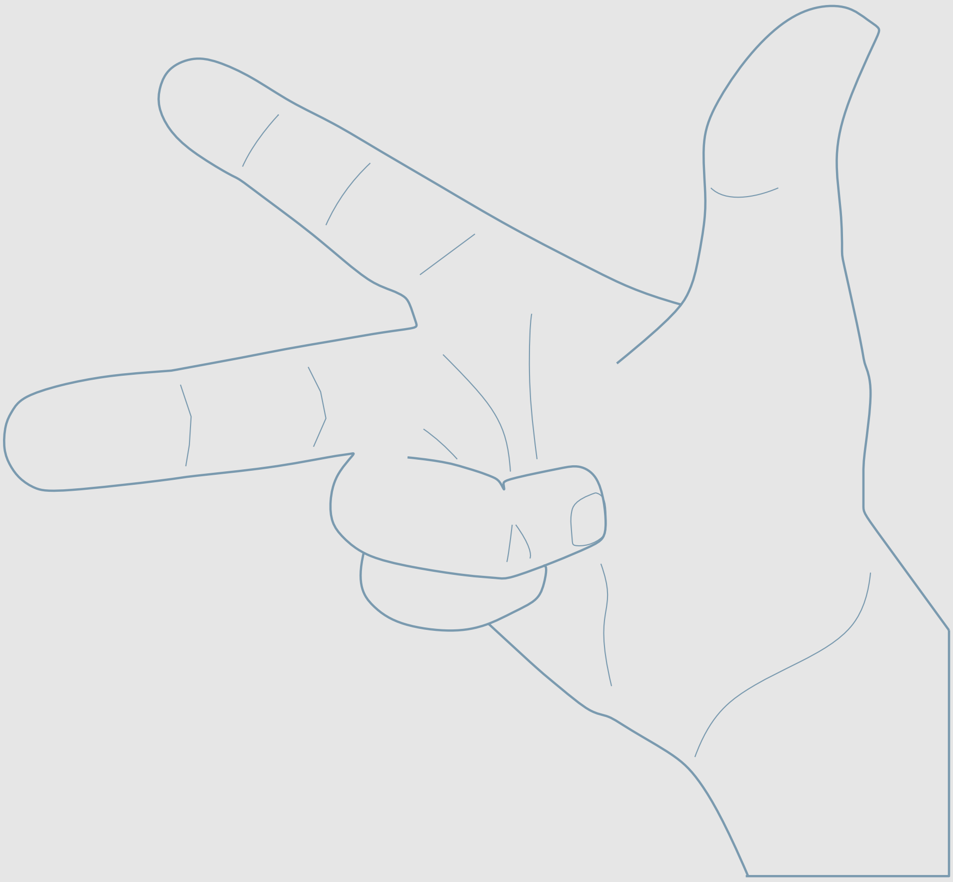
Tropecientos ejercicios de física

Salvador Parra Camacho

Acción Educativa Exterior
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL
Y DEPORTES



Colección de ejercicios resueltos

para alumnos de Secciones Bilingües en Eslovaquia

Tropecientos ejercicios de física

Colección de ejercicios resueltos

para alumnos de Secciones Bilingües en Eslovaquia

Salvador Parra Camacho

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN

ACCIÓN
EDUCATIVA
EXTERIOR

Catálogo de publicaciones del Ministerio
Catálogo general de publicaciones oficiales

Agregaduría de Educación en Eslovaquia
Consejería de Educación en Polonia

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL Y DEPORTES
Secretaría de Estado de Educación
Dirección General de Planificación y Gestión Educativa
Unidad de Acción Educativa Exterior

Edita:

Subdirección General de Atención al Ciudadano, Documentación y Publicaciones
Edición: noviembre 2025
NIPO: 164-25-221-1 (electrónico)
Maquetación: Salvador Parra Camacho
Diseño cubierta: Salvador Parra Camacho

Al Bilingválne slovensko-španielske gymnázium
de Nové Mesto nad Váhom
y a aquellos de sus alumnos que siguieron
los senderos de la física hasta una maturita.

Al primero, por hacer posible el camino.
A los segundos, por querer recorrerlo conmigo.

Índice general

Introducción

Este libro es para alumnos de las Secciones Bilingües en Eslovaquia que tienen la asignatura de física en español.

Empezó siendo un libro para los alumnos del *Bilingválne slovensko-španielske gymnázium* de Nové Mesto nad Váhom, pero cualquier alumno de otras Secciones Bilingües puede usarlo como material de referencia.

Aunque no es su objetivo principal, espero que el libro también pueda ser útil para profesores de las Secciones Bilingües.

Y cualquier otro lector es bienvenido.

El libro contiene una lista de ejercicios resueltos sobre física. Las cuestiones de teoría, los ejercicios y los problemas intentan dar un panorama de los temarios eslovacos de la asignatura.

¿Por qué *"tropecientos"* ejercicios? Porque es una palabra que se utiliza para hablar de una cantidad grande.

He intentado que el número de ejercicios sea tan grande y, sobre todo, tan significativo como sea posible. Es decir, que los problemas realmente reflejen las bases de la asignatura que puedes necesitar durante tus años en el instituto o que pueden ser útiles si necesitas la física cuando termines.

Como el libro es trabajo de una sola persona y ni siquiera es su trabajo principal, pueden existir errores en el texto. Siempre que lees un texto escrito por otra persona tienes que tener en cuenta que puede contener errores tipográficos, ortográficos, gramaticales, aritméticos, conceptuales... No importa quién sea el autor.

Este libro no es la excepción, así te ruego a ti, estimado lector, que estés atento y encuentres los fallos que se me han escapado a mí. Si me avisas de ellos, puedo corregir esos fallos y mejorar el texto.

Espero que sea útil para ti.

Convenciones utilizadas

El libro usa varias convenciones con la notación que debes tener en cuenta:

1. Los separadores decimales se representan con *comas* o *puntos*.

   En España y Eslovaquia, el separador decimal tradicional es la coma:

   $$\frac{1}{2} = 0,5$$

   En Estados Unidos, es el punto:

   $$\frac{1}{2} = 0.5$$

   El libro puede usar ambas convenciones.

2. No se usan separadores de millar, millón, millardo, billón... o se usan pequeños espacios.

   En España y Eslovaquia, el separador tradicional es un punto. Y en Estados Unidos es una coma. Este libro **no** usa eso.

   Es decir, el número *dos millones trescientos mil quinientos dieciseis* se escribe aquí:

   $$2300516$$

   o:

   $$2\,300\,516$$

3. Los vectores se representan a partir de sus componentes usando paréntesis y comas:

   $$\vec{a} = (1, 3, 4) \iff \begin{cases} a_x = 1 \\ a_y = 3 \\ a_z = 4 \end{cases}$$

   Mientras que en Eslovaquia se suelen usar corchetes y puntos y comas:

   $$\vec{a} = [1; 3; 4] \iff \begin{cases} a_x = 1 \\ a_y = 3 \\ a_z = 4 \end{cases}$$

4. El campo $\vec{B}$ se llama **campo magnético** o *campo B*.

   El libro usa la terminología moderna en la que las palabras *"campo magnético"* indican la magnitud vectorial que mide la propiedad del espacio que sirve de intermediaria en las interacciones magnéticas (y electromagnéticas) y se mide en teslas (T): el campo $\vec{B}$.

Existen dos campos en electromagnetismo que están estrechamente relacionados:

- $\vec{B}$: **campo magnético**, *campo B* o *inducción magnética*.
- $\vec{H}$: *campo H* o *excitación magnética*.

En Eslovaquia es más popular la terminología antigua que llama *campo magnético* al campo $\vec{H}$ (que no se estudia en el instituto). Pero existen razones físicas por las que el campo $\vec{B}$ es más fundamental que el campo $\vec{H}$.

Opino que el nombre *inducción magnética* para el campo $\vec{B}$ no es buena idea porque sugiere un fenómeno, en lugar de una propiedad del espacio.

5. El momento lineal es una de las magnitudes físicas más importantes, pero no tiene una unidad específica en el SI. Es decir, no existe una abreviatura ni un nombre para la unidad del momento lineal.

   La unidad del SI es "kg · m/s" o "N · s".

   En el *Karlsruher Physikkurs* (Curso de física de Karlsruhe) proponen llamarlo *"huygens"* y abreviarlo "Hy", en honor al físico neerlandés Christiaan Huygens.

   Otros proponen "Nr" y el nombre *"noether"* por la importante matemática Emmy Noether.

   Si se usa cualquiera de estas alternativas no oficiales, es necesario definir el símbolo antes de utilizarlo; **no es un símbolo estándar**.

6. A pesar de su enorme importancia, en el SI, no existe una abreviatura ni un nombre para la unidad de la entropía.

   La unidad del SI es "J/K".

   En el *Karlsruher Physikkurs* (Curso de física de Karlsruhe) proponen llamarla *"carnot"* y abreviarla "Ct".

   Si se esa propuesta, es necesario definir el símbolo antes de utilizarlo; **no es un símbolo estándar**.

Algunos nombres propios

Unidades

Muchas unidades de medida del *SI* (Sistema Internacional de unidades) reciben nombres de científicos:

- La fuerza se mide en **newtons** (N) por el inglés Isaac Newton
- La energía, el trabajo y el calor se mide en **julios** (J) por el inglés James Prescott Joule
- La presión se mide en **pascales** (Pa) por el francés Blaise Pascal
- La potencia se mide en **vatios** (W) por el escocés James Watt
- La carga eléctrica se mide en **culombios** (C) por el francés Charles-Augustin de Coulomb
- La intensidad de corriente eléctrica se mide en **amperios** (A) por el francés André-Marie Ampère
- La resistencia eléctrica se mide en **ohmios** (Ω) por el físico alemán Georg Simon Ohm
- La capacidad eléctrica se mide en **faradios** (F) por el físico inglés Michael Faraday
- La diferencia de potencial o voltaje se mide en **voltios** (V) por el físico italiano Alessandro Volta
- La temperatura se mide en **kelvins** (K) por el físico británico William Thomson, conocido como Lord Kelvin
- La frecuencia se mide en **hercios** (Hz) por el físico alemán Heinrich Rudolf Hertz
- El flujo magnético se mide en **webers** (Wb) por el físico alemán Wilhelm Eduard Weber
- El campo magnético se mide en **teslas** (T) por Nikola Tesla, el ingeniero estadounidense de origen serbio y nacido en Croacia
- La inductancia se mide en **henrios** (H) por Joseph Henry, el físico estadounidense

Leyes

Algunas leyes físicas tienen nombres de científicos importantes:

- El griego **Arquímedes de Siracusa**: la ley de Arquímedes
- El italiano **Evangelista Torricelli**: la ley de Torricelli
- El inglés **Isaac Newton**: las tres leyes de Newton, la ley de gravitación universal de Newton, la ley de enfriamiento de Newton, la fórmula del binomio de Newton…
- El francés **Blaise Pascal**: la ley de Pascal, el triángulo de Pascal…
- El francés **Charles-Augustin de Coulomb**: la ley de Coulomb de la electrostática
- El alemán **Georg Simon Ohm**: la ley de Ohm
- El inglés **Michael Faraday**: la ley de Faraday-Henry (o ley de Faraday)

- El estadounidense **Joseph Henry**: la ley de Faraday-Henry (o ley de Faraday)
- El alemán **Gustav Robert Kirchhoff**: las leyes de Kirchhoff (la de los nodos y la de las mallas) de los circuitos eléctricos
- El inglés **James Prescott Joule**: la ley de Joule
- El neerlandés **Hendrik Antoon Lorentz**: la ley de Lorentz
- El neerlandés **Christiaan Huygens**: el principio de Huygens
- El suizo **Daniel Bernoulli**: la ecuación de Bernoulli de la mecánica de fluidos

  Pero, sinceramente, la familia Bernoulli estuvo llena de matemáticos y físicos importantes. Y yo suelo tener problemas para recordar quién es quién.

Fundamentos

Definir lo que es la física no es tan sencillo como parece a simple vista; el rango de fenómenos que estudia esta ciencia natural es difícil de condensar con unas pocas palabras.

Pero tener una idea aproximada no es tan difícil.

Parte de los conocimientos fundamentales de física tienen que ver con el hecho de que es una ciencia experimental: medimos valores de propiedades que nos permiten describir el estado de un sistema físico y nos pueden permitir predecir su comportamiento futuro o deducir su comportamiento en el pasado.

Por lo tanto, conceptos como los de magnitud física (lo que medimos), unidad (el patrón con el que comparamos las medidas de una magnitud), error experimental y estimaciones de error son esenciales.

Física

1. ¿Qué es la Física?

> *In general, we look for a new law by the following process. First, we guess it (audience laughter), no, don't laugh, that's really true. Then we compute the consequences of the guess, to see what, if this is right, if this law we guess is right, to see what it would imply and then we compare the computation results to nature, or we say compare to experiment or experience, compare it directly with observations to see if it works.*
>
> *If it disagrees with experiment, it's wrong. In that simple statement is the key to science. It doesn't make any difference how beautiful your guess is, it doesn't matter how smart you are who made the guess, or what his name is… If it disagrees with experiment, it's wrong. That's all there is to it.*
>
> Richard P. Feynman (1918-1988)

> *En general, buscamos una nueva ley según el siguiente proceso. Primero, la suponemos [la audiencia se ríe]. No, no se rían; es realmente cierto. Entonces calculamos las consecuencias de la suposición para ver, si es correcta, si la ley que suponemos es correcta, qué implicaría y después comparamos los resultados del cálculo con la Naturaleza, o decimos que comparamos con el experimento o la experiencia, comparamos directamente con las observaciones para ver si funciona.*
>
> *Si está en desacuerdo con el experimento, está mal. En esa simple declaración está la clave de la ciencia. No hay ninguna diferencia en cómo de bonita es tu suposición,*

no importa lo inteligente que eres, quién hizo la suposición o cuál es su nombre...
Si está en desacuerdo con el experimento, está equivocada. Y eso es todo.

Richard P. Feynman (1918-1988)

Esa cita de Feynman resume muy bien la idea general de cómo funciona el método científico. El método para adquirir nuevos conocimientos fiables que usan las Ciencias Naturales y, cada vez más, las Ciencias Sociales.

La Física es una ciencia natural y, por lo tanto, usa ese método para comprender mejor la Naturaleza. Pero es probablemente una de las Ciencias Naturales más difíciles de definir. Veamos por qué.

Podemos definirla por ***"exclusión"*** de la siguiente manera:

Las Ciencias Naturales son las ciencias que estudian los fenómenos naturales usando el método científico. De forma imprecisa (ya que no existen límites claramente definidos entre ellas) las Ciencias Naturales se pueden separar en:

- Biología: la ciencia natural que estudia la vida y los fenómenos relacionados
- Geología: la ciencia natural que estudia nuestro planeta. En particular, los procesos relacionados con la creación y modificación de las rocas y minerales que la forman.
- Química: la ciencia natural que estudia las propiedades de distintas sustancias y cómo unas se transforman en otras.
- Astronomía: la ciencia natural que estudia los objetos celestes (aquellos que se ven en el firmamento nocturno: estrellas, planetas, cometas, nebulosas...).

Por exclusión, la Física es **la ciencia natural que estudia aquellos fenómenos naturales que no estudian el resto de las ciencias naturales**.

El problema de la definición por exclusión es que no considera que a veces la Física estudia cosas en común con las ciencias anteriores. Por eso existen intersecciones como la *biofísica*, la *geofísica*, la *físico-química* o la *astrofísica*.

Podemos definir la Física por *"inclusión"*: La Física es la ciencia natural que estudia fenómenos naturales como el movimiento, el calor, la luz, la electricidad, el magnetismo...

El problema de esa definición es que siempre puede dejar algún fenómeno físico fuera de la lista. ¿Qué hay del sonido[1]? ¿Y de la luz que no vemos directamente como los rayos X o los rayos gamma? ...

Es decir: la definición que hemos etiquetado como por *"inclusión"* puede omitir fenómenos que sí puede estudiar la Física y la que hemos etiquetado como por *"exclusión"* puede hacer otras omisiones similares (especialmente donde la Física comparte campo de estudio con otras ciencias).

La respuesta se puede extender tanto como se desee hablando de cosas como:

- los antecedentes históricos:
    1. Los mitos son el primer intento de explicar la Naturaleza.
    2. Aparece la Filosofía como un intento racional de explicar la Naturaleza sin usar mitos.
    3. La Filosofía se divide en ramas según su objeto de estudio y la parte que estudia la Naturaleza recibe el nombre de Filosofía Natural o (usando la palabra griega para Naturaleza) Física.

[1] Aunque es movimiento de las moléculas.

4. Siglos de acumulación de datos, conocimientos y herramientas hacen que se asiente el método científico (sin recibir ese nombre). La Filosofía Natural deja de ser una parte de la Filosofía y poco a poco se va convirtiendo en algo similar a la ciencia que conocemos.
5. La Filosofía Natural se diversifica tanto que aparecen distintas ramas: Biología, Química, Física...

- las ramas de la Física: distinción entre Física Clásica y Física Moderna; ramas de la Física Clásica (Mecánica, Termodinámica, Óptica, Acústica, Electromagnetismo...); ramas de la Física Moderna (Física Molecular, Física Atómica, Física Nuclear, Física Corpuscular o de Partículas...)...

Feynman dijo que la Naturaleza no conoce la distinción entre las ramas de la Ciencia.

Vectores

1. Sean las magnitudes vectoriales $\vec{a} = (1, 3, -1)$ y $\vec{b} = (-2, 1, 5)$.
a) $\vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$
c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
d) $\vec{a} \times \vec{b}$
e) a
f) $|\vec{a}|$

a) $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -1) + (-2, 1, 5) =$$
$$= (-1, 4, 4)$$

Que también se puede escribir:

$$= -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

b) $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = (1, 3, -1) - 2 \cdot (-2, 1, 5) =$$
$$= (1, 3, -1) + (4, -2, -10) =$$
$$= (5, 1, -11)$$

Que también se puede escribir:

$$= 5\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 11\hat{k}$$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Es un **producto escalar**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, -1) \cdot (-2, 1, 5) =$$

donde el punto de la multiplicación **no se puede omitir** y no se puede cambiar por un aspa.

$$= 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 =$$
$$= -2 + 3 + -5 = -4$$

Como el producto escalar es **conmutativo**:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = -4$$

d) $\vec{a} \times \vec{b}$

Es un **producto vectorial**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, 3, -1) \times (-2, 1, 5) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 7\hat{k} =$$
$$= (16, -3, 7)$$

Como el producto vectorial es **anticonmutativo**:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = (-16, 3, -7)$$

e) a

El módulo del vector $\vec{a}$ es:

$$a = |\vec{a}| = |(1, 3, -1)| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} =$$
$$= \sqrt{11}$$

f) $|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}$$

2. ¿En qué definiciones o leyes de la física aparecen la suma de vectores, el producto por un escalar, el producto escalar y el producto vectorial?

La **suma de vectores** aparece, por ejemplo, en los principios de superposición de fuerzas, campo eléctrico, campo magnético y campo gravitatorio:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$
$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots$$

El **producto por un escalar** aparece, por ejemplo, en la segunda ley de Newton (o ley fundamental de la dinámica) donde relaciona la aceleración con la fuerza a través de un escalar (la masa):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

El **producto escalar** de vectores aparece, por ejemplo, en:

- la definición del flujo de un campo
  - flujo de campo eléctrico: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$
  - flujo de campo magnético: $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$
  - flujo de campo gravitatorio: $\Phi_g = \vec{g} \cdot \vec{S}$
- la definición del trabajo: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$
- ...

El **producto vectorial** aparece sobre todo en mecánica del sólido rígido y en electromagnetismo:

- en sólido rígido y rotaciones:
  - el momento de una fuerza, torque o par de fuerzas:

    $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

  - el momento angular (= momento cinético):

    $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- en electromagnetismo:
  - en la ley de Lorentz de la fuerza magnética:

    $$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

  - en la ley de Biot-Savart
  - ...

3. ¿Qué son los vectores unitarios o versores?

En general, un **vector unitario** es cualquier vector cuyo módulo es 1:

$$\vec{v} \text{ es unitario } \iff |\vec{v}| = 1$$

Cuando un vector es unitario y queremos subrayar que lo es, en lugar de usar una flecha sobre el vector, usamos un acento circunflejo:

$$\vec{v} \text{ es unitario } \iff \vec{v} = \hat{v}$$

Los vectores unitarios de la base canónica cartesiana en 3D $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ son los vectores que nos sirven para escribir cualquier vector como una combinación de ellos:

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0)$$
$$\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$$
$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

El vector unitario $\hat{\imath}$ tiene la dirección del eje X, el sentido positivo y el módulo igual a 1. El vector unitario $\hat{\jmath}$ tiene la dirección del eje Y, el sentido positivo y el módulo igual a 1. El vector unitario $\hat{k}$ tiene la dirección del eje Z, el sentido positivo y el módulo igual a 1.

Hemos dicho que cualquier vector se puede escribir como una combinación de los vectores unitarios de la base canónica cartesiana. Por ejemplo, el vector $\vec{a} = (3, -4, 2)$ también se puede escribir:

$$\vec{a} = (3, -4, 2) = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

y el vector $\vec{b} = (0, 1, -7)$ también se puede escribir:

$$\vec{b} = (0, 1, -7) = \hat{\jmath} - 7\hat{k}$$

Si tenemos un vector $\vec{v}$ que no es unitario (es decir, su módulo no es igual a 1) y queremos otro vector que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, pero que sea unitario:

1. Calculamos el módulo del vector.
2. Dividimos las componentes del vector entre el módulo.
3. El resultado es un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector original.

Por ejemplo:

$$\vec{v} = (1, 3, -2)$$

tiene un módulo:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} =$$
$$= \sqrt{14}$$

Que es distinto de 1. Por lo que no es unitario. Pero el siguiente vector sí lo es:

$$\hat{v} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} = \frac{(1, 3, -2)}{\sqrt{14}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

O, si racionalizamos los denominadores:

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

Análisis dimensional

1. Encuentra las dimensiones de la fuerza.

Para encontrar las dimensiones de la fuerza, tenemos que conocer alguna expresión o alguna ley donde aparezca esta magnitud física y otras magnitudes físicas.

Un buen punto de partida es la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Las dimensiones de F serán:

$$[F] = [m \cdot a] = [M] \cdot [a] = M \cdot [a] =$$

Pero sabemos que la aceleración a es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, por lo que:

$$= M \cdot \frac{v}{t} = M \cdot [v] \cdot [t]^{-1} =$$

Y sabemos que la velocidad v es la variación de la posición con respecto al tiempo:

$$= M \cdot \frac{x}{t} \cdot T^{-1} =$$
$$= M \cdot [x] \cdot [t]^{-1} \cdot T^{-1} =$$
$$= M \cdot L \cdot T^{-2}$$

Es decir, la fuerza es igual a masa, por longitud partido tiempo al cuadrado.

Por lo tanto, el newton, la unidad del SI para la fuerza, es:

$$\mathrm{N} \equiv \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

2. Encuentra las dimensiones de la presión.

Sabemos que la presión se define como la fuerza partido la superficie:

$$[P] = \frac{F}{S} = \frac{[F]}{[S]} =$$

Por el ejercicio anterior, sabemos las dimensiones de la fuerza:

$$= \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{[S]} =$$

Como la superficie es una longitud al cuadrado:

$$= \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} =$$
$$= M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

La presión tiene dimensiones de masa partido longitud y partido cuadrado del tiempo.

Por lo tanto, el pascal, la unidad del SI para la presión:

$$\mathrm{Pa} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

3. Si P es la presión y V es el volumen, demuestra que $P \cdot V$ tiene las mismas dimensiones que la energía.

$$[P \cdot V] = [P] \cdot [V] =$$

por el ejercicio anterior:

$$= M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot [V] =$$

Pero, como el volumen es el cubo de una longitud:

$$= M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^3 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

Ahora debemos encontrar las dimensiones de la energía de algún otro modo. Para ello, podemos usar la fórmula de la energía cinética en física clásica:

$$[E] = [E_c] = \left[\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \right] =$$

Como 1/2 es adimensional:

$$= [m] \cdot [v]^2 =$$

Por la definición de velocidad:

$$= M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

¡Que coincide con lo que habíamos obtenido!

4. El *tirón* o *sobreaceleración* $\vec{\jmath}$ se define como la variación de la aceleración respecto al tiempo:

$$\vec{\jmath} = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$$

¿Cuáles son sus dimensiones y sus unidades?

Es evidente que:

$$[j] = [a]/[t] = [a] \cdot T^{-1} =$$

Pero la aceleración es la variación de la velodidad respecto al tiempo:

$$= [v]/[t] \cdot T^{-1} = [v] \cdot T^{-2} =$$

Pero la velocidad es la variación de la posición respecto al tiempo:

$$= [x]/[t] \cdot T^{-2} = L \cdot T^{-3}$$

Por lo tanto, las unidades en el SI serán:

$$\mathrm{m/s^3} \equiv \mathrm{m \cdot s^{-3}}$$

Cambios de unidades

1. ¿Qué factores de conversión debes conocer?

Los factores de conversión que tienes que conocer dependen:

- del curso en el que estés
- del profesor que tengas

Una idea aproximada de los que tienes que saber de memoria:

- De **tiempo**

  Estos factores de conversión son imprescindibles. Tienes que saberlos desde antes de entrar en el instituto.

  - 1 año ≈ 365 días
  - 1 mes ≈ 30 días
  - 1 día ≈ 24 horas
  - 1 hora = 60 min
  - 1 min = 60 s

- De **ángulo**

  $$\boxed{1 \text{ vuelta} = 360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad}}$$

- De **volumen**

  $$\boxed{1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3}$$

- De **cantidad de sustancia**

  $$\boxed{1 \text{ mol} = 6.02214 \cdot 10^{23} \text{ unidades}}$$

- De **presión**

  $$1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} = 1.01300 \text{ bar}$$

2. Haz los siguientes cambios de unidades:
a) $P_1 = 120 \text{ atm} \longrightarrow \text{ Pa}$
b) $P_2 = 400\,000 \text{ Pa} \longrightarrow \text{ atm}$
c) $P_3 = 3000 \text{ mmHg} \longrightarrow \text{ Pa}$
d) $P_4 = 200\,000 \text{ Pa} \longrightarrow \text{ mmHg}$

Sabemos que *atm* es *"atmósfera"*, *Pa* es *"pascal"* (la unidad de la presión en el SI, llamada así en honor a Blaise Pascal), *mmHg* es *"milímetros de mercurio"*. Y los factores de conversión aproximados son:

$$1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

Por lo tanto:

a) $P_1 = 120 \text{ atm} =$

$$= 120 \text{ atm} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} =$$
$$= 12\,156\,000 \text{ Pa}$$

En notación científica:

$$= 1.2156 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Usando prefijos (múltiplos) del Sistema Internacional de Unidades:

$$= 12.156 \text{ MPa}$$

Usando los prefijos y la notación científica:

$$= 1.2156 \cdot 10^1 \text{ MPa}$$

b) $P_2 = 400\,000 \text{ Pa} =$

$$= 400\,000 \text{ Pa} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{101\,300 \text{ Pa}} =$$
$$= 3.948667325 \text{ atm}$$

c) $P_3 = 3000 \text{ mmHg} =$

$$= 3000 \text{ mmHg} \cdot \frac{101\,300 \text{ Pa}}{760 \text{ mmHg}} =$$
$$= 399\,868.4211 \text{ Pa}$$

En notación científica:

$$= 3.998684211 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

d) $P_4 = 200\,000\ \text{Pa} \longrightarrow\ \text{mmHg}$

$$= 200\,000\ \text{Pa} \cdot \frac{760\ \text{mmHg}}{101\,300\ \text{Pa}} =$$
$$= 1500.493583\ \text{mmHg}$$

3. Cambia de unidades la siguiente velocidad angular:

$$\omega = 4500\ \text{r.p.m.}$$

a unidades del SI.

Las siglas *r.p.m.* significan *"revoluciones por minuto"*, es decir, *"vueltas partido por minuto"*:

$$\omega = 4500\ \text{r.p.m.} = 4500\ \frac{\text{vuelta}}{\text{min}}$$

Si eres un alumno de 2º en una Sección Bilingüe (o de un curso posterior), tienes que saber el factor de conversión para convertir entre minutos y segundos:

$$1\ \text{min} = 60\ \text{s}$$

Por lo tanto:

$$\omega = 4500\ \frac{\text{vuelta}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

Si eres un alumno de 2º, no tienes que saber el factor de conversión para convertir entre radianes y vueltas. Pero si eres de 3º o un curso posterior, tienes que saber que:

$$1\ \text{vuelta} = 2\pi\ \text{rad}$$

Por lo tanto:

$$\omega = 4500\ \frac{\text{vuelta}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{vuelta}} =$$

$$= \frac{9000\pi}{60}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} =$$

Podemos dividir numerador y denominador entre 10:

$$= \frac{900\pi}{6}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} =$$

y entre 3:

$$= \frac{300\pi}{2}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} =$$

$$= 150\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Si queremos dar la aproximación decimal:

$$\omega \approx 471,2388980 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por supuesto, los radianes partido segundo también se pueden escribir:

$$\omega = 150\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 150\pi \ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Cambia las unidades de la siguiente velocidad a unidades del SI:

$$v = 240 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Los factores de conversión que tienes que conocer son:

$$1 \ \text{km} = 1000 \ \text{m}$$
$$1 \ \text{h} = 60 \ \text{min}$$
$$1 \ \text{min} = 60 \ \text{s}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} v = 240 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \cdot \frac{1\text{h}}{60\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} &= \\ = \frac{240 \cdot 1000}{60 \cdot 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \\ = \frac{240 \cdot 10}{6 \cdot 6} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \\ = \frac{40 \cdot 10}{6} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \\ = \frac{20 \cdot 10}{3} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \\ = \frac{200}{3} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} &\approx \\ \approx 66.67 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

5. La constante de los gases ideales es:

$$R = 0.082 \ \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Cambia su valor a unidades del Sistema Internacional.

Solamente tenemos que cambiar las atmósferas a pascales y los litros a metros cúbicos. Para ello tenemos las siguientes equivalencias:

- 1 atm = 101 300 Pa
- 1 m^3 = 1 000 L$

Por lo tanto:

$$R = 0.082\ \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot \frac{101\,300\ \text{Pa}}{1\ \text{atm}} \cdot \frac{1\ \text{m}^3}{1\,000\ \text{L}}$$
$$R \approx 8.31\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Pero un pascal por un metro cúbico es lo mismo que un julio:

$$R \approx 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Medidas y errores

1. Se tienen dos medidas de longitud:

$$l_1 = (120 \pm 20)\ \text{m}$$
$$l_2 = (2300 \pm 10)\ \text{km}$$

a) ¿Cuál es el valor de la medida en cada caso?
b) ¿Cuál es el error absoluto de cada medida?
c) ¿Cuál es el error relativo de cada medida?
d) ¿Cuál de las dos medidas es *mejor*?

Tenemos:

$$l_1 = (\textcolor{red}{120} \pm \textcolor{magenta}{20})\ \text{m}$$
$$l_2 = (\textcolor{olive}{2300} \pm \textcolor{blue}{10})\ \text{km}$$

Eso significa:

a) Los valores de las medidas es:

$$\bar{l}_1 = \textcolor{red}{120}\ \text{m}$$
$$\bar{l}_2 = \textcolor{olive}{2300}\ \text{km}$$

b) Los valores de los errores absolutos son:

$$\Delta l_1 = \textcolor{magenta}{20}\ \text{m}$$
$$\Delta l_2 = \textcolor{blue}{10}\ \text{km}$$

c) Los valores de los errores relativos son:

$$\varepsilon(l_1) = \frac{\Delta l_1}{\bar{l}_1} = \frac{\textcolor{magenta}{20}\ \text{m}}{\textcolor{red}{120}\ \text{m}} = 0.1666666667 \approx$$
$$\approx 17\,\%$$

$$\varepsilon(l_2) = \frac{\Delta l_2}{\bar{l}_2} = \frac{10 \text{ km}}{2300 \text{ km}} =$$
$$= 0.004347826087 \approx$$
$$\approx 0.4\,\%$$

d) El error relativo más pequeño es el de la segunda medida:

$$\varepsilon(l_2) = 0.4\,\% < \varepsilon(l_1) = 17\,\%$$

Por lo tanto, la segunda medida es mejor que la primera.

2. ¿Para qué sirve el error relativo? ¿Qué unidades tiene?

El error relativo es **adimensional**. Es decir, **no tiene unidades**.

Esto es así por su definición:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

El error relativo de x se define como el error absoluto de x (Δx) entre la medida $\bar{x}$ (entendida como el valor real). Como las dos cosas se miden en las mismas unidades, el cociente (= la división) de las dos cosas no tiene unidades.

Por otro lado, el error relativo nos permite comparar dos medidas diferentes. Los errores relativos pequeños están asociados a buenas medidas y los errores relativos grandes, a malas medidas.

3. ¿Qué significa la siguiente medida?

$$x = (230 \pm 10) \text{ cm}$$

Significa que:

1. Creemos que el valor real de la medida es: 230 cm.
2. Creemos que el error absoluto es 10 cm.
3. Creemos que, si el valor real de la medida no es 230 cm, está en el intervalo:

$$230 - 10 = 220 \text{ cm}$$

$$230 + 10 = 240 \text{ cm}$$

$$x \in [220, 240] \text{ cm}$$

Lo correcto es siempre expresar una medida dando el valor del error absoluto (o del relativo); eso indica hasta qué punto estamos seguros de lo correcta que es la medida.

En **ciencia**, las medidas indican la incertidumbre de nuestro conocimiento.

4. ¿Cómo determinamos el error?

ALUMNA: No lo entiendo. ¿Cómo podemos saber cuál es el error si no sabemos cuál es el valor real de la magnitud que estamos midiendo?

PROFESOR: Eso es una buena pregunta.

Existen una serie de criterios estadísticos para decidir cuál es el valor más apropiado del error absoluto según el tipo de medida (si es directa o indirecta).

No necesitas saber los criterios, pero para que te hagas una idea, para medidas directas, podríamos usar los siguientes criterios:

1. Si hemos tomado solamente una medida, podemos coger que el error es igual a la sensibilidad del aparato de medida.
2. Si hemos tomado varias medidas, podemos coger que el error es igual a la desviación típica de las medidas.

Cinemática unidimensional

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento sin estudiar las interacciones que pueden cambiarlo. La cinemática unidimensional estudia los movimientos que ocurren en una sola dimensión; son los más sencillos de describir.

Podemos describir un movimiento usando una serie de ecuaciones que nos dicen dónde está (la posición) y cómo se mueve (la velocidad y la aceleración) si sabemos el tiempo.

Con esas ecuaciones y el significado físico de ellas, puedes resolver cualquier problema de cinemática. No memorices fórmulas para casos concretos; aplica los principios generales y las condiciones que de da el problema.

Intenta conectar este tema con los temas de matemáticas relacionados con funciones constantes, afines (o lineales) y cuadráticas. Si consigues ver bien esa conexión, entenderás mucho mejor ambas asignaturas.

1. Una persona lanza desde el suelo, verticalmente y hacia arriba un objeto a 8 m/s. Calcula su altura máxima.

Primero dibujamos el problema con lo que necesitamos y con un sistema de coordenadas:

- Cogemos un eje vertical y lo llamamos *eje Y*
- El origen del eje Y está en el suelo
- El eje es positivo hacia arriba
- La velocidad inicial va hacia arriba
- La aceleración de la gravedad siempre es hacia abajo
- **Cuando llega a la altura máxima, la velocidad es cero**

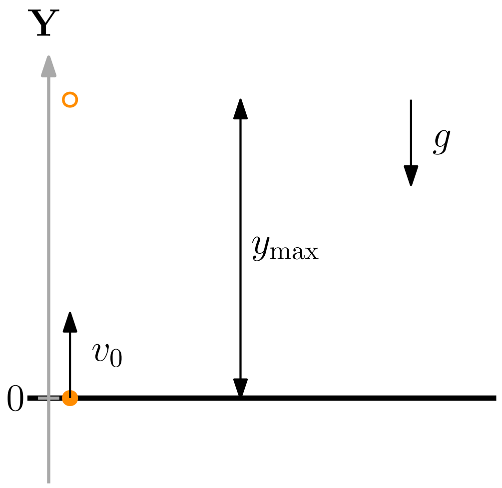


Figura 1: Problema 1.

Este problema es de tiro vertical. Las ecuaciones son las ecuaciones del MRUA:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

Observa que hemos usado y en lugar de x porque hemos llamado Y al eje.

Para nuestro sistema de coordenadas:

- $x_0 = 0$ m
- $v_0 = 8$ m/s
- $a_0 = g =$ - 10 m/s

Sustituyendo, las ecuaciones de MRU en unidades SI en nuestro sistema de coordenadas son:

$$\begin{cases} y = 0 + 8 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \\ v = 8 + (-10) \cdot t \\ a = -10 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} y = 8t - 5t^2 \\ v = 8 - 10t \\ a = -10 \end{cases}$$

Alcanza la altura máxima cuando la velocidad es cero. Si cogemos la ecuación de la velocidad y ponemos 0 donde está v:

$$0 = 8 - 10t$$

$$10t = 8$$

$$t = \frac{8}{10}$$

$$t = 0.8 \text{ s}$$

Tarda 0.8 segundos en llegar a la altura máxima. Si ahora sustituimos en la ecuación de la posición:

$$y = 8 \cdot 0.8 - 5 \cdot (0.8)^2$$

$$y = 3.2 \text{ m}$$

La altura máxima es de 3,2 metros.

2. Una persona está en la azotea[a] de un edificio de 40 metros de altura. Esa persona deja caer un objeto. Calcula cuándo llega al suelo y su velocidad al llegar al suelo.

[a]La *azotea* es la parte superior de un edificio cuando es plana y una persona puede estar encima de ella.

Primero dibujamos el problema y el sistema de coordenadas.

Este problema es de caída libre. Las ecuaciones son las ecuaciones del MRUA:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

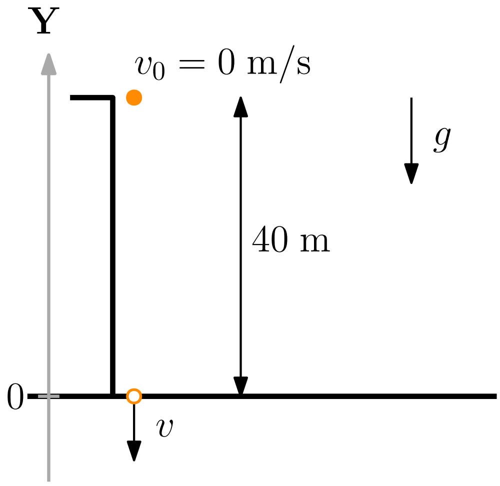


Figura 2: Problema 2.

En nuestro sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y = 40 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \\ v = 0 + (-10) \cdot t \\ a = -10 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} y = 40 - 5t^2 \\ v = -10t \\ a = -10 \end{cases}$$

El objeto llega al suelo cuando su posición es la posición del suelo:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

En nuestro sistema de coordenadas, eso es 0:

$$y = y_{\text{suelo}} = 0$$

Si sustituimos en la ecuación de la posición obtenemos una ecuación cuadrática incompleta que es fácil de resolver:

$$0 = 40 - 5t^2$$
$$5t^2 = 40$$
$$t^2 = \frac{40}{5}$$
$$t^2 = 8$$
$$t = \pm\sqrt{8}$$

Hay dos soluciones, una positiva y otra negativa. Pero la negativa habla del pasado, que no nos interesa:

$$t = \sqrt{8} \approx 2,8 \text{ s}$$

Tarda casi tres segundos en llegar al suelo.

Si ahora sustituimos ese tiempo en la ecuación de la velocidad:

$$v = -10 \cdot 2,8 = -28 \text{ m/s}$$

El signo menos indica que la velocidad cuando llega al suelo va hacia abajo (porque en nuestro sistema de coordenadas, los positivos son hacia arriba).

3. Una persona está en la azotea de un edificio de 40 metros de altura. Esa persona lanza verticalmente y hacia arriba un objeto a 12 m/s. Calcula su altura máxima, cuándo llega al suelo y su velocidad al llegar al suelo.

Primero dibujamos el problema y el sistema de coordenadas. Y en este caso, como tenemos 3 instantes diferentes, hay que ser cuidadoso:

- $t_0 = 0$ s, cuando se lanza el objeto
  - $y_0 =$ posición inicial
  - $v_0 =$ velocidad inicial
- t_1, cuando el objeto llega a la altura máxima
  - $y_1 =$ la altura máxima
  - $v_1 =$ la velocidad cuando llega a la altura máxima
- t_2, cuando el objeto llega al suelo
  - $y_2 =$ la altura del suelo
  - $v_2 =$ la velocidad cuando llega al suelo

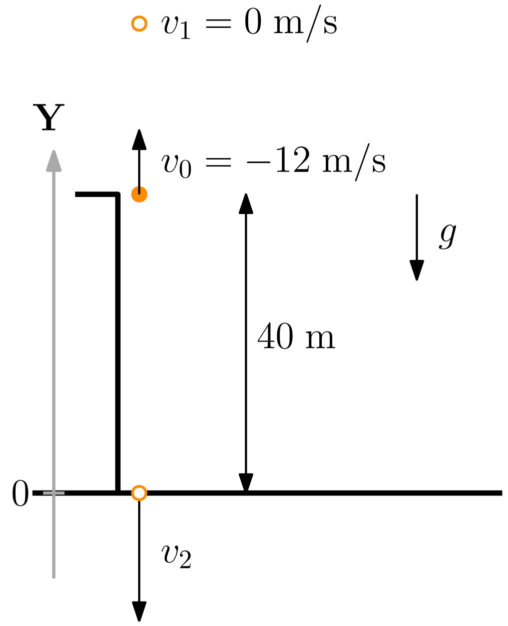


Figura 3: Problema 3.

Este problema es de tiro vertical. Las ecuaciones son las ecuaciones del MRUA:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas

$$\begin{cases} y = 40 + 12 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \\ v = 12 + (-10) \cdot t \\ a = -10 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} y = 40 + 12t - 5t^2 \\ v = 12 - 10t \\ a = -10 \end{cases}$$

a) La altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero.

Por la ecuación de la velocidad:

$$0 = 12 - 10t$$

$$10t = 12$$

$$t = \frac{12}{10}$$

$$t = 1.2 \text{ s}$$

Tarda 1,2 segundos en llegar a la altura máxima. Ahora podemos sustituir en la ecuación de la posición:

$$y = 40 + 12 \cdot 1.2 - 5 \cdot (1.2)^2$$

$$y = 47,2 \text{ m}$$

Es decir:

$$t_1 = 1,2 \text{ s}$$

$$y_1 = 47,2 \text{ m}$$

b) El objeto llega al suelo cuando su posición es la posición del suelo:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

En nuestro sistema de coordenadas, eso es 0:

$$y = 0$$

Y sustituyendo en la ecuación de la posición:

$$0 = 40 + 12t - 5t^2$$

Esto es una ecuación cuadrática completa. Se resuelven con una fórmula que puedes buscar en este mismo documento.

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 40}}{2 \cdot (-5)}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 20 \cdot 40}}{-10}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 800}}{-10}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{944}}{-10}$$

Hay dos soluciones:

$$t = \begin{array}{l} = \frac{-12+30.72}{-10} = -1,872 \text{ s} \\ = \frac{-12-30.72}{-10} = 4,272 \text{ s} \end{array}$$

La única que tiene sentido aquí es la positiva[2]. Así que tarda 4,272 segundos en llegar al suelo.

[2]Porque la negativa habla de lo que pasa *antes* de lanzar el objeto.

Si sustituimos en la ecuación de la velocidad:

$$v = 12 - 10 \cdot 4.272 = -30.72 \text{ m/s}$$

Es decir:

$$t_2 = 4.272 \text{ s}$$
$$v_2 = -30.72 \text{ m/s}$$

4. Un coche se mueve a 36 km/h en línea recta. En cierto momento, el conductor ve que hay un muro (= una pared) a 100 metros. Empieza a frenar con una aceleración de 2 m/s². ¿Consigue parar totalmente antes de chocar con el muro?

Primero dibujamos el problema y el sistema de coordenadas.

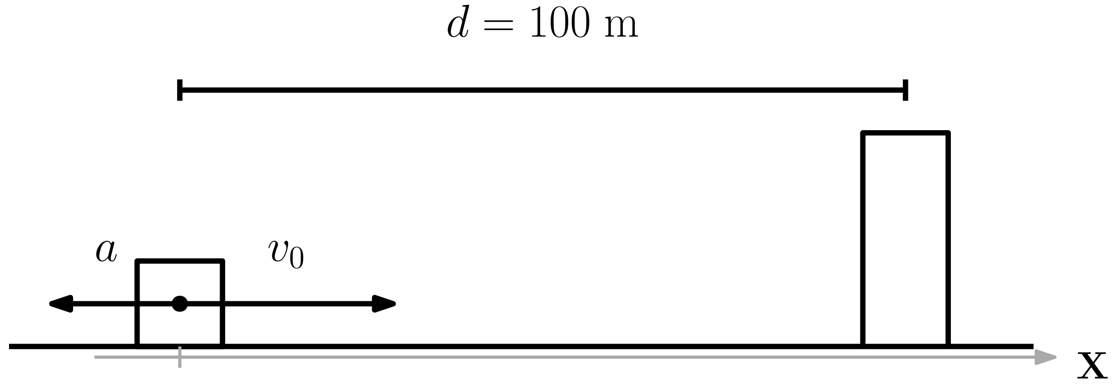


Figura 4: Problema 4.

Ahora convertimos los datos que no son del SI. La velocidad inicial es:

$$v_0 = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 10 \text{ m/s}$$

Es un MRUA y en nuestro sistema de coordenadas, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 0 + 10 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot t^2 \\ v = 10 + (-2) \cdot t \\ a = -2 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = 10t - t^2 \\ v = 10 - 2t \\ a = -2 \end{cases}$$

El coche se para completamente cuando su velocidad es cero (suponiendo que no hay muro). Usando la ecuación de la velocidad:

$$0 = 10 - 2t$$
$$2t = 10$$
$$t = \frac{10}{2}$$
$$t = 5 \text{ s}$$

La posición del coche es:

$$x = 10 \cdot 5 - 5^2 = 50 - 25 = 25 \text{ m}$$

Es decir, ¡consigue frenar a tiempo! Porque x es menor que la posición del muro.

5. Un coche se mueve a 36 km/h en línea recta. En cierto momento, el conductor ve que hay un muro (= una pared) a 10 metros. Empieza a frenar con una aceleración de 2 m/s². ¿Consigue parar totalmente antes de chocar con el muro? En caso negativo, ¿qué aceleración debería usar?

Es el mismo problema que el anterior. Solamente cambia la distancia al muro.

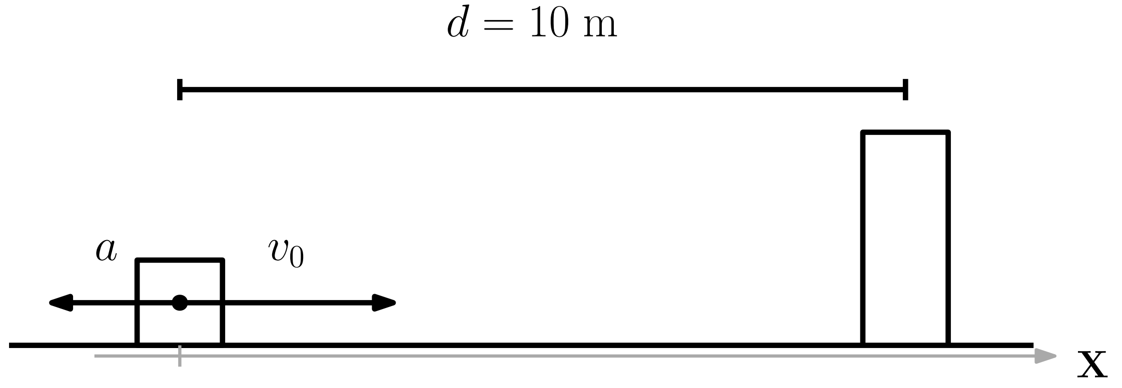


Figura 5: Problema 5.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} x = 10t - t^2 \\ v = 10 - 2t \\ a = -2 \end{cases}$$

Y el coche pararía a 25 metros después de empezar a frenar como habíamos obtenido en el problema anterior. ¡Chocaría con el muro antes de conseguir frenar completamente!

Tiene que usar una aceleración mayor. Pero, ¿cuál? No conocemos esa aceleración, vamos a llamarla simplemente a y entonces las nuevas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} x &= 10t + \tfrac{1}{2}at^2 \\ v &= 10 + at \end{aligned}$$

Queremos que la velocidad sea cero cuando la posición del coche coincide con la posición del muro. Las dos ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned} 10 &= 10t + \tfrac{1}{2}at^2 \\ 0 &= 10 + at \end{aligned}$$

Por la segunda ecuación, sabemos que:

$$at = -10$$

pero la primera ecuación se puede escribir:

$$10 = 10t + \frac{1}{2}at \cdot t$$

Sustituyendo:

$$10 = 10t + \frac{1}{2}(-10) \cdot t$$

$$10 = 10t - 5t$$

$$10 = 5t$$
$$5t = 10$$
$$t = \frac{10}{5}$$
$$t = 2 \text{ s}$$

Como sabemos que:

$$at = -10$$

si colocamos el valor del tiempo:

$$a \cdot 2 = -10$$
$$2a = -10$$
$$a = \frac{-10}{2}$$
$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

6. Un coche se mueve a 10 m/s en línea recta. En cierto momento, el conductor ve que hay un muro (= una pared) a 100 metros. Empieza a frenar con una aceleración de 2 m/s^2. ¿Consigue parar totalmente antes de chocar con el muro?

Este problema ¡es el problema 4!

Pero vamos a resolverlo de una manera diferente. Vamos a usar la siguiente ecuación del MRUA:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$
$$0^2 - 10^2 = 2(-2)(x - 0)$$
$$-100 = -4x$$
$$4x = 100$$
$$x = \frac{100}{4}$$
$$x = 25 \text{ m}$$

Como la distancia es menor que la distancia al muro, consigue parar totalmente antes de chocar con el muro.

Como ves, en este problema, usar la fórmula

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

es más rápido que usar las ecuaciones de movimiento. Pero las ecuaciones de movimiento son **equivalentes** a esta fórmula. Por eso hemos resuelto el problema de dos maneras.

7. Un coche se mueve a 10 m/s en línea recta. En cierto momento, el conductor ve que hay un muro (= una pared) a 10 metros. Empieza a frenar con una aceleración de 2 m/s^2. ¿Consigue parar totalmente antes de chocar con el muro? En caso negativo, ¿qué aceleración debería usar?

¡Es el problema 5! Vamos a usar la fórmula del problema anterior:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$0^2 - 10^2 = 2a \cdot (10 - 0)$$
$$-100 = 20a$$
$$20a = -100$$
$$a = \frac{-100}{20}$$
$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

Llegamos a la misma solución.

8. Una moto que primero está en la posición $x_0 = 100$ m con la velocidad $v_0 = 20$ m/s. Después está en la posición $x_1 = 300$ m con una velocidad $v_1 = 10$ m/s. ¿Cuál es la aceleración?

Si usamos la ecuación:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$$
$$10^2 - 20^2 = 2a(300 - 100)$$
$$100 - 400 = 2a(200)$$
$$-300 = 2a(200)$$
$$-300 = 400a$$
$$400a = -300$$
$$a = -\frac{300}{400}$$
$$a = -\frac{3}{4}$$
$$a = -0.75 \text{ m/s}^2$$

9. Un pozo[a] tiene una profundidad desconocida. Se deja caer una piedra en el pozo. Después de 4 segundos podemos oír que golpea el fondo del pozo. Si consideras que la velocidad del sonido es infinita, ¿cuál es la profundidad del pozo?

[a] **pozo**: *studňa*

Primero dibujamos el problema y el sistema de coordenadas.

Observa que ahora hemos escogido un sistema de referencia en el que los positivos son hacia abajo. Pero la caída de la piedra es un caso de MRUA (caída libre), por lo que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

En nuestro sistema de referencia:

$$\begin{cases} y = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \\ v = 0 + 10 \cdot t \\ a = 10 \end{cases}$$

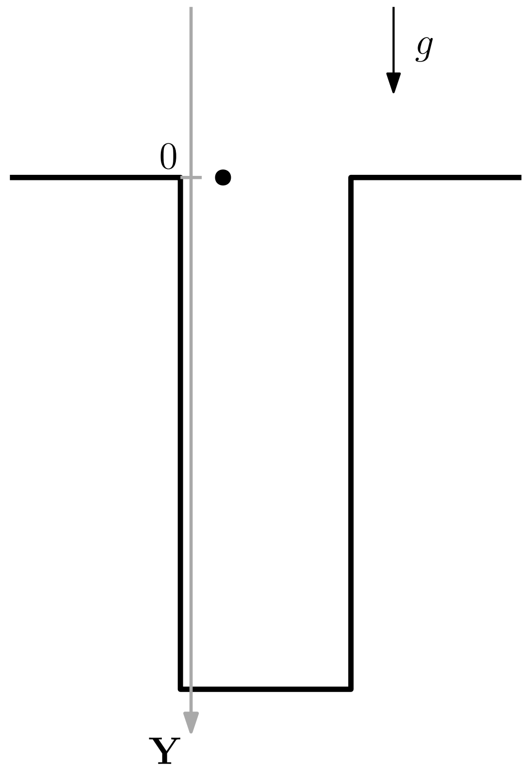


Figura 6: Problema 9.

Es decir:

$$\begin{cases} y = 5t^2 \\ v = 10t \\ a = 10 \end{cases}$$

Si tarda 4 segundos en llegar al suelo, podemos sustituir en la ecuación de movimiento de la posición:

$$y = 5 \cdot 4^2$$

$$y = 5 \cdot 16$$

$$y = 80 \text{ m}$$

La profundidad del pozo es de 80 metros.

10. Un pozo[a] tiene una profundidad desconocida. Se deja caer una piedra en el pozo. Después de 4 segundos podemos oír que golpea el fondo del pozo. Si consideras que la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿cuál es la profundidad del pozo?

[a]**pozo**: *studňa*

Es el mismo problema que el anterior. Pero ahora nosotros no oímos la piedra en el instante en el que llega al suelo. Lo oímos después; el sonido tarda un tiempo en subir.

Las ecuaciones de la piedra serán:

$$\begin{cases} y_{\text{piedra}} = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \\ v_{\text{piedra}} = 0 + 10 \cdot t \\ a_{\text{piedra}} = 10 \end{cases}$$

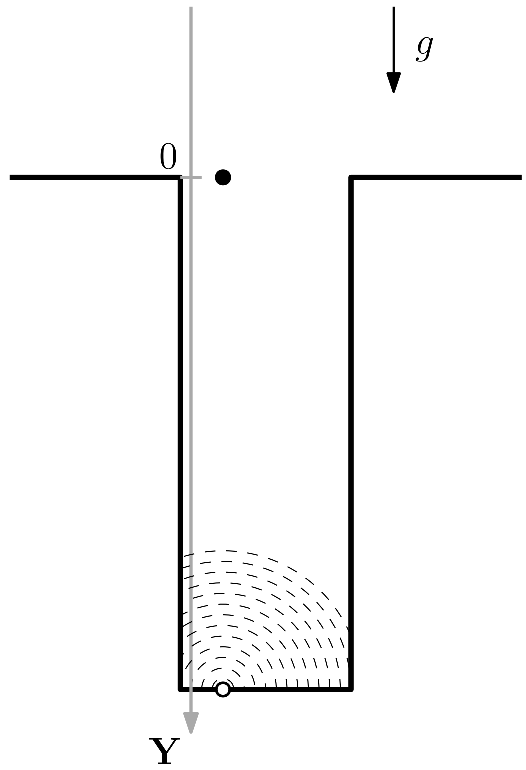


Figura 7: Problema 9.

Si suponemos que el sonido se mueve con un MRU y llamamos p a la profundidad que no conocemos:

$$\begin{cases} y_{\text{sonido}} = p - 340 \cdot t \\ v_{\text{sonido}} = -340 \\ a_{\text{sonido}} = 0 \end{cases}$$

Vamos a llamar t_p al tiempo que tarda en caer la piedra. Y vamos a llamar t_s al tiempo que tarda en subir el sonido. Cuando la piedra llega al fondo del pozo:

$$p = 5t_p^2$$

Y el sonido llega arriba:

$$0 = p - 340t_s$$

Y sabemos que el tiempo que tarda la piedra en bajar más el tiempo que tarda el sonido en subir es igual a 4 segundos:

$$t_p + t_s = 4$$

¡Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas!

$$\begin{cases} p = 5t_p^2 \\ 0 = p - 340t_s \\ t_p + t_s = 4 \end{cases}$$

Podemos unir las dos primeras en una sola:

$$\begin{gathered} 5t_p^2 = 340t_s \\ t_p + t_s = 4 \end{gathered}$$

Podemos dividir entre 5 la primera ecuación:

$$\begin{gathered} t_p^2 = 68t_s \\ t_p + t_s = 4 \end{gathered}$$

Ahora podemos despejar t_s en la segunda:

$$t_p^2 = 68t_s$$
$$t_s = 4 - t_p$$

Y mezclar las dos:

$$t_p^2 = 68 \cdot (4 - t_p)$$

$$t_p^2 = 272 - 68t_p$$

$$t_p^2 + 68t_p - 272 = 0$$

Es una ecuación cuadrática que se puede resolver con la fórmula.

Tiene dos soluciones que son -71.8 segundos y 3.8 segundos. La solución negativa no tiene sentido aquí, así que la piedra tarda 3.8 segundos en caer.

Y el sonido tarda el siguiente tiempo en subir:

$$t_s = 4 - t_p = 4 - 3.8 = 0.2 \text{ s}$$

Si calculamos la profundidad con la fórmula:

$$p = 5t_p^2$$

$$p = 5 \cdot (3.8)^2$$

$$p = 72,2 \text{ m}$$

El resultado es casi idéntico al primer cálculo. Eso es así porque el pozo no es muy profundo si lo comparamos con la velocidad del sonido.

11. Un coche sale desde Bratislava en dirección a Nové Mesto nad Váhom a 120 km/h en el mismo instante en el que otro coche sale de Nové Mesto nad Váhom hacia Bratislava a 90 km/h. ¿Dónde se encuentran y cuándo? (Suponemos que la distancia entre ambas ciudades es de 100 km.)

Este problema es ligeramente diferente de los anteriores porque no hay un punto material. ¡Hay dos puntos materiales!

- El coche que sale de Nové Mesto nad Váhom, al que llamaremos A.
- El coche que sale de Bratislava, al que llamaremos B.

Por lo tanto, tendremos que escribir ecuaciones de movimiento para los dos.

Pero antes, debemos dibujar el problema y el sistema de coordenadas.

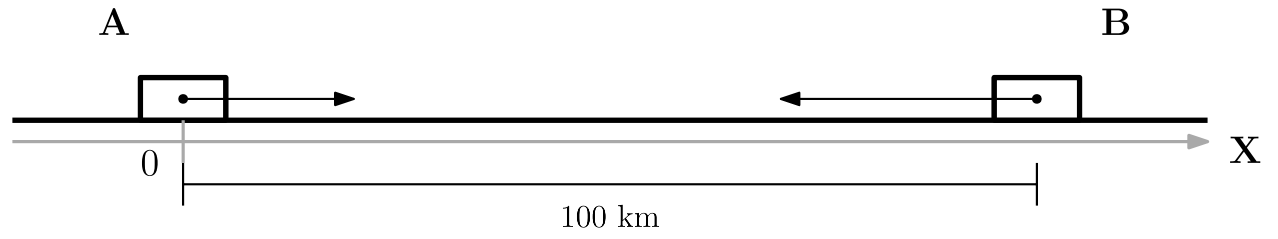


Figura 8: Problema 11.

Ahora, como tenemos dos puntos materiales, debemos usar etiquetas para distinguir sus posiciones, sus velocidades y sus aceleraciones. Vamos a usar el subíndice A para el que sale de Nové Mesto y B para el que sale de Bratislava.

Los dos movimientos son MRU:

$$\begin{cases} x_A = x_{A0} + v_A \cdot t \\ v_A = v_{A0} \\ a_A = 0 \\ \hline x_B = x_{B0} + v_B \cdot t \\ v_B = v_{B0} \\ a_B = 0 \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} x_A = 0 + 90 \cdot t \\ v_A = 90 \\ a_A = 0 \\ \hline x_B = 100 - 120 \cdot t \\ v_B = -120 \\ a_B = 0 \end{cases}$$

Tienes que observar que...

ALUMNO: ¡Pero no ha cambiado las unidades!

PROFESOR: `[Gritando.]` ¡Ah! Me has asustado. No sabía que aún había alumnos prestando atención.

ALUMNO: Bueno, yo sí. No sé si alguien más.

PROFESOR: ¿Qué decías de las unidades?

ALUMNO: Que no ha cambiado los datos a las unidades del SI.

PROFESOR: Sí. Es verdad. Pero en este caso, puedo usar un sistema de unidades en el que la unidad de la distancia es el kilómetro, la unidad del tiempo es la hora y la unidad de la velocidad es el kilómetro partido hora.

ALUMNO: ¡Ah, ya veo! ¿Pero podría hacer el problema cambiando las unidades?

PROFESOR: Sí, claro.

Las ecuaciones que realmente nos interesan son las de la posición:

$$\begin{aligned} x_A &= 90t \\ x_B &= 100 - 120t \end{aligned}$$

Y los dos coches **se encuentran** cuando tienen la misma posición:

$$x_A = x_B$$

Es decir:

$$90t = 100 - 120t$$

$$90t + 120t = 100$$

$$210t = 100$$

$$t = \frac{100}{210}$$

$$t = \frac{10}{21} \text{ h}$$

Y ya tenemos cuánto tardan en encontrarse.

ALUMNO: ¿Pero es necesario dejarlo como fracción? ¿No puedo ponerlo en forma decimal?

PROFESOR: Puedes, pero no es necesario. Si dejas el resultado como fracción, para mí es correcto.

$$t \approx 0.476 \text{ h}$$

Si sustituimos en la primera ecuación:

$$x_A = 90 \cdot 0.476 = 42.84 \text{ km}$$

Y como las posiciones son iguales:

$$x_B = 42.84 \text{ km}$$

Es decir, se encuentran a unos 43 km de Nové Mesto (unos 57 kilómetros de Bratislava).

Y si queremos el tiempo en minutos:

$$t \approx 0.476 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 28,56 \text{ min}$$

12. Un coche sale desde Bratislava en dirección a Nové Mesto nad Váhom a 70 km/h veinte minutos más tarde que otro coche que sale de Nové Mesto nad Váhom hacia Bratislava a 90 km/h. ¿Dónde se encuentran y cuándo? (Suponemos que la distancia entre ambas ciudades es de 100 km.)

Aquí podemos separar el problema en dos partes:

- primero se mueve solamente el coche A (el de Nové Mesto)
- después se mueven los dos

Y para eso vamos a dibujar el problema dos veces:

- la primera muestra el instante en el que el primer coche empieza a moverse
- la segunda muestra cuando el segundo coche empieza a moverse

1) Vamos a calcular dónde está A cuando han pasado 20 minutos.

   Su ecuación de movimiento en este sistema de coordenadas es:

$$x_A = 0 + 90t$$

   Como estamos usando km, h y km/h, debemos convertir los minutos a horas.

$$t = 20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

   Sustituyendo:

$$x_A = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30 \text{ km}$$

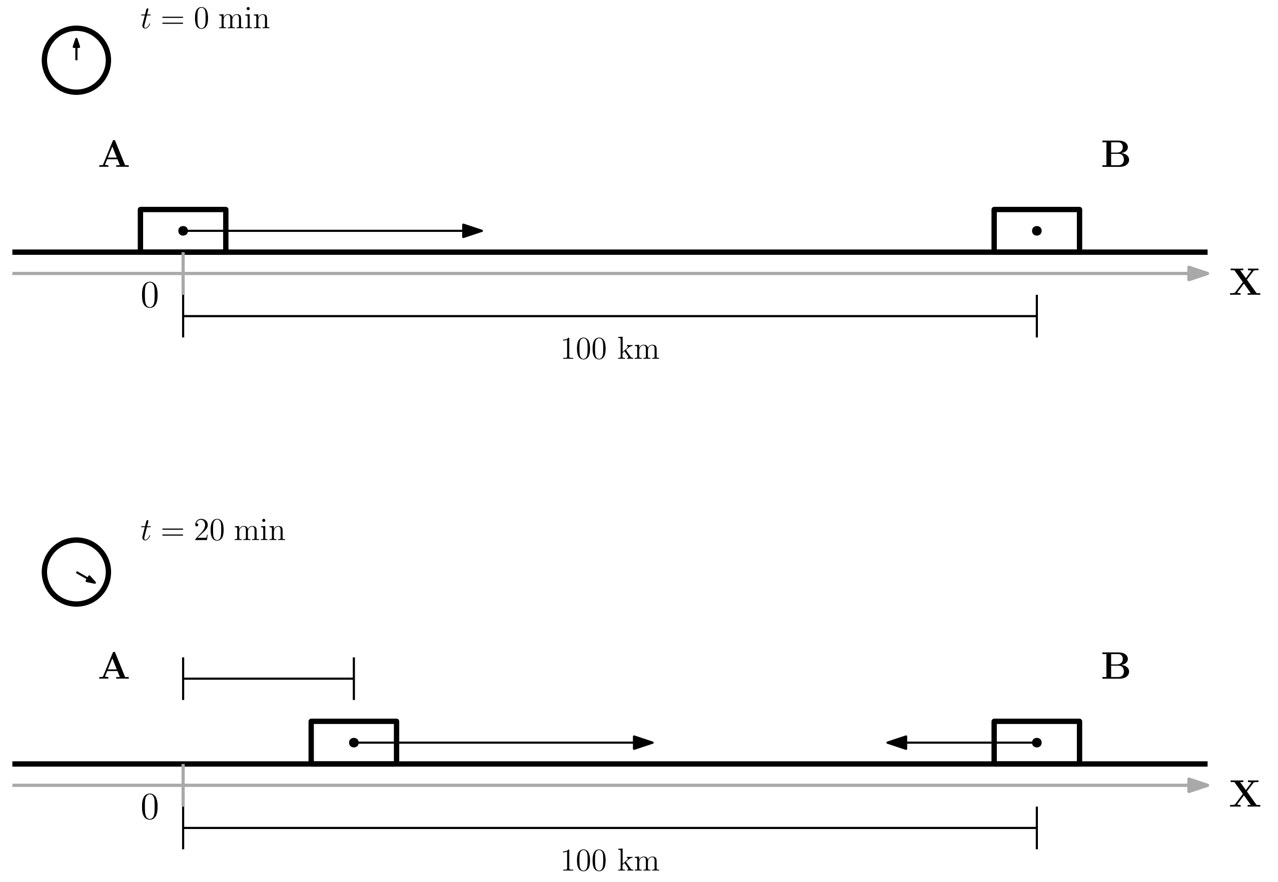


Figura 9: Problema 12.

2) Ahora vamos a escribir las ecuaciones para el mismo sistema de coordenadas. Pero ahora el tiempo empieza a contar desde cero de nuevo:

$$x_A = 30 + 90t$$

$$x_B = 100 - 70t$$

Se encuentran cuando sus posiciones son iguales:

$$x_A = x_B$$

$$30 + 90t = 100 - 70t$$

$$70t + 90t = 100 - 30$$

$$160t = 70$$

$$t = \frac{70}{160}$$

$$t = 0.4375 \text{ h}$$

Para saber dónde, sustituimos en las ecuaciones de moviento. Por ejemplo, en la primera, que parece más sencilla:

$$x_A = 30 + 90 \cdot 0.4375$$

$$x_A = 69,375 \text{ km}$$

Es decir: se encuentran a unos 69 km de Nové Mesto. Y 20 minutos + 0.4375 horas desde que el primero salió de Nové Mesto. 0.4375 horas después de que el segundo saliese desde Bratislava. 0.4375 horas son 26,25 minutos. Es decir, pasan 46,25 minutos desde que el primer coche sale desde Nové Mesto hasta que se encuentran.

13. Una persona está en la azotea de un edificio de 30 metros y deja caer una moneda de 1 euro y un teléfono móvil de 200 gramos. ¿Cuál de los dos llega antes al suelo?

Aquí no es necesario dibujar el problema, ni escoger el sistema de coordenadas, ni escribir las ecuaciones de movimiento.

Aristóteles pensaba que los objetos que tienen más masa caen más rápido que los objetos que tienen más masa. Pero Aristóteles estaba equivocado.

Los dos objetos llegan al mismo tiempo al suelo.

No es la masa del objeto lo que hace que un objeto caiga más rápido que otro. Son la forma y el tamaño lo que a veces hace que dos objetos caigan a distinta velocidad.

Galileo Galileo, uno de los científicos más importantes de la Historia demostró experimentalmente que la masa no es lo que importa con una serie de experimentos.

14. Diseña un "experimento" sencillo que demuestre que la caída de los cuerpos no depende de su masa.

(Ponemos entre comillas la palabra *experimento* porque en realidad no vamos a tomar medidas. Entonces es más bien una *experiencia demostrativa.*)

1. Cogemos dos folios de papel A4 que tienen el mismo tamaño y la misma forma y los dejamos caer en el mismo instante desde la misma altura.

   Se observa que los dos caen *aproximadamente* en el mismo instante.

2. Arrugamos uno de los folios hasta que queda convertido en una bola de papel. Dejamos caer el folio arrugado y el folio sin arrugar desde la misma altura en el mismo instante.

   Se observa que el folio arrugado cae **antes** que el folio sin arrugar.

   A pesar de que tienen la misma masa, el folio arrugado cae antes.

3. Cogemos otro folio y lo unimos al folio sin arrugar. Arrugamos los dos folios juntos hasta que sean una bola del mismo tamaño y forma que el folio que habíamos arrugado antes. Los dejamos caer.

   Se observa que el folio arrugado cae *aproximadamente* en el mismo instante que los dos folios arrugados juntos.

   A pesar de que los dos folios tienen el doble de masa que el folio arrugado, todos caen a la vez.

Esta pequeña demostración sirve para ver que la caída de los cuerpos no depende de la masa de los cuerpos.

15. Si no hay aire, dos objetos tienen que caer a la vez sin que importe su masa, su tamaño o su forma. Es la resistencia del aire a que algo se mueva dentro de él lo que hace que la caída dependa de la forma y el tamaño de los objetos.
Podemos conseguir vacío en laboratorio para comprobar esto. Pero en agosto de 1971, la misión Apollo 15 hizo una pequeña demostración con un martillo[a] y una pluma[b] de un pájaro. El astronauta David Scott dejó caer los dos y, como en la Luna apenas hay atmósfera, los dos llegaron a la vez al suelo.

Puedes ver el vídeo en:
https://moon.nasa.gov/resources/331/the-apollo-15-hammer-feather-drop/
O en:
https://www.youtube.com/watch?v=oYEgdZ3iEKA
¿Puedes diseñar un experimento similar que sea fácil de hacer en casa?

[a] **martillo:** kladivo.
[b] **pluma:** pero.

Conseguir el vacío es más complicado de lo que puede parecer.

Pero podemos hacer lo siguiente:

1. Conseguimos una pluma y un martillo.
2. Conseguimos dos cajas de zapatos idénticas.
3. Metemos la pluma en la primera caja y el martillo en la segunda caja.
4. Dejamos caer las dos cajas.

Se observa que las dos llegan al suelo a la vez.

No es tan espectacular como el experimento del Apollo 15 ni es exactamente equivalente, pero es más barato. ;)

16. Calcula la aceleración de la gravedad g en la Luna si, según el vídeo del Apollo 15, la altura desde la que el comandante Scott deja caer la pluma y el martillo es aproximadamente de 1.6 m y el tiempo que tarda es aproximadamente de 1.41 s.

El movimiento de esos objetos es un MRUA; es caída libre.

No vamos a dibujar el sistema de coordenadas, pero podemos suponer que el eje es vertical, con el cero en el suelo de la Luna y los positivos hacia arriba. Si el eje se llama Y, la ecuación de movimiento de la posición es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Como la velocidad inicial es cero:

$$y = y_0 + \frac{1}{2}at^2$$

Sabemos que la posición final es 0 (el suelo), la inicial es 1.6 m y el tiempo es 1.41 s:

$$0 = 1.6 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1.41^2$$

$$-1.6 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1.41^2$$

$$-1.6 \cdot 2 = a \cdot 1.41^2$$

$$\frac{-1.6 \cdot 2}{1.41^2} = a$$

$$a = \frac{-1.6 \cdot 2}{1.41^2}$$

$$a \approx -1.6 \text{ m/s}^2$$

La aceleración de la gravedad en la Luna es aproximadamente:

$$g \approx -1.6 \text{ m/s}^2$$

17. Si dejamos caer un objeto desde una altura de 2 metros, ¿cuál es la velocidad del objeto cuando llega al suelo?

ALUMNO: ¡Es cero!

PROFESOR: ¡No!

ALUMNO: ¿No?

PROFESOR: Por supuesto que no. Cuando te caes, ¿te haces daño?

ALUMNO: Depende de la altura y la manera de caer, pero sí. Normalmente sí.

PROFESOR: Eso ocurre porque, cuando caes, tu velocidad crece cuando te acercas al suelo. Es decir, es cada vez más grande y cuando llega al suelo, llega con una gran velocidad.

ALUMNO: Pero en el suelo se para.

PROFESOR: Sí. En el suelo se para. Pero antes se está moviendo a una gran velocidad. Pasa de tener una aceleración hacia abajo (la de la gravedad) a una aceleración hacia arriba (debida al suelo). Y es esa segunda aceleración la que para el objeto.

ALUMNO: Oh. Entonces… en el instante en el que llega al suelo, se mueve muy rápido. Y en muy poco tiempo pasa de moverse muy rápido a estar quieto.

PROFESOR: Eso es. El objeto está quiero después de tocar el suelo. No cuando en el instante en el que toca el suelo por primera vez.

ALUMNO: ¿Y la aceleración que lo para es grande?

PROFESOR: Claro. Porque has cambiado mucho la velocidad en muy poco espacio (y en muy poco tiempo). Y por eso cuando caemos o cuando chocamos, nos duele. Por la aceleración que nos para.

ALUMNO: Entonces las caídas son peligrosas no por la velocidad, sino por la parada rápida.

PROFESOR: Exactamente.

18. Si dejamos caer un objeto desde una altura de 2 metros, ¿cuál es la velocidad del objeto cuando llega al suelo?

Ahora vamos a resolver este problema.

Suponemos que el sistema de coordenadas es un eje vertical Y con el origen de coordenadas en el suelo y los positivos hacia arriba. (Acabamos de *"dibujar"* mentalmente el problema.)

El movimiento es un MRUA (caída libre):

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$y = 2 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9.81) \cdot t^2$$

$$v = 0 + (-9.81) \cdot t$$

Como ves, aquí hemos escogido que la aceleración de la gravedad es 9.81 m/s².

$$y = 2 - 4.905t^2$$

$$v = -9.81t$$

Cuando llega al suelo, $y = y_{\text{suelo}} = 0$:

$$0 = 2 - 4.905t^2$$

$$4.905t^2 = 2$$

$$t^2 = \frac{2}{4.905} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{4.905}}$$

Solamente nos interesa la solución positiva, porque la negativa es sobre el pasado:

$$t = \sqrt{\frac{2}{4.905}} \approx 0.639 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$v = -9.81 \cdot 0.639$$

$$v = -6,27 \text{ m/s}$$

19. Si dejamos caer un objeto desde una altura de 2 metros en la Luna, ¿cuál es la velocidad del objeto cuando llega al suelo? Dato: $g_{\text{Luna}} = 1.6$ m/s².

Es exactamente como el problema anterior. Solamente cambia la aceleración.

Suponemos que el sistema de coordenadas es un eje vertical Y con el origen de coordenadas en el suelo y los positivos hacia arriba.

En este sistema de coordenadas, las ecuaciones de este MRUA son::

$$y = 2 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-1.6) \cdot t^2$$

$$v = 0 + (-1.6) \cdot t$$

Es decir:

$$y = 2 - 0.8t^2$$

$$v = -1.6t$$

Llega al suelo cuando $y = 0$ en nuestro sistema de coordenadas:

$$0 = 2 - 0.8t^2 \Rightarrow 0.8t^2 = 2$$

$$t^2 = \frac{2}{0.8} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{0.8}}$$

En este problema, solamente nos interesa la solución positiva:

$$t = \sqrt{\frac{2}{0.8}} \approx 1.58 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$v = -1.6 \cdot 1.58 = -2.53 \text{ m/s}$$

20. Dejamos caer un objeto desde una altura de 100 metros. La aceleración de la gravedad es 10 m/s^2 y el sistema de coordenadas es un eje vertical con el cero en el punto desde el que dejamos caer el objeto y los positivos hacia abajo. Haz una tabla que indique la posición y la velocidad del objeto en cada segundo.

Las ecuaciones de este movimiento en el sistema de referencia que nos dan son:

$$\begin{array}{l} y = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \\ v = 0 + 10t \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} y = 5t^2 \\ v = 10t \end{array}$$

Solamente tenemos que calcular la posición y la velocidad en cada segundo:

- $t = 0$ s
$$y = 0 \text{ m}; v = 0 \text{ m/s}$$
- $t = 1$ s
$$y = 5 \cdot 1^2 = 5 \text{ m}$$
$$v = 10 \cdot 1 = 10 \text{ m/s}$$
- $t = 2$ s
$$y = 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$
$$v = 10 \cdot 2 = 20 \text{ m/s}$$
- $t = 3$ s
$$y = 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ m}$$
$$v = 10 \cdot 3 = 30 \text{ m/s}$$
- $t = 4$ s
$$y = 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ m}$$
$$v = 10 \cdot 4 = 40 \text{ m/s}$$
- $t = 5$ s
$$y = 5 \cdot 5^2 = 125 \text{ m}$$
$$v = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m/s}$$

Observa que cuando pasan 5 segundos, el objeto está por debajo del suelo (en este sistema de coordenadas, el suelo tiene la posición $y = 100$ m). Así que llega al suelo en algún momento entre los 4 y los 5 segundos.

La tabla sería:

t (s)	y (m)	v (m/s)
0	0	0
1	5	10
2	20	20
3	45	30
4	80	40

Siempre que hagas una tabla que relaciona valores de cosas, indica las unidades entre paréntesis.

21. Dibuja las gráficas y-t y v-t para la tabla del problema anterior.

Para la tabla:

t (s)	y (m)	v (m/s)
0	0	0
1	5	10
2	20	20
3	45	30
4	80	40

Es fácil dibujar las dos gráficas.

También es sencillo ver que los puntos de la gráfica y-t están dentro de una línea curva que es una parábola. Y los puntos de la gráfica v-t están dentro de una línea recta.

Observa lo siguiente:

- los ejes tienen etiquetas con el símbolo de la magnitud y con las unidades entre paréntesis

  Una buena gráfica siempre indica las magnitudes de los ejes y las unidades.

- las marcas de la escala graduada en cada eje tienen etiquetas que indican los números

  No es necesario que todas las marcas estén etiquetadas, pero debe haber las suficientes marcas para saber qué número es cada marca.

- las escalas del eje de abscisas y del eje de ordenadas son diferentes

  Podemos hacer esto porque no es un sistema de coordenadas para decir posiciones de objetos en 2D. Es decir, porque cada eje mide unidades diferentes.

- hay unas líneas discontinuas (unas *guías*) que sirven para saber mejor los números que identifican cada punto

  Esas guías no son obligatorias, pero a veces ayudan a ver mejor dónde está cada punto.

  En lugar de esas guías, se puede hacer una *rejilla* (= una *malla*) que llene toda la gráfica. Las líneas de la rejilla serían paralelas a los ejes, discontinuas, de un color claro y pasarían por las marcas de la escala graduada.

22. Se lanza un objeto verticalmente y hacia abajo desde la azotea de un edificio de 50 metros de altura. La velocidad inicial del objeto es de 2 metros por segundo (metros partido segundo). Encuentra la velocidad que tiene cuando llega al suelo.

Dibujamos el problema y el sistema de coordenadas.

Las ecuaciones son las de un MRUA:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas es:

$$\begin{cases} y = 50 - 2t - 5t^2 \\ v = -2 - 10t \\ a = -10 \end{cases}$$

Llega al suelo cuando:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

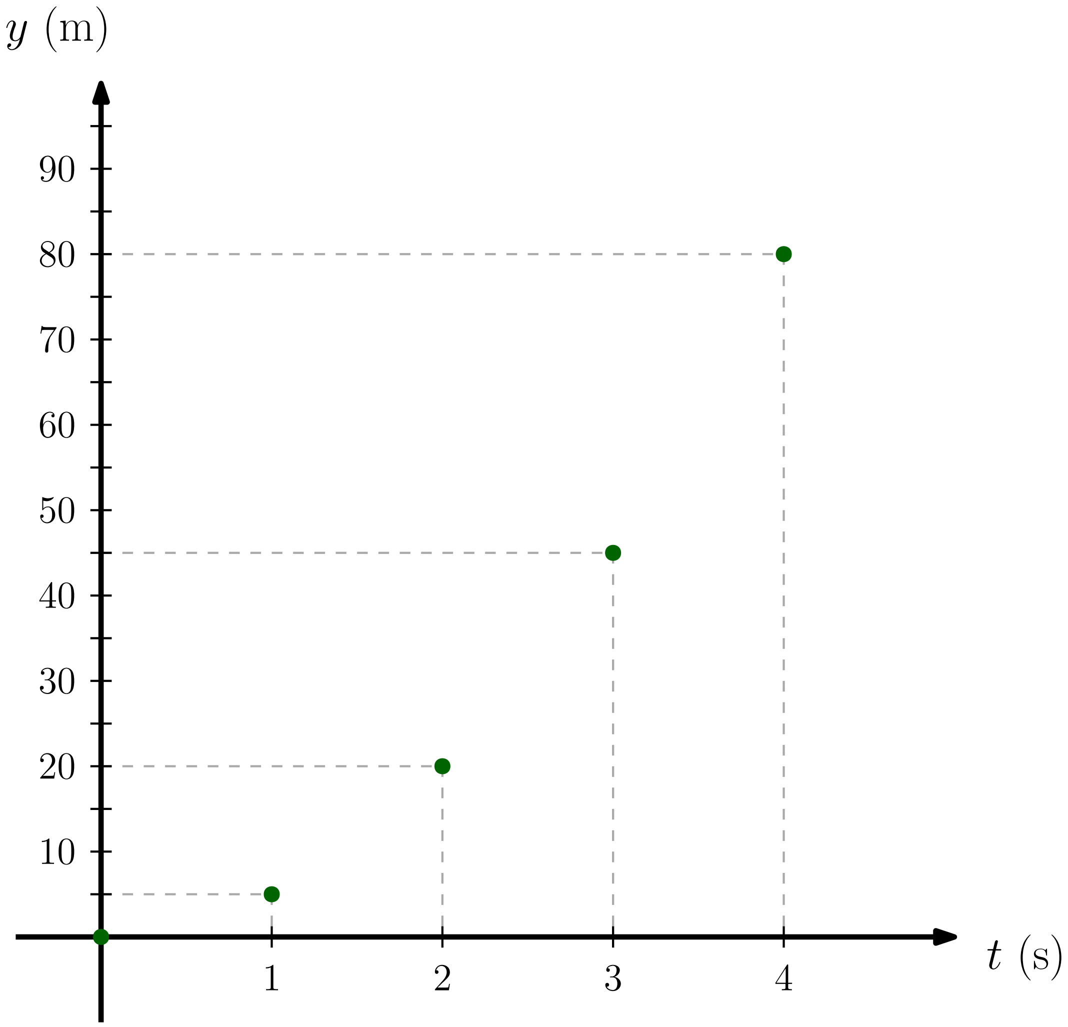


Figura 10: Gráfica y-t. Observa que en las etiquetas de los ejes hemos indicado la magnitud y, entre paréntesis, las unidades en las que se mide. Además, las escalas de los dos ejes son diferentes entre sí. Podemos hacer las escalas diferentes cuando los dos ejes son magnitudes diferentes.

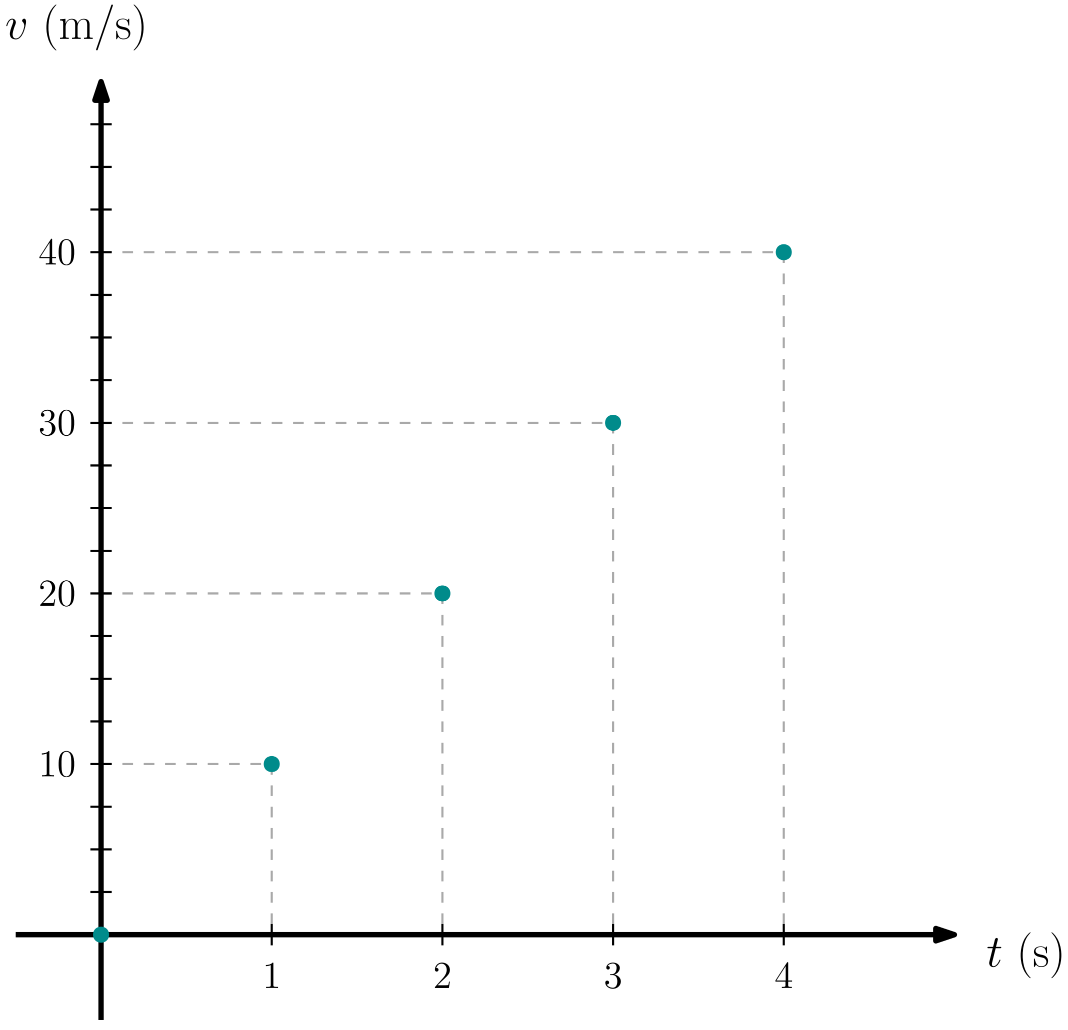


Figura 11: Gráfica v-t.

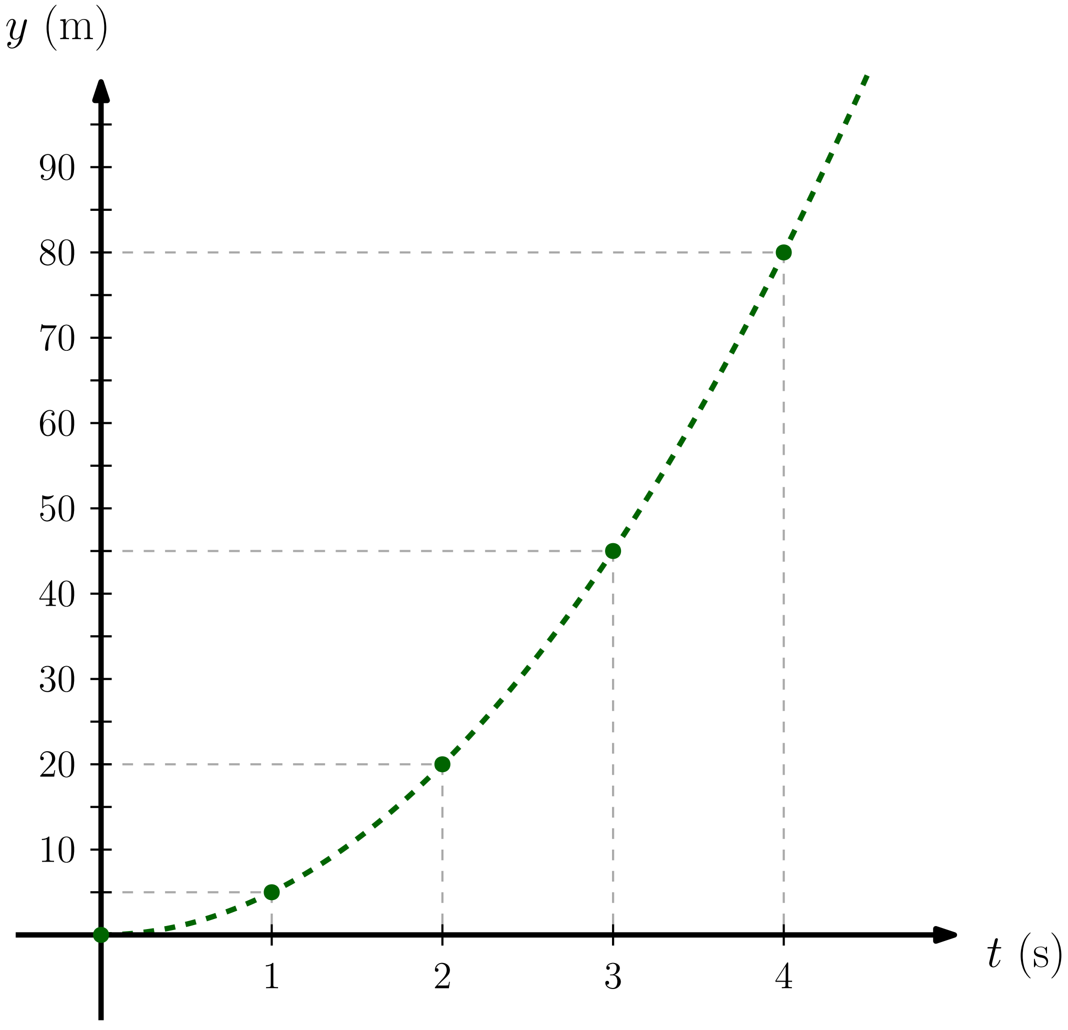


Figura 12: Gráfica y-t. Si calculásemos más puntos, obtendríamos la curva que une los puntos que hemos calculado. Ese tipo de curva se llama **parábola**.

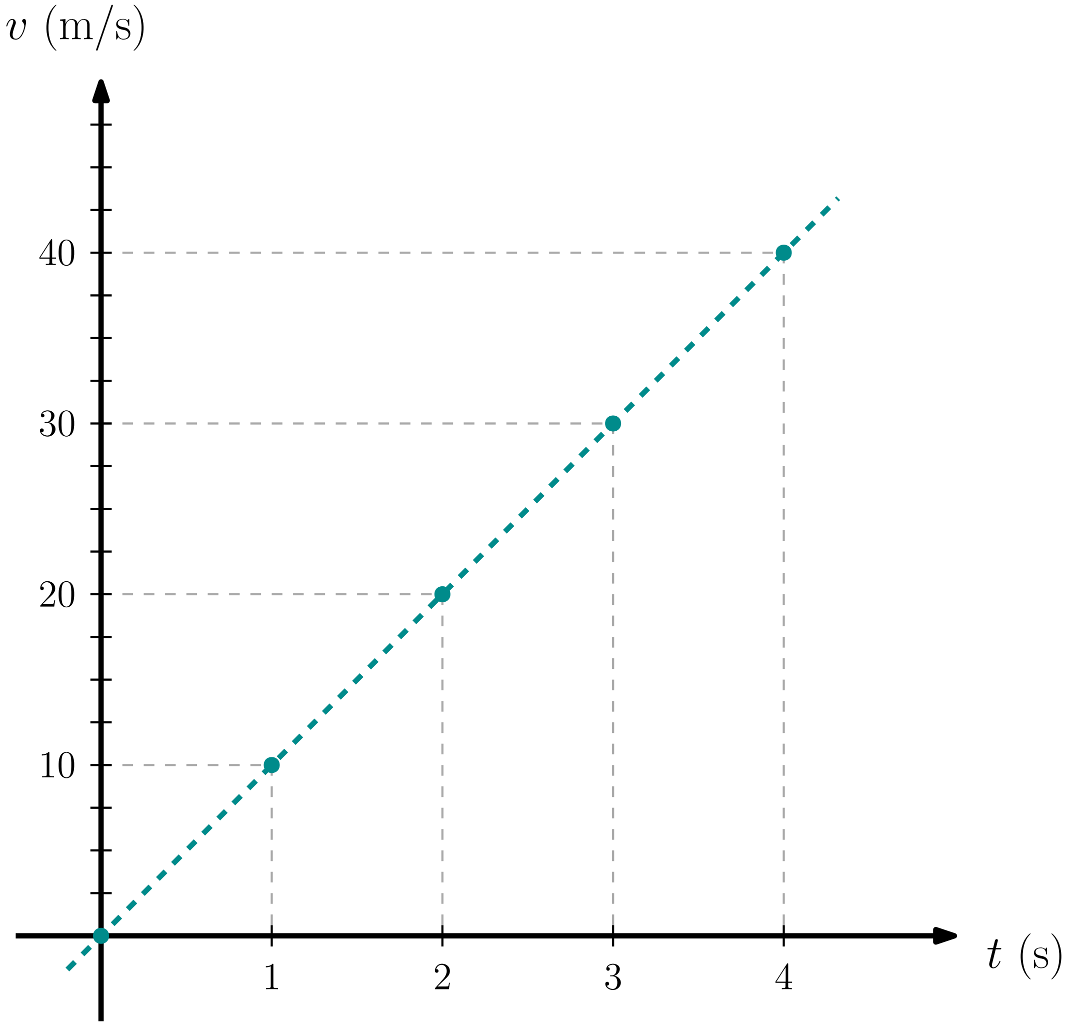


Figura 13: Gráfica v-t. Si calculásemos más puntos, obtendríamos la línea recta que une los puntos que hemos calculado.

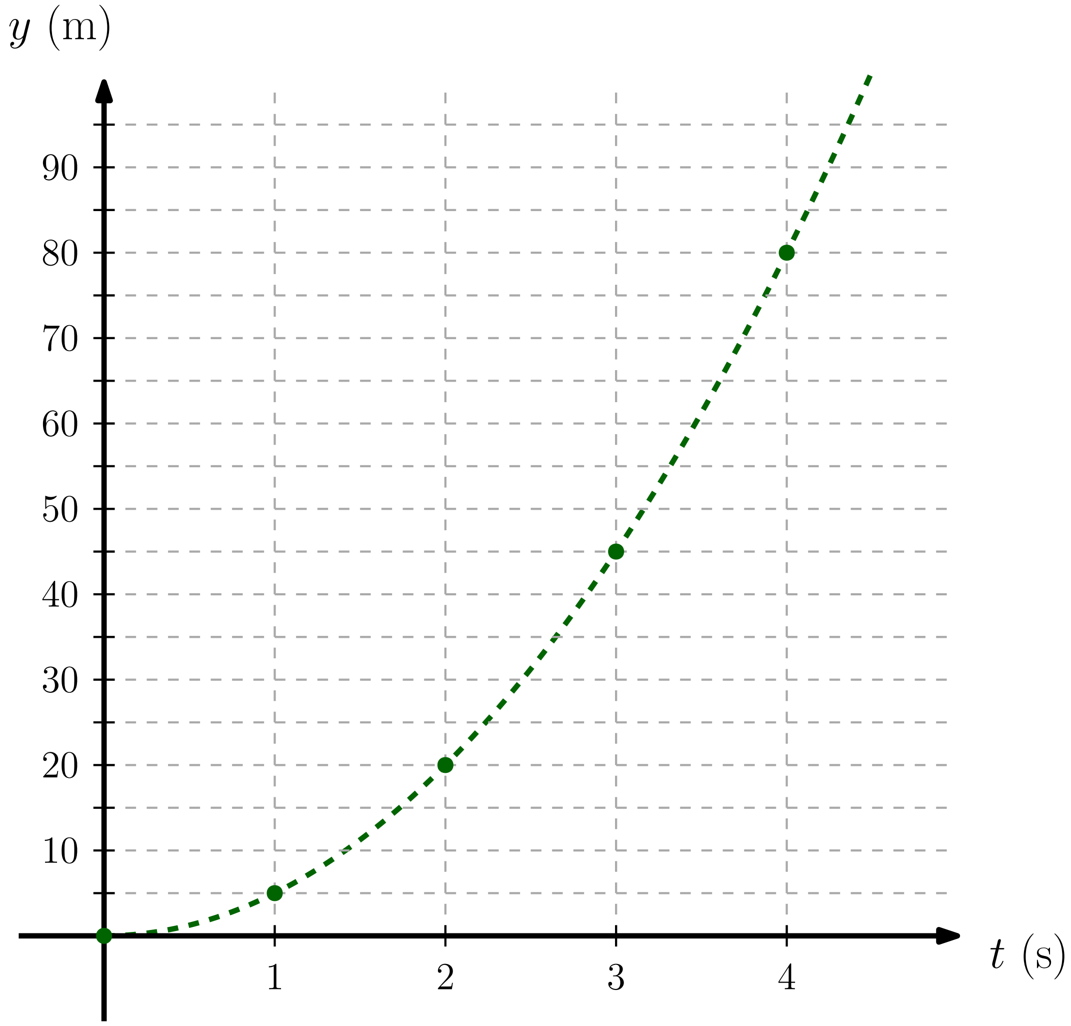


Figura 14: Gráfica y-t. En esta versión de la gráfica, hay una rejilla (= una malla) que puede ayudar a encontrar los valores de y y t para cada punto de la parábola.

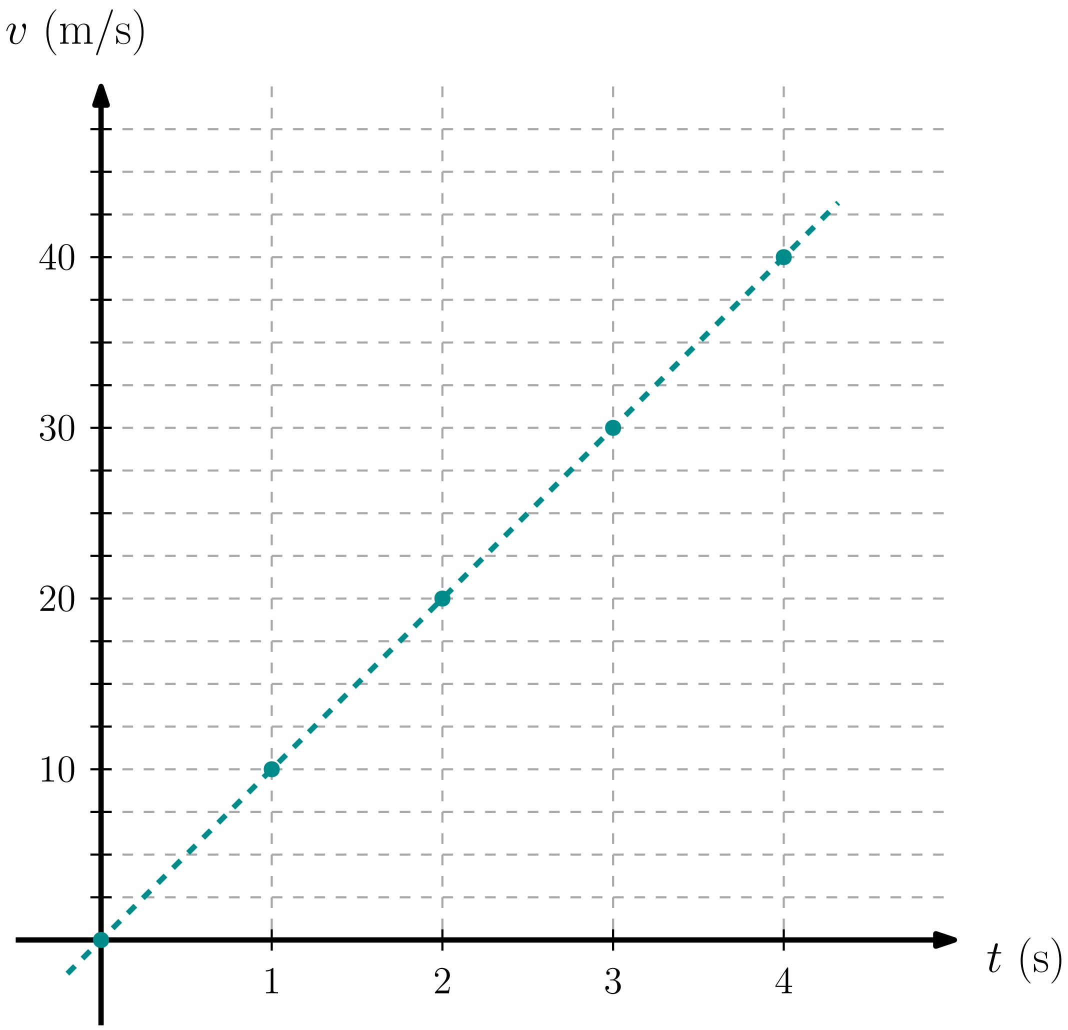


Figura 15: Gráfica v-t. En esta versión de la gráfica, hay una rejilla (= una malla) que puede ayudar a encontrar los valores de v y t para cada punto de la recta.

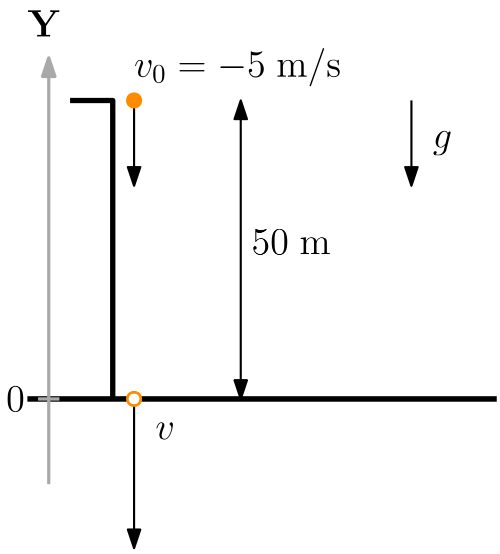


Figura 16: Problema 22.

En nuestro sistema de coordenadas:

$$y = y_{\text{suelo}} = 0$$

Según la ecuación de la posición:

$$0 = 50 - 2t - 5t^2$$

Podemos reordenarlo todo:

$$5t^2 + 2t - 50 = 0$$

Podemos usar la fórmula de las ecuaciones cuadráticas:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-50)}}{2 \cdot 5}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1000}}{10}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{1004}}{10}$$

$$t \approx \frac{-2 \pm 31.69}{10}$$

Hay dos soluciones:

$$t \approx \begin{array}{l} \frac{-2+31.69}{10} = 2.969 \text{ s} \\ \frac{-2-31.69}{10} = -3.369 \text{ s} \end{array}$$

Solamente la solución positiva tiene sentido. Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$v = -2 - 10 \cdot 2.969$$

$$v = -2 - 29.69$$

$$v = -31.69 \text{ m/s}$$

23. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Después de 1,50 segundos pasa por un punto que está a 1/4 de la altura máxima que finalmente alcanza. ¿Cuál es la altura máxima y cuál es la velocidad inicial de la pelota?

Este problema es interesante porque nos falta un dato: la velocidad inicial.

Vamos a escoger un sistema de coordenadas en el que el eje es vertical, se llama Y y es positivo hacia arriba.

La pelota tiene un MRUA:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = v_0 + a \cdot t \\ a = a_0 \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y = v_0 \cdot t - 5t^2 \\ v = v_0 - 10t \\ a = -10 \end{cases}$$

Vamos a llamar h a la altura máxima. Nos dicen que:

$$y(t = 1.50 \text{ s}) = \frac{1}{4} \cdot h$$

Sustituyendo en la ecuación de la posición:

$$\frac{1}{4} \cdot h = v_0 \cdot 1.50 - 5 \cdot (1.50)^2$$

$$\frac{1}{4} \cdot h = 1.5v_0 - 11.25$$

Multiplicando todo por 4:

$$h = 6v_0 - 45$$

Por otro lado, la altura máxima se alcanza cuando la velocidad es cero:

$$0 = v_0 - 10t$$

$$10t = v_0$$

$$t = \frac{v_0}{10}$$

Sustituyendo en la ecuación de la posición:

$$y = v_0 \cdot \frac{v_0}{10} - 5 \cdot \quad \frac{v_0}{10} \quad ^2$$

Pero esa posición es la altura máxima h:

$$h = v_0 \cdot \frac{v_0}{10} - 5 \cdot \quad \frac{v_0}{10} \quad ^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{10} - 5 \cdot \frac{v_0^2}{100}$$

$$h = \frac{v_0^2}{10} - \frac{v_0^2}{20}$$

$$h = \frac{2v_0^2}{20} - \frac{v_0^2}{20}$$

$$h = \frac{v_0^2}{20}$$

Ahora tenemos dos fórmulas que relacionan la altura máxima y la velocidad inicial:

$$h = 6v_0 - 45$$
$$h = \tfrac{v_0^2}{20}$$

Puedes ver que las partes de la derecha tienen que ser iguales entre si:

$$6v_0 - 45 = \frac{v_0^2}{20}$$

$$(6v_0 - 45) \cdot 20 = v_0^2$$

$$120v_0 - 90 = v_0^2$$

$$-v_0^2 + 120v_0 - 90 = 0$$

Si resolvemos con la fórmula de las ecuaciones cuadráticas:

$$v_0 = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-90)}}{2 \cdot (-1)}$$

Tiene dos soluciones: 0.75 m/s y 119.25 m/s.

Por ahora, las dos soluciones parecen correctas. Vamos a ver la altura que nos da cada una según la fórmula $h = 6v_0 - 45$:

$$v_0 = 0.75 \text{ m/s} \Rightarrow h = -40.5 \text{ m}$$

$$v_0 = 119.25 \text{ m/s} \Rightarrow h = 670,5 \text{ m}$$

La primera solución no tiene sentido porque la altura máxima es negativa y en nuestro sistema de coordenadas significa que está **¡debajo del suelo!**

La segunda solución es la que buscábamos:

$$v_0 = 119.25 \text{ m/s}; \quad h = 670,5 \text{ m}$$

24. Una persona tiene un globo de helio (He) en el suelo y lo suelta en el mismo instante en el que otra persona en lo alto de un edificio de 30 metros de altura deja caer una pelota. ¿Dónde y cuándo se cruzarán el globo y la pelota?
Puedes suponer que el globo asciende (sube) con una velocidad constante de 1 m/s.

Es un problema con dos objetos. Usaremos la letra *"g"* como subíndice de los datos del globo y la letra *"p"* como subíndice de los datos de la pelota.

El sistema de coordenadas va a ser un eje vertical, que llamaremos Y, con el origen en el suelo y los positivos hacia arriba.

El globo se mueve con un MRU y la pelota baja con un MRUA. Las ecuaciones en nuestro sistema de coordenadas son:

$$y_g = 0 + 1 \cdot t$$

$$v_g = 1$$

$$y_p = 30 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$

$$v_p = 0 + (-10) \cdot t$$

Es decir:

$$\begin{cases} y_g = t \\ v_g = 1 \\ y_p = 30 - 5t^2 \\ v_p = -10t \end{cases}$$

Los dos se encuentran cuando sus posiciones son las mismas:

$$y_p = y_g$$

Por lo tanto:

$$30 - 5t^2 = t$$

$$0 = t - 30 + 5t^2$$

$$t - 30 + 5t^2 = 0$$

$$5t^2 + t - 30 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se pueden encontrar con la fórmula de las ecuaciones cuadráticas. Son dos soluciones: -2.55 s y 2.35 s. Podemos descartar la solución negativa.

Por lo tanto se encuentran cuando $t = 2.35$ s y la altura de los dos es:

$$y_p = y_g \approx 2.35 \text{ m}$$

25. Desde la azotea de un edificio de 50 metros se deja caer un objeto en el mismo instante en el que se lanza hacia arriba a una velocidad de 2 metros por segundo otro objeto. ¿Cuándo chocan ambos?

Vamos a escoger un sistema de coordenadas:

- un eje vertical
- llamado Y
- con el origen de coordenadas en el suelo
- y los positivos hacia arriba

Hay dos cuerpos en movimiento. Y los dos tienen un MRUA (uno es un tiro vertical y otro es una caída libre). Usaremos la etiqueta A para el que cae y la etiqueta B para el que es lanzado hacia arriba.

Las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} y_A = y_{A0} + v_{A0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v_A = v_{A0} + a \cdot t \\ y_B = y_{B0} + v_{B0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v_B = v_{B0} + a \cdot t \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y_A = 50 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \\ v_A = 0 + (-10) \cdot t \\ y_B = 0 + 2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \\ v_B = 2 + (-10) \cdot t \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y_A = 50 - 5t^2 \\ v_A = -10t \\ y_B = 2t - 5t^2 \\ v_B = 2 - 10t \end{cases}$$

Los dos se encuentran cuando sus posiciones son iguales:

$$y_A = y_B$$

Por lo tanto:

$$50 - 5t^2 = 2t - 5t^2$$

$$50 = 2t$$

$$2t = 50$$

$$t = \frac{50}{2}$$

$$t = 25 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de y_A (que es la más sencilla):

$$y_A = 50 - 5 \cdot 25^2$$

$$y_A = -3075 \text{ m}$$

Čo!? ¿Se encuentran debajo del suelo?

ALUMNO: Pero eso no puede ser.

PROFESOR: Claro que no. Lo que ocurre aquí es que el objeto B sube muy poco y vuelve a caer al suelo antes de que el otro objeto llegue a donde está.

ALUMNO: Oh. Entonces se encontrarían ahí si no existiese un suelo.

PROFESOR: Exacto. Pero no se encuentran en movimiento. Se encuentran cuando los dos llegan al suelo y el objeto B está parado desde hace tiempo.

Es decir, la solución es decir que *el objeto B cae al suelo antes de que el objeto A lo alcance*.

> **26**. Desde la azotea de un edificio de 50 metros se deja caer un objeto en el mismo instante en el que se lanza hacia arriba a una velocidad de 20 metros por segundo otro objeto. ¿Cuándo chocan ambos?

Es como el problema anterior. Solamente cambia un dato.

Las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} y_A = 50 - 5t^2 \\ v_A = -10t \\ y_B = 20t - 5t^2 \\ v_B = 20 - 10t \end{cases}$$

Los dos se encuentran cuando sus posiciones son iguales:

$$y_A = y_B$$

Por lo tanto:

$$50 - 5t^2 = 20t - 5t^2$$

$$50 = 20t$$

$$20t = 50$$

$$t = \frac{50}{20}$$

$$t = 2.5 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de y_A, por ejemplo:

$$y_A = 50 - 5 \cdot 2.5^2$$

$$y_A = 18.75 \text{ m}$$

Es decir, los dos se encuentran a 18.75 metros de altura cuando han pasado 2.5 segundos desde el comienzo.

> **27**. En los problemas anteriores has visto que si lanzamos un objeto hacia arriba desde el suelo y dejamos caer otro desde la azotea de un edificio o se encuentran 1 vez o 0 veces. ¿Hay algún modo en el que puedan encontrarse 2 veces?

No.

Las ecuaciones son:

$$\begin{array}{l} y_A = y_{A0} + v_{A0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ y_B = y_{B0} + v_{B0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array}$$

Si las posiciones son iguales $y_A = y_B$:

$$y_{A0} + v_{A0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 =$$
$$= y_{B0} + v_{B0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Como la aceleración es igual en los dos:

$$y_{A0} + v_{A0} \cdot t = y_{B0} + v_{B0} \cdot t$$

Si A es el objeto que se lanza desde el suelo y el suelo es el cero:

$$v_{A0} \cdot t = y_{B0} + v_{B0} \cdot t$$

Es una ecuación con una sola *incógnita*: el tiempo.

$$v_{A0} \cdot t = y_{B0} + v_{B0} \cdot t$$

Y ese tipo de ecuaciones solamente tienen una solución.

28. Una persona desde la azotea de un edificio de 20 metros de altura suelta un globo que empieza a ascender (subir) verticalmente y hacia arriba a una velocidad constante de 2 m/s. En ese mismo instante se lanza verticalmente desde abajo con una velocidad de 10 m/s una piedra. ¿Dónde y cuándo se encuentran?

Nuestro sistema de coordenadas será:

- un eje vertical, Y
- positivo hacia arriba
- con el origen en el suelo

Hay dos objetos:

- el globo, que tiene un MRU y etiquetaremos con la letra *"g"*
- la piedra, que tiene un MRUA y etiquetaremos con la letra *"p"*

Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} y_g = y_{g0} + v_{g0} \cdot t \\ v_g = v_{g0} \\ y_p = y_{p0} + v_{p0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v_p = v_{p0} + a \cdot t \end{cases}$$

En nuestro sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y_g = 20 + 2t \\ v_g = 2 \\ y_p = 0 + 10t - 5t^2 \\ v_p = 10 - 10t \end{cases}$$

Los dos se encuentran cuando sus posiciones son iguales:

$$y_g = y_p$$

Por lo tanto:

$$20 + 2t = 10t - 5t^2$$
$$5t^2 - 10t + 20 + 2t = 0$$
$$5t^2 - 8t + 20 = 0$$

Si usamos la fórmula de las ecuaciones cuadráticas, ¡veremos que no tiene solución!

¡Nunca se encuentran!

29. La gráfica x-t muestra tres movimientos. ¿Cuál de los tres es más rápido?

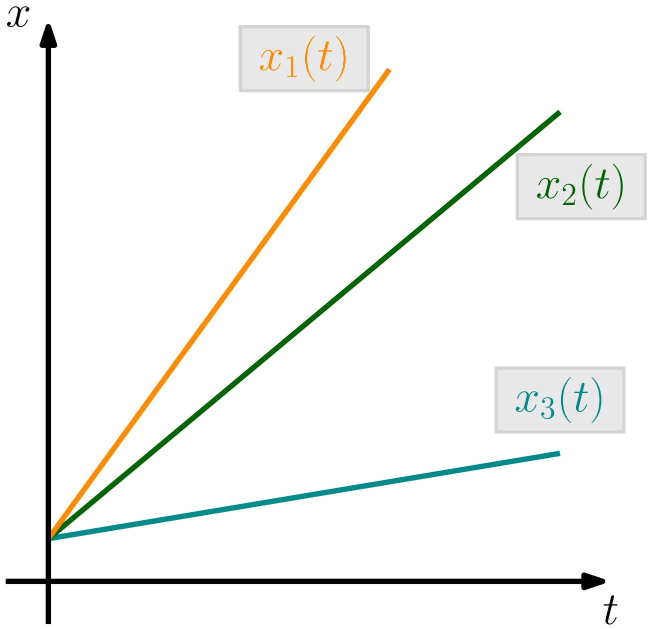


Figura 17: Problema 29.

Las tres líneas son líneas rectas así que los tres movimientos son movimientos rectilíneos uniformes.

La más inclinada es la recta $x_1(t)$ y la menos inclinada es la recta $x_3(t)$. La inclinación es la velocidad, así que:

$$v_1 > v_2 > v_3$$

30. La gráfica x-t muestra dos movimientos. ¿Cuál de los dos es más rápido?

Las dos líneas son líneas rectas así que los dos movimientos son movimientos rectilíneos uniformes.

Las dos líneas son paralelas entre si, así que la inclinación es la misma. ¡Las velocidades son iguales!

$$v_1 = v_2$$

31. La gráfica x-t muestra dos movimientos. ¿Cuál de los dos es más rápido?

Las dos líneas son líneas rectas así que los dos movimientos son movimientos rectilíneos uniformes.

La línea de $x_2(t)$ está más inclinada que la línea de $x_1(t)$. Por lo tanto, la velocidad de $x_2(t)$ es mayor:

$$v_2 > v_1$$

32. La gráfica x-t muestra dos movimientos. ¿Cuál de los dos es más rápido?

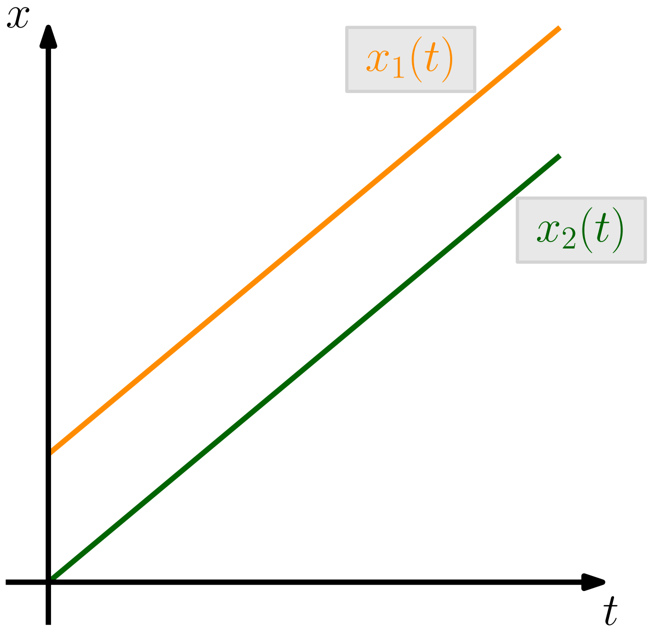


Figura 18: Problema 30.

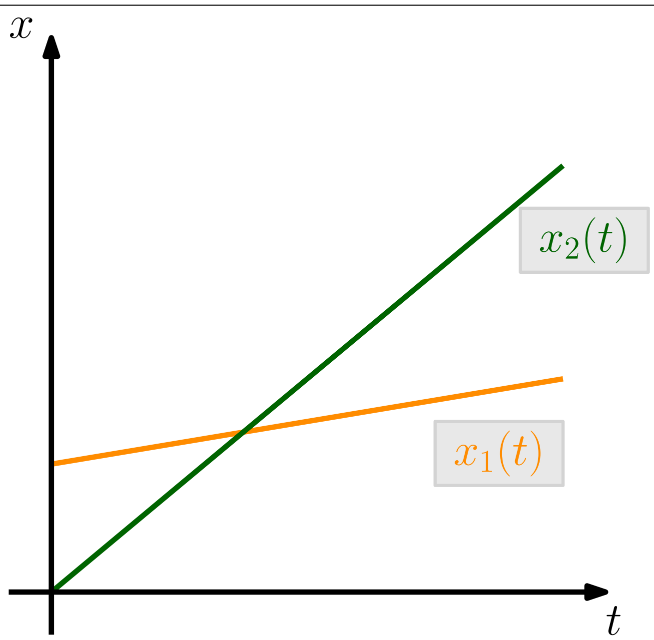


Figura 19: Problema 31.

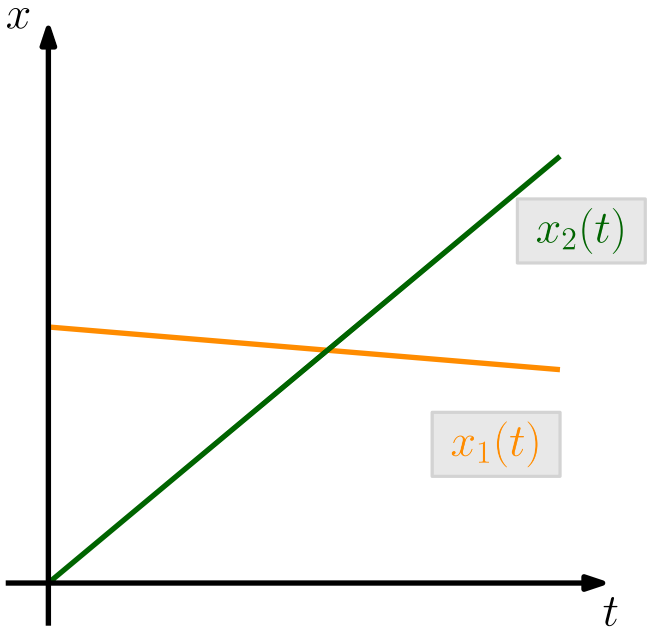


Figura 20: Problema 32.

Las dos líneas son líneas rectas así que los dos movimientos son movimientos rectilíneos uniformes.

Observa que:

- la línea de $x_2(t)$ crece (*"sube"*) hacia la derecha

  por lo tanto, la velocidad es positiva.

- la línea de $x_1(t)$ decrece (*"baja"*) hacia la derecha

  por lo tanto, la velocidad es negativa.

Como la línea de $x_2(t)$ está más inclinada que la línea de $x_1(t)$ la velocidad de $x_2(t)$ es mayor que el valor absoluto de la velocidad de $x_1(t)$:

$$v_2 > |v_1|$$

33. La gráfica x-t muestra dos movimientos. ¿Qué puedes decir sobre ellos?

Las dos curvas son parábolas. Como es una gráfica x-t, los dos movimientos son MRUA (movimientos rectilíneos uniformemente acelerados).

- $x_1(t)$

  Es una parábola *"alegre"* porque tiene un mínimo. Por lo tanto la aceleración es positiva en el sistema de coordenadas.

- $x_2(t)$

  Es una parábola *"triste"* porque tiene un máximo. Por lo tanto la aceleración es negativa en el sistema de coordenadas.

Como las curvas se cortan en dos sitios, significa que los objetos se encuentran dos veces.

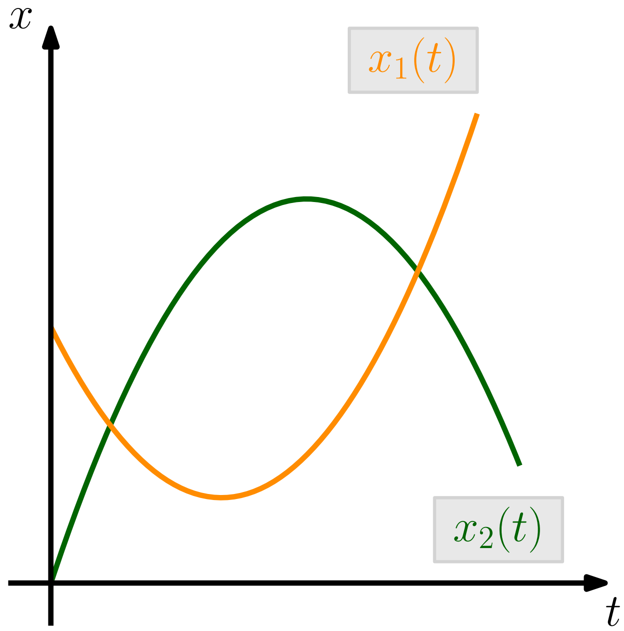


Figura 21: Problema 33.

34. Se deja caer una piedra en un pozo. Pasan 3 segundos y se oye el golpe de la piedra con el fondo del pozo. ¿Cuál es la profundidad del pozo?
Dato: la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s aproximadamente.

Aquí hay dos movimientos:

- la piedra cae con **MRUA** (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado). Es **caída libre**.
- el sonido sube con **MRU**

Si el sistema de referencia es, en ambos casos, un sistema en el que el origen está en el fondo del pozo y los positivos son hacia arriba y llamamos h a la profundidad del pozo, podemos estudiar la piedra:

- $x_0 = h = ?$
- $v_0 = 0$
- $a = g = -9.81 \text{ m/s}^2$
- $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$
- $x = h - 4,905 \cdot t^2$

La posición final de la piedra es $x = 0$, el tiempo que tarda la piedra en caer t_p es:

$$0 = h - 4,905 \cdot t_p^2$$

$$h = 4,905 \cdot t_p^2$$

En cuanto al sonido, sabemos:

- $x_0 = 0$
- $v = 340 \text{ m/s}$
- $x = x_0 + v \cdot t$
- $x = 0 + 340 \cdot t$

La posición final del sonido es $x = h$. El tiempo que tarda en subir el sonido es:

$$h = 340 \cdot t_s$$

Como el tiempo total es de 3 segundos:

$$t_s + t_p = 3$$

Tenemos tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} t_s + t_p = 3 \\ h = 340 \cdot t_s \\ h = 4,905 \cdot t_p^2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} h = 340 \cdot (3 - t_p) \\ h = 4,905 \cdot t_p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t_p = 3 - \frac{h}{340} \\ h = 4,905 \cdot t_p^2 \end{array}$$

Podemos sustituir:

$$h = 4,905 \cdot \left(3 - \frac{h}{340}\right)^2$$

$$\ldots$$

Es una ecuación cuadrática. Al resolverla podemos encontrar la solución.

Una solución es:

$$h_1 = 40.69 \text{ m}$$

y la otra es:

$$h_2 = 25\,567 \text{ m}$$

Evidentemente la solución con sentido físico es la primera.

35. ¿Hay algún modo de conseguir una aproximación a la solución anterior de manera más sencilla?

El sonido se mueve mucho más rápido que la piedra. Por lo tanto, la mayoría del tiempo se deberá a la caída de la piedra.

Si tenemos que:

- $x_0 = h$
- $v = 0$
- $a = g = -9.81 \text{ m/s}^2$
- $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$
- $x = h - 4,905 \cdot t^2$

Cuando llega al fondo del pozo:

$$0 = h - 4,905 \cdot t^2$$

$$h = 4,905 \cdot t^2$$

Si el tiempo es de 3 segundos:

$$h = 44,145 \text{ m}$$

Que es un resultado similar al correcto.

Cinemática bidimensional

La cinemática se vuelve más compleja en 2D.

Donde antes podíamos describir la posición de un objeto usando solamente una ecuación, ahora necesitamos dos. También necesitamos otras dos para la velocidad y otras dos para la aceleración.

Y, aunque aparecen algunos conceptos nuevos, la mayoría de los métodos que se usan aquí son esencialmente los mismos que los que se usan en el de cinemática unidimensional.

Componentes intrínsecas de la aceleración

1. Un cuerpo se mueve con una velocidad $\vec{v} = (1, 3)$ m/s y una aceleración $\vec{a} = (2, -1)$ m/s^2. Encuentra las componentes intrínsecas de la aceleración.

La aceleración siempre se puede descomponer en dos vectores:

- la aceleración normal $\vec{a}_n$ que es *normal* (= perpendicular) a la velocidad

$$\vec{a}_n \perp \vec{v}$$

- la aceleración tangencial $\vec{a}_t$ que es *tangencial* (= paralela) a la velocidad

$$\vec{a}_t \parallel \vec{v}$$

es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Esos dos vectores son las **componentes intrínsecas** de la aceleración. Y cada una de ellas tiene un efecto diferente sobre la aceleración:

- la aceleración normal $\vec{a}_n$ cambia la dirección de la velocidad, pero no cambia su módulo
- la aceleración tangencial $\vec{a}_t$ cambia el módulo de la velocidad, pero no cambia su dirección

Podemos encontrar la aceleración tangencial haciendo la proyección del vector de aceleración sobre el vector de velocidad. Para eso, hacemos:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} \, \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{a}_t = \frac{(2, -1) \cdot (1, 3)}{|(1, 3)|} \, \frac{(1, 3)}{|(1, 3)|}$$

$$\vec{a}_t = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \, \frac{(1, 3)}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$\vec{a}_t = \frac{-1}{\sqrt{10}} \frac{(1,3)}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{a}_t = \frac{-1}{10} \cdot (1,3)$$

$$\vec{a}_t = \quad \frac{-1}{10}, \frac{-3}{10}$$

en unidades del SI (es decir, en m/s²):

$$\vec{a}_t = \quad \frac{-1}{10}, \frac{-3}{10} \quad \text{m/s}^2$$

Ahora podemos encontrar $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_n = (2,-1) - \quad \frac{-1}{10}, \frac{-3}{10}$$

$$\vec{a}_n = \quad \frac{19}{10}, \frac{-7}{10}$$

$$\vec{a}_n = \quad \frac{19}{10}, \frac{-7}{10} \quad \text{m/s}^2$$

2. Un objeto se mueve con una velocidad de 20 m/s y una aceleración de 10 m/s². La aceleración forma un ángulo de 30° respecto a la velocidad. ¿Cuáles son los valores de las componentes intrínsecas de la aceleración?

Aunque no es imprescindible, es aconsejable dibujar los dos vectores: $\vec{v}$ (la velocidad) y $\vec{a}$ (la aceleración). Eso nos permite descomponer visualmente la aceleración en sus componentes intrínsecas:

- a_t, la aceleración tangencial que es tangencial (= paralela) a la velocidad
- a_n, la aceleración normal que es normal (= perpendicular) a la velocidad

Y con simple trigonometría es fácil ver que la aceleración forma un triángulo rectángulo con la aceleración normal y la aceleración tangencial. La aceleración a es la hipotenusa, la aceleración tangencial es el cateto contiguo al ángulo de 30° y la aceleración normal es el cateto opuesto al ángulo de 30°.

El seno de 30° es igual al cateto opuesto a 30° partido la hipotenusa:

$$\sin(30°) = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a \cdot \sin(30°)$$

El coseno de 30° es igual al cateto contiguo a 30° partido la hipotenusa:

$$\cos(30°) = \frac{a_t}{a} \Rightarrow a_t = a \cdot \cos(30°)$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$a_n = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

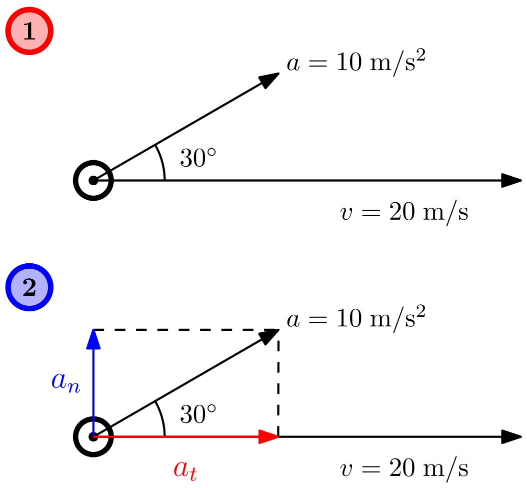


Figura 22: Problema 2. 1) La aceleración a y la velocidad v forman un ángulo de 30°. 2) La descomposición de la aceleración en sus componentes intrínsecas: la aceleración tangencial a_t y la aceleración normal a_n.

3. Un objeto se mueve con una velocidad de 20 m/s y una aceleración de 10 m/s². La aceleración forma un ángulo de 120° respecto a la velocidad. ¿Cuáles son los valores de las componentes intrínsecas de la aceleración?

Este problema es casi idéntico al anterior.

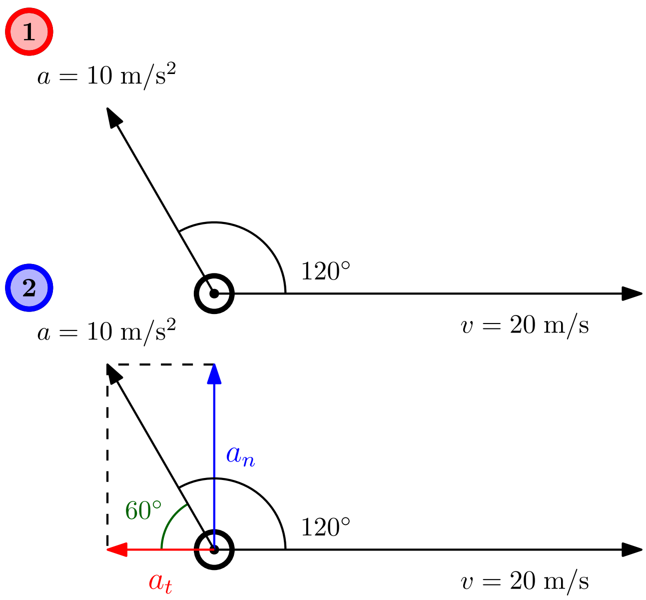


Figura 23: Problema 3. 1) La aceleración a y la velocidad v forman un ángulo de 120°. 2) La descomposición de la aceleración en sus componentes intrínsecas: la aceleración tangencial a_t y la aceleración normal a_n.

Una vez hacemos la descomposición gráficamente, vemos que a, a_t y a_n forman un triángulo rectángulo donde la aceleración normal es el cateto opuesto a un ángulo de 60°, la aceleración tangencial es el cateto contiguo al ángulo de 60° y la aceleración es la hipotenusa.

El seno de 60° es igual al cateto opuesto a 60° partido la hipotenusa:

$$\sin(60°) = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a \cdot \sin(60°)$$

El coseno de 60° es igual al cateto contiguo a 60° partido la hipotenusa:

$$\cos(60°) = \frac{a_t}{a} \Rightarrow a_t = a \cdot \cos(60°)$$

Sustituyendo:

$$a_n = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_t = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ \mathrm{m/s^2}$$

4. Un objeto se está moviendo y su aceleración normal es de 3 $\mathrm{m/s^2}$ y su aceleración tangencial es de 4 $\mathrm{m/s^2}$. La aceleración tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad. ¿Cuál es su aceleración y cuál es el ángulo que forma con la velocidad?

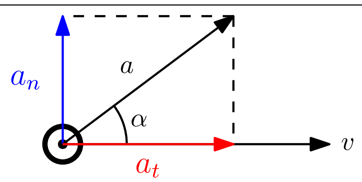


Figura 24: Problema 4. Si la aceleración tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad, encontrar la aceleración y el ángulo que ésta forma con la velocidad es muy sencillo.

Nuevamente tenemos un triángulo rectángulo. Ahora conocemos los catetos (a_t y a_n) y podemos encontrar la hipotenusa (a) usando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$a = \pm\sqrt{25}$$

Como el módulo de la aceleración tiene que ser positivo:

$$a = 5\ \mathrm{m/s^2}$$

Sabemos que la tangente del ángulo α que forman la aceleración y la velocidad es igual al cateto opuesto (a_n) partido el cateto contiguo (a_t):

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{a_n}{a_t} = 3/4$$

Con la arcotangente podemos despejar:

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\ \frac{3}{4} \approx 36.87°$$

5. Un objeto se está moviendo y su aceleración normal es de 3 $\mathrm{m/s^2}$ y su aceleración tangencial es de 4 $\mathrm{m/s^2}$. La aceleración tangencial tiene el sentido contrario a la velocidad. ¿Cuál es su aceleración y cuál es el ángulo que forma con la velocidad?

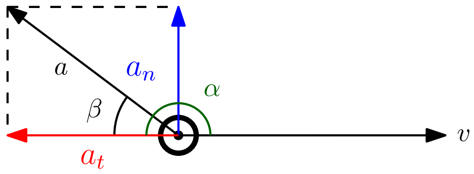


Figura 25: Problema 5. Si la aceleración tangencial tiene el sentido opuesto a la velocidad, encontrar la aceleración es inmediato. El ángulo requiere un pequeño cambio respecto al ejercicio anterior.

Como en el caso anterior, un dibujo nos permite encontrar las relaciones trigonométricas necesarias.

Por el teorema de Pitágoras encontramos que:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \ldots = 5 \text{ m/s}^2$$

Ahora, encontramos el ángulo β:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{a_n}{a_t} = 3/4$$
$$\beta = \text{arc tg } \frac{3}{4} \approx 36.87°$$

Lo que nos permite encontrar el ángulo α:

$$\alpha = 180° - \beta \approx 143.13°$$

6. Un objeto se mueve hacia la derecha. Tiene una aceleración de 10 m/s². Encuentra las componentes intrínsecas de la aceleración si:

a) La aceleración es perpendicular a la velocidad.
b) La aceleración es paralela a la velocidad y tiene el mismo sentido.
c) La aceleración es paralela a la velocidad y tiene el sentido opuesto.

a) Si la aceleración es perpendicular a la velocidad, solamente hay aceleración normal y no hay aceleración tangencial:

$$a_n = a = 10 \text{ m/s}^2$$
$$a_t = 0$$

b) Si la aceleración es paralela a la velocidad, solamente hay aceleración tangencial y no hay aceleración normal:

$$a_n = 0$$
$$a_t = a = 10 \text{ m/s}^2$$

El ángulo que forman la aceleración y la velocidad es de 0°.

c) Si la aceleración es paralela a la velocidad, solamente hay aceleración tangencial y no hay aceleración normal:

$$a_n = 0$$
$$a_t = a = 10 \text{ m/s}^2$$

El ángulo que forman la aceleración y la velocidad es de 180°.

MRU + MRU

1. Una persona nada desde una orilla de un río a la otra orilla que está a 20 metros de distancia. La persona intenta nadar perpendicularmente respecto a la orilla a 5 m/s. Pero la corriente se mueve a 2 m/s paralela a la orilla. ¿Cuánto tarda en cruzar el río? ¿Dónde llega? ¿Cuál es la distancia de la trayectoria?

Simplificando mucho, podemos considerar que la persona se mueve según una composición de dos MRU (= movimientos rectilíneos uniformes) perpendiculares entre si:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

Si escogemos un sistema de coordenadas en el que el eje X es paralelo a la orilla (y positivo hacia donde fluye el río), el eje Y es perpendicular a la orilla (y positivo hacia la segunda orilla) y el origen de coordenadas está en la posición inicial del nadador:

$$\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + 5t \end{cases}$$

El nadador llegará a la segunda orilla cuando y sea igual a la y de la otra orilla:

$$y = 20$$

Sustituyendo en la ecuación de y:

$$5t = 20$$
$$t = 4 \text{ s}$$

El nadador tarda 4 segundos en cruzar el río. Su posición en x será:

$$x = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m}$$

Es decir, el nadador se ha movido 20 metros hacia delante y 8 metros hacia la derecha. Por el teorema de Pitágoras, el nadador ha recorrido una distancia de:

$$d = \sqrt{20^2 + 8^2} = \sqrt{464} \approx 21.54 \text{ m}$$

La trayectoria en estos movimientos es una línea recta, así que la longitud de la trayectoria es igual al desplazamiento: aproximadamente 21 metros y medio.

2. ¿Es realista la velocidad del nadador del problema anterior?

No mucho.

Parece ser que si el mejor nadador usa el estilo libre o *crol* (del inglés *"crawl"*), no llega a los 3 m/s.

Pero tampoco son realistas otros factores. Por ejemplo, la corriente del río probablemente no tenga la misma velocidad cerca de la orilla o en medio del río.

3. Demuestra que la trayectoria de un movimiento MRU + MRU es una línea recta.

Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

Si despejamos t en la primera ecuación:

$$t = \frac{x - x_0}{v_x}$$

y sustituimos en la segunda:

$$y = y_0 + v_y \cdot \frac{x - x_0}{v_x}$$

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} x - \frac{v_y}{v_x} x_0$$

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + \quad y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0$$

Si definimos:

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

$$n = y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0$$

la ecuación de y respecto a x se puede escribir:

$$y = mx + n$$

que es una función afín[3], es decir, una función polinómica de primer grado. Su representación es precisamente una línea recta.

Tiro parabólico

1. Se lanza desde el suelo un proyectil con una velocidad inicial de 30 m/s y una inclinación de 60 grados sexagesimales.

a) Escribe sus ecuaciones de movimiento.
b) Calcula la altura máxima.
c) Calcula el alcance.

Se trata de un ejemplo de **tiro parabólico**. Concretamente, de *tiro oblicuo* porque el ángulo de inclinación no es cero.

[3] A veces llamada también *"lineal"*.

El tiro oblicuo es un movimiento en 2D que resulta de la composición de dos movimientos: un MRU en el eje X y un MRUA en el eje Y. Las ecuaciones generales son:

$$x = x_0 + v_{x0} \cdot t$$
$$y = y_0 + v_{y0} \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Ahora debemos escoger un sistema de referencia. Por ejemplo, un sistema en el que:

- el origen de coordenadas está donde está el proyectil inicialmente
- el eje X coincide con el suelo y es positivo hacia la derecha
- el eje Y es perpendicular al suelo y es positivo hacia arriba

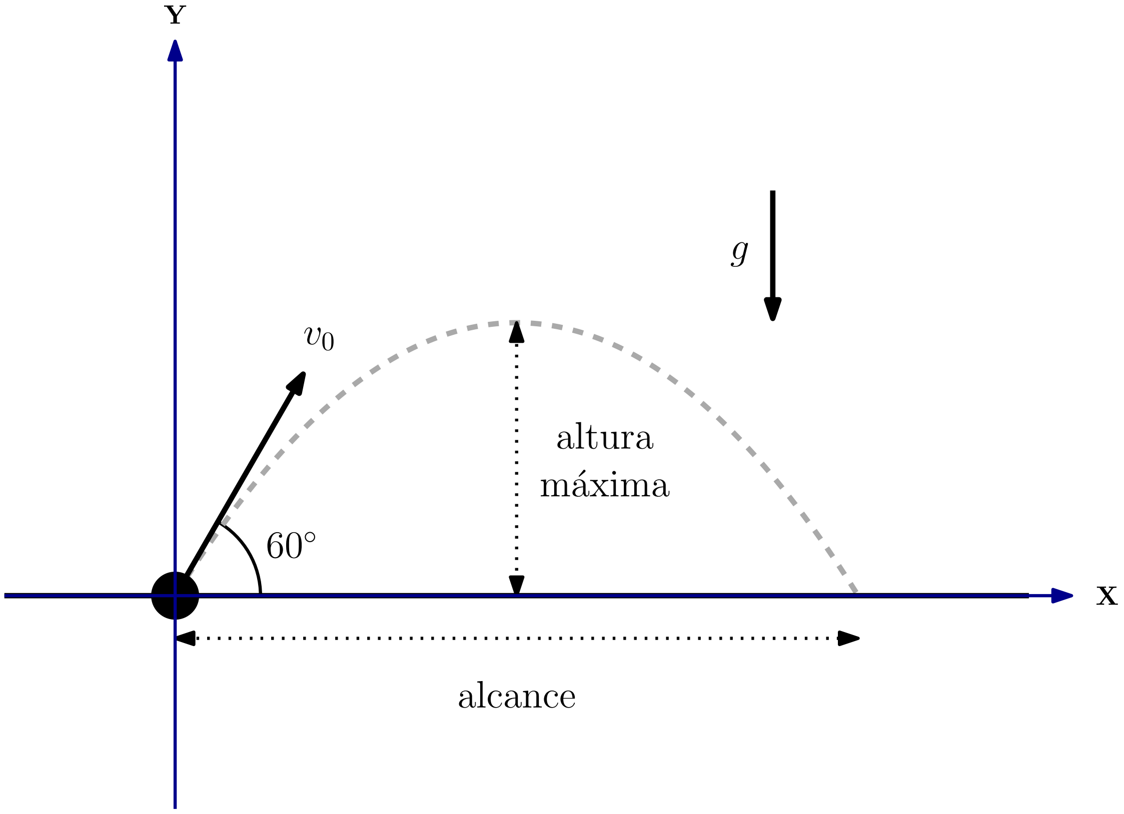


Figura 26: Problema 1. Dibujo del problema y del sistema de coordenadas.

En ese sistema, la posición inicial es:

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \text{ m}$$

Ahora hay que descomponer la velocidad inicial:

$$v_0 = 30 \text{ m/s}$$

Usando el seno y el coseno:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos(60°)$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin(60°)$$

tenemos:

$$v_{0x} = 30 \cdot \frac{1}{2}$$

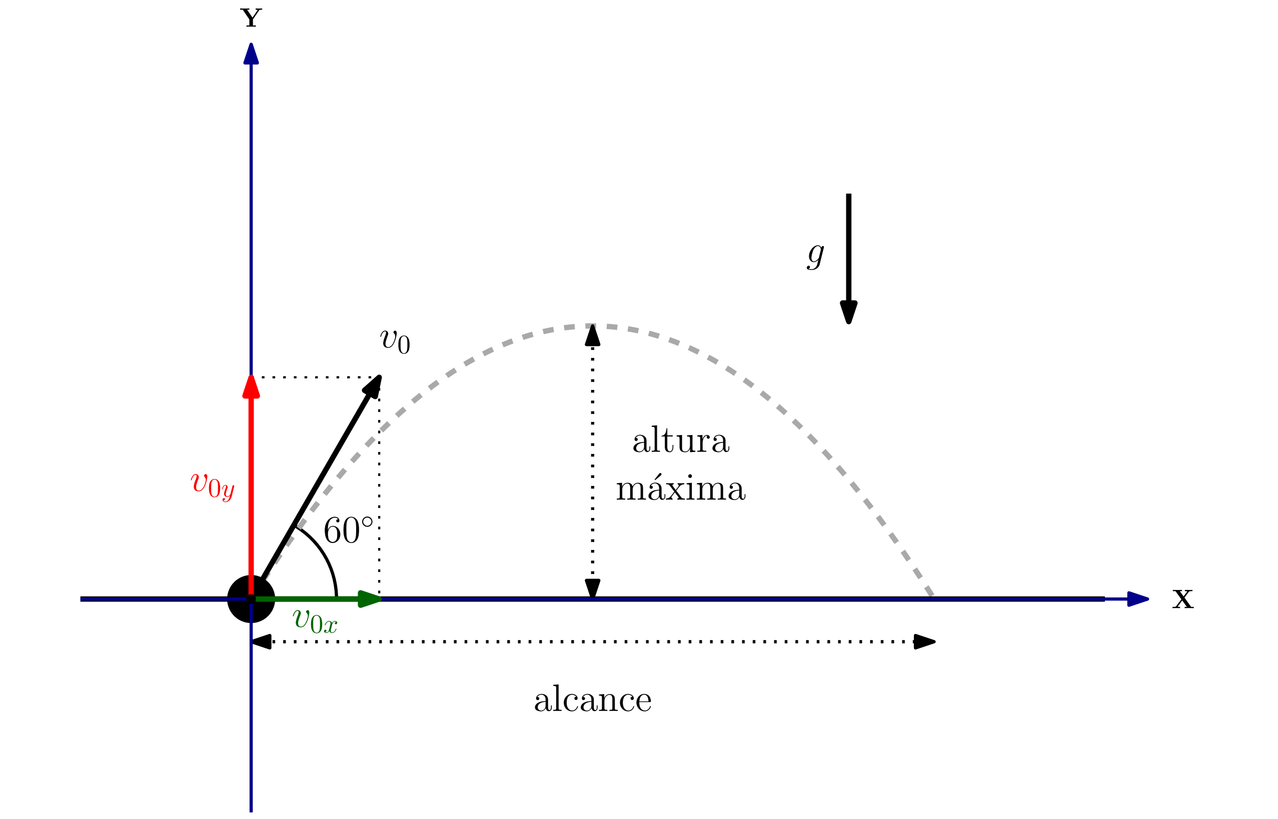


Figura 27: Problema 1. Dibujo de la descomposición de la velocidad inicial en sus componentes X e Y. Observando el triángulo rectángulo con hipotenusa v_0 y catetos v_{0x} y v_{0y} es fácil encontrar las componentes usando trigonometría.

$$v_{0y} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

es decir:

$$v_{0x} = 15 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Las dos componentes son positivas porque apuntan hacia arriba y hacia la derecha.

La aceleración es:

$$a = g = -10 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo es porque apunta hacia abajo y en nuestro sistema de coordenadas hemos escogido los positivos hacia arriba.

Las ecuaciones son, por lo tanto:

$$\begin{aligned} x &= 0 + 15 \cdot t \\ y &= 0 + 15\sqrt{3} \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 15t \\ y &= 15\sqrt{3} \cdot t - 5t^2 \end{aligned}} \quad \texttt{[SI]}$$

Las ecuaciones de la velocidad son:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_x = 15 \\ v_y = 15\sqrt{3} - 10t \end{array}} \quad \texttt{[SI]}$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad en el eje vertical es 0:

$$0 = 15\sqrt{3} - 10t$$
$$10t = 15\sqrt{3}$$
$$t = 1.5\sqrt{3} \text{ s}$$
$$t \approx 2,598 \text{ s}$$

La altura máxima se puede calcular con la ecuación de y:

$$y = 0 + 15\sqrt{3} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$
$$y = 15\sqrt{3} \cdot 1.5\sqrt{3} - 5 \cdot (1.5\sqrt{3})^2$$
$$y = 168.75 \text{ m}$$

El alcance es la distancia horizontal hasta que llega al suelo. Es decir, llega al suelo cuando $y = 0$. Usando la ecuación de y:

$$0 = 15\sqrt{3} \cdot t - 5t^2$$

Es una ecuación cuadrática incompleta. Sacamos t como factor común:

$$0 = t \cdot (15\sqrt{3} \cdot t - 5t)$$

Una solución es $t = 0$ (porque en el instante inicial está en el suelo) y la otra es:

$$t = 3\sqrt{3} \text{ s}$$

$$t \approx 5.196 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de x:

$$x = 15t$$
$$x = 15 \cdot 3\sqrt{3}$$
$$x = 77.94 \text{ m}$$

2. Desde un edificio de 50 metros de altura se lanza horizontalmente un proyectil con una velocidad inicial de 30 m/s.

a) Escribe sus ecuaciones de movimiento.
b) Calcula la altura máxima.
c) Calcula el alcance.

Se trata de un ejemplo de **tiro parabólico**. Concretamente, de *tiro horizontal* porque el ángulo de inclinación es cero.

El tiro horizontal es más sencillo que el tiro oblicuo; la única velocidad inicial que existe está en el eje horizontal. En el eje vertical no hay velocidad inicial.

Las ecuaciones generales de cualquier tiro parabólico son:

$$x = x_0 + v_{x0} \cdot t$$
$$y = y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Ahora debemos escoger un sistema de referencia. Por ejemplo, un sistema en el que:

- el origen de coordenadas está en el suelo, debajo de donde está el proyectil inicialmente
- el eje X coincide con el suelo y es positivo hacia la derecha
- el eje Y es perpendicular al suelo y es positivo hacia arriba

En ese sistema, la posición inicial es:

$$(x_0, y_0) = (0, 50) \text{ m}$$

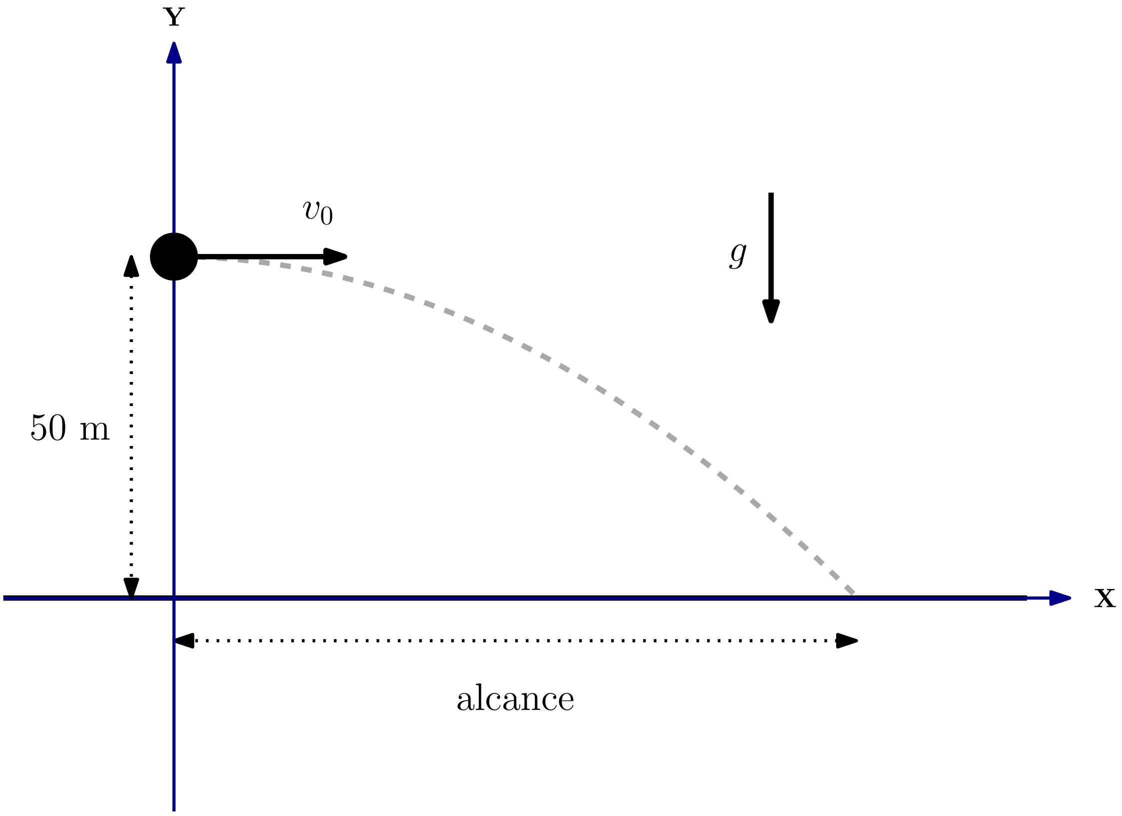


Figura 28: Problema 2. Dibujo del problema y del sistema de coordenadas.

La velocidad inicial, como hemos dicho, se puede obtener fácilmente sin usar trigonometría:

$$v_0 = 30 \text{ m/s}$$

$$v_{0x} = v_0 = 30$$
$$v_{0y} = 0$$

Usando un ángulo de 0° hubiésemos llegado al mismo resultado.

La aceleración es:

$$a = g = -10 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo es porque apunta hacia abajo y en nuestro sistema de coordenadas hemos escogido los positivos hacia arriba.

Las ecuaciones son, por lo tanto:

$$x = 0 + 30 \cdot t$$
$$y = 50 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$

Simplificando:

$$x = 30t$$
$$y = 50 - 5t^2$$

La altura máxima se puede obtener sin ninguna operación matemática: si lanzamos horizontalmente el proyectil, el proyectil no subirá. Solamente caerá. Y, por lo tanto, la altura máxima es la altura que tiene en el instante inicial: 50 metros.

Para calcular el alcance solamente tenemos que ver cuándo llega al suelo. Es decir, cuándo coincide su altura con la altura del suelo:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

Pero, en nuestro sistema de referencia, el suelo está a una altura de 0 metros:

$$y = 0$$

Sustituyendo y por la ecuación de movimiento $y = 50 - 5t^2$, tenemos:

$$50 - 5t^2 = 0$$

$$-5t^2 = -50$$
$$t^2 = \frac{-50}{-5}$$
$$t^2 = 10$$
$$t = \pm\sqrt{10}$$

De las dos soluciones, la negativa habla de lo que ocurre antes de lanzar el objeto, así que no nos interesa. Nos quedamos con la solución positiva:

$$t = \sqrt{10}\ \text{s}$$

Aproximadamente:

$$t \approx 3.16\ \text{s}$$

Ahora podemos calcular el espacio recorrido con la ecuación de movimiento para x:

$$x = 30t$$

Sustituyendo el tiempo:

$$x = 30\sqrt{10}\ \text{m}$$

$$x \approx 94.87\ \text{m}$$

Como el alcance es la distancia entre la posición inicial y el punto donde el proyectil llega al suelo y la posición inicial en nuestro sistema de coordenadas es 0, **el alcance es de casi 95 metros**.

3. Desde un edificio de 50 metros de altura se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 30 m/s. Se lanza con una inclinación de 30° respecto a la horizontal, pero **hacia abajo**.
a) Escribe sus ecuaciones de movimiento.
b) Calcula la altura máxima.
c) Calcula el alcance.

Se trata de otro **tiro parabólico**. Para ser precisos, de un *tiro oblicuo* porque el ángulo de inclinación no es cero. Pero, a diferencia de lo que ocurre con el primer problema, en este caso la inclinación es hacia abajo.

Las ecuaciones generales son:

$$x = x_0 + v_{x0} \cdot t$$
$$y = y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Si escogemos un sistema de referencia en el que:

- el origen de coordenadas está donde está el proyectil inicialmente
- el eje X coincide con el suelo y es positivo hacia la derecha
- el eje Y es perpendicular al suelo y es positivo hacia arriba

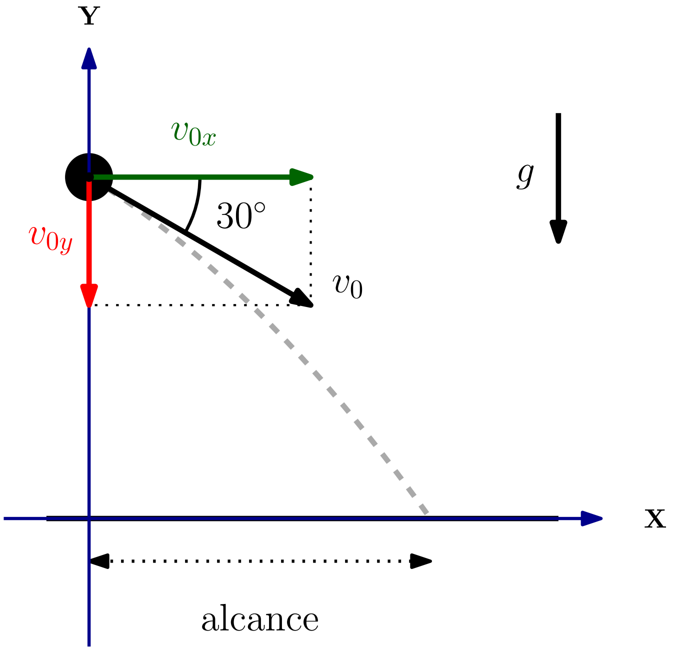


Figura 29: Problema 3. Dibujo del problema, del sistema de coordenadas y de la descomposición de la velocidad inicial en sus componentes X e Y.

En ese sistema, la posición inicial es:

$$(x_0, y_0) = (0, 50) \text{ m}$$

Ahora hay que descomponer la velocidad inicial:

$$v_0 = 30 \text{ m/s}$$

Usando el seno y el coseno:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos(30°)$$

$$v_{0y} = -v_0 \cdot \sin(30°)$$

El signo menos proviene del hecho de que la velocidad inicial en el eje Y es hacia abajo y en nuestro sistema de coordenadas, los positivos son hacia arriba. Por lo tanto, esa velocidad debe ser negativa. Por lo tanto:

$$v_{0x} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{0y} = -30 \cdot \frac{1}{2}$$

es decir:

$$v_{0x} = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = -15 \text{ m/s}$$

La aceleración es:

$$a = g = -10 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo es porque apunta hacia abajo y en nuestro sistema de coordenadas hemos escogido los positivos hacia arriba.

Las ecuaciones son, por lo tanto:

$$\begin{array}{l} x = 0 + 15\sqrt{3} \cdot t \\ y = 50 + 15 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 15\sqrt{3}t \\ y = 50 + 15 \cdot t - 5t^2 \end{array}} \quad \texttt{[SI]}$$

Las ecuaciones de la velocidad son:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_x = 15\sqrt{3} \\ v_y = 15 - 10t \end{array}} \quad \texttt{[SI]}$$

Encontrar la altura máxima es trivial; como el proyectil se lanza hacia abajo, la altura máxima coincide con la altura inicial: 50 metros. El objeto no puede subir si lo estamos lanzando hacia abajo.

En cuanto al alcance, tenemos que ver cuándo llega al suelo. En ese momento, su altura es la altura del suelo:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

En nuestro sistema de coordenadas, la altura del suelo es 0:

$$y = 0$$

Usando la ecuación de la posición para y:

$$50 + 15t - 5t^2 = 0$$

Podemos dividir los dos lados entre 5 para simplificar:

$$10 + 3t - t^2 = 0$$

Reordenando:

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

Se obtienen dos soluciones:

$$t_1 = 5 \text{ s}, \quad t_2 = -2 \text{ s}$$

La que tiene sentido en este problema es la positiva; habla del futuro. La solución predice que el proyectil llegará al suelo al cabo de 5 segundos.

Sustituyendo ahora en la ecuación de x:

$$x = 15\sqrt{3} \cdot 5$$

$$x \approx 129.90 \text{ m}$$

El alcance es de casi 130 metros.

4. Un observador detecta un proyectil en el aire a 50 metros de altura sobre él. El proyectil se mueve a una velocidad de 30 m/s y forma una inclinación de 30° respecto a la horizontal y hacia abajo. Es decir, el proyectil está cayendo.
¿Desde dónde se lanzó el proyectil?

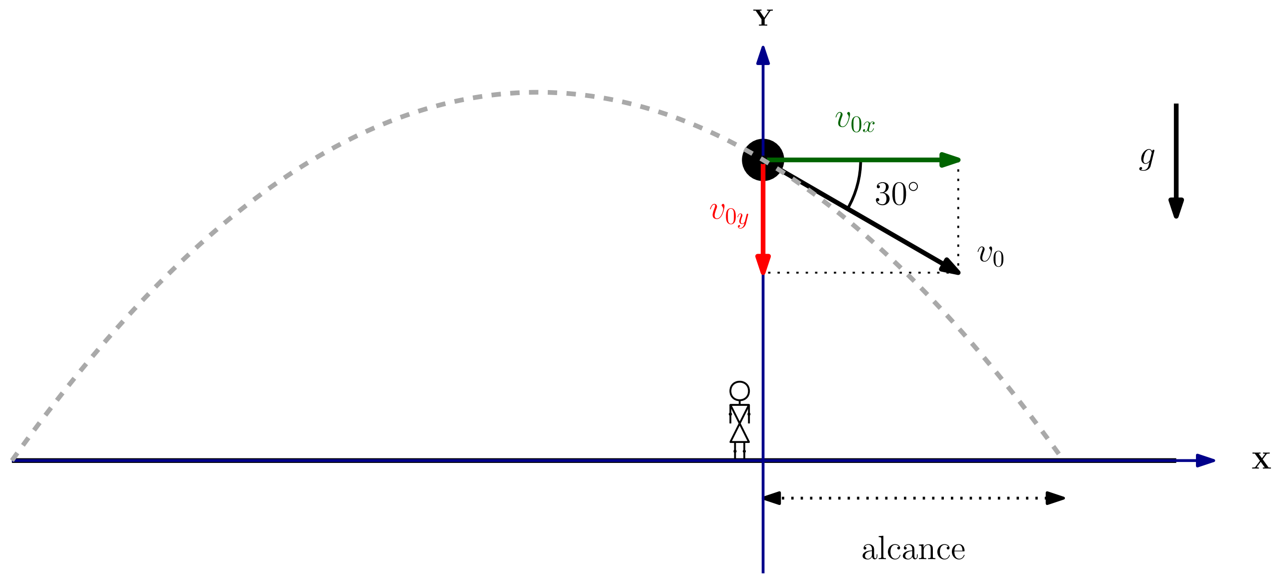


Figura 30: Problema 4. Dibujo del problema, del sistema de coordenadas y de la descomposición de la velocidad inicial en sus componentes X e Y.

Se trata exactamente del mismo problema que el anterior. Escogiendo el sistema de referencia adecuado son las mismas ecuaciones de posición:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 15\sqrt{3}t \\ y &= 50 + 15 \cdot t - 5t^2 \end{aligned}} \quad \texttt{[SI]}$$

Y las mismas ecuaciones de la velocidad:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= 15\sqrt{3} \\ v_y &= 15 - 10t \end{aligned}} \quad \texttt{[SI]}$$

Si suponemos que el proyectil fue lanzado desde el suelo, la altura del proyectil era 0 en ese momento (porque, en nuestro sistema de coordenadas, el suelo está a una altura 0):

$$y = 0$$

$$50 + 15 \cdot t - 5t^2 = 0$$

Es la misma ecuación que en el problema anterior. Las soluciones son:

$$t_1 = 5 \text{ s}, \quad t_2 = -2 \text{ s}$$

Sin embargo, ahora nos interesa **la solución negativa**. Porque queremos saber lo que ocurrió en el pasado. Es decir, el proyectil fue lanzado hace 2 segundos.

Usando la ecuación de x:

$$x = 15\sqrt{3} \cdot (-2) = -30\sqrt{3} \text{ m}$$

$$x \approx -51.96 \text{ m}$$

Es decir, el proyectil fue lanzado hace 2 segundos a una distancia de casi 52 metros.

5. ¿Por qué el tiro parabólico recibe ese nombre?

Porque la **trayectoria** de un objeto que se mueve según un tiro parabólico es una **parábola**.

ALUMNA: ¿Se puede demostrar de alguna manera?

PROFESOR: Claro. Podemos usar las ecuaciones de la posición del tiro parabólico:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Despejamos el tiempo de la primera ecuación:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

Sustituimos en la segunda:

$$y = y_0 + v_{0y}\frac{x - x_0}{v_{0x}} + \frac{1}{2}a \quad \frac{x - x_0}{v_{0x}} \quad ^2$$

Esa ecuación es la ecuación de la trayectoria. Nos da y en función de x y vemos que y es un polinomio de segundo grado en x. Y sabemos que la gráfica de una función cuadrática (un polinomio de segundo grado) es una parábola.

ALUMNA: ¿Puede ordenar la expresión para que se vea mejor?

PROFESOR: `[Suspira.]` De acuerdo.

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - x_0\frac{v_{0y}}{v_{0x}} +$$

$$+\frac{a}{2v_{0x}^2} \quad x^2 + x_0^2 - 2xx_0$$

$$y = \frac{a}{2v_{0x}^2}x^2 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{ax}{v_{0x}^2}\right)x +$$
$$+ \left(y_0 - x_0\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{ax_0^2}{2v_{0x}^2}\right)$$

Aquí se puede ver que efectivamente es un polinomio de segundo grado. El coeficiente líder[4] es:

$$\frac{a}{2v_{0x}^2}$$

El término independiente[5] es:

$$y_0 - x_0\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{ax_0^2}{2v_{0x}^2}$$

Y el coeficiente del término de primer grado[6] es:

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{ax}{v_{0x}^2}$$

6. ¿Con qué ángulo debe lanzarse un proyectil desde el suelo a una velocidad inicial de 100 m/s para que el alcance sea 50 metros?

Se trata de tiro parabólico nuevamente. Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Si llamamos α al ángulo de inclinación que nos piden, podemos deducir:

$$v_{0x} = v_0\cos(\alpha)$$

$$v_{0y} = v_0\sin(\alpha)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0\cos(\alpha)t \\ y = y_0 + v_0\sin(\alpha)t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Sustituyendo los datos que conocemos para un sistema de coordenadas en el que el origen de coordenadas coincide con el proyectil en el instante inicial, el eje X coincide con el suelo y es positivo hacia donde se mueve el objeto y el eje Y es vertical al suelo y es positivo hacia arriba:

$$\begin{cases} x = 0 + 100\cos(\alpha)t \\ y = 0 + 100\sin(\alpha)t + \frac{1}{2}(-10)t^2 \end{cases}$$

Simplificando obtenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x = 100\cos(\alpha)t \\ y = 100\sin(\alpha)t - 5t^2 \end{cases}$$

[4] Lo que normalmente llamamos a.
[5] Lo que normalmente llamamos c.
[6] Lo que normalmente llamamos b.

Si el alcance es de 50 metros, en nuestro sistema de coordenadas eso significa que la posición final es $x = 50$ m e $y = 0$ m. Por lo tanto:

$$\begin{cases} 50 = 100\cos(\alpha)t \\ 0 = 100\sin(\alpha)t - 5t^2 \end{cases}$$

En la segunda ecuación podemos sacar t como factor común:

$$0 = (100\sin(\alpha) - 5t) \cdot t$$

Y eso es cierto solamente si t es 0 (lo que no nos interesa; corresponde al momento del lanzamiento) o si:

$$0 = 100\sin(\alpha) - 5t$$

El sistema de ecuaciones se convierte en:

$$\begin{cases} 50 = 100\cos(\alpha)t \\ 0 = 100\sin(\alpha) - 5t \end{cases}$$

Podemos simplificar:

$$\begin{cases} 1 = 2\cos(\alpha)t \\ 0 = 20\sin(\alpha) - t \end{cases}$$

Despejamos en la primera:

$$t = \frac{1}{2\cos(\alpha)}$$

Y sustituimos en la segunda:

$$0 = 20\sin(\alpha) - \frac{1}{2\cos(\alpha)}$$

$$20\sin(\alpha) = \frac{1}{2\cos(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{40}$$

Pero hay una fórmula en trigonometría que nos dice que el seno del ángulo doble es el doble del producto del seno por el coseno:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\sin(2\alpha) = \frac{1}{40}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{1}{20}$$

Haciendo el arcoseno:

$$2\alpha = \arcsin \frac{1}{20}$$

$$2\alpha = 2.865983983°$$

$$\alpha = 1.4329919915°$$

¡Menos de un grado y medio!

7. Se lanza un balón desde el suelo a una velocidad de 10 metros partido segundo con una inclinación de 45 grados respecto a la horizontal. A 3 metros del punto de lanzamiento, hay un muro de 6 metros de altura. ¿Pasará el balón por encima del muro?

Las ecuaciones del tiro parabólico son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Escogiendo el sistema de coordenadas adecuado, la posición inicial del balón será (0, 0) m, la aceleración será -10 m/s² y las componentes de la velocidad serán:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos(45°) = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin(45°) = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Las ecuaciones de movimiento en este sistema son:

$$\begin{cases} x = 0 + 5\sqrt{2}t \\ y = 0 + 5\sqrt{2}t + \frac{1}{2}(-10)t^2 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} x = 5\sqrt{2}t \\ y = 5\sqrt{2}t - 5t^2 \end{cases}$$

Queremos saber cuál es la altura y del balón cuando x coincide con la posición horizontal del muro. Pueden ocurrir las siguientes cosas:

- Si esa altura y es mayor que la altura del muro, el balón pasa por encima del muro.
- Si esa altura y es igual o menor que la altura del muro, el balón no pasará por encima del muro.

  Si la altura es igual o menor que la del muro pero es positiva, el balón choca contra el muro.

  Si la altura es negativa, el balón ha caído al suelo antes de llegar al muro. Y la altura que hemos obtenido es la que tendría si el suelo no hubiese detenido su movimiento.

Por lo tanto, tenemos que resolver:

$$x_{\text{balón}} = x_{\text{muro}}$$

$$5\sqrt{2}t = 3$$

$$t = \frac{3}{5\sqrt{2}} \approx 0.424 \text{ s}$$

Sustituyendo en la ecuación de la altura:

$$y = 5\sqrt{2}t - 5t^2$$

$$y = 5\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} - 5 \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 3 - 5 \cdot \frac{9}{25 \cdot 2} =$$
$$= 3 - \frac{9}{5 \cdot 2} =$$
$$= 3 - \frac{9}{10} = 2.1 \text{ m}$$

La altura es menor que la altura del muro. El balón **chocará contra el muro**.

8. En Internet pueden encontrarse fórmulas para calcular la altura máxima, el alcance y el *"tiempo de vuelo"* del tiro parabólico.
¿Por qué no te he explicado esas fórmulas? ¿Esas fórmulas no permiten resolver más rápidamente los problemas?

Memorizar una fórmula es útil cuando:

- la fórmula es **general**

  Es decir, cuando puede aplicarse en muchos contextos diferentes y no solamente en problemas muy específicos.

- la fórmula puede aplicarse con mucha **frecuencia**

  Es decir, aparece en numerosos problemas en los que podemos aplicarla. Y, por lo tanto, puede ahorrar tiempo en muchas ocasiones.

Las definiciones del seno y del coseno, el teorema de Pitágoras, la fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas, las ecuaciones del MRUA y las ecuaciones del MRU cumplen las dos condiciones: son muy generales y aparecen con frecuencia en muchos contextos.

Sin embargo, las demás fórmulas del tiro parabólico que encuentras en Internet no cumplen las condiciones.

- La fórmula de la altura máxima considera que el tiro parabólico es desde el suelo y no sirve si el tiro parabólico es **hacia abajo**.
- La fórmula del *"tiempo de vuelo"* considera que la altura inicial y la altura final son la misma (0). No es aplicable cuando el punto de lanzamiento y el punto de llegada no están a la misma altura.
- La fórmula del alcance máximo tiene problemas similares a los de las fórmulas anteriores.

ALUMNO: ¿Entonces las fórmulas de Internet no son útiles?

PROFESOR: No he dicho eso. He dicho que no merece la pena memorizarlas.

ALUMNO: ¿Y hay algún caso en el que merezca la pena memorizarlas?

PROFESOR: Probablemente sí. Si tienes que resolver frecuentemente problemas donde puedes usarlas, quizás merece la pena que las memorices. En ese caso, saber las fórmulas te va a ahorrar tiempo.

Además, puedes **deducir** esas fórmulas de las que sí merece la pena recordar. Saber las que merece la pena recordar, **saber manejarlas** y saber deducir cosas a partir de ellas es más valioso que aprender muchas fórmulas.

Voy a usar una analogía.

Imagina que tienes una caja de herramientas. La caja de herramientas es muy completa y tiene cientos de herramientas: martillos, destornilladores, llaves... Y ahora quieres clavar un clavo.

¿Cuál de los diez martillos que contiene la caja usas? Si no eres un experto en herramientas, es posible que pierdas mucho tiempo buscando el martillo adecuado. Incluso es posible que escojas el martillo inadecuado para clavar ese clavo en esa superficie.

Puedes imaginar que la *"caja de herramientas"* es tu mente y las *"herramientas"* son las leyes, los teoremas... que conoces.

No llenes tu *"caja de herramientas"* de muchas *"herramientas"*. Llénala de las herramientas que pueden ser más útiles y aprende a usar esas herramientas correcta y fluidamente.

> **9**. Obtén una fórmula para la altura máxima de un tiro parabólico a partir de las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento de cualquier tiro parabólico son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases}$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad vertical es 0:

$$v_y = 0$$

$$0 = v_{0y} + at$$

$$t = \frac{-v_{0y}}{a}$$

Sustituyendo en la ecuación de la altura:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot \frac{-v_{0y}}{a} + \frac{1}{2}a \quad \frac{-v_{0y}}{a} \quad {}^{2}$$

$$y = y_0 - \frac{v_{0y}^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v_{0y}^2}{a^2}$$

$$y = y_0 - \frac{v_{0y}^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{a}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{a}$$

> **10**. Desde una altura de 20 metros se lanza horizontalmente un proyectil a 100 m/s. Calcula la velocidad del proyectil cuando llega al suelo.

Es un tiro parabólico *horizontal*. Donde la componente Y de la velocidad inicial es cero ($v_{0y} = 0$) y la componente X de la velocidad inicial coincide con la velocidad inicial ($v_{0x} = v_0$). Por lo que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases}$$

Se convierten en:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \\ y = y_0 + \frac{1}{2}at^2 \\ v_x = v_0 \\ v_y = at \end{cases}$$

En el sistema de coordenadas adecuado:

$$\begin{cases} x = 100t \\ y = 20 + \frac{1}{2}(-10)t^2 \\ v_x = 100 \\ v_y = -10t \end{cases}$$

Llega al suelo cuando la altura del proyectil coincide con la altura del suelo:

$$y = y_{\text{suelo}}$$

$$y = 0$$

$$20 + \frac{1}{2}(-10)t^2 = 0$$

$$-5t^2 = -20$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm\sqrt{4}$$

Solamente nos interesa la solución positiva; habla del futuro.

$$t = 2 \text{ s}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la velocidad:

$$\begin{cases} v_x = 100 \text{ m/s} \\ v_y = -10 \cdot 2 = -20 \text{ m/s} \end{cases}$$

La velocidad cuando llega al suelo es, por lo tanto:

$$\vec{v} = (100, -20) \text{ m/s}$$

Su módulo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= \sqrt{100^2 + (-20)^2} = \sqrt{10400} =$$

$$\approx 101.98 \text{ m/s}$$

Y el ángulo entre la horizontal y la velocidad puede encontrarse por trigonometría usando la tangente:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{|v_y|}{|v_x|} = 100/20 = 5$$

$$\alpha = \text{arc tg}(5) \approx 78.69°$$

Movimientos circulares

1. Un tocadiscos hace girar el elepé (LP) *Entre el cielo y el suelo* (1986) de Mecano a 45 revoluciones por minuto. ¿Cuántas veces gira el disco durante la duración de la canción *Hijo de la Luna* (4 minutos y 20 segundos)? ¿Cuál es la distancia recorrida por un punto en el borde del disco durante ese tiempo si el radio es de 30,5 cm? ¿Y las aceleraciones normal, tangencial y angular durante la canción?

Asumiendo que el movimiento es un *MCU* (*movimiento circular uniforme*), sus ecuaciones son:

$$r = r_0$$
$$\phi = \phi_0 + \omega \cdot t$$

La velocidad angular es:

$$\omega = 45 \text{ r.p.m.}$$

Convertimos la velocidad angular a radianes partido segundo:

$$\omega = 45 \, \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} \cdot \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{vueltas}} =$$

$$= \frac{90\pi}{60} \, \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{3\pi}{2} \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

El tiempo es:

$$t = 4 \text{ min} + 20 \text{ s} = 260 \text{ s}$$

El número de vueltas es el ángulo recorrido:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0$$

De la fórmula del *MCU*, tenemos:

$$\Delta\phi = \omega \cdot t = \frac{3\pi}{2} \cdot 260 =$$

$$= 390\pi \text{ rad}$$

Cambiando las unidades:

$$\Delta\phi = 390\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vueltas}}{2\pi \text{ rad}} =$$
$$= 195 \text{ vueltas}$$

La distancia recorrida s se calcula fácilmente sabiendo que:

$$s = \phi \cdot r =$$

$$= 390\pi \cdot 0.305 =$$

$$= 373,6924461 \text{ m}$$

La aceleración tangencial y la aceleración son 0 porque se trata de un MCU. En un movimiento circular uniforme:

- la dirección de la velocidad lineal $\vec{v}$ no cambia, por lo que la aceleración tangencial es cero
- la velocidad angular ω no cambia, por lo que la aceleración angular es cero

La aceleración normal es una aceleración centrípeta y se puede calcular:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Como $v = \omega \cdot r$:

$$a_n = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r}$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r$$

$$a_n = \quad \frac{3\pi}{2}^{\,2} \cdot 0.305$$

$$a_n = 6,773 \text{ m/s}^2$$

2. Un tocadiscos hace girar el elepé (LP) *Entre el cielo y el suelo* (1986) de Mecano a 45 revoluciones por minuto. El disco gira 195 vueltas durante la duración de la canción *Hijo de la Luna*? ¿Cuánto dura la canción?

Se trata de un *MCU*:

$$\begin{aligned} r &= r_0 \\ \phi &= \phi_0 + \omega \cdot t \end{aligned}$$

Nos dicen que el ángulo recorrido es de 195 vueltas. Si consideramos que la posición angular inicial ϕ_0 es 0, podemos decir:

$$\phi = 195 \text{ vueltas}$$

y sabemos que:

$$\omega = 45 \text{ r.p.m.} = 45 \, \frac{\text{vuelta}}{\text{min}}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación:

$$\phi = \phi_0 + \omega \cdot t$$

tenemos:

$$195 = 0 + 45 \cdot t$$

$$t = \frac{195}{45} = 4.\overline{3} \text{ min}$$

$$t = 4 \text{ min} + 20 \text{ s}$$

En este caso, para calcular lo que se pide, no es necesario hacer un cambio de unidades.

3. Un punto material se mueve según las ecuaciones de movimiento (en unidades del SI):

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 3 \cdot \cos \ \frac{\pi}{5} \cdot t \\ y &=& 3 \cdot \sin \ \frac{\pi}{5} \cdot t \end{array}\right\}$$

¿Cuál es la ecuación implícita de la trayectoria? ¿Cuáles son las características de este movimiento?

Se trata de la composición de dos **movimientos armónicos simples** (MAS):

- un MAS en el eje X:
$$x = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)$$
- un MAS en el eje Y:
$$y = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)$$

En los dos casos, la amplitud es la misma (3) y la frecuencia angular también ($\pi/5$). La única diferencia es la fase inicial, porque la primera ecuación se puede escribir como:

$$x = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si elevamos ambas ecuaciones al cuadrado:

$$x^2 = 9 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)$$

$$y^2 = 9 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)$$

Y sumamos ambas:

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 9 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)$$

$$x^2 + y^2 = 9 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right)\right)$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Que es la ecuación de una circunferencia de radio $\sqrt{9} = 3$ metros.

4. Calcula la aceleración centrípeta de un MCU si el radio es de 2 m y la velocidad angular es de 4500 r.p.m.

Si la velocidad angular es de 4500 revoluciones por minuto:

$$\omega = 4500 \, \frac{\text{vuelta}}{\text{min}}$$

Se puede convertir a radianes por segundo:

$$\omega = 4500 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{2\pi}{1} =$$
$$= \frac{4500 \cdot 2\pi}{60} =$$
$$= \frac{9000\pi}{60} =$$
$$= \frac{900\pi}{6} =$$
$$= \frac{300\pi}{2} =$$

$$= 150\pi \text{ rad/s}$$

Ahora podemos calcular la velocidad lineal v:

$$v = \omega \cdot r$$
$$v = 150\pi \cdot 2$$
$$v = 300\pi$$
$$v = 942,40 \text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$
$$a_{cp} = \frac{(942,40)^2}{2}$$
$$a_{cp} = 444\,058,88 \text{ m/s}^2$$

¡Es muchísimo mayor que la aceleración de la gravedad en la superficie de nuestro planeta[7]!

4. Una estrella de neutrones es el cadáver de una estrella enorme que explotó como supernova. Las estrellas de neutrones son esferas de unos 12 km de radio que giran muy rápidamente.
Tienen campos magnéticos muy intensos y el giro hace que emitan ondas de radio de un modo parecido a un faro. En esos casos reciben el nombre de *"púlsares"*.
El púlsar PSR B1919+21 tiene un periodo aproximado de 1.33 s.

a) ¿Cuál es su frecuencia?
b) ¿Cuál es la velocidad angular?
c) ¿Cuál es la velocidad lineal en un punto del ecuador de la estrella?
d) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en un punto del ecuador de la estrella?

Nos dicen que:

$$T = 1.33 \text{ s}$$

La frecuencia es:

$$\nu = f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.33} = 0.7519 \text{ Hz}$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.33} = 4.724 \text{ rad/s}$$

Como el radio es:

$$r = 12 \text{ km} = 12\,000 \text{ m}$$

La velocidad lineal en el ecuador de la estrella es:

$$v = \omega \cdot r = 4.724 \cdot 12\,000 = 56\,690 \text{ m/s}$$

[7] La Tierra, por si lo habías olvidado. O por si lees esto en un futuro lejano y estás en un planeta diferente similar al planeta Mesklin de *"Misión de gravedad"* de Hal Clement.

La aceleración centrípeta en el ecuador será:

$$a_{cp} = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{56\,690^2}{12\,000} =$$
$$= 267\,816 \text{ m/s}^2$$

5. Calcula el periodo de rotación, la frecuencia, la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración centrípeta en un punto del Ecuador de nuestro planeta.
El radio ecuatorial de nuestro planeta es aproximadamente de 6738 km.

El periodo es de un día:

$$T = 1 \text{ día} =$$
$$= 1 \text{ día} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3600 \text{ s/h} = 86\,400 \text{ s}$$

La frecuencia:

$$\nu = f = \frac{1}{T} = 1.157 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$$

La velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La velocidad lineal en el ecuador:

$$v = \omega \cdot r = 7.272 \cdot 10^{-5} \cdot 6738000 = 490 \text{ m/s}$$

Y la aceleración centrípeta:

$$a_{cp} = a_n = \frac{v^2}{r} = 0.0356 \text{ m/s}^2$$

Dinámica

La dinámica es la parte de la mecánica que relaciona las interacciones con los movimientos que producen o cambian.

En cierto sentido, la dinámica busca contestar a una pregunta: *si las interacciones en este sistema son estas y se está moviendo así, ¿cómo se moverá después por esas interacciones?*

Para eso es necesario conocer la intensidad de las interacciones (las leyes de fuerza de cada interacción) y una ley que relacione esa intensidad con el tipo de movimiento (la segunda ley de Newton o ley fundamental de la dinámica).

Fundamentos

1. ¿Qué diferencia hay entre una interacción y una fuerza?

Una **interacción** es una acción entre dos o más cuerpos que puede cambiar las posiciones de los cuerpos o de sus partes. Si cambian las posiciones de las partes, entonces puede cambiar su forma.

La **fuerza** es una magnitud física que sirve para medir la intensidad de una interacción. Es decir, sirve para decir si la interacción es más intensa o menos intensa y para darle un valor numérico.

En el lenguaje cotidiano[8], a veces las dos palabras pueden ser equivalentes.

En el lenguaje de la física, se consideran cosas diferentes, pero es cierto que **por abuso del lenguaje** a veces se usan como sinónimos.

2. Pon ejemplos de interacciones.

Algunos ejemplos de interacciones son:

- La interacción peso entre la Tierra y una manzana que cae.
- La interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna.
- La interacción electrostática entre un jersey que te quitas y tus pelos que se quedan pegados al jersey.
- La interacción magnética entre la aguja de una brújula que señala el norte y el planeta Tierra.
- La interacción magnética entre un imán y un trozo de hierro.
- La interacción magnética entre un imán y la puerta de la nevera[9].

[8] El lenguaje que usas normalmente en casa y en la calle.
[9] La nevera = el frigorífico = el refrigerador.

- El empuje hidrostático entre un globo aerostático y el aire que lo rodea.
- El empuje hidrostático entre el agua y un barco que flota sobre ella.
- La tensión superficial en la superficie de un líquido que mantiene a un insecto pequeño caminando con sus patas sobre ella.
- El rozamiento de contacto entre dos superficies cuando intentamos mover un mueble y hay rozamiento del mueble con el suelo.
- ...

3. ¿Qué son las interacciones fundamentales?

En la pregunta anterior, hay una larga lista de interacciones.

A lo largo de la Historia, hemos descubierto que todas las interacciones que conocemos son resultado de cuatro interacciones que llamamos: las **cuatro interacciones fundamentales**.

Son:

- la interacción gravitatoria
- la interacción electromagnética

  que es la que causa los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos.

  Y, por lo tanto, en cierto sentido es la principal responsable de casi todos los fenómenos que vemos incluyendo los químicos y biológicos.
- la interacción nuclear fuerte

  que ocurre en los núcleos de los átomos y es la que mantiene unidos a los protones y neutrones dentro de los núcleos.
- la interacción nuclear débil

  que también ocurre en los núcleos, pero que está relacionada con algunos procesos de desintegración. Por ejemplo, cuando un neutrón se convierte en un protón más un electrón más un antineutrino electrónico:

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

En la actualidad no tenemos ninguna prueba clara de que existan más interacciones fundamentales.

4. ¿Cuál es la unidad del SI para la fuerza?

La unidad del Sistema Internacional de unidades para la fuerza es el **newton** que se representa con una letra **N** mayúscula.

La unidad se llama así en honor al físico y matemático Isaac Newton.

Es una magnitud derivada del SI. Y el newton se puede definir así:

«Un newton es la fuerza necesaria para acelerar una masa de 1 kg hasta 1m/s^2.»

Es decir:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m/s^2}$$

5. ¿Qué tipo de magnitud física es la fuerza?

La fuerza es una magnitud física:

- **derivada** del SI porque no es una de las fundamentales.

  Las magnitudes fundamentales del SI son la masa, la longitud, el tiempo, la temperatura, la intensidad de corriente eléctrica, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia.

- **vectorial**.

  Porque se representa como un vector. Es decir, como un segmento orientado. Es decir, como una **flecha**.

  Como la fuerza es una magnitud vectorial, tiene:

  - módulo
  - dirección
  - sentido
  - y punto de aplicación

  La velocidad y la aceleración también son vectoriales. La masa y el tiempo son escalares.

6. ¿Qué aparato puede usarse para medir una fuerza?

El **dinamómetro** es un aparato para medir fuerzas que se basa en la interacción elástica y la ley de Hooke para la interacción elástica.

Un dinamómetro está formado por un muelle (o resorte) que puede estar rodeado por un cilindro con una escala graduada.

Como según la ley de Newton, la elongación del muelle (lo que se estira o contrae respecto a su longitud *"natural"*) es directamente proporcional a la fuerza aplicada, en las marcas de escala del cilindro se pueden marcar las fuerzas correspondientes a cada longitud del muelle.

Así se une un extremo del dinamómetro a algún objeto fijo y el otro extremo se une a aquello cuya fuerza que queramos medir.

Leyes de Newton

1. ¿Cuáles son las tres leyes de Newton de la dinámica?

Isaac Newton tiene muchas leyes y teoremas con su nombre. Pero cuando hablamos de las **tres leyes de Newton de la dinámica** nos referimos a estas tres:

- 1ª ley de Newton o **ley de inercia**
- 2ª ley de Newton o **ley fundamental de la dinámica**
- 3ª ley de Newton o **ley de acción y reacción**

2. ¿Qué dice la primera ley de Newton?

La **primera ley de Newton** o **ley de inercia** dice que todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si ninguna fuerza actúa sobre él o la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.

Nuestra intuición nos dice que *"para que exista movimiento tiene que haber una fuerza"* y es lo que pensadores[10] como Aristóteles pensaban.

Pero la primera ley de Newton dice que **puede existir movimiento sin fuerzas**. El único movimiento que puede existir sin fuerzas es el `MRU` (movimiento rectilíneo uniforme).

En el movimiento rectilíneo uniforme:

- el movimiento es en línea recta
- la velocidad es constante (no cambia ni su módulo, ni su sentido)

Podemos resumir la primera ley así:

$$\boxed{F = 0 \iff a = 0}$$

Es decir, si la suma de todas las fuerzas F es cero, la aceleración a es cero y, por lo tanto, la velocidad no cambia y el cuerpo está en reposo o en `MRU`.

3. ¿Qué dice la segunda ley de Newton?

La **segunda ley de Newton** o **ley fundamental de la dinámica** dice que la fuerza total F aplicada sobre un cuerpo de masa m es directamente proporcional a la aceleración a y la masa es la constante de proporcionalidad:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

- $\vec{F}$ = fuerza total

  se mide en newtons (N)
- m = masa

  se mide en kilogramos (kg)
- $\vec{a}$ = aceleración

  se mide en metros partido segundo al cuadrado (m/s^2)

Como la masa siempre es positiva, la dirección y el módulo de la fuerza son iguales a la dirección y el módulo de la aceleración.

El módulo de la fuerza se calcula con:

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

4. ¿Qué dice la tercera ley de Newton?

La **tercera ley de Newton** o **ley de acción y reacción** dice que, cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce la misma fuerza sobre el cuerpo A con la misma dirección y módulo, pero de sentido opuesto.

Normalmente una de las dos fuerzas se llama **acción** y la otra fuerza se llama **reacción**.

Por ejemplo:

[10] Es decir, *filósofos*.

- la Tierra atrae a la Luna, pero la Luna atrae a la Tierra con la misma fuerza
- un imán atrae a un trozo de hierro, pero el trozo de hierro atrae al imán con la misma fuerza
- una carga eléctrica positiva atrae a una carga eléctrica negativa, pero la carga eléctrica negativa atrae a la carga eléctrica positiva con la misma fuerza
- una carga eléctrica positiva repele a otra carga eléctrica positiva, pero la segunda carga eléctrica positiva repele a la primera carga eléctrica positiva con la misma fuerza
- ...

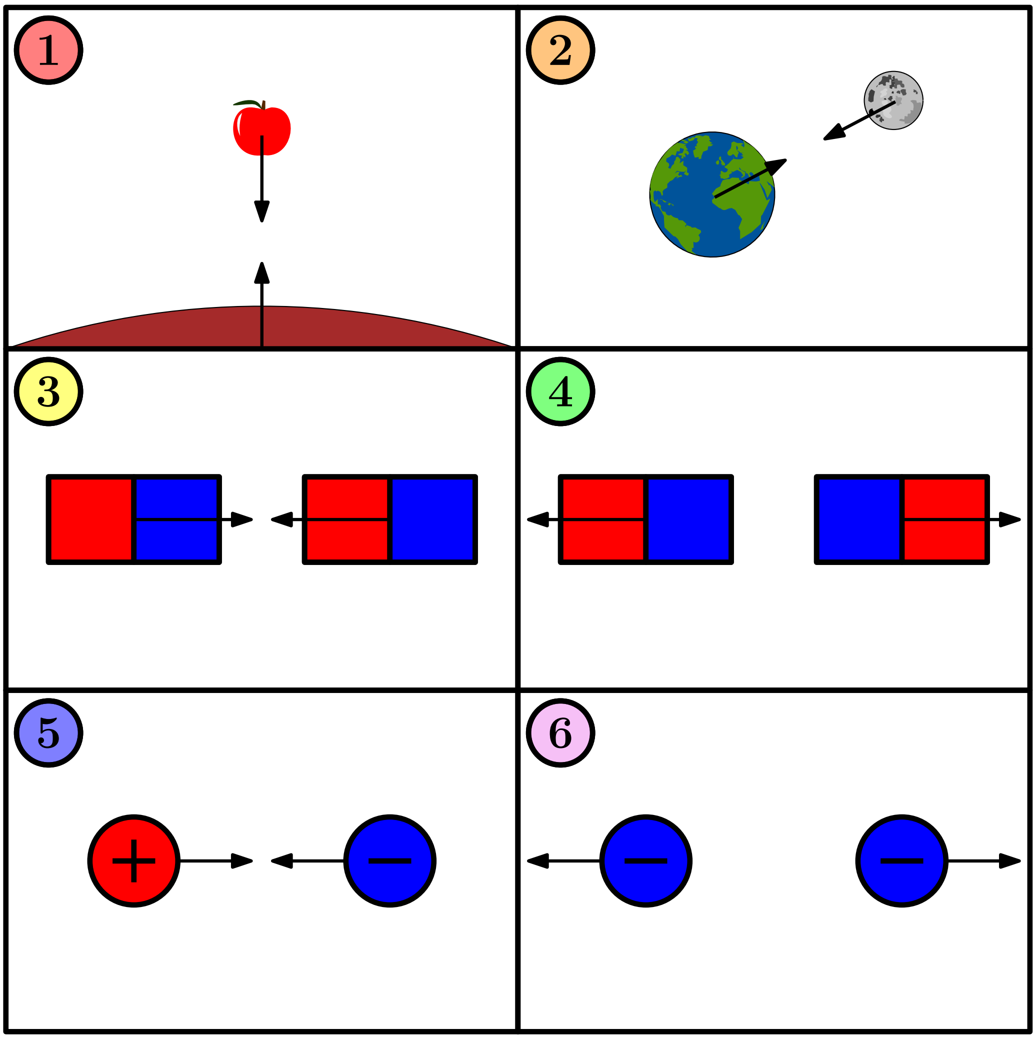


Figura 31: **Acción y reacción**. 1. La Tierra atrae a la manzana y la manzana atrae a la Tierra. 2. La Tierra atrae a la Luna y la Luna atrae a la Tierra. 3. Un imán atrae a otro imán y el otro imán atrae al primero. 4. Un imán repele a otro imán y el otro imán repele al primero. 5. Una carga positiva atrae a una negativa y la negativa atrae a la positiva. 6. Una carga negativa repele a una negativa y vicecersa.

Peso, normal y rozamiento

1. Un bloque de 8 kg está en reposo sobre un plano horizontal que tiene un coeficiente de rozamiento de 0.1. Una persona tira horizontalmente del bloque hacia la izquierda con una fuerza de 2 N.

a) Dibuja el problema con las fuerzas aplicadas.

b) Calcula el peso del bloque.
c) Calcula la normal.
d) Calcula la fuerza de rozamiento.

a) Las fuerzas son:

- peso: vertical y hacia abajo
- normal: vertical y hacia arriba
- tensión: horizontal y hacia la izquierda
- rozamiento: horizontal y hacia la derecha

No sabemos aún cuáles son los módulos, así que las longitudes de los vectores en el dibujo no son reales.

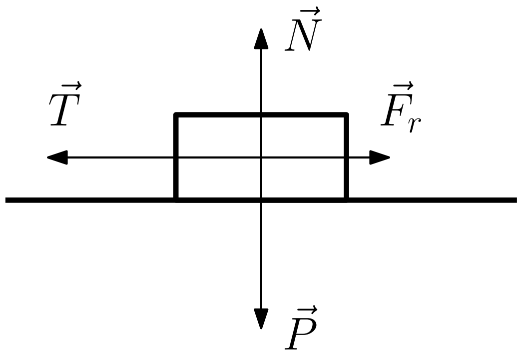


Figura 32: **Peso, normal y rozamiento**. 1. a)

b) El peso es:

$$P = m \cdot g$$

Suponemos que se trata de la Tierra y por lo tanto g es aproximadamente 9,81 m/s². Pero nosotros vamos a usar la aproximación de 10 m/s².

Sustituyendo:

$$P = 8 \cdot 10 = 80 \text{ N}$$

c) Como las únicas fuerzas en el eje de la normal son el peso y la normal, la normal tiene que ser igual que el peso:

$$N - P = 0$$
$$N = P = 80 \text{ N}$$

d) La fuerza de rozamiento es:

$$F_r \leq \mu \cdot N$$

$$F_r \leq 0.1 \cdot 80 = 8 \text{ N}$$

Sabemos que es menor o igual que 8 newtons.

Pero como la tensión con la que la persona tira es 2 N, no tiene sentido que la fuerza de rozamiento sea mayor y, por lo tanto, la fuerza de rozamiento es 2 N.

$$F_r = 2 \text{ N}$$

2. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento si en el ejercicio anterior la tensión con la que tira la persona es de 10 N?

Todo el ejercicio es igual que antes.

Y llegamos a:

$$F_r \leq 0.1 \cdot 80 = 8 \text{ N}$$

Pero ahora la tensión es mayor, es 10 N. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es igual a 8 newtons (el valor máximo que puede tener):

$$F_r = 8 \text{ N}$$

Problemas en 2D

1. Un bloque de 5 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado 60 grados sexagesimales. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es de 0,2. Calcula la aceleración del bloque bajo esas circunstancias.

En un problema de dinámica de estas características es adecuado:

- dibujar todas las fuerzas
- dibujar el sistema de coordenadas
- descomponer aquellas fuerzas que no estén en los ejes

La fuerza de rozamiento debe ir hacia arriba; está en reposo y la única fuerza tangencial a la superficie es la componente X del peso.

El peso es:

$$P = m \cdot g$$

Las componentes del peso:

$$P_y = P \cdot \cos(\alpha)$$
$$P_x = P \cdot \sin(\alpha)$$

Sustituyendo la expresión del peso:

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

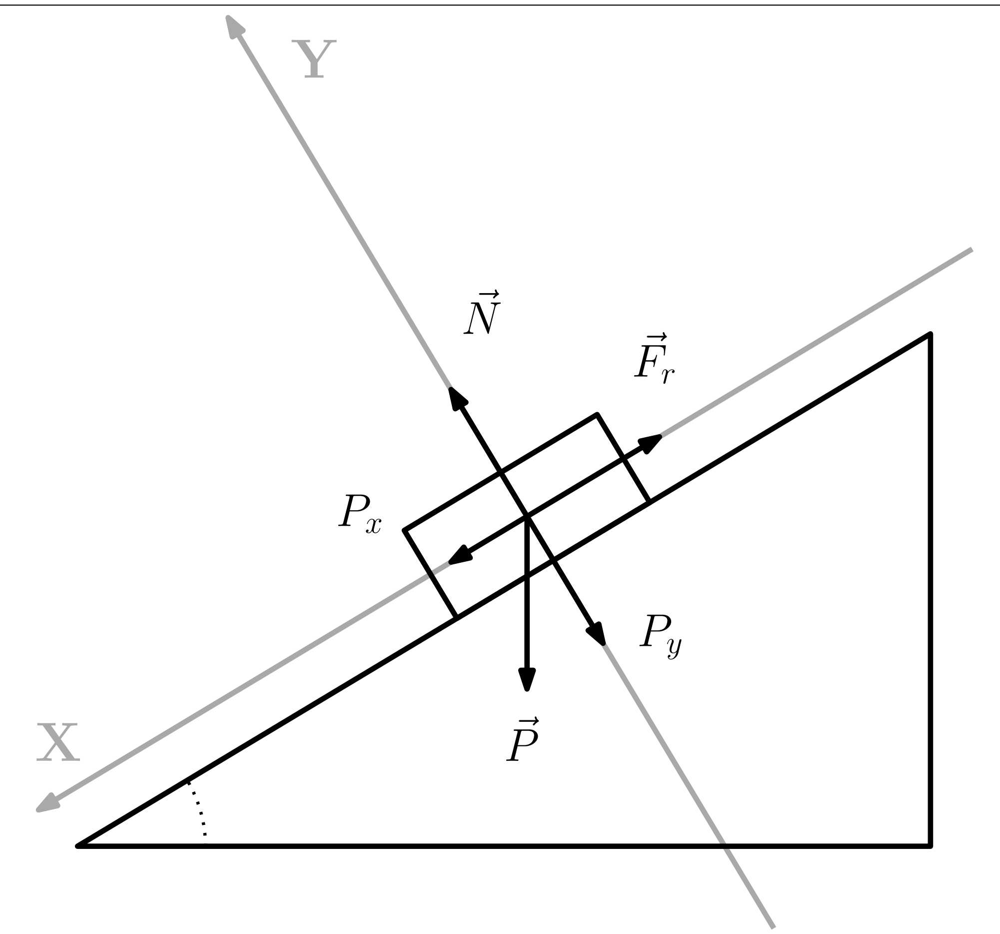


Figura 33: Primer problema de dinámica.

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

En el eje Y hay equilibrio, por lo tanto, la suma de las fuerzas es cero. Las únicas fuerzas que aparecen son la normal y la componente Y del peso:

$$N - P_y = 0$$

Por lo tanto, la normal es igual a la componente Y del peso:

$$N = P_y$$

$$N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

La fuerza de rozamiento es:

$$F_r \leq \mu \cdot N$$

$$F_r \leq \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

donde el igual corresponde al valor máximo. (Otros valores implicarían que no hay movimiento.)

La segunda ley de Newton en el eje X nos dice:

$$P_x - F_r = m \cdot a_x$$

Como solamente hay aceleración en ese eje, podemos eliminar el subíndice:

$$P_x - F_r = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a$$

La masa desaparece:

$$g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot g \cdot \cos(\alpha) = a$$

$$a = g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Sacamos g como factor común:

$$a = g \cdot (\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha))$$

Sustituyendo:

$$a = 10 \cdot (\sin(60°) - 0,2 \cdot \cos(60°)) =$$

$$= 7,66 \text{ m/s}^2$$

Creíamos que el bloque se iba a deslizar hacia abajo. Y la aceleración ha resultado positiva, lo que en nuestro sistema de coordenadas indica que es hacia abajo. Por lo tanto, el resultado es correcto.

2. ¿Qué hubiese sucedido si la aceleración hubiese sido negativa en el ejercicio anterior?

Cuando usamos que $F_r = \mu \cdot N$, suponemos que es la fuerza de rozamiento máxima. Si la aceleración fuese negativa en el ejercicio anterior, apuntaría hacia arriba. ¡El bloque se deslizaría hacia arriba! ¡Pero entonces la fuerza de rozamiento debería apuntar hacia abajo!

Lo que ocurre es que el valor de la fuerza de rozamiento coincide con el valor de la componente X de la fuerza peso P_x y no hay aceleración:

$$P_x - F_r = 0$$

$$F_r = P_x = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_r = 5 \cdot 10 \cdot \sin(60°)$$

$$F_r = 43,301 \text{ N}$$

Energía

Hay varias magnitudes físicas que se conservan en la Naturaleza. La energía es una de ellas.

Y para estudiar muchos sistemas físicos, la energía es una herramienta más útil que la fuerza.

1. ¿Cuáles son los principios de conservación de la Naturaleza?

Solamente en Física Clásica:

- conservación de la masa

En Física Moderna y Física Clásica:

- conservación de la carga eléctrica
- conservación de la energía
- conservación del momento lineal (= cantidad de movimiento)
- conservación del momento angular (= momento cinético)

2. Un muelle de masa despreciable y de constante elástica 3 N/m se encuentra comprimido 40 centímetros y en reposo con una masa de 5 kg en su extremo. El muelle se encuentra sobre una superficie plana y horizontal cuyo rozamiento con la masa es cero. Se suelta el muelle y la masa empieza a moverse. Calcula la velocidad final de la masa cuando está separada del muelle.

El sistema inicialmente tiene:

- Una energía cinética cero porque no se mueve:

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 \text{ J}$$

- Una energía potencial peso igual a cero porque está en el suelo: $E_p = mgh$.
- Una energía potencial elástica:

$$E_{p0} = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (0.40)^2 = \\ = 0,24 \text{ J}$$

- Una energía mecánica que es la suma de todas las anteriores:

$$E_{m0} = 0 + 0 + 0,24 = 0,24 \text{ J}$$

Al final tiene:

- Una energía cinética desconocida:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

- Una energía potencial peso igual a cero porque está en el suelo: $E_p = mgh$.
- Una energía potencial elástica igual a cero porque el muelle deja de estar en contacto con la masa.

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k x_1^2 = 0 \text{ J}$$

- Una energía mecánica que es la suma de todas las anteriores:

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Pero, si no hay fuerzas disipativas (= fuerzas no conservativas) como la fuerza de rozamiento, entonces **la energía mecánica se conserva**:

$$E_{m0} = E_{m1}$$
$$E_{m0} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Despejando la velocidad:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{m0}}{m}}$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,24}{5}}$$
$$v_1 = 0,3098/textm/s$$

¡Muy lentamente!

Pero si hubiese rozamiento, se movería más lentamente aún.

> **3**. Una fuerza cuya dirección es horizontal realiza un trabajo de 2400 J sobre un cuerpo cuando lo desplaza horizontalmente una distancia de 4 metros. Si la misma fuerza se aplica al mismo cuerpo con un ángulo alfa, pero ahora el trabajo es 1800 J y la distancia recorrida es de 5 m, ¿cuál es el ángulo?

El trabajo W que realiza una fuerza se puede calcular con:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Pero, como no sabemos integrar[11], tenemos que usar la expresión sólo válida para fuerzas constantes:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Como es un producto escalar, podemos escribirlo con los módulos así:

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

$$2400 = F \cdot 4 \cdot \cos 0°$$

$$2400 = F \cdot 4$$

$$F = 600 \text{ N}$$

Si el trabajo es 1500 J y el desplazamiento es de 5 m, pero la fuerza es la misma:

$$1500 = 600 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$$

$$1500 = 3000 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1500}{3000}$$

$$\cos\alpha = \frac{15}{30}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Este coseno es uno de los bien conocidos. El coseno de 60 grados sexagesimales es 1/2.

$$\alpha = 60°$$

4. Desplazamos 3 metros horizontalmente un bloque de 20 kg de masa sobre un plano con coeficiente de rozamiento de 0,1. Lo hacemos tirando con una fuerza de 300 N que forma un ángulo de 30° respecto a la horizontal. ¿Cuál es el trabajo realizado por esa fuerza?

El trabajo se puede calcular con:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

La fuerza de 300 N realiza un trabajo:

$$W = 300 \cdot 3 \cdot \cos 30°$$

$$W = 450 \cdot \sqrt{3} \text{ J}$$

Hay varias fuerzas más. La normal y el peso son perpendiculares al desplazamiento. Es decir, forman un ángulo de 90 grados. Y por lo tanto, el trabajo realizado por ambas es cero.

Queda la fuerza de rozamiento.

Descomponiendo las fuerzas se llega a:

[11] Oficialmente no, al menos.

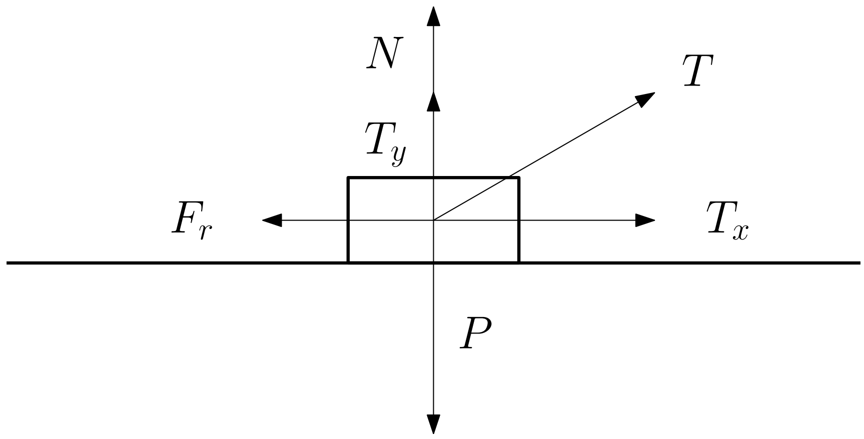


Figura 34: Problema 4 de energía.

$$N + T_y - P = 0$$
$$N = P - T_y$$
$$N = m \cdot g - T \cdot \sin\alpha$$

La fuerza de rozamiento máxima es:

$$F_r = \mu \cdot N$$
$$F_r = \mu \cdot (m \cdot g - T \cdot \sin\alpha)$$
$$F_r = 0,1 \cdot (20 \cdot 10 - 300 \cdot \sin 30°)$$
$$F_r = 5 \text{ N}$$

Su trabajo será:

$$W = 5 \cdot 3 \cdot \cos(180°)$$
$$W = -15 \text{ J}$$

Momento lineal

Si la energía es una de las magnitudes físicas que se conservan en la Naturaleza, el momento lineal (o "cantidad de movimiento") es otra.

Por ser una magnitud que se conserva, su importancia en física es muy grande y permite entender muchos procesos físicos de manera sencilla sin recurrir a expresiones de fuerzas.

1. ¿Cuáles son los principios de conservación de la Naturaleza?

Solamente en Física Clásica:

- conservación de la masa

En Física Moderna y Física Clásica:

- conservación de la carga eléctrica
- conservación de la energía
- conservación del momento lineal (= cantidad de movimiento)
- conservación del momento angular (= momento cinético)

Por el teorema de Noether, la conservación del momento lineal en un sistema es consecuencia de que ese sistema tiene simetría de traslaciones.

Es decir, si hacemos un experimento y, cuando trasladamos el experimento cualquier distancia, los resultados son siempre los mismos, hay simetría de traslaciones. Por el teorema de Noether, esto implica que el momento lineal se conservará en el sistema.

2. ¿Qué otro nombre tiene el *momento lineal*? ¿Qué letra se usa normalmente para representarlo?

El **momento lineal** también se llama **cantidad de movimiento** y normalmente se representa con la letra latina p.

3. ¿Cómo se define el momento lineal en mecánica clásica?

Como el producto de la velocidad de un objeto por su masa:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

- $\vec{p}$ = momento lineal
- m = masa
- $\vec{v}$ = velocidad

Como la masa siempre es positiva, el momento lineal tiene **la misma dirección y el mismo sentido que la velocidad**.

Además, si la masa es mayor, el momento lineal es mayor. Y si la masa es menor, el momento lineal es menor.

El módulo del momento lineal es:

$$\boxed{p = m \cdot v}$$

> **4**. ¿Cuáles son las unidades del momento lineal en el SI (Sistema Internacional) de unidades?
> Justifícalo usando la fórmula del momento lineal.

Como el momento lineal p se calcula:

$$p = m \cdot v$$

y en el SI la masa se mide en kg y la velocidad en m/s, entonces las unidades del momento lineal son:

$$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$$

Se puede demostrar que esto es equivalente a:

$$\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

En clase hemos usado una unidad, el *huygens*, con símbolo Hy que equivale a esto. Pero no es un nombre oficial aceptado por todo el mundo.

> **5**. Calcula el momento lineal de:
> a) una masa de 20 gramos que se mueve a 30 m/s
> b) un coche de 1000 kg que se mueve a 120 km/h

a) Tenemos:

- $m = 20$ g $= 0{,}020$ kg
- $v = 30$ m/s

Por lo tanto:

$$p = m \cdot v = 0.02 \cdot 30 = 0.6 \ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

b) Tenemos:

- $m = 1000$ kg
- $v = 120$ km/h $=$

  Tenemos que cambiar de unidades:

$$= 120 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000 \, \mathrm{m}}{1 \, \mathrm{km}} \cdot \frac{1 \, \mathrm{h}}{3600 \, \mathrm{s}} = 33.33 \ \mathrm{m/s}$$

Por lo tanto:

$$p = m \cdot v = 1000 \cdot 33.33 = 33300 \text{ N} \cdot \text{s}$$

6. Una masa de 2 kg se mueve a 10 m/s hacia la derecha. ¿Cuál es su momento lineal?

El momento lineal p se define como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Si solamente queremos el módulo:

$$p = m \cdot v$$

$$p = 2 \cdot 10$$

$$p = 20 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El Sistema Internacional de unidades no tiene una unidad definida. Así que podemos usar por ejemplo el newton multiplicado segundo:

$$p = 20 \text{ N} \cdot \text{s}$$

O podemos usar el *huygens* (Hy) en honor al holandés Christiaan Huygens, indicando que es una abreviatura que no forma parte del SI pero que equivale a las anteriores:

$$p = 20 \text{ Hy}$$

7. Una partícula de 23 kg se mueve a 100 m/s y al cabo de 10 segundos se mueve a 2 m/s. ¿Cuál es la fuerza media que ha experimentado?

El momento lineal inicial es:

$$p_0 = m \cdot v_0 = 23 \cdot 100 = 2300 \text{ Hy}$$

El momento inicial final es:

$$p_1 = m \cdot v_1 = 23 \cdot 2 = 46 \text{ Hy}$$

La variación de momento lineal (el impulso mecánico):

$$I = \Delta p = p_1 - p_0 =$$

$$= 46 - 2300 = -2254 \text{ Hy}$$

La segunda ley de Newton se puede expresar así:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

es decir, la fuerza es la derivada del momento lineal respecto al tiempo. Pero no podemos usar las derivadas; no se estudian en Eslovaquia.

Por lo tanto, debemos hacer:

$$\vec{F}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

En módulo:

$$F_{\text{media}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F_{\text{media}} = \frac{-2254}{10} = -225.4 \text{ N}$$

¿Podía contestarse a este ejercicio de otra manera? Sí.

Podíamos encontrar la aceleración media:

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_{\text{media}} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$$

$$a_{\text{media}} = \frac{2 - 100}{10}$$

$$a_{\text{media}} = -9.8 \text{ m/s}^2$$

La segunda ley de Newton:

$$F_{\text{media}} = m \cdot a_{\text{media}}$$

$$F_{\text{media}} = 23 \cdot (-9.8)$$

$$F_{\text{media}} = -225, 4 \text{ N}$$

Exactamente el mismo resultado.

8. Una masa de 3 kg se mueve a 20 m/s hacia la derecha y otra masa de 4 kg se mueve hacia la izquierda a 10 m/s. Las dos masas colisionan y, después de la colisión, la primera masa se mueve a 2 m/s hacia la izquierda. Encuentra la velocidad final de la segunda masa tras la colisión. ¿Es un choque elástico o inelástico?

Suponiendo que no hay interacciones externas, el momento lineal debe conservarse. El problema es unidimensional; todos los movimientos se producen en una línea recta. Escogeremos un eje en el que los positivos apuntan hacia la derecha.

Etiquetamos las variables y asignamos valores:

- $m_1 = 3$ kg
- Velocidad inicial de la masa 1: $v_{1i} = 20$ m/s
- Velocidad final de la masa 1: $v_{1f} = -2$ m/s
- $m_2 = 4$ kg
- Velocidad inicial de la masa 2: $v_{2i} = -10$ m/s
- Velocidad final de la masa 2: $v_{2f} =?$

El momento total inicial debe ser igual al momento total final:

$$p_i = p_f$$

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f}$$

Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 20 + 4 \cdot (-10) &= 3 \cdot (-2) + 4 \cdot v_{2f} \\
60 - 40 &= -6 + 4 \cdot v_{2f} \\
26 &= 4 \cdot v_{2f} \\
v_{2f} &= \frac{26}{4} \\
v_{2f} &= \frac{13}{2} \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Como esa velocidad es positiva, según nuestra convención, se mueve hacia la derecha.

Se nos pregunta si la colisión es **elástica** o **inelástica**. Para eso debemos calcular la energía cinética inicial y la final:

$$
\begin{aligned}
E_i = E_{1i} + E_{2i} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 4(-10)^2 = \\
&= 600 + 200 = 800 \text{ J}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_f = E_{1f} + E_{2f} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \\
&= 6 + \frac{169}{2} = \frac{181}{2} = \\
&\approx 90.5 \text{ J}
\end{aligned}
$$

Es un choque **inelástico porque la energía cinética final no coincide con la energía cinética inicial**.

(Esa energía cinética perdida puede haberse convertido en energía cinética microscópica -con lo que habrá aumentado la temperatura de los cuerpos- o incluso en energía potencial de algún tipo.)

9. Una masa de 8 kg se encuentra inicialmente en reposo. En cierto instante, explota y se divide en tres pedazos. Uno de ellos, de 3 kg, se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 20 m/s. Otro, de 1 kg, se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad de 5 m/s. ¿Cómo se mueve el tercer pedazo?

Nuevamente se trata de un problema en el que podemos ignorar las interacciones externas y, por lo tanto, podemos aplicar la conservación del momento lineal.

El momento lineal inicial es 0; la masa de 8 kg no se mueve (está en reposo).

$$\vec{p_i} = \vec{0}$$

Eso quiere decir que es cero en todos los ejes:

$$p_{ix} = 0$$

$$p_{iy} = 0$$

Como el momento lineal debe conservarse en cada eje y todos los momentos iniciales son cero, el momento final será:

$$p_{fx} = 0$$

$$p_{fy} = 0$$

Al final hay tres masas y, como podemos considerar que en física clásica la masa se conserva:

$$m_i = m_1 + m_2 + m_3$$

$$8 = 3 + 1 + m_3$$

$$m_3 = 4 \text{ kg}$$

El momento total final en cada eje será:

$$p_{fx} = m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} + m_3 \cdot v_{3x}$$

$$p_{fy} = m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} + m_3 \cdot v_{3y}$$

Donde no indicamos con subíndices que son velocidades finales porque al inicio no hay masas 1, 2 y 3.

Ahora sustituimos valores:

$$0 = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot v_{3x}$$

$$0 = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot v_{3y}$$

Por lo tanto:

$$v_{3x} = -15 \text{ m/s}$$

$$v_{3y} = -\frac{5}{4} \text{ m/s}$$

Se mueve **hacia abajo** (por el signo negativo de la componente y) y **hacia la izquierda** (por el signo negativo de la componente x), tal y como hemos usado implícitamente un sistema de coordenadas.

El módulo de v_3 es:

$$v_3 = \sqrt{(-15)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}$$

$$v_3 \approx 15.05 \text{ m/s}$$

El ángulo será:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-5/4}{-15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,08333333333$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} 0,08333333333$$

$$\alpha \approx 4.76°$$

10. Encuentra la fórmula que relaciona la altura máxima de un péndulo balístico y la velocidad de la bala que choca con él.

Un péndulo balístico es un péndulo al que se dispara una bala (u otro proyectil). La bala entra en el péndulo y hace que éste empiece a moverse. La cuerda de la que cuelga el péndulo implica que empieza a subir, ganando energía potencial peso y perdiendo energía potencial cinética.

Si m es la masa de la bala y M es la masa del péndulo, inicialmente el sistema solamente tiene momento lineal debido a la bala.

Suponemos que la bala se mueve inicialmente a una velocidad v:

$$p_1 = m \cdot v$$

La bala colisiona con el péndulo y empiezan a moverse ambos como un solo cuerpo de masa $M + m$ a una velocidad V:

$$p_2 = (M + m) \cdot V$$

Como el momento se conserva entre esos dos instantes:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot V$$

En el instante en el que el péndulo empieza a moverse junto a la bala, solamente hay energía cinética:

$$E_{m2} = E_{c2} + E_{p2} = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 + 0$$

Cuando sube y se para, solamente tiene energía potencial peso:

$$E_{m3} = E_{c3} + E_{p3} = 0 + (M + m) \cdot g \cdot h$$

Ambas energías mecánicas deben ser iguales por conservación de la energía mecánica:

$$E_{m2} = E_{m3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 = (M + m) \cdot g \cdot h$$

Tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} m \cdot v = (M + m) \cdot V \\ \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot V^2 = (M + m) \cdot g \cdot h \end{array}$$

En la segunda podemos eliminar la suma de las masas:

$$\begin{array}{l} m \cdot v = (M + m) \cdot V \\ \frac{1}{2} \cdot V^2 = g \cdot h \end{array}$$

Despejando V de la segunda:

$$V = \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo en la primera:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot \sqrt{2gh}$$

$$v = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$v = \quad \frac{M}{m} + 1 \quad \cdot \sqrt{2gh}$$

11. ¿Cuál es la altura en función de la velocidad? ¿Y el ángulo si la longitud del péndulo es L?

Si:

$$v = \left(\frac{M}{m} + 1\right) \cdot \sqrt{2gh}$$

entonces:

$$v^2 = \left(\frac{M}{m} + 1\right)^2 \cdot 2gh$$

$$h = \frac{v^2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2 \cdot 2g}$$

Por razonamientos geométricos se puede ver que el ángulo α es:

$$\cos\alpha = \frac{L - h}{L}$$

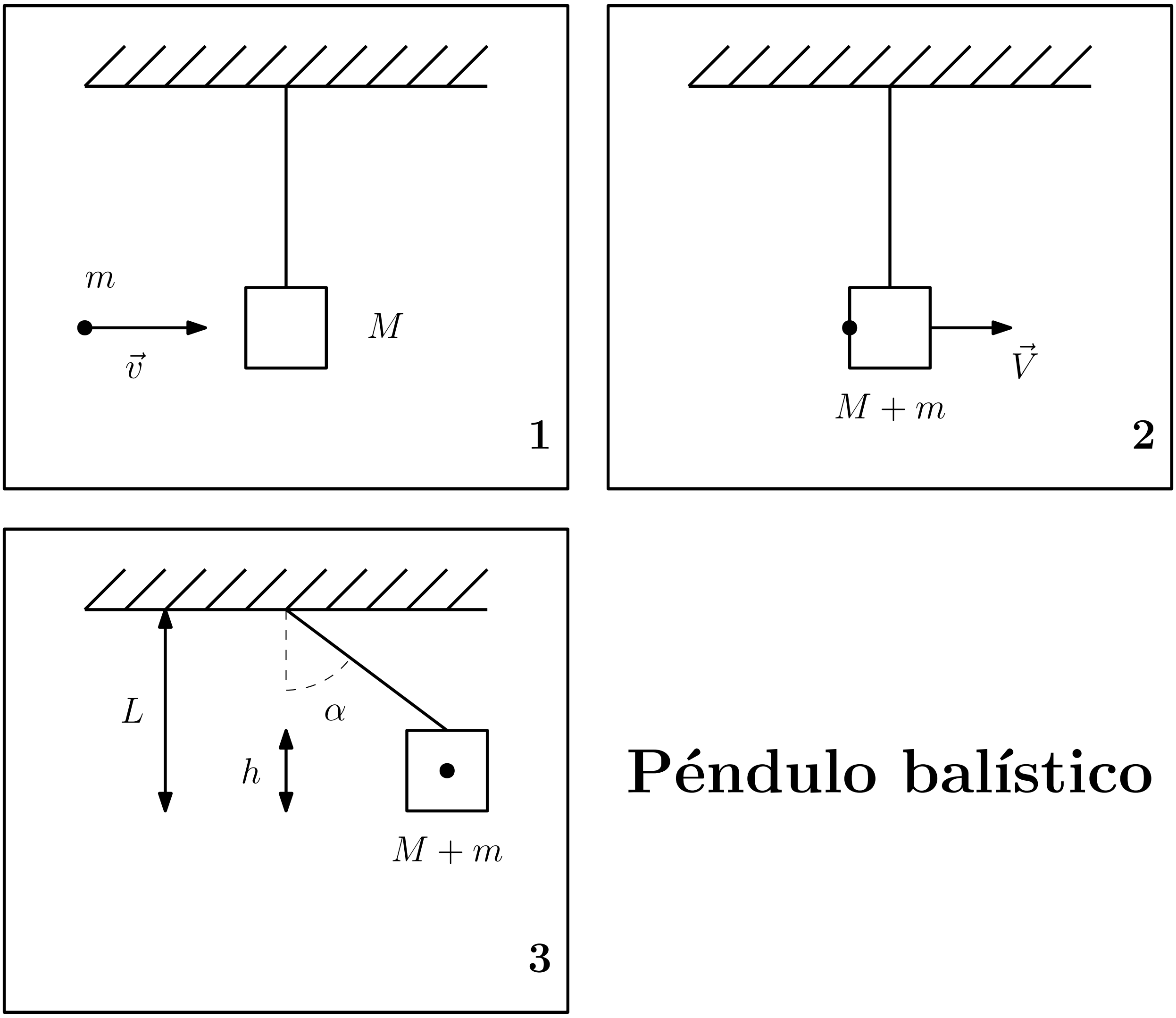


Figura 35: Péndulo balístico.

12. ¿Cuál es el momento total de un sistema de dos masas si la primera (3 kg) se mueve hacia la derecha a 1 m/s y la segunda (1 kg) hacia la izquierda a 4 m/s?

Si cogemos un sistema de referencia en el que los positivos son hacia la derecha:

- $p_1 = m_1 \cdot v_1 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ N} \cdot \text{s}$
- $p_2 = m_2 \cdot v_2 = 1 \cdot (-4) = -4 \text{ N} \cdot \text{s}$

El momento total P será:

$$P = -1 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Donde el signo nos indica que apunta hacia la izquierda.

13. ¿Cuál es el momento total de un sistema de dos masas si la primera (4 kg) se mueve hacia la derecha a 1 m/s y la segunda (1 kg) hacia la izquierda a 4 m/s?

Si cogemos un sistema de referencia en el que los positivos son hacia la derecha:

- $p_1 = m_1 \cdot v_1 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ N} \cdot \text{s}$
- $p_2 = m_2 \cdot v_2 = 1 \cdot (-4) = -4 \text{ N} \cdot \text{s}$

El momento total P será:

$$P = 0 \text{ N} \cdot \text{s}$$

El momento total es cero.

14. ¿Cuál es el momento total de un sistema de dos masas si la primera (5 kg) se mueve hacia la derecha a 1 m/s y la segunda (1 kg) hacia la izquierda a 4 m/s?

Si cogemos un sistema de referencia en el que los positivos son hacia la derecha:

- $p_1 = m_1 \cdot v_1 = 5 \cdot 1 = 5 \text{ N} \cdot \text{s}$
- $p_2 = m_2 \cdot v_2 = 1 \cdot (-4) = -4 \text{ N} \cdot \text{s}$

El momento total P será:

$$P = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Donde el signo nos indica que apunta hacia la derecha.

15. ¿Cuál es el momento total de un sistema de dos masas si la primera (3 kg) se mueve hacia arriba a 1 m/s y la segunda (1 kg) hacia la derecha a 4 m/s?

Las velocidades son:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (0,1) \text{ m/s} \\ \vec{v}_2 = (4,0) \text{ m/s} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{p}_1 = 3 \cdot (0,1) = (0,3) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_2 = 1 \cdot (4,0) = (4,0) \text{ N} \cdot \text{s} \end{cases}$$

El momento lineal total será:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (0, 3) + (4, 0) = (4, 3) \text{ N} \cdot \text{s}$$

El módulo del momento lineal total será:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ N} \cdot \text{s}$$

16. Calcula el momento lineal total de un sistema en el que una partícula de 2 kg se mueve a (4, 3) m/s y otra de 1 kg se mueve a (1, 2) m/s.

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 = 2 \cdot (4, 3) & = (8, 6) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot (1, 2) & = (1, 2) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (8, 6) + (1, 2) & = (9, 8) \text{ N} \cdot \text{s} \end{cases}$$

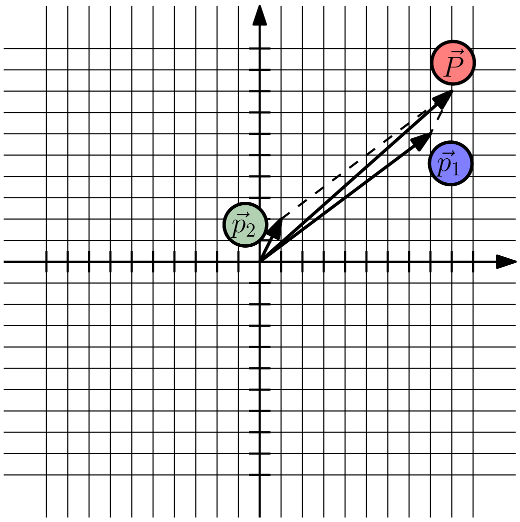


Figura 36: Ejercicio 16. Suma de momentos lineales en el plano según unos ejes de coordenadas.

17. Un cuerpo de 6 kg se mueve hacia la derecha a 20 m/s y se separa en tres: uno de 1 kg que se mueve hacia la derecha a 5 m/s, uno de 2 kg que se mueve hacia arriba a 4 m/s. ¿Cómo se mueve el tercero?

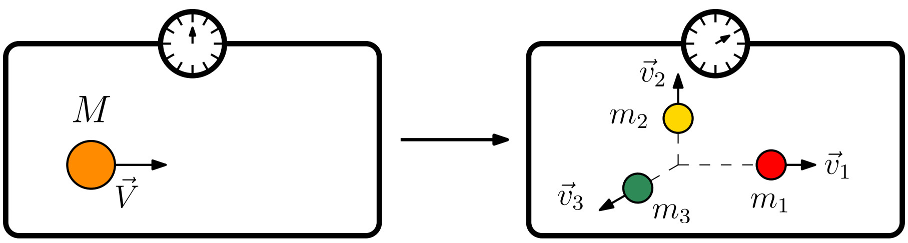


Figura 37: Ejercicio 17.

Podemos considerar que la masa se conserva:

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

$$6 = 1 + 2 + m_3 \implies m_3 = 3 \text{ kg}$$

Se conserva el momento lineal total:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

Se conserva el momento lineal total:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

Pero tenemos:

$$\begin{cases} \vec{P} = M \cdot \vec{V} = 6 \cdot (20, 0) = (120, 0) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot (5, 0) = (5, 0) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot (0, 4) = (0, 8) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_3 = m_3 \cdot \vec{v}_3 = 3 \cdot (v_x, v_y) = (3v_x, 3v_y) \text{ N} \cdot \text{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{P} = (120, 0) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_1 = (5, 0) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_2 = (0, 8) \text{ N} \cdot \text{s} \\ \vec{p}_3 = (3v_x, 3v_y) \text{ N} \cdot \text{s} \end{cases}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$(120, 0) = (5, 0) + (0, 8) + (3v_x, 3v_y)$$

$$\begin{cases} 120 = 5 + 0 + 3v_x \\ 0 = 0 + 8 + 3v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120 = 5 + 0 + 3v_x & \implies v_x = 115/3 \text{ m/s} \\ 0 = 0 + 8 + 3v_y & \implies v_y = -8/3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{115}{3}, -\frac{8}{3} \right) \text{ m/s}}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{115}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} \approx 38.43 \text{ m/s}$$

Evidentemente, también podríamos encontrar el ángulo.

Sistemas de partículas y sólido rígido

El punto material (= la masa puntual) no nos sirve para estudiar objetos extensos cuando nos interesa el movimiento de sus partes. Un punto material es un objeto que no tiene ni longitud, ni superficie, ni volumen. Un sistema extenso sí tiene longitud, superficie y volumen.

Hay numerosos modelos de sistemas extensos. Pero los más sencillos de entender son el sólido rígido y el sistema de partículas.

- El *sistema de partículas* está formado por masas puntuales (por lo tanto, es un modelo discreto) que pueden tener posiciones relativas constantes o no.
- En el *sólido rígido*, las distintas partes están a posiciones relativas constantes (unas respecto a otras) tanto si se trata de un modelo discreto como de un modelo continuo.

Observa que hay sólidos rígidos que no se consideran sistemas de partículas y sistemas de partículas que no se consideran sólidos rígidos.

En esta parte verás algunos problemas relacionados con la mecánica de los sistemas extensos y magnitudes físicas tan esenciales como el momento angular (o momento cinético).

1. ¿Qué representa físicamente el centro de masas de un sistema? ¿El centro de masas es un punto del sistema?

Si tenemos un sistema que no es una masa puntual, observamos que bajo ciertas circunstancias un punto del espacio se mueve como lo haría el cuerpo si toda su masa estuviese concentrada en ese punto. Eso es el centro de masas.

Es decir: el **centro de masas** es el punto del espacio que se mueve tal y como se movería un sistema si toda su masa estuviese concentrada en ese punto.

Pero el centro de masas no tiene que coincidir con un punto físico del sistema o con el centro geométrico del sistema.

Por ejemplo, si tenemos un anillo (una corona circular) hecho de un material cuya densidad es la misma en todo el anillo, el centro de masas estaría en el centro geométrico del anillo, que no coincide con ningún punto del anillo.

O si tenemos un rectángulo en el que la densidad de una mitad es mayor que la densidad de la otra mitad, el centro de masas no estará en el centro geométrico del rectángulo, sino en la parte de mayor densidad.

2. Un sistema de partículas está formado por 3 masas puntuales de 3 kg, 4 kg y 7 kg. Las partículas están en el mismo plano en las posiciones (3, 2) m, (1, 2) m y (1, 5) m. Encuentra el centro de masas.

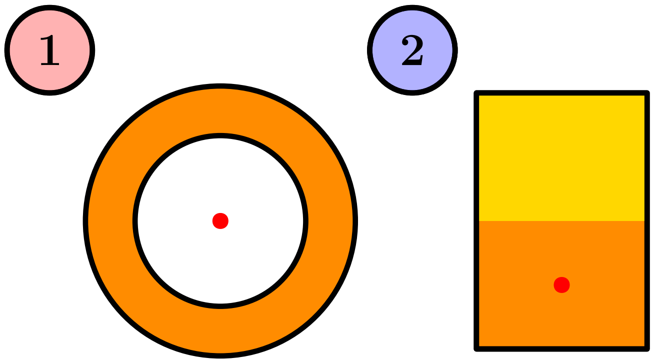


Figura 38: El centro de masas de un sistema puede: 1) no coincidir con un punto del sistema y 2) no coincidir con su centro geométrico.

El **centro de masas** es simplemente la media aritmética ponderada de las posiciones. Donde usamos la masa para ponderar la importancia de cada masa puntual a la hora de determinar dónde está:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{x_i \cdot m_i}{m_i}$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{y_i \cdot m_i}{m_i}$$

Calculamos:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 7}{2 + 4 + 7} = \\ = \frac{20}{13}\ \mathrm{m}$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 7}{2 + 4 + 7} = \\ = \frac{49}{13}\ \mathrm{m}$$

El centro de masas está en:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{20}{13}, \frac{49}{13} \quad \mathrm{m}$$

Usando los vectores unitarios:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{20}{13}\hat{\imath} + \frac{49}{13}\hat{\jmath} \quad \mathrm{m}$$

En ocasiones es aconsejable representar gráficamente el problema cuando es bidimensional; permite comprobar que la solución tiene sentido.

Por ejemplo, en este caso tenemos un sistema de tres masas puntuales que son los vértices de un triángulo. Sabemos que el centro de masas debe estar dentro de ese triángulo y sabemos que debe estar más cerca de la parte con más masa (en este caso, de la tercera masa).

La representación gráfica de lo que hemos calculado coincide con lo que esperamos. Por lo tanto, podemos tener cierta seguridad de que el resultado es correcto.

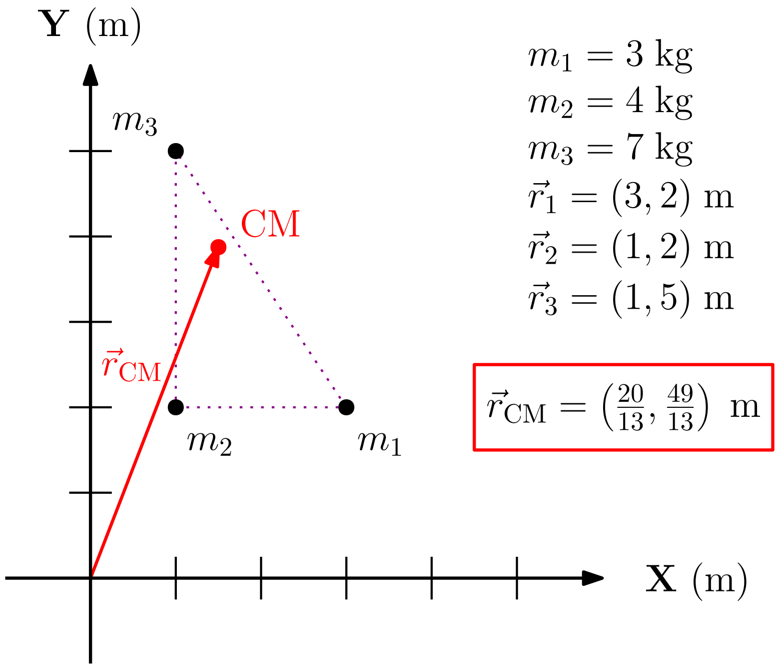


Figura 39: Podemos representar las masas m_1, m_2 y m_3 en un sistema de coordenadas. El centro de masas (CM) debe estar dentro del triángulo formado por las tres masas. El vector de posición del centro de masas $\vec{r}_{CM}$ es el vector que sale del origen de coordenadas y llega al centro de masas.

3. Un sistema de partículas está formado por 3 masas puntuales de 3 kg, 4 kg y 7 kg. Las partículas están en el mismo plano en las posiciones (3, 2) m, (1, 2) m y (1, 5) m. Encuentra:

a) El momento de inercia respecto al eje de rotación x = 1 m.
b) El momento de inercia respecto al eje de rotación y = 3 m.

a) El **momento de inercia** I de un sistema de partículas, se calcula:

$$I = \quad m_i \cdot r_i^2$$

donde r_i es la distancia al eje de giro.

El eje de rotación $x_0 = 1$ m es un eje **vertical**.

Por lo tanto:

- $r_1 = x_1 - x_0 = 3 - 1 = 2$ m
- $r_2 = x_2 - x_0 = 1 - 1 = 0$ m
- $r_3 = x_3 - x_0 = 1 - 1 = 0$ m

entonces:

$$I_a = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 =$$
$$= 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0^2 = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b) Ahora el eje de rotación es $y = 3$, que es **horizontal**.

Por lo tanto:

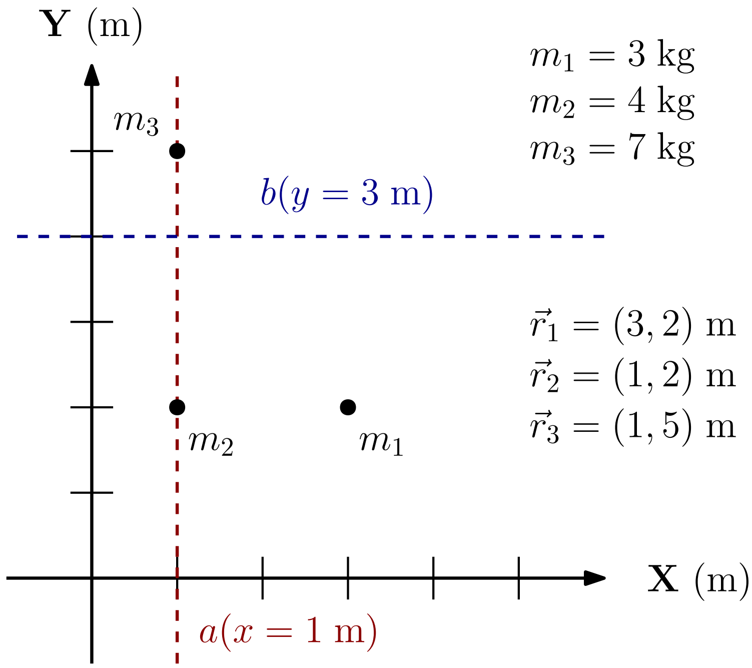


Figura 40: El eje a está dado por la ecuación $x = 1$ m y, por lo tanto, es vertical. El eje b está dado por la ecuación $y = 3$ m y, por lo tanto, es horizontal.

- $r_1 = y_1 - y_0 = 2 - 3 = 1$ m
- $r_2 = y_2 - y_0 = 2 - 3 = -1$ m
- $r_3 = y_3 - y_0 = 5 - 3 = 2$ m

entonces:

$$I_b = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 =$$
$$= 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot 2^2 = 35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

4. Un sistema de partículas está formado por 3 masas puntuales:
- $m_1 = 3$ kg, $\vec{r}_1 = (3, 2)$ m
- $m_2 = 4$ kg, $\vec{r}_2 = (1, 2)$ m
- $m_3 = 7$ kg, $\vec{r}_3 = (1, 5)$ m

Encuentra el momento de inercia I respecto a un eje "e" que es perpendicular al plano XY y pasa por el punto (2, 1) metros.

Ahora el eje no es vertical ni horizontal. Es perpendicular al plano y, por lo tanto, calcular las distancias a ese eje es más delicado:

- La distancia entre la masa m_1 y el eje e es la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos; las coordenadas x son iguales:

$$r_{1,e} = |x_e - x_1| = |5 - 2| = 3 \text{ m}$$

- La distancia entre la masa m_3 y el eje e es la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos; las coordenadas y son iguales:

$$r_{3,e} = |x_e - x_3| = |3 - 1| = 2 \text{ m}$$

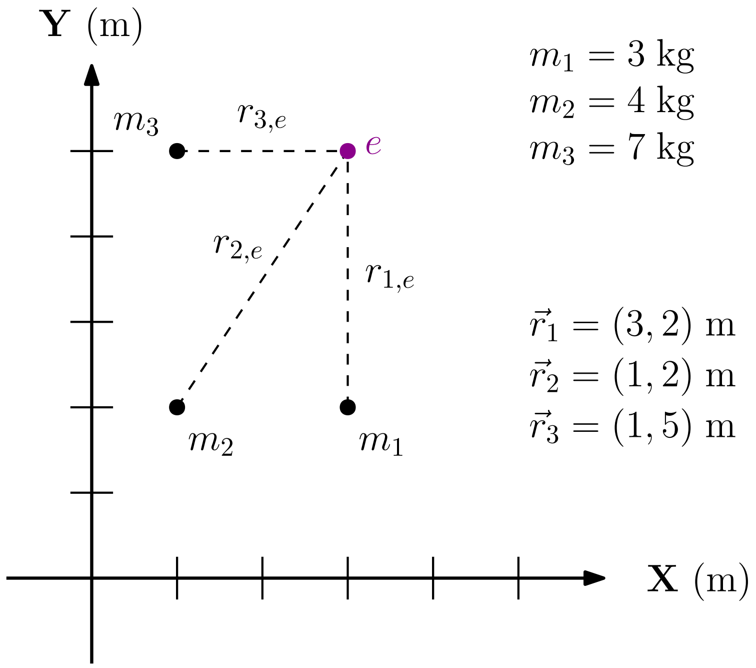


Figura 41: El eje a está dado por la ecuación $x = 1$ m y, por lo tanto, es vertical. El eje b está dado por la ecuación $y = 3$ m y, por lo tanto, es horizontal.

- Podemos calcular la distancia entre la masa m_2 y el eje e usando el teorema de Pitágoras:

$$r_{2,e}^2 = (3-1)^2 + (5-2)^2$$
$$r_{2,e}^2 = 13 \text{ m}^2$$

  Ahora podríamos calcular $r_{3,e}$ en lugar de su cuadrado. Pero como necesitamos el cuadrado y no su valor, no es necesario.

El momento de inercia respecto al eje e:

$$I_e = m_1 \cdot r_{1,e}^2 + m_2 \cdot r_{2,e}^2 + m_3 \cdot r_{3,e}^2 =$$
$$= 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 2^2 = 107 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5. ¿Qué mide el momento de inercia? ¿Por qué un mismo cuerpo puede tener varios momentos de inercia?

La masa mide la inercia que tiene un objeto frente a traslaciones.

Si la masa es mayor, es más difícil cambiar su movimiento de traslación (*reposo* o *MRU*). Si es menor, es más fácil cambiar su movimiento de traslación.

El **momento de inercia** I mide la inercia que tiene un objeto frente a rotaciones.

Si el momento de inercia es mayor, es más difícil cambiar su movimiento de rotación (*reposo* y *MCU*). Si es mayor, es más fácil cambiar su movimiento de rotación.

El momento de inercia depende del eje de giro. El mismo cuerpo tiene múltiples momentos de inercia.

Por ejemplo, no es igual de fácil hacer girar una raqueta de tenis:

- alrededor de un eje que que pasa por el mango y tiene su misma dirección
- alrededor de un eje que pasa por el centro de la raqueta y es perpendicular a la superficie de la raqueta
- ...

6. ¿El momento de inercia depende solamente de la forma del cuerpo?

No. Depende del eje de rotación.

`[Coges el borrador.]`

Un borrador es un prisma rectangular o un paralelepípedo.

`[Sujetas el borrador usando dos dedos de una mano como pinzas. Haces que gire alrededor del eje que forman tus dedos moviéndolo con la otra mano.]`

Si lo hago girar alrededor de este eje, necesito un momento de fuerza (= un torque = un par de fuerzas) distinto para causar la misma rotación...

`[Cambias la posición de los dedos que forman la pinza.]`

...que si lo intento hacer desde otro eje.

Lo fácil o lo difícil que es causar una rotación depende de la cantidad de masa que está lejos del eje. Cuanto más lejos están las distintas partes del eje de rotación, más difícil es cambiar su rotación.

El momento de inercia mide esto. Y la fórmula para un sistema de partículas materiales (= de masas puntuales) lo indica claramente:

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2}$$

7. Una esfera maciza y homogénea de 20 kg de masa y 4 centímetros de radio gira con una velocidad angular de 300 radianes por segundo. La esfera se expande homogéneamente hasta alcanzar un radio de 2 metros. ¿Cuál es la velocidad angular tras la expansión? Dato: El momento de inercia de una esfera maciza y homogénea se calcula con $I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$. El eje de rotación pasa por el centro de la esfera.

Si la expansión de la esfera se produce por interacciones internas de la esfera, quiere decir que no hay ningún **torque**, ningún **momento de fuerza**, ningún **par de fuerzas**...

Por lo tanto, si el torque externo es cero $\vec{M} = 0$, el momento angular $\vec{L}$ se conserva:

$$L_{\text{inicial}} = L_{\text{final}}$$

Pero en este caso el momento angular es igual al momento de inercia I por la velocidad angular de rotación ω:

$$I_{\text{inicial}} \cdot \omega_{\text{inicial}} = I_{\text{final}} \cdot \omega_{\text{final}}$$

Pero el momento de inercia de una esfera maciza y homogénea es:

$$I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$$

Teniendo en cuenta que la masa no varía:

$$\frac{2}{5} \cdot M \cdot R_{\text{inicial}}^2 \cdot \omega_{\text{inicial}} = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R_{\text{final}}^2 \cdot \omega_{\text{final}}$$

Varias cosas se cancelan:

$$R_{\text{inicial}}^2 \cdot \omega_{\text{inicial}} = R_{\text{final}}^2 \cdot \omega_{\text{final}}$$

Despejando la velocidad angular final:

$$\omega_{\text{final}} = \frac{R_{\text{inicial}}^2}{R_{\text{final}}^2} \cdot \omega_{\text{inicial}}$$

$$\omega_{\text{final}} = \left(\frac{R_{\text{inicial}}}{R_{\text{final}}}\right)^2 \cdot \omega_{\text{inicial}}$$

$$\omega_{\text{final}} = \left(\frac{0.04}{2}\right)^2 \cdot 300$$

$$\omega_{\text{final}} = 0.02^2 \cdot 300$$

$$\omega_{\text{final}} = \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 300$$

$$\omega_{\text{final}} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 300$$

$$\omega_{\text{final}} = 1200 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{\text{final}} = 1.2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{\text{final}} = 1.2 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$$

La velocidad angular **disminuye** cuando se expande la esfera. Y hemos llegado a este resultado sin recurrir a la masa. Por lo que **otra esfera de distinta masa que cambiase de la misma manera se comportaría igual**.

Podíamos saber esto sin calcular razonando de la siguiente manera:

- No hay fuerzas externas sobre la esfera
- Si no hay fuerzas externas, no hay torque externo
- Si no hay torque, el momento angular se conserva
- La esfera tiene un momento angular inicial distinto de cero porque está girando
- Al aumentar el radio, el momento de inercia debe aumentar; cuando hay más masa lejos del eje de giro, el momento de inercia aumenta
- Si el momento de inercia aumenta, para que el momento angular final sea igual que el inicial, la velocidad angular debe disminuir

9. ¿A qué conocido fenómeno artístico/deportivo se parece el ejercicio anterior?

Un patinador sobre hielo que gira sobre si mismo con los brazos cerrados y los abre.

Al alejar sus brazos del eje de giro, su momento de inercia aumenta.

Pero, para que el momento angular se conserve, si el momento de inercia aumenta, la velocidad angular debe disminuir; $L = I \cdot \omega$.

10. ¿Cuáles son los principios de conservación de la Naturaleza?

Solamente en Física Clásica:

- conservación de la masa

En Física Moderna y Física Clásica:

- conservación de la carga eléctrica
- conservación de la energía
- conservación del momento lineal (= cantidad de movimiento)
- conservación del momento angular (= momento cinético)

Por el teorema de Noether, la conservación del momento angular en un sistema es consecuencia de que ese sistema tiene simetría de rotaciones.

Es decir, si hacemos un experimento y, cuando giramos el experimento cualquier ángulo, los resultados son siempre los mismos, hay simetría de rotaciones. Por el teorema de Noether, esto implica que el momento angular se conservará en el sistema.

11. Calcula el momento angular y la energía cinética de rotación de una esfera maciza y homogénea de radio 20 cm si su densidad es la del agua y su periodo de rotación es de 1 ms.
¿Qué energía mecánica tiene la esfera en un instante en el que está a 5 metros de altura y cae a una velocidad de 10 m/s?
Datos: $I = \dfrac{2}{5}MR^2$, $g \approx 10$ m/s^2.

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Por lo que su masa será:

$$M = V \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho$$

Sustituyendo:

$$\begin{gathered} M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.20^3 \cdot 1000 = \\ = 33.51 \text{ kg} \end{gathered}$$

Podemos calcular el momento de inercia a partir de la fórmula que se nos da:

$$\begin{gathered} I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 = \\ = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho \cdot R^2 = \\ = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot \rho \cdot R^5 \end{gathered}$$

Sustituyendo:

$$I = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 0.20^5 =$$
$$= 0.536 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento angular, si conocemos el momento de inercia y la velocidad angular, viene dado por:

$$L = I \cdot \omega =$$

Pero la velocidad angular está relacionada con el periodo:

$$L = I \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{16\pi^2 \cdot \rho \cdot R^5}{15T}$$

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{16\pi^2 \cdot 1000 \cdot 0.2^5}{15 \cdot 0.001} =$$
$$\approx 3369 \text{ J} \cdot \text{s}$$

La energía cinética de rotación viene dada por:

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Sustituyendo:

$$E_{cr} = \frac{3369^2}{2 \cdot 0.536} = 10587837 \text{ J}$$

La energía potencial peso:

$$E_p = M \cdot g \cdot h = 33.51 \cdot 10 \cdot 5 = 1676 \text{ J}$$

La energía cinética de traslación:

$$E_{ct} = \frac{1}{2} M \cdot v^2 = 0.5 \cdot 33.51 \cdot 10^2 =$$
$$= 1676 \text{ J}$$

La energía mecánica total será:

$$E_m = E_p + E_{ct} + E_{cr} =$$
$$= 10591189 \text{ J}$$

Casi toda la energía mecánica se debe a la rápida rotación de la esfera.

12. Sobre un objeto se aplica una fuerza $\vec{F} = (1, 2, 3)$ N y el punto de aplicación está en $\vec{r} = (-2, 1, 4)$ cm. Calcula el momento de fuerza (o torque) $\vec{M}$.

Se trata de un simple producto vectorial:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5, 10, -5) \text{ J}$$

13. Un objeto de masa 2 kg se mueve a una velocidad $\vec{v} = (1, 3, 2)$ m/s cuando está en la posición $\vec{r} = (2, 3, 1)$ m.

a) calcula su momento lineal

b) calcula su momento angular

a) El momento lineal $\vec{p}$ es:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 2 \cdot (1, 3, 2) = (2, 6, 4) \text{ N} \cdot \text{s}$$

b) El momento angular $\vec{L}$ es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (6, -6, 6) \text{ J} \cdot \text{s}$$

Mecánica de fluidos

Un tipo de sistemas extensos muy importantes son los fluidos (lo cual incluye a gases y líquidos): sistemas donde la forma cambia.

Aunque estén formados por una cantidad enorme de moléculas o átomos, podemos considerarlos sistemas continuos.

Los fluidos son mucho más difíciles de estudiar que los sólidos rígidos.

Empuje hidrostático

1. ¿Cuál es la ley que da la intensidad del empuje hidrostático?

Es la **ley de Arquímedes** que también se llama **principio de Arquímedes**.

Dice que:

«Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen del fluido desalojado.»

Escrita así, la ley da el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza del empuje hidrostático.

2. Pon ejemplos de fenómenos donde aparece el empuje hidrostático.

- Cuando nos metemos en el agua del mar y nuestro cuerpo está parcialmente metido dentro del agua (= sumergido), notamos que nuestro peso parece más pequeño que cuando estamos fuera del agua.

  El empuje hidrostático es lo que nos *empuja hacia arriba* haciendo que nuestro peso parezca más pequeño.
- Un globo aerostático de aire caliente sube en el aire debido a que el empuje hidrostático del aire que lo rodea es mayor que el peso del globo.
- Un globo de helio sube en el aire debido a que el empuje hidrostático del aire que lo rodea es mayor que el peso del globo.
- Un barco flota sobre el agua debido al empuje hidrostático.
- ...

3. Una esfera está totalmente sumergida en agua. La esfera tiene una masa de 200 gramos y un radio de 10 centímetros. Calcula:

a) el peso de la esfera

b) el empuje hidrostático que experimenta
c) el peso aparente de la esfera
d) si se hundirá o flotará

Vamos a necesitar el volumen de la esfera. La fórmula del volumen V de una esfera de radio r es:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

El radio es:

$$r = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.10^3 =$$
$$= 0.004188790205 \text{ m}^3 =$$
$$= 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

a) El peso de la esfera es:

$$P = m \cdot g =$$
$$= 0.200 \cdot 10 = 2 \text{ N}$$

b) La **ley de Arquímedes del empuje hidrostático** dice que el empuje es igual al **peso del volumen del fluido desalojado**.

Como la esfera está **totalmente sumergida**, el volumen del fluido desalojado es el volumen de la esfera:

$$V_{fd} = V = 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

La masa de fluido desalojado es el volumen del fluido desalojado por la densidad de ese fluido:

$$m = V \cdot \rho$$

El fluido desalojado es agua y la densidad del agua líquida es:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Por lo tanto, la masa de fluido desalojado es:

$$m_{fd} = 4.19 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 4.19 \text{ kg}$$

El peso del fluido desalojado es:

$$P_{fd} = m_{fd} \cdot g = 4.19 \cdot 10 = 41.9 \text{ N}$$

Por la ley de Arquímedes, el empuje hidrostático es igual al peso del volumen de fluido desalojado:

$$E = P_{fd} = 41.9 \text{ N}$$

c) El peso aparente es igual al peso real menos el empuje hidrostático:

$$P_a = P - E = 2 - 41.9 = -39.9 \text{ N}$$

d) Como el peso aparente es negativo, esto quiere decir que la esfera (si estaba en reposo) empezará a moverse hacia arriba.

Es decir, **flotará**.

4. La mitad de una esfera está sumergida en aceite de oliva ($\rho = 920$ kg/m^3). La esfera tiene una masa de 5000 gramos y un radio de 10 centímetros. Calcula:
a) el peso de la esfera
b) el empuje hidrostático que experimenta
c) el peso aparente de la esfera
d) si se hundirá o flotará

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.10^3 =$$
$$= 0.004188790205 \text{ m}^3 =$$
$$= 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

a) El peso de la esfera es:

$$P = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$$

b) El volumen de fluido desalojado es la mitad del volumen de la esfera:

$$V_{fd} = \frac{1}{2} \cdot V = \frac{1}{2} \cdot 4.19 \cdot 10^{-3} = 2.095 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

El fluido desalojado es aceite, que tiene una densidad de 920 kg/m^3, por lo tanto, la masa de fluido desalojado es:

$$m_{fd} = \rho \cdot V = 920 \cdot 2.095 \cdot 10^{-3} =$$
$$= 1.9274 \text{ kg}$$

El peso del fluido desalojado es:

$$P_{fd} = m_{fd} \cdot g = 1.9274 \cdot 10 = 19.274 \text{ N}$$

La ley de Arquímedes dice que el empuje hidrostático es igual al peso del fluido desalojado:

$$E = P_{fd} = 19.274 \text{ N}$$

c) El peso aparente es:

$$P_a = P - E = 50 - 19.274 = 30.726 \text{ N}$$

d) El peso aparente es positivo, por lo tanto, si la esfera estaba en reposo, empezará a moverse hacia abajo.

Es decir, **la esfera se hunde**.

Hidrostática

1. Calcula la presión que experimenta un submarinista que se encuentra a 60 metros de profundidad en el mar si la densidad del agua de mar es de 1030 kg/m^3.
¿Qué fuerza tiene que ejercer el submarinista a esa profundidad para abrir la escotilla[a] circular de un submarino si tiene un radio de 50 centímetros?

[a]Una especie de puerta hermética, normalmente circular.

Si usamos la ecuación (o ley) fundamental de la hidrostática:

$$p = p_0 + \rho g h$$

y sabemos que:

- p_0 = presión atmosférica al nivel del mar = 101300 Pa
- ρ = densidad del agua del mar = 1030 kg/m^3
- g = aceleración de la gravedad = 9,8 m/s^2
- h = profundidad dentro del fluido = 60 m

entonces:

$$p = 101\,300 + 1030 \cdot 9.8 \cdot 60$$
$$p = 706\,940 \text{ Pa}$$

Sabemos que la presión es la fuerza partido la superficie:

$$p = \frac{F}{S}$$

Para encontrar la fuerza que necesita para abrir la escotilla, despejamos la fuerza de la expresión anterior:

$$F = p \cdot S$$

Como la escotilla es circular y sabemos que la superficie de un círculo es $S = \pi \cdot r^2$, entonces:

$$F = p \cdot \pi \cdot r^2$$

Sustituyendo los valores:

$$F = 706\,940 \cdot \pi \cdot (0.50)^2$$
$$F \approx 555229.4 \text{ N}$$

Es una fuerza enorme. Ningún ser humano podría abrir la escotilla.

Compara esta fuerza con un peso. Es el peso de un objeto que tiene una masa de más de 55000 kilogramos. Nadie puede levantar esa masa sin ayuda de una máquina (o de otros animales).

2. ¿Cuál es la presión que una persona de 85 kg ejerce sobre el suelo si se apoya sobre las plantas de sus pies y cada una de ellas tiene, aproximadamente, 5 centímetros de ancho y

20 de largo?

La presión se debe a la fuerza peso. Calculamos esa fuerza:

$$F_p = m \cdot g$$

ALUMNO: Un momento, un momento. Normalmente usamos P para la fuerza peso. No usamos F_p.

PROFESOR: Sí. Es verdad. En España solemos hacerlo así.

ALUMNO: ¿Por qué ha usado entonces F_p?

PROFESOR: Porque en este problema también aparece la presión, que siempre representamos como una p minúscula o una P mayúscula.

ALUMNO: ¡Oh! Ya veo. Para no usar la misma letra para dos cosas diferentes.

PROFESOR: Sí. Así es.

$$\begin{aligned} F_p &= m \cdot g = \\ &= 85 \cdot 10 = \\ &= 850 \text{ N} \end{aligned}$$

Y ahora calculamos la superficie de la planta de un pie (estamos suponiendo que es rectangular):

$$S_{\text{pie}} = 0.05 \cdot 0.20 = 0.01 \text{ m}^2$$
$$S_{\text{total}} = 2 \cdot 0.01 = 0.02 \text{ m}^2$$

Ahora podemos calcular la presión:

$$P = \frac{F_p}{S_{\text{total}}} = \frac{850}{0.02} = 42\,500 \text{ Pa}$$

3. En un recipiente hay varios líquidos inmiscibles (que no se pueden mezclar): mercurio, agua pura y aceite de oliva. El mercurio tiene una altura de 10 centímetros. El agua pura flota sobre el mercurio y tiene una altura de 5 centímetros. El aceite de oliva flota sobre el agua pura y tiene una altura de 12 centímetros. Calcula la presión en el fondo del recipiente.
Datos:

- $\rho_{\text{aceite de oliva}} = 916 \text{ kg/m}^3$
- $\rho_{H_2O} = 1\,000 \text{ kg/m}^3$
- $\rho_{\text{Hg}} = 13\,546 \text{ kg/m}^3$

La presión en el fondo del recipiente se debe al peso de todos los fluidos que hay encima: el mercurio, el agua, el aceite de oliva y el **aire**.

Por la **ecuación fundamental de la hidrostática**, podemos escribir:

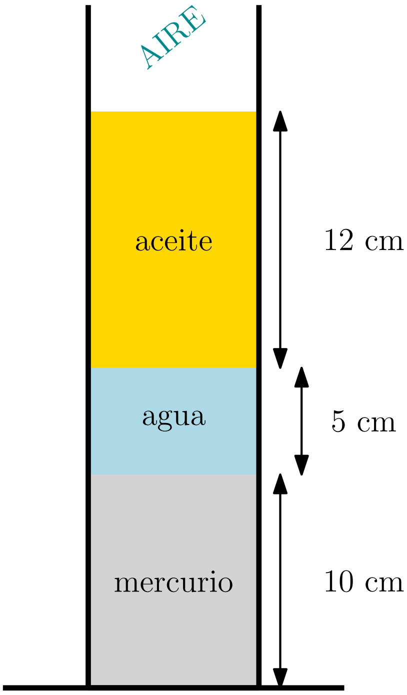


Figura 42: Un recipiente que contiene tres líquidos inmiscibles (aceite de oliva, agua y mercurio). Está abierto por arriba, por lo que el aire externo también contribuye a la presión del fondo.

$$p = p_0 + \rho_o g h_o + \rho_a g h_a + \rho_m g h_m$$

donde:

- p_0 es la presión debida al aire

  Es decir, es la presión atmosférica.

- $\rho_o g h_o$ es la presión debida al aceite de oliva

  donde aparecen la densidad ρ_o, la aceleración de la gravedad g y la profundidad del aceite h_o

- $\rho_a g h_a$ es la presión debida al agua

  donde aparecen la densidad ρ_a, la aceleración de la gravedad g y la profundidad del agua h_a

- $\rho_m g h_m$ es la presión debida al mercurio

  donde aparecen la densidad ρ_m, la aceleración de la gravedad g y la profundidad del aceite h_m

Sustituyendo:

$$p = 101\,300+$$
$$+916 \cdot 9.8 \cdot 0.12+$$
$$+1\,000 \cdot 9.8 \cdot 0.05+$$
$$+13\,546 \cdot 9.8 \cdot 0.10 =$$

$$= 120552.296 \text{ Pa}$$

4. Dos recipientes tienen forma de cono recto truncado. Ambos tienen exactamente las mismas dimensiones.
Uno de ellos se apoya sobre su base mayor. Y otro se apoya sobre su base menor. Se llenan completamente con el mismo líquido.
¿En cuál de los dos recipientes es mayor la presión en el fondo?

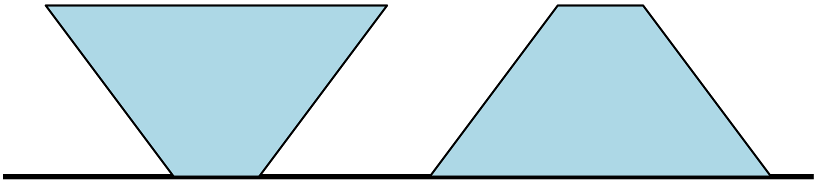


Figura 43: Dos recipientes truncados iguales llenos de la misma cantidad del mismo líquido, pero apoyados en bases diferentes.

La altura de los líquidos en ambos recipientes es la misma. Es decir, la profundidad del fondo es la misma.

Por lo tanto, por **la ecuación fundamental de la hidrostática**:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

la presión es la misma en el fondo de los dos recipientes.

Si has pensado que era mayor en el fondo del recipiente que tiene la base más pequeña, estabas equivocado.

Recuerda la *paradoja hidrostática*.

5. Los cuatro recipientes de la figura tienen distintas formas. Pero todos están llenos del mismo líquido y tienen la misma altura. ¿En el fondo de cuál es mayor la presión?

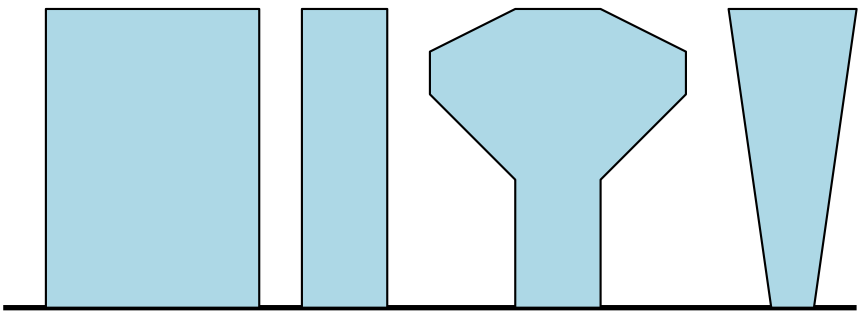


Figura 44: Los cuatro recipientes de la figura tienen distintas formas. Pero todos están llenos del mismo líquido y tienen la misma altura. ¿En el fondo de cuál es mayor la presión?

El líquido es el mismo en todos los recipientes y la altura es la misma. Por lo tanto, por la **ecuación fundamental de la hidrostática**, la presión es la misma en el fondo de los cuatro recipientes.

Recuerda la *paradoja hidrostática*.

6. ¿Qué es la paradoja hidrostática?

Como suele ocurrir con las paradojas en física, la paradoja hidrostática es una falsa paradoja.

Parece que la presión hidrostática en el fondo debería depender de la cantidad de líquido del recipiente. Pero en realidad depende de la altura del líquido (de la profundidad del fondo), de la densidad del líquido, de la aceleración de la gravedad y de presiones externas (si las hay).

Tal como nos dice la **ecuación fundamental de la hidrostática**:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

Un modo de ilustrarlo es usando vasos comunicantes: varios recipientes de distintas formas unidos por la misma base.

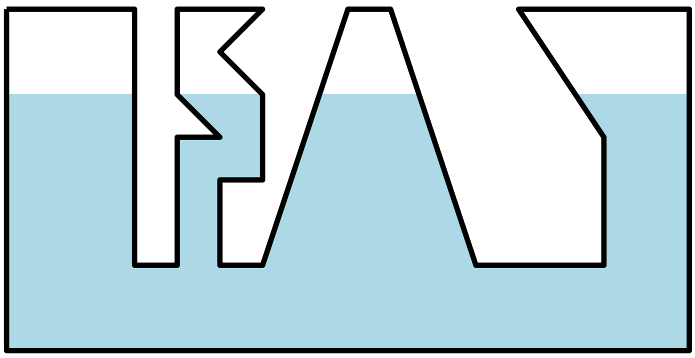


Figura 45: Vasos comunicantes. La presión en el fondo es siempre la misma y las alturas son iguales a pesar de cada recipiente tiene una forma diferente.

Una demostración experimental atribuida a Blaise Pascal es tener un barril de madera (un tonel) que solamente tiene un pequeño agujero. Ese agujero está conectado a una larga tubería vertical.

Si se llena de agua y se alcanza la altura adecuada, aunque la tubería sea muy estrecha, el tonel reventará: se romperá. Porque la presión en el fondo será demasiado grande para que la estructura del tonel sea capaz de resistirla

7. Suponiendo que la altura de un edificio es de 200 metros, calcula la diferencia de presión atmosférica entre el suelo y la azotea del edificio usando la ley fundamental de la hidrostática (es decir, suponiendo que el aire se puede considerar aproximadamente incompresible cerca de la superficie de la Tierra).

La presión en el suelo es:

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1$$

y la presión en la azotea es:

$$p_0 = \rho \cdot g \cdot h_0$$

La diferencia de presiones es:

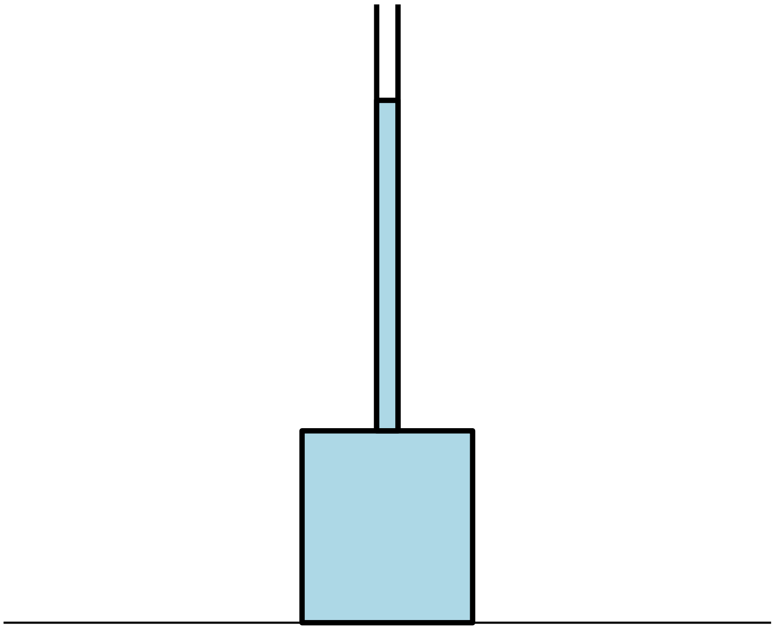


Figura 46: Un esquema del tonel y la tubería.

$$\Delta p = p_1 - p_0$$
$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_0)$$

Pero la diferencia de profundidades es la altura del edificio:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot y$$

La densidad del aire a 20 grados Celsius y una presión de una atmósfera es aproximadamente 1.204 kg/m^3. Al sustituir:

$$\Delta p = 1.204 \cdot 9.8 \cdot 200$$
$$\Delta p = 2359.84 \text{ Pa}$$

8. Suponiendo que la altura de un edificio es de 200 metros, calcula la diferencia de presión atmosférica entre el suelo y la azotea del edificio usando la ley barométrica. (Es decir, aquí sí se considera que el aire es compresible.)

La ecuación barométrica es:

$$p = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 \cdot g \cdot y}{p_0}}$$

donde p_0 es la presión en el suelo.

La diferencia de presión es entonces:

$$\Delta p = p_0 - p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 \cdot g \cdot y}{p_0}}$$

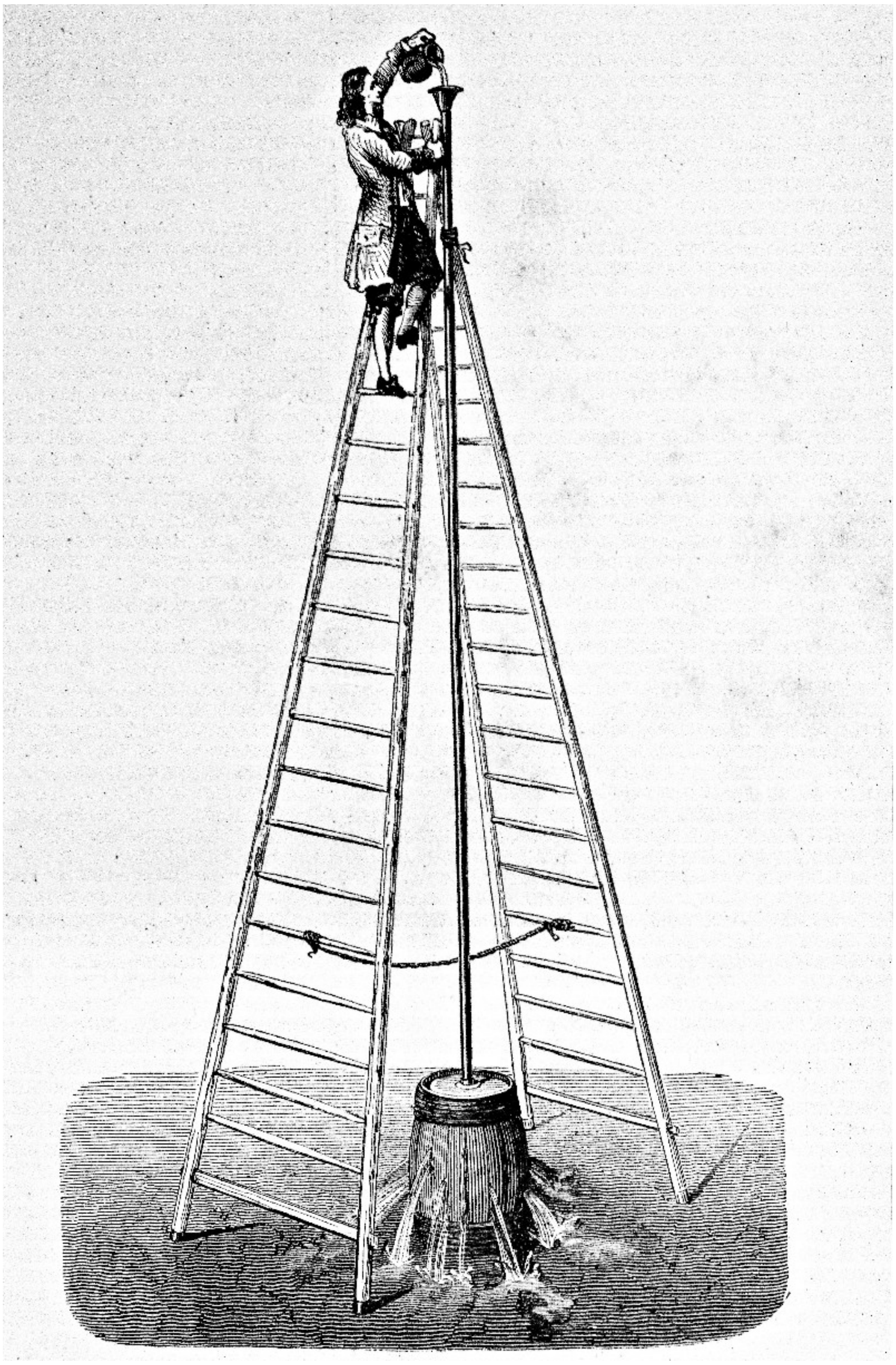


Figura 47: Una ilustración del experimento de Pascal. Del libro *"El mundo físico: gravedad, gravitación, luz, calor, electricidad, magnetismo, etc."* de A. Guillemin, 1882.

$$\Delta p = p_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-\rho_0 \cdot g \cdot y}{p_0}}\right)$$

Sustituyendo:

$$\Delta p = 101300 \cdot \left(1 - e^{\frac{-1.204 \cdot 9.8 \cdot 200}{101300}}\right)$$
$$\Delta p = 2332.6 \text{ Pa}$$

Un resultado muy similar al del ejercicio anterior, donde considerábamos que el aire era incompresible.

Hidrodinámica

1. Un líquido incompresible fluye por una tubería de 20 centímetros de radio con una velocidad de 10 m/s. La tubería se estrecha hasta tener un radio de 4 centímetros. ¿Cuál es la velocidad del líquido en esa parte de la tubería?

La ecuación de continuidad para líquidos incompresibles se escribe:

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

Las superficies se suponen circulares:

$$S_1 = \pi \cdot r_1^2$$
$$S_2 = \pi \cdot r_2^2$$

Por lo tanto:

$$v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = v_2 \cdot \pi \cdot r_2^2$$
$$v_1 \cdot r_1^2 = v_2 \cdot r_2^2$$

Despejando la segunda velocidad:

$$v_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = v_2$$
$$v_2 = v_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2}$$
$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

No es necesario cambiar las unidades de los radios en este caso porque solamente aparecen en un cociente:

$$v_2 = 10 \cdot \left(\frac{20}{4}\right)^2$$
$$v_2 = 250 \text{ m/s}$$

> **2**. Un líquido incompresible fluye por una tubería de 20 centímetros de radio con una velocidad de 10 m/s. La tubería se ensancha hasta tener un radio de 40 centímetros. ¿Cuál es la velocidad del líquido en esa parte de la tubería?

El problema es exactamente como el anterior, pero antes la tubería se hacía más estrecha (= disminuía su anchura) y por lo tanto aumentaba la velocidad.

Aquí la tubería se hace más ancha (= aumenta su anchura) y por lo tanto disminuirá la velocidad.

A partir de la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles y la fórmula de la superficie de un círculo, se puede llegar a la misma fórmula que en el ejercicio anterior:

$$\begin{array}{l} v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \\ S = \pi \cdot r^2 \end{array} \quad \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

Sustituyendo valores:

$$v_2 = 10 \cdot \left(\frac{20}{40} \right)^2$$
$$v_2 = 2.5 \text{ m/s}$$

> **3**. Un líquido incompresible fluye por una tubería. En un tramo de la tubería, el líquido fluye a una velocidad y en otro tramo fluye al triple de velocidad que en el primero. ¿Qué relación hay entre los radios de las tuberías en ambos tramos?

En este ejercicio tenemos exactamente lo mismo que en los dos anteriores.

Por la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles:

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

Si las secciones son circulares:

$$v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = v_2 \cdot \pi \cdot r_2^2$$
$$v_1 \cdot r_1^2 = v_2 \cdot r_2^2$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$
$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{v_1}{v_2}$$
$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$$

El ejercicio no nos pide los radios. Nos pide la relación entre ellos. Y sabemos que:

$$v_2 = 3 \cdot v_1$$

porque nos dicen que la velocidad en el segundo tramo es el triple de la velocidad en el primer tramo. Por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{r_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot r_1}$$

4. Un líquido incompresible fluye por una tubería. En un tramo de la tubería, el líquido fluye a una velocidad y en otro tramo fluye cuatro veces más rápido que en el primero. ¿Qué relación hay entre los radios de las tuberías en ambos tramos?

Es un ejercicio como el anterior.

Por la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles:

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

Si las secciones son circulares:

$$v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = v_2 \cdot \pi \cdot r_2^2$$
$$v_1 \cdot r_1^2 = v_2 \cdot r_2^2$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$
$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{v_1}{v_2}$$
$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$$

El ejercicio no nos pide los radios. Nos pide la relación entre ellos. Y sabemos que:

$$v_2 = 4 \cdot v_1$$

porque nos dicen que la velocidad en el segundo tramo es cuatro veces mayor que la velocidad en el primer tramo. Por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{r_2 = \frac{1}{2} \cdot r_1}$$

Es decir, el radio se reduce a la mitad.

5. Por una tubería cilíndrica de radio r_1 fluye un líquido incomprensible de densidad ρ a una velocidad v_1. La tubería desciende x metros y su nuevo radio es r_2. Calcula:

a) La velocidad en el segundo tramo. (Indica la ley que usas.)
b) La diferencia de presión entre ambos tramos. (Indica la ley de usas.)
c) ¿Qué principios de conservación has usado en cada apartado?

Datos: $r_1 = 14$ cm, $v_1 = 41$ m/s, $r_2 = 7$ cm, $x = 3$ m, $\rho = 1016$ kg/m^3.

a) Podemos usar la **ecuación de continuidad** (o *ley de continuidad*):

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot S_2$$

En un fluido incompresible, la densidad no cambia. Y la ecuación se convierte en:

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades y S_1 y S_2 son las secciones de la tubería.

La sección de un cilindro es la superficie de una circunferencia:

$$S = \pi \cdot r^2$$

Por lo que la ecuación de continuidad se convierte en:

$$v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = v_2 \cdot \pi \cdot r_2^2$$
$$v_1 \cdot r_1^2 = v_2 \cdot r_2^2$$
$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$
$$v_2 = 41 \cdot \left(\frac{14}{7}\right)^2$$
$$v_2 = 41 \cdot (2)^2$$
$$v_2 = 41 \cdot 4$$
$$v_2 = 164 \text{ m/s}$$

b) La **ecuación de Bernoulli** nos permite encontrar la diferencia de presión.

$$p_1 + \rho_1 g y_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 g y_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2$$

Las densidades son iguales:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

La diferencia de presiones $p_2 - p_1$ será:

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_1 - y_2) + \frac{1}{2}\rho \quad v_1^2 - v_2^2$$
$$p_2 - p_1 = 1016 \cdot 10 \cdot 3 + \frac{1}{2}1016 \quad 41^2 - 164^2$$
$$p_2 - p_1 = -12\,778\,740 \text{ Pa}$$

c) La ley de continuidad equivale a la ley de conservación de la masa.

La ley de Bernoulli equivale a la ley de conservación de la energía mecánica:

- el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ corresponde a la energía cinética
- el término $\rho \cdot g \cdot y$ corresponde a la energía potencial peso
- el término p corresponde al trabajo realizado por fuerzas externas

6. ¿Con qué ley de conservación se relaciona la ecuación de Bernoulli de los fluidos? En este contexto, ¿qué significa cada uno de sus términos?

La ecuación de Bernoulli de los fluidos se puede escribir:

$$p_1 + \rho_1 g y_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 g y_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2$$

Y es simplemente una expresión de la **conservación de la energía mecánica**. La energía mecánica de un sistema es la suma de todas las energías cinéticas y potenciales de sus distintas partes.

Cuando no hay fuerzas no conservativas (= fuerzas disipativas), la variación de la energía mecánica es 0. Es decir, se conserva:

$$\Delta E_m = 0$$
$$E_m(\text{inicial}) = E_p(\text{final})$$

Si solamente hay un objeto que se mueve y la única energía potencial que aparece es el peso, se puede escribir:

$$E_{c0} + E_{p0} = E_{c1} + E_{p1}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

Una simple comparación con la ecuación de Bernoulli indica que:

- los términos de la forma
$$\frac{1}{2}\rho v^2$$
corresponden a la energía cinética
- los términos de la forma
$$\rho \cdot g \cdot y$$
corresponden a la energía potencial peso

¿Y los términos con p?

Esos corresponden al trabajo realizado por otras fuerzas distintas del peso.

7. Un depósito de agua de forma cilíndrica contiene 100000 litros de agua. El depósito tiene un radio de 5 metros. Si en el fondo del depósito se hace un pequeño agujero de un radio menor que un centímetro, ¿a qué velocidad sale el chorro de agua?

Aquí podemos usar la ley de Torricelli:

$$v_2 = \sqrt{2g(y_1 - y_2)}$$

donde y_1 es la altura del agujero y y_2 es la altura a la que está la superficie superior del líquido.

Entonces $y_1 - y_2$ es la altura del recipiente en nuestro caso. Pero no tenemos ese dato.

El volumen de un cilindro es el área de la base por su altura:

$$V = S \cdot h$$

La base es un círculo:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Podemos despejar la altura:

$$h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

Los datos son:

- $V = 100000 \text{ L} = 100 \text{ m}^3$
- $r = 5 \text{ m}$

Por lo tanto:

$$h = \frac{100}{\pi \cdot 5} = 6.37 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ley de Torricelli:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6.37}$$
$$v_2 = 11.17 \text{ m/s}$$

8. ¿Cuáles son los principios de conservación de la Naturaleza?

Solamente en Física Clásica:

- conservación de la masa

En Física Moderna y Física Clásica:

- conservación de la carga eléctrica
- conservación de la energía
- conservación del momento lineal (= cantidad de movimiento)
- conservación del momento angular (= momento cinético)

Campos gravitatorio y eléctrico

El campo gravitatorio y el campo eléctrico son los intermediarios de la interacción gravitatoria y de la interacción electrostática respectivamente.

En muchas situaciones se comportan de un modo muy similar. Entender bien uno de ellos puede ayudar mucho a entender el otro.

Carga eléctrica

1. ¿Qué es la carga eléctrica?

La **carga eléctrica** es la propiedad de la materia que causa las interacciones electromagnéticas.

La carga eléctrica:

- es una magnitud física escalar

  porque su valor se puede expresar con un solo número

- puede ser positiva, negativa o cero

- es una magnitud física derivada en el SI

  porque no es una de las siete magnitudes fundamentales del SI: masa, longitud, tiempo, temperatura, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa y cantidad de sustancia

- en el SI, se mide en **culombios** cuyo símbolo es **C**

  Se llama así en honor al físico francés Charles-Augustin de Coulomb.

  Se relaciona con dos unidades fundamentales del SI:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$$

  Es decir, un culombio es igual a un amperio multiplicado por un segundo.

- cumple varias propiedades importantes:
  - **propiedad aditiva de la carga eléctrica**
  - **principio de conservación de la carga eléctrica**
  - **principio de cuantización de la carga eléctrica**

- siempre crea campos eléctricos que afectan a otras cargas eléctricas

- crea campos magnéticos cuando se mueve, que afectan a otras cargas eléctricas que se mueven

2. ¿Qué es la propiedad aditiva de la carga eléctrica?

La propiedad aditiva de la carga eléctrica dice que la carga total de un sistema es la suma de todas las cargas individuales que forman el sistema:

$$Q = q_1 + q_2 + \ldots$$

que se puede escribir así:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Por ejemplo, si tenemos un sistema formado por una carga de 2 C, una carga de 5 C y una carga de -6 C, la carga total del sistema es:

$$Q = 2 + 5 + (-6) = 1 \text{ C}$$

En física clásica, la masa también es aditiva. Pero como la masa siempre es positiva, **un sistema de muchas partículas siempre tendrá mucha más masa que una de las partículas**.

Pero como la carga eléctrica puede ser positiva o negativa, **un sistema de muchas cargas puede tener una carga total de cero o muy cercana a cero**.

3. ¿Qué es el principio de conservación de la carga eléctrica?

En un sistema aislado, la carga eléctrica total se conserva:

$$Q_{\text{inicial}} = Q_{\text{final}}$$

Que también se puede escribir:

$$\Delta Q = 0$$

o:

$$Q = \text{cte.}$$

4. ¿Qué otras magnitudes físicas se conservan?

En física clásica y física moderna, se conservan:

- la carga eléctrica
- la energía
- el momento lineal (o cantidad de movimiento)
- el momento angular (o momento cinético)

En física clásica, además, se conserva:

- la masa

5. ¿Qué es el principio de cuantización de la carga eléctrica?

Todas las cargas del Universo son múltiplos enteros de la carga fundamental. La carga fundamental es la carga del protón o (salvo por el signo) la carga del electrón:

$$q_f = q_p = -q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Por lo tanto el principio se puede escribir:

$$\boxed{q = n \cdot q_f; \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Eso quiere decir que:

- son cargas posibles: $2q_f$, $-5q_f$, $0q_f \ldots$
- son cargas imposibles: $\frac{1}{2}q_f$, $12.4q_f \ldots$

Es similar a lo que ocurre con el dinero. Todas las cantidades de monedas y billetes son siempre múltiplos naturales de un céntimo.

Podemos tener 100 céntimos, 123 céntimos... Pero no podemos tener 0.5 céntimos.

Hay una *"excepción"*: los quarks.

Los protones, los neutrones y otras partículas subatómicas están formados por quarks. Los quarks son partículas fundamentales que no cumplen el principio de cuantización de la carga eléctrica.

Hay seis tipos de quarks: up (arriba), down (abajo), strange (extraño), charm (encanto), bottom (fondo) y top (cima). Los protones y los neutrones están formados por quarks *up* y *down*.

Todos los quarks tienen cargas más pequeñas que la carga fundamental.

Esta *"excepción"* no es *"importante"* porque un quark nunca está aislado. Siempre están en grupos que cumplen el principio de cuantización de la carga eléctrica.

Campo eléctrico

1. Calcula el campo eléctrico que una carga eléctrica de 20 C crea a 10 metros de distancia en el vacío. $K = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$.

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual es:

$$E = K \cdot \frac{|Q|}{r^2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10}{10^2} = \\ &= 9 \cdot 10^8\ \text{N/C} \end{aligned}$$

2. ¿A qué distancia de una carga eléctrica de 20 C debe estar un punto en el vacío para que el campo eléctrico creado por esa carga en ese punto sea de 1 N/C? $K = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$.

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual es:

$$E = K \cdot \frac{|Q|}{r^2}$$

Ahora tenemos E, K y Q. Queremos obtener r. Despejamos:

$$E \cdot r^2 = K \cdot |Q|$$
$$r^2 = K \cdot \frac{|Q|}{E}$$
$$r = \pm \sqrt{K \cdot \frac{|Q|}{E}}$$

Como la distancia tiene que ser positiva:

$$r = \sqrt{K \cdot \frac{|Q|}{E}}$$

Sustituyendo:

$$r = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{|20|}{1}} =$$
$$= 424264 \text{ m}$$

¡Más de 400 kilómetros!

Líneas de campo eléctrico

1. ¿Cómo son las líneas de campo eléctrico alrededor de una carga puntual positiva?

Son líneas rectas **radiales** y **salen** de la carga positiva.

La carga positiva es una **fuente** de líneas de campo eléctrico.

2. ¿Cómo son las líneas de campo eléctrico alrededor de una carga puntual negativa?

Son líneas rectas **radiales** y **entran** en la carga negativa.

La carga negativa es un **sumidero** de líneas de campo eléctrico.

3. ¿Cómo son las líneas de campo eléctrico entre dos placas planoparalelas?

Son líneas rectas paralelas entre si que salen de la placa cargada positivamente y llegan a la placa cargada negativamente.

4. ¿Pueden cortarse dos líneas de campo diferentes?

No. Por definición es imposible que esto suceda.

5. ¿Qué es un **dipolo eléctrico**?

Si una carga eléctrica es un *"monopolo eléctrico"*, un conjunto de dos cargas eléctricas (normalmente de signos opuestos) es un dipolo eléctrico.

Si no se añade el adjetivo y decimos solamente *"dipolo"*, entendemos que es un dipolo eléctrico.

6. Dibuja las líneas de campo eléctrico entre dos cargas eléctricas iguales del mismo signo y de signos opuestos.

Observa las figuras.

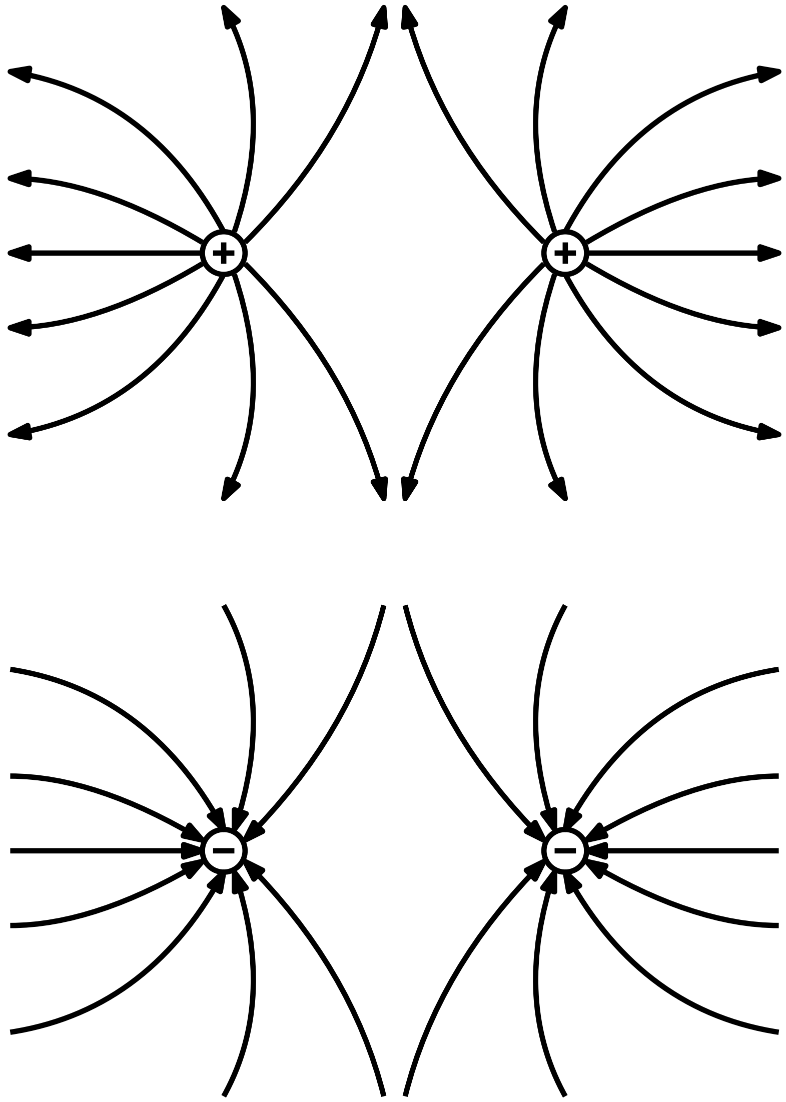


Figura 48: Campo entre dos cargas del mismo signo.

Campo gravitatorio

1. Dos masas de m_1 y m_2 kilogramos están a d metros entre si. Encuentra el punto en la línea recta que pasa por ambas en el que el campo gravitatorio total es cero.

Si m_1 está a la izquierda y m_2 está a la derecha, el punto donde se anula el campo $\vec{g}$ debe estar en algún punto entre ambas masas; $\vec{g}_1$ apunta hacia m_1 y $\vec{g}_2$ apunta hacia m_2 y ambos vectores tienen sentidos opuestos solamente entre las dos masas.

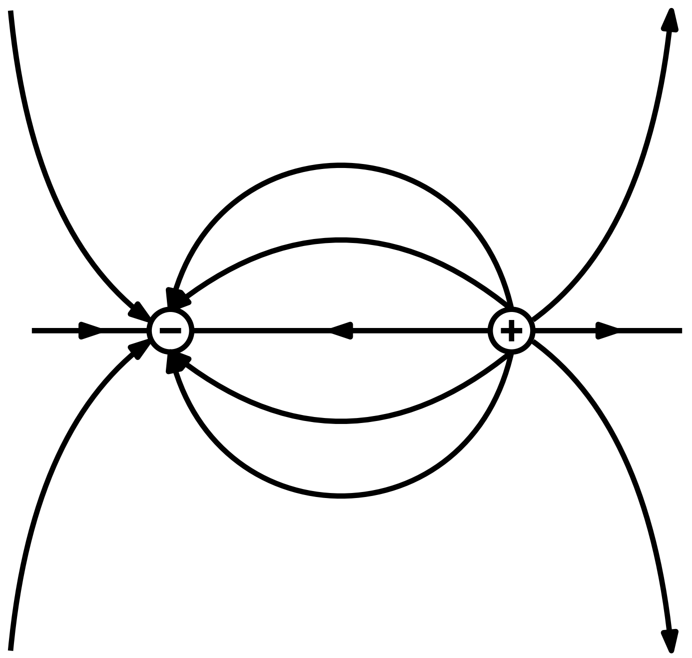


Figura 49: Campo entre dos cargas de signo opuesto.

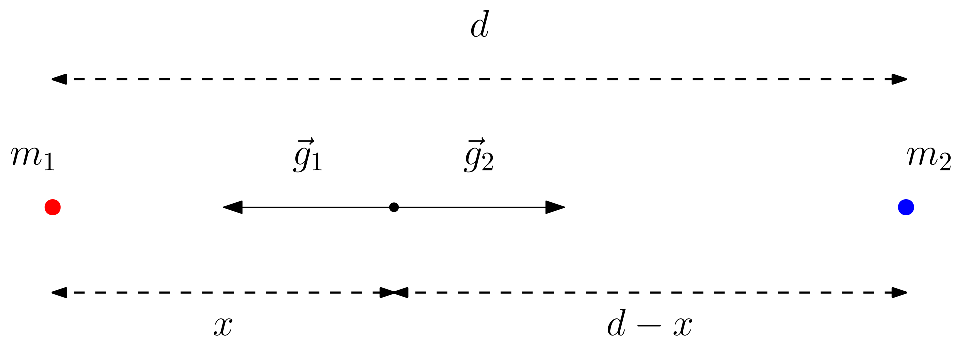


Figura 50: El campo gravitatorio solamente puede anularse en algún punto entre ambas masas.

Por el principio de superposición, los módulos de los dos campos individuales en ese punto deben ser iguales:

$$g_1 = g_2$$

pero entonces

$$G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2}$$

La constante de gravitación universal desaparece:

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

Si la distancia entre ambas masas es el parámetro d y la distancia entre la primera masa y el punto donde se anula el campo es x:

$$\frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{m_2}{m_1} \cdot x^2 = (d-x)^2$$

Esto es una ecuación cuadrática. Podríamos resolverla desarrollando el cuadrado de la diferencia del lado derecho. Pero podemos usar el siguiente *truco*:

$$\pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot x^2} = \sqrt{(d-x)^2}$$

$$\pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot x = d - x$$

$$x \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cdot x = d$$

Sacamos x como factor común:

$$x \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) = d$$

$$x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$$

De las dos soluciones, solamente una tendrá sentido físico y dependerá del valor de las dos masas. Es decir, de cuál de las dos es mayor.

2. Dos cargas de q_1 C y q_2 C del mismo signo están a d metros entre si. Encuentra el punto en la línea recta que pasa por ambas en el que el campo eléctrico total es cero.

Este ejercicio se resuelve exactamente como el anterior:

$g_1 = g_2$	$E_1 = E_2$
$G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2}$	$K \cdot \frac{\lvert q_1 \rvert}{r_1^2} = K \cdot \frac{\lvert q_2 \rvert}{r_2^2}$
$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$	$\frac{\lvert q_1 \rvert}{r_1^2} = \frac{\lvert q_2 \rvert}{r_2^2}$
...	...

Aquí desaparece la constante de Coulomb K, lo que nos indica que el resultado no depende del medio (no importa si las cargas están en el vacío, en el aire, en agua...). Finalmente la fórmula será análoga a la obtenida antes cambiando las masas por los valores absolutos de las cargas:

$$x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}}$$

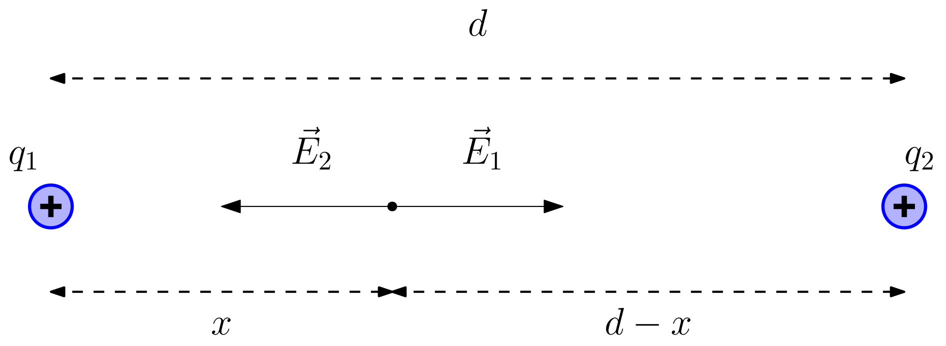


Figura 51: El campo eléctrico entre dos cargas positivas solamente puede anularse en algún punto entre ambas cargas. Observa que el campo que cada carga crea no apunta hacia la carga que lo crea, sino en sentido contrario.

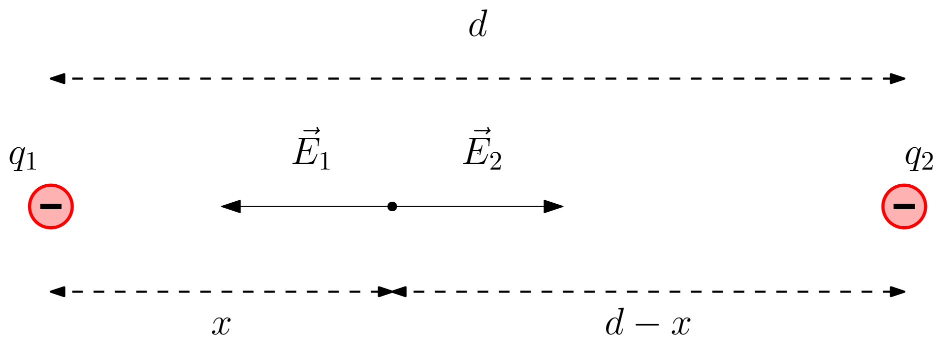


Figura 52: El campo eléctrico entre dos cargas negativas solamente puede anularse en algún punto entre ambas cargas. Observa que el campo que cada carga crea apunta hacia la carga que lo crea.

3. Dos cargas de q_1 C y q_2 C de signos opuestos están a d metros entre si. Encuentra el punto en la línea recta que pasa por ambas en el que el campo eléctrico total es cero.

Aquí el problema se resuelve de manera diferente a los dos casos anteriores. ¿Por qué? Porque si la carga q_1 está a la izquierda y la carga q_2 está a la derecha, el campo solamente puede anularse a la izquierda de q_1 o a la derecha de q_2.

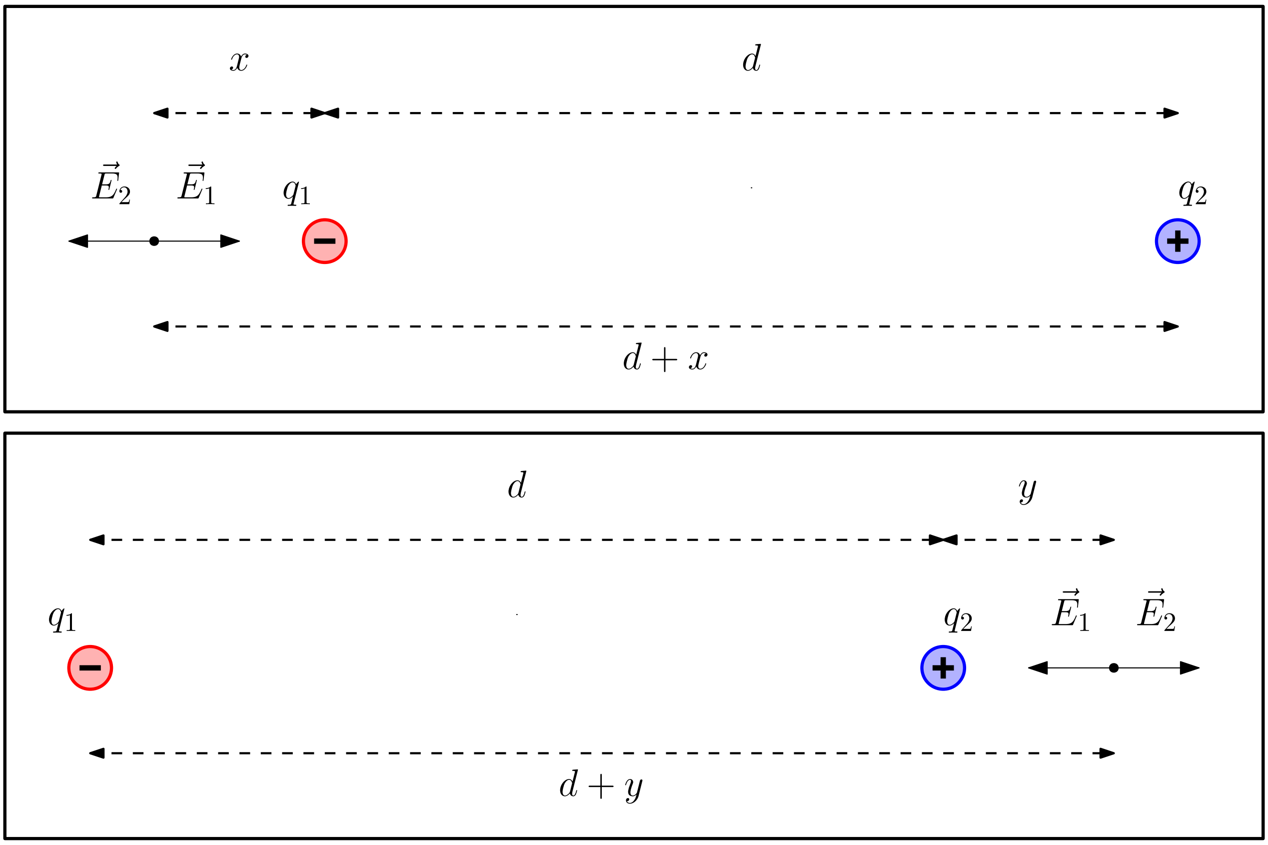


Figura 53: El campo eléctrico entre dos cargas de signos opuestos solamente puede anularse en algún punto a un lado o al otro de las cargas. No entre ellas. Dependiendo del valor de las cargas, puede estar a un lado o al otro. Aquí puedes ver las dos posibilidades.

Por lo tanto, si suponemos que el punto que buscamos está a la izquierda de q_1 y x es la distancia entre ese punto y la carga q_1:

$$\frac{|q_1|}{x^2} = \frac{|q_2|}{(d+x)^2}$$

$$\frac{|q_2|}{|q_1|} \cdot x^2 = (d+x)^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|} \cdot x^2} = \sqrt{(d+x)^2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}} \cdot x = d+x$$

$$-x \pm \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}} \cdot x = d$$

Sacamos x como factor común:

$$x \cdot \left(-1 \pm \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}\right) = d$$

$$x = \frac{d}{-1 \pm \sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}}$$

De las dos soluciones, puedes imaginar que solamente una tiene sentido físico.

4. Dos cargas puntuales del mismo signo tienen una energía potencial electrostática de 100 J cuando están a una distancia de 4 metros. Si hacemos que la distancia entre ellas sea la mitad, ¿cuál es su nueva energía potencial electrostática?

La energía potencial electrostática es:

$$E_p = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

donde K es la **constante de Coulomb** del medio y se puede escribir también como:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

donde ε es la **permitividad eléctrica** del medio.

La energía potencial original es:

$$E_{p1} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r_1}$$

La final es:

$$E_{p2} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r_2}$$

Como nos dicen que la distancia final es el **doble** de la distancia original:

$$r_2 = 2 \cdot r_1$$

Si ahora dividimos ambas expresiones para la energía potencial:

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{K \cdot \frac{Q \cdot q}{r_2}}{K \cdot \frac{Q \cdot q}{r_1}}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$E_{p2} = E_{p1} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Como r_2 es el doble de r_1:

$$E_{p2} = E_{p1} \cdot \frac{r_1}{2 \cdot r_1}$$

$$E_{p2} = E_{p1} \cdot \frac{1}{2}$$
$$E_{p2} = 100 \cdot \frac{1}{2}$$
$$E_{p2} = 50 \text{ J}$$

Cuando las cargas son del mismo signo, la energía potencial es positiva y por lo tanto se vuelve más pequeña cuando la distancia es mayor.

5. ¿Qué diferencia hay entre la energía potencial de dos cargas del mismo signo y la energía potencial de dos cargas de signos opuestos?

Las cargas del mismo signo se repelen. En cierto modo, a esas cargas *les gusta estar separadas*. Por lo tanto, si están más cerca, almacenan más energía potencial electrostática que si están más lejos.

Las cargas de signos opuestos se atraen. En cierto modo, a esas cargas *les gusta estar unidas*. Por lo tanto, si están más lejos, almacenan más energía potencial electrostática que si están más cerca.

Esto puede verse claramente en una gráfica que muestre cómo E_p depende de r para cada caso. En ambos casos tenemos una rama de una hipérbola. Pero en un caso, 0 es la energía mínima y en otro caso, 0 es la energía máxima.

6. Calcula la energía potencial electrostática de un sistema de 3 partículas de 10 C, 30 C y 20 C si la distancia entre la primera y la segunda es de 2 metros, la distancia entre la segunda y la tercera es de 3 metros y la distancia entre la tercera y la primera es de 4 metros. La constante de Coulomb es $9 \cdot 10^9$ en unidades SI.

La fórmula de la energía potencial electrostática de una pareja de cargas q y Q es:

$$E_p = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Hay 3 cargas (q_1, q_2, q_3), por lo tanto hay 3 parejas posibles:

$$E_{p12} = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$$
$$E_{p23} = K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$
$$E_{p31} = K \cdot \frac{q_3 \cdot q_1}{r_{31}}$$

La energía potencial electrostática total E_p es la **suma de todas las energías potenciales de cada una de las parejas**:

$$E_p = E_{p12} + E_{p23} + E_{p31} =$$
$$= K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + K \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} + K \cdot \frac{q_3 \cdot q_1}{r_{31}} =$$
$$= K \cdot \quad \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 \cdot q_1}{r_{31}} \quad =$$

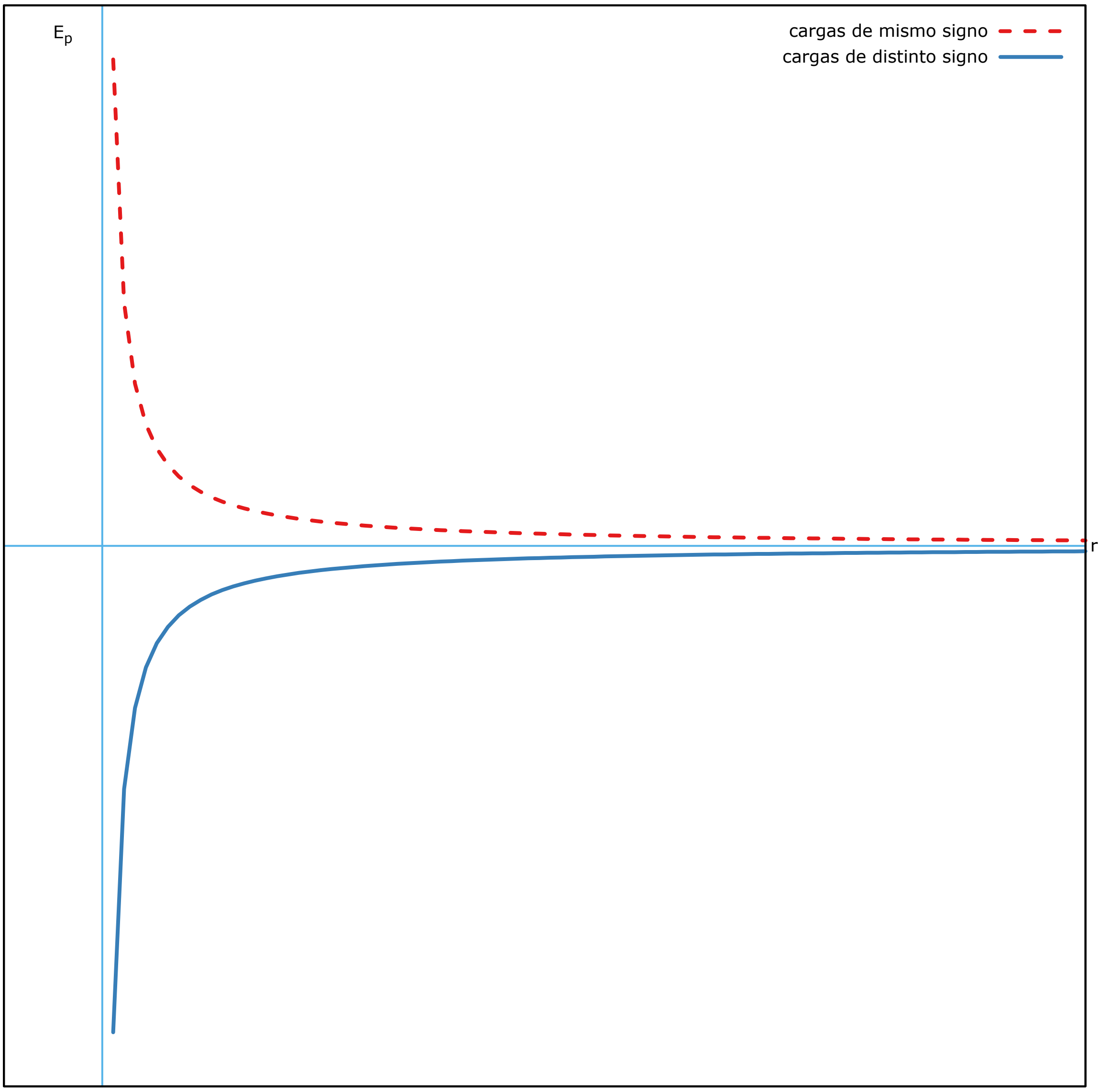


Figura 54: La energía potencial electrostática aumenta o disminuye con la distancia dependiendo de si las cargas son positivas o negativas. Ambas curvas son las ramas de una parábola.

Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
&= 9 \cdot 10^9 \cdot \quad \frac{10 \cdot 30}{2} + \frac{30 \cdot 20}{3} + \frac{20 \cdot 10}{4} \quad = \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 10) = \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot (150 + 200 + 50) = \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot (400) = \\
&= 3\,600\,000\,000\,000 \text{ J} = \\
&= 3.6 \text{ TJ}
\end{aligned}
$$

Tres coma seis terajulios.

7. ¿Cuántas energías potenciales electrostáticas hay que calcular para un sistema de 100 partículas cargadas?

Para encontrar la energía potencial electrostática total, hay que sumar la energía potencial de cada pareja de cargas eléctricas. Donde cada pareja debe ser contada una sola vez.

Cuando escogemos una parejas:

- no importa el orden (cuál es la primera carga y cuál es la segunda)
- cogemos una parte (2 cargas) del total (100 cargas)
- no podemos hacer una pareja con la misma carga (no se pueden repetir)

Por lo tanto, tenemos que calcular las **combinaciones sin repetición**:

$$
\begin{aligned}
C_{100,2} &= \genfrac{}{}{0pt}{}{100}{2} = \frac{100!}{2! \cdot (100-2)!} = \\
&= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{2! \cdot 98!} = \\
&= \frac{100 \cdot 99}{2!} = \\
&= \frac{100 \cdot 99}{2} = \\
&= 50 \cdot 99 = 4950
\end{aligned}
$$

¡Hay que calcular 4950 energías potenciales para un sistema de solamente 100 partículas!

8. ¿Cuántas energías potenciales electrostáticas hay que calcular para un sistema de n partículas cargadas?

Para encontrar la energía potencial electrostática total, hay que sumar la energía potencial de cada pareja de cargas eléctricas. Donde cada pareja debe ser contada una sola vez. **Exactamente como en el ejemplo anterior.**

Tenemos que calcular también las **combinaciones sin repetición**:

$$
C_{n,2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} =
$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1)}{2!} =$$
$$= \frac{n^2 - n}{2!} =$$
$$= \frac{n^2 - n}{2}$$

Que, en matemáticas, es la fórmula de los números triangulares.

9. Compara la interacción gravitatoria y la electrostática entre dos electrones que están a un centímetro de distancia entre ellos.

La interacción gravitatoria en Física Clásica está descrita por la **ley de gravitación universal** de Newton:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

La interacción electrostática está descrita por la **ley de Coulomb**:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

En el caso de dos electrones podemos escribir:

$$F_g = G \cdot \frac{m_e \cdot m_e}{r^2} = G \cdot \frac{m_e^2}{r^2}$$
$$F_e = K \cdot \frac{|q_e| \cdot |q_e|}{r^2} = K \cdot \frac{q_e^2}{r^2}$$

Dividiendo una entre otra:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \cdot \frac{q_e^2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_e^2}{r^2}}$$

Pero la distancia desaparece. Así que la relación entre ambas fuerzas será independiente de si están a 1 cm, a 1 metro, a 1 kilómetro, a un año-luz...

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \cdot q_e^2}{G \cdot m_e^2}$$

Suponiendo que el medio es el vacío:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K_0 \cdot q_e^2}{G \cdot m_e^2}$$

Ahora podemos sustituir las constantes por sus valores conocidos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-16})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (9.11 \cdot 10^{-31})^2}$$
$$\frac{F_e}{F_g} \approx 4 \cdot 10^{48}$$

Resultado que **no tiene unidades**, ya que es el cociente entre dos fuerzas.

La diferencia entre ambas interacciones es **ENORME**. ¡48 órdenes de magnitud!

Por esto decimos que la interacción electrostática es mucho más intensa que la interacción gravitatoria.

10. Si la interacción electrostática es mucho más intensa que la gravitatoria y la gravitatoria es tan débil, ¿por qué al estudiar los movimientos de planetas, satélites… ignoramos la interacción electrostática?

Tanto la carga eléctrica como la masa son **propiedades aditivas** en Física Clásica:

- si tenemos una carga de 3 C y una carga de -2 C, la carga del conjunto formado por ambas es 3 C + (-2) C = 1 C.
- si tenemos una masa de 2 kg y una masa de 5 kg, la masa del conjunto formado por ambas es 2 kg + 5 kg = 7 kg.

Pero hay una diferencia fundamental:

- las cargas eléctricas pueden ser positivas y negativas
- las masas solamente son positivas

Por lo tanto, cuando tenemos gran cantidad de materia, la masa siempre aumenta, pero la carga eléctrica no tiene por qué hacerlo; existen en el Universo cantidades similares de cargas positivas y negativas por lo que es habitual que objetos grandes tengan cargas muy pequeñas o incluso iguales a cero. Mientras que las masas se pueden acumular tanto que los efectos gravitatorios sean importantes y apreciables.

Interacción gravitatoria

La interacción gravitatoria vista con más detalle.

1. Calcula la atracción gravitatoria que existe entre dos personas de 80 kg y 65 kg de masa si están a 2 metros de distancia entre si.

La atracción gravitatoria entre dos masas se puede calcular con la **ley de gravitación universal de Newton**:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

donde:

- F es la fuerza (en newtons)
- M y m son las masas de los dos cuerpos (en kilogramos)
- r es la distancia entre los centros de los cuerpos (en metros)
- G es la constante de gravitación universal de Newton cuyo valor es:

  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$

Tenemos:

- $F = ?$
- $M = 80$ kg
- $m = 75$ kg
- $r = 2$ m

Sustituyendo en la ley:

$$F = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot 75}{2^2} =$$
$$= 1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N} = 0.0000001\ \mathrm{N}$$

¡Es una fuerza muy pequeña!

2. ¿A qué distancia tienen que estar dos personas de 80 kg y 65 kg de masa entre si para que la fuerza gravitatoria entre ellas sea de 1 newton?

Podemos aplicar la ley de gravitación universal de Newton que dice que el módulo de la fuerza gravitatoria F entre dos masas M y m que están a una distancia r entre ellas es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Lo que queremos encontrar ahora es la distancia r, por lo tanto, vamos a **despejar antes de sustituir**:

1. Multiplicamos ambos lados por r^2:

$$F \cdot r^2 = G \cdot M \cdot m$$

2. Dividimos ambos lados entre F:

$$r^2 = G \cdot \frac{M \cdot m}{F}$$

3. Hacemos la raíz cuadrada en ambos lados:

$$r = \pm \sqrt{G \cdot \frac{M \cdot m}{F}}$$

4. Como r es una distancia, tiene que ser positiva y podemos eliminar la solución negativa:

$$r = \sqrt{G \cdot \frac{M \cdot m}{F}}$$

Ahora podemos sustituir los datos que da el enunciado:

$$r = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot 65}{1}} =$$
$$= 0.0005889 \text{ m}$$

Sus centros deberían estar a menos de un milímetro de distancia, ¡lo cual es imposible!

3. El radio del planeta Marte es 3389,5 km y su masa es $6,39 \cdot 10^{23}$ kg.

a) Calcula la intensidad de la atracción gravitatoria que Marte ejercería sobre una persona de 70 kg que caminase en su superficie.

b) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en Marte?

La distancia entre el centro de Marte y la persona que camina sobre su superficie es aproximadamente igual al radio de Marte.

Por eso, este problema es muy sencillo: solamente tenemos que aplicar de nuevo la ley de gravitación universal de Newton. Una de las masas es la masa de Marte y la otra, la masa de la persona.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} =$$

Sustituimos:

$$= 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6.39 \cdot 10^{23} \cdot 70}{3389500^2} =$$
$$= 259.7 \text{ N}$$

La **aceleración de la gravedad** o el **campo gravitatorio** g de Marte se obtiene muy fácilmente. Sabemos que la fuerza gravitatoria sobre un objeto de masa m en la superficie de un planeta es lo que llamamos **peso** P:

$$P = m \cdot g$$

Por lo tanto:

$$g = \frac{P}{m} = \frac{259.7}{70} =$$
$$= 3.71 \text{ m/s}^2$$

> **4**. Supongamos que la masa del Sol se multiplica por n. Calcula el nuevo periodo orbital de la Tierra si está a la misma distancia. Datos: el periodo orbital de la Tierra es de 365 días.

Por la ley de gravitación universal de Newton:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

donde M es la masa del Sol y m es la masa de la Tierra y r es la distancia entre sus centros.

Por la segunda ley de Newton, para la aceleración de la Tierra:

$$m \cdot a = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$a = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si la órbita es aproximadamente circular, la aceleración es centrípeta y normal:

$$\frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

La velocidad angular y la lineal están relacionadas:

$$\frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\omega^2 \cdot r = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

El periodo y la velocidad angular están relacionados:

$${\frac{2\pi}{T}}^{2} \cdot r = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3 = G \cdot M$$
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

Que es una forma de escribir la tercera **ley de Kepler**. Pero aquí varían la masa del Sol y el periodo orbital. Así que pasamos a la izquierda lo que cambia:

$$T^2 \cdot M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G}$$

Si T_1 es el periodo normal y T_2 el que queremos calcular y $M_1 = M$ es la masa solar normal y $M_2 = n \cdot M$ es la nueva masa solar, podemos escribir:

$$\begin{array}{l} T_1^2 \cdot M_1 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G} \\ T_2^2 \cdot M_2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G} \end{array} \Rightarrow T_1^2 \cdot M_1 = T_2^2 \cdot M_2$$

$$T_1^2 \cdot M = T_2^2 \cdot n \cdot M$$
$$T_1^2 = n \cdot T_2^2$$
$$T_2^2 = \frac{T_1^2}{n}$$
$$T_2 = \pm \frac{T_1}{\sqrt{n}}$$

Como el periodo debe ser positivo:

$$\boxed{T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{n}}}$$

5. Encuentra la fórmula para el periodo orbital de un planeta que orbita alrededor del Sol.

La fuerza gravitatoria se calcula con la **ley de gravitación universal** y la **segunda ley de Newton** permite encontrar la aceleración:

$$\begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = G\frac{m \cdot M}{r^2} \end{array} \Rightarrow m \cdot a = G\frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

Si la órbita es circular, como la aceleración es centrípeta y normal $a = v^2/r$:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$

La velocidad lineal v se relaciona con la velocidad angular ω a través de $v = \omega \cdot r$:

$$\frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$

$$\omega^2 \cdot r = G\frac{M}{r^2}$$

La velocidad angular ω está relacionada con el periodo T:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{GM}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

que es la **tercera ley de Kepler**:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GM}$$

$$\boxed{T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

6. Encuentra la fórmula para el radio orbital de un planeta que orbita alrededor del Sol.

El desarrollo es exactamente el mismo que antes. Y también se llega a la **tercera ley de Kepler**.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{GM \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{GM \cdot T^2}{4\pi^2}}}$$

7. Deduce la unidades de la constante de gravitación universal G a partir de la ley de gravitación universal de Newton.

La ley de gravitación universal de Newton es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Si despejamos G:

$$\frac{F \cdot r^2}{M \cdot m} = G$$

$$G = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m}$$

- F es la fuerza que se mide en newtons (N) en el SI (Sistema Internacional de unidades)

- r es la distancia entre las masas, que se mide en m (metros)
- M y m son las masas, que se miden en kg (kilogramos)

Por lo tanto, las unidades de G son:

$$\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

8. ¿Por qué la ley de gravitación de Newton se llama **universal**?

Antes de Newton se creía que la gravedad terrestre y la gravedad celeste estaban gobernadas por leyes diferentes. Es decir, que las leyes que describen los fenómenos **terrestres** (que ocurren en la superficie de la **Tierra**) eran distintas de las que describen los fenómenos **celestes** (que ocurren en el **cielo**).

La ley de gravitación de Newton se llama **universal** porque con ella se pueden explicar fenómenos gravitatorios que ocurren en la Tierra y en el cielo.

Fenómenos como la caída de los cuerpos, las mareas, la forma de los planetas, el movimiento de planetas, satélites y cometas…

9. Calcula la altura a la que debe estar un satélite geoestacionario.

Un satélite es geoestacionario cuando gira alrededor de la Tierra y su periodo coincide con el de rotación de la Tierra ($T = 1$ día $= 24$ horas).

La única fuerza relevante es la fuerza de gravitación que la Tierra ejerce sobre el satélite. Según la ley de gravitación universal de Newton:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal
- M es la masa de la Tierra
- m es la masa del satélite
- r es la distancia entre los centros del satélite y de la Tierra

Por la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$

Tenemos:

$$m \cdot a = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

Como la órbita es circular, la aceleración es centrípeta:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$

$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$r = G\frac{M}{v^2}$$

La velocidad lineal v se relaciona con la angular ω por el radio de la órbita r:

$$r = G\frac{M}{(\omega \cdot r)^2}$$

$$r = G\frac{M}{\omega^2 \cdot r^2}$$

$$r^3 = G\frac{M}{\omega^2}$$

$$r^3 = G\frac{M}{\frac{2\pi}{T}^2}$$

$$r^3 = G\frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{G\frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Pero r es el radio de la Tierra R_T más la altura h:

$$h = \sqrt[3]{G\frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

Interacción electrostática

La interacción electrostática es la interacción entre cargas que no se mueven.

1. ¿Qué signos pueden tener las cargas eléctricas?

Las cargas eléctricas pueden ser **positivas** o **negativas**.

Un objeto físico puede tener una carga total de 0 culombios.

2. ¿Cómo es la interacción entre dos cargas estáticas?

La interacción entre dos cargas eléctricas estáticas (= que no se mueven) es una **interacción electrostática**. Y:

- es **atractiva** si tienen signos opuestos.

  Es decir, si una es positiva y otra es negativa, las cargas **se atraen** e intentan acercarse entre si.

- es **repulsiva** si tienen el mismo signo.

  Es decir, si las dos son positivas o las dos son negativas, las cargas **se repelen** e intentan alejarse entre si.

3. ¿Qué ley da la intensidad de la interacción electrostática entre dos cargas eléctricas estáticas?

Es la **ley de Coulomb de la electrostática** que dice que la fuerza electrostática F entre dos cargas Q y q que están a una distancia r entre ellas en un medio con constante de Coulomb K tiene:

- Módulo:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot q}{r^2}$$

- Dirección:

  la línea recta que une los centros de las cargas.

- Sentido:
  - Atractivo si las cargas son de signos opuestos
  - Repulsivo si las cargas son del mismo signo

4. ¿A qué otra ley se parece la ley de Coulomb de la electrostática?

A la **ley de gravitación universal de Newton**.

Newton	Coulomb
$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$	$F = K \cdot \frac{\|Q\| \cdot \|q\|}{r^2}$
G	K
m, M	q, Q

Hay diferencias importantes:

- Signo de la propiedad de la materia que causa la interacción:
  - la masa siempre es positiva
  - la carga puede ser positiva o negativa
- Atracción o repulsión
  - la interacción gravitatoria siempre es atractiva
  - la interacción electrostática puede ser repulsiva o atractiva
- La constante
  - G es universal y *muy pequeña*
  - K depende del medio y es *grande*

    Depende del medio porque no es igual en el vacío, en el aire, en el agua, en el vidrio...

5. Calcula la repulsión electrostática que existe entre dos cargas de 25 C y 30 C si están a 2 centímetros de distancia entre si en el vacío.

Usamos la **ley de Coulomb de la electrostática** para calcular el módulo de la fuerza electrostática de repulsión:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

Tenemos la mayoría de los datos:

- $Q = 25$ C
- $q = 30$ C
- $r = 2$ cm $= 0{,}02$ m

La constante de Coulomb en el vacío es:

- $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

Sustituyendo en la ley de Coulomb:

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{|25| \cdot |30|}{0.02^2} =$$
$$= 1.6875 \cdot 10^{16} \text{ N}$$

¡Es una fuerza enorme!

6. Calcula la atracción electrostática que existe entre dos cargas de -25 C y 30 C si están a 2 centímetros de distancia entre si en el vacío.

En realidad, como el módulo de la fuerza se calcula con los valores absolutos de las cargas y los datos son (salvo el signo) los mismos que en el ejercicio anterior, **el módulo de la fuerza es el mismo que en el ejercicio anterior**.

7. ¿A qué distancia tienen que estar dos cargas de 20 C y 40 C entre si para que la fuerza electrostática entre ellas sea de 1 newton?

Podemos aplicar la ley de Coulomb de la electrostática que dice que el módulo de la fuerza electrostática F entre dos cargas Q y q que están a una distancia r entre ellas es:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

Lo que queremos encontrar ahora es la distancia r, por lo tanto, vamos a **despejar antes de sustituir**:

1. Multiplicamos ambos lados por r^2:

$$F \cdot r^2 = K \cdot |Q| \cdot |q|$$

2. Dividimos ambos lados entre F:

$$r^2 = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{F}$$

3. Hacemos la raíz cuadrada en ambos lados:

$$r = \pm \sqrt{K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{F}}$$

4. Como r es una distancia, tiene que ser positiva y podemos eliminar la solución negativa:

$$r = \sqrt{K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{F}}$$

Ahora podemos sustituir los datos que da el enunciado:

$$r = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{|20| \cdot |40|}{1}} =$$
$$= 2683281.573 \text{ m}$$

¡A más de dos mil kilómetros!

Observa que este ejercicio es esencialmente idéntico a un ejercicio sobre la interacción gravitatoria que aparece en otra parte del libro.

8. En el modelo del átomo de hidrógeno de Rutherford, el electrón orbita alrededor del núcleo. Encuentra la expresión del periodo orbital del electrón.

La única fuerza relevante en este caso es la electrostática cuyo módulo da la ley de Coulomb:

$$F = K\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

Como el medio es el vacío:

$$F = K_0\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

El núcleo atómico tiene la carga de un protón q_p, cuyo valor absoluto es el mismo que el de la carga del electrón q_e, pero tiene signo opuesto:

$$q_p = -q_e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Por comodidad, usaremos q para la carga del protón. Y, por lo tanto, para nuestro sistema físico la fórmula queda:

$$F = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

La segunda ley de Newton permite encontrar la *aceleración* a que causa la fuerza F, con la expresión anterior tenemos:

$$\begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = K_0\frac{q^2}{r^2} \end{array} \quad \Rightarrow m \cdot a = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

Esto considera que el protón no se mueve. Y por lo tanto m representa la masa del electrón.

Si la órbita es circular y la aceleración siempre apunta hacia el centro de la órbita (donde está el protón), entonces la aceleración es **centrípeta** y **normal**, por lo tanto:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

Pero la velocidad v y la velocidad angular ω se relacionan por $v = \omega \cdot r$:

$$m \cdot \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

La velocidad angular ω está relacionada con el periodo (como ocurre en todo movimiento periódico, como un MAS -movimiento armónico simple-) por $\omega = 2\pi/T$:

$$m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = K_0\frac{q^2}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{K_0 \cdot q^2}{m \cdot r^3}$$
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m \cdot r^3}{K_0 \cdot q^2}$$
$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m \cdot r^3}{K_0 \cdot q^2}$$
$$T = \pm \sqrt{4\pi^2 \cdot \frac{m \cdot r^3}{K_0 \cdot q^2}}$$

Solamente la solución positiva tiene sentido:

$$T = \sqrt{4\pi^2 \cdot \frac{m \cdot r^3}{K_0 \cdot q^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{q} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot r^3}{K_0}}}$$

9. ¿Es correcto el modelo atómico anterior?

No.

Este modelo *"planetario"* del átomo no fue propuesto originalmente por Rutherford. La propuesta original fue del japonés Hantarō Nagaoka en 1904. Pero Nagaoka tuvo buenas razones para descartar el modelo.

En física clásica, si una carga está acelerada, la carga emite radiación electromagnética (ondas electromagnéticas). Un electrón orbitando en un átomo tiene una aceleración, por lo tanto, debería emitir radiación electromagnética y perder energía. Por lo tanto, el electrón terminaría cayendo al núcleo.

El modelo del átomo de Nagaoka fue descartado porque, según ese modelo, el átomo es **inestable**. Cosa que fenomenológicamente es falsa.

Pero este modelo daba predicciones correctas para los experimentos de Hans Geiger, Ernest Marsden y Ernest Rutherford realizados entre 1908 y 1913. Y Rutherford fue quien usó ese modelo para obtener las fórmulas que describían los resultados de los experimentos. Por eso se suele llamar *"modelo de Rutherford"*.

El modelo de Rutherford fue sustituido por modelos precuánticos: primero el de Bohr y después el de Sommerfeld-Wilson-Ishiwara (que mejoraba el de Bohr). Después por el primer modelo cuántico: el basado en la ecuación de Schrödinger.

10. Deduce las unidades de la constante de Coulomb K a partir de la ley de Coulomb.

La ley de Coulomb para el módulo de la fuerza electrostática entre dos cargas se puede escribir:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

donde:

- F es la fuerza electrostática
- K es la *constante de Coulomb* en el medio

- Q y q son las cargas eléctricas
- r es la distancia entre las cargas

Si despejamos K, obtenemos:

$$K = \frac{F \cdot r^2}{|Q| \cdot |q|}$$

La fuerza se mide en newtons (N), la distancia en metros (m) y la carga eléctrica en culombios (C). Por lo tanto, sustituyendo las unidades en la fórmula anterior, deducimos que K se mide en:

$$\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

11. Deduce las unidades de la permitividad eléctrica ε a partir de la ley de Coulomb.

Sabemos que la relación entre K y ε es:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

La ley de Coulomb es:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

Sustituyendo:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

Despejando:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi F} \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$

Sustituyendo unidades:

$$\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$$

12. Calcula la permitividad eléctrica del vacío ε_0 a partir de la constante de Coulomb en el vacío:

$$K_0 \approx 9 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}.$$

La relación entre ellas en cualquier medio es:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

para el vacío:

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

despejando:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_0}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$$
$$\varepsilon_0 \approx 8.842 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$$

13. Calcula el módulo de la fuerza electrostática entre dos electrones que están a 4 cm de distancia entre ellos. El medio es el vacío, donde la constante de Coulomb es $9 \cdot 10^9$ en unidades del SI. La carga del electrón es $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

La distancia entre los dos electrones es:

$$r = 4\ \mathrm{cm} = 4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm}$$

La ley de la electrostática de Coulomb nos dice que la fuerza electrostática entre dos cargas es:

$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{r^2}$$
$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2} =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-19} \cdot 16 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-19}}{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2} =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-40} \cdot 16}{16 \cdot 10^{-4}} =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-40}}{10^{-4}} =$$
$$= 144 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{N}$$

Hemos hecho el cálculo manualmente.

14. ¿Cuáles son los principios de conservación de la Naturaleza?

Solamente en Física Clásica:

- conservación de la masa

En Física Moderna y Física Clásica:

- conservación de la carga eléctrica
- conservación de la energía
- conservación del momento lineal (= cantidad de movimiento)
- conservación del momento angular (= momento cinético)

Corriente eléctrica

Una corriente eléctrica es un conjunto de cargas eléctricas que se mueven.

La corriente eléctrica es el método fundamental de distribución de energía en la civilización en la que vivimos. Por lo tanto, entender la corriente eléctrica es fundamental para entender cómo se produce la energía eléctrica en las centrales, cómo se distribuye, cómo llega a nuestros hogares, cómo ilumina las calles de nuestras ciudades...

> **1**. Un elemento de un circuito disipa 320 J en 4 segundos. Si por el elemento del circuito han pasado 20 C:
> a) ¿Cuál es la potencia del elemento?
> b) ¿Cuál es su resistencia?
> c) ¿Cuál es el voltaje entre los extremos del elemento?

a) La **potencia** P mide *lo rápido que varía la energía*:

$$P = \frac{\Delta E}{t}$$

La energía disipada es:

$$\Delta E = 320 \text{ J}$$

y el tiempo transcurrido es:

$$t = 4 \text{ s}$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{320}{4} = 80 \text{ W}$$

b) La intensidad de corriente I es la cantidad de carga Q que pasa por unidad de tiempo t:

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$I = \frac{20}{4} = 5 \text{ A}$$

La ley de Joule indica:

$$P = I \cdot V$$

por lo que podemos encontrar el voltaje V:

$$V = \frac{P}{I} = \frac{80}{5} = 16 \text{ V}$$

Por la ley de Ohm:

$$V = I \cdot R$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{16}{5} \ \Omega$$

c) El voltaje, como hemos calculado, es 16 voltios.

2. En un nodo de un circuito se encuentran 7 conductores. Por cuatro de ellos circulan corrientes hacia el nodo de 3 A, 4 A, 1 A y 2 A. Por dos de ellos circulan corrientes que salen del nodo de 1 A y 7 A. ¿Qué corriente circula por el conductor que falta?

Un **nodo** es un punto en el que se encuentran varios conductores en un circuito.

Los nodos cumplen la **ley de Kirchhoff de los nodos**:

> *«La suma de las intensidades de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las intensidades de las corrientes que salen del nodo.»*

Expresada así, las intensidades de corriente son todas positivas. Pero podemos expresar la ley también de esta manera:

> *«La suma de todas las intensidades que entran o salen de un nodo es cero. Donde consideramos que las que entran son positivas y las que salen son negativas.»*

$$I = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 = 0$$

$$3 + 4 + 1 + 2 + (-1) + (-7) + I_7 = 0$$

$$2 + I_7 = 0$$

$$I_7 = -2 \text{ A}$$

Como tiene un signo negativo, quiere decir que **según la convención que hemos escogido** la corriente sale del nodo.

La ley de Kirchhoff de los nodos **equivale a la ley de conservación de la carga eléctrica** para circuitos eléctricos. Esa ley dice que, en un sistema aislado, la carga eléctrica total del sistema se conserva (= permanece constante).

Según la conservación de la carga eléctrica, si en un nodo entran 10 A, no pueden salir 12 A o 9 A. Si en un nodo entran 10 A, tienen que salir 10 A.

3. ¿Nodos o nudos?

Los **nodos** a los que se refiere la ley de Kirchhoff también se pueden llamar **nudos**.

Por eso, esa ley también se puede llamar **ley de los nudos** de Kirchhoff.

4. Una corriente eléctrica está formada por electrones en movimiento que se mueven hacia la derecha. ¿Cuál es el sentido de la corriente eléctrica?

Por convención, el sentido de una corriente eléctrica es el del movimiento de las cargas positivas. Los electrones son cargas negativas. Por lo que la corriente tiene un sentido **contrario al movimiento de los electrones**.

Por lo tanto, la corriente eléctrica apunta hacia la izquierda.

5. Una corriente eléctrica está formada por protones en movimiento que se mueven hacia la derecha. ¿Cuál es el sentido de la corriente eléctrica?

Por convención, el sentido de una corriente eléctrica es el del movimiento de las cargas positivas. Los protones son positivos.

Por lo tanto, la corriente eléctrica apunta hacia la derecha.

6. ¿Qué almacena un condensador eléctrico?

Energía eléctrica.

Un **condensador eléctrico** sencillo es un par de placas conductoras planas y paralelas entre si que están separadas una distancia pequeña por un dieléctrico[12] (un material aislante).

Cada placa está conectada a un cable donde ambos cables forman parte del mismo circuito. El voltaje que produce la corriente en el circuito hace que se acumulen cargas positivas en una de las placas y cargas negativas en otra de las placas.

La carga eléctrica en la placa positiva es Q y la carga eléctrica en la placa negativa es -Q. La carga total del condensador es, por lo tanto, igual a 0.

La cantidad de carga Q que puede tener la placa positiva como máximo depende de:

- la geometría del condensador
- la distancia entre las placas
- el medio que separa las placas
- el voltaje al que está sometido

La *capacidad* C de un condensador es:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

y se mide en **faradios** (F).

La energía que tiene un condensador es:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}CV^2}$$

Fórmula similar a las fórmulas de la energía cinética o de la energía potencial elástica.

7. Un condensador almacena 200 J cuando la diferencia de potencial entre sus extremos es de 5 V. ¿Cuál es su capacidad y su carga eléctrica?

Se nos dice que la energía del condensador es de 200 J:

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$

Despejamos la capacidad:

$$C = \frac{2E}{V^2}$$

[12] Eso incluye el aire.

$$C = \frac{2 \cdot 200}{5^2}$$
$$C = \frac{400}{25}$$
$$C = 16 \text{ F}$$

La capacidad del condensador es de 16 faradios.

Ahora sabemos que:

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$Q = C \cdot V$$
$$Q = 16 \cdot 5$$
$$Q = 80 \text{ C}$$

La carga de una de las placas es de 80 culombios. La otra placa (asumiendo que es un condensador de 2 placas) tiene una carga de -80 culombios. La carga total del condensador es 0 C.

8. En un circuito de corriente continua, hay tres resistencias $R_1 = 3$ ohmios, $R_2 = 4$ ohmios y $R_3 = 2$ ohmios. La primera y la segunda están en serie y el conjunto de ambas está en paralelo con la tercera.
Si el voltaje aplicado sobre el circuito es de 12 V, calcula:
a) La resistencia equivalente
b) el voltaje y la intensidad de corriente de cada elemento del circuito

La resistencia equivalente de las dos resistencias R_1 y R_2 es:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2$$

porque las dos están en serie:

$$R_{1,2} = 3 + 4 = 7 \ \Omega$$

Esta resistencia equivalente está en paralelo con respecto a la tercera resistencia. Por lo tanto:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{7} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{2}{14} + \frac{7}{14}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{9}{14} \ \Omega^{-1}$$
$$R = \frac{14}{9} \ \Omega$$

Por la ley de Ohm, podemos encontrar la intensidad que circula por el circuito:

$$V = I \cdot R$$

$$I = \frac{V}{R}$$
$$I = \frac{12}{14/9}$$
$$I = \frac{54}{7}\text{ A}$$

El voltaje de la resistencia equivalente $R_{1,2}$ debe ser igual al voltaje de la resistencia R_3 porque ambas tienen los mismos extremos:

$$V_{1,2} = V_3 = V$$
$$V_{1,2} = V_3 = 12\text{ V}$$

Ahora, con la ley de Ohm, podemos encontrar las intensidades de corriente $I_{1,2}$ e I_3:

$$I_{1,2} = \frac{V_{1,2}}{R_{1,2}}$$
$$I_{1,2} = \frac{12}{7}\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3}$$
$$I_3 = \frac{12}{2} = 6\text{ A}$$

Podemos comprobar que la suma de ambas intensidades deben ser igual a la intensidad I:

$$I_{1,2} + I_3 = I$$
$$\frac{12}{7} + 6 = \frac{12}{7} + \frac{42}{7} = \frac{54}{7}\text{ A}$$

lo cual nos asegura que el resultado es correcto.

La intensidad que circula por R_1 es la misma que la que circula por R_2 y la misma que la intensidad que circula por la resistencia equivalente $R_{1,2}$:

$$I_1 = I_2 = I_{1,2} = \frac{12}{7}\text{ A}$$

El voltaje se encuentra por la ley de Ohm:

$$V_1 = I_1 \cdot R_1 = \frac{12}{7} \cdot 3 = \frac{36}{7}\text{ V}$$
$$V_2 = I_2 \cdot R_2 = \frac{12}{7} \cdot 4 = \frac{48}{7}\text{ V}$$

La suma de ambos voltajes debe ser igual a la suma del voltaje de la resistencia equivalente:

$$V_1 + V_2 = V_{1,2}$$

$$\frac{36}{7} + \frac{48}{7} = \frac{84}{7} = 12$$

Lo cual es correcto.

9. Por dos conductores rectilíneos de 2 metros de longitud, paralelos entre si y separados 20 cm, circulan 4 A y 8 A en el mismo sentido. Dibuja las fuerzas entre ellos y calcula el módulo de la misma. La permeabilidad magnética en el vacío es: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos es atractiva si la corriente eléctrica circula en ambos en el mismo sentido.

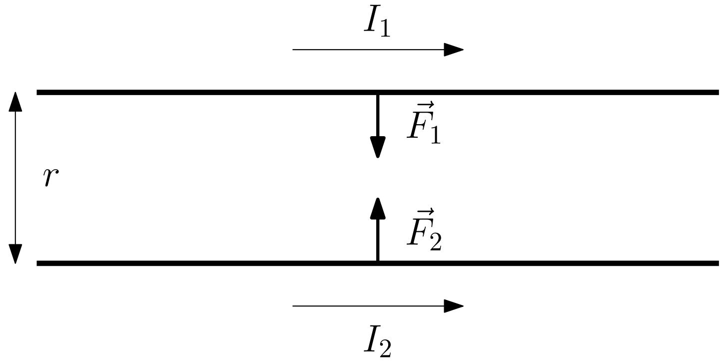


Figura 55: La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos es atractiva si la corriente eléctrica circula en ambos en el mismo sentido.

El módulo de esa fuerza es:

$$\boxed{F = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l}$$

donde:

- μ es la permeabilidad magnética del medio
- I_1 es la corriente que circula por el primer conductor
- I_2 es la corriente que circula por el segundo conductor
- r es la distancia entre ambos conductores
- l es la longitud de los conductores

Sustituyendo:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{2\pi \cdot 0.2} \cdot 2$$
$$F = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{0.2}$$
$$F = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 10^{-1}}$$
$$F = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 8$$
$$F = 64 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

10. Por dos conductores rectilíneos de 2 metros de longitud, paralelos entre si y separados 20 cm, circulan 4 A y 8 A en el sentidos opuestos. Dibuja las fuerzas entre ellos y calcula el módulo de la misma. La permeabilidad magnética en el vacío es: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos es repulsiva si la corriente eléctrica circula en ambos en sentidos opuestos.

El módulo de esa fuerza es:

$$\boxed{F = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l}$$

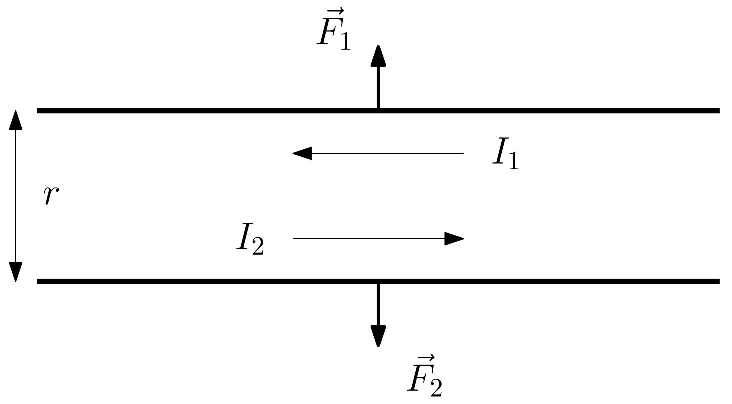


Figura 56: La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos es repulsiva si la corriente eléctrica circula en ambos en sentidos opuestos.

donde:

- μ es la permeabilidad magnética del medio
- I_1 es la corriente que circula por el primer conductor
- I_2 es la corriente que circula por el segundo conductor
- r es la distancia entre ambos conductores
- l es la longitud de los conductores

Sustituyendo:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{2\pi \cdot 0.2} \cdot 2$$

$$F = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{0.2}$$

$$F = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 10^{-1}}$$

$$F = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 8$$

$$F = 64 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

11. ¿Qué ocurriría en los dos ejercicios anteriores si el medio fuese diamagnético o paramagnético en lugar de ser el vacío?

En un medio diamagnético, la permeabilidad magnética es **menor** que la del vacío. Entonces los campos magnéticos son menores que en el vacío. Y, por lo tanto, la fuerza magnética es menor que en el vacío.

En un medio paramagnético, la permeabilidad magnética es **un poco mayor** que la del vacío. Entonces los campos magnéticos son un poco mayores que en el vacío. Y, por lo tanto, la fuerza magnética es un poco mayor que en el vacío.

¿Qué ocurre con los medios ferromagnéticos?

En un medio ferromagnético, la permeabilidad magnética es mucho mayor que la del vacío… así que la fuerza magnética también lo será.

Ejemplos:

- diamagnético: agua (H_2O)
- paramagnético: aire, aluminio (Al)

- ferromagnético: hierro (Fe), cobalto (Co), níquel (Ni)

12. En un circuito de corriente continua, hay tres condensadores $C_1 = 3$ faradios, $C_2 = 4$ faradios y $C_3 = 2$ faradios. El primero y el segundo están en serie y el conjunto de ambos está en paralelo con el tercero.
Si el voltaje aplicado sobre el circuito es de 12 V, calcula:

a) la capacidad equivalente
b) la carga del condensador equivalente
c) la energía almacenada en el condensador

a) Como C_1 y C_2 están en serie:

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{7}{12}\ \mathrm{F}^{-1}$$

$$C_{1,2} = \frac{12}{7}\ \mathrm{F}$$

Como $C_{1,2}$ y C_3 están en paralelo:

$$C = C_{1,2} + C_3$$

$$C = \frac{12}{7} + 2 = \frac{12}{7} + \frac{14}{7}$$

$$C = \frac{26}{7}\ \mathrm{F}$$

b) La carga de la placa positiva del condensador es:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = \frac{C}{V}$$

$$Q = \frac{26/7}{12}$$

$$Q = \frac{26}{84}$$

$$Q = \frac{13}{42}\ \mathrm{C}$$

La carga en la placa negativa es -Q. Y la carga total es 0.

c) La energía almacenada es:

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$
$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{42} \cdot 12^2$$
$$E = \frac{156}{7} \text{ J}$$

13. Si un condensador almacena 200 J y la diferencia de potencial entre sus planos es de 10 V, ¿cuál es su capacidad y su carga eléctrica?

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$
$$C = \frac{2E}{V^2}$$
$$C = \frac{2 \cdot 200}{10^2}$$
$$C = \frac{400}{100}$$
$$C = 4 \text{ F}$$

Sabemos que la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$Q = C \cdot V$$
$$Q = 4 \cdot 10$$
$$Q = 40 \text{ C}$$

Esa es la carga eléctrica en la parte positiva. La carga eléctrica en la negativa es - 40 C. Por lo tanto la carga total es realmente 0.

Interacción magnética

La interacción magnética es mucho más difícil de entender que la interacción electrostática.

Si la interacción electrostática simplemente depende de una propiedad de la materia (la carga eléctrica), la interacción magnética depende de dos propiedades (la carga eléctrica y la velocidad).

La interacción electrostática se produce siempre entre dos cargas. La interacción magnética se produce entre cargas que se mueven. Y siempre que el movimiento está involucrado, las cosas son más complicadas.

Fundamentos

1. ¿Qué es un **imán**?

Un **imán** es un objeto que tiene propiedades magnéticas. Principalmente son:

- unas partes del imán atraen otras partes de un imán.
- unas partes del imán repelen otras partes de un imán.
- el imán atrae a algunos metales como el **hierro**, el **cobalto** y el **níquel**.

Normalmente decimos que un imán tiene dos extremos que llamamos **polos**: el **polo norte** y el **polo sur**.

Un polo norte atrae a un polo sur y repele a un polo norte. Un polo sur atrae a un polo norte y repele a un polo sur.

Es decir:

- Polos iguales se repelen
- Polos opuestos se atraen

2. ¿Por qué decimos que un imán es un **dipolo magnético**?

Porque un imán tiene dos **polos magnéticos**: un polo norte y un polo sur. De ahí viene el prefijo *"di-"*.

Los polos de un imán se llaman así porque, si un imán puede moverse libremente, el polo norte del imán apunta al polo norte geográfico de nuestro planeta y el polo sur del imán apunta al polo sur geográfico de la Tierra.

Pero sabemos que el polo norte de un imán atrae al polo sur de otro imán y repele al polo norte de otro imán. Y algo parecido puede decirse del polo sur.

Por lo tanto, es lógico suponer que la Tierra es un imán y el **polo norte magnético** de la Tierra está (aproximadamente) donde está el **polo sur geográfico**. Y el **polo sur magnético** de la Tierra está (aproximadamente) donde está el **polo norte geográfico**.

3. ¿Qué es un **monopolo magnético**?

Si un imán se puede visualizar como dos polos magnéticos (un polo norte y un polo sur), un **monopolo** sería solamente uno de esos polos, completamente separado y aislado de otro polo.

El prefijo *"mono-"* indica que es solamente uno.

4. ¿Existen los monopolos magnéticos?

Según todas las observaciones y los experimentos, **no existen los monopolos magnéticos**.

Si tenemos un imán e intentamos separar el polo norte del polo sur, lo que obtenemos al final son:

- o dos imanes donde cada uno tiene su polo norte y su polo sur
- o dos objetos que ya no tienen magnetismo

Algunas teorías de la física moderna, que no tienen todavía evidencia experimental, sugieren que los monopolos podrían existir. Pero, actualmente, no tenemos ninguna evidencia (= ninguna prueba) de que esto sea así.

5. Pon ejemplos de imanes en la vida real.

- El planeta Tierra funciona como un imán.
- Las brújulas que sirven para orientarse son imanes.
- Los imanes que se pegan en la puerta de una nevera.
- Los imanes que están colocados en los bordes de la puerta de la nevera para que se quede pegada y no se abra al cerrarla.
- Muchos altavoces y auriculares son pequeños electroimanes que mueven unas membranas para producir sonido.
- Los electroimanes que se usan para levantar metales.
- Los cierres de algunos bolsos.
- ...

Magnetismo sobre cargas en movimiento

1. Una carga eléctrica q de masa m entra en un campo magnético constante y uniforme con una velocidad v. La velocidad es perpendicular al campo magnético. Encuentra el radio de la trayectoria de la carga.

La fuerza magnética que el campo crea sobre la carga eléctrica está dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Si solamente queremos el módulo:

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

La segunda ley de Newton dice:

$$F = m \cdot a$$

Debido a ambas leyes, tenemos:

$$m \cdot a = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$$

La aceleración es centrípeta, porque la fuerza siempre será perpendicular a la velocidad (debido al modo en el que la carga entra en el campo):

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$$

Pero entonces el ángulo es 90° y el seno de 90° es 1:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = |q| \cdot v \cdot B$$

Despejando el radio:

$$r = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$$

2. Una carga eléctrica de 4 C y 20 gramos entra perpendicularmente a un campo magnético constante y uniforme de 100 T a una velocidad de 340 m/s.

a) Dibuja el sistema y la trayectoria
b) Calcula la fuerza magnética que experimenta la carga
c) Calcula la trayectoria de la carga
d) ¿Qué ocurriría si la carga fuese de -4 C?
e) ¿Y si la masa es mayor?

a) Podemos dibujar el campo magnético como que sale de la página. Al ser uniforme y constante debemos dibujar **puntos** distribuidos uniformemente en parte del plano.

   Si la carga entra en el campo moviéndose hacia la derecha, podemos dibujar la carga en el límite lateral izquierdo del campo con el vector de velocidad apuntando horizontalmente hacia la derecha.

   Si el vector de velocidad $\vec{v}$ apunta hacia la derecha y el vector de campo magnético $\vec{B}$ apunta hacia nosotros (sale de la pantalla, del papel, de la pizarra), su producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ apuntará hacia abajo. Esto se debe a la regla de la mano derecha (o de la mano izquierda o del sacacorchos) del producto vectorial.

   Como q es positiva, la fuerza $\vec{F}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v} \times \vec{B}$.

   Como la masa m siempre es positiva, la aceleración $\vec{a}$ tiene la misma dirección y sentido que la fuerza $\vec{F}$.

   La trayectoria será circular; la aceleración es perpendicular y siempre será perpendicular debido al modo en el que entra el campo.

b) La ley de Lorentz dice:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

   Si nos interesa solamente el módulo:

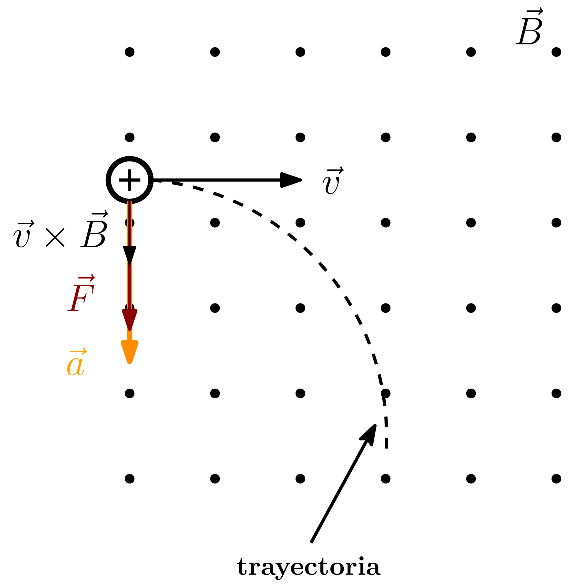


Figura 57: Si la partícula positiva se mueve hacia la derecha y el campo magnético sale de la imagen, entonces $\vec{v} \times \vec{B}$ apunta hacia abajo. La fuerza y la aceleración también.

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

Pero el ángulo α es de 90° por lo que el seno de 90° se convierte en 1:

$$F = |q| \cdot v \cdot B$$

Todos los datos son conocidos:

$$F = 4 \cdot 340 \cdot 100 =$$
$$= 136\,000 \text{ N}$$

c) Hemos dicho que la trayectoria es circular. Por lo tanto, deberíamos calcular el radio de la trayectoria r.

Por la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$
$$a = \frac{F}{m}$$

Como es un movimiento circular:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}$$
$$\frac{r}{v^2} = \frac{m}{F}$$
$$r = \frac{m \cdot v^2}{F}$$

$$r = \frac{0.020 \cdot 340^2}{136\,000}$$

$$r = 0.017 \text{ m}$$

Es decir, casi dos centímetros de radio.

d) ¿Qué ocurriría si la carga fuese de -4 C?

En ese caso, $\vec{v} \times \vec{B}$ sigue apuntando hacia abajo, pero $\vec{F}$ apuntará hacia arriba por la ley de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

La circunferencia tendrá el centro encima de la carga y no debajo.

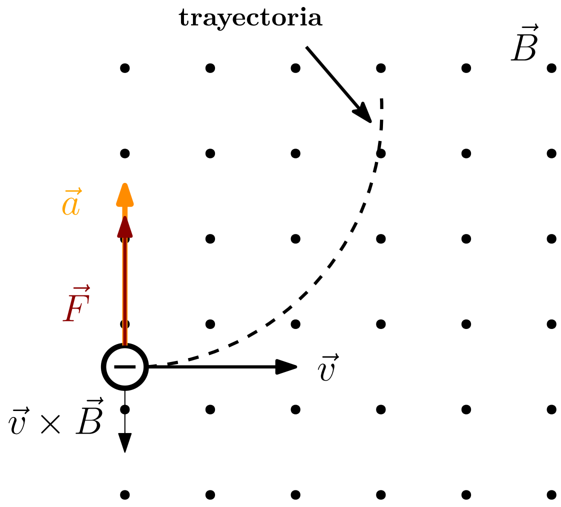


Figura 58: Si es una partícula negativa, la fuerza y la aceleración apuntan en sentido contrario a $\vec{v} \times \vec{B}$.

e) ¿Y si la masa es mayor?

Si la masa es mayor y la fuerza es igual, la aceleración será más pequeña (porque $F = m \cdot a$ y, por lo tanto, $a = \frac{F}{m}$).

Por lo tanto, la partícula se desviará menos y el radio será mayor.

3. ¿Qué desarrollos tecnológicos se basan en usar campos magnéticos para desviar cargas eléctricas que se mueven?

Podemos poner tres ejemplos:

- los **espectrógrafos** y **espectrómetros** de masas que lanzan partículas cargadas de alguna sustancia dentro de un campo magnético.

  Las partículas cargadas se desvían en un sentido u otro dependiendo del signo de su carga y se desvían más o menos dependiendo de sus cargas y sus masas.

  Esto permite averiguar algunas cosas de la composición química de una sustancia.

  Si tenemos una pantalla donde golpean las partículas, tenemos un *espectrógrafo*. Si tenemos un detector que cuenta el número de partículas, tenemos un *espectrómetro*.

- los televisores *CRT* (Cathodic Ray Tube). Es decir, los televisores tradicionales de **tubo de rayos catódicos**. Donde los *rayos catódicos* son simplemente chorros de electrones que son desviados rápidamente por campos magnéticos y eléctricos.

  Los electrones chocan contra la pantalla y hacen que distintas partes emitan luz visible.

El chorro de electrones se mueve muchas veces por segundo barriendo la pantalla. Normalmente de arriba a abajo.

(En la Unión Soviética, se fabricaron algunos televisores en los que al chocar con la pantalla, se emitía luz visible y rayos X. ¡Y los rayos X son radiación ionizante que puede ser muy dañina para la vida! Ellos podían decir que la televisión es mala para la salud.)

- los **aceleradores de partículas** que se usan en física de partículas, física nuclear o incluso en medicina nuclear.

Campo magnético

El campo magnético es el mediador de la interacción magnética.

Y la propiedad que se usa para describirlo es la intensidad del campo magnético, representada por $\vec{B}$.

1. ¿Cuál es el origen del campo magnético?

Los campos son los **intermediarios** que causan las interacciones. Son propiedades del espacio que son modificadas por cietas propiedades de las de partículas que están en él. Y el valor de esas propiedades causa las fuerzas sobre las partículas.

En el caso de la *interacción gravitatoria*, el campo es el campo gravitatorio $\vec{g}$. El campo gravitatorio es modificado por la **masa** m de las partículas. Y el campo gravitatorio en una zona del espacio crea una fuerza gravitatoria sobre partículas que tienen masa y están en esa zona del espacio.

En el caso de la *interacción electrostática*, el campo es el campo eléctrico $\vec{E}$, la propiedad que modifica el campo es la **carga eléctrica** q y la propiedad que es afectada por el campo también es la carga eléctrica.

	Gravitatoria	Electrostática
Propiedad	m (masa)	q (carga)
Campo	$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{r^2}$	$\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2}$
Fuerza	$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$	$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

Sin embargo, no existe una propiedad de la materia que sea equivalente a la masa o la carga eléctrica. No existe una *masa magnética* o una *carga magnética*.

Si intentamos separar los polos norte y sur de un imán, observamos que no es posible. Que el resultado siempre será un par de imanes en el que los dos tienen polo norte y polo sur. O, en algunos casos, que los trozos dejan de ser magnéticos.

Esto se expresa matemáticamente con una de las cuatro leyes de Maxwell: la ley de Gauss del campo magnético. Que afirma que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero.

Es decir, las líneas de campo deben ser siempre cerradas para que en cualquier superficie cerrada entren tantas líneas de campo magnético como salen. **No existen los monopolos magnéticos.**

El físico danés Hans Christian Ørsted observó que, al conectar un circuito de corriente una brújula que se encontraba cerca cambiaba su orientación. Es decir, si la brújula estaba apuntando en una dirección determinada cuando el circuito estaba apagado, la brújula apunta en otra dirección cuando el circuito se enciende y vuelve a apuntar a donde apuntaba originalmente cuando el circuito se vuelve a apagar.

Como una corriente eléctrica es un conjunto de cargas eléctricas en movimiento, este **experimento de Oersted** muestra que **las cargas eléctricas en movimiento producen campos magnéticos**.

Para una sola carga puntual, tenemos la ley de Biot-Savart:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2}}$$

donde:

- q es la carga puntual que se mueve y crea el campo y se mide en culombios (C)
- r es la distancia entre la carga y el punto en el que la carga crea el campo y se mide en metros (m)
- $\hat{r}$ es un vector unitario[13] que sale de la carga y apunta hacia el punto (no tiene unidades)
- μ es la **permeabilidad magnética del medio** y se mide en $\mathrm{N \cdot A^{-2}}$
- $\times$ es el símbolo del producto vectorial
- $\vec{B}$ es el campo magnético creado por la carga en un punto y se mide en teslas (T)

Como proviene de un producto vectorial:

- Su **módulo** es:
$$B = \frac{\mu}{4\pi}\frac{|q| v \sin(\alpha)}{r^2}$$
donde α es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\hat{r}$
- Su **dirección** es perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\hat{r}$
- Su **sentido** depende de las *reglas de las manos* y del signo de la carga eléctrica.

A partir de esta expresión se puede deducir la fórmula del campo magnético para otras corrientes eléctricas:

- *Conductor recto infinito*

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Donde I es la corriente que circula por el conductor y r es la distancia del conductor al punto donde calculamos el campo magnético.

- *Espira*

$$B = \frac{\mu I}{2R}$$

Una espira circular es simplemente un conductor cerrado en forma de circunferencia. Esta expresión da el campo en su centro si el radio de la espira es R y la corriente es I.

- Solenoide

$$B = \frac{\mu I N}{2L}$$

Un **solenoide** o **bobina** es un conjunto de espiras con el mismo radio. N es el número de espiras. L es la longitud del solenoide. I es la intensidad de corriente.

[13] Es decir, con módulo igual a 1.

B es el campo magnético en el interior del solenoide.

2. No te vayas por las ramas. No te enrolles tanto y contesta: ¿Cuál es el origen del campo magnético?

De acuerdo. De acuerdo.

El campo magnético no está creado por una propiedad como la masa o la carga eléctrica. La **ley de Gauss del campo magnético** afirma que **el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero**:

$$\Phi(\text{superficie cerrada}) = 0$$

Eso equivale a decir que:

- en una superficie cerrada siempre entran tantas líneas de campo magnético como salen
- las **líneas de campo magnético siempre son cerradas**
- **no existen monopolos magnéticos**
- no es posible tener un polo magnético norte separado de un polo magnético sur

Es decir, si tenemos un imán de dos polos (norte y sur) e intentamos separarlo en dos trozos, uno con el polo norte y otro con el polo sur, el resultado son dos imanes con sus polos norte y sur o dos trozos que no son imanes.

Son las cargas en movimiento las que causan los campos magnéticos. Lo cual se puede expresar con la ley de Biot-Savart.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2}}$$

donde:

- q es la carga puntual que se mueve y crea el campo y se mide en culombios (C)
- r es la distancia entre la carga y el punto en el que la carga crea el campo y se mide en metros (m)
- $\hat{r}$ es un vector unitario[14] que sale de la carga y apunta hacia el punto (no tiene unidades)
- μ es la **permeabilidad magnética del medio** y se mide en $\mathrm{N \cdot A^{-2}}$
- $\times$ es el símbolo del producto vectorial
- $\vec{B}$ es el campo magnético creado por la carga en un punto y se mide en teslas (T)

Como proviene de un producto vectorial:

- Su **módulo** es:
  $$B = \frac{\mu}{4\pi}\frac{|q| v \sin(\alpha)}{r^2}$$
  donde α es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\hat{r}$
- Su **dirección** es perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\hat{r}$
- Su **sentido** depende de las *reglas de las manos* y del signo de la carga eléctrica.

3. Sí, sí. Todo eso está muy bien. ¿Pero cómo se llegó a la conclusión de que son las **cargas eléctricas en movimiento** lo que causa el campo magnético?

[14] Es decir, con módulo igual a 1.

Por el experimento de Oersted (Ørsted).

El físico danés Hans Christian Ørsted observó que, cuando conectaba un circuito de corriente eléctrica, una brújula que se encontraba cerca cambiaba su orientación.

Es decir, al circular una corriente eléctrica (= cargas eléctricas en movimiento), se producía un efecto magnético sobre la brújula.

Una **brújula** es un pequeño imán que tiene bien indicados sus polos norte y sur y cuya orientación puede cambiar libremente en función del campo magnético terrestre.

Una brújula es *kompas* en eslovaco, *compass* en inglés, *kompaso* en esperanto… Incluso en español se puede llamar *compás*. Pero normalmente en contextos relacionados con el mar.

Para la mayoría de las personas, la palabra *compás* no sugiere una brújula sino lo que se usa para dibujar circunferencias. En eslovaco: *kružidlo*.

4. Si el campo magnético está creado por corrientes eléctricas, ¿cómo es posible que un imán sea magnético? En un imán no hay una corriente eléctrica.

En realidad **sí** hay corrientes eléctricas. Pero son corrientes a nivel atómico o subatómico.

Los electrones (cargas eléctricas) orbitan alrededor del núcleo: eso es una corriente eléctrica. Y tanto los electrones como los protones tienen un **momento angular intrínseco** (el **espín**) que es *como* si girasen alrededor de si mismos.

Por lo tanto, son un montón de pequeños imanes. Pero normalmente están orientados de manera que los efectos de unos y otros se cancelan entre si.

Sobre el **espín** (adaptación de la palabra inglesa *spin*, que proviene del verbo *to spin* = *girar*) hay que señalar que no indica que las partículas que lo tienen giren sobre si mismas. Pero sí es un momento angular.

Es una propiedad **no clásica** de la materia. Es una propiedad **cuántica**.

5. Una carga eléctrica de 60 C se mueve a una velocidad constante de 400 m/s dentro del vacío. Representa gráficamente el campo magnético que crea esa carga a 5 metros de distancia y calcula su módulo. La permeabilidad magnética en el vacío es $4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A^{-1}.

El campo magnético creado por una carga eléctrica que se mueve viene dado por la ley de Biot-Savart:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{q(\vec{v}\times\hat{r})}{r^2}}$$

Si la carga es positiva y se mueve hacia la derecha, el campo *encima* de la carga apunta hacia nosotros (sale del papel/de la pizarra/de la pantalla) y el campo *debajo* de la carga apunta en sentido contrario (entra en el papel/la pizarra/la pantalla).

$$B = \frac{\mu}{4\pi}\frac{|q|v\sin(\alpha)}{r^2}$$

Suponiendo que el ángulo es de 90 grados:

$$B = \frac{\mu}{4\pi}\frac{|q|v}{r^2}$$

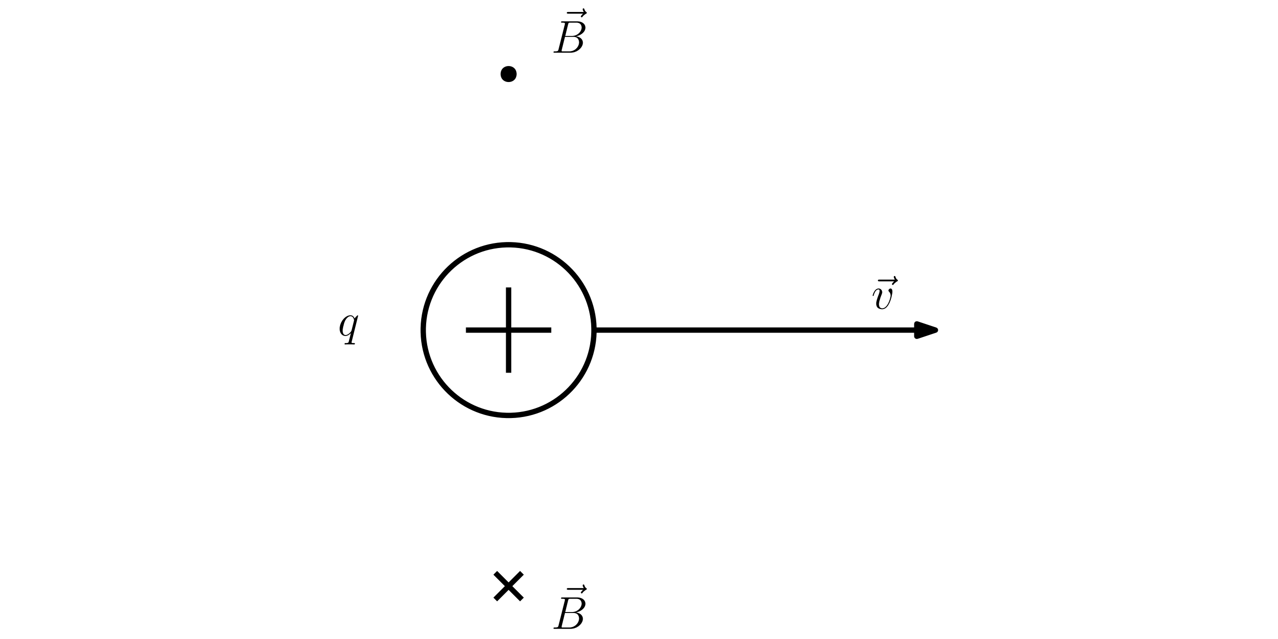


Figura 59: Vista lateral de una carga positiva que se mueve hacia la derecha y crea un campo magnético que sale de la imagen encima de la carga y que entra en la imagen debajo de la carga.

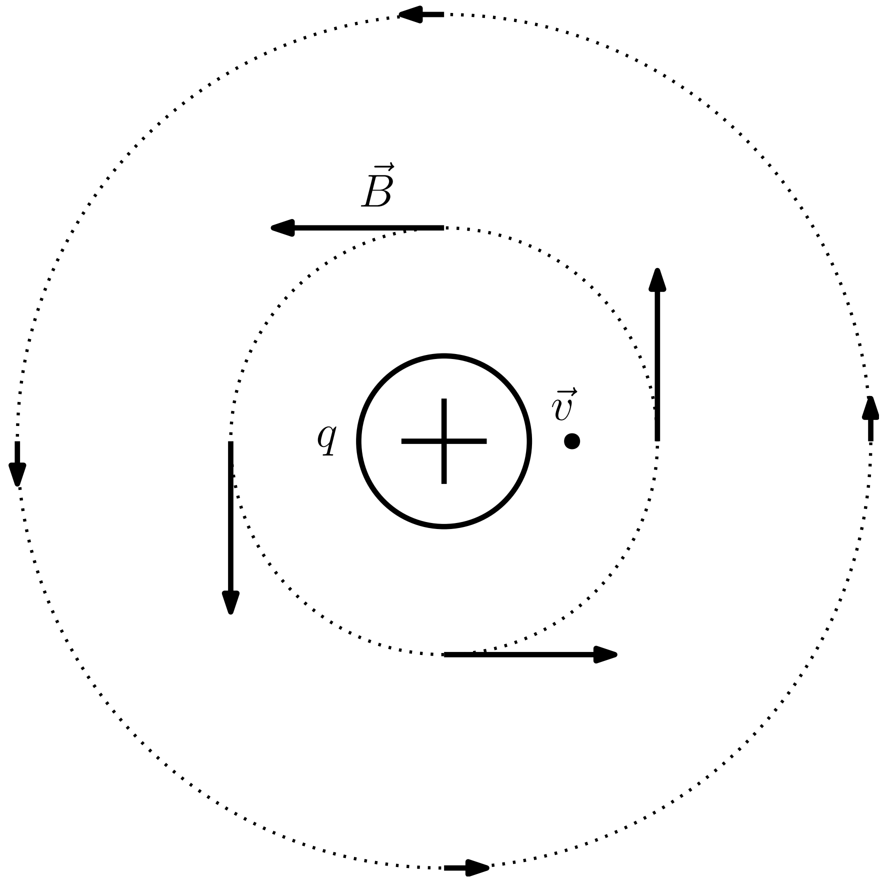


Figura 60: Vista frontal de una carga positiva que sale de la figura. Las líneas de campo son circunferencias, el campo magnético es tangente a ellas y el campo disminuye con el cuadrado de la distancia. El doble de distancia implica la cuarta parte de campo magnético.

Sustituyendo otros valores:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{|60| \cdot 400}{5^2}$$

$$B = \frac{10^{-7} \cdot 24000}{25}$$

$$B = 960 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B = 9.6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

6. Una carga eléctrica de 160 C se mueve verticalmente y hacia arriba a una velocidad constante de 400 m/s dentro del vacío. Representa gráficamente el campo magnético que crea esa carga en un punto que está 7 metros encima de la carga y 24 metros a la derecha. Calcula su módulo. La permeabilidad magnética en el vacío es $4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m · A^{-1}.

Resolveremos este problema paso a paso.

1. *Paso 1.* Dibujamos la carga y el vector de velocidad.

   La carga es positiva y se mueve hacia arriba. Dibujamos la carga como una circunferencia (a pesar de que en realidad consideramos que es una carga puntual) e indicamos con un signo más (+) en su interior que es positiva.

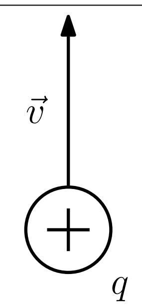


Figura 61: Paso 1.

2. *Paso 2.* Dibujamos el punto en el que queremos calcular el campo (P). Está 7 metros encima de la carga y 24 metros a la derecha.

   Las distancias de la figura no están a escala. Y dibujamos el punto como un pequeño cuadrado.

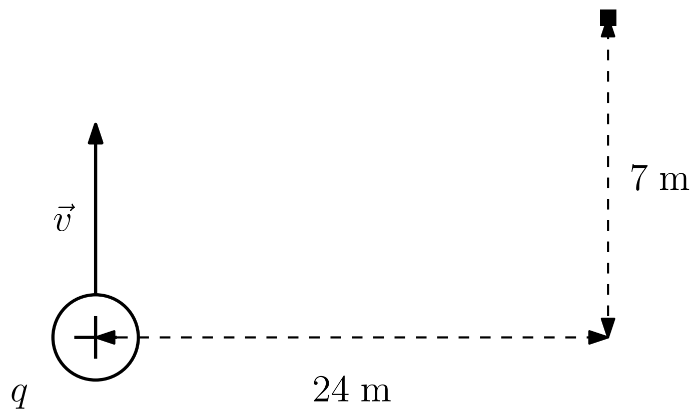


Figura 62: Paso 2.

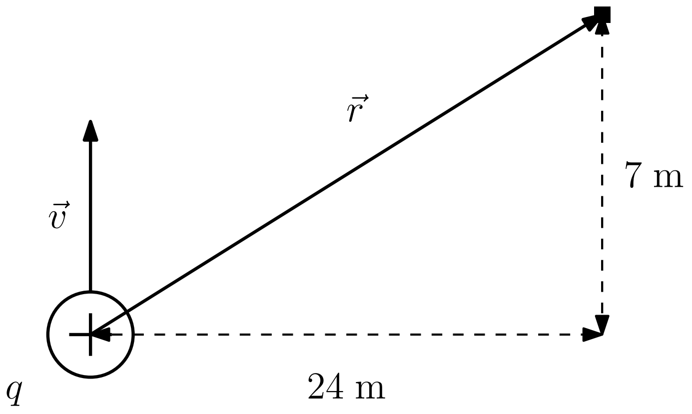


Figura 63: Paso 3.

3. *Paso 3.* Dibujamos el vector $\vec{r}$ que sale de la carga que crea el campo y llega al punto donde queremos calcular el campo B.
4. *Paso 4.* Dibujamos el ángulo α que hay entre el vector de velocidad y el vector $\vec{r}$.

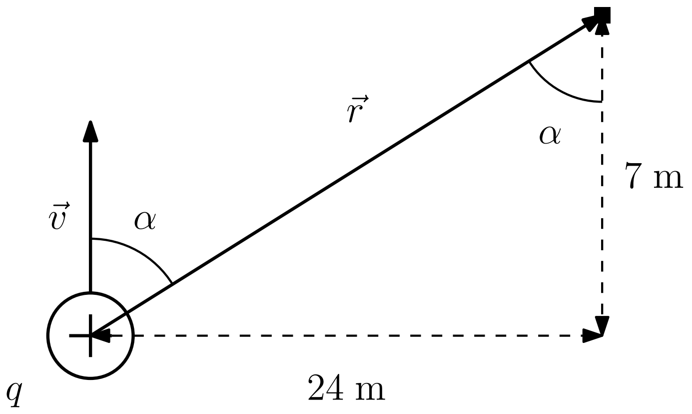


Figura 64: Paso 4.

5. *Paso 5.* La carga positiva se mueve hacia arriba. Por lo tanto, la corriente eléctrica se mueve hacia arriba. Por la regla del sacacorchos (de la mano derecha), si apuntamos con el dedo pulgar en el sentido de la corriente eléctrica, el resto de dedos de la mano indican el sentido del campo eléctrico.

   En este caso, el campo **entra** en el dibujo. Representamos esto con una cruz (= un aspa) en el punto.

6. *Paso 6.* Ahora calculamos la distancia r entre la carga y el punto. Es decir, el módulo del vector $\vec{r}$.

   Podemos hacerlo con el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 7^2 + 24^2$$
$$r^2 = 49 + 576$$
$$r^2 = 625$$
$$r = \pm\sqrt{625}$$
$$r = \pm 25$$

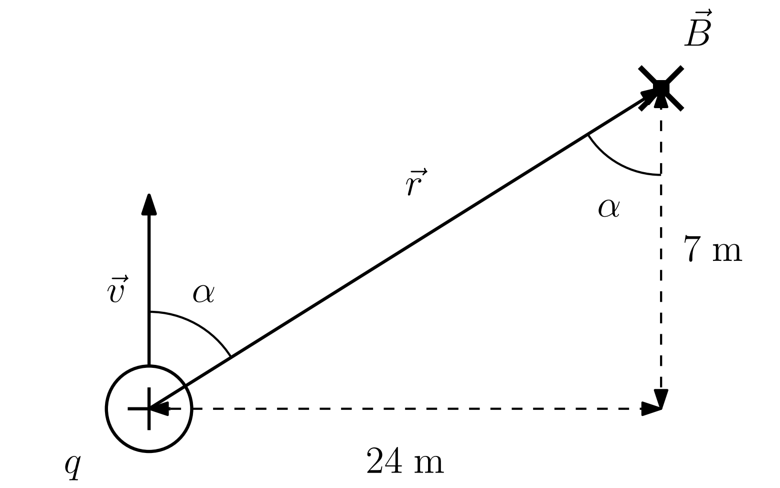


Figura 65: Paso 5.

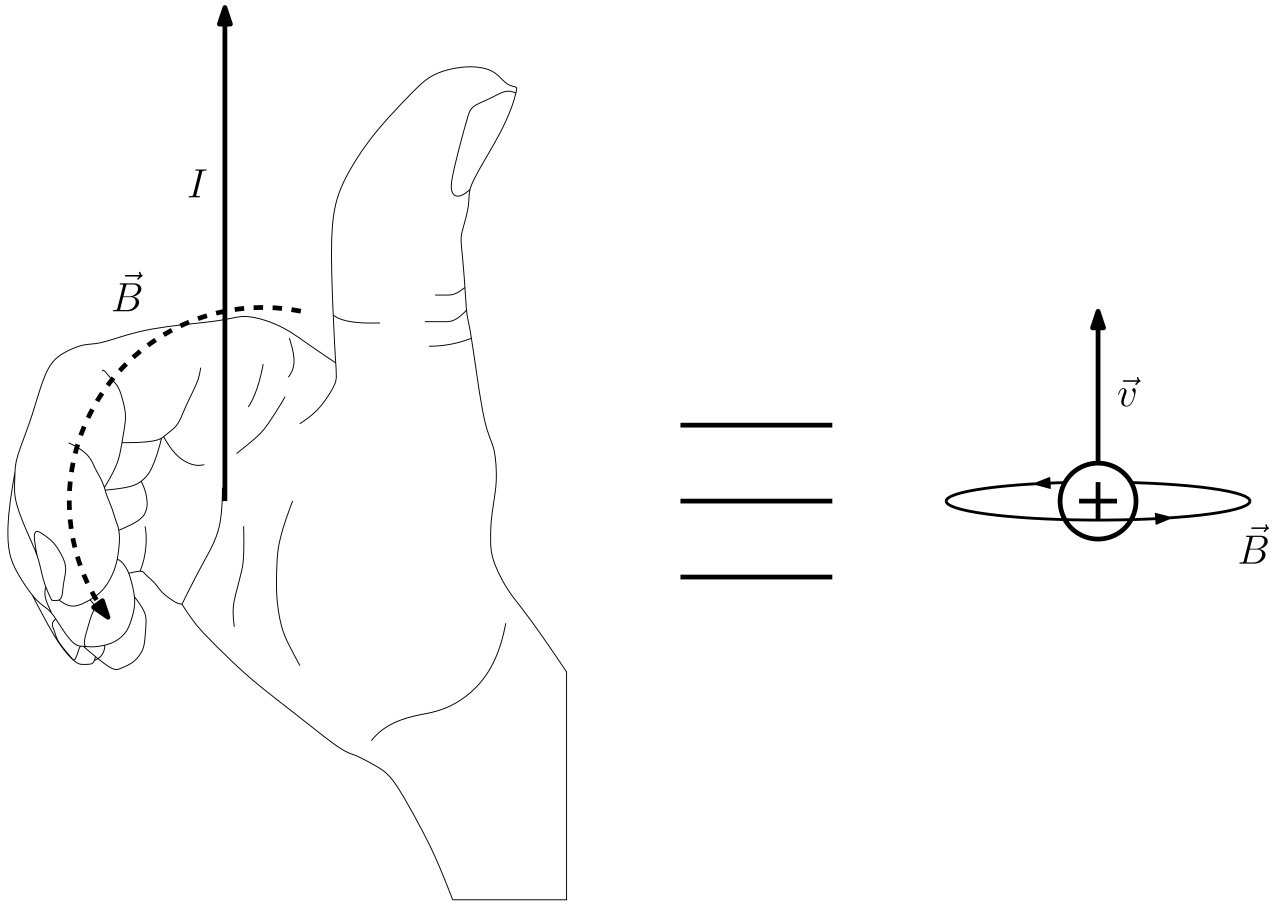


Figura 66: Regla del sacacorchos (de la mano derecha). El pulgar apunta en el sentido de la corriente (que es el sentido de movimiento de las cargas positivas). El resto de los dedos apuntan en el sentido del campo magnético B.

Como es una distancia, solamente puede ser positiva:

$$r = 25 \text{ m}$$

7. *Paso 7.* Podemos encontrar el seno y el coseno del ángulo α fácilmente.

   El seno de α es el cateto opuesto (24 m) partido la hipotenusa (25 m):

$$\sin(\alpha) = \frac{24}{25}$$

   El coseno de α es el cateto contiguo (7 m) partido la hipotenusa (25 m):

$$\cos(\alpha) = \frac{7}{25}$$

8. *Paso 8.* La ley de Biot-Savart nos permite calcular el módulo del campo magnético:

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{|q| v \sin(\alpha)}{r^2}$$

   Como es en el vacío:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q| v \sin(\alpha)}{r^2}$$

   Sustituimos los valores:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{160 \cdot 400 \cdot \frac{24}{25}}{25^2}$$

$$B = 10^{-7} \cdot \frac{160 \cdot 400 \cdot 24}{25^3}$$

$$\boxed{B = 98,304 \cdot 10^{-7} \text{ T}}$$

Inducción electromagnética

La inducción electromagnética es uno de los fenómenos que relaciona electricidad y magnetismo.

Cuando el campo magnético varía, se pueden producir corrientes eléctricas. Con más detalle: cuando el flujo de la intensidad del campo magnético a través de una superficie cambia con el tiempo, se puede producir un campo eléctrico que puede producir una corriente eléctrica.

Gracias a este fenómeno tenemos generadores de corriente, cocinas de inducción, chips para nuestras mascotas, cargadores inalámbricos…

> **1**. Una espira circular de 10 centímetros de radio es atravesada por un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano en el que está la espira. Inicialmente, el campo magnético es de 20 T y al cabo de 10 segundos, el campo magnético es de 80 T. Calcula la fuerza electromotriz media generada en la espira.

El campo magnético que atraviesa la espira inicialmente crea un flujo magnético a través de ésta. El flujo [de campo] magnético es el producto escalar del campo magnético por el vector de superficie:

$$\Phi_0 = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}_0$$

Como no cambia la superficie, podemos eliminar su subíndice:

$$\Phi_0 = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

El producto escalar es:

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S \cdot \cos(\alpha_0)$$

Pero α_0 es 0°:

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S \cdot \cos(0°)$$

El coseno de 0 es 1:

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S$$

La superficie es un círculo:

$$\Phi_0 = B_0 \cdot 2\pi r$$

$$\Phi_0 = 20 \cdot 2\pi \cdot 0.1$$

$$\Phi_0 = 4\pi \text{ Wb}$$

El flujo final es:

$$\Phi_1 = B_1 \cdot 2\pi r$$

$$\Phi_1 = 80 \cdot 2\pi \cdot 0.1$$

$$\Phi_1 = 16\pi \text{ Wb}$$

Como hay una variación del flujo magnético, habrá una fuerza electromotriz inducida. La variación de flujo magnético es:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0$$

$$\Delta\Phi = 16\pi - 4\pi = 12\pi \text{ Wb}$$

El tiempo transcurrido es:

$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

La **ley de Faraday-Henry** de la inducción electromagnética dice que la *f.e.m.* (fuerza electromotriz[15]) inducida media es:

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{12\pi}{10}$$

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{6\pi}{5} \text{ V}$$

$$\mathcal{E}_{\text{media}} \approx -3.77 \text{ V}$$

2. ¿Qué significa el signo menos en la ley de Faraday-Henry?

El signo negativo indica que la corriente inducida se **opone** al cambio que la produce.

Es decir, si la causa de la corriente inducida es un aumento de flujo magnético, la corriente inducida intentará reducir el flujo magnético. Y si la causa es una disminución del flujo magnético, la corriente magnética intentará aumentar el flujo.

Esto se conoce también como **ley de Lenz**.

3. Una espira cuadrada de lado 10 cm se encuentra dentro de un campo magnético constante y uniforme de 250 T. Inicialmente, el campo magnético forma un ángulo de 30 grados respecto a la normal de la espira y, al cabo de 10 segundos, forma un ángulo de 60 grados sexagesimales. Calcula la fuerza electromotriz media que se produce en la espira.

Calculamos el flujo inicial Φ_0 y el final Φ_0:

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S_0 \cdot \cos\alpha_0$$

$$\Phi_1 = B_1 \cdot S_1 \cdot \cos\alpha_1$$

Pero el campo y la superficie son constantes:

$$\Phi_0 = B \cdot S \cdot \cos\alpha_0$$

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos\alpha_1$$

La variación del flujo magnético es:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 =$$

[15] Que no es una fuerza.

$$= B \cdot S \cdot \cos\alpha_1 - B \cdot S \cdot \cos\alpha_0 =$$
$$= B \cdot S \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) =$$

Si el lado es l, como la espira es cuadrada entonces:

$$= B \cdot l^2 \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)$$

Por la ley de Faraday-Henry:

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$
$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{B \cdot l^2 \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{\Delta t}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -\frac{250 \cdot (0.1)^2 \cdot (\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)}{10}$$
$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -25 \cdot 0.01 \cdot (\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)$$
$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -0.25 \cdot (\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)$$
$$\mathcal{E}_{\text{media}} = -0,0915 \text{ V}$$

Oscilaciones

Cuando Galileo Galilei se percató de que un péndulo oscila con un periodo que solamente depende de la longitud[16], estaba sentando las bases para una gran revolución tecnológica.

Este descubrimiento de Galileo permitió los primeros relojes que no dependían de factores externos como la luz solar o las cantidades de arena o agua disponibles. Permitió a la Humanidad medir el tiempo de manera más precisa que nunca antes.

Pero la importancia de las oscilaciones no acaba ahí. Para entender las ondas, es necesario entender las oscilaciones. Para entender muchas cosas de mecánica cuántica, es necesario entender las oscilaciones.

1. Un movimiento armónico simple (MAS) tiene la siguiente ecuación de movimiento en el Sistema Internacional de unidades:

$$x(t) = 2\,\mathrm{sen}\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

Encuentra la amplitud, la frecuencia angular, la fase inicial, el periodo y la frecuencia.

Si la ecuación general de un MAS es:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

Por comparación:

- La amplitud es:
$$A = 2 \text{ m}$$
- La frecuencia angular es:
$$\omega = 2 \text{ Hz}$$
- La fase inicial es:
$$\phi_0 = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$
- El periodo se puede obtener a partir de la frecuencia angular:
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = \frac{2\pi}{2}$$

[16]Para amplitudes pequeñas de oscilación.

$$T = \pi \text{ s}$$

cuya expresión numérica es:

$$T \approx 3.14 \text{ s}$$

- La frecuencia es:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\nu = \frac{1}{\pi} \text{ Hz}$$

cuya expresión numérica es:

$$\nu \approx 0.3183 \text{ Hz}$$

2. Un movimiento armónico simple (MAS) tiene la siguiente ecuación de movimiento en el Sistema Internacional de unidades:

$$x(t) = 2\,\mathrm{sen}\quad 2\pi\quad \frac{1}{6}t + \frac{1}{7}$$

Encuentra la amplitud, la frecuencia angular, la fase inicial, el periodo y la frecuencia.

Aquí es necesario prestar atención a los paréntesis:

- La amplitud es:

$$A = 2 \text{ m}$$

- La frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi\frac{1}{6} \text{ Hz}$$

$$\omega = \frac{\pi}{3} \text{ Hz}$$

- La fase inicial es:

$$\phi_0 = 2\pi\frac{1}{7} \text{ rad}$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{7} \text{ rad}$$

- El periodo se puede obtener a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{\pi/3}$$

$$T = 6 \text{ s}$$

- La frecuencia es:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\nu = \frac{1}{6} \text{ Hz}$$

cuya expresión numérica es:

$$\nu \approx 0.167 \text{ Hz}$$

3. Un movimiento armónico simple (MAS) tiene la siguiente ecuación de movimiento en el Sistema Internacional de unidades:

$$x(t) = 2\,\mathrm{sen}\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

Encuentra la ecuación de la velocidad y la ecuación de la aceleración.

La velocidad es derivada de la posición:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$$

Y la aceleración es la derivada de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

Por lo tanto:

$$v = 2 \cdot 2\cos\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

$$a = -2 \cdot 2^2\,\mathrm{sen}\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

Es decir:

$$v = 4\cos\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

$$a = -8\,\mathrm{sen}\quad 2t + \frac{\pi}{5}$$

(En unidades SI.)

4. El periodo de un MAS es de 0.1 segundos y la fase inicial es 0.4 radianes. Encuentra la amplitud y la frecuencia angular si sabemos que su posición cuando han pasado 2s es x(t = 2s) = 24 cm.

Como:

$$T = 0.1 \text{ s}$$

Sabemos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.1}$$

$$\omega = 20\pi \text{ Hz}$$

La ecuación será:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$x = A\,\mathrm{sen}(20\pi t + 0.4)$$

Como tenemos la posición cuando es 2 segundos:

$$x = A\,\mathrm{sen}(20\pi t + 0.4)$$

$$0.24 = A\,\mathrm{sen}(20\pi \cdot 2 + 0.4)$$

Si usas la calculadora, es imprescindible recordar que debe estar en radianes:

$$0.24 = A\,\mathrm{sen}(20\pi \cdot 2 + 0.4)$$

$$0.24 = A \cdot 0.3894$$
$$A = \frac{0.24}{0.3894}$$
$$A = 0.616 \text{ m}$$

5. Encuentra la fase inicial de un MAS si sabemos que su posición cuando han pasado 5 segundos es 3 metros, la amplitud es 7 metros y la frecuencia es de 100 Hz.

El enunciado dice que:

- $x(t = 5 \text{ s}) = 3 \text{ m}$
- $A = 7 \text{ m}$
- $\nu = 100 \text{ Hz}$

Por lo tanto, como: $T = \frac{1}{\nu} \iff \nu = \frac{1}{T}$$ obtenemos:

$$T = \frac{1}{100} \text{ s}$$

$$T = 0.01 \text{ s}$$

Y:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{0.01}$$
$$\omega = 200\pi \text{ Hz}$$

La ecuación del movimiento es:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$x = 7\,\mathrm{sen}(200\pi t + \phi_0)$$

Como tenemos la posición para un instante concreto:

$$3 = 7\,\mathrm{sen}(200\pi \cdot 5 + \phi_0)$$

$$3 = 7\,\mathrm{sen}(1000\pi + \phi_0)$$

$$\frac{3}{7} = \mathrm{sen}(1000\pi + \phi_0)$$

$$\mathrm{sen}(1000\pi + \phi_0) = \frac{3}{7}$$

Ahora, para despejar lo que hay dentro del seno, tenemos que usar el arcoseno, que se representa como sen^{-1} o $\operatorname{arc\,sen}$:

$$1000\pi + \phi_0 = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$1000\pi + \phi_0 = 0.4429$$

$$\phi_0 = 0.4429 - 1000\pi$$

$$\phi_0 = -3141.15 \text{ rad}$$

Es imprescindible saber en qué modo está la calculadora cuando se usan las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$.

6. Encuentra la frecuencia angular de un movimiento armónico simple si en el instante en el que la posición es 2 m, la velocidad es 30 metros por segundo. La amplitud es 3 m.

Se puede resolver de varias maneras. Aquí vamos a usar la más directa, la fórmula:

$$(\omega x)^2 + v^2 = (A\omega)^2$$

Podemos sustituir, pero es mejor despejar primero:

$$\omega^2 \cdot x^2 + v^2 = A^2 \cdot \omega^2$$

$$v^2 = A^2 \cdot \omega^2 - \omega^2 \cdot x^2$$

$$v^2 = \left(A^2 - x^2\right) \cdot \omega^2$$

$$\left(A^2 - x^2\right) \cdot \omega^2 = v^2$$

$$\omega^2 = \frac{v^2}{A^2 - x^2}$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{v^2}{A^2 - x^2}}$$

Podemos usar la solución positiva:

$$\omega = \sqrt{\frac{v^2}{A^2 - x^2}}$$

y sustitutir:

$$\omega = \sqrt{\frac{20^2}{3^2 - 2^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{400}{5}}$$

$$\omega = \sqrt{80}$$

$$\omega = 8.94 \text{ Hz}$$

7. ¿Cuál es la aceleración de un MAS cuando la posición es 2 cm si la frecuencia angular es 20 Hz?

Hay una relación entre la posición y la aceleración:

$$a = -\omega^2 x$$

Si sustituimos (pasando los centímetros a metros):

$$a = -20^2 \cdot 0.02$$

$$a = -8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

8. La cuerda de un péndulo simple mide 20 centímetros y se encuentra en la Tierra. ¿Cuál es su periodo?

Como es un péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como es la Tierra:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.20}{9.81}}$$

$$T = 0.897 \text{ s}$$

9. ¿Cuál es el periodo de un oscilador armónico simple que se obtiene con un muelle de k = 2 N/m y una masa de m = 3 kg?

Por el tipo de oscilador:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$T = 7.7 \text{ s}$$

10. ¿Cuál es la energía mecánica de un oscilador armónico simple que se obtiene con un muelle de k = 100 N/m y una masa de m = 10 kg si la amplitud es de 3 metros?

La energía mecánica es:

$$E_m = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Necesitamos ω. Pero en este tipo de oscilador:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Por lo tanto:

$$E_m = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 3^2$$

$$E_m = 50 \cdot 9$$

$$E_m = 450 \text{ J}$$

Ondas

La vista y el oído son dos de nuestros sentidos principales y con los que muchos de nosotros obtenemos información de nuestro entorno sin siquiera ser conscientes de ello.

Y ambos sentidos se basan en una familia de fenómenos físicos donde una magnitud que oscila se propaga porque la oscilación se *transmite*. Es decir, se basan en fenómenos ondulatorios, en ondas.

La vista, en el tipo de onda que llamamos *luz* (y es una onda electromagnética). El oído, en el tipo de onda que llamamos *sonido*.

1. La ecuación de la onda transversal de una cuerda en unidades del SI es:

$$y = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t - \frac{3\pi}{2} \cdot x + \frac{\pi}{6}\right)$$

encuentra:

a) su amplitud
b) su periodo y su frecuencia
c) su longitud de onda y el número de ondas
d) la velocidad de propagación

La ecuación de una onda armónica es:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi_0)$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia angular, k es el número de ondas y ϕ_0 es la fase inicial.

Una simple comparación nos permite encontrar varias cosas:

- La amplitud:
$$A = 3 \text{ m}$$
- La frecuencia angular:
$$\omega = \frac{\pi}{5} \text{ Hz}$$
- El número de ondas:
$$k = \frac{3\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$
- La fase inicial:
$$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

A partir de la frecuencia angular podemos encontrar el periodo T; la fórmula que relaciona T y ω es la misma que para cualquier movimiento periódico (como el MAS -movimiento armónico simple- y el MCU -movimiento circular uniforme-):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}$$
$$T = 10 \text{ s}$$

Y la frecuencia f (o ν) es recíproca del periodo:

$$f = \nu = \frac{1}{T}$$

$$f = \nu = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}$$

La longitud de onda λ está relacionada con el número de ondas k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}$$
$$\lambda = \frac{4}{3} \text{ m}$$
$$\lambda \approx 1.33 \text{ m}$$

En cuanto a la velocidad de propagación, se puede obtener a partir de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$v = \lambda \cdot f$$
$$v = \frac{4}{3} \cdot 0.1 = \frac{2}{15} \approx 0{,}133 \text{ m/s}$$

2. La nota *la* (A) tiene una frecuencia de 440 Hz y la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente de 340 m/s.
Encuentra los parámetros más importantes de la onda y ecuación de la fase de la onda.

Sabemos:

- la frecuencia:
$$f = 440 \text{ Hz}$$
- la velocidad de propagación:
$$v = 340 \text{ m/s}$$

Con estos datos podemos encontrar la longitud de onda (que mide la periodicidad espacial de una onda) a partir de:

$$v = \lambda \cdot f$$
$$\lambda = \frac{v}{f}$$
$$\lambda = \frac{340}{440}$$
$$\lambda = \frac{34}{44}$$
$$\lambda = \frac{17}{22} \text{ m}$$
$$\lambda \approx 0.773 \text{ m}$$

Es fácil calcular el periodo (que mide la periodicidad temporal de una onda):

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{440} \text{ s}$$
$$T \approx 0,002273 \text{ s}$$

Con el periodo podemos calculas la frecuencia angular ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1/440}$$
$$\omega = 880\pi \text{ Hz}$$
$$\omega \approx 2764.60 \text{ Hz}$$

A partir de λ podemos encontrar el número de ondas k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k = \frac{2\pi}{17/22}$$
$$k = \frac{44\pi}{17} \text{ m}^{-1}$$
$$k \approx 8.13 \text{ m}^{-1}$$

No nos dicen la fase inicial ϕ_0 ni nos dan ningún dato relacionado. Eso nos permite escoger arbitrariamente[17] un valor cualquiera para la fase inicial. Por ejemplo:

$$\phi_0 = 0 \text{ rad}$$

[17] Es decir, *a nuestro gusto*.

La ecuación de la fase de una onda armónica es:

$$\phi = \omega \cdot t - k \cdot x + \phi_0$$

$$\phi = 880\pi \cdot t - \frac{44\pi}{17} \cdot x + 0 \quad [\texttt{SI}]$$

Entre corchetes, al lado de la ecuación de la fase, hemos indicado que las unidades son unidades del SI [Sistema Internacional de unidades].

Con los datos que tenemos no es posible escribir la ecuación de onda:

$$y = A \sin(\phi)$$

$$y = A \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi_0)$$

porque no tenemos la amplitud A.

3. La ecuación de una onda armónica se puede escribir:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi_0)$$

Reescribe la ecuación usando el periodo y la longitud de onda. Usa la forma reescrita de la ecuación para mostrar la **doble periodicidad** de las ondas armónicas.}

Sabemos que:

- el periodo y la frecuencia angular están relacionados por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- la longitud de onda y el número de ondas están relacionados por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\boxed{y = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \phi_0 \right)}$$

que se puede reescribir también:

$$y = A \cdot \sin \left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right)$$

La fase, por lo tanto se puede escribir:

$$\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \phi_0$$

La **doble periodicidad** de las ondas armónicas quiere decir que:

- las ondas son periódicas en el tiempo y su *“periodo temporal”* es el periodo T

  Es decir: en un punto cualquiera de la onda, si esperamos un tiempo T, la oscilación se repite. El estado de oscilación en el punto es el mismo.

- las ondas son periódicas en el espacio y su *"periodo espacial"* es la longitud de onda λ

  Es decir: en un instante determinado, si nos movemos una distancia λ, la oscilación se repite. El estado de oscilación de dos puntos que están a una distancia λ es el mismo.

Si comparamos las fases de dos puntos distintos de la onda (x_1 y x_2) en el mismo instante:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_1 + \phi_0$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_2 + \phi_0$$

la diferencia de fase es:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_1 - x_2)$$

La función seno tiene una periodicidad matemática de 2π. Por lo tanto, la onda se repetirá en el espacio cuando la diferencia de fase sea 2π (o un múltiplo):

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\lambda = x_1 - x_2$$

Es decir, la distancia entre dos puntos que están en la misma fase (en el mismo estado de oscilación) es la longitud de onda λ (o un múltiplo de la misma).

Si comparamos las fases de dos instantes distintos (t_1 y t_2) en el mismo punto de la onda:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \phi_0$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t_2 - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \phi_0$$

la diferencia de fase es:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot (t_2 - t_1)$$

Por las mismas razones que en el caso de la posición, la onda se repetirá en el tiempo cuando la diferencia de fase sea 2π (o un múltiplo):

$$2\pi = \frac{2\pi}{T} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$T = t_2 - t_1$$

Es decir, el tiempo entre dos instantes que están en la misma fase (en el mismo estado de oscilación) es el periodo T (o un múltiplo del periodo).

4. ¿Qué tipo de onda es el sonido?

El **sonido** (estudiado por la rama de la física llamada *Acústica*) es una **onda longitudinal**.

Es decir, la dirección de las oscilaciones no es perpendicular a la dirección de propagación de la onda sino paralela a ésta.

Como el sonido es una onda longitudinal, **no puede polarizarse**.

El fenómeno de la polarización solamente se da en las ondas transversales como la luz (o las ondas electromagnéticas en general).

Óptica

La óptica estudia los fenómenos relacionados con la luz: la reflexión, la refracción, la transmisión, la difracción…

1. Encuentra el ángulo límite para un rayo de luz que pasa de un medio con índice de refracción de 1,3 a un medio con índice de refracción 1,1.

Cuando un rayo de luz pasa de un medio con un índice de refracción mayor a un medio con índice de refracción menor, el rayo de luz se aleja de la normal y se acerca a la superficie de separación de ambos medios. Es lo que se deduce de la ley de Snell de la refracción:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

Para algunos un ángulo de incidencia, el ángulo de refracción es exactamente 90°. Entonces no se produce **refracción**; el rayo no pasa al segundo medio. Ese ángulo se llama **ángulo límite** o **ángulo crítico**: α_L.

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, se produce la **reflexión interna total**. El rayo no pasa al segundo medio, sino que se refleja en la superficie y vuelve al primero.

Para encontrar el ángulo límite solamente es necesario sustituir:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_L) = n_2 \cdot \sin(90°)$$

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_L) = n_2$$

$$\sin(\alpha_L) = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Sustituyendo:

$$\alpha_L = \arcsin \frac{1.1}{1.3}$$

$$\alpha_L \approx 57.796°$$

Según este resultado:

- Si el ángulo de incidencia es menor que 57.796°, hay refracción y reflexión.
- Si el ángulo de incidencia es mayor que 57.796°, solamente hay reflexión.

2. ¿Tiene alguna aplicación el fenómeno de reflexión interna total?

Por supuesto: la **fibra óptica** que se usa en telecomunicaciones.

La fibra óptica es una especie de *cable* hecho de un material transparente en el que el índice de refracción es mayor en el centro. Al introducir un rayo de luz (con un láser, por ejemplo) en un extremo de la fibra óptica por el centro, el rayo tiende a permanecer dentro del cable de fibra óptica por la reflexión interna total. Y esto ocurre aunque doblemos el cable[18] y no forme una línea recta.

Se puede demostrar este principio con un chorro de agua que sale de una botella de plástico y un puntero láser. Haciéndolo correctamente, el láser queda "atrapado" en el chorro de agua.

3. El índice de refracción de un medio es 0.5 y...

¡No! El índice de refracción no puede ser menor que 1.

El índice de refracción n se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c entre la velocidad de la luz en el medio v:

$$n = \frac{c}{v}$$

Pero la velocidad de la luz en el vacío (que es aproximadamente de unos 300000 km/s) es la velocidad máxima que se puede conseguir en la Naturaleza (hasta donde sabemos actualmente). Y, por lo tanto, la velocidad de la luz en un medio siempre debe ser menor o igual a la velocidad de la luz en el vacío:

$$v \leq c$$

$$1 \leq \frac{c}{v}$$

$$1 \leq n$$

$$n \geq 1$$

4. Un rayo de luz monocromática se desplaza a través de un medio homogéneo en el que el índice de refracción es de 1,5. El rayo llega a una superficie plana que separa el primer medio de otro medio cuyo índice de refracción es 1,4. Si el rayo incidente forma un ángulo de 45 grados sexagesimales respecto a la normal, encuentra:

a) el ángulo de reflexión
b) el ángulo de refracción
c) la velocidad de ese rayo de luz en el segundo medio

Que sea un rayo de luz monocromática quiere decir que tiene un solo color. Una sola longitud de onda/frecuencia.

a) Según la **ley de la reflexión** el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\alpha_1 = \alpha_r$$

$$\alpha_r = 45°$$

b) Según la **ley de refracción de Snell**:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

[18] Siempre que no lo rompamos, claro.

Sustituyendo:

$$1.5 \cdot \sin 45° = 1.4 \cdot \sin \alpha_2$$
$$1.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.4 \cdot \sin \alpha_2$$
$$\frac{1.5 \cdot \sqrt{2}}{1.4 \cdot 2} = \sin \alpha_2$$
$$\sin \alpha_2 = \frac{1.5 \cdot \sqrt{2}}{1.4 \cdot 2}$$
$$\alpha_2 = \arcsin \quad \frac{1.5 \cdot \sqrt{2}}{1.4 \cdot 2}$$
$$\alpha_2 = 49.25°$$

c) El índice de refracción n, la velocidad de la luz en el medio v y la velocidad de la luz en el vacío están relacionadas por:

$$n = \frac{c}{v}$$
$$v = \frac{c}{n}$$
$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1.4}$$
$$v = 214285714 \text{ m/s}$$

Menor que la del vacío, tal y como debe ser.

5. Estudia la trayectoria del rayo de luz de la figura ℵ. El ángulo de incidencia es 60°, el índice del primer medio es 1 (consideramos que es el vacío) y el del segundo medio es 1,45.

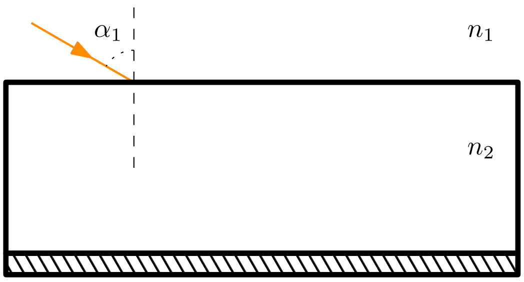


Figura 67: Figura ℵ.

Al llegar al medio 2, el rayo se va a reflejar parcialmente al medio 1 y transmitir parcialmente al medio 2. El rayo que se transmite, se **refracta**, su dirección cambia.

Como el índice de refracción del segundo medio es mayor que el índice de refracción del primer medio, el rayo refractado se acerca a la normal.

El rayo refractado llega a la parte inferior, donde hay un espejo y se refleja. El rayo vuelve a reflejarse parcialmente al llegar al medio 1 y se transmite y refracta al medio 2.

Por la ley de refracción de Snell:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

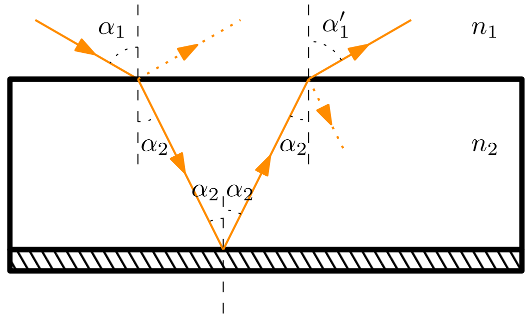


Figura 68: Figura ℵ. Trayectoria completa.

Pero los ángulos de reflexión con la superficie del fondo son ambos α_2. El primero por razones geométricas (las dos superficies son paralelas) y el segundo por la ley de la reflexión:

$$\alpha_2 = \alpha_2$$

Por razones geométricas, el rayo que sube llega con un ángulo de incidencia α_2. El ángulo de refracción del rayo que sale hacia arriba es α_1'. Y, por la ley de refracción de Snell:

$$n_2 \cdot \sin \alpha_2 = n_1 \cdot \sin \alpha_1'$$

Combinando ambas refracciones:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ n_2 \cdot \sin \alpha_2 = n_1 \cdot \sin \alpha_1' \end{cases}$$

llegamos a:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_1 \cdot \sin \alpha_1'$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_1'$$

$$\alpha_1 = \alpha_1'$$

Encontrar todos los ángulos solamente requiere sustituir datos.

Termodinámica

La termodinámica es la parte de la física que estudia los procesos donde el *"calor"* y la temperatura son esenciales.

Escalas termométricas

1. ¿Qué significan las palabras *"escala termométrica"*?

"Escala termométrica" es otro modo de decir *"unidad de temperatura"*.

2. ¿Cuál es la unidad del SI para la temperatura?

La temperatura es una de las siete magnitudes fundamentales del SI (Sistema Internacional) de unidades.

La unidad del SI para la temperatura es el **kelvin** que se representa con una letra **K** mayúscula.

La letra es mayúscula porque viene del nombre de una persona: el físico británico William Thomson, conocido como Lord Kelvin.

El símbolo de la unidad (**K**) no lleva un pequeño círculo de grado porque la escala kelvin es **absoluta**.

3. ¿Qué significa que una unidad de temperatura sea absoluta?

Significa que la temperatura mínima posible en el universo es 0 en esa escala (en esas unidades) y, por lo tanto, no existen temperaturas negativas en esa escala (en esas unidades).

La temperatura mínima posible en el universo es el **cero absoluto** de temperatura y es:

- 0 K (en kelvins)
- -273.15 °C (en grados Celsius)
- -459,67 °F (en grados Fahrenheit)
- 0 R (en rankines)

Por lo tanto:

- temperaturas absolutas: en kelvin o rankine
- temperaturas no absolutas: en grados Celsius o grados Fahrenheit

4. ¿Cuáles son la temperatura de fusión y la temperatura de ebullición del agua en condiciones normales?

La temperatura de **fusión** del agua es la temperatura a la que podemos tener agua líquida **y** agua sólida (hielo) simultáneamente (= al mismo tiempo).

En condiciones normales, la temperatura de fusión del agua es de 273,15 K (0 °C).

La temperatura de **ebullición** del agua es la temperatura a la que se produce la ebullición. El agua líquida empieza a *hervir* (*ebullir*) y se forman burbujas de vapor de agua dentro del agua líquida.

En condiciones normales, la temperatura de ebullición del agua es de 373,15 K (100 °C).

Es importante recordar que la **ebullición** no es lo mismo que la **evaporación**. En los dos casos, un líquido se convierte en gas. Pero la evaporación es un fenómeno que siempre se produce en la superficie de un líquido, sin importar la temperatura. Y la ebullición es un fenómeno que ocurre en todo el líquido y solamente a la temperatura de ebullición.

¿A qué nos referimos con *"condiciones normales"* en esta pregunta? A que la presión del aire es 1 atmósfera (aproximadamente 101 300 Pa).

5. Convierte las siguientes temperaturas:
a) $T_1 = 200 \text{ K} \rightarrow \text{°C}$
b) $T_2 = 300 \text{ °C} \rightarrow \text{K}$

Convertir temperaturas entre kelvins y grados Celsius es muy sencillo. Solamente hay que sumar o restar 273,15.

a) $T_1 = 200 \text{ K} = 200 - 273.15 = -73.15\text{°C}$
b) $T_2 = 300 \text{ °C} = 300 + 273.15 = 573.15\text{K}$

6. La temperatura de fusión del agua es (en grados Celsius y Fahrenheit):

$$0 \text{ °C} = 32 \text{ °F}$$

y la temperatura de ebullición del agua es:

$$100 \text{ °C} = 212 \text{ °C}$$

Expresa en grados Fahrenheit la temperatura de 393,15 K.

Lo primero es convertir los kelvin en grados Celsius:

$$T = 393.15 \text{ K} = 393.15 - 273.15 = 120 \text{ °C}$$

La relación entre los grados Celsius y los grados Fahrenheit es más complicada. Es una relación lineal (o afín):

$$T(\text{°F}) = a \cdot T(\text{°C}) + b$$

Un modo de encontrar esta relación es geométrico. Observa las figuras.

Eso nos permite escribir:

$$\frac{y - 32}{x - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

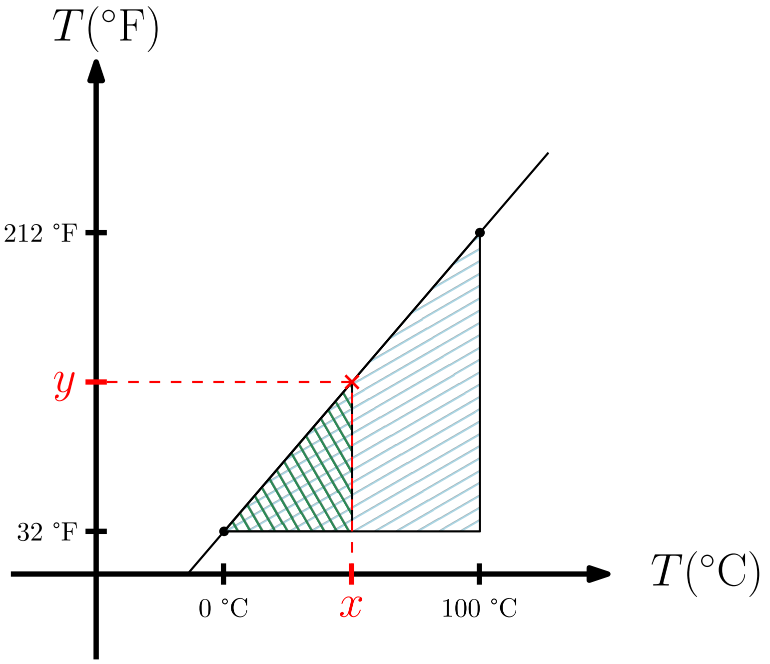


Figura 69: La línea inclinada representa la relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit.

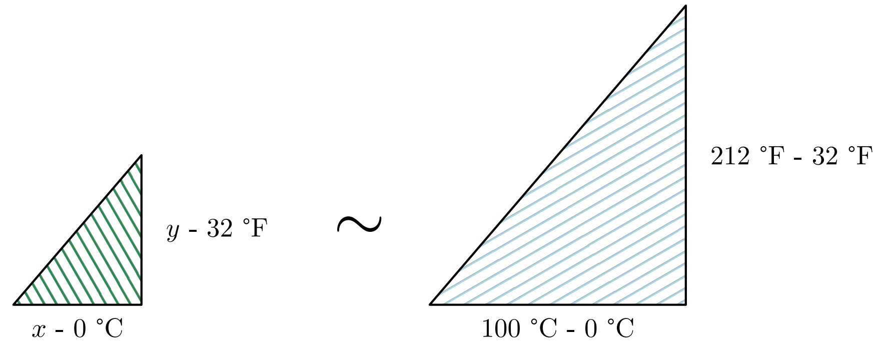


Figura 70: Los dos triángulos de la gráfica anterior son semejantes.

$$\frac{y-32}{x}=\frac{180}{100}$$
$$\frac{y-32}{x}=\frac{9}{5}$$
$$y-32=\frac{9}{5}\cdot x$$
$$y=\frac{9}{5}\cdot x+32$$

Como x en este caso es 120 °C:

$$y=\frac{9}{5}\cdot 120+32=248\ °\mathrm{F}$$

7. Imagina que existe una escala termométrica llamada *"grados Zeta"* y que el símbolo es °Z. La temperatura de fusión del agua es:

$$50\ °\mathrm{Z}=32\ °\mathrm{F}$$

y la temperatura de ebullición del agua es:

$$300\ °\mathrm{Z}=212\ °\mathrm{F}$$

Expresa en grados Fahrenheit la temperatura de 100 °Z.

Este ejercicio se hace de manera similar al anterior.

Se puede hacer una gráfica que relaciona los grados Zeta con los grados Fahrenheit y dos triángulos y su semejanza.

Si y es la temperatura en grados Fahrenheit y x es la temperatura en grados Zeta:

$$\frac{y-32}{x-50}=\frac{212-32}{300-50}$$
$$\frac{y-32}{x-50}=\frac{180}{250}$$
$$\frac{y-32}{x-50}=\frac{18}{25}$$
$$y=\frac{18}{25}\cdot(x-50)+32$$

Sustituyendo:

$$y=\frac{18}{25}\cdot(100-50)+32=68\ °\mathrm{Z}$$

Moles y moléculas

1. ¿Cuántas moléculas de CO_2 tiene un mol [de moléculas]?

Un mol de cualquier cosa, por definición, tiene un número de Avogadro de unidades. Por lo tanto, un mol de moléculas de CO_2 tiene $6.02214\cdot 10^{23}$.

2. ¿Cuáles son la masa molecular, la masa molar y la masa molecular en kilogramos del CO_2 y del CO?

Las masas moleculares del CO_2 y del CO se pueden obtener a partir de las masas atómicas del carbono y el oxígeno que son, respectivamente 12 u y 16 u.

Por lo tanto:

$$m(\mathrm{CO_2}) = 1 \cdot 12 + 2 \cdot 16 = 44 \text{ u}$$
$$m(\mathrm{CO}) = 1 \cdot 12 + 1 \cdot 16 = 28 \text{ u}$$

La unidad de masa atómica u también se llama *dalton* y se escribe "Da":

$$m(\mathrm{CO_2}) = 44 \text{ Da}$$
$$m(\mathrm{CO}) = 28 \text{ Da}$$

La **masa molar** es la masa de un mol. Cuando tenemos la masa molecular en dalton, es muy fácil obtener la masa molar:

$$M(\mathrm{CO_2}) = 44 \text{ g}$$
$$M(\mathrm{CO}) = 28 \text{ g}$$

Pero si un mol tiene $6.02214 \cdot 10^{23}$ unidades, entonces la masa molecular de una molécula en gramos es:

$$m(\mathrm{CO_2}) = \frac{44}{6.02214 \cdot 10^{23}} = 7.3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$
$$m(\mathrm{CO}) = \frac{28}{6.02214 \cdot 10^{23}} = 4.6 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

En kilogramos:

$$m(\mathrm{CO_2}) = 7.3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$
$$m(\mathrm{CO}) = 4.6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

3. ¿Cuántas moléculas contienen 20 kg de agua?

Como la masa atómica del hidrógeno es (aproximadamente) 1 Da y la masa atómica del oxígeno es (aproximadamente) 16 Da, la masa molecular del agua es:

$$m = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 16 = 18 \text{ Da}$$

Por lo tanto, la masa molar (= la masa de un mol) de agua es:

$$M = 18 \text{ g}$$

Si tenemos 20 kg = 2000 g de agua y sabemos que 18 gramos son un mol:

$$N = 2000 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{18 \text{ g}} \cdot \frac{6.02214 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}}{1 \text{ mol}} =$$
$$= 6.69 \cdot 10^{25} \text{ moléculas}$$

Temperatura y energía cinética

1. ¿Cuál es la interpretación microscópica de la temperatura?

La **temperatura** es una magnitud macroscópica que está relacionada con una propiedad microscópica: la **energía cinética media**.

Si las moléculas tienen más energía cinética, la temperatura del sistema es mayor. Si las moléculas tienen menos energía cinética, la temperatura es menor.

La fórmula que relaciona las dos cosas es:

$$E_c = \frac{3}{2}kT$$

donde:

- E_c es la **energía cinética media** (en julios)
- T es la **temperatura absoluta** (en kelvin)
- k es la **constante de Boltzmann** cuyo valor es, aproximadamente:

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Pero la energía cinética es **energía de movimiento**. Como dice la fórmula:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

donde:

- E_c es la **energía cinética**
- m es la masa
- v es la velocidad

Por lo tanto, cuanto mayor es la temperatura de un objeto, más rápido se mueven sus moléculas. Cuanto menor es la temperatura de un objeto, más lentamente se mueven sus moléculas.

2. Calcula la velocidad media a la que se mueven la moléculas de ozono gaseoso si está a una temperatura de 80 grados Celsius.
Dato: la constante de Boltzmann es $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. La masa atómica del oxígeno atómico es 16 u, es decir, 16 Da.

1. Primero convertimos la temperatura a una temperatura absoluta:

$$T = 80\ ^\circ\mathrm{C} = 80 + 273.15 = 353.15\ \mathrm{K}$$

2. El ozono es trioxígeno. Es decir, su fórmula química es O_3.

3. La masa molecular del oxígeno es:

$$m(\mathrm{O_3}) = 3 \cdot 16 = 48\ \mathrm{Da}$$

En gramos:

$$m(\mathrm{O_3}) = \frac{48\ \mathrm{g}}{6.02214 \cdot 10^{23}} = 7.97 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{g}$$

En kilogramos:

$$m(\mathrm{O_3}) = 7.97 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

4. La energía cinética media de las moléculas es:

$$E_c = \frac{3}{2} \cdot kT =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 353.15 =$$
$$= 7.31 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$$

5. La velocidad de las moléculas que tienen la energía cinética media se puede calcular a partir de:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c$$
$$mv^2 = 2E_c$$
$$v^2 = \frac{2E_c}{m}$$
$$v = \pm\sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

Como el módulo de la velocidad tiene que ser positivo:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 7.31 \cdot 10^{-21}}{7.97 \cdot 10^{-26}}} =$$
$$= 428.296\ \mathrm{m/s}$$

3. ¿Todas las moléculas del ejercicio anterior se mueven a la velocidad calculada?

No. Se trata de una velocidad media. Hay moléculas que se mueven más rápido y hay moléculas que se mueven más despacio.

Leyes de los gases

1. ¿Cuál es la **ecuación de los gases ideales** o **ecuación de Clausius-Clapeyron**?

La ecuación de los gases ideales se puede escribir:

$$\boxed{PV = nRT}$$

donde:

- P = presión del gas
- V = volumen del gas
- n = cantidad de sustancia (número de moles) del gas
- T = temperatura absoluta del gas
- R = constante de los gases ideales

Se usan distintas unidades para trabajar con esta ecuación:

Magnitud	SI	No SI
P	Pa	atm
V	m^3	L
n	mol	mol
T	K	K
R	$8.31 \frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{K}\cdot\text{mol}}$	$0.082 \frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$

Pero también se puede escribir:

La ecuación de los gases ideales se puede escribir:

$$\boxed{PV = NkT}$$

donde:

- P = presión del gas
- V = volumen del gas
- N = número de partículas del gas
- T = temperatura absoluta del gas
- k = constante de Boltzmann

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K}$$

Para que las dos ecuaciones sean iguales:

$$nR = Nk$$

pero sabemos que el número de partículas es el número de moles por el número de Avogadro N_A:

$$nR = n \cdot N_A \cdot k$$

Por lo tanto:

$$R = N_A \cdot k$$

Es decir, si sabes el número de Avogadro y la constante de los gases, puedes encontrar la constante de Boltzmann. Si sabes la constante de Boltzmann y el número de Avogadro, puedes encontrar la constante de los gases...

2. Un gas molecular ideal tiene una temperatura de 250 °C, una presión de 50 atmósferas y ocupa un volumen de 150 litros. ¿Cuántos moles de gas hay? ¿Cuántas moléculas?

Tenemos los siguientes datos:

- $T = 250$ °C $= 523.15$ K
- $P = 50$ atm
- $V = 150$ L

Usamos la **ecuación de Clausius-Clapeyron** de los gases ideales:

$$PV = nRT$$

Despejamos n:

$$nRT = PV$$
$$n = \frac{PV}{RT}$$

Por las unidades en las que están los datos, usamos que:

$$R = 0.082 \, \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Sustituyendo:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{50 \cdot 120}{0.082 \cdot 523.15} =$$
$$= 139.866 \text{ mol}$$

El número de moléculas es:

$$N = 139.866 \text{ mol} \cdot \frac{6.02214 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}}{1 \text{ mol}} = 8.42 \cdot 10^{25} \text{ moléculas}$$

3. ¿Cuáles son las leyes de los gases ideales y cómo pueden obtenerse de la ecuación de los gases ideales de Clausius-Clapeyron?

Las leyes son:

- la ley de Boyle-Mariotte

  Cuando el número de moles y la temperatura son constantes, la presión y el volumen son inversamente proporcionales:

  $$P \propto \frac{1}{V}$$

  que equivale a:

  $$P \cdot V = \text{cte.}$$

  que equivale a:

  $$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

- la ley de Charles y Gay-Lussac

  Cuando el número de moles y la presión son constantes, el volumen y la temperatura son directamente proporcionales:

  $$V \propto T$$

  que equivale a:

  $$\frac{V}{T} = \text{cte.}$$

  que equivale a:

  $$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

- la [segunda] ley de Gay-Lussac

  Cuando el número de moles y el volumen son constantes, la presión y la temperatura son directamente proporcionales:

  $$P \propto T$$

  que equivale a:

  $$\frac{P}{T} = \text{cte.}$$

  que equivale a:

  $$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

- la ley de Avogadro

  Cuando la presión y la temperatura son constantes, el volumen y el número de moles son directamente proporcionales:

  $$V \propto n$$

  que equivale a:

  $$\frac{V}{n} = \text{cte.}$$

  que equivale a:

  $$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

Todas ellas se pueden obtener de la ecuación:

$$PV = nRT$$

Por ejemplo:

- Cuando n y T son constantes, todo el lado derecho es constante:

$$PV = \text{cte.}$$

  que es la ley de Boyle-Mariotte.
- Cuando n y P son constantes, podemos reordenar la ecuación:

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$$

  Ahora todo el lado derecho es constante:

$$\frac{V}{T} = \text{ cte.}$$

  que es la ley Charles y Gay-Lussac.

Procesos termodinámicos

1. Di los nombres de varios procesos termodinámicos y defínelos.

- **Isotérmico** o **isotermo**: proceso a temperatura constante.

$$\Delta T = 0$$

- **Isobárico** o **isóbaro**: proceso a presión constante.

$$\Delta P = 0$$

- **Isocórico** o **isócoro**: proceso a volumen constante.

$$\Delta V = 0$$

- **Adiabático**: proceso sin intercambio de energía en forma de calor.

$$Q = 0$$

Además, un proceso puede ser:

- **Cíclico**: cuando el estado inicial y el estado final son el mismo.

2. En un diagrama P-V, dibuja un proceso termodinámico:
a) isócoro
b) isóbaro
c) isotermo de un gas ideal

d) adiabático de un gas ideal
e) cíclico

Primero dibujamos los ejes del diagrama P-V. El eje vertical (el de ordenadas) es el eje P y el eje horizontal (el de abscisas) es el eje V.

Como la presión y el volumen no pueden ser negativos, solamente necesitamos dibujar las partes positivas de los dos ejes. Es decir, solamente necesitamos dibujar el primer cuadrante.

Cada uno de los procesos será un tipo de línea:

a) el isócoro es un segmento vertical
b) el isóbaro es un segmento horizontal
c) el isotermo de un gas ideal es parte de una hipérbola
d) el adiabático de un gas ideal es similar a una hipérbola, pero crece más rápidamente en general
e) el cíclico es cualquier línea que sea cerrada

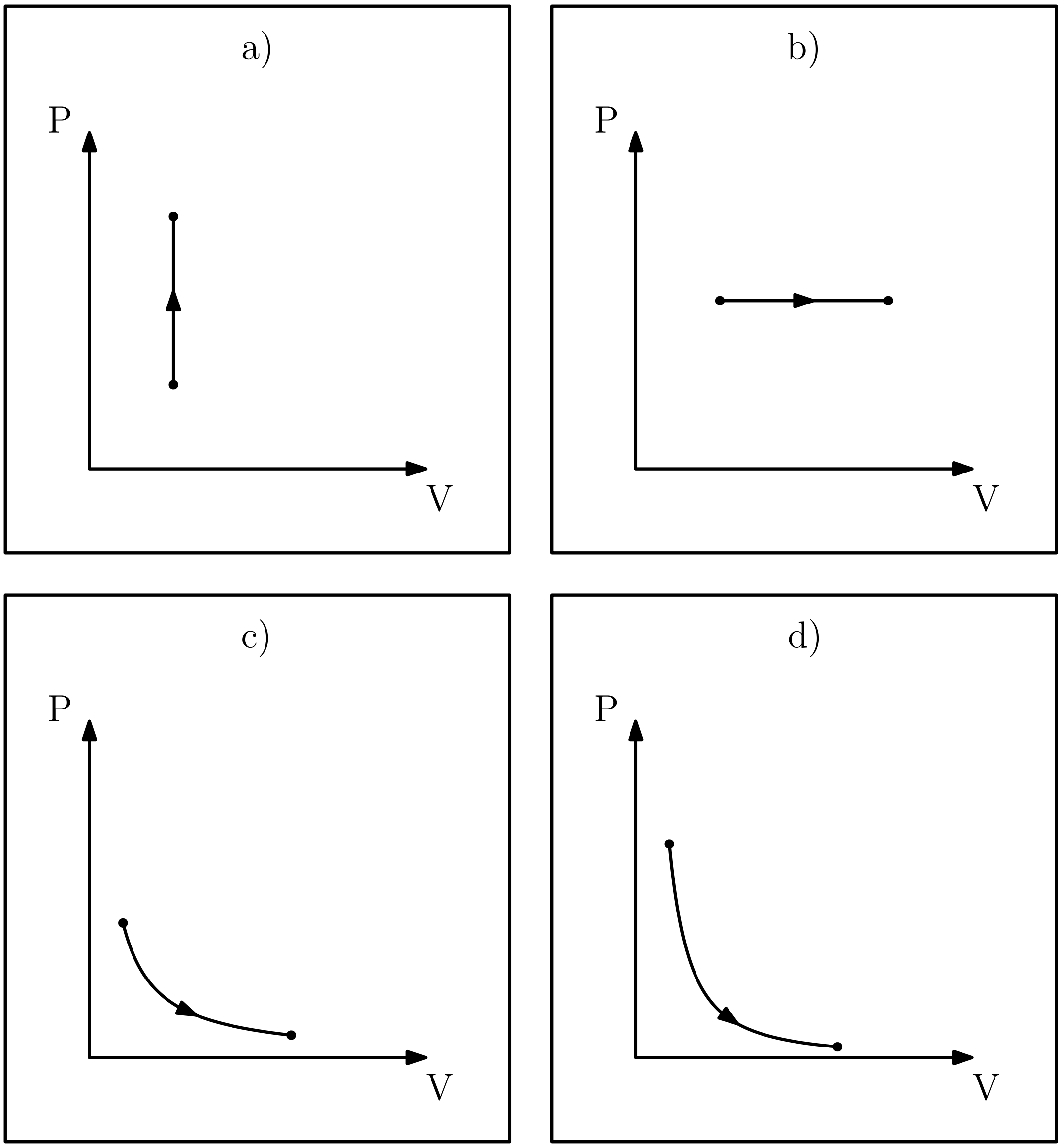


Figura 71: Procesos termodinámicos: a) isócoro donde aumenta la presión, b) isóbaro donde aumenta el volumen, c) isotermo (la línea es parte de una hipérbola), d) adiabático (aunque se parece, no es una hipérbola).

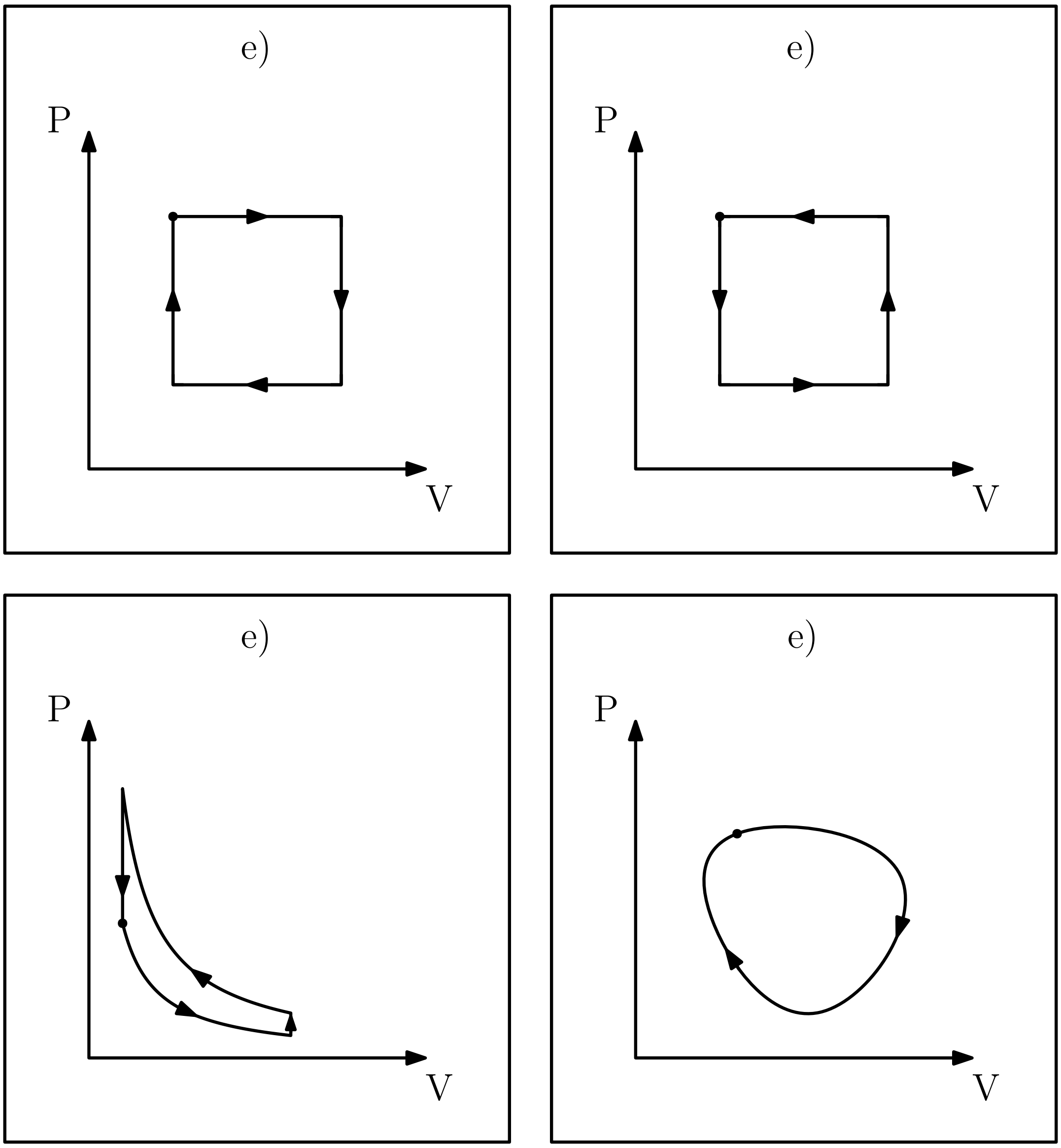


Figura 72: Procesos termodinámicos cíclicos.

Física moderna

En Eslovaquia es costumbre llamar a esta parte **física del micromundo**.

Y es sobre todo en aquellos objetos que son de tamaño similar al atómico o inferior donde las leyes de Newton dejan de ser las adecuadas para describir el comportamiento de los mismos. Hay que recurrir a la mecánica cuántica y a la relatividad especial.

Casi toda la física que estudias en el instituto es física clásica que no sirve para explicar correctamente todo el comportamiento de átomos y objetos más pequeños. Curiosamente, estudias más física moderna en la asignatura de química que en la de física.

Pero no toda la física moderna es física del micromundo. Los fenómenos de la relatividad especial no ocurren solamente en el micromundo, sino en cualquier objeto que se mueva a una velocidad comparable a la de la luz en el vacío.

Física relativista

1. Calcula la energía que tiene una masa en reposo de 20 kg.

Por la ecuación de Einstein:

$$E = m \cdot c^2$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, que tomaremos como $3 \cdot 10^8$ m/s. Por lo tanto:

$$E = 20 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 =$$

$$= 1.8 \cdot 10^{18} \text{ J}$$

Física cuántica

1. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de una persona de 80 kg que corre a 3 m/s? ¿Qué conclusión puedes extraer del resultado?

La hipótesis de De Broglie nos dice que la longitud de onda λ de una partícula con masa viene dada por:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

donde p es el momento lineal. Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

donde h es la constante de Planck, m es la masa de la partícula y v es su velocidad.

Sustituyendo los valores:

$$\lambda = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{80 \cdot 3} =$$
$$= 2.761 \cdot 10^{-36} \text{ m}$$

Si en la mayoría de los átomos el radio es del orden de 10^{-10} metros y el de un núcleo atómico es del orden de 10^{-14} metros, la longitud de onda que hemos obtenido es **muchísimo menor que el tamaño de un núcleo**.

¡No se pueden apreciar fenómenos ondulatorios en una persona!

2. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que se mueve a 30000 m/s?
Datos:

- $h = 6.626 \cdot 10^{-36}$ J · s
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} =$$
$$= \frac{6.626 \cdot 10^{-36}}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 30000} =$$
$$= 2.42 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Similar al tamaño atómico y que corresponde a una longitud de onda similar a los rayos X.

Por lo que un electrón a esa velocidad sí puede presentar comportamiento ondulatorio detectable.

Física atómica

1. Hantarō Nagaoka fue un físico japonés que propuso un modelo atómico *“planetario”* donde los neutrones estaban en un núcleo y los electrones orbitaban alrededor de él.
Esta propuesta es muy anterior al modelo de Rutherford. Pero, sin embargo, Nagaoka la rechazó.
¿Por qué Nagaoka rechazó su propia propuesta y Rutherford la retomó?

El modelo de Nagaoka no era estable. Los electrones, al girar alrededor del núcleo, están acelerados. Pero según el electromagnetismo clásico de Maxwell, una carga acelerada debe emitir radiación, perder energía y caer hacia el núcleo.

Cuando Rutherford desarrolla su propio modelo planetario del átomo, tiene datos de los que no disponía Nagaoka: los resultados del experimento de dispersión de radiación alfa que Rutherford realizó con Marsden y Geiger.

El modelo de Rutherford, como el de Nagaoka, es **inestable**. Pero describe muy bien los resultados del experimento de Rutherford a nivel cualitativo y a nivel cuantitativo.

Física nuclear

1. El número de núcleos radiactivos de un isótopo determinado en una muestra se reduce a tres cuartas partes de su valor inicial en 1 día. Calcula:

a) La constante radiactiva
b) El periodo de semidesintegración

Sabemos la que ley de desintegración radiactiva es una exponencial decreciente:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Nos dicen:

$$N(t = 1 \text{ día}) = \frac{3}{4} N_0$$

Sustituyendo en la ley:

$$\frac{3}{4} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Podemos eliminar la cantidad de núcleos iniciales:

$$\frac{3}{4} = e^{-\lambda t}$$

Podemos eliminar la exponencial usando un logaritmo natural[19]:

$$\ln \left(\frac{3}{4} \right) = -\lambda t$$

$$\lambda t = -\ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$\lambda = \frac{-\ln \left(\frac{3}{4} \right)}{t}$$

La constante que nos piden es:

$$\lambda = 0.287682 \text{ día}^{-1}$$

El periodo de semidesintegración $T_{1/2}$ es el tiempo que la muestra tarda en reducirse a la mitad:

$$N(t = T_{1/2}) = N_0/2$$

$$N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = N_0/2$$

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = 1/2$$

$$-\lambda T_{1/2} = \ln(1/2)$$

$$-\lambda T_{1/2} = -\ln(2)$$

$$\lambda T_{1/2} = \ln(2)$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Sustituyendo lo que hemos encontrado, se obtiene:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{0.287682} =$$

$$T_{1/2} \approx 2.41 \text{ días}$$

[19] O neperiano.

2. El carbono catorce tiene 6 protones y 8 neutrones. No es estable y se desintegra por desintegración beta negativa.
Explica el resultado del proceso de desintegración.
Datos: $Z(\text{Li}) = 3$, $Z(\text{Be}) = 4$, $Z(\text{B}) = 5$, $Z(\text{C}) = 6$, $Z(\text{N}) = 7$, $Z(\text{O}) = 8$, $Z(\text{F}) = 9$, $Z(\text{Ne}) = 10$.

En la desintegración beta negativa, un neutrón se desintegra espontáneamente en un neutrón, un electrón y un antineutrino electrónico:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

El electrón es la partícula *beta negativa* y podemos ver que la reacción cumple dos principios de conservación:

- la conservación de la carga eléctrica

  Al principio la carga eléctrica es 0; el neutrón no tiene carga eléctrica. Y al final las cargas del protón y del electrón se cancelan entre si; son de signos opuestos y de la misma magnitud. Y el antineutrino tiene una carga de cero.

- la conservación del número leptónico

  Al principio no hay leptones: el número leptónico es cero. Y al final hay un leptón (el electrón) y un antileptón (el antineutrino electrónico): el número leptónico total es cero.

Si un neutrón se convierte en protón, el número de nucleones no cambia. El nuevo núcleo sigue teniendo 14 nucleones. Pero el número de protones aumenta en una unidad: Z = 6 + 1. Es decir, obtenemos **nitrógeno catorce**.

$${}^{14}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\text{N} + \text{e}^- + \bar{\nu}_\text{e}$$

Esa desintegración se debe a la **interacción nuclear débil**.

El neutrón está formado por tres quarks: un quark *arriba* (u) y dos quarks *abajo* (d). Un quark *abajo* se convierte espontáneamente en un quark *arriba* y emite un bosón vectorial masivo W^-, que se desintegra rápidamente y da un electrón y un antineutrino:

$$\text{d} \rightarrow \text{u} + \text{W}^- \rightarrow \text{u} + \text{e}^- + \bar{\nu}_\text{e}$$

El nuevo nucleón tiene ahora dos quarks *arriba* y un quark *abajo*: es un protón.

3. El radio-226 ($Z = 88$) se convierte en radón-222 ($Z = 86$). Escribe la reacción nuclear completa.

El número de nucleones disminuye en cuatro unidades:

$$\Delta A = 222 - 226 = -4$$

Dos de las partículas que *"desaparecen"*, son protones:

$$\Delta Z = 86 - 88 = -2$$

Por lo tanto, se trata de una **desintegración alfa**:

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$$

Ese núcleo de helio-4 es la partícula alfa.

4. El carbono-11 se desintegra por desintegración beta positiva. Escribe la reacción nuclear completa.
Datos: $Z(\mathrm{Li}) = 3$, $Z(\mathrm{Be}) = 4$, $Z(\mathrm{B}) = 5$, $Z(\mathrm{C}) = 6$, $Z(\mathrm{N}) = 7$, $Z(\mathrm{O}) = 8$, $Z(\mathrm{F}) = 9$, $Z(\mathrm{Ne}) = 10$.

En la desintegración beta positiva, un protón se convierte en un neutrón, un antielectrón (o positrón) y un neutrino electrónico:

$$\mathrm{p}^{+} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$$

Por lo que el número de protones disminuye y el de neutrones aumenta. Como el carbono-11 ($A = 11$) tiene 6 protones ($Z = 6$), el núcleo resultante tendrá 5. Es boro:

$$\boxed{^{11}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}}$$

5. Un núcleo excitado de cobalto-60 ($Z = 27$) emite un fotón y pasa a su estado fundamental. Escribe la reacción nuclear completa.

Se trata de una desintegración gamma. El núcleo excitado pierde energía en forma de un fotón:

$$\boxed{^{60}_{27}\mathrm{Co}^{*} \longrightarrow {}^{60}_{27}\mathrm{Co} + \gamma}$$

La radiación gamma es radiación electromagnética con:

- una energía muy grande
- una frecuencia muy grande
- una longitud de onda muy pequeña

Observa que el núcleo solamente ha cambiado de estado energético. Su *"composición"* no ha cambiado.

6. El tritio y el deuterio se unen y da helio-4. Escribe la reacción nuclear completa.

Cuando dos núcleos pequeños se unen y dan un núcleo mayor, se trata de **fusión nuclear**, el tipo de reacción nuclear que se produce en las estrellas y en las bombas de hidrógeno.

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

Por lo que la Z del núcleo final debe ser 2 y A debe ser 4:

$$\boxed{^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{n}}$$

7. El número de núcleos de un isótopo hipotético en una muestra se reduce a tres cuartas partes de su valor inicial en 1 día. Encuentra la **constante de desintegración**, el **periodo de semidesintegración** y la **vida media**.

La ley exponencial de desintegración radiactiva se puede escribir:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Despejando:

$$e^{\lambda \cdot t} = \frac{N_0}{N} \implies \lambda = \frac{\ln\left(N_0/N\right)}{t}$$

Como se nos dice:

$$N = \frac{3}{4} N_0 \implies N_0/N = 4/3$$

Entonces:

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(4/3)}{1} \approx 0.287682 \text{ día}^{-1}}$$

La constante de desintegración es:

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(4/3)}{1} \approx 0.287682 \text{ día}^{-1}}$$

La vida media es:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = 3.476059497 \text{ días}}$$

Y el periodo de semidesintegración es:

$$\boxed{T = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 2.40942 \text{ días}}$$

El periodo de semidesintegración es el tiempo necesario para que la cantidad de núcleos se reduzca a la mitad.

8. El carbono 14 es un isótopo radiactivo que se desintegra por desintegración beta negativa. Si una muestra tiene 2/7 del carbono original, ¿qué edad tiene la muestra? Dato: el periodo de semidesintegración es de 5730 años.

La ley exponencial de desintegración radiactiva se puede escribir:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Un modo alternativo es:

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T}$$

donde T es el periodo de semidesintegración. Despejando el tiempo:

$$2^{t/T} = \frac{N_0}{N} \implies \ln \quad 2^{t/T} \quad = \ln \quad \frac{N_0}{N} \quad \implies \frac{t}{T} \cdot ln(2) = \ln \quad \frac{N_0}{N}$$

$$t = T \cdot \frac{\ln \quad \frac{N_0}{N}}{\ln(2)}$$

$$t = 5730 \cdot \frac{\ln \quad \frac{7}{2}}{\ln(2)} \approx 10356 \text{ años}$$

9. El número de núcleos de un isótopo hipotético en una muestra pasa a tres quintos de de su valor inicial en 2 días. Encuentra la **constante de desintegración**, el **periodo de semidesintegración** y la **vida media**.

La ley exponencial de desintegración radiactiva se puede escribir:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Despejando:

$$e^{\lambda \cdot t} = \frac{N_0}{N} \implies \lambda = \frac{\ln\left(N_0/N\right)}{t}$$

Como se nos dice:

$$N = \frac{3}{5} N_0 \implies N_0/N = 5/3$$

Entonces:

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(5/3)}{2} \approx 0.255413 \text{ día}^{-1}}$$

La constante de desintegración es:

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(5/3)}{2} \approx 0.255413 \text{ día}^{-1}}$$

La vida media es:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = 3.915230 \text{ días}}$$

Y el periodo de semidesintegración es:

$$\boxed{T = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 2.713831 \text{ días}}$$

El periodo de semidesintegración es el tiempo necesario para que la cantidad de núcleos se reduzca a la mitad.

10. ¿Cuánto tiempo necesita la muestra anterior para reducirse a un 10 por ciento de la cantidad original?»}
Dato: $\lambda = \frac{\ln(5/3)}{2} \approx 0.255413 \text{ día}^{-1}$

Buscamos t. Y sabemos que:

$$N = N_0 \cdot \frac{10}{100} \implies N = N_0 \cdot \frac{1}{10}$$

Por lo tanto:

$$N/N_0 = e^{-\lambda t} \implies e^{\lambda t} = N_0/N$$

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\lambda}$$

$$t = \frac{\ln(10/1)}{0.255413}$$

$$\boxed{t = 9.015109 \text{ días}}$$

11. El helio-4 tiene una masa de 4.002 602 u. El protón tiene una masa de 1.007 276 u y el neutrón tiene una masa de 1.008 664 u. Calcula el defecto de masa y la energía de enlace por nucleón.

El helio-4 tiene dos protones (porque es helio) y 4 nucleones. Si dos de los 4 nucleones son protones, los otros dos son neutrones.

Es decir, el helio-4 son dos protones y dos neutrones. Para calcular el defecto de masa, debemos hacer la diferencia entre la masa del helio-4 y la masa de todos sus constituyentes individuales:

$$\Delta m = m({}^{4}_{2}\mathrm{He}) - (2 \cdot m_p + 2 \cdot m_n)$$

$$\begin{gathered}\Delta m = 4.002602 - (2 \cdot 1.007276 + 2 \cdot 1.008664) = \\ = -0.029278 \text{ u}\end{gathered}$$

Ese defecto de masa puede calcularse en kilogramos:

$$\Delta m = -0.029278 \text{ u} \cdot \frac{1 \text{ g}}{6.022 \cdot 10^{23} \text{ u}} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}}$$

$$\Delta m \approx -4.8618 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

Por la ecuación de Einstein, podemos calcular la energía asociada:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx -4.3756 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Como hay cuatro nucleones:

$$\Delta E / A \approx -1.0939 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Física de partículas

1. ¿Qué estudia la física de partículas?

La **física de partículas** o **física corpuscular** estudia las interacciones de las distintas partículas subatómicas existentes.

Esas partículas pueden ser compuestas como los protones, los neutrones o los tres tipos de piones, por ejemplo.

Pero también pueden ser elementales, como los electrones, los quarks y los neutrinos, por ejemplo.

2. ¿Qué es una interacción? ¿Cuáles son las interacciones fundamentales?

Una **interacción** es una acción entre dos o más cuerpos que potencialmente puede cambiar la posición de los cuerpos (y, por lo tanto, su movimiento) o la posición de sus partes (y, por lo tanto, su forma).

Hay numerosas interacciones que podemos observar en nuestra vida diaria:

- la interacción peso que hace que los objetos caigan cerca de la superficie de la Tierra
- la interacción electrostática que hace que el pelo parezca quedarse pegado al jersey cuando nos lo quitamos en un día frío y seco de invierno
- la interacción elástica del resorte de un bolígrafo
- la interacción magnética entre un imán y la puerta de la nevera
- ...

Pero se ha llegado a la conclusión de que todas ellas (y algunas que no son observables de manera tan directa) son consecuencia de solamente cuatro **interacciones fundamentales**.

Las cuatro interacciones fundamentales son:

- la **interacción gravitatoria**

  que es responsable del movimiento de los planetas, del peso, de la caída de los objetos...

- la **interacción electromagnética**

  que es responsable de casi cualquier otro fenómeno perceptible a simple vista. Todos los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos son debidos a la interacción electromagnética.

- la **interacción nuclear fuerte**

  que es responsable de que pueda existir el núcleo atómico; contrarresta la repulsión electrostática que se produce entre los protones que forman el núcleo.

- la **interacción nuclear débil**

  que es responsable de algunos procesos de desintegración radiactiva como la desintegración beta negativa o la desintegración beta positiva.

3. ¿Qué interacciones son relevantes a escalas atómicas y subatómicas?
¿Qué modelo de física de partículas las describe actualmente?

Las tres interacciones relevantes en el *micromundo* son la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil.

La gravitatoria es tan débil que puede ignorarse en procesos de física de partículas.

El mejor modelo que tenemos a fecha de hoy para describir las tres interacciones es el **Modelo Estándar** de física de partículas que incluye.

Ese modelo habla de que toda la materia y todas las interacciones (salvo la gravedad) son consecuencia de la existencia de las siguientes partículas **elementales**:

- los leptones (que son materia)
  - el electrón (y su antipartícula): e ($\bar{e}$)
  - el muón (y su antipartícula): μ ($\bar{\mu}$)
  - el tau (y su antipartícula): τ ($\bar{\tau}$)
  - los tres neutrinos (y sus antineutrinos): ν_e, ν_μ, ν_τ ($\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$)
- los quarks (que son materia)
  - el *up* (arriba) (u) y su antiquark ($\bar{u}$)
  - el *down* (abajo) (d) y su antiquark ($\bar{d}$)
  - el *strange* (extraño) (s) y su antiquark ($\bar{s}$)

- el *charm* (encanto) (c) y su antiquark ($\bar{c}$)
- el *bottom* (fondo) (b) y su antiquark ($\bar{b}$)
- el *top* (cima) (t) y su antiquark ($\bar{t}$)

- los bosones (que median las interacciones)
  - el fotón (γ) que media la interacción electromagnética.
  - los gluones[20] (g) que median la interacción nuclear fuerte.
  - los bosones vectoriales masivos W^+, W^- y Z^0, que median la interacción nuclear débil.
- el bosón de Higgs (H) que es parcialmente responsable de la masa.

4. Un positrón (= antielectrón) y un electrón pueden colisionar y dar resultado a dos fotones.
- El positrón y el electrón tienen la misma masa y cargas opuestas.
- El fotón no tiene masa, se mueve a la velocidad de la luz, tiene momento lineal (a pesar de no tener masa) y no tiene carga eléctrica.

a) ¿qué principios de conservación puedes ilustrar aquí?
b) ¿alguno que se cumple en física clásica pero no en física moderna?
c) ¿por qué no pueden producirse solamente un fotón en este proceso de aniquilación/desintegración?

El proceso de aniquilación que se produce se puede escribir:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

a) Claramente se cumple la conservación de la carga eléctrica.

La carga inicial es la suma de la carga del electrón y la del positrón. Pero, como son opuestas, la carga total inicial es 0:

$$Q_0 = 0$$

La carga final es la suma de la carga de los dos fotones, pero ambos tienen una carga igual a cero.

$$Q_1 = 0$$

Por lo que se conserva la carga eléctrica:

$$Q_0 = Q_1 \iff \Delta Q = 0$$

Evidentemente se cumplirán otros principios de conservación, como el del momento lineal, el de la energía o el del momento angular. Incluso principios de conservación que no tienen equivalente en física clásica, como la conservación del número leptónico.

Pero el que es evidente por la reacción, es el de la carga.

[20] De la palabra inglesa *glue*. Es decir: *pegamento*.

b) Claramente no se conserva la masa.

Las masas en reposo del electrón y del positrón son distintas de cero. Por lo tanto, la masa total inicial, es distinta de cero:

$$M_0 \neq 0$$

Pero la masa del fotón es cero. Así que la masa total final es igual a cero:

$$M_1 = 0$$

Por lo que la masa no se ha conservado:

$$M_0 \neq M1$$

c) En general, podríamos lanzar un positrón contra un electrón de manera que el momento lineal total inicial fuese cero.

Sabemos que el momento lineal se conserva.

Por lo tanto, si el momento lineal total inicial es cero, también debe ser cero el final.

En física clásica, solamente los objetos con masa tienen momento lineal. En física moderna, un fotón (una partícula de luz) tiene momento lineal, pero no tiene masa.

Si tenemos solamente un fotón, ese fotón siempre **tiene momento lineal distinto de cero**.

Con un solo fotón no es posible conseguir un momento lineal total de cero. Por lo que el proceso con un solo fotón **NO ES POSIBLE**.

Bibliografía

La siguiente bibliografía no es exhaustiva.

- En eslovaco:
  - Teplička, I. (2017). *“Fyzika pre maturantov a uchádzačov na vysokých školách”*. Enigma Publishing.

    ISBN: 978-80-8133-038-4
  - Tarábek, P. y Adamčíková. V. (2018). *“Zmaturuj z fyziky”*. Didaktis.

    ISBN: 978-80-8166-018-4
  - Kriek, P. (2024). *“Úspešná maturita: Fyzika”*. TAKTIK.

    ISBN: 978-80-8180-468-7

Cómo se hizo

El texto está escrito en el lenguaje de marcado `Markdown` en el editor `Textadept`.

El programa `pandoc` ha sido el responsable de la generación del PDF a partir de Markdown. Y, para ello, `pandoc` utiliza `LaTeX` (concretamente, `pdflatex` de `TeX Live`).

He creado la mayoría de las figuras con el editor `Ipe`. El resto de las imágenes se han creado usando `gnuplot`.

Varios lenguajes de programación han formado parte del proceso, tales como `Object Rexx` y `Lua`.

Algunos programas matemáticos han sido de ayuda como la calculadora `Qalculate!` y el sistema de cálculo simbólico `Maxima` a través de `wxMaxima`.

La portada

La imagen de la portada es mi propia mano trazada con ayuda de `Ipe`.

Las herramientas

Todas las herramientas que aparecen aquí son gratuitas, libres y multiplataforma.

- `Textadept`: https://orbitalquark.github.io/textadept/
- `pandoc`: https://pandoc.org/
- `Ipe`: https://ipe.otfried.org/
- `gnuplot`: http://www.gnuplot.info/
- `Inkscape`: https://inkscape.org
- `Qalculate!`: https://qalculate.github.io/
- `wxMaxima`: https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/index.html

Agradecimientos

A Adam Pala, por avisar de un error aritmético en el capítulo de mecánica de fluidos. (Que varios de sus compañeros me indicaron después.)

A Maxim Madunický por indicar un error en un subíndice en una de las figuras del tiro parabólico.

A Lea Fedorov, que me indicó numerosos errores en varios problemas.

Y a Joaquín Támara Espot por su paciencia y confianza en mí para sacar adelante la versión definitiva.

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN

ACCIÓN
EDUCATIVA
EXTERIOR