUTOBUSES

Identificación del tren		TALGO 30100	RAPIDO 32710	TRANV 2770	ELECTRO 530 621	ELECTRO 530	RAPIDO 670	ELECTRO 31620	SEMID. 2772	TRANV 32112	SEMID 32774
Prestaciones: Plazas asiento		1-2	2	2	1-2	1-2	1-2	1-2	2	2	2
Cama o litera											
Restauración								Y			
Particularidades											
Gijón	S			5.55	7.30	7.30	7.50		8.25		12.45
Veriña				6.01					8.31		
Villabona				6.17					8.47		
Lugo de Llanera				6.21					8.51		
Oviedo	Ll			6.30	7.58	7.58	8.21		9.00		13.13
San Juan de Nieva											
Avilés											
Villalegre (apt.)											
Oviedo	Ll										
Oviedo	S			6.32	8.00	8.00	8.30		9.02		13.18
Soto de Rey				6.40			8.41		9.10		13.27
Mieres					8.10	8.10	8.54				
Ujo				7.01					9.29		13.47
Pola de Lena				7.12	8.33	8.33	9.00		9.40		13.57
Puente de los Fierros (apt.)				7.35					9.57		14.12
Navidello Pajares (apt.)				8.04							
Pajares (apt.)				8.15							14.48
Busdongo				8.28					10.42		14.59
La Pola de Gordón				8.50					11.06		15.25
La Robla				8.59	10.00	10.00			11.14		15.32
León			7.30	9.25	10.29	10.29	11.03		11.40		15.53
Sahagún			8.03		11.02	11.02					
Villada			8.13								
Paredes de Nava			8.28								
Palencia	Ll		8.40		11.33	11.33	12.04				
Santander	S	RÍO PISUERGA					NARANCO ESTRELLA	8.20		8.20	
Renedo										8.59	
Torrelavega								8.50		9.11	
Los Corrales de Buelna										9.22	
Bárcena										9.42	
Reinosa								9.43		10.22	
Mataporquera										10.44	
Aguilar de Campoo								10.12		10.58	
Alar del Rey San Quirce										11.12	
Herrera de Pisuerga										11.18	
Osorno										11.30	
Frómista (apt.)										11.55	
Palencia	Ll							11.18		12.24	
Palencia	S		8.43		11.34	11.34	12.05	11.21		12.26	
Venta de Baños			8.55		11.43	11.40		11.30		12.38	
Valladolid		7.40	9.20			12.12	12.37			13.10	
Medina del Campo			9.48			12.30	13.03				
Ávila		8.52	10.36			13.25	13.50				
El Escorial			11.38								
Villalba de Guadarrama			11.44								
Madrid Chamartín	Ll	10.30	12.21			15.03	15.38				
Madrid Atocha (apd.)	Ll		12.35								

Identificación del tren		RAPIDO 2718	OMNIBUS 2776	SEMID. 2116	TALGO 130	TALGO 160	TRANV. 27024	TRANV. 27026
Prestaciones: Plazas asiento		2	2	2	1-2	1-2	2	2
Cama o litera								
Restauración					X	Y		
Particularidades								
Gijón	S		13.30		14.24		16.25	17.25
Veriña			13.38				16.31	17.31
Villabona			13.54				16.47	17.47
Lugo de Llanera			13.58				16.52	17.52
Oviedo	Ll		14.09		14.48		17.03	18.03
San Juan de Nieva								
Avilés								
Villalegre (apt.)								
Oviedo	Ll							
Oviedo	S		14.35		14.53		17.05	18.05
Soto de Rey			14.45				17.15	18.15
Mieres			15.14		15.11			
Ujo			15.25				17.37	18.37
Pola de Lena			15.38				17.47	18.47
Puente de los Fierros (apt.)			16.05				18.07	19.06
Navidello Pajares (apt.)			16.30					
Pajares (apt.)			16.50					
Busdongo			17.02					
La Pola de Gordón			17.46					
La Robla			18.08					
León		16.28	18.50		17.12			
Sahagún		17.00						
Villada		17.09						
Paredes de Nava		17.23						
Palencia	Ll	17.38			18.13			
Santander	S			13.30		15.10		
Renedo				14.01				
Torrelavega				14.13		15.30		
Los Corrales de Buelna				14.24				
Bárcena				14.44				
Reinosa				15.27		16.20		
Mataporquera				15.40				
Aguilar de Campoo				15.58		16.44		
Alar del Rey San Quirce				16.12				
Herrera de Pisuerga				16.17				
Osorno				16.33				
Frómista (apt.)				16.44				
Palencia	Ll			17.07		17.04		
Palencia	S	17.37		17.08	18.14	17.06		
Venta de Baños		17.48		17.19				
Valladolid		18.13		17.51	18.40	18.20		
Medina del Campo		18.41		18.17		18.54		
Ávila		19.30		19.04	19.55	19.41		
El Escorial		20.32		20.05				
Villalba de Guadarrama		20.42		20.15				
Madrid Chamartín	Ll	21.18		20.48	21.27	21.19		
Madrid Atocha (apd.)	Ll	21.38		21.03				

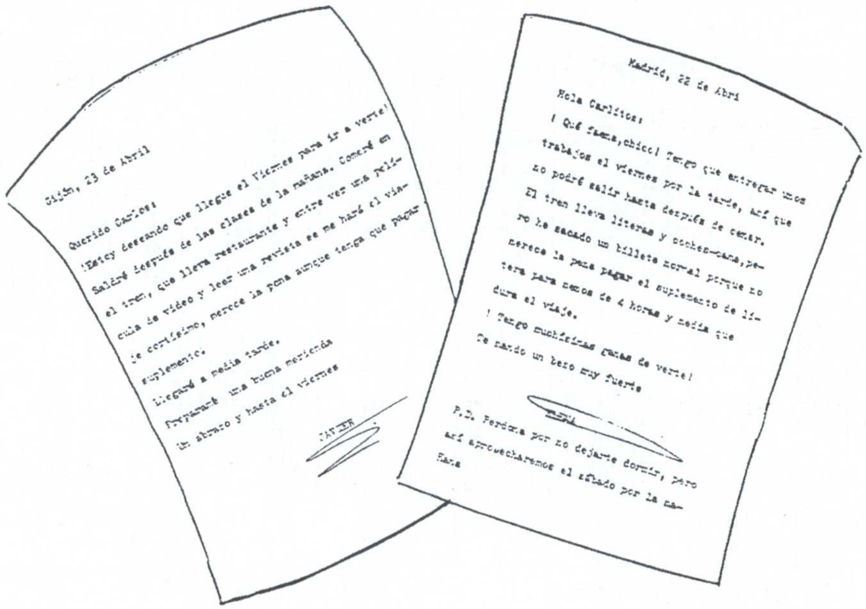
Identificación del tren		TRANV. 3114	SEMID. 2778	TRANV. 32110	SEMID. 3770	EXPRESO 11630 630	EXPRESO 860
Prestaciones: Plazas asiento		2	2	2	2	1-2	1-2
Cama o litera							
Restauración							
Particularidades							
Gijón	S		18.00		20.40	22.30	
Veriña			18.06		20.46		
Villabona							
Lugo de Llanera							
Oviedo	Ll		18.28		21.08	23.00	
San Juan de Nieva						22.00	
Avilés						22.12	
Villalegre (apt.)						22.25	
Oviedo	Ll					22.40	
Oviedo	S		18.30		21.13	23.25	
Soto de Rey			18.38		21.22		
Mieres						23.40	
Ujo			18.58		21.42	23.55	
Pola de Lena			19.09		21.52	0.06	
Puente de los Fierros (apt.)			19.27		22.00		
Navidello Pajares (apt.)			20.00				
Pajares (apt.)							
Busdongo			20.31		22.55		
La Pola de Gordón			20.55		23.19		
La Robla			21.04		23.27		
León			21.30		23.53	2.19	
Sahagún						2.50	
Villada							
Paredes de Nava							
Palencia	Ll					3.35	
Santander	S	16.55		20.00		COSTA VERDE ESTRELLA	23.00
Renedo		17.24		20.41			23.35
Torrelavega		17.38		20.53			23.41
Los Corrales de Buelna		17.49		21.09			23.52
Bárcena		18.11		21.31			0.11
Reinosa		18.51		22.14			0.50
Mataporquera		19.10		22.37			1.13
Aguilar de Campoo		19.21		22.48			1.24
Alar del Rey San Quirce		19.43		23.04			1.47
Herrera de Pisuerga		19.48		23.10			1.55
Osorno		20.00		23.30			2.13
Frómista (apt.)		20.26		23.46			2.28
Palencia	Ll	20.50		0.15			2.40 ESTRELLA CANTABRIA
Palencia	S	20.52		0.18		3.38	2.54
Venta de Baños		21.03		0.28		4.00	3.10
Valladolid		21.33		1.00		4.32	3.51
Medina del Campo						5.12	4.25
Ávila						6.07	5.23
El Escorial							
Villalba de Guadarrama							
Madrid Chamartín	Ll					8.00	7.30
Madrid Atocha (apd.)	Ll						

Continua a Barcelona.
Continua a Alicante, circula sábados.
Tren con servicio de vídeo.
De Gijón a Pola de Lena diario, de Pola de Lena a León, sábados y festivos.
Está previsto inaugurar durante el mes de octubre el servicio de vídeo en este tren.
Circula diario Santander-Reinosa. De Reinosa a Valladolid circula domingos y festivos.
Circula diario entre Gijón y Oviedo. De Oviedo a León sólo festivos.

Aprendemos a viajar

Imagínate que vives en Palencia y has invitado a tus amigos Javier y Elena a pasar unos días contigo. Javier vive en Gijón, y Elena, en Madrid.

Recibes las siguientes cartas en las que te informan de su llegada:



Gijón, 23 de Abril

Querido Carlos:

¡Estoy deseando que llegue el Viernes para ir a verte!

Saldré después de las clases de la mañana. Comeré en el tren, que lleva restaurante y entre ver una película de video y leer una revista se me hará el viaje cortísimo, merece la pena aunque tenga que pagar suplemento.

Llegaré a media tarde.

Prepararme una buena merienda

Un abrazo y hasta el viernes

JAVIER

Madrid, 22 de Abril

Hola Carlitos:

¡Qué faena, chico! Tengo que entregar unos trabajos el viernes por la tarde, así que no podré salir hasta después de cenar.

El tren lleva literas y coches-cama, pero no he sacado un billete normal porque no merece la pena pagar el suplemento de litera para menos de 4 horas y media que dura el viaje.

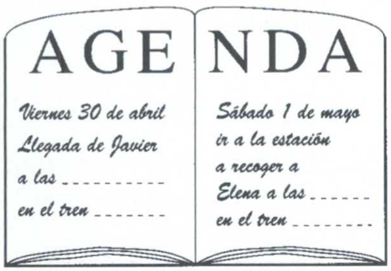
¡Tengo muchísimas ganas de verte!

Te mando un beso muy fuerte

ELENA

P.D. Perdona por no dejarte dormir, pero así aprovecharemos el sábado por la mañana

Como ves, tus amigos son encantadores, pero olvidadizos. No te dicen a qué hora llegan ni te dan identificación del tren. Sin embargo, con las tablas que tienes a mano, inmediatamente puedes comprobar a qué hora y en qué tren llegan. Localiza esos datos y anótalos en tu agenda.... ¡NO LOS VAYAS A OLVIDAR!



SÍMBOLOS UTILIZADOS EN LOS CUADROS HORARIO

ELECT.	: Electrotren
Interc.	: Intercity
ESTRELLA	: Estrella
EXP.	: Expreso
RAP.	: Rápido
Autom.	: Automotor
Semid.	: Semidirecto
Omn.	: Omnibús
	: Coche-Cama
	: Coche-litera
	: Tren con servicio de restaurante (Comidas, cafetería y bar)
	: Tren con servicio de cafetería (Bebidas frías y calientes, bocadillos y platos sencillos)
	: Tren con servicio de bar o minibar (Bebidas frías y bocadillos)
A	: Trenes sujetos al pago de suplemento tipo A
B	: Trenes sujetos al pago de suplemento tipo B
C	: Trenes sujetos al pago de suplemento tipo C
D	: Trenes sujetos al pago de suplemento tipo D
E	: Trenes sujetos al pago de suplemento tipo E.
	: Tren sujeto al pago de suplemento (Línea de puntos a la izquierda de las horas).
	: Tren que no circula todos los días (línea ondulada a la izquierda de las horas)
1	: Llamada a pie de página.

Hojas de propaganda de comida, ropa, muebles, electrodomésticos...

Es un recurso motivante que, de forma no repetitiva, permite plantear problemas interesantes.

a) Regalos

Para Navidad quieres hacer un regalo a tu mamá, otro a tu hermanita de un año y otro regalo a tu hermana de ocho años. ¿Qué elegirías, de ese escaparate, para cada una?

¿Cuánto te gastarías?

Diseña con plastilina, arcilla... pendientes con formas geométricas. Primero dibújalos en un folio y después confecciónalos.

b) Ofertas de libros

Elige dos libros. Rellena la tarjeta personal de suscripción.

Infórmate en una librería del precio de los libros elegidos y mira cuánto te ahorras.

Cuando tú recibas los libros en casa, ¿cuánto te han costado?

c) Muebles

Tienes que cambiar la cama de tu habitación y además añadir un armario que no tenías. Elige la cama y el armario.

- ¿Cuál sería el presupuesto?
- Los debes pagar tú con las 1.000 pesetas que semanalmente te dan. Si tienes ahorradas 30.000 pesetas, ¿cuántos meses tienes que ahorrar para podértelos comprar?

d) Ropa

Tus padres tienen que reponeros la ropa de invierno a tu hermana y a ti. Elige alguna y hazles el presupuesto.

e) Recetas

Lee con atención la receta de cocina. Tu amigo ha de preparar la comida para dos personas. ¿Qué ingredientes debe comprar? ¿Y si fuera para ocho personas?

REVUELTO DE GAMBAS

- *Ingredientes (para dos personas):*
- *Tres huevos.*
- *Cien gramos de gambas peladas.*
- *Cuatro cucharadas soperas de aceite de oliva.*
- *Sal.*

Batir los huevos con sal al gusto. Poner en una sartén el aceite y, cuando esté caliente, pasar las gambas hasta que estén blancas. Añadir los huevos batidos y mezclar con las gambas (con una cuchara de madera) hasta que estén cuajados.

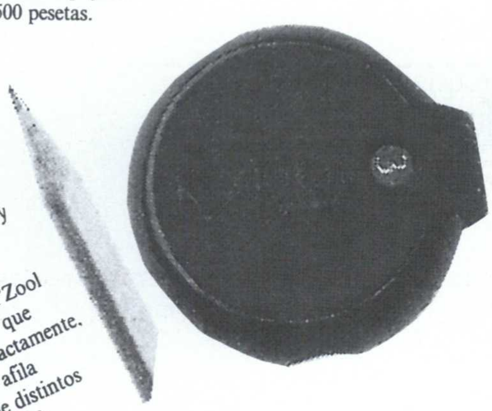
Servir muy caliente con picatostes.

REGALOS

Grandes aplausos. Así le recibirán cuando lleve a la mesa cualquier plato, siempre y cuando tenga puesto un delantal años cincuenta como éste, con telas y flores de plástico. 6.000 pesetas.

Entretenido. Para un bebé casi del siglo XXI. Este babero de plástico trae desde caracoles hasta los personajes de la inevitable Caperucita Roja para darle más *swing* a la hora de la papilla. 2.500 pesetas.

Natural. El Taller de Alquimia acaba de lanzar una línea de cosmética natural. El gel de baño de la Reina Cleopatra, con incienso y mirra, 1.155 pesetas; el agua de rosas búlgaras, 1.175.



Cómodo. Cuando un sacapuntas pequeño es poco y uno de mesa es demasiado, el sistema del K'Zool puede ser lo que necesita exactamente, y además afila lápices de distintos grosores. 850 pesetas.

Formas geométricas. Estos pendientes están hechos de un material semitransparente que recuerda al cristal esmerilado. Son ligeros, de moda y asequibles. De 920 a 2.120 pesetas.

f) Mercado

Haz el menú para comer y cenar. ¿Cuánto te gastarías?

Dibujo inédito de Manuel Aguilera

Situar objetos en el plano

Dar un plano. Cada alumno y alumna recortará los códigos (iglesia, ayuntamiento...) y los colocará en el lugar que se indica en las instrucciones.

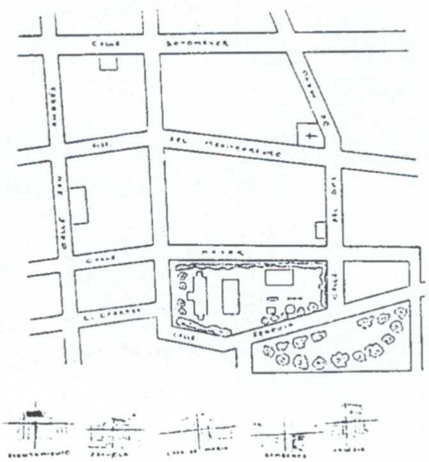
Instrucciones

a) Recorta la iglesia y pégala en el lugar correspondiente. Está situada en la esquina de la avenida de América y el Dos de Mayo.

b) Estás en la iglesia que hay en la avenida del Mediterráneo; debes pegar la escuela en la calle Mayor, entre esta calle y la calle Segovia. Indica el trayecto que sigues para llegar al punto indicado.

c) Estás en la esquina de la calle Mayor con la calle del Dos de Mayo; debes ir a pegar el Ayuntamiento a la esquina de la calle Sotomayor con San Andrés. Indica el camino que recorres.

d) Estás en el Ayuntamiento. Camina por la calle Sotomayor hasta la primera calle perpendicular a la derecha ¿Qué calle es?... Sigue por ella, tuerce por la tercera a la izquierda y pega la casa de bomberos en el parque.



El tangram

Es un juego chino compuesto por siete figuras geométricas (dos cuadrados de diferente tamaño, dos triángulos pequeños, dos triángulos grandes y un romboide). Las medidas que expresan la longitud de los lados, de las diferentes piezas, guardan una relación entre ellas. Pueden ser ensambladas de muy diversas maneras formando figuras geométricas regulares e irregulares.

Es un material fácil de construir con cartón, plástico, madera, etc., por lo que es conveniente que cada alumno y alumna se fabrique su propio juego. Es muy adecuado para desarrollar la imaginación, ejercitar la mente y desarrollar la dimensión espacial. En un primer momento explorarán libremente el material y jugarán con él para descubrir sus posibilidades.

Son múltiples las actividades que pueden elaborarse a partir de este material. Se sugieren las siguientes:

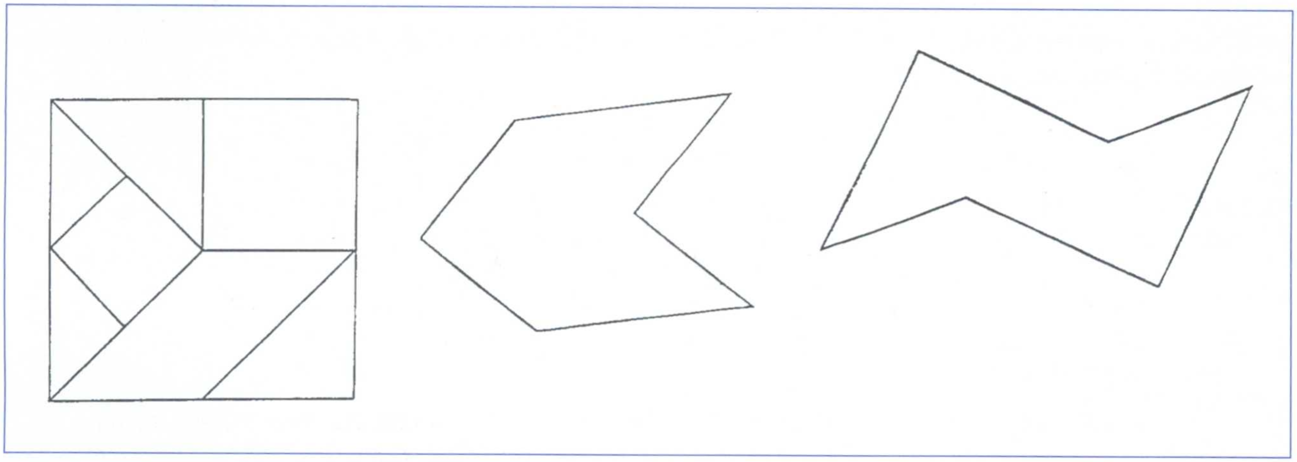
— Reconocimiento de figuras geométricas.

— Composición y descomposición de figuras.

— Clasificación de polígonos.

— Medición de lados, ángulos y diagonales.

— Cálculo de perímetros y superficies.



Posibles actividades.

1. *¿Qué piezas del tangram rellenan estas figuras? Busca varias posibilidades.*

2. *Calcula el perímetro de cada una.*

3. *Halla su superficie.*

4. *Construir otras figuras con el mismo perímetro o con la misma superficie.*

1. Sugerencias para trabajar con el *tangram* en el aula:

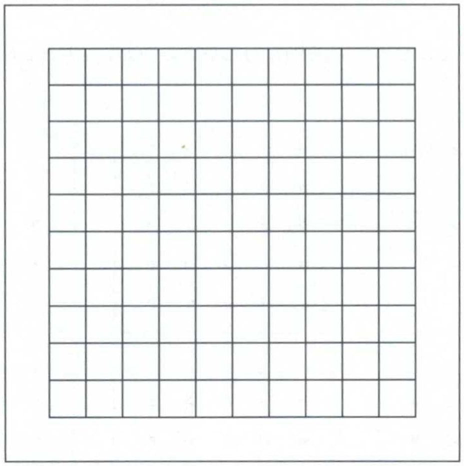
— Las actividades anteriores pueden abordarse en el segundo o en el tercer ciclo según los materiales o instrumentos auxiliares que se utilicen. Por ejemplo, en el segundo ciclo el cálculo del perímetro se realizará bordeando con lana la figura y después se medirá.

— En el tercer ciclo es posible que midan directamente el perímetro con una regla e incluso dándoles la longitud del lado de una de las figuras que forman el *tangram*.

— De igual forma, es aconsejable que la construcción de polígonos se haga en el segundo ciclo con la lana, dejando para el último ciclo la utilización de la regla.

El geoplano

Es un tablero cuadriculado, triangular o circular, con pequeñas puntas clavadas en la intersección de la retícula, que sirven de soporte para extender gomas de colores elásticas. Las figuras construidas pueden observarse desde distintos ángulos, permitiendo reconocerlas independientemente de su posición.



Posibles actividades:

— *Trazado de paralelas y perpendiculares.*

— *Construcción de ángulos.*

— *Recubrimientos y frisos.*

— *Deducción de las fórmulas para calcular la superficie de cuadriláteros y triángulos.*

— *Construcción de figuras simétricas.*

— *Cálculos de perímetros y superficies.*

— *Construcción de polígonos.*

— *Clasificación, composición y descomposición de polígonos.*

— ...

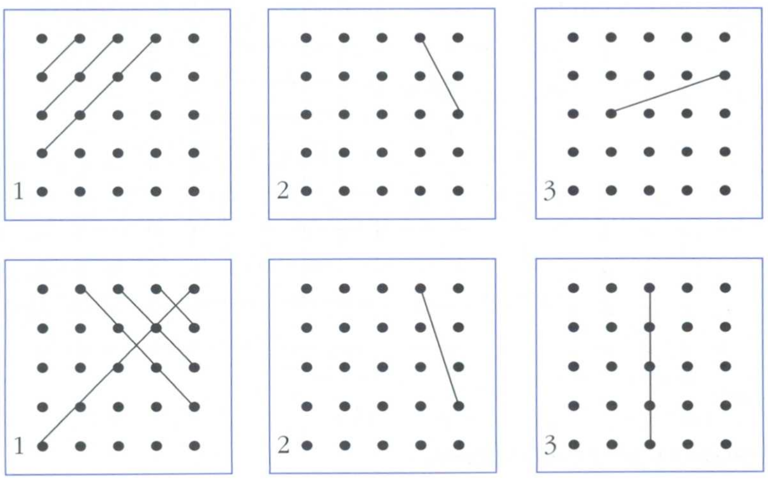
Sugerencias para trabajar con él en el aula:

Trazar paralelas y perpendiculares:

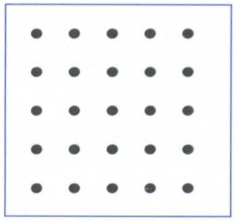
— En el primer ciclo el geoplano sirve para construir segmentos de mayor o menor longitud, figuras de diferentes formas y tamaños...

— En el segundo ciclo se pueden trazar segmentos y colocar gomas de forma que sean paralelas o perpendiculares a él.

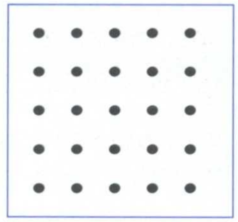
— En el tercer ciclo dibujar rectas paralelas o perpendiculares sobre geoplanos gráficos.



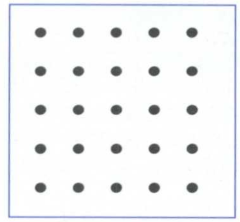
Construir polígonos que respondan a las características que se indican:



Cuatro lados
Dos lados paralelos

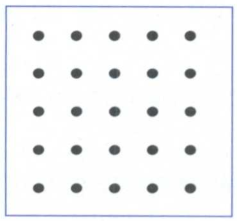


Cuatro lados
Dos pares de lados paralelos

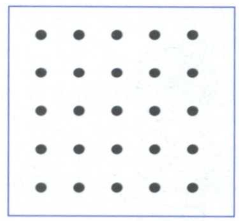


Cuatro lados
Un par de lados perpendiculares

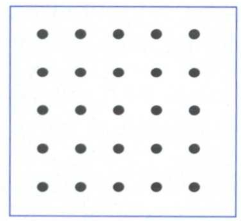
Dibujar figuras geométricas con el perímetro que se indica:



Diez unidades

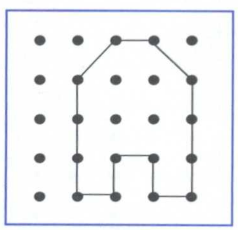


Doce unidades

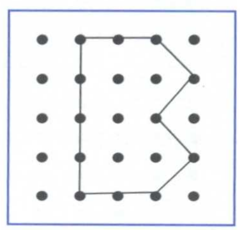


Ocho unidades

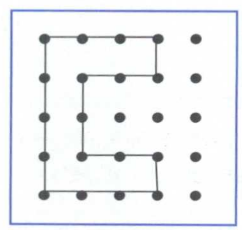
Estimar y calcular la superficie de cada figura:



Área estimada.......
Área real...............



Área estimada.......
Área real...............



Área estimada.......
Área real...............

Organización de datos

Elaborar e interpretar registros de hechos, fenómenos y acontecimientos:

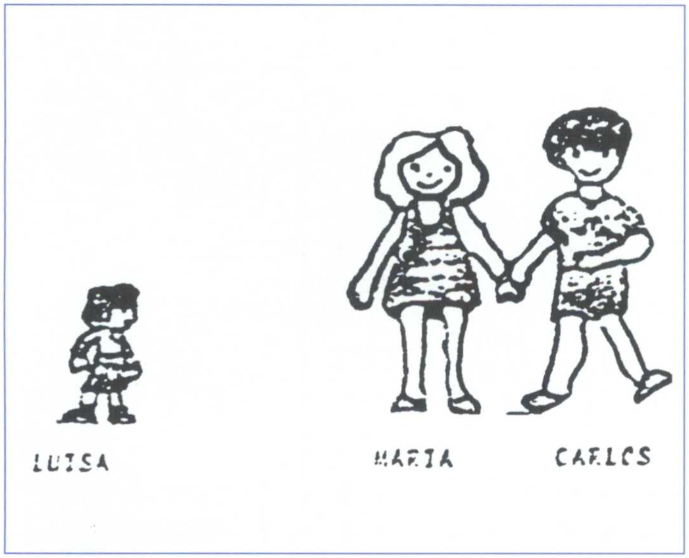
— Registrar mediante símbolos el tiempo de cada día.

Es necesario disponer de una colección de tarjetas con símbolos alusivos a las diferentes variaciones del tiempo: soleado, sol y nubes, nublado, lluvioso...

Cada día se sitúa sobre el eje de coordenadas la tarjeta correspondiente según el tiempo que haga.

Pasado un período de tiempo (8, 15, 30... días), observar la gráfica obtenida y analizar los datos más destacados.

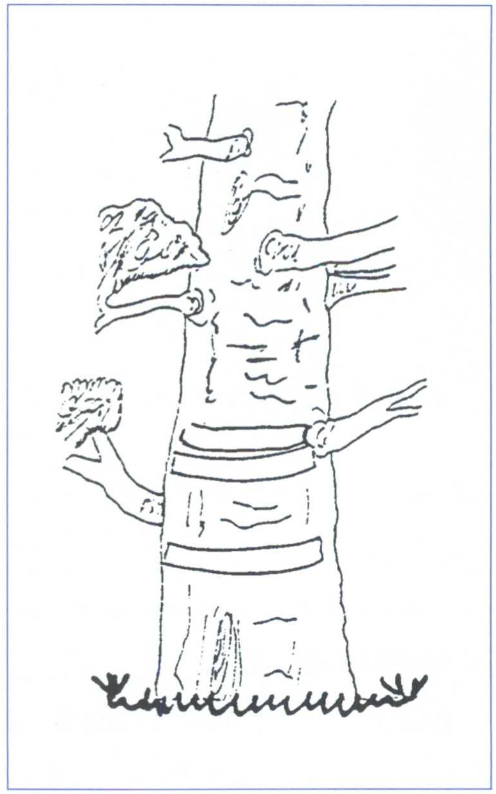
Representar puntos en un eje (sin exactitud):



María, Carlos y Luisa tenían escritos sus nombres en este árbol según su altura.

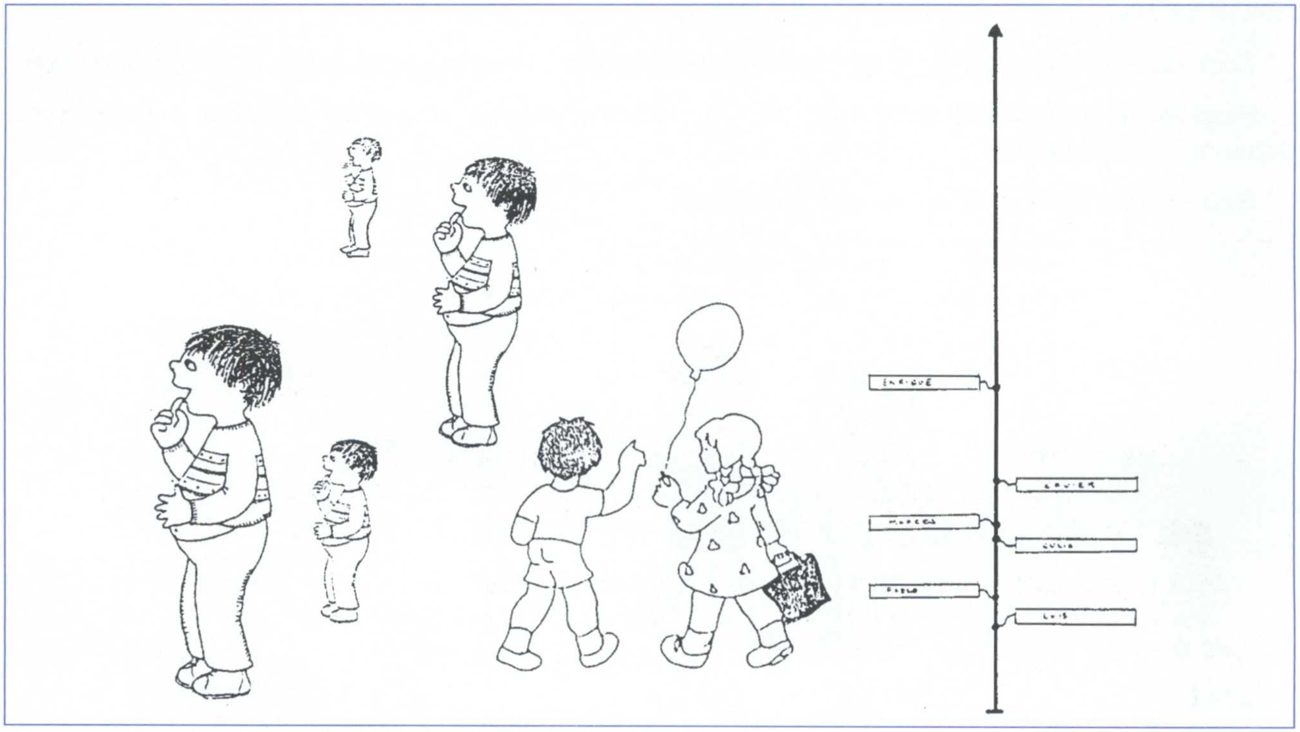
Pero una noche muy lluviosa se borraron.

Coloca en los letreros del árbol el nombre de cada persona teniendo en cuenta su altura.



— *En este eje se han colocado los nombres de los niños y la niña que hay en el dibujo, dándoles el orden por la altura que tienen.*

Coloca debajo de cada persona su nombre.



— *Cuenta todas las letras que hay en esta frase:*

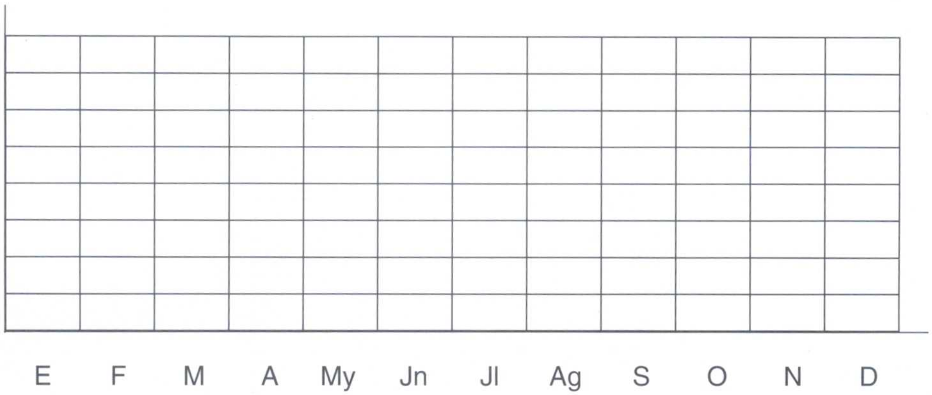
"CARACOL COL

SACA LOS CUERNOS AL SOL"

La mayor dificultad de este problema reside en diseñar la tabla para organizar los datos.

La formulación de pautas heurísticas facilita su elaboración.

— *¿En qué mes hemos nacido cada una de las personas que estamos en clase? Construye una gráfica que lo represente.*



- Este problema se puede trabajar en el primer ciclo si se escenifica la resolución: primero se agrupan según el mes que hayan nacido y después cada grupo se colocará en una fila diferente a partir de una recta que se considerará inicio de las filas.
- En la pizarra o en una cartulina cuadriculada estarán escritos en el eje horizontal (abscisas) los meses del año. Cada niña y niño que ha nacido en el mes de enero colocará una cruz en la fila correspondiente. Así sucesivamente con todo el alumnado.

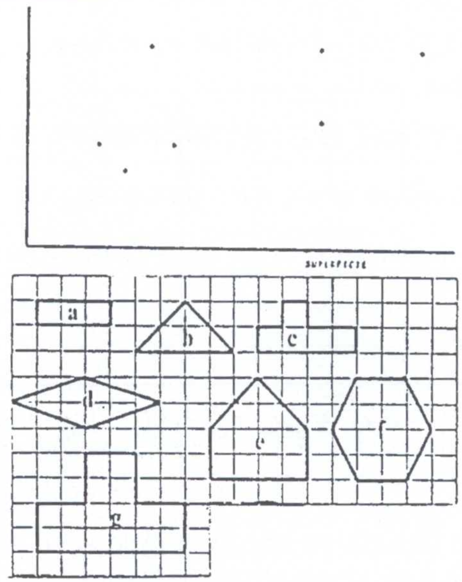
Cada alumno y alumna copiará la gráfica en una hoja cuadriculada (igual que la de la cartulina) que se le habrá entregado.

Es conveniente iniciar ya en este ciclo el análisis de las gráficas.

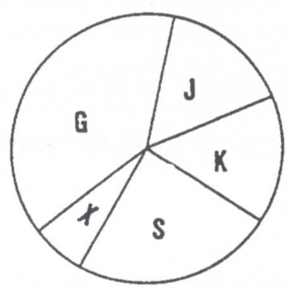
— *Cada punto de la gráfica representa un polígono. Escribe al lado de cada uno la letra de la figura geométrica que representa*[1].

[1] Tomado de Esteban, Paco y Luis. CEP de Zamora.

Poner en común las respuestas obtenidas.



— *Investiga en qué zona de la ruleta (G, J, K, S, X) se posará con más frecuencia un clip al hacerlo girar cien veces sobre un eje situado perpendicularmente y en el centro de la figura.*



— La mayor dificultad está en cómo colocar el clip y hacerlo girar.

— Es conveniente sugerirles un plan de trabajo, si previamente no se han realizado otros similares. Se ofrece uno posible:

- Haz una hipótesis sobre la zona en la que va a posarse más veces el clip y explica en qué apoyas tu conjetura.
- Lanza el clip cien veces y recoge los resultados en una tabla de frecuencias.
- Con los datos obtenidos dibuja una gráfica de barras.
- Analiza los resultados y comprueba si tu hipótesis era cierta.

Problemas con calculadora

Dada la importancia de la utilización de la calculadora en el aula de Educación Primaria, se considera interesante introducir un pequeño apartado en el que, sin ánimo de ser exhaustivo, se ofrezcan algunas reflexiones sobre la utilización de la calculadora en Primaria y algunas sugerencias de actividades para los tres ciclos.

Existe todavía entre parte del profesorado la idea de que la utilización de la calculadora impide la adquisición de los algoritmos de las operaciones. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que "practicar procedimientos pobremente comprendidos puede impedir el aprendizaje de la auténtica actividad matemática: las actividades diseñadas para facilitar la construcción de relaciones matemáticas serán más efectivas y apropiadas con la ayuda de la calculadora"[2]. El Informe Cockroft indica que "*debemos resaltar que la posesión de una calculadora de ningún modo reduce la necesidad de su usuario de comprender las Matemáticas... El saber* ***cómo*** *se multiplica y el saber* ***cuándo*** *se ha de multiplicar implican distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje*". Así pues, la calculadora no sustituye los procesos de aprendizaje de los algoritmos de las diferentes operaciones, cuando el contenido que se pretende desarrollar sea ese aprendizaje, pero sí puede utilizarse como un recurso para la comprensión de dichas operaciones.

[2] WHEATLEY y SHUMWAY (1992): *Calculators in Mathematical Education*. N. C. T. M.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que aprender Matemáticas no supone sólo, ni siquiera fundamentalmente, adquirir la mecanización de los algoritmos, sino también el desarrollo del razonamiento, el descubrimiento de los conceptos matemáticos, la adquisición de una metodología de resolución de problemas, el desarrollo de la capacidad de establecer relaciones matemáticas..... En la realización de actividades encaminadas a desarrollar estas capacidades, la calculadora tiene un lugar importante, pues facilita que el alumnado pueda centrarse en sus procesos de pensamiento, sin tener que desviar su atención en ese momento hacia la realización de algoritmos de cálculo.

En resumen, la calculadora debe ser un recurso habitual en el aula de Matemáticas, puesto que, entre otras ventajas:

— Facilita la construcción de relaciones matemáticas.

— Juega un importante papel instrumental en el desarrollo del razonamiento y de los conceptos matemáticos.

— Permite la utilización de métodos exploratorios en la resolución de problemas.

— Posee un alto potencial motivador de una actitud positiva hacia el área.

— Puede servir para adquirir destrezas de cálculo personales.

— Favorece la atención a la diversidad en la clase y pone al alumnado en situación de éxito.

Es importante, sin embargo, tener en cuenta algunas consideraciones para su uso en el aula:

— Es necesario combinar su uso con otros materiales para la adquisición de estrategias de cálculo escrito o mental.

— Es conveniente disponer en las aulas de calculadoras de cuatro operaciones, lo mismo que se tiene otro tipo de material manipulable. Es importante que el alumnado adquiera hábitos de empleo correcto. Hay que comprobar (valorar) las respuestas de la máquina por medio de una estimación y una aproximación adecuada.

— La calculadora debe estar a disposición del alumnado en sus actividades en clase; es el profesor o la profesora quien velará por el uso adecuado de la misma y en el momento oportuno.

Ofrecemos a continuación algunos ejemplos de posibles actividades que se pueden desarrollar en cada uno de los tres ciclos de Enseñanza Primaria.

Primer ciclo

— Consigue el número 10 con la calculadora utilizando solamente la tecla del 1 y las de las operaciones que consideres necesarias. Busca varias soluciones.

Esta actividad pretende el desarrollo de una metodología de exploración, así como la consolidación del concepto de número.

Cada alumno y alumna irá probando y anotando en su cuaderno las operaciones que va realizando. Después de un tiempo de prueba, realizar preguntas como:

— ¿Qué número mayor que el 10 está formado sólo por unos?

— ¿Qué operación tendremos que realizar para obtener el 10?

— ¿Qué número tendremos que restar?

$$11 - 1 = 10$$

— ¿Hay otra manera de hacerlo?

$$1 + 1 + 1 + ... = 10$$

Es interesante que expresen verbalmente las teclas que se deben pulsar.

— Pulsa el 5 en tu calculadora y dos veces consecutivas la tecla $\boxed{+}$. A continuación pulsa $\boxed{=}$, anota el resultado; vuelve a pulsar $\boxed{=}$ varias veces, anotando los resultados obtenidos en cada una de ellas.

Esta actividad, así como la que se incluye a continuación, pretende, en sus primeras utilizaciones, el conocimiento de la calculadora poniendo al alumnado en situación de sorpresa por el descubrimiento del "sumando constante" y de su utilización. Como todas las actividades con calculadora, consolida, además contenidos, que, en este caso, es la tabla de la suma del 5.

Es conveniente hacer una puesta en común y anotar en la pizarra el proceso que se ha realizado con los resultados obtenidos. Se observarán regularidades como:

— Cada resultado aumenta de 5 en 5.

— Obtenemos la tabla del 5.

— Utiliza seis teclas de la calculadora, que pueden ser números y operaciones, para obtener 20. Investiga diferentes maneras de hacerlo.

Esta actividad está encaminada a favorecer la capacidad de exploración y estrategias de ensayo y error. Es necesario que el alumnado comprenda qué se le pide. Para una mayor comprensión se harán preguntas relacionadas con el texto.

Hay que insistir en que escriban las teclas que van pulsando y que diferencien las diversas formas que hayan encontrado para conseguir el número.

— ¿Cuántas veces hay que sumar el número 5 en la calculadora para obtener 35?

Evidentemente, esta actividad está encaminada a consolidar el concepto de producto.

Se puede completar, si se desea, con la introducción del factor constante

tecleando 5 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

$\boxed{=}$

Si se escriben las dos tablas obtenidas, mediante la suma y mediante el factor constante, una al lado de la otra y se analizan ambas en una puesta en común, se consolida el concepto de producto como suma de sumandos iguales.

Segundo ciclo

Algunas de las actividades que se ofrecen a continuación están encaminadas a desarrollar los mismos procesos incluidos en el primer ciclo, cambiando únicamente las operaciones que se desarrollan o la magnitud de los números empleados.

— Marca los dígitos del 1 al 9 en orden ascendente, pulsando entre ellos las teclas $\boxed{+}$ o $\boxed{-}$, según convenga, para obtener como resultado 21. Anota en tu cuaderno las operaciones que vas realizando.

— Utilizando sólo la tecla del 4, y las teclas $\boxed{+}$, $\boxed{\times}$ y $\boxed{:}$, consigue el número 5. Intenta conseguirlo de varias maneras diferentes.

— Teclas estropeadas:

- Calcular 54 – 27, sin usar la tecla $\boxed{-}$.

— Calcular 48 : 6, sin usar la tecla $\boxed{:}$.

— Calcular 25 + 32, sin usar la tecla $\boxed{+}$.

— Calcular 29 x 5, sin utilizar la tecla $\boxed{x}$.

Esta actividad es especialmente interesante para consolidar el concepto de las diversas operaciones, puesto que supone interiorizar aspectos como operaciones inversas, la división como restas sucesivas, el producto como suma de sumandos iguales, etc.; además promueven una metodología de exploración, y el reto que suponen mantienen la atención y el interés del alumnado.

— Investiga, utilizando la calculadora, qué múltiplos de 3 son pares.

Esta actividad pretende el desarrollo del análisis de regularidades y la construcción de relaciones matemáticas. Para ello, se recogerán datos en una tabla y se analizarán diversas maneras de conseguir múltiplos de 3. Es importante hacer hincapié en la importancia de sistematizar la recogida de datos para facilitar el análisis de los mismos. Realizar preguntas encaminadas a que observen la regularidad de los pares múltiplos de 3 y a que deduzcan que esta serie de números corresponden a la tabla del 6.

Tercer ciclo

— Elige un número del 1 al 9 y márcalo tres veces seguidas en la calculadora; por tanto, te aparecerá un número de tres cifras iguales.

- Divide este número entre 3.
- El número obtenido divídelo entre 37. ¿Cuál es el resultado final? Repite este mismo proceso eligiendo otros números entre el 1 y el 9.

Recoge los datos en una tabla y busca regularidades y relaciones entre los números.

Intenta buscar la explicación.

Números elegidos	Números de tres dígitos iguales	: 3	: 37
1	111	111 : 3 = 37	37 : 37 = 1
2	222	222 : 3 = 74	74 : 37 = 2
3	333	333 : 3 = 111	111 : 37 = 3

— Utilizando solamente la tecla del 8 y las de las diversas operaciones, según creas conveniente, consigue el número 100. Después, realiza la misma actividad para conseguir el número 1000.

Con esta actividad, además de consolidar la operativa, se pretende desarrollar la estrategia de ensayo y error. El alumnado irá probando y escribiendo todas las operaciones que realice aunque no le den el resultado pedido, para poder reflexionar a partir de ellas las condiciones que deben cumplir cada una para aproximarse cada vez más al resultado.

— Multiplica en tu calculadora dos números cuya diferencia sea 4. Suma 4 al resultado obtenido. Construye una tabla para recoger los datos obtenidos con varios números.

— ¿Qué observas?

Números cuya diferencia es 4	Producto de los números	Resultado + 4	Resultado final
5 – 1 = 4	5 x 1 = 5	5 + 4	9
6 – 2 = 4	6 x 2 = 12	12 + 4	16
7 – 3 = 4	7 x 3 = 21	21 + 4	25

Es necesario potenciar la sistematización en la elección de los números cuya diferencia es 4. Se realizará una puesta en común para observar que el resultado final son los cuadrados de los números 3, 4, 5 ....

— Escribe cualquier número de seis cifras en tu calculadora, sin usar el 0 y sin repetir dígitos. Utilizando seis teclas, trata de llegar a 0. Se puede utilizar cualquier operación.

Esta actividad es un solitario. A través de ensayo y error, apuntando los movimientos que haga en la calculadora, ha de llegar a la solución.

Problemas de cálculo mental

Hay muchas razones que justifican el cálculo mental. La mayor parte de las operaciones que necesitamos en la vida diaria —manejo del dinero, medida— las hacemos mentalmente, muchos cálculos escritos se basan en la realización mental, incluso cuando se utiliza la calculadora contrastamos con alguna estimación obtenida por redondeo o por algún otro procedimiento. El cálculo mental desarrolla la concentración, la atención, el interés y la reflexión para decidir y elegir; además, contribuye a desarrollar la autoafirmación y confianza en sí mismo. Por último, desarrolla y favorece la flexibilidad en la búsqueda de soluciones y contribuye de una manera especial a la adquisición de algunas capacidades para relacionar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar.

Una buena destreza en cálculo mental se apoya en el dominio de la secuencia contadora y en las combinaciones aritméticas básicas conocidas como "tablas". Estos soportes son importantes porque permiten dar respuestas rápidas y dan pie a algoritmos de las operaciones elementales, pero son insuficientes para conseguir un cálculo mental adecuado y se hace necesario además el aprendizaje de una serie de métodos y estrategias que permitan al alumno operar tanto en el cálculo mental aditivo (recolocación, conmutar, descomposición, doblar, redondeo, conteo...) como en el multiplicativo (distribución, factorización...), y todo ello mediante un proceso de exploración que le permita al alumno no sólo conocer la existencia de determinadas estrategias, sino reflexionar para elegir y/o utilizar en cada situación la más adecuada.

El aprendizaje del cálculo mental supone la reflexión y verbalización de las diversas estrategias de cálculo utilizadas en una determinada operación, pero el profesor debe además secuenciar y planificar los métodos y estrategias de cálculo que son objetivo de aprendizaje e ir incrementando su campo y su dificultad progresivamente.

En este proceso es importante que el propio aprendizaje de las tablas no responda a un mero proceso de memorización, sino que es necesario ayudar al niño a desarrollar sus propias estrategias para que pueda obtenerlas asegurándose de su buen funcionamiento, uso y consolidación.

El primer aspecto que es necesario trabajar se relaciona con las seriaciones progresivas y regresivas que consoliden e interioricen la secuencia contadora. Asimismo hay que trabajar la memorización de hechos numéricos de uso muy frecuente (dobles, dobles más uno... suman cinco, suman diez).

Además de las combinaciones aditivas básicas el niño debe aprender un bagaje de métodos y estrategias que le permitan operar reduciendo la manipulación de símbolos a aquellos más conocidos. La mayoría de los métodos y estrategias de cálculo mental aditivo consisten en descomposición de los sumandos, la alteración de su orden de colocación o la búsqueda del redondeo (trabajar con números que arrastren ceros):

Recolocación: Recolocar mentalmente los números, agrupándolos según las familias de sumandos de la unidad seguida de ceros.

$77 + 86 + 53 + 14 = (77 + 53) + (86 + 14)$

Descomposición: Descomponer uno de los términos para transformar la operación en otra equivalente más cómoda.

$77 + 148 = 70 + 7 + 130 + 18$

Redondeo: Alterar los dos términos de la operación buscando el redondeo a ceros, al menos en uno de ellos. En la suma es frecuente la compensación y en la resta la conservación.

$57 + 38 = 60 + 35$

$547 - 189 = (547 + 11) - (189 + 11) = 558 - 200 = 358$

$252 - 59 = (200 + 52) - (52 + 7) = 200 + 7 = 193$

Conteo: Trabajar de izquierda a derecha. Hace falta cierta destreza. Puede ser ascendente y descendente.

Ascendente:

264 + 347: (264 + 300); 564 + 60; 624 + 4; 628

264 – 347: (2 + 3), 5; 564 + 47; (56 + 4); 60; 624 + 4; 628

Descendente:

46 – 24: A 46 le quito 20; 26, y le quito 4, 22

La multiplicación es, por excelencia, la operación del cálculo mental. A continuación destacamos algunos métodos y estrategias:

Como con lápiz y papel: Se trata de manipular mentalmente los símbolos como en la forma escrita. Se actúa dígito a dígito, y se efectúa la suma final imaginando la disposición que tendría con lápiz y papel.

Distribución: Se trata de transformar uno o más factores en sumas o diferencias con el fin de aplicar la propiedad distributiva. La estrategia general se limita a descomponer el número en una forma multiplicativa o polinómica.

a) Aditiva 25 x 48 ===> 25 (40 + 8)

b) Sustractiva: 25 x 48 ===> 25 (50 – 2)

Factorización: Se trata de sustituir uno o más de los factores por un equivalente numérico en forma de serie de productos o cocientes. La estrategia general consiste en la descomposición factorial y la posterior aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación con respecto de la suma.

25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = (5 x 8) x (5 x 6) = 40 x 30 = 1.200

25 x 48 = 50 x 24 = 100 x 12 = 1.200

Todos estos aspectos es necesario trabajarlos mentalmente de forma progresiva y planificada, pero además hay un conjunto de actividades escritas que sin duda favorecen el desarrollo de estrategias de cálculo mental. Tal es el caso de diagramas, cuadrados mágicos y un conjunto de juegos como ocas, puzzles, dominós... y otras actividades que permiten explorar sobre determinados "patrones" para realizar cálculos.

A modo de ejemplos se ofrecen a continuación una serie de actividades:

1. Buscar pares de números de una cifra que sumen 10.

2. Buscar pares de números de dos cifras que completen la decena.

Seguir las siguientes series:

19 + 1 =	39 + 1 =	69 + 1 =
18 + 2 =	38 + 2 =	68 + 2 =
....	....	....
....	....	....
....	....	....

3. *Trabajar el cálculo mental utilizando distintos diagramas.*

7	9	11
9	11	13
11	13	15

Con este modelo se pueden trabajar diferentes seriaciones progresivas y regresivas basta que el operador horizontal o vertical sea suma o resta, multiplicación o división. Es un diagrama que tiene múltiples posibilidades. Por ejemplo:

a) Dado un número del cuadrante superior izquierdo:

— Sumar en horizontal y vertical el mismo número: 2, 3, 4, 5 ..., hasta completar el cuadrado.

— Sumar diferente número en horizontal que en vertical. Por ejemplo, +4 +2.

— Restar en horizontal y vertical el mismo número 1, 2, 3, 4...

— Restar en horizontal y vertical diferente número –> –2 –3.

— También se puede sumar un número en horizontal y restar en vertical o viceversa.

— Ídem multiplicando o dividiendo.

— Se pueden, asimismo, mezclar sumas y multiplicaciones, restas y multiplicaciones, etc.

b) Dado el número del cuadrado inferior derecha, que completen los números del cuadrado, aplicando las diversas situaciones presentadas en *a*).

c) Dado un número en un cuadrado cualquiera, completarlo también en este caso.

El número de subdivisiones del cuadrado general será mayor o menor según la edad del alumno/a y/o de la complejidad con que quiera trabajarse.

Las actividades que aparecen en los apartados *b*) y *c*) ofrecen mayor dificultad que las del apartado *a*), puesto que en ambos casos (*b*, *c*) han de realizar la operación inversa de la que se indica.

4. Trabajar con figuras mágicas

— "*Cuadrados mágicos*"

- Completar cuadrados mágicos:

Primero es necesario descubrir la característica de cada uno.

Después mediante ensayo y error, se van completando los cuadros que faltan de forma que cada fila y columna cumpla la característica.

		11
	9	
7		

15		3	
4	5		
	11	2	
			12

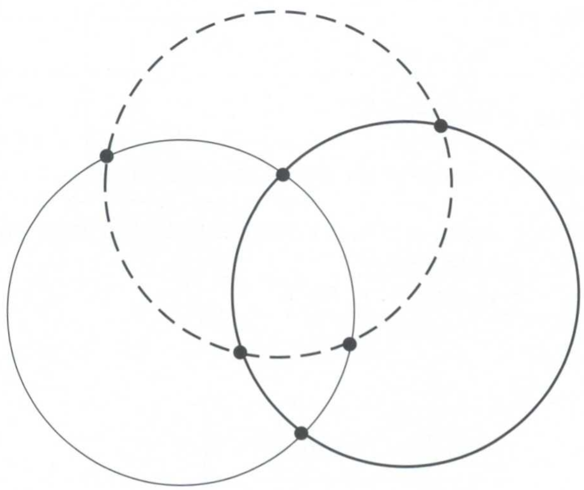
	24		8	15
	5		14	16
	6			
	12	19		
	18		2	

— Que los propios alumnos y alumnas construyan los cuadrados.

El mayor o menor número de celdillas, así como el tamaño de los números, dependerá de la edad y destreza del alumnado.

— "*Círculos mágicos*"

Coloca en los puntos de corte de todos los círculos números distintos, de manera que la suma de todos los situados en un mismo círculo sea 20.



5. *Descubriendo estrategias y "trucos" para multiplicar:*

— *Multiplicar por 9, por 99, por 999*

- Se empieza multiplicando números de una sola cifra, por (10 – 1), (100 – 1) y finalmente (1.000 – 1).

Después, la misma secuencia con números de dos cifras.

Operación	C	D	U
9 x 9 = 81		8	1
10 x 9 = 90		9	0
11 x 9 = 99		9	9
12 x 9 = 108	1	0	8
13 x 9 = 117	1	1	7
14 x 9 = 126	1	2	6
15 x 9 = 135	1	3	5
16 x 9 = 144	1	4	4
....			

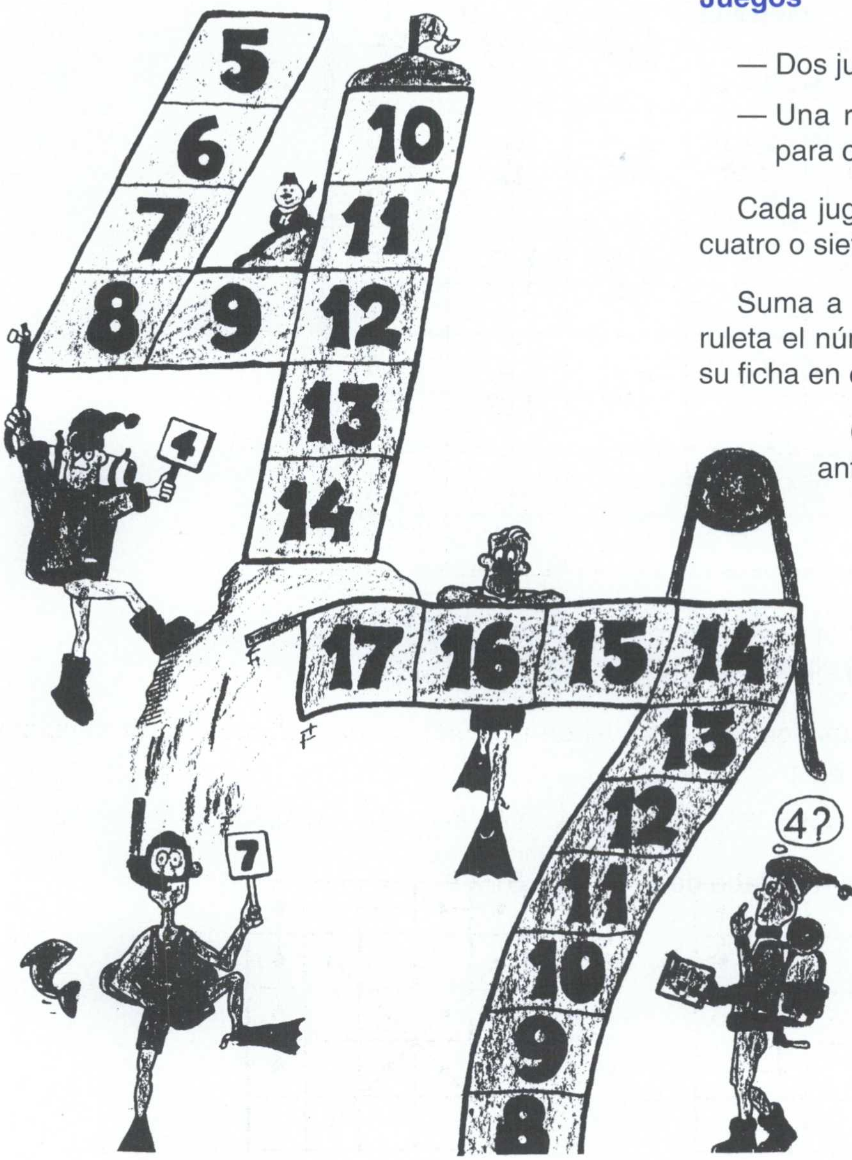
Completar la tabla hasta multiplicar el 23 por 9.

Observar las regularidades:

— Unidades: aumentan de 1 en 1

— Decenas: disminuyen de 1 en 1

Decir, sin operar, cuál sería el resultado de 27 x 9; de 31 x 9 ...



Tomado de Centro de Profesores de Burjassot, Valencia.

Juegos

— Dos jugadores.

— Una ruleta. Fichas de distinto color para cada jugador.

Cada jugador elige uno de los números cuatro o siete.

Suma a cada número que salga en su ruleta el número que le ha tocado y coloca su ficha en el lugar correspondiente.

Gana el jugador que complete antes todo el número.

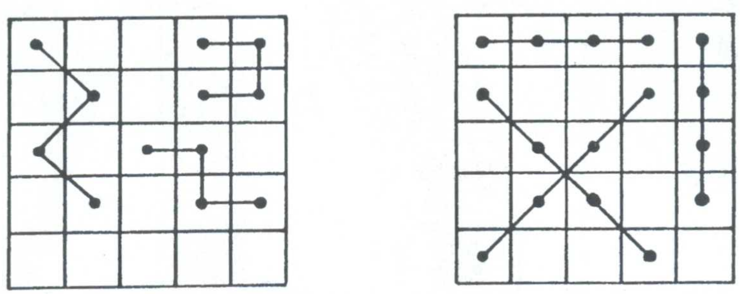
15	4	10	19	9
8	13	16	2	18
17	5	12	10	11
14	11	14	13	6
7	9	3	12	20

Dos jugadores. Cada jugador utilizará fichas de su color y dos ruletas.

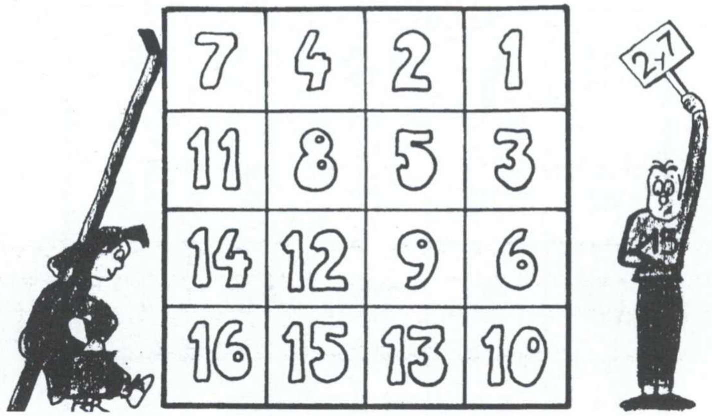
En cada partida los jugadores hacen rodar una pareja de ruletas.

La puntuación se obtiene sumando los números en las ruletas que han rodado. Si el número está ocupado deben pasar.

Gana el primer jugador que complete una línea de cuatro fichas por ejemplo.



Tomado de Centro de Profesores de Burjassot, Valencia.

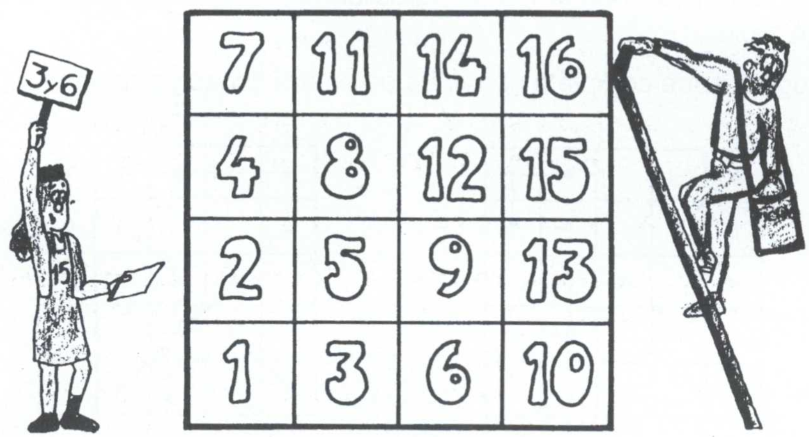


Cada jugador utilizará uno de los dos tableros y dos ruletas.

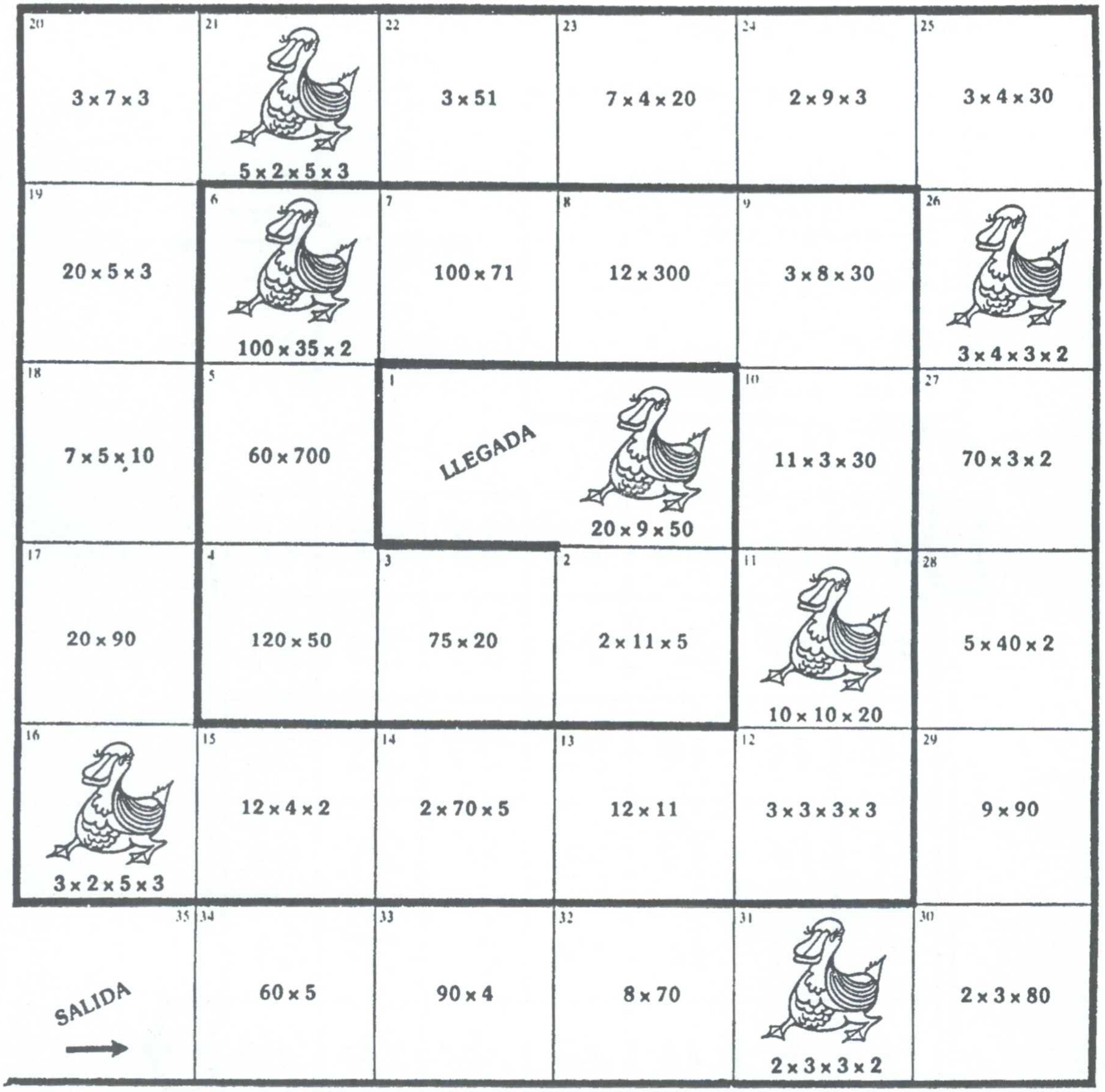
En su turno, el jugador cubrirá de acuerdo con el número que sumen los dos números de sus dos ruletas una o más plazas de la forma siguiente:

Un jugador que obtiene el 10, por ejemplo, puede ocupar el 10 u ocupar una de las combinaciones de plazas que sumen 10; por ejemplo: 1 y 9; 2 y 8; 1, 2 y 7; 3 y 6; ... con la condición de que todos los números de la combinación estén libres.

Gana el jugador que complete primero quince plazas.



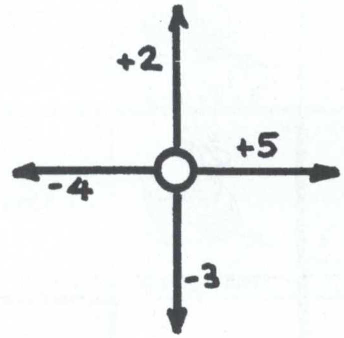
Tomado de Centro de Profesores de Burjassot, Valencia.



Tomado de "Didáctica del cálculo mental", de Luis Pereda Ortiz del Río.

EL LABERINTO

PARTIENDO DE LA CASILLA "ENTRY"
Y EFECTUANDO LAS OPERACIONES QUE
CORRESPONDAN SEGÚN MARCAN LAS
FLECHAS HAS DE SALIR POR LA
CASILLA "EXIT"
COLOREA EL CAMINO SEGUIDO



EN-TRY	15	20	25	27	32	37	42	
	12	17	22	25	29	35	39	
	10	14	19	22	27	32	36	
	7	12	17	20	25	29	34	
	4	9	14	18	23	27	31	
	1	6	11	16	21	24	28	EXIT

Tomado de "Didáctica del cálculo mental", de Luis Pereda Ortiz del Río.

DOMINÓS

MATERIAL: Se necesitan 28 fichas de cartulina, divididas en dos partes al igual que las fichas del dominó clásico.

REGLAS DEL JUEGO:

Se siguen las mismas reglas de juego que en el dominó.

	1	2	3	4	5	6	7
1	4-3 • 0+1						
2	7-6 • 1+1	4-2 • 6-4					
3	5-4 • 3+0	0+2 • 9-6	5-2 • 7-4				
4	6-5 • 6-2	8-6 • 4+0	10-7 • 2+2	7-3 • 8-4			
5	3-2 • 5+0	10-8 • 4+1	11-8 • 2+3	9-5 • 10-5	6-1 • 12-7		
6	8-7 • 6+0	6-4 • 5+1	2+1 • 4+2	10-6 • 3+3	8-3 • 10-4	12-6 • 11-5	
7	11-10 • 7+0	7-5 • 6+1	6-3 • 5+2	11-7 • 4+3	7-2 • 9-2	7-1 • 8-1	10-3 • 11-4

Tomado de "Didáctica del cálculo mental", de Luis Pereda Ortiz del Río.

	20	21	22	23	24	25	26
20	10 + 10 • 12 + 8						
21	11 + 9 • 29 − 8	11 + 10 • 12 + 9					
22	13 + 7 • 14 + 8	24 − 3 • 29 − 7	20 + 2 • 30 − 8				
23	24 − 4 • 15 + 8	27 − 6 • 16 + 7	15 + 7 • 17 + 6	20 + 3 • 26 − 3			
24	27 − 7 • 15 + 9	15 + 6 • 16 + 8	16 + 6 • 17 + 7	25 − 2 • 18 + 6	20 + 4 • 28 − 4		
25	30 − 10 • 11 + 14	18 + 3 • 12 + 13	28 − 6 • 15 + 10	28 − 5 • 16 + 9	26 − 2 • 17 + 8	20 + 5 • 50 − 25	
26	14 + 6 • 33 − 7	13 + 8 • 17 + 9	27 − 5 • 32 − 6	29 − 6 • 18 + 8	30 − 6 • 31 − 5	30 − 5 • 19 + 7	13 + 13 • 30 − 4

Tomado de "Didáctica del cálculo mental", de Luis Pereda Ortiz del Río.

5

Bibliografía

BELL, A. W.; COSTELLO, J.; KUCHEMANN, D. (1983): *Research on Learning and Teaching*. NFER-NELSON-Windsord. Berkshire.

CALVO, C.; FERRERO, L.; MARTÍNEZ, L.; RENIEBLAS, A. (1988): "Plantear y resolver problemas". *Papeles de Acción Educativa*. Acción Educativa. Madrid.

CALLEJO DE LA VEGA, M. L.: *Resolución de problemas en un Club matemático*. Narcea. Madrid.

FISHER, R.; VINCE, A.: *Investigando las Matemáticas 1, 2, 3 y 4*. Ed. Akal.

GAZTELU ALBERO, I. (1991): "*Situaciones problemáticas*". M. E. C., Madrid.

GRUPO CERO (1984): *Curriculum de Matemáticas de 12 a 16.*

— (1987): *Curriculum de Matemáticas de 12 a 16*. Mestral. Valencia.

GRUPO DECA (1990): *Didáctica de la resolución de problemas*. CEP de Burgos. Burgos.

GUZMÁN, M. DE (1984): *Cuentos con cuentas.* Labor. Barcelona.

— (1987): *Aventuras Matemáticas.* Labor. Barcelona.

— (1991): *Para pensar mejor.* Labor. Barcelona.

HERNÁN, F. (1991): *Retrato de una profesión imaginada.* Proyecto Sur de Ediciones. Granada.

HOWSON-KEZTEZ-KILPATRICK (1981): *Curriculum Development in Mathematics.* University of Cambridge.

INFORME KROCKOFT (1984): *Las Matemáticas sí cuentan.* Servicio de Publicaciones del M. E. C. Madrid.

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (1986): *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90.* Kuwait, 1986. Mestral. Valencia.

KANTOWSKI, M. G. (1979): *The Use of Heuristics in Problem Solving.* University of Florida.

MASON, J.; BURTON y STALEY (1988): *Pensar matemáticamente.* Labor - M. E. C. Barcelona.

MAYER RICHARD, E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Paidós. Barcelona.

NCTM (1990): *Sugerencias para resolver problemas.* Trillas. México.

— Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.*

PERELMAN (1968): *Matemáticas recreativas.* Martínez Roca. Barcelona.

POLYA, G. (1981): *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas. México.

PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988) *Problemas aritméticos escolares.* Síntesis. Madrid.

SCHOENFELD, H. H. (1979): *Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem Solving Performance.* J. Res. Math. Ed.

— Academic Press. New York. (1985): *Mathematical problem solving.*

SEGARRA, L. (1987): *La cuadratura del círculo.* Graó. Barcelona.

Dirección General de Renovación Pedagógica

Subdirección General
de Formación del Profesorado