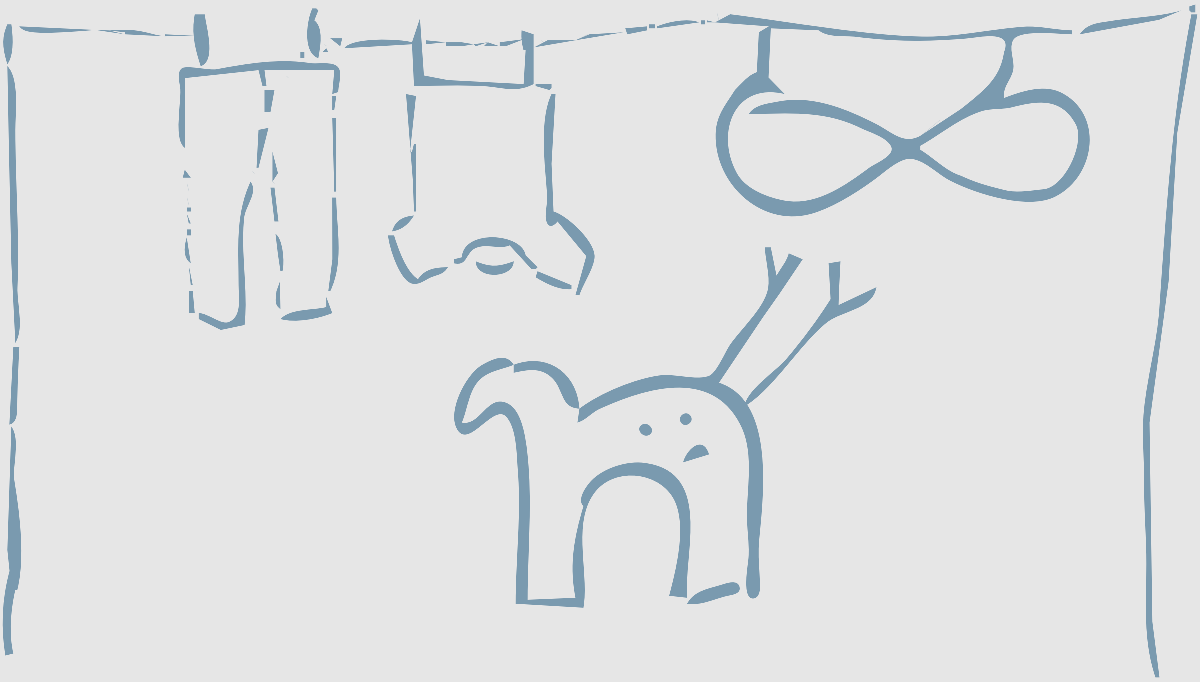
Tropecientos ejercicios de matemáticas

Salvador Parra Camacho

Acción Educativa Exterior
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL
Y DEPORTES



Colección de ejercicios resueltos

para alumnos de Secciones Bilingües en Eslovaquia

Tropecientos ejercicios de matemáticas

Colección de ejercicios resueltos

para alumnos de Secciones Bilingües en Eslovaquia

Salvador Parra Camacho

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN
ACCIÓN
EDUCATIVA
EXTERIOR

Catálogo de publicaciones del Ministerio
Catálogo general de publicaciones oficiales

Agregaduría de Educación en Eslovaquia
Consejería de Educación en Polonia

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, FORMACIÓN PROFESIONAL Y DEPORTES
Secretaría de Estado de Educación
Dirección General de Planificación y Gestión Educativa
Unidad de Acción Educativa Exterior

Edita:

Subdirección General de Atención al Ciudadano, Documentación y Publicaciones
Edición: noviembre 2025
NIPO: 164-25-220-6 (electrónico)
Maquetación: Salvador Parra Camacho
Diseño cubierta: Salvador Parra Camacho

A Petra, Jose, Jaime y Manuel.

Por los años que hemos compartido.

Índice general

Introducción

Bienvenido, estimado lector.

Probablemente, seas alumno de una de las Secciones Bilingües de Eslovaquia y tengas la asignatura de matemáticas en español o uno de los seminarios de preparación para *maturita* de matemáticas en español. O quizás seas profesor de una de esas Secciones Bilingües e impartas la asignatura de matemáticas en español.

Si no estás en esas categorías, estoy sorprendido de que estés aquí. Pero también eres bienvenido.

Aunque todo el mundo es bienvenido, este libro está dirigido a los alumnos de las Secciones Bilingües en general y a los del *Bilingválne slovensko-španielske gymnázium* de Nové Mesto nad Váhom en particular.

Es una colección de ejercicios resueltos que un alumno se puede encontrar entre el segundo curso y el cuarto curso y durante los seminarios de preparación para **maturita de matemáticas en español**.

El *"tropecientos"* del título es un sinónimo de *"gran cantidad"*. Hay más de 600 ejercicios, pero la cantidad exacta de ejercicios no es importante. Porque la dificultad y la longitud de los ejercicios es muy variable; un ejercicio puede ocupar varias páginas y otro puede ocupar solamente un par de párrafos. Por eso es mejor *"tropecientos"* que una palabra más precisa.

He intentado que haya ejercicios de la mayoría de las partes de la asignatura. Incluso he intentado que aparezcan representados temas que no son propios de maturita, pero pueden ser interesantes para alumnos que quieran ir más allá del temario eslovaco. Eso es más importante que una cantidad concreta de ejercicios.

Como soy humano, estoy convencido de que en más de un sitio se han deslizado errores de expresión, de cálculo... Te pido disculpas por esos errores. Y te pido que prestes atención para ver los errores que yo no he podido ver. Si los encuentras, recuerda que los avisos de error y las sugerencias para mejorar el contenido serán bienvenidos.

¿Cómo puedes usar este libro?

Nadie aprende a montar en bicicleta viendo cómo otra persona monta en bicicleta. O, para ser precisos, nadie aprende a montar en bicicleta **solamente** viendo cómo otra persona monta en bicicleta. La gente aprende a montar en bicicleta mirando cómo otra persona monta en bicicleta, intentando imitar a esa persona, cayendo de la bicicleta y volviendo a intentarlo, entendiendo mejor lo que estaba haciendo la otra persona que sí sabe montar en bicicleta.

Del mismo modo, nadie aprende a resolver problemas de matemáticas **solamente** viendo cómo otra persona resuelve problemas de matemáticas. Si quiere aprender, tiene que intentar resolver esos problemas por sí misma. Y cuando se *cae*, es decir, cuando no consigue llegar a la solución, tiene que ver cómo lo hacía la otra persona para entender dónde está el fallo.

Por eso te sugiero que intentes hacer los ejercicios antes de mirar las soluciones.

Cruzo los dedos para que este libro te resulte muy útil.

Notación

Se suele pensar que la notación matemática es universal, pero esto no es así.

Las notaciones matemáticas en España y en Eslovaquia a veces no coinciden. A veces, las notaciones cambian también de un profesor a otro incluso dentro del mismo país.

Aquí tienes algunos comentarios sobre la notación usada aquí.

Lógica

En lógica llamamos **operadores lógicos** a lo que suele llamarse **conectores lógicos**.

El símbolo usado para la negación de p es $\neg p$. Pero en Eslovaquia se suele preferir p'.

Conjuntos

En teoría de conjuntos, para hacer referencia al complementario de un conjunto A, podemos usar varias notaciones: A^c, $\bar{A}$, A'. La última es la más frecuente en Eslovaquia.

Los naturales y otros números

Aquí usamos la convención de que los naturales incluyen el 0. La convención que no lo incluye es correcta, pero no es la que se usa aquí.

$\mathbb{N}$ = el conjunto de los números naturales, que incluye el 0

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

Los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos tienen símbolos bien conocidos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Sin embargo, no intentes escribir a mano los símbolos tal y como aparecen en el libro. Las versiones manuscritas son algo más sencillas, como puedes ver en la figura.

Las barras verticales

Las barras verticales que rodean una expresión ($|p|$) tienen distintos significados dependiendo de lo que sea la expresión entre ellas (p):

- $|p|$ es el **valor de verdad** de la proposición lógica p
- $|A| = \mathrm{card}(A)$ es la **cardinalidad** del conjunto A

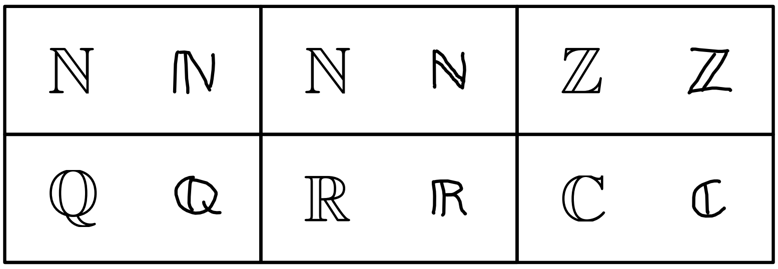


Figura 1: Versiones tipográficas y manuscritas de los conjuntos de números.

- $|x| = \text{abs}(x)$ es el **valor absoluto** del número real x
- $|\vec{v}| = ||\vec{v}|| = v$ es el **módulo** del vector $\vec{v}$
- $|A| = \det(A)$ es el **determinante** de la matriz A
- $|z|$ es el **módulo** del número complejo z
- $|\overline{AB}|$ es la **longitud** del segmento $\overline{AB}$

El separador decimal

En español y en eslovaco, se usa la coma como separador decimal:

$$\frac{25}{10} = 2{,}5$$

En inglés, se usa el punto como separador decimal:

$$\frac{25}{10} = 2.5$$

En este libro se pueden usar ambos.

Aunque en español y en eslovaco se puede usar el punto como separador de millar y de millón (y de millardo, billón...), lo desaconsejo enérgicamente en mis clases. La RAE (Real Academia Española) también desaconseja usar un punto como separador de agrupación, siguiendo las recomendaciones de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas y de la ISO (Organización Internacional de Normalización).

Y, aunque en inglés se usa la coma como separador de millar y de millón (y de millardo, billón...), también pido que no se use.

En este libro, si es necesario separar cifras, se usa un pequeño espacio. Por ejemplo, el número *"mil doscientos treinta y cuatro coma cinco"* se puede escribir:

$$\frac{12345}{10} = 1234{,}5 =$$

o:

$$= 1\,234{,}5 =$$

o:

$$= 1\,234.5$$

El símbolo de periodo

En España, se suele usar un arco sobre el grupo de cifras que forman un periodo.

En Eslovaquia, se suele usar un segmento (un *vinculum*) sobre el periodo.

Aquí se usa la notación eslovaca. Por ejemplo, a continuación un número cuya representación decimal es periódica pura y el periodo tiene 42 cifras:

$$\frac{1}{49} = 0.\overline{020408163265306122448979591836734693877551}$$

La multiplicación

Para multiplicar dos números $x = 2$ e $y = 3$, siempre se usa el punto centrado (cuando se representan con letras o con cifras) o la yuxtaposición (cuando se representan con letras):

$$x \cdot y = xy = 2 \cdot 3 = 6$$

Algunos libros usan un punto normal para la multiplicación:

$$a.b = 2.300 = 600$$

Por favor, **no lo hagas**.

El aspa de la multiplicación ($\times$) se usa aquí solamente para el producto cartesiano de conjuntos, para el producto vectorial de vectores y para indicar las dimensiones de una matriz. El resto de multiplicaciones se indican con el punto de la multiplicación ($\cdot$) o la yuxtaposición.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

He adoptado la notación eslovaca para el conjunto de soluciones reales: una letra K mayúscula.

Por ejemplo:

$x^2 - 1 = 0$	$\Longrightarrow$	$K = \{\pm 1\}$
$x^2 + 1 = 0$	$\Longrightarrow$	$K = \{\} = \varnothing$
$x + 1 < 0$	$\Longrightarrow$	$K = (-\infty, -1)$
$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow$	$K = [-1, 1)$
$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$	$\Longrightarrow$	$K = \{(1, 2)\}$
$\sin(x) = 0$	$\Longrightarrow$	$K = \{0 + \pi n; n \in \mathbb{Z}\}$

Pares e intervalos

Los pares ordenados son los elementos que son resultado de un producto cartesiano de dos conjuntos y, por lo tanto, se usan para representar puntos en el plano, vectores en dos dimensiones, números complejos…

Los intervalos son conjuntos de números reales contenidos entre dos extremos. Por ejemplo, todos los números reales mayores que 3 y menores que 5 son el intervalo abierto de extremos 3 y 5. O todos los números reales mayores o iguales que 3 y menores o iguales que 5 son el intervalo cerrado de extremos 3 y 5.

Desafortunadamente[1], la notación en España y la notación en Eslovaquia no coinciden:

Concepto	España	Eslovaquia
Intervalo cerrado	$[a,b]$	$\langle a;b\rangle$
Intervalo abierto	(a,b)	$(a;b)$
Par ordenado	(a,b)	$[a;b]$

La notación eslovaca tiene dos ventajas respecto a la española:

- No usa la misma notación para pares ordenados e intervalos abiertos.
- Al usar la coma como separador entre los dos números, se pueden usar números decimales.

A pesar de ello, en este libro se usa la notación española.

- "(,)" son **los paréntesis**
- "[,]" son **los corchetes**
- "{, }" son **las llaves**

Vectores

Los vectores se representan siempre con una flecha sobre una letra o un par de letras:

$$\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AB}$$

La segunda notación se usa para un vector que sale del punto A y llega al punto B. Aquí **no** la usamos para la semirrecta de extremo A que pasa por B.

Cuando el vector es unitario, lo representamos con un circunflejo sobre la letra. Por ejemplo: $\hat{v}$. Como ocurre con los vectores unitarios de la base cartesiana canónica: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Trigonometría

El *seno de equis* puede aparecer como $\sin(x)$ o como $\mathrm{sen}(x)$.

La *tangente de equis* puede aparecer como $\mathrm{tg}(x)$ o como $\tan(x)$.

[1] **desafortunadamente**: por desgracia. O, en eslovaco, *bohužiaľ*.

Sucesiones

En eslovaco se usa q para la razón de una progresión geométrica en lugar de r. Aquí se usa r, como suele ser habitual en español.

También se usa la notación siguiente para una sucesión:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

que subraya:

- que la sucesión es un conjunto y
- el número de elementos y su orden (gracias al subíndice y al superíndice).

Cómo explicar ejercicios

Siempre que haces un examen, sea escrito u oral, estás explicando algo a un profesor.

Cuando tomas apuntes o haces ejercicios, lo que escribes es una explicación a alguien que va a leerte.

Intenta tomar esos apuntes o hacer esos ejercicios como si la persona que los va a leer no eres tú. Como si fuesen para otra persona. Porque cuando tú vuelvas a esos apuntes después de un día, de una semana o de un mes, en cierto sentido vas a ser otra persona. No vas a recordar todos los detalles de lo que hiciste.

Intenta ser ordenado y claro. Intenta mostrar lo que sabes.

Siempre

1. Intenta resolver los problemas de manera algebraica.

   Es decir: usa **letras** siempre que puedas.

   Eso permite rehacer el problema para varios valores, por ejemplo. Y demuestra un mejor conocimiento de la materia.

2. No dependas de la calculadora.

   La calculadora es una herramienta útil. Pero intenta no depender de ella.

   Cuando el tiempo es escaso, a veces el uso de la calculadora hace que sea más escaso aún.

   Muchas veces es mejor contestar:

   $$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{5}$$

   que:

   $$\alpha = 0{,}3334731722^\circ$$

3. No dependas de libros de tablas o formularios.

   Buscar una fórmula lleva tiempo. Es mejor saber deducirlas y solamente recordar las más esenciales.

4. Si no sabes hacer una demostración, al menos estudia los casos concretos de lo que quieres demostrar.

5. Menciona los teoremas, leyes y pasos que utilizas.

Por escrito

Cuando hagas un examen por escrito (o tomes apuntes o hagas ejercicios):

1. Nunca vuelvas atrás.

   El orden de escritura y desarrollo debe coincidir con el orden de lectura.

   Si escribes que $x = 3$ al principio del folio después de haber llenado todo el folio de operaciones, quien lee eso se pregunta de dónde ha salido y puede perder mucho tiempo en descubrirlo.

   Ese $x = 3$ debió quedarse al final del folio.

2. Si por cuestiones de espacio o de orden, el orden de escritura no coincide directamente con el de desarrollo, usa líneas y flechas.

   Puedes usar líneas verticales para separar el desarrollo en dos columnas. Puedes usar las flechas para indicar que cierto desarrollo sigue en otra parte...

   Pero siempre de manera que sea limpio y claro.

3. Tacha aquello que esté mal o que no quieras que se tenga en cuenta.

4. Usa los números y letras que indiquen qué ejercicio y qué apartado estás contestando.

5. Usa etiquetas para hacer referencia a ecuaciones, fórmulas... que hayas escrito antes.

   Por ejemplo, puedes tener la ecuación:

   $$x + 3y = 5$$

   y añadir un uno dentro de una circunferencia y escribir, mucho después, *"en la ecuación 1"*, para hacer referencia a ella.

Oralmente

Un examen oral de matemáticas depende también de una pizarra; es muy incómodo expresar verbalmente todos los conceptos. El lenguaje matemático es mejor que el lenguaje natural para expresar ideas matemáticas.

Aquí tienes algunas recomendaciones para hacer problemas en una pizarra:

1. Si crees que existe un error en lo que has escrito, apártate de la pizarra.

   Normalmente escribes en papel. Cuando lo haces, no necesitas cambiar de posición; puedes ver el desarrollo completo.

   Si estás cerca de la pizarra, es difícil que veas el panorama completo. Ves solamente una parte pequeña.

   Así que **aléjate de la pizarra** para verlo mejor.

   Mira la última línea que has escrito, la línea anterior e intenta reproducir el último paso para detectar el error.

2. Pon tus respuestas en contexto, pero sin invertir demasiado tiempo en ello.

   Puedes decir cosas como:

- *este problema es de combinatoria, que es la rama de las matemáticas que cuenta el número de elementos de un conjunto*
- *el triángulo de Pascal tiene muchos nombres diferentes, como "triángulo de Pascal", "triángulo de Tartaglia", "triángulo aritmético"... porque ha sido descubierto y estudiado por matemáticos de todo el mundo*
- *el triángulo de Tartaglia se llama así por Niccolò Fontana, que era apodado "Tartaglia" porque era tartamudo*
- ...

3. Puedes ampliar una pregunta añadiendo hipótesis.

   Por ejemplo: haces un problema de combinatoria en el que se calculan permutaciones sin repetición. Al terminarlo, rehaces el problema suponiendo que se repiten algunos elementos.

4. Escribe con letra grande y clara.

5. Si explicas en voz alta, hazlo con voz firme y suficientemente intensa.

   No quieres que el profesor o el tribunal hablen para pedirte que subas el volumen; eso puede aumentar tus nervios.

6. Mientras escribes en la pizarra, intenta explicar verbalmente lo que haces.

   A los tribunales no les gusta que se escriba en silencio. El tribunal son *"tus alumnos"*, debes explicarles lo que haces.

7. Mientras escribes en la pizarra, intenta que tu cuerpo no esté entre lo que escribes y el tribunal.

   Si no lo ven bien, pueden pedirte que pares y te apartes. (Y eso puede aumentar tus nervios.)

   Además, si cometes un error, es posible que te permitan corregirlo si lo ven a tiempo. No lo verán a tiempo si estás siempre entre ellos y la pizarra.

«Pero yo tengo maturita»

El examen oral de maturita en español, actualmente[2] funciona de la siguiente manera:

1. El alumno entra en el aula donde se hace el examen cuando se le llama.
2. El tribunal que decidirá la nota está formado por una media docena de personas.

   El profesor español de matemáticas, el profesor eslovaco de matemáticas y los inspectores españoles suelen ser los más importantes en este examen.

   Los inspectores españoles pueden ser expertos en la materia o no.
3. El alumno muestra su identificación personal al tribunal, escoge un sobre y de ese sobre se saca un número.
4. Ese número determina cuál de los 25 exámenes (o 30 en algunas Secciones) de maturita que hay debe hacer el alumno.
5. El tribunal da ese examen al alumno y el alumno se va a una mesa donde puede preparar el examen.
6. El examen tiene 3 preguntas:
   - una pregunta de teoría
   - una demostración
   - un problema

   y las tres preguntas pertenecen a temas diferentes.
7. El alumno tiene 20 minutos para preparar por escrito la realización del examen.

   Para eso dispone de folios de papel, bolígrafos y calculadoras científicas.

   Mientras prepara su examen, es posible que otro alumno esté exponiendo oralmente el suyo.

   Si el alumno termina de preparar el examen antes de los 20 minutos, puede pedir al tribunal empezar la exposición oral antes de los 20 minutos.
8. El alumno expone el examen usando tizas, pizarra, su voz, sus manos y **su cerebro**.

   Durante la exposición, cualquier miembro del tribunal puede interrumpir y preguntar.

ALUMNA: Ya ya… Si eso está muy bien, pero no es esa mi pregunta.

PROFESOR: ¿Cuál es entonces?

[2]Puede haber diferencias en cómo funciona en un instituto y en otro instituto. Y en cómo funciona durante un curso y durante otro. Así que toma este capítulo como una idea muy general, no como una descripción muy precisa.

ALUMNA: ¿Cómo puedo usar este libro para prepararme el examen de maturita?

PROFESOR: ¡Ah! Pues hay varias maneras... Y además hay varios tipos de ejercicios. Hay ejercicios que sirven para practicar conceptos y métodos de resolución de problemas. Hay ejercicios que son muy extensos porque se muestran varias maneras de resolverlos...

ALUMNA: Pero ¿hay ejercicios de maturita?

PROFESOR: `[Se ríe.]` Hay ejercicios *similares* a los que pueden aparecer en maturita. Si entiendes los que aparecen aquí, no deberías tener problemas para hacer cualquier ejercicio de maturita.

ALUMNA: ¿Y tengo que estudiar todos los temas?

PROFESOR: No. Debes estudiar los temas que te diga tu profesor.

ALUMNA: Pero usted es mi profesor.

PROFESOR: Sí, sí. Lo sé. Pero no voy a decirte todo aquí. Al fin y al cabo, no soy un profesor real y tú no eres una alumna real. Solamente somos una técnica narrativa que ha decidido usar el autor del libro. Así que...

ALUMNA: Es decir, que debo pedirle la lista de temas al profesor.

PROFESOR: Exacto. Alguno de los capítulos del libro no forman parte del temario actual. El de números complejos, por ejemplo. No tienes que estudiar ese tema para maturita, aunque pueda añadir herramientas útiles.

ALUMNA: Creo que ya comprendo. Gracias.

PROFESOR: Pero olvidas lo más importante.

ALUMNA: ¿El qué?

PROFESOR: Intenta siempre hacer los ejercicios sin mirar las soluciones. Y, después de intentarlo, lee las soluciones. Cuando pase un tiempo, vuelve a intentar a hacer el mismo ejercicio sin mirar las soluciones.

Y además, piensa que las figuras, las fórmulas y los cálculos son cosas que tendrás que escribir en la pizarra. Y el texto es lo que yo diría en voz alta si estoy escribiendo en la pizarra. Y es algo que tú deberías decir, con tus propias palabras, mientras escribes en la pizarra.

Lógica

Las matemáticas son como un gran continente del conocimiento. Exploramos ese continente y hacemos mapas de lo que descubrimos[3].

La **lógica** es la parte de las matemáticas que nos sirve como brújula para orientarnos en ese continente. Nos permite ir de un sitio (un teorema, un axioma, una proposición...) a otro sitio (un resultado, otro teorema...), siguiendo un camino correcto. Sin la lógica, podemos perdernos o llegar al sitio correcto por un camino equivocado.

Y como es la brújula para recorrer todo el continente de las matemáticas, algunos símbolos lógicos como la conjunción ($\wedge$), la negación ($\neg$), la disyunción ($\vee$), el condicional ($\Rightarrow$) y la equivalencia ($\iff$) siguen apareciendo en todo el libro.

Conócelos bien.

1. Determina cuáles de las siguientes sentencias son proposiciones lógicas:

a) $a =$ *"¿El número seis es divisible entre dos?"*
b) $b =$ *"El número dos es impar"*
c) $c =$ *"El número dos es par"*
d) $d =$ *"¡Estudia lógica!"*
e) $e =$ *"Azul cacahuete tres rápidamente"*

- a **NO** es una proposición lógica; es una pregunta.

  Una pregunta no tiene un valor de verdad definido.

- b **SÍ** es una proposición lógica.

  Es una proposición lógica falsa. ($|b| = 0$)

- c **SÍ** es una proposición lógica.

  Es contraria a la proposición anterior. Es verdadera. ($|c| = 1$)

- d **NO** es una proposición lógica; es una orden.

- e **NO** es una proposición lógica; no tiene sentido completo.

2. Deduce la tabla de verdad del operador lógico de negación.

La operación de **negación** es una operación lógica unaria que convierte una proposición lógica verdadera en una proposición lógica falsa y una proposición lógica falsa en una verdadera. La negación de p se puede representar $\neg p$ o p' y el valor de verdad *verdadero* lo podemos representar como 1 y el valor de verdad *falso* lo podemos representar como 0.

[3] Aquí no hablaremos de la pregunta: *¿las matemáticas se inventan o se descubren?*

Si, por ejemplo, la proposición p es:

$p =$ *"5 es un número primo"*

y su valor de verdad es verdadero ($|p| = 1$). Su negación es:

$\neg p =$ *"5 no es un número primo"*

cuyo valor de verdad es falso ($|\neg p| = 0$).

Como es una operación unaria, solamente afecta a una proposición lógica. Y, en ese caso, la tabla de verdad solamente necesita 2^1 filas (además de la fila del encabezado).

p	$\neg p$
0	1
1	0

Cuando se usan 1 y 0 para los valores de verdad, la negación equivale a la siguiente operación aritmética[4]:

$$|\neg p| = 1 - |p|$$

3. Deduce la tabla de verdad del operador lógico de conjunción.

La operación lógica de **conjunción** entre dos proposiciones lógicas p y q es una operación lógica binaria que se representa como $p \wedge q$. Y la proposición compuesta resultante es verdadera solamente si ambas proposiciones son verdaderas.

Por ejemplo, si:

- $p =$ *"5 es impar"*, $|p| = 1$ (es verdadera)
- $q =$ *"6 es impar"*, $|q| = 0$ (es falsa)
- $r =$ *"2 es par"*, $|r| = 1$ (es verdadera)
- $s =$ *"3 es par"*, $|s| = 0$ (es falsa)

entonces:

- $p \wedge q =$ *"5 es impar y 6 es impar"* es falsa: $|p \wedge q| = 0$.
- $p \wedge r =$ *"5 es impar y 2 es par"* es verdadera: $|p \wedge r| = 1$.
- $q \wedge s =$ *"6 es impar y 3 es par"* es falsa: $|q \wedge s| = 0$.

Como es una operación binaria, necesitamos 2^2 filas (además de la fila del encabezado) para hacer la tabla de verdad. Y ordenamos las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones p y q:

p	q	$p \wedge q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Si las dos proposiciones son falsas, la compuesta es falsa:

[4]Recuerda que cuando p es una proposición lógica, a veces se usan las barras verticales para el valor de verdad de la proposición lógica. En ese caso, $|p|$ **no** es el valor absoluto.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

Si la primera es falsa y la segunda es verdadera, la compuesta es falsa:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	
1	1	

Si la primera es verdadera y la segunda es falsa, la compuesta es falsa:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	

Y si las dos son verdaderas, la compuesta es verdadera:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Con lo que la tabla de verdad queda completa.

Si usamos 1 para verdadero y 0 para falso, es evidente que el valor de la conjunción equivale a multiplicar los valores de verdad de las proposiciones:

$$|p \wedge q| = |p| \cdot |q|$$

4. Deduce la tabla de verdad del operador lógico de disyunción inclusiva.

La operación lógica de **disyunción inclusiva** (que normalmente se llama *disyunción*) entre dos proposiciones lógicas p y q es una operación lógica binaria que se representa como $p \vee q$. Y la proposición compuesta resultante es verdadera solamente si alguna de las proposiciones es verdadera.

Por ejemplo, si:

- $p =$ *“5 es impar”*, $|p| = 1$ (es verdadera)
- $q =$ *“6 es impar”*, $|q| = 0$ (es falsa)
- $r =$ *“2 es par”*, $|r| = 1$ (es verdadera)

- $s =$ *"3 es par"*, $|s| = 0$ (es falsa)

entonces:

- $p \vee q =$ *"5 es impar o 6 es impar"* es verdadera: $|p \vee q| = 1$.
- $p \vee r =$ *"5 es impar o 2 es par"* es verdadera: $|p \vee r| = 1$.
- $q \vee s =$ *"6 es impar o 3 es par"* es falsa: $|q \vee s| = 0$.

Como es una operación binaria, necesitamos 2^2 filas (además de la fila del encabezado) para hacer la tabla de verdad. Y ordenamos las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones p y q:

p	q	$p \vee q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Si las dos proposiciones son falsas, la compuesta es falsa:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

Si la primera es falsa y la segunda es verdadera, la compuesta es verdadera:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	1
1	0	
1	1	

Si la primera es verdadera y la segunda es falsa, la compuesta es verdadera:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	

Y si las dos son verdaderas, la compuesta es verdadera:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Con lo que la tabla de verdad queda completa.

Si usamos 1 para verdadero y 0 para falso, el valor de verdad se puede calcular aritméticamente así:

$$|p \vee q| = |p| + |q| - |p| \cdot |q|$$

5. Escribe la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

La proposición compuesta está formada por dos proposiciones p y q, por lo que la tabla de verdad va a necesitar 2^2 filas (además de la fila del encabezado). Además, necesitamos

- dos columnas para p y q
- dos columnas para sus negaciones $\neg p$ y $\neg q$
- una columna para el primer paréntesis $p \vee \neg q$
- una columna para el segundo paréntesis $\neg p \wedge q$
- una columna para la proposición compuesta

Por lo tanto, si llamamos r a la proposición compuesta:

$$r = (p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

empezamos a rellenar la tabla de verdad así:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Como la negación es simplemente cambiar 1 por 0 y 0 por 1:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1			
0	1	1	0			
1	0	0	1			
1	1	0	0			

Para rellenar la siguiente columna, debemos observar la primera y la cuarta. Y, como es la disyunción, será verdadera (1) si alguna de las dos lo es:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1	1		
0	1	1	0	0		
1	0	0	1	1		
1	1	0	0	1		

Para la siguiente columna, debemos observar la segunda y la tercera. Y, como es una conjunción, será verdadera (1) solamente si las dos lo son[5]:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1	1	0	
0	1	1	0	0	1	
1	0	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	0	

Finalmente, rellenamos la última columna (la de la proposición compuesta cuyo valor de verdad buscamos) observando la quinta columna y la sexta columna. Como es una disyunción inclusiva, será verdadera cuando alguna de las dos lo es:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Como la proposición compuesta es **siempre verdadera** independientemente del valor de las proposiciones p y q, la proposición compuesta es una **tautología**.

$$r \equiv \top$$

6. Escribe la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$$

Este ejercicio es idéntico al anterior en todos los pasos, excepto en uno. Solamente cambia la última columna de la tabla de verdad; tenemos una conjunción lógica (*"y"*):

$$r = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$$

Entonces la última columna será cierta solamente si las dos anteriores (la quinta y la sexta) lo son:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Como la proposición compuesta es **siempre falsa** independientemente del valor de las proposiciones p y q, la proposición compuesta es una **contradicción** (o *antilogía*):

[5] Es decir, su valor equivale a multiplicar los valores de verdad.

$$r \equiv \bot$$

7. Escribe la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$$

Este ejercicio es idéntico a los dos anteriores en todos los pasos, excepto en el último. En la última columna de la tabla de verdad ahora hay un **condicional** (*"entonces"*), una **implicación**:

$$r = (p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$$

donde:

- $p \vee \neg q$ es el antecedente
- $\neg p \wedge q$ es el consecuente

Entonces la última columna será falsa (0) solamente si el antecedente (quinta columna) es verdadera y el consecuente (sexta columna) es falsa:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	r
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Como la proposición compuesta a veces es verdadera y a veces es falsa, decimos que es una **indeterminación**.

8. Demuestra las leyes de De Morgan.

El enunciado planteado así es ambiguo; hay leyes de De Morgan en lógica y en teoría de conjuntos. (Incluso en probabilidad podemos hablar de leyes de De Morgan.)

Aquí vamos a suponer que se trata de las leyes de De Morgan de la lógica:

- *«La negación de la conjunción es la disyunción de las negaciones.»*

  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

- *«La negación de la disyunción es la conjunción de las negaciones.»*

  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Para que sean ciertas, deben ser tautologías. Por lo tanto, podemos hacer una tabla de verdad para comprobar si esto es así.

Empezamos por la primera:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	...
0	0	1	1	0	1	...
0	1	1	0	0	1	...
1	0	0	1	0	1	...
1	1	0	0	1	0	...

...	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
...	1	1
...	1	1
...	1	1
...	0	1

Por lo tanto, esa proposición compuesta es una tautología, lo que equivale a demostrar esa ley de De Morgan. ■

Ahora hacemos lo mismo con la segunda:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	...
0	0	1	1	1	0	...
0	1	1	0	0	1	...
1	0	0	1	0	1	...
1	1	0	0	0	1	...

...	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
...	1	1
...	0	1
...	0	1
...	0	1

Por lo tanto, esa proposición compuesta es una tautología, lo que equivale a demostrar esa ley de De Morgan. ■

9. Demuestra la ley lógica que en latín se llama *modus ponendo ponens* y que es:

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

La demostración se puede hacer a través de una tabla de verdad. La ley lógica será cierta si es una tautología, es decir, si la proposición lógica compuesta es siempre verdadera independientemente de los valores de la verdad de las proposiciones simples.

Como solamente hay dos proposiciones lógicas simples (p y q), necesitamos 2^2 filas (además de la fila del encabezado). Necesitaremos también columnas para:

- p
- q
- $p \Rightarrow q$
- $(p \Rightarrow q) \wedge p$
- $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Por lo tanto:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Ponemos las posibles combinaciones de valores de verdad de las dos proposiciones simples:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

La implicación $(p \Rightarrow q)$ es falsa solamente cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	1		

La conjunción es verdadera cuando las dos proposiciones son verdaderas (cuando los valores de verdad se representan con 0 y 1, basta multiplicar los valores):

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
0	0	1	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	1	1	1	

Nuevamente tenemos una implicación. Ahora debemos ser cuidadosos con cuál es la primera proposición (es la cuarta columna) y cuál es la segunda proposición (es la segunda columna):

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Siempre es verdadera. Por lo tanto es una tautología ($\top$). **QED.** (*Quod Erat Demonstrandum.*)

10. Sea la proposición lógica *"si una función es derivable, entonces es continua"*. Encuentra su proposición recíproca, su contraria y su contrarrecíproca.

Tenemos dos proposiciones simples:

- $p =$ *"la función es derivable"*
- $q =$ *"la función es continua"*

que forman una proposición compuesta condicional:

- $p \Rightarrow q =$ *"si una función es derivable, entonces la función es continua"*

Las proposiciones que piden son:

- **Proposición recíproca**:

  $q \Rightarrow p =$ *"si una función es continua, entonces la función es derivable"*

- **Proposición contraria**:

  $\neg p \Rightarrow \neg q =$ *"si una función no es derivable, entonces no es continua"*

- **Proposición contrarrecíproca**:

  $\neg q \Rightarrow \neg p =$ *"si una función no es continua, entonces no es derivable"*

Recuerda que decir que las definiciones informales de *función continua* y de *función derivable* son:

- una función es continua si puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel
- una función es derivable si su curva es suave, si la gráfica no tiene picos

En este caso, la primera proposición es verdadera:

$|p \Rightarrow q| = |$*"si una función es derivable, entonces la función es continua"*$| = 1$

Pero su recíproca es falsa:

$|q \Rightarrow p| = |$*"si una función es continua, entonces la función es derivable"*$| = 0$

La función valor absoluto, por ejemplo, es continua en todos los reales. Pero no es derivable en $x = 0$ porque tiene un pico. No es *suave* en ese punto.

Ese mismo ejemplo nos sirve para comprobar que la proposición contraria es falsa:

$|\neg p \Rightarrow \neg q| = |$*"si una función no es derivable, entonces no es continua"*$| = 0$

Y la contrarrecíproca es verdadera:

$|\neg q \Rightarrow \neg p| = |$*"si una función no es continua, entonces no es derivable"*$| = 1$

11. Sea la proposición lógica *"si n es divisible entre 2 y entre 3, entonces n es divisible entre 6"*. Encuentra:

a) su recíproca
b) su contraria
c) su contrarrecíproca.
d) los valores de verdad

La proposición compuesta:

"si n es divisible entre 2 y entre 3, entonces n es divisible entre 6"

también se puede escribir:

$$(2|n \wedge 3|n) \Rightarrow 6|n$$

Si definimos:

- $p \equiv 2|n$
- $q \equiv 3|n$
- $r \equiv 6|n$

entonces podemos escribirla también:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

a) La **recíproca** es:

$$r \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$6|n \Rightarrow (2|n \wedge 3|n)$$

es decir:

"si n es divisible entre 6, entonces es divisible entre 2 y entre 3"

b) La **contraria** es:

$$\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$$

Por las leyes de De Morgan:

$$(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$$

$$(2 \nmid n \vee 3 \nmid n) \Rightarrow 6 \nmid n$$

es decir:

"si n no es divisible entre 2 o 3, entonces no es divisible entre 6"

c) La **contrarrecíproca**:

$$\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)$$

Por las leyes de De Morgan:

$$\neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$6 \nmid n \Rightarrow (2 \nmid n \vee 3 \nmid n)$$

es decir:

"si n no es divisible entre 6, entonces no es divisible entre 2 o 3"

d) En este caso, las cuatro proposiciones son ciertas.

De hecho, podemos escribir un doble condicional:

$$(2|n \wedge 3|n) \iff 6|n$$

O, lo que es lo mismo, la equivalencia:

$$(2|n \wedge 3|n) \equiv 6|n$$

12. Sean las proposiciones lógicas $p =$ *"hay menos de tres meses anteriores en el mismo año"* y $q =$ *"uno de los dos siguientes meses es abril"*, encuentra qué meses del año son verdaderas las proposiciones lógicas:
a) $p \wedge q$
b) $p \vee q$
c) $(\neg p) \wedge q$

En febrero, por ejemplo, la proposición p es verdadera; solamente hay un mes anterior en el mismo año. En diciembre, por ejemplo, la proposición p es falsa; hay más de tres meses anteriores a ese mes el mismo año.

Podemos hacer una tabla para los meses del año y las proposiciones lógicas. Sin embargo, basta observar que p y q son siempre falsas para los meses entre abril y diciembre (ambos incluidos), por lo que la tabla puede abreviarse.

La tabla resultante es:

Mes	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$
enero	1	0	0	1	0	0
febrero	1	1	1	1	0	0
marzo	1	1	1	1	0	0
otros	0	0	0	0	1	0

Por lo tanto:

a) $p \wedge q$ es verdadero solamente en febrero y marzo.
b) $p \vee q$ es verdadero solamente en enero, febrero y marzo.
c) $(\neg p) \wedge q$ no es verdadero ningún mes.

13. Explica las siguientes proposiciones verbalmente e indica su valor de verdad:
a)
$$\exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q}$$
b)
$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N}$$
c)
$$\forall a, b \in \mathbb{N}^* : \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$
d)
$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a - b = b - a$$

e)
$$\exists x \in \mathbb{R} - \{0\} : x \cdot y = 0 \forall y \in \mathbb{R}$$

a) *"Existe un número real tal que es un número racional"*

Es verdadera; 1/2, por ejemplo, es un número real y también es racional.

b) *"Para todo par de números naturales, su suma es un número natural"*

Es verdadera. La suma de números naturales siempre es un número natural.

c) *"Para todo par de números naturales distintos de cero, su cociente (= su división) es un número racional"*

Es verdadera. Casi se puede considerar la definición del conjunto de números racionales. No coincide; no incluye el cero.

d) *"Para todo par de números reales, la diferencia es conmutativa"*

Otro modo de decirlo:

"El resultado de la diferencia de cualquier par de números reales no depende del orden"

Esta proposición es, evidentemente, falsa. No es lo mismo 1 - 2 que 2 - 1.

e) *"Existe un número real distinto de cero tal que su producto por cualquier número real es cero"*

Es falsa. El único número real que, multiplicado por cualquier otro, siempre nos da cero, es el cero.

Conjuntos

Un *conjunto* es una colección de cosas llamadas *elementos*. Dar una buena definición de lo que es un conjunto es difícil; normalmente se usan palabras que son sinónimos de *"conjunto"* o que tienen un significado similar.

Muchas veces se considera que la base de las matemáticas modernas no es ni la aritmética, ni la geometría, ni el álgebra. La base de las matemáticas modernas es la **teoría de conjuntos**.

Los conjuntos siguen formando parte de los capítulos restantes: un intervalo es un tipo de conjunto, las soluciones de una ecuación se agrupan en conjuntos, una recta es un conjunto de puntos en el plano o en el espacio, la intersección de una recta y un plano es la intersección de dos conjuntos, una sucesión es un conjunto numerable ordenado, la combinatoria se encarga de calcular el número de elementos que tiene un conjunto…

> **1**. Demuestra las leyes de De Morgan de la teoría de conjuntos usando diagramas de Venn.

Las leyes de De Morgan de la **lógica proposicional** son:

1. $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$

   Es decir: *«la negación de la conjunción es la disyunción de las negaciones.»*

2. $\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$

   Es decir: *«la negación de la disyunción es la conjunción de las negaciones.»*

Y las de la teoría de conjuntos:

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

   Es decir: *«el complementario de la unión es la intersección de los complementarios.»*

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

   Es decir: *«el complementario de la intersección es la unión de los complementarios.»*

Ambas leyes se pueden demostrar usando las definiciones de complementario, intersección y unión de conjuntos. Pero quizás el modo más satisfactorio visualmente es usando diagramas de Venn.

Comprueba que es así en las figuras correspondientes.

> **2**. Demuestra que las leyes de De Morgan se cumplen para los conjuntos:
> - $A = \{$uno, unu, one, jeden $\}$
> - $B = \{$uno, 1, I$\}$
> - $U = \{$uno, unu, one, jeden, 1, I, dos, du, tri$\}$

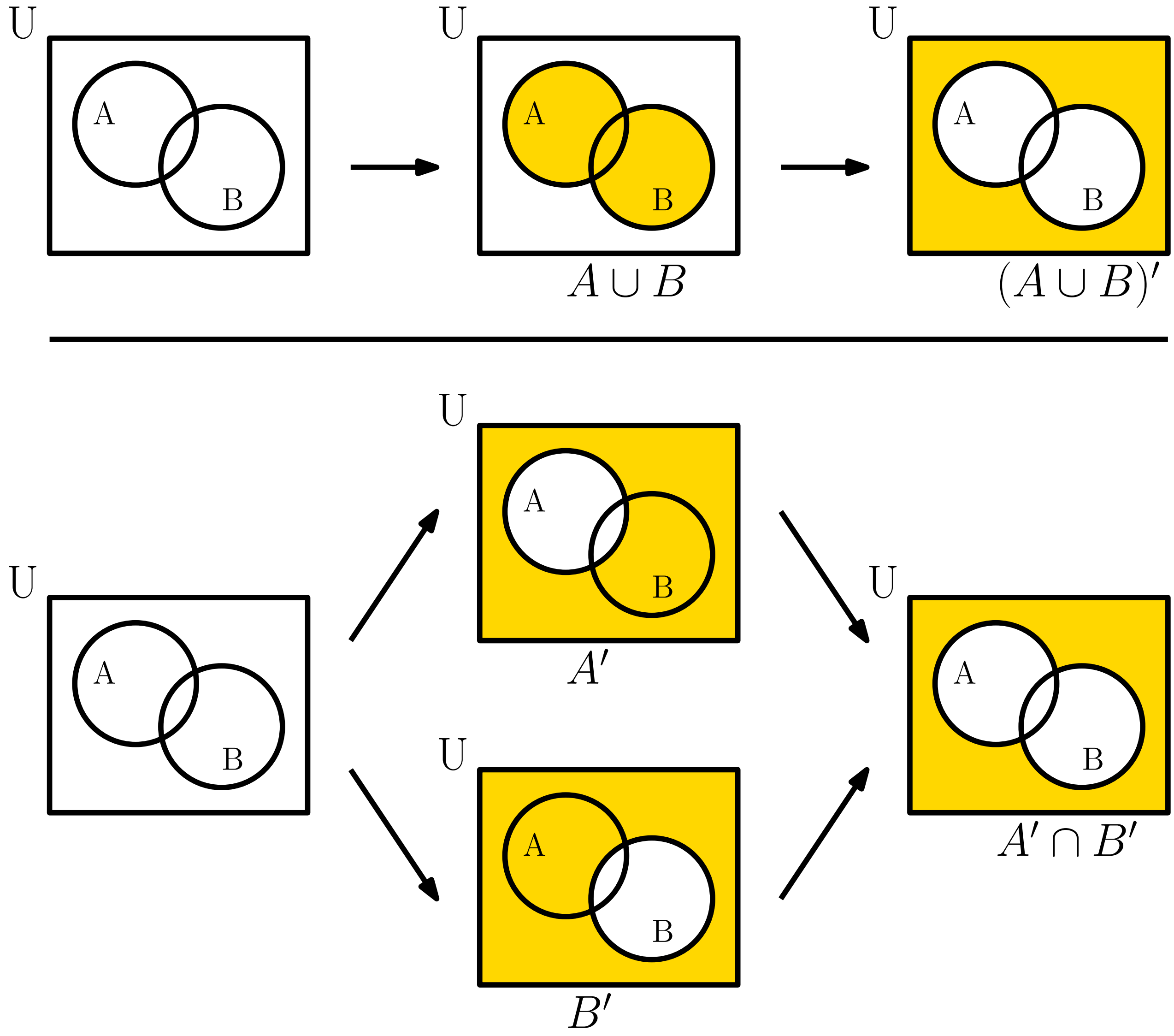


Figura 2: Demostración visual de la primera ley de De Morgan.

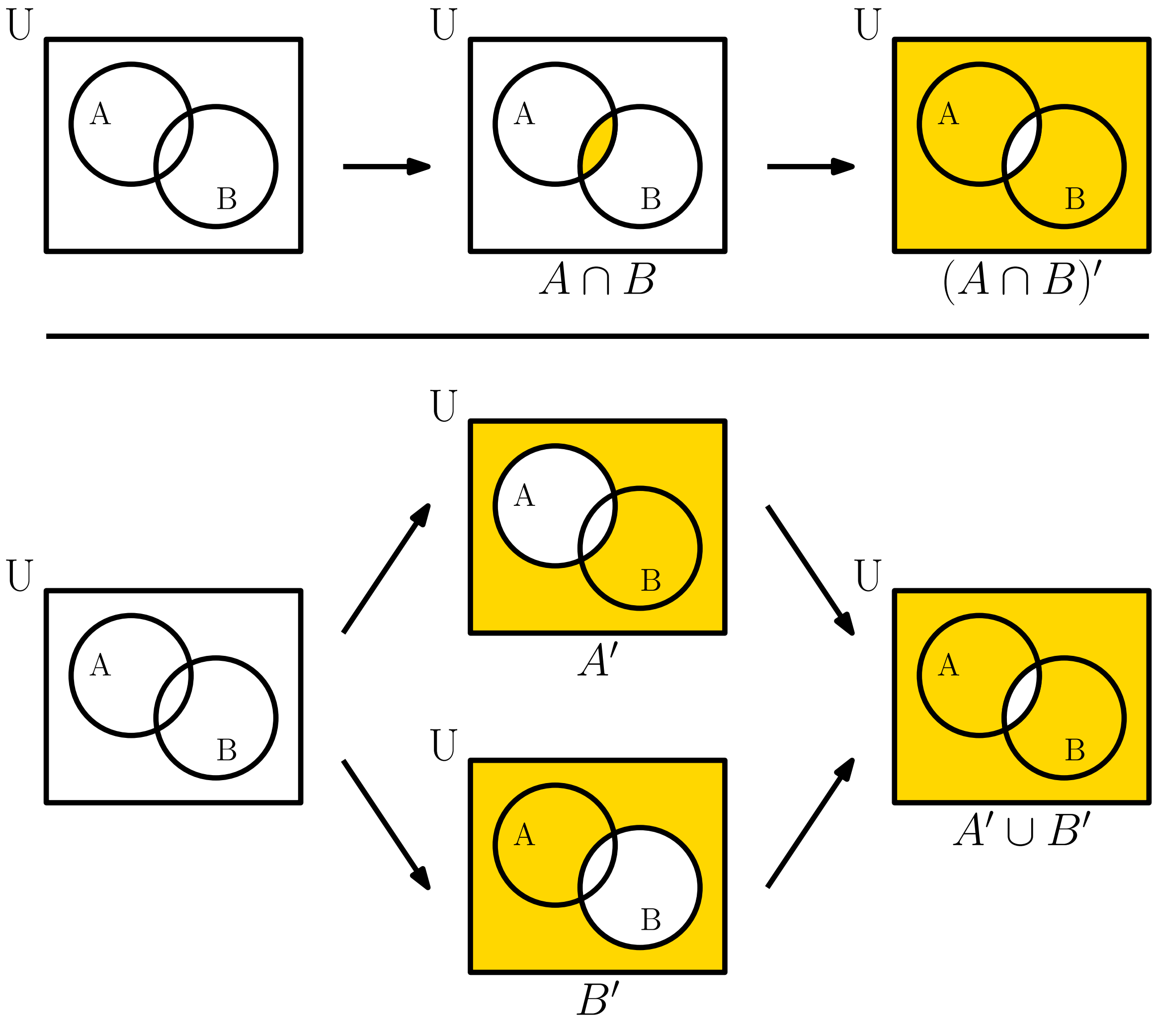


Figura 3: Demostración visual de la segunda ley de De Morgan.

donde U es el conjunto universal.

La primera ley de De Morgan de la teoría de conjuntos dice:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Es decir: *«el complementario de la unión es la intersección de los complementarios.»*

Para comprobar que se cumple, calcularemos el lado izquierdo primero, después el lado derecho y veremos que ambos son iguales.

La unión de A y B es:

$$A \cup B = \{uno, unu, one, jeden, 1, I\}$$

El complementario de la unión que está formado por los que no pertenecen ni a A ni a B es, por lo tanto:

$$(A \cup B)' = \{dos, du, tri\}$$

El complementario de A es:

$$A' = \{1, I, dos, du, tri\}$$

y el complementario de B es:

$$B' = \{unu, one, jeden, dos, du, tri\}$$

y la intersección de ambos es, por lo tanto:

$$A' \cap B' = \{dos, du, tri\}$$

Tal y como queríamos demostrar.

La segunda ley de De Morgan de la teoría de conjuntos dice:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Es decir: *«el complementario de la intersección es la unión de los complementarios.»*

Para encontrar el lado izquierdo, calculamos la intersección de A y B:

$$A \cap B = \{uno\}$$

Y su complementario es:

$$(A \cap B)' = \{unu, one, jeden, 1, I, dos, du, tri\}$$

Los complementarios de A y B son:

$$A' = \{1, I, dos, du, tri\}$$

$$B' = \{unu, one, jeden, dos, du, tri\}$$

y su unión es:

$$A' \cup B' = \{unu, one, jeden, 1, I, dos, du, tri\}$$

Tal y como queríamos demostrar.

3. Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

encuentra $A \times B$, $B \times A$, $|A \times B|$ y $|B \times A|$.

$A \times B$ es el producto cartesiano[6] de los dos conjuntos. Es decir, es un conjunto nuevo formado por todas las parejas posibles de un elemento de A y un elemento de B.

$$\begin{aligned} A \times B \;\; = \;\; & \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma), \\ & (b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma), \\ & (c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma)\} \end{aligned}$$

Cada elemento de $A \times B$ es cada una de las parejas[7]. Por ejemplo, el primer elemento que hemos escrito es (a, α), el segundo elemento es (a, β)...

Por lo tanto, el conjunto $A \times B$ tiene 9 elementos. La cardinalidad de ese conjunto es 9:

$$|A \times B| = 9$$

El conjunto $B \times A$ es distinto; el orden de las parejas es importante:

$$\begin{aligned} B \times A \;\; = \;\; & \{(\alpha,a),(\alpha,b),(\alpha,c), \\ & (\beta,a),(\beta,b),(\beta,c), \\ & (\gamma,a),(\gamma,b),(\gamma,c)\} \end{aligned}$$

y su cardinalidad también es 9:

$$|B \times A| = 9$$

Podíamos saber la cardinalidad de los productos cartesianos sin escribir explícitamente todos los elementos porque:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A \times B| = 3 \cdot 3$$

$$|A \times B| = 9$$

4. Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e, \aleph\}$$

$$B = \{\alpha, a, 1, \aleph, \heartsuit\}$$

$$C = \{\alpha, \beta, a, b, 1, 2, 3\}$$

dibuja un diagrama de Venn con los tres conjuntos y sus elementos.

[6]En honor a René Descartes, que escribía su nombre en latín como Renatus Cartesius.
[7]También se pueden llamar *duplas*.

Es sencillo realizar un diagrama de Venn para tres conjuntos que tenga en cuenta todas las posibilidades[8]: solamente tenemos que hacer varias circunferencias del mismo tamaño que tengan intersección entre ellas.

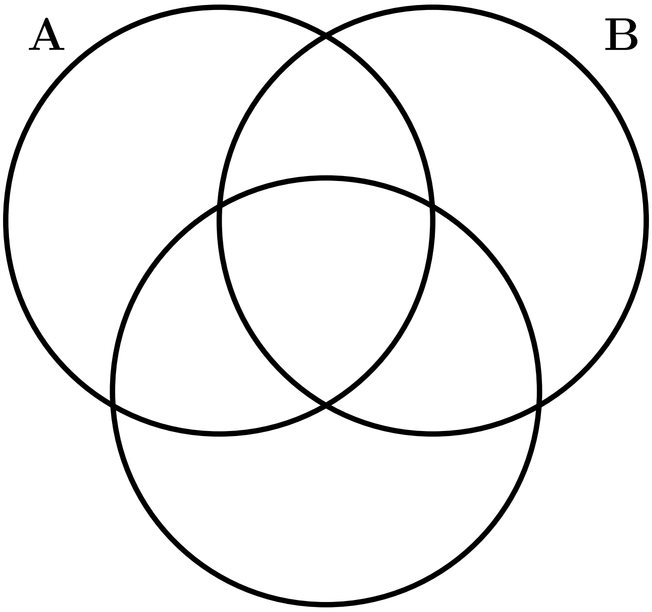


Figura 4: En un diagrama de Venn de 3 conjuntos es posible representar cada conjunto por un círculo del mismo tamaño. Es diagrama de Venn *mudo* porque no aparecen los elementos de los tres conjuntos, solamente los nombres. El diagrama es *mudo* porque *no habla*.

Las líneas del diagrama separan los tres conjuntos en 7 partes, en 7 áreas. Para poder saber qué elementos están en cada una de esas áreas, tenemos que calcularlo:

- La intersección de los tres conjuntos:

  $A \cap B \cap C = \{a\}$

- La intersección de A y B menos C

  $(A \cap B) - C = \{\aleph\}$

- La intersección de B y C menos A

  $(B \cap C) - A = \{1, \alpha\}$

- La intersección de C y A menos B

  $(C \cap A) - B = \{b\}$

- A menos B y menos C

  $A - B - C = \{c, d, e\}$

- B menos A y menos C

  $B - A - C = \{\heartsuit\}$

- C menos B y menos A

[8] No es tan sencillo hacer un diagrama de Venn para cuatro conjuntos que tenga en cuenta todas las posibilidades

$C - B - A = \{\beta, 2, 3\}$

Ahora ya se puede completar el diagrama de Venn.

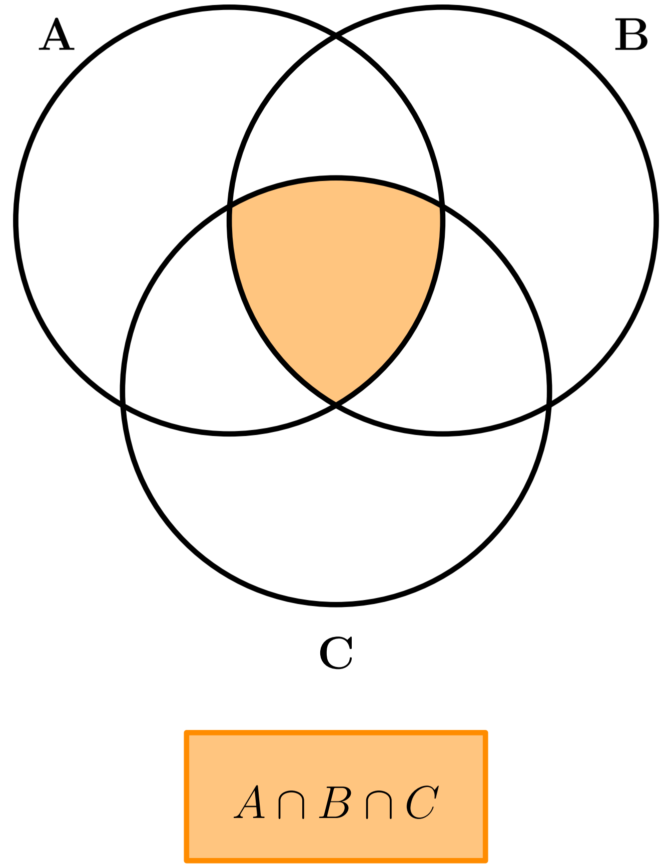


Figura 5: Diagrama de Venn: $A \cap B \cap C$.

5. Sea el conjunto $A = \{a, \alpha, \aleph\}$. Escribe:
a) el conjunto potencia de A
b) el conjunto de las partes de A
c) dos particiones distintas de A
d) la cardinalidad del conjunto potencia de A

a) El conjunto potencia de A es el conjunto de todos sus subconjuntos posibles.

Hay un subconjunto con 0 elementos: el conjunto vacío $\{\} = \varnothing = \emptyset$.

Hay tres subconjuntos con 1 elemento: $\{a\}$, $\{\alpha\}$ y $\{\aleph\}$.

Hay tres subconjuntos con 2 elementos: $\{a, \alpha\}$, $\{a, \aleph\}$, $\{\alpha, \aleph\}$.

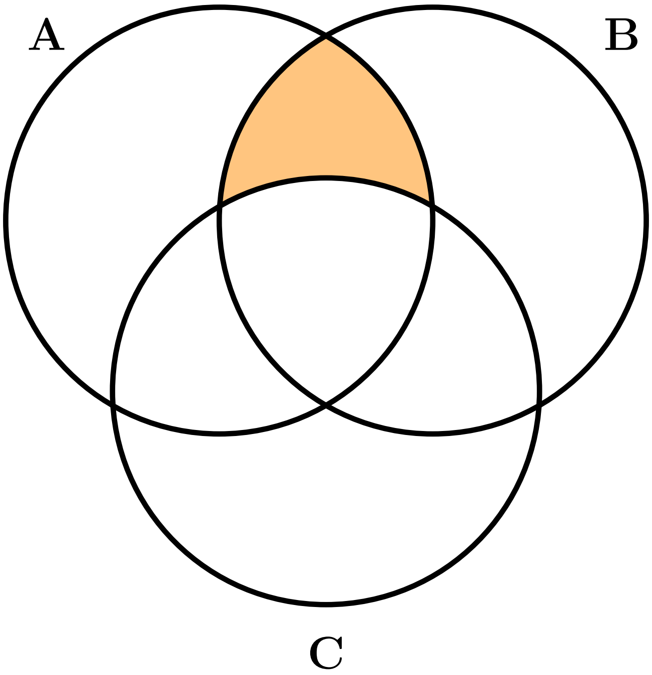
Solamente hay un subconjunto con 3 elementos: el propio conjunto A.

Por lo tanto, el conjunto potencia de A es:

$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{\alpha\},\ \{\aleph\},\ \{a, \alpha\},\ \{a, \aleph\},\ \{\alpha, \aleph\},\ A\}$

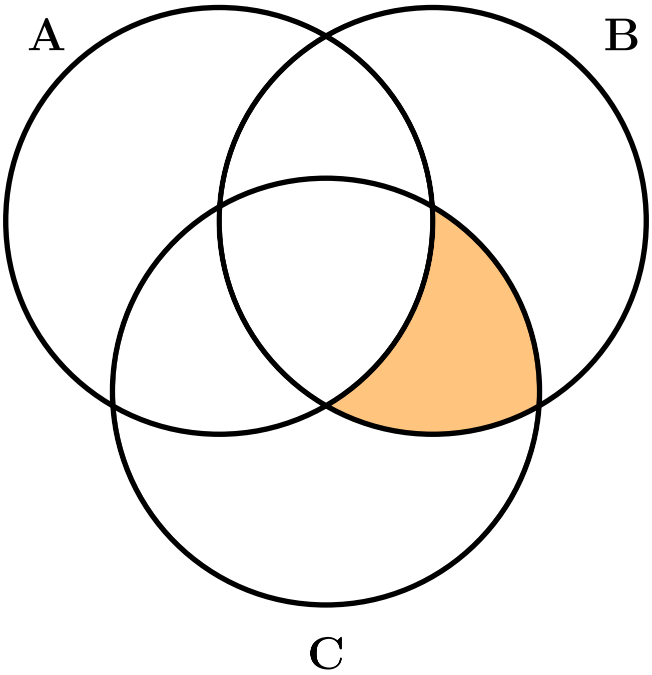
b) El conjunto de las partes de A es el conjunto potencia de A. Es decir, nos preguntan lo mismo que en el apartado anterior.

c) Una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A que cumplen tres condiciones: 1) no son subconjuntos impropios (es decir, no son el conjunto vacío o el propio conjunto), 2)



$$\boxed{(A \cap B) - C}$$

Figura 6: Diagrama de Venn: $(A \cap B) - C$.



$$\boxed{(B \cap C) - A}$$

Figura 7: Diagrama de Venn: $(B \cap C) - A$.

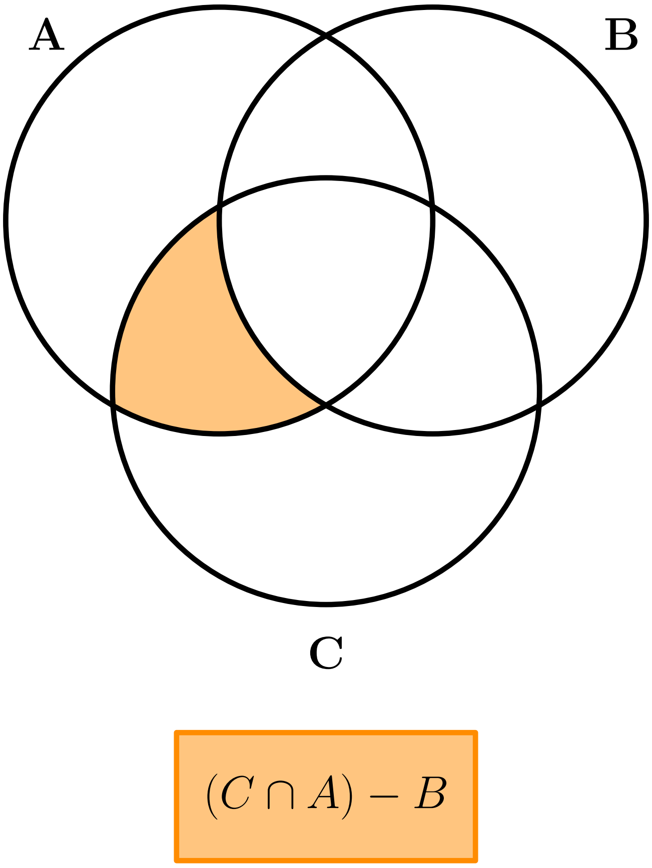


Figura 8: Diagrama de Venn: $(C \cap A) - B$.

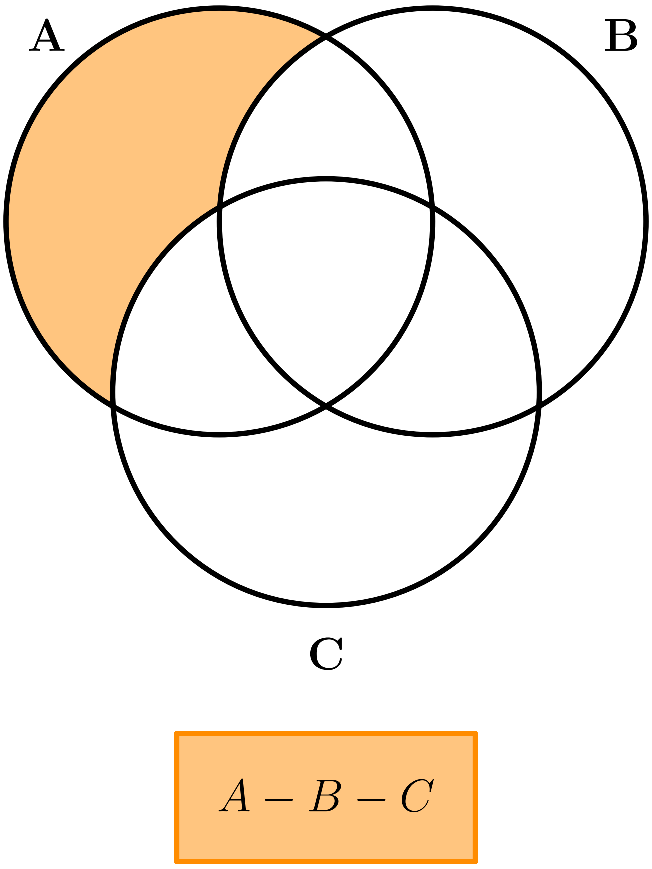


Figura 9: Diagrama de Venn: $A - B - C$.

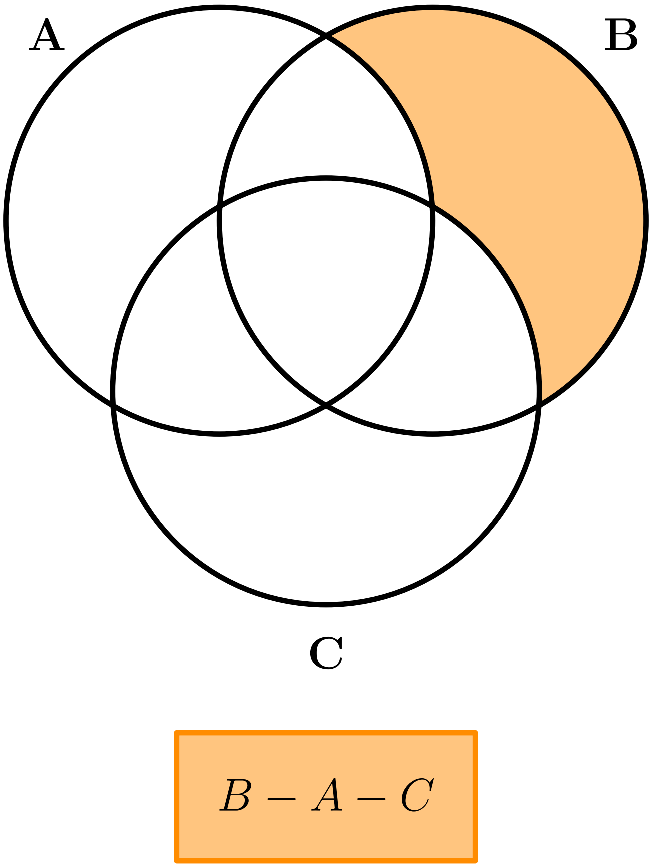


Figura 10: Diagrama de Venn: $B - C - A$.

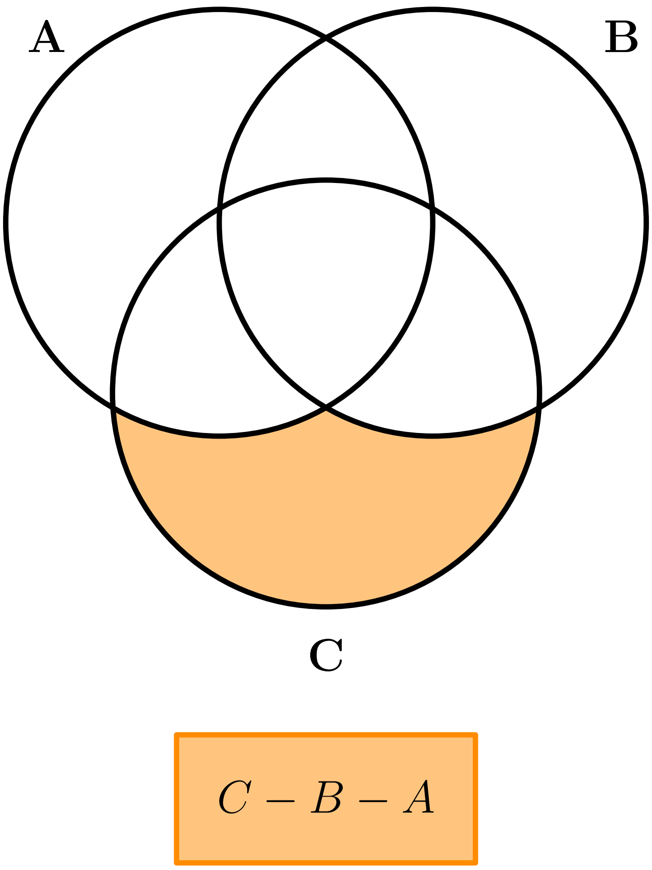


Figura 11: Diagrama de Venn: $C - B - A$.

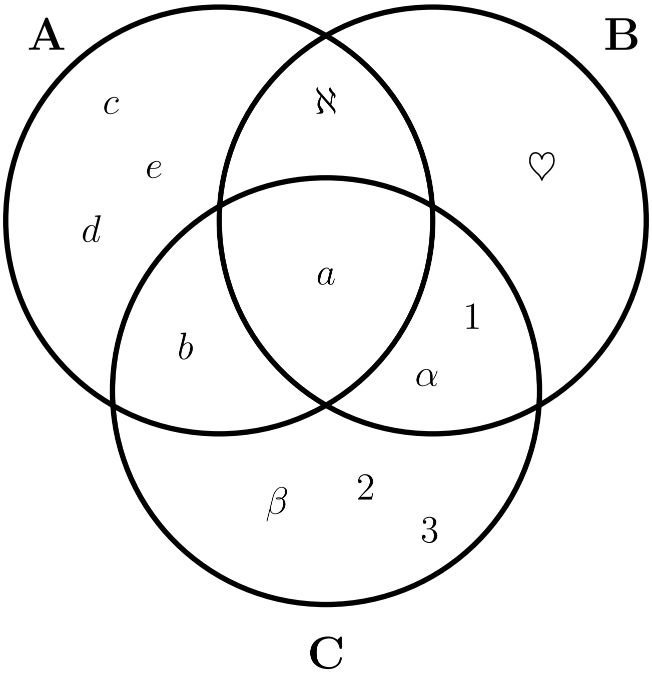


Figura 12: Diagrama de Venn final de los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, \aleph\}$, $B = \{\alpha, a, 1, \aleph, \heartsuit\}$ y $C = \{\alpha, \beta, a, b, 1, 2, 3\}$.

son disjuntos entre si (es decir, no tienen elementos comunes) y 3) la unión de todos ellos es igual al conjunto.

Una partición de A puede ser:

$\{\alpha\}$, $\{\aleph\}$, $\{a\}$

Otra partición de A puede ser:

$\{\alpha, \aleph\}$, $\{a\}$

Otra partición de A puede ser:

$\{\alpha\}, \{\aleph, a\}$

d) La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos que tiene ese conjunto.

El conjunto potencia de A es:

$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{\alpha\},\ \{\aleph\},\ \{a, \alpha\},\ \{a, \aleph\},\ \{\alpha, \aleph\},\ A\}$

y sus elementos son conjuntos. El primer elemento es el conjunto vacío, el segundo elemento es el conjunto que solamente contiene a a, el tercer elemento es el conjunto que sólo contiene a α, el cuarto elemento es el conjunto que sólo contiene a $\aleph$, el quinto elemento es el conjunto que sólo contiene a a y α...

La cardinalidad, por lo tanto, es:

$$|\mathcal{P}(A)| = 8$$

que también se puede escribir:

$$\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 8$$

No era necesario escribir el conjunto potencia; para cualquier conjunto B se cumple:

$$|\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|}$$

en nuestro caso:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

6. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Encuentra su conjunto potencia.

El conjunto potencia de A es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Y su cardinalidad es:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Como A tiene 4 elementos:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^4 = 16$$

Ahora que sabemos cuántos elementos tiene, podemos estar más seguros de listarlos bien.

- Con 0 elementos tenemos 1 subconjunto:

$$\varnothing$$

- Con 1 elemento tenemos 4 subconjuntos:

$$\{a\}$$
$$\{b\}$$
$$\{c\}$$
$$\{d\}$$

- Con 2 elementos tenemos 6 subconjuntos:

$$\{a, b\}$$
$$\{a, c\}$$
$$\{a, d\}$$
$$\{b, c\}$$
$$\{b, d\}$$
$$\{c, d\}$$

- Con 3 elementos tenemos 4 subconjuntos:

$$\{a, b, c\}$$
$$\{a, b, d\}$$
$$\{a, c, d\}$$
$$\{b, c, d\}$$

- Con 4 elementos tenemos 1 subconjunto:

$$A$$

En total: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$. Por lo que el conjunto de particiones de A es:

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(A) = \\ = \{\varnothing, \\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ A\}\end{gathered}$$

7. En un conjunto de personas, 30 personas hablan esperanto, 12 hablan klingon, 40 no hablan klingon y 5 personas hablan ambos idiomas. Usando notación de teoría de conjuntos, encuentra el total de personas y el número de personas que no hablan ninguno de los dos idiomas.

Primero definiremos los conjuntos:

- E = hablantes de esperanto
- K = hablantes de klingon
- U = todo el conjunto = el conjunto universal

Nos dicen:

- $|E| = 30$
- $|K| = 12$
- $|\bar{K}| = 40$
- $|E \cap K| = 5$

Como sabemos los que hablan klingon y los que no, podemos obtener el tamaño (= la cardinalidad) del conjunto universal:

$$|U| = |K \cup \bar{K}| = |K| + |\bar{K}| - |K \cap \bar{K}|$$

pero un conjunto y su complementario son disjuntos, por lo que la intersección es el conjunto vacío y la cardinalidad del conjunto vacío es 0:

$$|U| = |K \cup \bar{K}| = |K| + |\bar{K}| =$$

$$= 12 + 40 = 52$$

Como hay 52 personas en total y 30 hablan esperanto:

$$|\bar{E}| = |U| - |E| = 52 - 30 = 22$$

hay 22 que no hablan esperanto.

¿Cuántas personas hablan esperanto o klingon?

$$|E \cup K| = |E| + |K| - |E \cap K| =$$
$$= 30 + 12 - 5 = 37$$

¿Cuántos no hablan ni esperanto ni klingon?

$$|\overline{E \cup K}| = |\bar{E} \cap \bar{K}| =$$
$$= |U| - |E \cup K| = 52 - 37 = 15$$

8. ¿Cuántos conjuntos aparecen en la operación de **complementario** de un conjunto?

En principio, la operación **complementario** de un conjunto parece involucrar solamente un conjunto. Es decir, parece una operación *unaria*.

La operación se representa de varias maneras:

$$\bar{A} = A^c = A'$$

Pero en el momento en el que recurrimos a un conjunto de ejemplo:

$$A = \{a, e, i\}$$

si preguntamos por su complementario, vemos que la respuesta no es única. La respuesta depende del conjunto universal U que consideremos. Por ejemplo:

- Si el conjunto universal U es el de las vocales del español, el complementario de A es:

$$\bar{A} = \{o, u\}$$

- Si el conjunto universal U es el de las letras del alfabeto español entre la a y la i, el complementario de A es:

$$\bar{A} = \{b, c, d, f, g, h\}$$

- Si el conjunto universal U es el de las letras del alfabeto del esperanto entre la a y la i, el complementario de A es:

$$\bar{A} = \{b, \hat{c}, d, f, g, \hat{g}, h, \hat{h}\}$$

Solamente hemos puesto tres ejemplos, pero podrían ser muchos más.

Por lo tanto, solamente usamos el complementario cuando no hay ambigüedad y se sabe cuál es el conjunto universal. En caso contrario, escribimos una diferencia, que se puede escribir con un menos:

$$\bar{A} = U - A$$

o con una barra inclinada:

$$\bar{A} = U \setminus A$$

9. La diferencia simétrica de los conjuntos A y B se escribe:

$$A \bigtriangleup B$$

y se define como el conjunto de todos los elementos que o están en A o están B, pero no en ambos. Es decir, los elementos que pertenecen solamente a uno de los conjuntos, no a los dos a la vez.

a) Escribe la operación usando las operaciones básicas de la teoría de conjuntos.
b) ¿Es conmutativa?

Por ejemplo, si los conjuntos A y B son:

$$A = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$$
$$B = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$$

la diferencia simétrica entre ambos es:

$$A \bigtriangleup B = \{\alpha, \beta, \gamma, 1, 2, 3\}$$

Es fácil ver que equivale a la unión menos la intersección (o, lo que es lo mismo, el complementario de la intersección respecto a la unión):

$$A \bigtriangleup B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Si cambiamos el orden de los conjuntos:

$$B \bigtriangleup A = (B \cup A) - (B \cap A) =$$

pero la unión es conmutativa:

$$= (A \cup B) - (B \cap A) =$$

y la intersección también:

$$= (A \cup B) - (A \cap B) =$$

por lo tanto:

$$= A \triangle B$$

Es decir:

a)
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

b) La diferencia simétrica es conmutativa.

Números

En eslovaco, este tema se llama *“teória čísel”*. Es decir, se llama *“teoría de números”*.

Sin embargo, en español y otros idiomas, la *“teoría de números”* básica se centra más en la parte de las matemáticas discretas que estudia principalmente los números naturales (0, 1, 2, 3…): criterios de divisibilidad, números primos y compuestos… Y este tema incluye cosas que no son el corazón de la *“teoría de números”*: los números racionales, los números reales, aproximaciones de números, la recta real, intervalos…

Subconjuntos de los reales

1. Pon ejemplos de números que pertenecen a varios subconjuntos de los números reales.

Recordatorio:

- $\mathbb{N}$ = números naturales (nosotros incluimos el cero)
- $\mathbb{Z}$ = números enteros
- $\mathbb{Q}$ = números racionales
- $\mathbb{R}$ = números reales
- $\mathbb{C}$ = números complejos

Además, los irracionales son todos los reales que **no son racionales**:

- $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Ejemplos son:

- $2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $-2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $0.231 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $0.23\overline{1} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $0.2\overline{31} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $0.\overline{231} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $1.101001000\ldots \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\ln(2) \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $e \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\pi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$
- $3 + 2i \in \mathbb{C}$

Demostrar que un número es racional o irracional no es una tarea trivial. Hay números que todavía no sabemos si son racionales o irracionales. Por ejemplo:

- no sabemos si γ, la constante de Euler-Mascheroni[9], es racional o irracional
- no sabemos si $e + \pi$ es racional o irracional
- no sabemos si $e \cdot \pi$ es racional o irracional[10]

2. Dibuja un diagrama de Venn con los subconjuntos de los números reales.

Dibujar un diagrama de Venn de los naturales, los enteros, los racionales y los reales (y opcionalmente de los complejos) no es complicado. Solamente son necesarios varios óvalos (o curvas simples cerradas) unos dentro de otros.

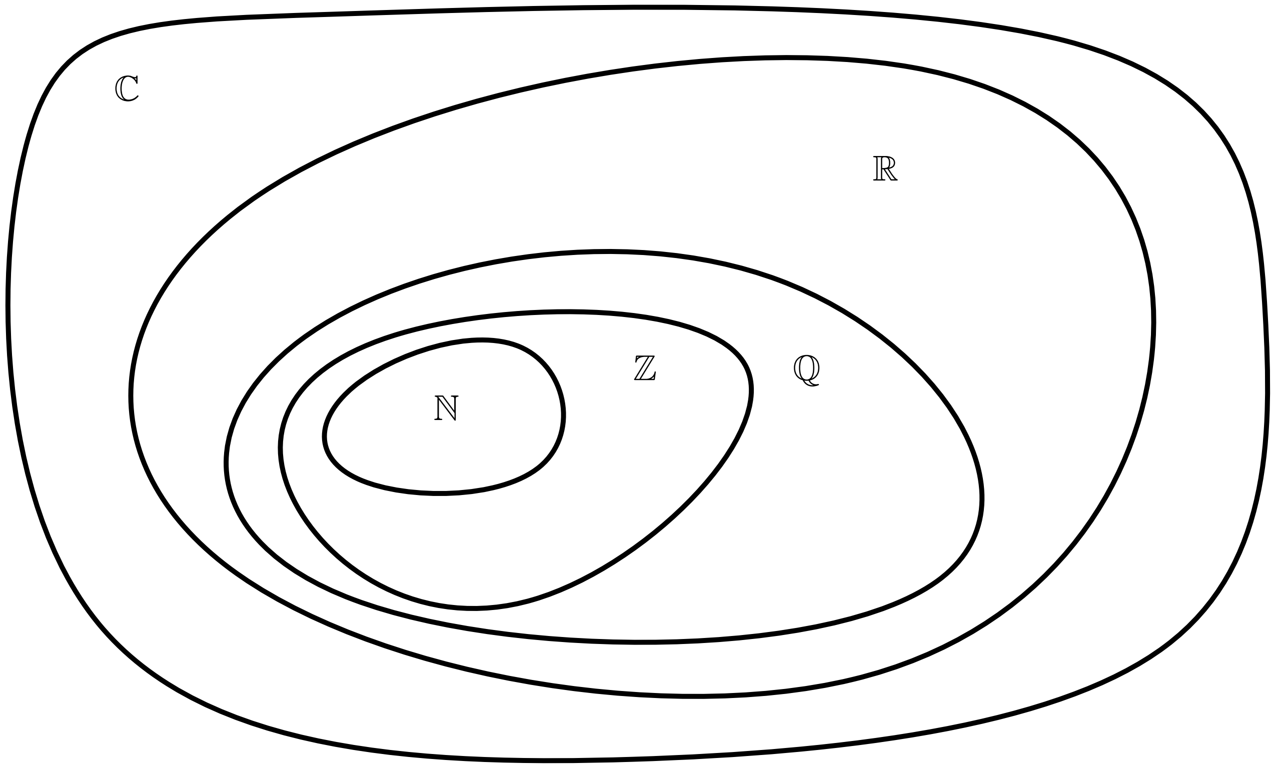


Figura 13: Los números naturales ($\mathbb{N}$), los números enteros ($\mathbb{Z}$), los números racionales ($\mathbb{Q}$), los números reales ($\mathbb{R}$) y los números complejos ($\mathbb{C}$).

Pero hay que dejar claro que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ incluye el 0, el 1, el 2… Todos los números que usamos para contar. Algunos matemáticos no incluyen el 0, nosotros sí lo incluimos.

Los números enteros $\mathbb{Z}$ incluyen todos los naturales y, además, sus opuestos respecto a la suma: el -1, el -2…

Los números racionales $\mathbb{Q}$ incluyen todos los enteros y, además, todas las fracciones: 1/2, 3/2… -1/2, -3/2… 1/3…

Los números reales $\mathbb{R}$ incluyen todos los racionales y, además, todos los irracionales. Dar una definición precisa es complicado. Los irracionales incluyen números como la raíz cuadrada de dos ($\sqrt{2}$), el número pi (π), el número e…

[9] Es aproximadamente igual a 0.57721566.

[10] Sí sabemos que **al menos uno** de los dos números $e + \pi$ o $e \cdot \pi$ **es irracional**.

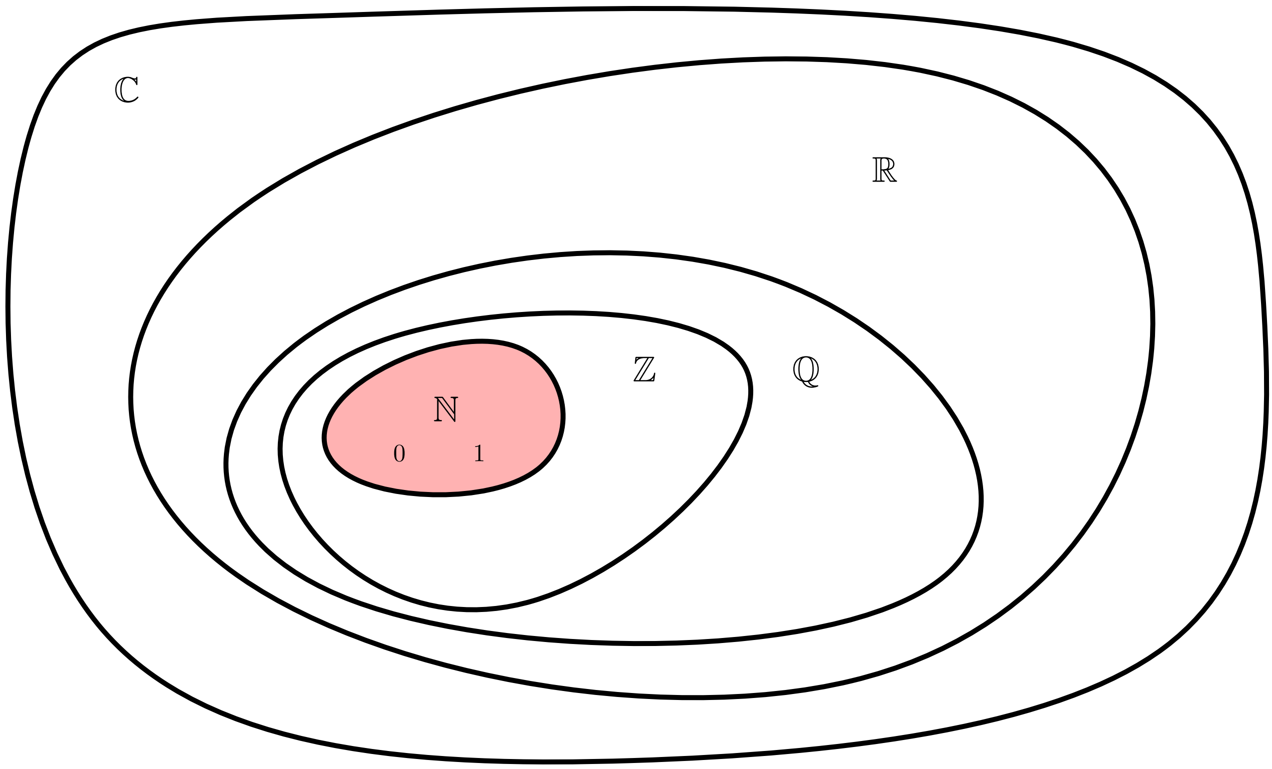


Figura 14: Los números naturales (ℕ).

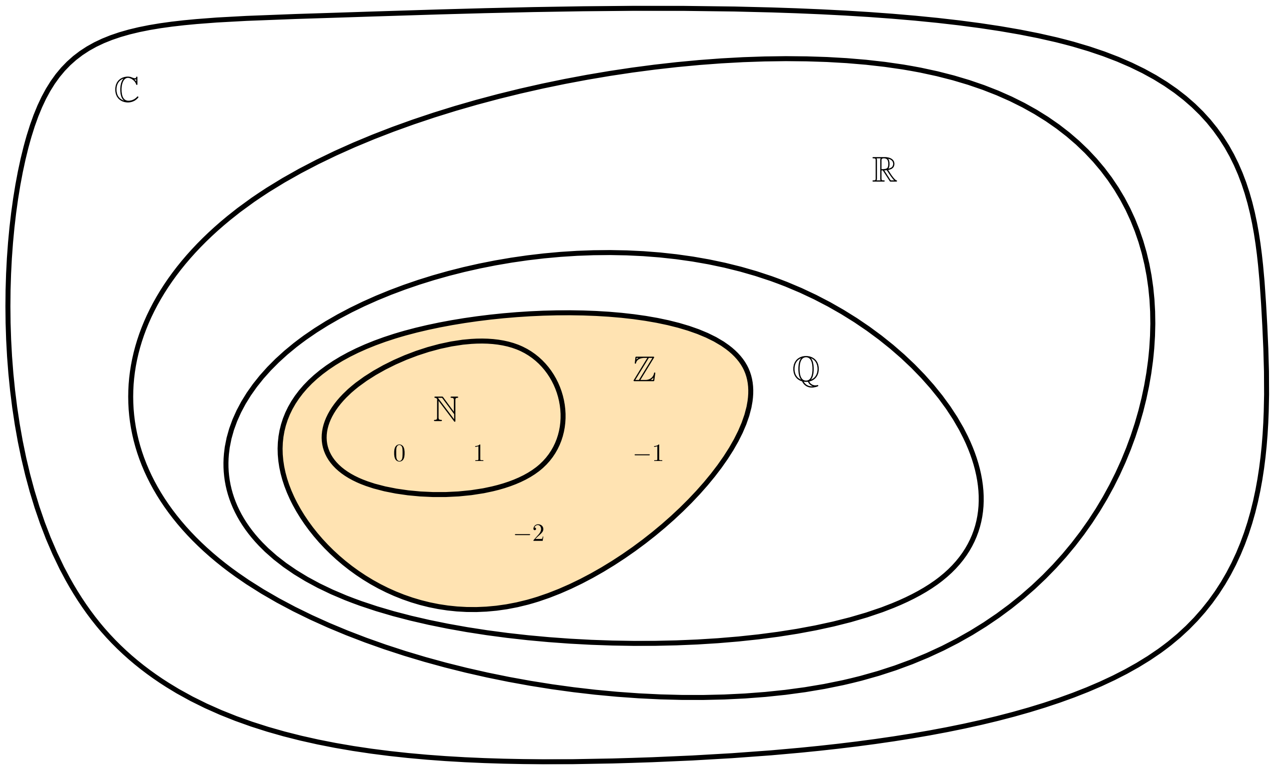


Figura 15: Los números enteros (ℤ) y sus subconjuntos.

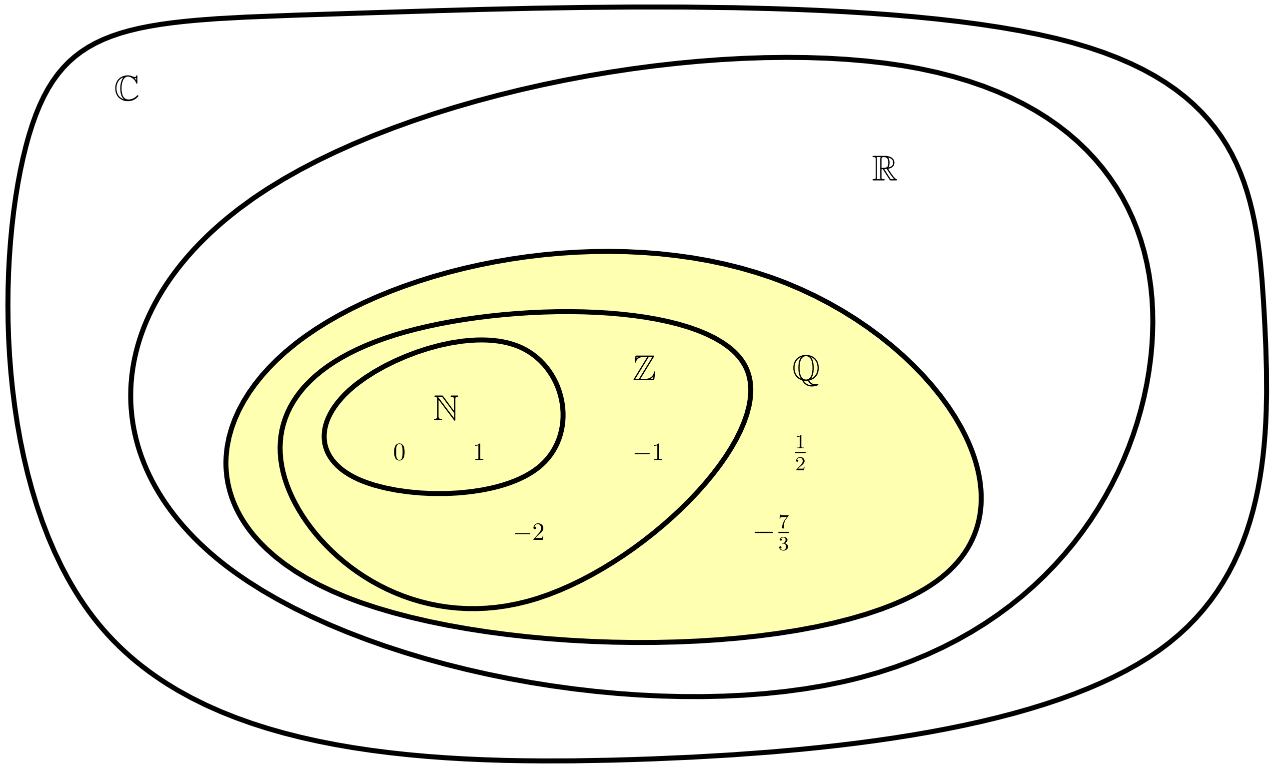


Figura 16: Los números racionales ($\mathbb{Q}$) y sus subconjuntos.

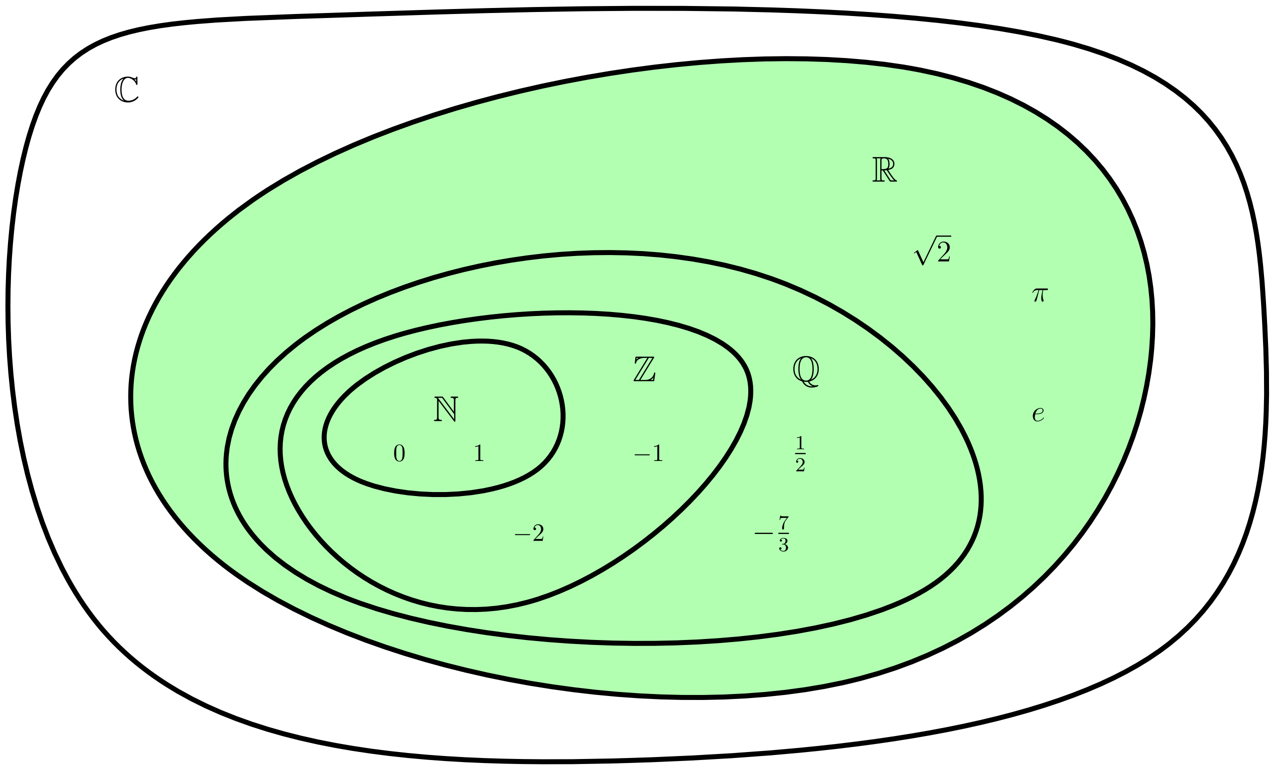


Figura 17: Los números reales ($\mathbb{R}$) y sus subconjuntos.

Los números complejos $\mathbb{C}$ incluyen todos los reales y además, los números que se pueden construir usando la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$: $2i$, $3 - 2i$, $\frac{4}{3} + 5i\ldots$

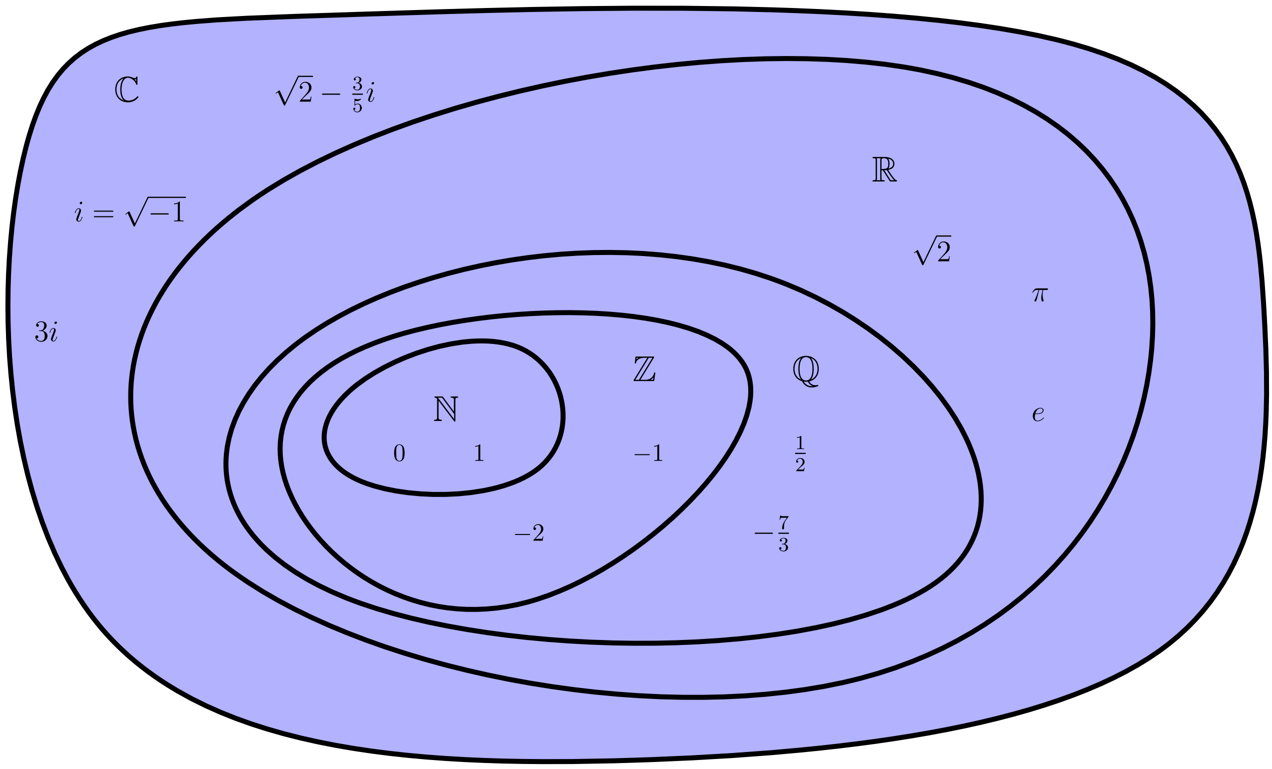


Figura 18: Los números complejos ($\mathbb{C}$) y sus subconjuntos.

Es importante tener en cuenta que el conjunto de los **irracionales** es la diferencia de los reales menos los racionales:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \equiv \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Es decir, los irracionales son todos los reales que **no** son racionales.

3. ¿Existen otros subconjuntos dentro del conjunto de los números reales?

Sí. Por ejemplo:

- los números reales **algebraicos** son los que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros

  Todos los números racionales son algebraicos.

  Algunos números irracionales son algebraicos. Por ejemplo:

  - $\sqrt{2}$ porque es una solución de $x^2 - 2 = 0$
  - $\sqrt[3]{2}$ porque es solución de $x^3 - 2 = 0$
  - $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ porque es solución de $x^2 - x - 1 = 0$

- los números reales **trascendentes** son los que no son solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Es decir, son los números que no son algebraicos.

  Son trascendentes el número e y el número π, por ejemplo.

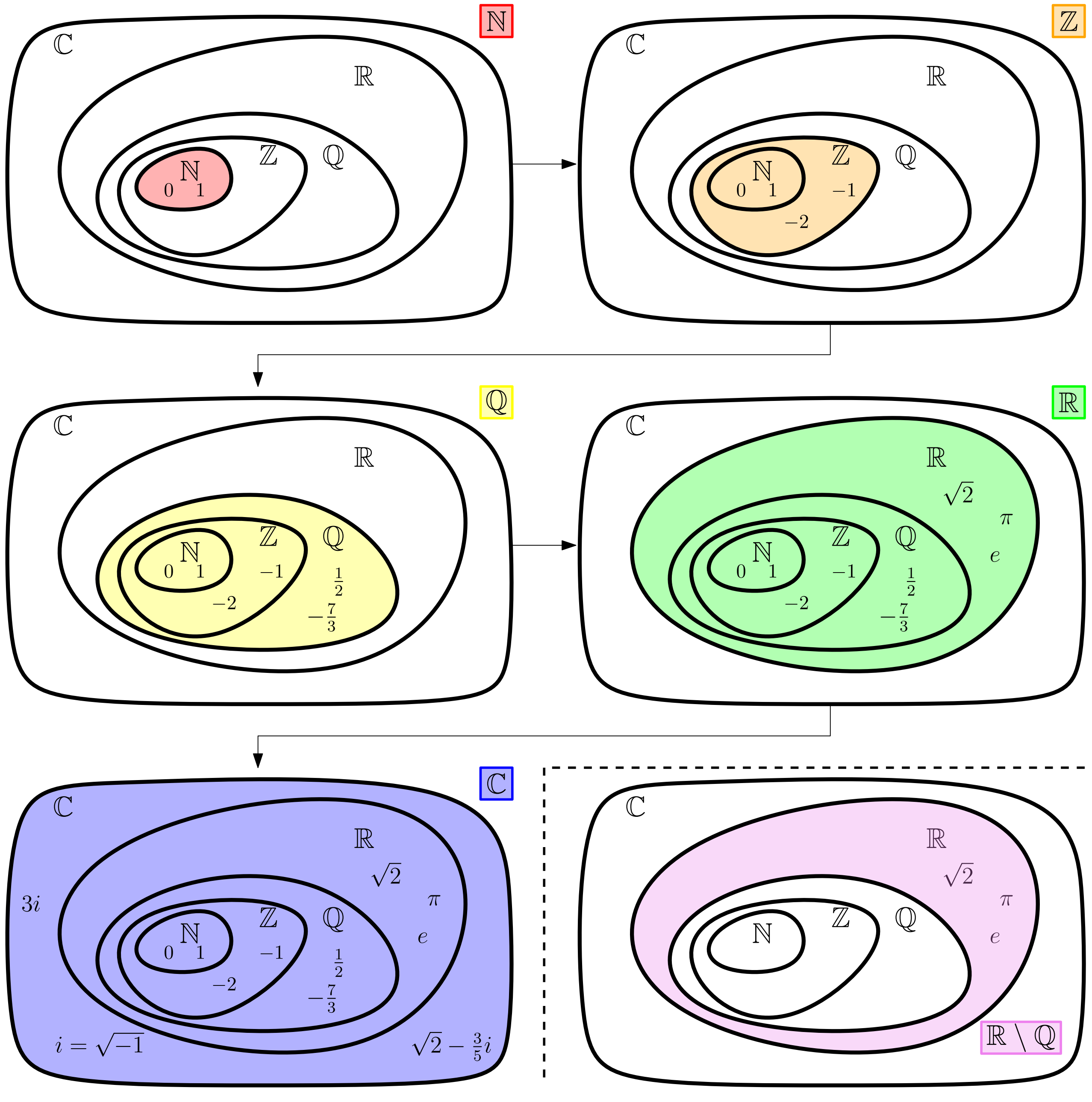


Figura 19: En rojo: los naturales. En naranja: los enteros. En amarillo: los racionales. En verde: los reales. En azul (?): los complejos. En violeta (?): los irracionales.

Representaciones decimales

1. Encuentra las fracciones generatrices de:
a) $2,71$
b) $2,\overline{71}$
c) $2,7\overline{1}$
d) e
usando:
I) las *reglas inmediatas*
II) una justificación algebraica
III) una justificación basada en progresiones geométricas

Las representaciones decimales (10-arias) de los números son:

a) $2,71$ es **exacta**

La parte entera es 2 y la parte decimal es 71.

b) $2,\overline{71}$ es **periódica pura**

La parte entera es 2, no tiene anteperiodo y el periodo es 71.

c) $2,7\overline{1}$ es **periódica mixta**

La parte entera es 2, el anteperiodo es 7 y el periodo es 1.

d) e es **aperiódica**

El número e es un número irracional. Por lo tanto, su representación decimal (o n-aria en cualquier base n) es aperiódica.

No es ni exacta, ni periódica pura, ni periódica mixta.

Por lo tanto, a), b) y c) son números racionales (pertenecen a $\mathbb{Q}$) y tienen fracción generatriz. Pero c), como es irracional, no se puede representar de manera exacta como una fracción. e no tiene fracción generatriz.

I) Con las *reglas inmediatas*

a)

$$2,71 = \frac{271}{100}$$

La fracción es irreducible. Es decir, no se puede reducir (= simplificar).

b)

$$2,\overline{71} = \frac{271-2}{99} =$$

El denominador tiene tantos nueves como cifras tiene el periodo.

$$= \frac{269}{99}$$

Que es irreducible.

c)

$$2,7\overline{1} = \frac{271-27}{90} =$$

El denominador tiene tantos nueves como cifras tiene el periodo. Y el denominador tiene tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo.

$$= \frac{244}{90} =$$

$$= \frac{122}{45}$$

Que es irreducible.

II) Con una justificación algebraica

a)

$$x = 2,71$$

Multiplicando por 100:

$$100x = 271$$

Dividiendo:

$$x = \frac{271}{100}$$

b)

$$x = 2,\overline{71}$$

Multiplicando por 100:

$$100x = 271,\overline{71}$$

Si restamos:

$$100x - x = 271,\overline{71} - 2,\overline{71}$$

la parte periódica desaparece:

$$100x - x = 271 - 2$$

Y se llega a:

$$x = \frac{269}{99}$$

c)

$$x = 2,7\overline{1}$$

Multiplicando por 10 se convierte en periódico puro:

$$10x = 27,\overline{1}$$

Multiplicando otra vez por 10:

$$100x = 271,\overline{1}$$

Restando:

$$100x - 10x = 271,\overline{1} - 27,\overline{1}$$

la parte periódica desaparece:

$$100x - 10x = 271 - 27$$

Y se llega a:

$$x = \frac{122}{45}$$

III) Con una justificación basada en progresiones geométricas

Este modo es apto para los casos b) y c).

b)

$$\begin{aligned} x = 2,\overline{71} &= 2,717171717171\ldots = \\ &= 2 + \frac{71}{100} + \frac{71}{100^2} + \frac{71}{100^3}\ldots = \\ &= 2 + 71 \cdot \quad \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3}\ldots \quad = \end{aligned}$$

Lo que hay entre paréntesis es la **suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1/100 y cuya razón es 1/100**.

La suma infinita se calculaba:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/100}{1-1/100} = \\ &= \frac{1/100}{99/100} = \frac{1}{99} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$x = 2 + 71 \cdot \frac{1}{99}$$

$$x = 2 + \frac{71}{99}$$

$$x = \frac{198}{99} + \frac{71}{99}$$

$$x = \frac{269}{99}$$

c)

$$\begin{aligned} x = 2,7\overline{1} &= 2,711111111\ldots = \\ &= 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \\ &= 2 + \frac{7}{10} + \quad \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \quad = \end{aligned}$$

Lo que hay entre paréntesis es la **suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1/100 y cuya razón es 1/10**.

La suma infinita se calculaba:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/100}{1-1/10} = \\ &= \frac{1/100}{9/10} = \frac{1}{90} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$x = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{90}$$

que nos da:

$$x = \frac{122}{45}$$

2. ¿Qué tipos de representaciones n-arias de números reales existen?

Las representaciones n-arias (en base n) de los números reales pueden ser: exactas, periódicas puras, periódicas mixtas y aperiódicas.

Las representaciones n-arias cuando n es 10 son las **representaciones decimales**. Esas son las que usamos normalmente.

Los números racionales ($\mathbb{Q}$) son los que pueden escribirse como fracción (como razón de números enteros). Y siempre tienen representaciones:

- **exactas**

$$2.31$$

- **periódicas puras**

$$2.\overline{31} = 2.31313131\ldots$$

- **periódicas mixtas**

$$2.3\overline{1} = 2.31111111\ldots$$

Los irracionales siempre tienen representaciones aperiódicas:

- $\pi = 3.141592654\ldots$
- $e = 2.718281828\ldots$
- $0.10100100010000\ldots$

3. ¿Cuál es la vigésima segunda cifra decimal de la fracción siguiente?

$$\frac{13}{93}$$

La representación decimal de:

$$\frac{13}{93}$$

es:

$$\frac{13}{93} = 0.\overline{013}$$

Es una representación periódica pura. El periodo tiene 3 cifras.

La vigésimo segunda posición es la posición 22. Si dividimos 22 entre 3, el cociente es 7 y el resto es 1:

$$\frac{22}{3} = 7 + \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la cifra en la vigésima segunda posición es la que está en primer lugar (1) en el periodo: 0.

La cifra que nos piden es 0.

4. ¿Cuál es la vigésima segunda cifra decimal de la fracción siguiente?

$$\frac{93}{13}$$

Ahora tenemos que:

$$\frac{93}{13} = 7.\overline{153846}$$

El periodo tiene 6 cifras. Nos piden la cifra en la posición 22. Dividimos 22 entre 6:

$$\frac{22}{6} = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la respuesta es la cifra que está en la posición 2 en el periodo: 5.

5. Sean las siguientes fracciones irreducibles:

a)
$$\frac{32}{7}$$

b)
$$\frac{77}{20}$$

c)
$$\frac{5}{14}$$

Indica el tipo de cada representación decimal sin hacer la división.

Es importante que las tres fracciones sean **irreducibles**. Eso significa que no podemos simplificarlas. No podemos encontrar una fracción equivalente con un numerador y un denominador más pequeños.

Como hablamos de representaciones **decimales** (en **base 10**), tenemos que ver si el denominador contiene solamente factores que contiene 10 o contiene otros. La base es $10 = 2 \cdot 5$.

a)
$$\frac{32}{7}$$

El denominador es 7, que es primo. Y no es ni 2 ni 5. Por lo tanto, su representación decimal es **periódica pura**.

b)
$$\frac{77}{20}$$

El denominador es 20 que es igual a $2^2 \cdot 5$. Solamente contiene factores que están en 10. Por lo tanto, su representación decimal es **exacta**.

c)

$$\frac{5}{14}$$

El denominador es 14, que es $2 \cdot 7$. Contiene por lo tanto factores que están contenidos en 10 (el 2) y factores que no lo están (el 7). Por lo tanto, su representación decimal es **periódica mixta**.

6. Escribe como fracción irreducible la siguiente división de decimales periódicos:

$$\frac{1.\overline{23}}{2.1\overline{3}}$$

¿Qué tipo de representación decimal tendrá esa fracción?

En primer lugar, escribiremos el numerador y el denominador como fracciones. Es decir, encontraremos las fracciones generatrices de esas representaciones decimales.

$$1.\overline{23} = \frac{123-1}{99} = \frac{122}{99}$$
$$2.1\overline{3} = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{96}{45} = \frac{32}{15}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1.\overline{23}}{2.1\overline{3}} = \frac{\frac{122}{99}}{\frac{32}{15}} =$$
$$= \frac{122}{99} \div \frac{32}{15} = \frac{122}{99} \cdot \frac{15}{32} =$$
$$= \frac{122 \cdot 15}{99 \cdot 32} =$$

En lugar de multiplicar, podemos simplificar dividiendo el 122 del numerador y el 32 del denominador entre 2:

$$= \frac{61 \cdot 15}{99 \cdot 16} =$$

Podemos dividir 15 y 99 entre 3:

$$= \frac{61 \cdot 5}{33 \cdot 16} =$$

Podemos factorizar:

$$= \frac{61 \cdot 5}{3 \cdot 11 \cdot 2^4} =$$
$$= \frac{5 \cdot 61}{2^4 \cdot 3 \cdot 11} =$$

No hay factores comunes arriba y abajo, por lo que es irreducible (= no se puede simplificar más).

$$= \frac{305}{528}$$

Nos preguntan también qué tipo de representación decimal tiene esta fracción. Como hemos factorizado el denominador de la fracción irreducible, podemos contestar fácilmente. La factorización del denominador es:

$$528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$

Tiene factores iguales a 2 o 5 y factores distintos. Como tiene de los dos tipos, su representación decimal será **periódica mixta**.

$$\frac{305}{528} = 0.5776\overline{51}$$

Vamos a comprobar que es así obteniendo la fracción generatriz a partir de su representación decimal:

$$0.5776\overline{51} = \frac{577651 - 5776}{990000} =$$

$$= \frac{571875}{990000} =$$

Podemos dividir entre 5:

$$= \frac{114375}{198000} =$$

Podemos dividir otra vez entre 5:

$$= \frac{22875}{39600} =$$

Y podemos dividir una vez más entre 5:

$$= \frac{4575}{7920} =$$

El numerador y el denominador todavía son divisibles entre 5:

$$= \frac{915}{1584} =$$

No son divisibles entre 2 o 5, pero es fácil comprobar que son divisibles entre 3:

$$= \frac{305}{528}$$

Tal como esperábamos.

7. ¿Puede un número real tener más de una representación decimal?

Sí. Cualquier número con representación decimal exacta puede escribirse de varios modos.

Por ejemplo:

$$1 = 1.\overline{0} = 0.\overline{9}$$

Es decir, si la representación es decimal exacta (que equivale a decir que tiene un periodo formado por ceros), podemos escribir el número usando un periodo formado por nueves.

Vamos a justificar que esas dos representaciones son la misma:

$$x = 0.\overline{9}$$

Multiplicamos por 10:

$$10x = 9.\overline{9}$$

Restamos ambas expresiones:

$$10x - x = 9.\overline{9} - 0.\overline{9}$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

Representación en la recta real

1. Dibuja la recta real con los números enteros entre -1 y 4 usando solamente un compás y una regla sin escala.

El modo más sencillo es el siguiente:

1. Dibujamos una línea recta usando la regla sin escala.
2. Hacemos una marca en la recta: será el 0.
3. Usamos la marca como centro y con el compás hacemos dos nuevas marcas: -1 y 1.
4. Sin cambiar la apertura del compás, trazamos nuevas marcas usando como centros las nuevas marcas.

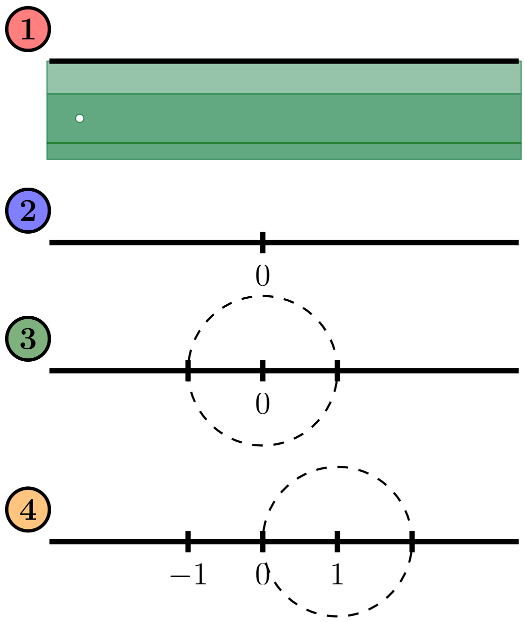


Figura 20: La recta real, paso a paso.

2. Representa gráficamente el número 7/3 en la recta real.

La fracción

$$\frac{7}{3}$$

es una fracción impropia porque el numerador es más grande que el denominador. Podemos escribirla como un *número mixto*, es decir, un número natural más una fracción propia:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

- Paso 1. Dibujamos la parte de la recta real que necesitamos.
- Paso 2. Dibujamos un segmento que sale del número 2 y que tiene una longitud de 3 unidades.
- Paso 3. Dibujamos un segmento desde el extremo del segmento anterior al número 3. Hacemos segmentos paralelos a ese segmento que pasen por cada una de las unidades.
- Paso 4. Ya tenemos la posición de 7/3 = 2 + 1/3 en la recta real.

3. Representa gráficamente el número $\sqrt{2}$ en la recta real.

Sabemos que el número $\sqrt{2}$ se puede representar geométricamente como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los dos catetos miden 1 unidad.

- Paso 1. Representamos primero la recta real con los enteros en ella.
- Paso 2. Hacemos un triángulo rectángulo con catetos 1 y 1. Su hipotenusa será $\sqrt{2}$.
- Paso 3. Con un compás trazamos un arco que va desde el vértice superior del triángulo hasta la recta real (en sentido horario). El centro está en el vértice inferior izquierdo. La intersección (= el corte) entre el arco y la recta es la posición de la raíz cuadrada de dos.

4. Representa gráficamente el número $1 + \sqrt{2}$ en la recta real.

El procedimiento es similar a la representación de la raíz cuadrada de 2. La diferencia es que ahora podemos hacer el triángulo con su vértice inferior izquierdo en 1.

3. Representa gráficamente el número $\sqrt{3}$ en la recta real.

Es fácil ver que:

$$\sqrt{3}^{\;2} = \sqrt{2}^{\;2} + 1^2$$

Como en los ejemplos anteriores, la idea es construir un triángulo rectángulo con catetos de longitudes $\sqrt{2}$ y 1. Ese triángulo tendrá una hipotenusa de $\sqrt{3}$ unidades de longitud.

5. Representa gráficamente la mitad de la raíz cuadrada de 2 en la recta real. Es decir, representa el número $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

El primer paso consiste en encontrar la raíz cuadrada de 2.

El segundo consiste en encontrar el punto medio de la raíz cuadrada de 2. Para eso solamente es necesario trazar dos arcos de circunferencia del mismo radio con centros en 0 y en $\sqrt{2}$. Al

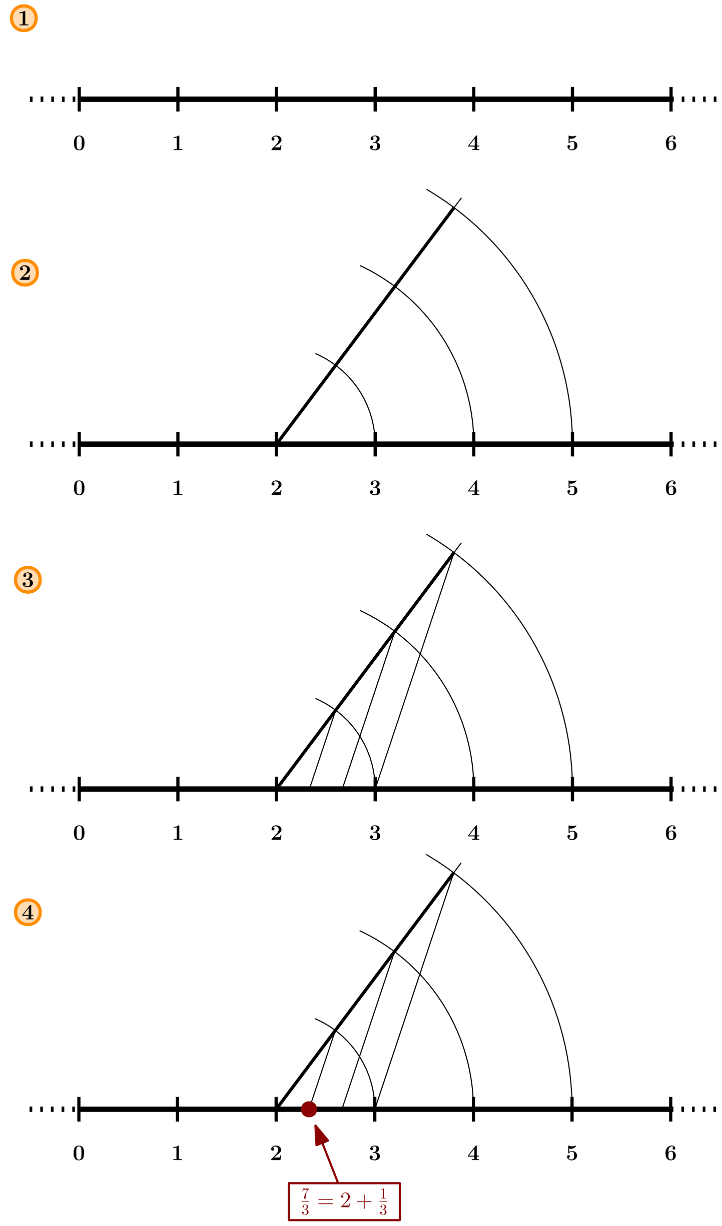


Figura 21: 7/3 en la recta real.

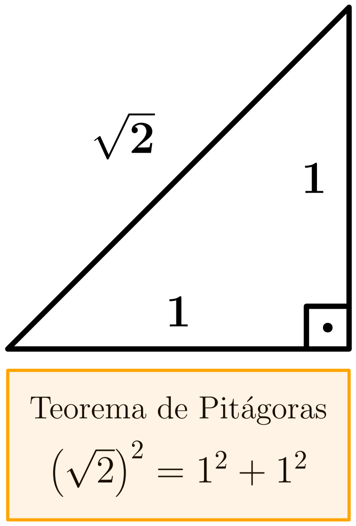


Figura 22: Este triángulo rectángulo es isósceles: sus dos catetos tienen la misma longitud. Como los catetos miden 1, por el teorema de Pitágoras, su hipotenusa mide $\sqrt{2}$.

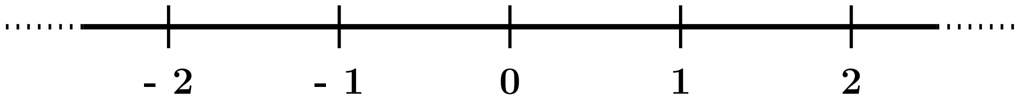


Figura 23: La recta real y las marcas de los enteros.

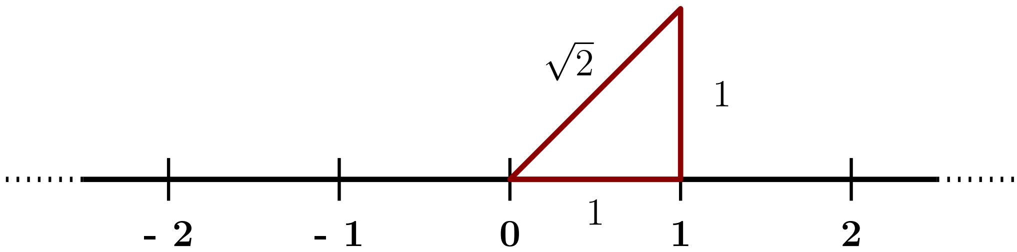


Figura 24: Paso 2.

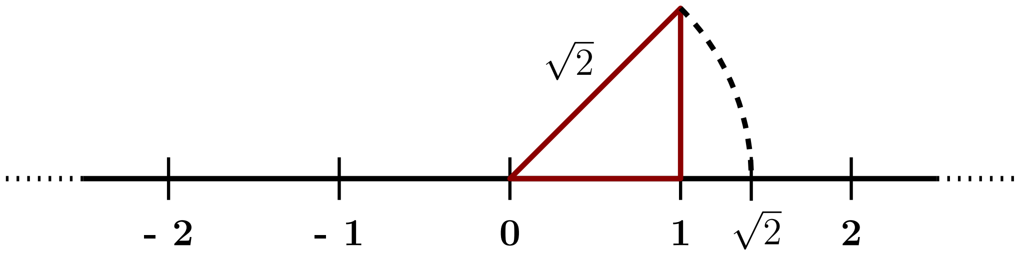


Figura 25: Paso 3.

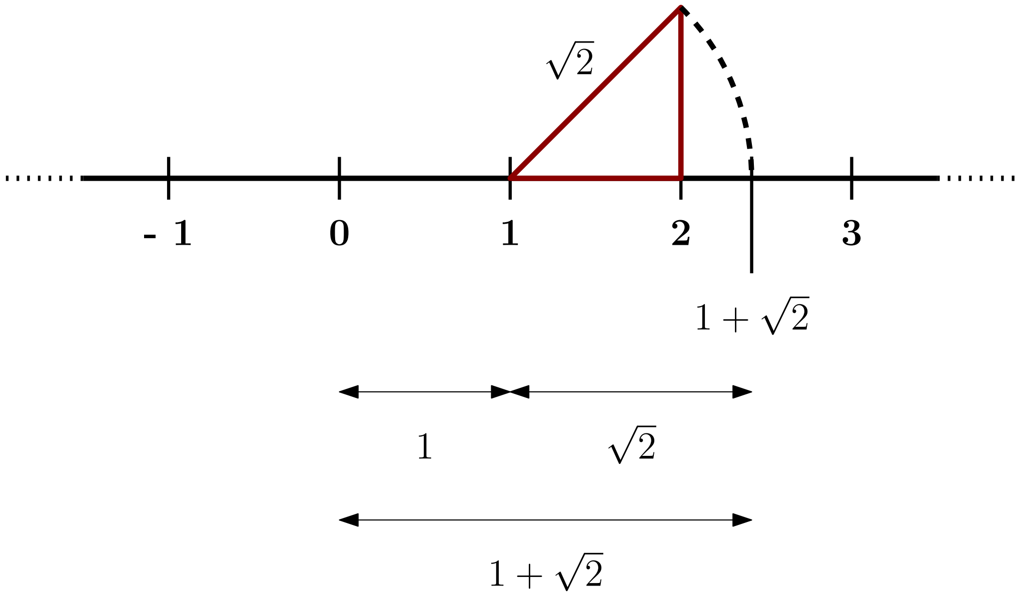


Figura 26: $1 + \sqrt{2}$

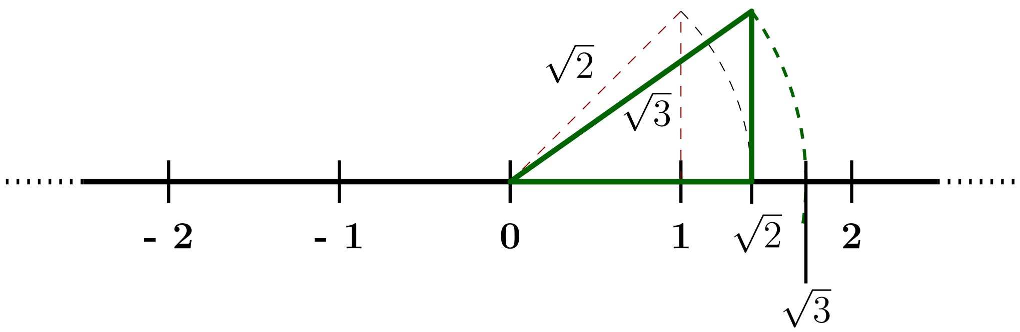


Figura 27: La raíz cuadrada de 3 en la recta real.

unir las intersecciones, obtenemos la mediatriz (la línea recta que divide un segmento por la mitad y es perpendicular al segmento).

La intersección de la mediatriz y del segmento nos da la mitad de la raíz cuadrada de 2.

6. ¿Es posible representar gráficamente cualquier número real en la recta real usando regla y compás? Es decir, usando combinaciones de los métodos de los ejemplos anteriores.

No.

Los números que se pueden representar en la recta real usando los métodos que hemos usado en los ejemplos anteriores se llaman **números reales construibles**. Todos los números racionales son construibles. Pero no todos los números irracionales son construibles.

Son construibles: $\frac{7}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{7}}{5}\ldots$

Pero no son construibles: $\sqrt[3]{2}$, e, $\pi\ldots$

Observa que hay números algebraicos que no son construibles ($\sqrt[3]{2}$) y números algebraicos que sí son construibles ($\sqrt{3}$). Pero todos los números trascendentes (e, $\pi\ldots$) son **no construibles**.

Esto no quiere decir que no podamos representar los números no construibles en la recta real. Quiere decir que debemos usar **aproximaciones** para hacerlo.

Intervalos

1. Sean los intervalos A = (-2, 3), B = [-1, 5]. Encuentra $A \cap B$. Representa gráficamente los tres.

El primer intervalo (que es abierto) es el de los números reales mayores que -2 y menores que 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 3\}$$

El segundo intervalo (que es cerrado) es el de los números reales mayores o iguales que -1 y menores o iguales que 5:

$$B = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 5\}$$

La intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. La intersección de los intervalos A y B es:

$$A \cap B = (-2, 3) \cap [-1, 5]$$

Y por lo tanto está formada por los números mayores o iguales que -1 que a la vez son menores que 3:

$$A \cap B = (-2, 3) \cap [-1, 5] = [-1, 3)$$

$$[-1, 3) = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x < 3\}$$

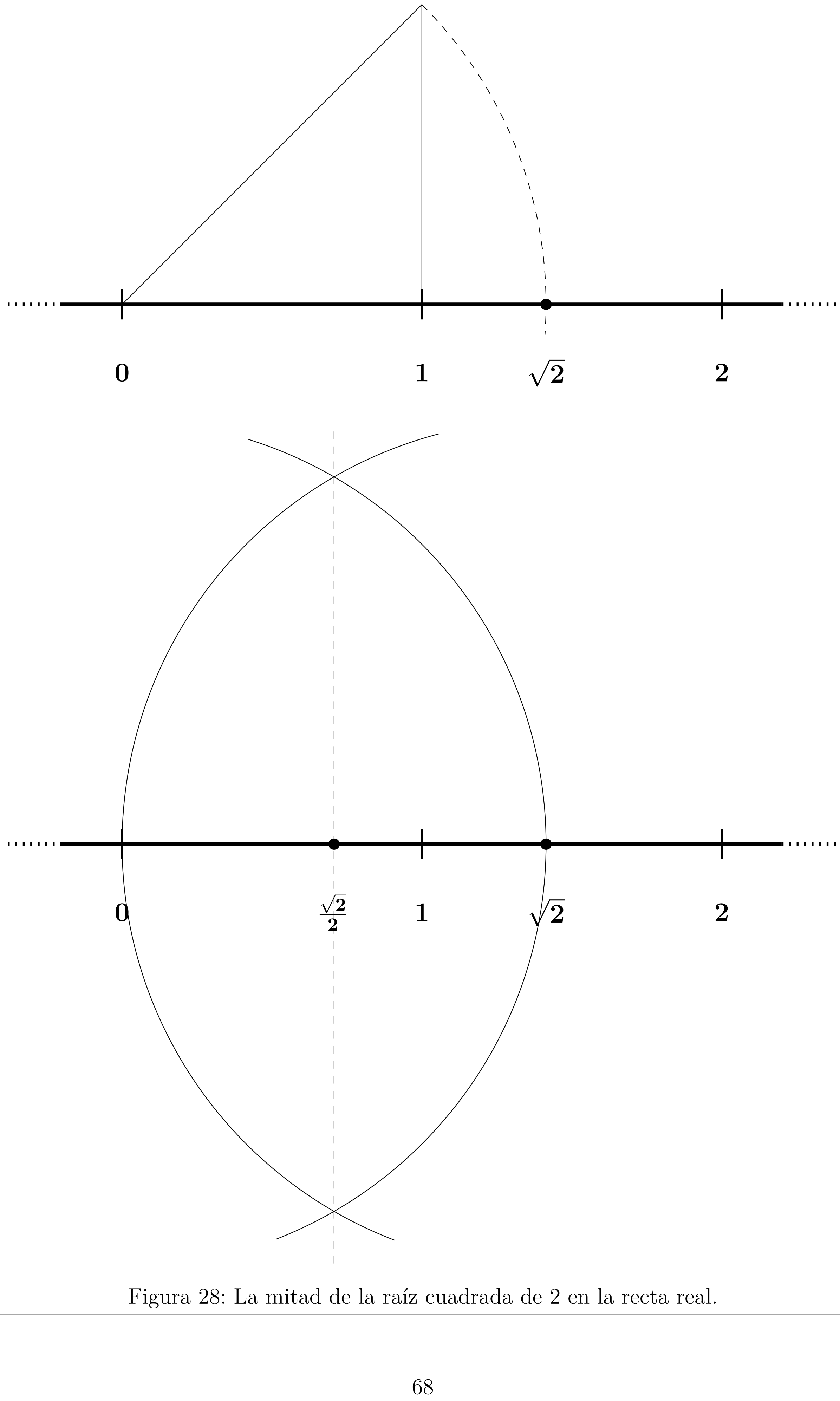


Figura 28: La mitad de la raíz cuadrada de 2 en la recta real.

Gráficamente es fácil de hacer en la misma recta cuando usamos la convención que usamos en clase de representar los intervalos ligeramente separados de la recta real.

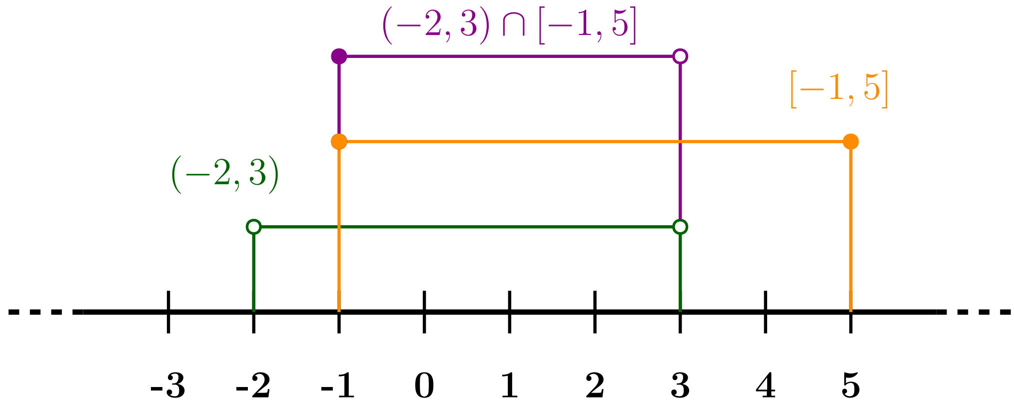


Figura 29: Los intervalos (-2, 3) y [-1, 5] y la intersección de ambos en la recta real.

2. Sean los intervalos A = [0, 3), B = [-1, 5]. Encuentra $A \cap B$. Representa gráficamente los tres.

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} A &= [0,3) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\} \\ B &= [-1,5] = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 5\} \\ A \cap B &= [0,3) \cap [-1,5] = [0,3) = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\} \end{aligned}$$

Es decir, la intersección coincide con el intervalo A porque A es un subconjunto de B:

$$A \subset B$$

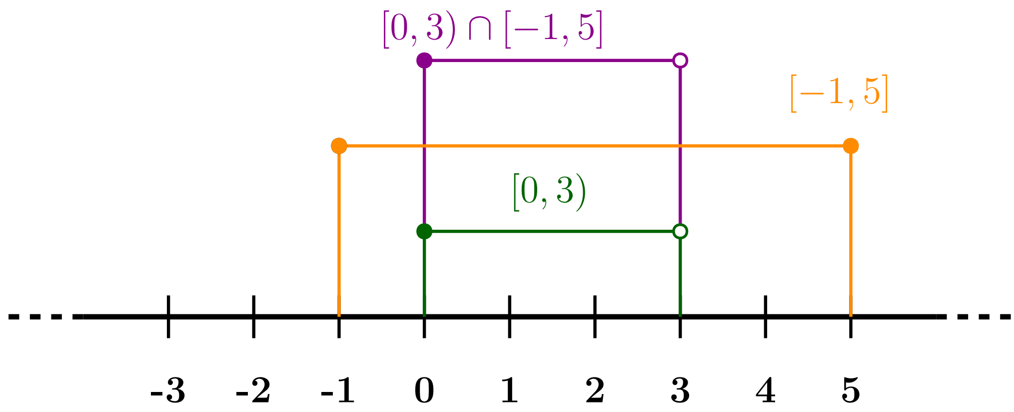


Figura 30: Los intervalos [0, 3) y [-1, 5] y la intersección de ambos en la recta real.

3. Sean los intervalos A = [0, 1), B = [1, 2] y C = [2, 4). Encuentra $A \cap B$, $B \cap C$ y $C \cap A$.

La intersección de A y B es el conjunto vacío:

$$A \cap B = [0, 1) \cap [1, 2] = \{\} = \varnothing$$

La intersección de B y C es el conjunto que contiene el número 2:

$$B \cap C = [1, 2] \cap [2, 4) = \{2\}$$

La intersección de C y A es el conjunto vacío:

$$C \cap A = [0, 1) \cap [2, 4) = \{\} = \varnothing$$

Estos ejemplos muestra que **la intersección de dos intervalos puede no ser un intervalo**.

4. Sean los intervalos A = (-2, 3), B = [-1, 5]. Encuentra $A \cup B$. Representa gráficamente los tres.

Para los intervalos:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 3\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 5\}$$

Tenemos la unión de ambos. Es decir, el conjunto de los números que pertenecen al primer conjunto o al segundo conjunto:

$$A \cup B = (-2, 3) \cup [-1, 5]$$
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 3) \vee (-1 \leq x \leq 5)\}$$
$$A \cup B = (-2, 5]$$

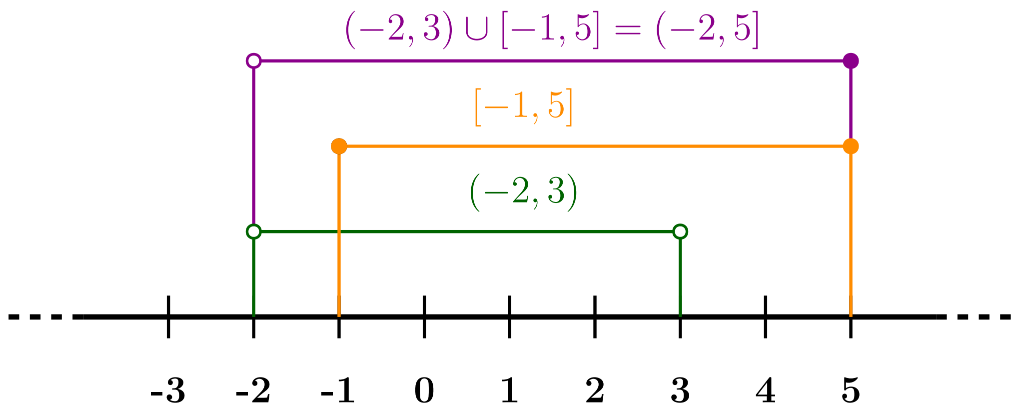


Figura 31: Los intervalos (-2, 3) y [-1, 5] y la unión de ambos en la recta real.

5. Sean los intervalos A = [0, 3), B = [-1, 5]. Encuentra $A \cup B$. Representa gráficamente los tres.

Ahora tenemos:

$$A = [0, 3) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\}$$
$$B = [-1, 5] = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 5\}$$
$$A \cup B = [0, 3) \cup [-1, 5] = [-1, 5] =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 5\}$$

La unión de A y B coincide con el intervalo B porque A es subconjunto de B:

$$A \subset B$$

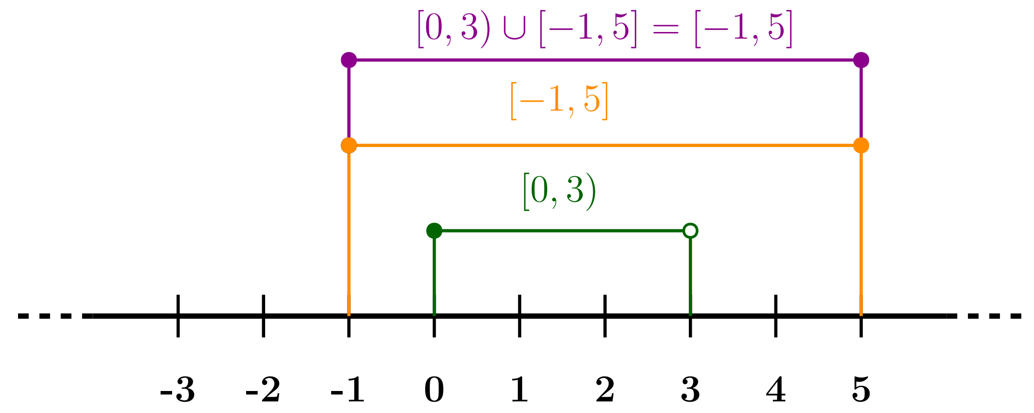


Figura 32: Los intervalos [0, 3) y [-1, 5] y la unión de ambos en la recta real.

6. ¿Cuál es la unión $[2, 3] \cup (4, 6)$?

La unión de los intervalos [2, 3] y (4, 6) solamente se puede escribir como la unión de esos intervalos:

$$[2, 3] \cup (4, 6) =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}; (2 \leq x \leq 3) \vee (4 < x < 6)\}$$

Es decir, la unión de dos intervalos **puede no ser un intervalo**, como ocurre en este caso.

7. Sean los intervalos $A = [1, 3]$, $B = (2, 4)$, $C = [2, 4]$, $D = [3, 4]$, $E = (5, 7)$ y $F = \frac{3}{2}, 2$. Calcula:

a) $A \setminus B$
b) $B \setminus A$
c) $A \setminus C$
d) $A \setminus D$
e) $A \setminus E$
f) $A \setminus F$

Tenemos diferencia de conjuntos, donde podemos usar el símbolo menos en lugar de la barra descendente. Por ejemplo, podemos escribir $A - B$ en lugar de $A \setminus B$.

La diferencia $A - B$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero **no pertenecen** a B.

La diferencia de conjuntos **no es conmutativa**. Es decir, en general el orden de la operación influye en el resultado.

a) $A \setminus B = A - B = [1, 3] - (2, 4) = [1, 2]$

b) $B \setminus A = B - A = (2, 4) - [1, 3] = (3, 4)$

c) $A \setminus C = A - C = [1, 3] - [2, 4] = [1, 2)$

d) $A \setminus D = A - D = [1, 3] - [3, 4] = [1, 3)$

e) $A \setminus E = A - E = [1, 3] - (5, 7) = [1, 3]$

f) $A \setminus F = A - F = [1, 3] - \ \frac{3}{2}, 2 \ =$

$= \ 1, \frac{3}{2} \ \cup [2, 3]$

El ejemplo f) muestra que la diferencia de dos intervalos no es siempre un intervalo.

8. Representa gráficamente el producto cartesiano:

$$[2, 3] \times (2, 5]$$

El producto cartesiano de dos intervalos no es intervalo. De hecho, **no es un subconjunto de la recta real**. No podemos representarlo en la recta real.

Pero podemos representar cada intervalo en una recta real diferente. Y que ambas rectas sean perpendiculares entre si.

Así, por ejemplo si $2 \in [2, 3]$ y $4 \in (2, 5]$, la dupla (= el par) $(2, 4) \in [2, 3] \times (2, 5]$.

Aquí la notación es confusa porque $(2, 4)$ aquí representa una dupla (la pareja formada por el número 2 y el número 4). No representa el intervalo de todos los números reales que son mayores que 2 y menores que 4.

Pero una dupla puede representarte como un **punto en el plano**. Por lo tanto, el producto cartesiano de los dos intervalos es **un rectángulo**.

El producto cartesiano incluye: el interior del rectángulo, el lado superior y los lados laterales. El producto cartesiano no incluye: el lado inferior.

Por eso todos los lados se dibujan como líneas continuas, excepto el inferior, que se dibuja discontinuo (a trazos[11]).

9. ¿Qué sería el producto cartesiano $[2, 3] \times (2, 5] \times (-1, 1)$?

Ahora tenemos algo que se puede representar en tres dimensiones. Se trata de un **ortoedro**. Es decir, un **paralelepípedo rectangular** o **prisma rectangular ortogonal**.

Dicho de otro modo: es una región del espacio tridimensional delimitada (= entre los límites) de seis caras rectangulares, donde cada cara es paralela a la cara opuesta.

10. ¿Qué intervalo es más grande? ¿(0, 1) o [0, 1]?
Dicho de modo más preciso: ¿Cuál es la cardinalidad de (0, 1)? ¿Cuál es la cardinalidad

[11] **A trazos**. No *"a trozos"*. Un *trazo* es *ťah* en eslovaco.

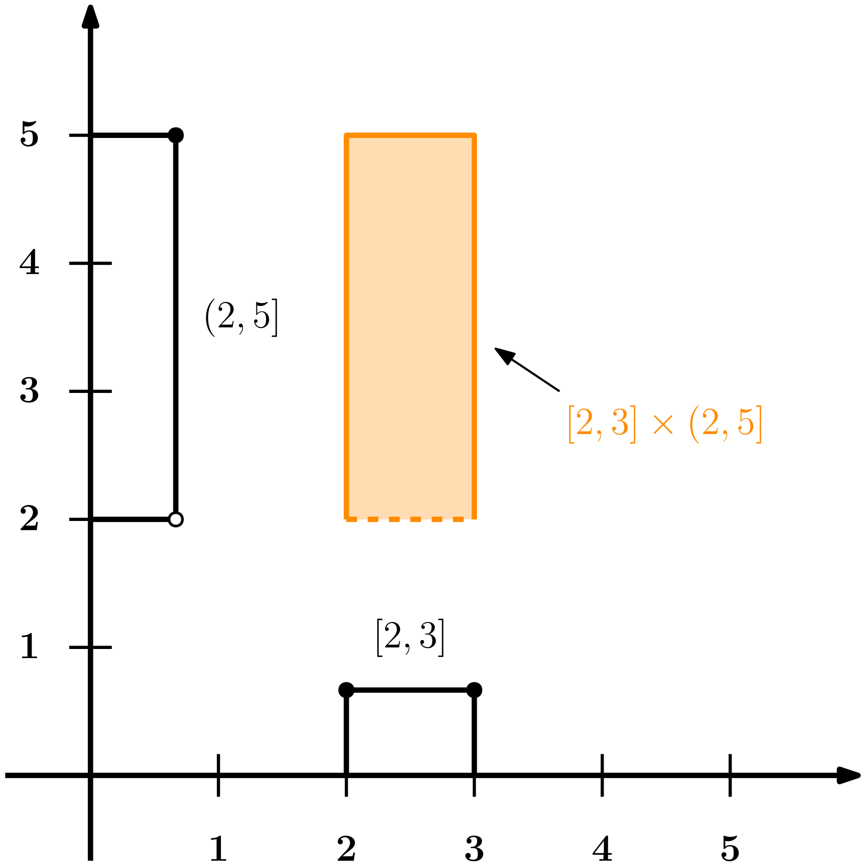


Figura 33: El producto cartesiano de los dos intervalos es un rectángulo.

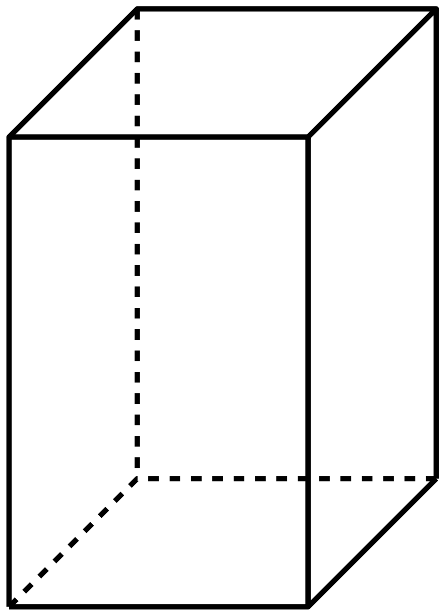


Figura 34: Un ortoedro es un poliedro que tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. Las caras son rectangulares. Y cada rectángulo es paralelo a otro rectángulo.

de [0, 1]? ¿Cuál de ellas es mayor?

Sabemos que el intervalo abierto (0, 1) es subconjunto del intervalo cerrado [0, 1]. Y que el intervalo cerrado incluye dos puntos (el 0 y el 1) que no están incluidos en el abierto.

Por eso es tentador pensar que el intervalo [0, 1] es mayor que el intervalo (0, 1). Pero **no es así**.

Cualquier intervalo que no sea el conjunto vacío o un solo punto es un **conjunto infinito**. Y, cuando se trata de conjuntos infinitos, la intuición suele ser mala guía.

Los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, la cardinalidad de los reales, la cardinalidad del continuo:

$$|[0,1]| = |(0,1)| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Existen modos de hacer corresponder a cada elemento de un intervalo, un elemento del otro intervalo. Lo cual equivale a decir que los dos conjuntos son *igual de grandes*.

Por ejemplo, podemos definir:

$$f : (0,1) \longrightarrow [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{n-2} & \text{si } x = \frac{1}{n}; n > 3 \\ x & \text{en otros casos} \end{cases}$$

que hace que cada elemento del primer intervalo tenga solamente un correspondiente del segundo intervalo y viceversa.

11. Sean los conjuntos de números reales:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}; 2 > x\}$$

a) Escribe ambos conjuntos como intervalos.
b) Calcula $A \cup B$, $A \cap B$, A' y B'.

De los dos conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}; 2 > x\}$$

podemos reescribir el segundo:

$$B = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$$

a) Ambos conjuntos son intervalos:

$$A = (-1, 4]$$
$$B = (-\infty, 2)$$

que en eslovaco se suelen escribir:

$$A = (-1; 4\rangle$$
$$B = (-\infty; 2)$$

b) El resultado de la operación entre dos intervalos no tiene que ser otro intervalo. Pero puede serlo.

La unión de estos dos intervalos es un intervalo:

$$A \cup B = (-1, 4] \cup (-\infty, 2) =$$
$$= (-\infty, 4]$$

La intersección de estos dos intervalos:

$$A \cup B = (-1, 4] \cap (-\infty, 2) =$$
$$= (-1, 2)$$

también es un intervalo.

No se especifica el conjunto universal al que hacen referencia los complementarios A' y B'. Pero podemos suponer que es el conjunto de todos los reales.

El primer complementario es:

$$A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, \infty) - (-1, 4] =$$
$$= (-\infty, -1] \cup (4, \infty)$$

El resultado **no** es un intervalo, sino una unión de dos intervalos. Podemos expresarlo también así:

$$A' = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1 \vee x > 4\}$$

El segundo complementario es:

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, \infty) - (-\infty, 2) =$$
$$= [2, \infty)$$

El resultado es un intervalo que también se puede expresar:

$$B' = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$$

o:

$$B' = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x\}$$

Aproximaciones numéricas

1. ¿Qué tipo de aproximaciones numéricas existen? Ilustra tu respuesta con ejemplos.

Una aproximación numérica de un número real es un número decimal exacto cercano al número real.

Así, por ejemplo, el número real $2.1\overline{357}$ puede aproximarse por 2, por 3, por 2.1, por 2.2, por 2.13, por 2.14... Cada una de estas aproximaciones tiene características concretas.

Para el número $2.1\overline{357}$:

- 2 y 3 son aproximaciones a las unidades
- 2.1 y 2.2 son aproximaciones a las décimas
- 2.13 y 2.14 son aproximaciones a las centésimas
- 2.135 y 2.136 son aproximaciones a las milésimas
- 2.1357 y 2.1358 son aproximaciones a las diezmilésimas
- ...

Una aproximación puede ser:

- por **exceso** si es mayor que el número
- por **defecto** si es menor que el número

Por ejemplo:

- 0.2 es una aproximación por defecto de 1/4; 0.2 es menor que 1/4
- 0.3 es una aproximación por exceso de 1/4; 0.3 es mayor que 1/4

Dos métodos de aproximación son los métodos:

- por **truncamiento**

  "Truncar" es *"cortar"*. Al *truncar* un número, eliminamos todas las cifras a partir de una cifra determinada.

  El número π (= 3.14 15 92 65 35...) truncado a las centésimas:

  $$\pi \approx 3.14$$

  El número e (= 2.71 82 81 82 84...) truncado a las centésimas:

  $$e \approx 2.71$$

  La constante de Euler-Mascheroni γ (= 0.57 72 15 66 49...) truncada a las centésimas:

  $$\gamma \approx 0.57$$

- por **redondeo**

  "Redondear" es, literalmente, *"convertir algo en un círculo"* o *"hacerlo redondo"*. También se trunca, pero el último dígito se cambia a una unidad más grande si el siguiente dígito es 5 o un dígito mayor.

  El número π (= 3.14 15 92 65 35...) redondeado a las centésimas:

  $$\pi \approx 3.14$$

  El número e (= 2.71 82 81 82 84...) redondeado a las centésimas:

  $$e \approx 2.72$$

  La constante de Euler-Mascheroni γ (= 0.57 72 15 66 49...) redondeada a las centésimas:

  $$\gamma \approx 0.58$$

El redondeo y el truncamiento coinciden a veces, pero siempre se escoge el **redondeo** como mejor método de aproximación.

2. Para el número π (= 3.14 15 92 65 35...) calcula el error absoluto y el error relativo para las siguientes aproximaciones:
a) 3.3
b) aproximación por truncamiento a las milésimas
c) aproximación por redondeo a las milésimas

a) El error absoluto es:

$$E_a = |3.3 - \pi| =$$
$$= 0.15\,84\,07\,34\,64\ldots$$

El error relativo es:

$$\epsilon_a = \frac{E_a}{\text{valor real}} =$$
$$= \frac{0.15\,84\,07\,34\,64\ \ldots}{3.14\,15\,92\,65\,35...} =$$
$$= 0.050$$

Es un error de un 5 por ciento.

b) La aproximación por truncamiento a las milésimas es:

$$3.141$$

Su error absoluto es:

$$E_a = |3.141 - \pi| =$$
$$= 0.00\,05\,92\,65\,35\,89\,8\ldots$$

El error relativo es:

$$\epsilon_a = \frac{E_a}{\text{valor real}} =$$
$$= \frac{0.00\,05\,92\,65\,35\,89\,8\ldots}{3.14\,15\,92\,65\,35\ldots} =$$
$$= 0.00019$$

¡Es un error menor que el 0.02 por ciento!

c) La aproximación por redondeo a las milésimas es:

$$3.142$$

Su error absoluto es:

$$E_a = |3.142 - \pi| =$$
$$= 0.00\,04\,07\,34\,64\,10\,2\ldots$$

El error relativo es:

$$\epsilon_a = \frac{E_a}{\text{valor real}} =$$
$$= \frac{0.00\,04\,07\,34\,64\,10\,2\ldots}{3.14\,15\,92\,65\,35\ldots} =$$
$$= 0.00013$$

¡Es un error incluso menor que el obtenido truncando el número!

3. El radio medio[a] de la Tierra es de 6371 kilómetros. Compara los distintos valores del perímetro de la circunferencia que se obtienen:

a) aproximando π a 3.14

b) aproximando π a 3.1415926

[a] La Tierra no es una esfera perfecta. Es un esferoide achatado por los polos, por lo que el radio polar es menor que el radio ecuatorial.

La fórmula de la longitud de una circunferencia es:

$$l = 2\pi r$$

donde l es la longitud de la circunfencia (= el perímetro del círculo que contiene) y r es su radio.

a) Cuando aproximamos π a 3.14:

$$\begin{aligned} l &= 2 \cdot 3.14 \cdot 6371 = \\ &\approx 40009.88 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Cuando aproximamos π a 3.1415926:

$$\begin{aligned} l &= 2 \cdot 3.1415926 \cdot 6371 = \\ &\approx 40028.9 \text{ km} \end{aligned}$$

Se comete un error de solamente 19 kilómetros, que, comparado con los 40000 kilómetros, es un error relativo muy pequeño:

$$\frac{19}{40000} = 0.000475$$

Menor del 1 por ciento (1 %). De hecho, menor del 1 por mil.

4. ¿Cuál es el modo correcto de comparar qué aproximación es mejor? ¿El error absoluto o el error relativo?

Cuando las dos aproximaciones son aproximaciones al mismo número, cualquiera de los dos errores nos da la misma respuesta. La aproximación con el error absoluto (o relativo) más pequeño es la mejor.

Sin embargo, cuando comparamos dos aproximaciones a dos números distintos, no podemos compararlas usando los errores absolutos. Solamente podemos compararlas usando los errores relativos.

Por ejemplo:

- Caso 1:

  Si el número es:

  $$x = 2330$$

  Y la aproximación es:

  $$2300$$

  El error absoluto es de 30. Y el error relativo es:

  $$\frac{30}{2330} = 0.0129$$

- Caso 2:

  Si el número es:

$$y = 32$$

Y la aproximación es:

$$y = 30$$

El error absoluto es de 2. Y el error relativo es:

$$\frac{2}{30} = 0.0667$$

Aunque el error absoluto del caso 2 es menor que el del caso 1, la mejor aproximación es la primera; tiene menor error relativo.

Ésta es la razón por la que existe el error relativo.

Teoría de números

1. Demuestra que $n^2 - n$ es divisible entre 2 para cualquier valor natural de n.

Nos piden demostrar que:

$$2 \mid (n^2 - n)$$

es decir, que $n^2 - n$ es par.

Es cierto cuando $n = 0$:

$$2 \mid (0^2 - 0) \to 2 \mid 0$$

Para números naturales mayores que 0[12], podemos usar el método de inducción.

1. Comprobamos que es cierto para $n = 1$.

$$1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

   Y cero es divisible entre 2, por lo que es cierto.

2. Suponemos que es cierto para n. Este paso es la **hipótesis de inducción**.

$$2 \mid (n^2 - n)$$

3. Comprobamos que es cierto para $n + 1$.

$$(n+1)^2 - (n+1) =$$

[12]Recuerda que nosotros usamos la convención de que 0 es un número natural.

$$= n^2 + 2n + 1 - n - 1 =$$

$$= n^2 + n =$$

Esta expresión se parece mucho a la que aparece en la hipótesis de inducción. Podemos restar n y sumar n:

$$= n^2 + n - n + n =$$

Reordenando:

$$= (n^2 - n) + 2n$$

Por la hipótesis de inducción, lo que han entre paréntesis es par. Pero $2n$ también es par. Como la suma de dos números pares también es par, acabamos de demostrar que $(n+1)^2 - (n+1)$ es par.

La hipótesis es, por lo tanto, cierta:

$$2 \mid (n^2 - n)$$

Como queríamos demostrar.

2. Encuentra los dígitos n y m del número $23n431m$ para que sea divisible entre 15.

El número 15 es un número compuesto y su factorización es $15 = 3 \cdot 5$. Por lo tanto, para que el número $23n431m$ sea divisible entre 15, debe ser divisible entre 3 y entre 5.

Para que un número sea divisible entre 5, el último dígito (el de las unidades) debe ser 0 o 5. Por lo tanto:

$$m = 0 \lor m = 5$$

La suma de todos los dígitos debe ser divisible entre 3 para que el número sea divisible entre tres:

$$3 \mid 23n431m \iff 3 \mid (2 + 3 + n + 4 + 3 + 1 + m)$$
$$3 \mid 23n431m \iff 3 \mid (5 + n + 8 + m)$$
$$3 \mid 23n431m \iff 3 \mid (13 + n + m)$$
$$3 \mid 23n431m \iff 3 \mid (1 + 3 + n + m)$$
$$3 \mid 23n431m \iff 3 \mid (4 + n + m)$$

Vamos a considerar los dos casos posibles para m:

- Si $m = 0$ entonces:

$$4 + n + 0 = 4 + n$$

  Los posibles valores de n que dan valores divisibles entre 3 son:

  - $n = 2$ porque $3 \mid (4 + 2)$ es decir $3 \mid 6$
  - $n = 5$ porque $3 \mid (4 + 5)$ es decir $3 \mid 9$
  - $n = 8$ porque $3 \mid (4 + 8)$ es decir $3 \mid 12$

- Si $m = 5$ entonces:

$$4 + n + 5 = 9 + n$$

  $9 + n$ es divisible entre 3 si n es divisible entre tres. Por lo tanto los posibles valores de n que cumplen las condiciones son:

  - $n = 0$
  - $n = 3$
  - $n = 6$
  - $n = 9$

Es decir, los números siguientes cumplen las condiciones:

- 2324310
- 2354310
- 2384310
- 2304315
- 2334315
- 2364315
- 2394315

3. Encuentra el dígito n para que el número $23n730$ sea divisible entre 11.

Un número es divisible entre 11 si la diferencia de la suma de los dígitos en posición par menos la suma de los dígitos en posición impar es divisible entre 11. Es decir:

$$11 \mid 23n730 \iff 11 \mid (2 + n + 3 - 3 - 7 - 0)$$
$$11 \mid 23n730 \iff 11 \mid (n - 5)$$

Como n es un solo dígito, la diferencia solamente puede ser divisible entre 11 si es 0 (0 es el único número de un solo dígito divisible entre 11):

$$n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$$

Por lo tanto, el número es 235730.

4. Un autobús coincide con otro autobús a las 10:00 de la mañana en una parada. El primer autobús pasa cada 20 minutos por esa parada. El segundo autobús pasa cada 45 minutos por esa parada. ¿A qué hora vuelven a coincidir ambos autobuses en esa parada?

El primer autobús pasará al cabo de 20 minutos la primera vez, 40 minutos la segunda vez, 60 minutos la tercera vez... El segundo autobús pasará al cabo de 45 minutos la primera vez, 90 minutos la segunda vez, 135 minutos la tercera vez...

Volverán a coincidir cuando haya pasado el mismo tiempo para los dos.

Los tiempos en los que pasan por la parada son múltiplos de 20 (el primer autobús) y 45 (el segundo autobús) minutos. Lo que estamos buscando es el **mínimo común múltiplo** de ambos números.

- Encontrar el mínimo común múltiplo por *fuerza bruta*.

  Podemos listar los múltiplos de ambos números y parar la lista cuando aparezca un elemento común en ambas listas.

  20: 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, **180**, 200, 220... 45: 0, 45, 90, 135, **180**, 225...

  El primer elemento que coincide en ambas listas (además del cero) es **180**.

  $$\mathrm{m.\,c.\,m.}(20, 45) = 180$$

  Por lo tanto vuelven a coincidir cuando han pasado 180 minutos. Es decir $180/60 = 3$ horas.

  Vuelven a coincidir a las 13:00. (También a las 16:00, las 19:00...)

- Encontrar el mínimo común múltiplo factorizando ambos números.

  Factorizamos 20:

  $$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

  por lo tanto, $20 = 2^2 \cdot 5$.

  Factorizamos 45:

  $$\begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

  por lo tanto, $45 = 3^2 \cdot 5$.

  El mínimo común múltiplo debe contener todos los factores primos (sean comunes o no) y siempre aquellos que tienen el exponente mayor:

  $$\begin{gathered} \mathrm{m.\,c.\,m.}(20, 45) = \\ = \mathrm{m.\,c.\,m.}(2^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 5) = \\ = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = \\ = 180 \end{gathered}$$

Es decir, coinciden cada 180 minutos (cada 3 horas).

5. Una diseñadora gráfica tiene un lienzo[a] rectangular de 96 centímetros de alto por 132 centímetros de ancho. Quiere cubrir todo el lienzo con cuadrados de manera que no queden huecos, que los cuadrados estén dentro del lienzo y que sean lo más grandes posibles. ¿Qué dimensiones deben tener los cuadrados?

[a]**Lienzo**: en eslovaco, *plátno*; en inglés, *canvas*; en esperanto, *kanvaso*…

El lado de los cuadrados debe ser divisor de la altura del lienzo y también de su anchura. Además nos piden que este número sea lo mayor posible, por lo tanto queremos el **máximo común divisor**.

Podemos encontrarlo de varias maneras:

- Encontrar el máximo común divisor por *fuerza bruta*.

  La lista de divisores de 96 es:

  1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96

  La lista de divisores de 132 es:

  1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132

  El número más grande que se repite en ambas listas es el 12. Por lo tanto:

  $$\mathrm{m.c.d.}(96, 132) = 12$$

  Los cuadrados deben tener 12 centímetros de lado.

  Este sistema tiene varios problemas:

  - Es fácil olvidar algún divisor en la lista.

    Aunque sabemos que los divisores van por parejas (el primero por el último es igual al número, el segundo por el penúltimo es igual al número…), es relativamente fácil olvidar alguno.

  - Si los números son grandes, las listas pueden ser demasiado largas y puede llevar demasiado tiempo escribirlas.

- Encontrar el máximo común divisor factorizando ambos números.

  $$\begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

  $$96 = 2^5 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

El máximo común divisor se obtiene como el producto de los factores primos que coinciden y siempre con el menor exponente:

$$\begin{gathered} \text{m. c. d.}(96, 132) = \\ = \text{m. c. d.}(2^5 \cdot 3, 2^2 \cdot 3 \cdot 11) = \\ = 2^2 \cdot 3 = \\ = 12 \end{gathered}$$

El máximo común divisor es 12. Por lo tanto los cuadrados deberán tener 12 centímetros de lado.

6. El 4 de enero de 2022 fue martes. ¿Qué día de la semana fue el 17 de julio de ese año?

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que 2022 no es un año bisiesto[13]; no es divisible entre 4 porque las dos últimas cifras (22) no son divisibles entre 4. Es decir, en 2022, febrero solamente tiene 28 días.

A continuación, vamos a calcular qué día del año es cada una de esas dos fechas:

- 4 de enero = 4
- 17 de julio

  enero + febrero + marzo + abril + mayo + junio + 17 días =

  = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 17 =

  = 198

Sabemos que la semana tiene 7 días y se repite cíclicamente. Obtener el día de la semana será dividir el día del año entre 7 y estudiar el resto.

Al dividir 4 entre 7, el resto es 4. Y el resto 4 equivale a un martes (porque el 4 de enero de 2022 fue martes). Por lo tanto:

- Si el resto es 0, es viernes.
- Si el resto es 1, es sábado.
- Si el resto es 2, es domingo.
- Si el resto es 3, es lunes.
- Si el resto es 4, es martes.
- Si el resto es 5, es miércoles.
- Si el resto es 6, es jueves.

[13] Un año bisiesto tiene 366 días.

Al dividir 198 entre 7, el cociente es 28 y el resto es 2. Es decir:

El 17 de julio de 2022 fue **domingo**.

7. Escribe los conjuntos de divisores de los siguientes números:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) 12
f) 13

a) $\text{Div}(0) = \{1, 2, 3 \ldots\} = \mathbb{N}$

El 0 tiene infinitos divisores. No es ni primo ni compuesto.

b) $\text{Div}(1) = \{1\}$

El 1 solamente tiene un divisor. No es ni primo ni compuesto.

c) $\text{Div}(2) = \{1, 2\}$

El 2 solamente tiene dos divisores. Es un número primo.

d) $\text{Div}(4) = \{1, 2, 4\}$

El 4 tiene un número finito de divisores que es mayor que dos. Es un número compuesto.

e) $\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

El 12 tiene un número finito de divisores que es mayor que dos. Es un número compuesto.

f) $\text{Div}(13) = \{1, 13\}$

El 13 solamente solamente dos divisores. Es un número primo.

8. Escribe los conjuntos de múltiplos (incluyendo el 0) de los siguientes números:
a) 2
b) 3
c) 12

a) $\text{Múl}(2) = \{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$

Es el conjunto de los naturales pares.

$\text{Múl}(2) = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n\}$

b) $\text{Múl}(3) = \{0, 3, 6, 9, 12 \ldots\}$

$\text{Múl}(3) = \{3n : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : 3 \mid n\}$

c) $\text{Múl}(12) = \{0, 12, 24, 36 \ldots\}$

$\text{Múl}(12) = \{12n : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : 12 \mid n\}$

Todos esos conjuntos son infinitos numerables.

Potencias, raíces y logaritmos

Las **potencias**, las **raíces** y los **logaritmos** están íntimamente relacionados. Y muchos de los problemas que los estudiantes tienen con ellos tienen que ver con el hecho de que parecen cosas distintas porque se escriben de maneras muy diferentes.

Piensa en la expresión $2^3 = 8$. Aquí el 2 es la **base**, 3 es el **exponente** y 8 es la **potencia**. Y ahora contesta a estas preguntas:

1. ¿Cuál es la potencia cuando la base es 3 y el exponente es 2?

   La potencia es 9, porque $3^2 = 9$.

2. ¿Cuál es la base cuando la potencia es 25 y el exponente es 2?

   La base es 5 (o -5), porque $5^2 = 25$.

3. ¿Cuál es el exponente cuando la potencia es 16 y la base es 2?

   El exponente es 4, porque $2^4 = 16$.

No tienen una dificultad especial. Y, sin embargo, la segunda pregunta es una raíz y la tercera es un logaritmo:

- La pregunta *"¿Cuál es la base cuando la potencia es 25 y el exponente es 2?"* equivale a:

  "¿Cuál es raíz de índice 2 (= raíz cuadrada) de 25?"

$$5^2 = 25 \iff \sqrt{25} = 5$$

- La pregunta *"¿Cuál es el exponente cuando la potencia es 16 y la base es 2?"* equivale a:

  "¿Cuál es el logaritmo en base 2 de 16?"

$$2^4 = 16 \iff \log_2(16) = 4$$

Así que quizás debimos llamar *bases* a las *raíces* y *exponentes* a los *logaritmos*.

En el momento en el que realmente asimiles esta introducción, verás como las propiedades de potencias, raíces y logaritmos encajan entre si. Y algo que te parecía terrible y difícil te parece bastante sencillo.

Potencias y raíces

1. Simplifica la expresión siguiente:

$$\frac{a^2 \cdot (a^{-1} \cdot b^3)^3}{a^3 \cdot b^{-2}}$$

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 \cdot (a^{-1} \cdot b^3)^3}{a^3 \cdot b^{-2}} = \\ &= \frac{a^2 \cdot a^{-3} \cdot b^9}{a^3 \cdot b^{-2}} = \\ &= \frac{a^{-1} \cdot b^9}{a^3 \cdot b^{-2}} = \\ &= a^{-1-3} \cdot b^{9-(-2)} = \\ &= a^{-4} \cdot b^{11} \end{aligned}$$

2. Simplifica la expresión siguiente:

$$\frac{{\frac{a^5}{b^3}}^{2} \cdot (b^2 \cdot a)^3}{\frac{a^2}{b^3} \cdot b}$$

$$\begin{aligned} &\frac{{\frac{a^5}{b^3}}^{2} \cdot (b^2 \cdot a)^3}{\frac{a^2}{b^3} \cdot b} = \\ &= \frac{\frac{a^{10}}{b^6} \cdot b^6 \cdot a^3}{\frac{a^2}{b^2}} = \\ &= \frac{a^{10} \cdot b^{-6} \cdot b^6 \cdot a^3}{a^2 \cdot b^{-2}} = \\ &= \frac{a^{10} \cdot a^3}{a^2 \cdot b^{-2}} = \\ &= \frac{a^{13}}{a^2 \cdot b^{-2}} = \\ &= a^{13} \cdot a^{-2} \cdot b^2 = \\ &= a^{13-2} \cdot b^2 = \\ &= a^{11} \cdot b^2 \end{aligned}$$

3. Expresa como una sola raíz:

$$3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{72}$$

Primero factorizamos los radicandos (= los números que aparecen dentro de las raíces):

$$8 = 2^3$$

$$50 = 2 \cdot 5^2$$
$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Ahora sustituimos:

$$3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{72} =$$
$$= 3\sqrt{2^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + 2\sqrt{2^3 \cdot 3^2} =$$

Podemos sacar factores fuera de las raices:

$$= 3 \cdot 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} =$$
$$= 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} =$$
$$= 13\sqrt{2} =$$

El ejercicio indica que hay que expresar el resultado como una sola raíz. Tal vez, por lo tanto, no debería haber nada fuera de ella. Por lo tanto, introducimos el número 13 dentro:

$$= \sqrt{13^2 \cdot 2} = \sqrt{338}$$

4. Expresa como una sola raíz:

$$5\sqrt{\frac{27}{125}} - \sqrt{\frac{3}{20}} + 2\sqrt{\frac{147}{80}}$$

Factorizamos los numeradores y denominadores de las fracciones que aparecen en los radicandos:

- $27 = 3^3$
- $125 = 5^3$
- $3 = 3$
- $20 = 2^2 \cdot 5$
- $147 = 3 \cdot 7^2$
- $80 = 2^4 \cdot 5$

Sustituyendo:

$$5\sqrt{\frac{27}{125}} - \sqrt{\frac{3}{20}} + 2\sqrt{\frac{147}{80}} =$$
$$= 5\sqrt{\frac{3^3}{5^3}} - \sqrt{\frac{3}{2^2 \cdot 5}} + 2\sqrt{\frac{3 \cdot 7^2}{2^4 \cdot 5}} =$$

Sacamos factores de las raíces:

$$= 5\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\frac{7}{2^2}\sqrt{\frac{3}{5}} =$$
$$= 3\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{6}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{3}{5}} + 3\sqrt{\frac{3}{5}} =$$

$$= 6\sqrt{\frac{3}{5}} =$$

Si queremos que no haya nada fuera de la raíz:

$$= \sqrt{6^2 \cdot \frac{3}{5}} =$$

$$= \sqrt{36 \cdot \frac{3}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{108}{5}}$$

5. Ordena de menor a mayor los siguientes números: $\sqrt[3]{20}, \sqrt[5]{200}, 2^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, 4$.

Aunque es tentador usar la calculadora, el objetivo del ejercicio es demostrar que **no es necesaria la calculadora**. Para ello vamos a intentar expresar todos los números como raíces:

- $\sqrt[3]{20}$
- $\sqrt[5]{200}$
- $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8 = \sqrt{8^2}$
- $4 = \sqrt{4^2}$

Ahora podemos buscar raíces equivalentes que tengan el mismo índice. Las raíces son una raíz cúbica (el índice es 3), una raíz quinta (el índice es 5) y tres raíces cuadradas (el índice es 2). El mínimo común múltiplo de 3, 5 y 2 es 30. Por lo tanto, tenemos que convertir las raíces anteriores en raíces de índice 30:

- $\sqrt[3]{20} = \sqrt[30]{20^{10}}$
- $\sqrt[5]{200} = \sqrt[30]{200^6}$
- $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8 = \sqrt{8^2} = \sqrt[30]{(8^2)^{15}}$
- $4 = \sqrt{4^2} = \sqrt[30]{(4^2)^{15}}$

Por comodidad, llamaremos a los números a, b, c, d y e:

- $a = \sqrt[30]{20^{10}}$
- $b = \sqrt[30]{200^6}$
- $c = \sqrt[30]{2^{15}}$
- $d = \sqrt[30]{8^{30}} = \sqrt[30]{2^{90}}$
- $e = \sqrt[30]{4^{30}} = \sqrt[30]{2^{60}}$

Es decir:

- $a = \sqrt[30]{20^{10}}$

- $b = \sqrt[30]{200^6}$
- $c = \sqrt[30]{2^{15}}$
- $d = \sqrt[30]{2^{90}}$
- $e = \sqrt[30]{2^{60}}$

Es evidente que $c < e < d$.

Si observamos los radicandos de a (20^{10}) y b (200^6):

$$20^{10} \square 200^6$$
$$20^{10} \square (20 \cdot 10)^6$$
$$20^{10} \square 20^6 \cdot 10^6$$
$$\frac{20^{10}}{20^6} \square 10^6$$
$$20^4 \square 10^6$$
$$(2 \cdot 10)^4 \square 10^6$$
$$2^4 \cdot 10^4 \square 10^6$$
$$2^4 \square \frac{10^6}{10^4}$$
$$2^4 \square 10^2$$
$$2^4 \square (2 \cdot 5)^2$$
$$2^4 \square 2^2 \cdot 5^2$$
$$\frac{2^4}{2^2} \square 5^2$$
$$2^2 \square 5^2$$
$$4 \square 25$$

El símbolo cuadrado debe ser entonces un *menor que*. Por lo tanto $a < b$.

Si comparamos los radicandos de a y c:

$$20^{10} \square 2^{15}$$
$$(2 \cdot 10)^{10} \square 2^{15}$$
$$2^{10} \cdot 10^{10} \square 2^{15}$$
$$10^{10} \square 2^5$$
$$(2 \cdot 5)^{10} \square 2^5$$
$$2^{10} \cdot 5^{10} \square 2^5$$
$$2^5 \cdot 5^{10} \square 1$$

Por lo tanto, el símbolo cuadrado debe ser entonces **mayor que**: $a > c$. Y entonces $c < a < b$.

Ahora comparamos b y e:

$$200^6 \square 2^{90}$$

$$(2^3 \cdot 5^2)^6 \,\square\, 2^{90}$$
$$2^{18} \cdot 5^{12} \,\square\, 2^{90}$$
$$5^{12} \,\square\, \frac{2^{90}}{2^{18}}$$
$$5^{12} \,\square\, 2^{72}$$
$$5^{12} \,\square\, 2^{6\cdot 12}$$
$$5^{12} \,\square (2^6)12$$

Como los exponentes son iguales, y claramente 2^6 es mayor que 5, entonces el símbolo cuadrado debe ser un *menor que*: $b < e$.

Por lo tanto:

$$c < a < b < e < d$$

6. Convierte en una sola raíz:

$$3\ \overline{3^{-2}\sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}}$$

$$3\ \overline{3^{-2}\sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}} =$$

Al introducir el primer tres dentro de la raíz más externa, tenemos que elevarlo a 2:

$$= \ \overline{3^2 \cdot 3^{-2}\sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}} =$$

Pero eso es:

$$= \ \overline{3^0\sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}} =$$
$$= \ \overline{1 \cdot \sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}} =$$
$$= \ \overline{\sqrt[3]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}}} =$$

Podemos unir la raíz cuadrada y la raíz cúbica como una raíz sexta ($2 \cdot 3 = 6$):

$$= \sqrt[6]{3^3\sqrt{3}\sqrt[5]{3^2}} =$$

Las dos raíces en el radicando (la raíz cuadrada de 3 y la raíz quinta de tres al cuadrado) se pueden multiplicar fácilmente si tienen el mismo índice. Encontramos raíces equivalentes buscando el mínimo común múltiplo de los índices (2 y 5): es decir 10.

$$= {}^{6}\ \overline{3^3\sqrt[10]{3^5}\sqrt[10]{(3^2)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{3^3 \sqrt[10]{3^5 \cdot (3^2)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{3^3 \sqrt[10]{3^5 \cdot 3^4}} =$$

$$= \sqrt[6]{3^3 \sqrt[10]{3^9}} =$$

Ahora introducimos 3^3 dentro de la raíz más interna:

$$= \sqrt[6]{\sqrt[10]{(3^3)^{10} \cdot 3^9}} =$$

$$= \sqrt[6]{\sqrt[10]{3^{30} \cdot 3^9}} =$$

$$= \sqrt[6]{\sqrt[10]{3^{39}}} =$$

Unimos las dos raíces multiplicando los índices:

$$= \sqrt[60]{3^{39}} =$$

Como 60 y 39 son divisibles entre 3, podemos simplificar:

$$= \sqrt[20]{3^{13}}$$

7. Simplifica todo lo posible la expresión:

$$\sqrt{\frac{x^2y - 2xy}{x-2}} - \sqrt{\frac{-3xy + xy^2}{y-3}}$$

$$\sqrt{\frac{x^2y - 2xy}{x-2}} - \sqrt{\frac{-3xy + xy^2}{y-3}} =$$

Podemos sacar xy como factor común en los denominadores de ambos radicandos:

$$= \sqrt{\frac{xy \cdot (x-2)}{x-2}} - \sqrt{\frac{xy \cdot (-3+y)}{y-3}} =$$

Ahora podemos eliminar $(x-2)$ en el primer radicando; aparece tanto en el numerador como en el denominador:

$$= \sqrt{xy} - \sqrt{\frac{xy \cdot (-3+y)}{y-3}} =$$

Reordenamos:

$$= \sqrt{xy} - \sqrt{\frac{xy \cdot (y-3)}{y-3}} =$$

y simplificamos:

$$= \sqrt{xy} - \sqrt{xy} = 0$$

El resultado es que la expresión es igual a 0.

8. Expresa la siguiente expresión como una raíz y como una potencia:

$$ {a^{\frac{3}{2}}}^{\frac{5}{7}} \cdot {a^{\frac{10}{9}}}^{\frac{1}{2}} \div {\frac{1}{a^3}}^{\frac{3}{7}} $$

$$ {a^{\frac{3}{2}}}^{\frac{5}{7}} \cdot {a^{\frac{10}{9}}}^{\frac{1}{2}} \div {\frac{1}{a^3}}^{\frac{3}{7}} = $$

La potencia de una potencia es la base elevada al producto de los exponentes:

$$ = a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}} \cdot a^{\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{2}} \div {\frac{1}{a^3}}^{\frac{3}{7}} = $$
$$ = a^{\frac{15}{14}} \cdot a^{\frac{10}{18}} \div {\frac{1}{a^3}}^{\frac{3}{7}} = $$

Podemos cambiar numerador y denominador cambiando el signo del exponente en el último factor:

$$ = a^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}} \cdot a^{\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{2}} \div {\frac{1}{a^3}}^{\frac{3}{7}} = $$
$$ = a^{\frac{15}{14}} \cdot a^{\frac{10}{18}} \div {a^{-3}}^{\frac{3}{7}} = $$

El producto de potencias de la misma base es la base elevada a la suma de los exponentes:

$$ = a^{\frac{15}{14}+\frac{10}{18}} \div {a^{-3}}^{\frac{3}{7}} = $$

El mínimo común múltiplo de 14 y 18 es 126. Y $126 = 14 \cdot 9$. Y $126 = 18 \cdot 7$. Por lo tanto:

$$ = a^{\frac{15\cdot 9}{126}+\frac{10\cdot 7}{126}} \div {a^{-3}}^{\frac{3}{7}} = $$

La potencia de una potencia es la base elevada al producto de los exponentes:

$$ = a^{\frac{15\cdot 9}{126}+\frac{10\cdot 7}{126}} \div a^{-3\cdot\frac{3}{7}} = $$
$$ = a^{\frac{15\cdot 9}{126}+\frac{10\cdot 7}{126}} \div a^{\frac{-9}{7}} = $$
$$ = a^{\frac{135}{126}+\frac{70}{126}} \div a^{\frac{-9}{7}} = $$
$$ = a^{\frac{205}{126}} \div a^{\frac{-9}{7}} = $$

La división de potencias de la misma base es la base elevada a la diferencia de los exponentes:

$$ = a^{\frac{205}{126}-\frac{-9}{7}} = $$

$$= a^{\frac{205}{126}-\frac{-9\cdot 18}{7\cdot 18}} =$$
$$= a^{\frac{205}{126}-\frac{-162}{126}} =$$
$$= a^{\frac{367}{126}}$$

En forma de raíz:

$$= \sqrt[126]{a^{367}}$$

9. A partir de otras de las propiedades de las potencias, demuestra que $a^0 = 1$ y $a^{-2} = 1/a^2$.

Sabemos que la división de dos potencias de la misma base cumple:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Pero si n y m son iguales:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$$

El cociente de dos números iguales es 1:

$$1 = a^{n-n}$$

Y la diferencia de dos números iguales es 0:

$$1 = a^0$$

como queríamos demostrar.

Para demostrar:

$$a^{-2} = 1/a^2$$

multiplicamos ambos lados por a^2:

$$a^{-2} \cdot a^2 = a^2 \cdot 1/a^2$$

El producto de potencias de la misma base es la base elevada a la suma de los exponentes:

$$a^{-2+2} = a^2 \cdot 1/a^2$$
$$a^0 = \frac{a^2}{a^2}$$
$$a^0 = 1$$

que es la propiedad que demostramos antes. Por lo que hemos demostrado ésta.

10. Expresa como una sola potencia:

$$2^{15}+2^{15}+2^{15}+2^{15}+$$
$$+2^{15}+2^{15}+2^{15}+2^{15}$$

Es un ejercicio muy sencillo. Tenemos 8 veces la misma potencia sumándose:

$$2^{15}+2^{15}+2^{15}+2^{15}+$$
$$+2^{15}+2^{15}+2^{15}+2^{15}=$$

Eso equivale a multiplicar por 8 la potencia:

$$=8\cdot 2^{15}=$$

Pero 8 es el cubo de 2:

$$=2^{3}\cdot 2^{15}=$$

Como el producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes:

$$=2^{3+15}=2^{18}$$

11. Encuentra los números naturales a y b para los que se cumple:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{5+\sqrt{24}}$$

Si el lado izquierdo y el lado derecho son iguales, sus cuadrados deben ser iguales:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ^{2}=\ \sqrt{5+\sqrt{24}}\ ^{2}$$

En el lado derecho, desaparece la raíz externa:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ^{2}=5+\sqrt{24}$$

En el lado izquierdo, podemos usar una de las identidades notables:

$$\sqrt{a}\ ^{2}+\ \sqrt{b}\ ^{2}+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=5+\sqrt{24}$$
$$a+b+2\cdot\sqrt{a\cdot b}=5+\sqrt{24}$$

El número 24 es 4 por 6:

$$a+b+2\cdot\sqrt{a\cdot b}=5+\sqrt{4\cdot 6}$$

$$a + b + 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} = 5 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{6}$$
$$a + b + 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} = 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$$

Para que los dos lados sean iguales, lo que hay dentro de la raíz debe ser igual en ambos lados y lo que hay fuera, también:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a \cdot b = 6 \end{cases}$$

Parece evidente que los números que cumplen las ecuaciones son 2 y 3. Pero vamos a comprobarlo resolviendo el sistema.

Para eso, despejamos b de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$a \cdot (5 - a) = 6$$
$$5a - a^2 = 6$$
$$5a - a^2 - 6 = 0$$
$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

Es una ecuación cuadrática completa que podemos resolver con la fórmula:

$$a = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$
$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo que hay dos posibles valores de a:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 2$$

Y los valores correspondientes de b son:

$$b_1 = 2 \quad b_2 = 3$$

Es decir, o a es 2 y b es 3, o a es 3 y b es 2.

Racionalización

A los matemáticos no les gustan los signos negativos en un denominador. Y tampoco les gustan las raíces en el denominador (la parte de debajo) de una expresión. Al proceso de conseguir una expresión equivalente que no tiene raíces en el denominador se le llama *racionalización del denominador* o simplemente *racionalización*.

También se puede *racionalizar el numerador* (la parte de arriba) de una expresión, pero casi siempre que racionalizamos, racionalizamos el denominador.

En trigonometría, los valores exactos de algunas razones trigonométricas contienen raíces. Por eso, la racionalización puede ser útil cuando hay razones trigonométricas.

1. Racionaliza los denominadores en las siguientes expresiones:

a)
$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

b)
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

c)
$$\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{8}}$$

d)
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{125}-2\sqrt{8}}$$

a)
$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Como solamente aparece una raíz abajo y es una raíz cuadrada, multiplicamos por la misma raíz arriba y abajo:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} =$$

Pero el producto de las raíces es el cuadrado de la raíz:

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}^{\,2}} =$$

El cuadrado y la raíz se cancelan mutuamente:

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} =$$

Podemos dejar así el resultado o podemos escribirlo:

$$= \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}$$

b)
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

Como solamente aparece una raíz abajo y es una raíz cuadrada, multiplicamos por la misma raíz arriba y abajo:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7}^{\;2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{7} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 7}}{7} =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{7}$$

c)

$$\frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{8}}$$

Aquí tenemos una suma en el denominador. Pero la suma tiene una raíz cuadrada. Para eliminarla, multiplicamos arriba y abajo por la **resta**:

$$\frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{8}} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{8}}{1 - 2\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (1 - 2\sqrt{8})}{1 + 2\sqrt{8} \quad \cdot \quad 1 - 2\sqrt{8}} =$$

La identidad notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ nos dice que la suma por la diferencia es la diferencia de los cuadrados:

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (1 - 2\sqrt{8})}{(1)^2 - \quad 2\sqrt{8}^{\;2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2 \cdot 8}}{1 - 2^2 \quad \sqrt{8}^{\;2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{16}}{1 - 2^2 \cdot 8} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 8}{1 - 32} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 8}{-31} =$$

Podemos poner el signo menos delante:

$$= -\frac{\sqrt{2} - 8}{31} =$$

O meterlo en el numerador:

$$= \frac{-\sqrt{2} + 8}{31} =$$

Reordenando:

$$= \frac{8 - \sqrt{2}}{31}$$

d)

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{125}-2\sqrt{8}}$$

Aquí tenemos una diferencia (= una resta) en el denominador. Pero aparecen solamente raíces cuadradas. Para eliminarlas, multiplicamos arriba y abajo por la **suma**::

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{125}-2\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{125}-2\sqrt{8}} \cdot \frac{3\sqrt{125}+2\sqrt{8}}{3\sqrt{125}+2\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad \cdot \quad 3\sqrt{125}+2\sqrt{8}}{3\sqrt{125}-2\sqrt{8} \quad \cdot \quad 3\sqrt{125}+2\sqrt{8}} =$$

Como la suma por la diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad \cdot \quad 3\sqrt{125}+2\sqrt{8}}{3^2 \cdot 125 - 2^2 \cdot 8} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad \cdot \quad 3\sqrt{125}+2\sqrt{8}}{1093} =$$

Multiplicando arriba:

$$= \frac{3\sqrt{2\cdot 125}+2\sqrt{2\cdot 8}}{1093} +$$

$$+ \frac{3\sqrt{3\cdot 125}+2\sqrt{3\cdot 8}}{1093} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5}+2\sqrt{16}+3\sqrt{3\cdot 5^2\cdot 5}}{1093} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{3\cdot 2^2\cdot 2}}{1093} =$$

$$= \frac{3\cdot 5\sqrt{2\cdot 5}+2\cdot 4}{1093} +$$

$$+ \frac{3\cdot 5\sqrt{3\cdot 5}+2\cdot 2\sqrt{3\cdot 2}}{1093} =$$

$$= \frac{15\sqrt{10}+8+15\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{1093}$$

2. Racionaliza los numeradores en las siguientes expresiones:

a)

$$\frac{\sqrt{15}}{17}$$

b)

$$\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{7}}$$

Ahora nos piden eliminar las raíces en la parte superior.

a)

$$\frac{\sqrt{15}}{17} =$$

Multiplicamos arriba y abajo por la raíz de 15:

$$= \frac{\sqrt{15}}{17} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} =$$

$$= \frac{\sqrt{15} \quad \cdot \quad \sqrt{15}}{17 \cdot \sqrt{15}} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}^{\;2}}{17 \cdot \sqrt{15}} =$$

$$= \frac{15}{17\sqrt{15}}$$

b)

$$\frac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{7}} =$$

Multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del numerador. Es decir, como hay una resta, multiplicamos por la suma:

$$= \frac{\sqrt{2} - 3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + 3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 3 \quad \cdot \quad \sqrt{2} + 3}{\sqrt{7} \cdot \quad \sqrt{2} + 3} =$$

La suma por la diferencia es la diferencia de cuadrados:

$$= \frac{\sqrt{2}^{\;2} - (3)^2}{\sqrt{7} \cdot \quad \sqrt{2} + 3} =$$

$$= \frac{2 - 9}{\sqrt{7} \cdot \quad \sqrt{2} + 3} =$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{14} + 3\sqrt{7}}$$

3. Racionaliza los denominadores:

a)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$$

a)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} =$$

La raíz no es cuadrada, sino cúbica. Así que tenemos que multiplicar **dos veces** por la raíz cúbica para eliminarla. (Porque tenemos una y necesitamos dos más para tener tres en total.)

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{7}^{\,2}}{\sqrt[3]{7}^{\,3}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Que también se puede escribir:

$$= \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}} =$$

La raíz no es cuadrada, sino cuarta. Así que tenemos que multiplicar **tres veces** por la raíz cúbica para eliminarla. (Porque tenemos una y necesitamos tres más para tener cuatro en total.)

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{7}} \cdot \frac{\sqrt[4]{7}^{\,3}}{\sqrt[4]{7}^{\,3}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{7}^{\,3}}{\sqrt[4]{7}^{\,4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{7^3}}{7} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{343}}{7}$$

4. En física clásica el módulo del **momento lineal** se calcula como:

$$p = m \cdot v$$

donde p es el momento lineal, m es la masa y v es la velocidad.
En física relativista (relatividad especial, 1905, Albert Einstein), el momento lineal se calcula:

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.
Encuentra una fórmula donde no aparezcan raíces en el denominador.

Lo que se nos pide es **racionalizar** la expresión. Para eso, multiplicaremos por una fracción igual a 1 que tenga como numerador y denominador, la raíz del denominador de la primera:

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^2} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

Podríamos hacer lo siguiente:

$$= \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{c^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot c^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} =$$

Si manipulamos las fracciones de la misma manera en la raíz del numerador:

$$= \frac{m \cdot v \cdot c^2 \cdot \sqrt{\frac{c^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot c^2 \cdot \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} =$$

$$= \frac{m \cdot v \cdot c \cdot \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}$$

5. La unidad imaginaria es $i = \sqrt{-1}$. Un número complejo siempre se escribe $x + iy$ donde x e y son números reales.
Calcula la división:

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i}$$

$$z = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{2 + 3\sqrt{-1}}{5 - 7\sqrt{-1}} =$$

Queremos eliminar la raíz del denominador. Por lo tanto, tenemos que multiplicar arriba y abajo por el **conjugado** del denominador:

$$= \frac{2+3\sqrt{-1}}{5-7\sqrt{-1}} \cdot \frac{5+7\sqrt{-1}}{5+7\sqrt{-1}} =$$

$$= \frac{2+3i}{5-7i} \cdot \frac{5+7i}{5+7i} =$$

Por comodidad usaremos i:

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{(5-7i)\cdot(5+7i)} =$$

Debajo podemos usar la identidad notable del producto de una suma por una diferencia:

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{5^2-(7i)^2} =$$

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{5^2-7^2i^2} =$$

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{25-49i^2} =$$

pero, si $i=\sqrt{-1}$, entonces $i^2=-1$:

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{25-49\cdot(-1)} =$$

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{25+49} =$$

$$= \frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{74} =$$

Multiplicamos arriba:

$$= \frac{10+14i+15i+21i^2}{74} =$$

$$= \frac{10+29i+21i^2}{74} =$$

$$= \frac{10+29i+21\cdot(-1)}{74} =$$

$$= \frac{10+29i-21}{74} =$$

$$= \frac{-11+29i}{74} =$$

$$= \frac{-11}{74} + \frac{29}{74}i$$

La parte real de la división es la que no tiene i:

$$\Re(z) = \frac{-11}{74}$$

La parte imaginaria es el coeficiente de i:

$$\Im(z) = \frac{29}{74}$$

6. Racionaliza:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{-2+\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{-2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2) \cdot (\sqrt{3}+2)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{21}-2\sqrt{7}}{3-4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{21}-2\sqrt{7}}{-1} =$$

$$= -\sqrt{6}-2\sqrt{2}+\sqrt{21}+2\sqrt{7}$$

7. Racionaliza el denominador en la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

Queremos eliminar las raíces del denominador. Como tenemos una diferencia (= una resta) de raíces, multiplicamos arriba y abajo por la suma de las mismas raíces. Es decir, por el *conjugado*:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{h \cdot \quad \sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x} \quad \cdot \quad \sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

Suma por diferencia es diferencia de cuadrados:

$$= \frac{h \cdot \quad \sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}^{\;2} - (\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{h \cdot \quad \sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{x+h-x} =$$

$$= \frac{h \cdot \quad \sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{h} =$$
$$= \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$$

8. Racionaliza el numerador en la expresión:

$$\frac{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} - \sqrt{x+x^2}}{h}$$

Nos piden eliminar las raíces cuadradas del numerador (= de arriba):

$$\frac{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} - \sqrt{x+x^2}}{h} =$$

Arriba tenemos una resta (= una diferencia) de raíces, por lo que debemos multiplicar por la suma:

$$= \frac{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} - \sqrt{x+x^2}}{h} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}}{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2}\;^2 - \;\sqrt{x+x^2}\;^2}{h \cdot \quad \sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}} =$$
$$= \frac{(x+h)+(x+h)^2 - (x+x^2)}{h \cdot \quad \sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}} =$$
$$= \frac{x+h+x^2+h^2+2xh-x-x^2}{h \cdot \quad \sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}} =$$
$$= \frac{h+h^2+2xh}{h \cdot \quad \sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}} =$$
$$= \frac{1+h+2x}{\sqrt{(x+h)+(x+h)^2} + \sqrt{x+x^2}}$$

9. Racionaliza:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

En este caso, tenemos una raíz cúbica en el denominador (= debajo). Para eliminarla tenemos que multiplicar por la misma raíz **elevada al cuadrado**:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}^{\;2}}{\sqrt[3]{2}^{\;2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \; \sqrt[3]{2}^{\;2}}{\sqrt[3]{2}^{\;3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \; \sqrt[3]{2}^{\;2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{2} =$$

En una multiplicación de raíces con índices distintos, tenemos que encontrar raíces equivalentes con los mismos índices. Como la primera raíz es cuadrada (= índice 2) y la segunda raíz es cúbica (= índice 3), podemos buscar raíces equivalentes sextas (= índice 6).

$$= \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^4}}{2}$$

10. Racionaliza la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

En la expresión solamente aparece una raíz en el denominador. Como el denominador es una resta, debemos multiplicar por la suma:

$$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \; \frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{4}^{\;2} - \; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}^{\;2}} =$$

El siguiente paso es delicado; debajo hay que elevar el 2 tercios fuera de la raíz y eliminar la raíz:

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \; \frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{25}{16} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \; \frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{25}{16} - \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{\frac{25 \cdot 3}{16 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{\frac{25 \cdot 3 - 2 \cdot 16}{3 \cdot 16}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{\frac{43}{48}} =$$

$$= \frac{48}{43} \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{56}{43} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{56}{43} \cdot \left(\frac{5}{4} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{56}{43} \cdot \left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

11. Sabes que la fórmula para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reescríbela racionalizando el numerador.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

Como arriba tenemos una suma y una resta (por el símbolo más-menos), tenemos que multiplicar por una resta y una suma. Podemos usar el símbolo menos-más para eso:

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} =$$

$$= \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a \cdot \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a \cdot \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} =$$

$$= \frac{4ac}{2a \cdot \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} =$$

$$= \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Logaritmos

1. Calcula el valor de

$$\log \quad \frac{a^3 \cdot \sqrt[6]{b}}{a^{-6} \cdot b^4}$$

si $\log(a) = \frac{1}{3}$ y $\log(b) = \frac{1}{6}$ **sin simplificar primero el argumento del logaritmo**.

Tenemos:

$$\log \quad \frac{a^n \cdot \sqrt[m]{b}}{a^{-m} \cdot b^{n+1}} \quad =$$

La raíz es una potencia de exponente racional:

$$= \log \left(\frac{a^n \cdot b^{\frac{1}{m}}}{a^{-m} \cdot b^{n+1}} \right) =$$

Por las propiedades del logaritmo, el logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos:

$$= \log \quad a^n \cdot b^{\frac{1}{m}} \quad - \log \quad a^{-m} \cdot b^{n+1} \quad =$$

Y el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos:

$$= \log\left(a^n\right) + \log \quad b^{\frac{1}{m}} \quad - \log \quad a^{-m} \quad - \log \quad b^{n+1} \quad =$$

Y el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base:

$$= n \cdot \log(a) + \frac{1}{m} \cdot \log(b) + m \cdot \log(a) - (n+1) \cdot \log(b) =$$

$$= (n+m) \cdot \log(a) + \quad \frac{1}{m} - n - 1 \quad \cdot \log(b) =$$

$$= (n+m) \cdot \frac{1}{n} + \quad \frac{1}{m} - n - 1 \quad \cdot \frac{1}{m} =$$

$$= (3+6) \cdot \frac{1}{3} + \quad \frac{1}{6} - 3 - 1 \quad \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 85/36$$

2. Calcula el valor de

$$\log \quad \frac{a^3 \cdot \sqrt[6]{b}}{a^{-6} \cdot b^4}$$

si $\log(a) = \frac{1}{3}$ y $\log(b) = \frac{1}{6}$. **Primero simplifica el argumento del logaritmo.**

El argumento del logaritmo es lo que está dentro de los paréntesis:

$$\log \quad \frac{a^3 \cdot \sqrt[6]{b}}{a^{-6} \cdot b^4} \quad =$$

Como las raíces son potencias de exponente racional:

$$= \log \left(\frac{a^3 \cdot b^{\frac{1}{6}}}{a^{-6} \cdot b^4} \right) =$$

$$= \log \quad a^{3-(-6)} \cdot b^{\frac{1}{6}-4} \quad =$$

$$= \log \quad a^9 \cdot b^{\frac{1}{6}-\frac{24}{6}} \quad =$$
$$= \log \quad a^9 \cdot b^{-\frac{23}{6}} \quad =$$

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos:

$$= \log \quad a^9 \quad + \log \quad b^{-\frac{23}{6}} \quad =$$

El logaritmo de una potencia es el producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$= 9 \cdot \log(a) - \frac{23}{6} \cdot \log(b) =$$

Sustituyendo los valores de los logaritmos:

$$= 9 \cdot \frac{1}{3} - \frac{23}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{3} - \frac{23}{36} =$$
$$= \frac{108}{36} - \frac{23}{36} = \frac{108-23}{36} = \frac{85}{36}$$

3. Escribe la siguiente expresión como el logaritmo decimal de un solo número:

$$5\log 3 + \frac{1}{3}\log 125 - 3\log 5 - \log 9$$

$$5\log 3 + \frac{1}{3}\log 125 - 3\log 5 - \log 9 =$$

De los cuatro argumentos que aparecen, podemos factorizar el 125 y el 9:

$$125 = 5^3$$
$$9 = 3^2$$

Al sustituir:

$$= 5\log 3 + \frac{1}{3}\log 5^3 - 3\log 5 - \log 3^2 =$$

El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base:

$$= 5\log 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log 5 - 3\log 5 - 2\log 3 =$$
$$= 5\log 3 + \log 5 - 3\log 5 - 2\log 3 =$$
$$= 3\log 3 - 2\log 5 =$$

Ahora podemos usar la misma propiedad que usamos antes, pero en sentido contrario. Podemos introducir el 3 y el 2 dentro de los logaritmos como exponentes:

$$= \log 3^3 - \log 5^2 =$$

La diferencia de dos logaritmos es el logaritmo del cociente (= de la división):

$$= \log \quad \frac{3^3}{5^2}$$

4. Escribe el logaritmo siguiente

$$\log(6!)$$

en función del logaritmo de 2 y del logaritmo de 3.

Se trata del logaritmo del factorial de 6. Sabemos que 6 factorial es:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Sustituyendo en el logaritmo:

$$\log(6!) =$$

$$= \log(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) =$$

Pero el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos:

$$= \log(6) + \log(5) + \log(4) + \log(3) + \log(2) + \log(1) =$$

El logaritmo de 1 es 0:

$$= \log(6) + \log(5) + \log(4) + \log(3) + \log(2) =$$

6 es 2 por 3 y 4 es 2 al cuadrado:

$$= \log(3 \cdot 2) + \log(5) + \log(2^2) + \log(3) + \log(2) =$$

$$= \log(3) + \log(2) + \log(5) + 2\log(2) + \log(3) + \log(2) =$$

$$= 2\log(3) + 4\log(2) + \log(5) =$$

Parece que estamos en un callejón sin salida. Sin embargo, 5 es 10/2:

$$= 2\log(3) + 4\log(2) + \log\left(\frac{10}{2}\right) =$$

El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos:

$$= 2\log(3) + 4\log(2) + \log(10) - \log(2) =$$

Pero el logaritmo decimal de 10 es 1:

$$= 2\log(3) + 3\log(2) + 1$$

Álgebra

El álgebra básica[14] es el estudio de las operaciones aritméticas cuando no conocemos los números o cuando no nos interesan sus valores.

Es una de las ramas más importantes de las matemáticas y estudia cosas como los polinomios, las ecuaciones, las inecuaciones, los sistemas de ecuaciones, las matrices. . .

En este capítulo encontrarás algunos tipos de ecuaciones que se estudian como parte de trigonometría o como parte de los logaritmos y las potencias.

La parte más difícil del álgebra no es manipular expresiones algebraicas o resolver las ecuaciones (aunque hay ecuaciones difíciles de resolver). La parte más difícil es **convertir una expresión en palabras en una expresión algebraica**.

Esto último es una de las cosas que es más importante que aprendas a hacer. Es lo que te permite convertir un problema en puedes encontrar en la vida cotidiana, en economía, en física, en ingeniería, en biología, en psicología. . . en una expresión matemática que es más fácil de manipular que las palabras.

El apartado llamado *"Problemas y ecuaciones"* es precisamente donde más veces es necesario convertir un conjunto de palabras y condiciones en un conjunto de expresiones algebraicas. Eso quiere decir que en él aparecen herramientas de las secciones anteriores.

Expresiones algebraicas

1. Desarrolla por el binomio de Newton la expresión:

$$(2x + 3y^3)^3 =$$

El binomio de Newton es la generalización de las **identidades notables** del cuadrado de una suma y del cuadrado de una diferencia. Sin embargo, donde en esas identidades teníamos el binomio elevado a 2, aquí podemos tenerlo elevado a cualquier número natural.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Escrito de forma más compacta usando el símbolo de sumatoria (que es la letra griega sigma

[14] Sí, la palabra *"álgebra"* es femenina y por eso el adjetivo es *"básica"* y no *"básico"*. Pero al empezar con tilde, el artículo no puede ser *"la"* o *"una"* y se usa *"el"* o *"un"*. Pero en el plural no existe el problema y diríamos *"las álgebras"* o *"unas álgebras"*.

mayúscula):

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} &(2x+3y^3)^3 = \\ &= \binom{3}{0}(2x)^3\left(3y^3\right)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2\left(3y^3\right)^1 + \\ &+ \binom{3}{2}(2x)^1\left(3y^3\right)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0\left(3y^3\right)^3 = \\ &= \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2\left(3y^3\right) + \\ &+ \binom{3}{2}(2x)\left(3y^3\right)^2 + \binom{3}{3}\left(3y^3\right)^3 = \\ &= \binom{3}{0}8x^3 + \binom{3}{1}4x^2 \cdot 3y^3 + \\ &+ \binom{3}{2}2x \cdot 9y^6 + \binom{3}{3}37y^9 = \\ &= \binom{3}{0}8x^3 + \binom{3}{1}12x^2y^3 + \\ &+ \binom{3}{2}18xy^6 + \binom{3}{3}37y^9 = \end{aligned}$$

Ahora es necesario calcular los coeficientes binomiales $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ y $\binom{3}{3}$ que pueden leerse de manera breve *tres sobre cero*, *tres sobre uno*, *tres sobre dos* y *tres sobre tres*.

Estos coeficientes se pueden calcular de varias maneras:

- usando la fórmula siguiente:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

- usando la tecla `nCr` en una calculadora científica
- usando el triángulo de Pascal (que también se llama *triángulo de Tartaglia* o *triángulo aritmético*)

Sin embargo, en este caso, solamente es necesario conocer las siguientes propiedades de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Por lo tanto, los coeficientes binomiales que buscamos son: $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ y $\binom{3}{3} = 1$.

$$(2x+3y^3)^3 =$$

$$= \binom{3}{0} 8x^3 + \binom{3}{1} 12x^2y^3 +$$

$$+ \binom{3}{2} 18xy^6 + \binom{3}{3} 37y^9 =$$

$$= 1 \cdot 8x^3 + 3 \cdot 12x^2y^3 +$$

$$+3 \cdot 18xy^6 + 1 \cdot 37y^9 =$$

$$= 8x^3 + 36x^2y^3 + 54xy^6 + 37y^9$$

2. Desarrolla por el binomio de Newton la expresión:

$$(2x - 3y^3)^3 =$$

Es el mismo binomio que en el ejemplo anterior, pero en este caso tenemos una resta en lugar de una suma.

Pero en la fórmula del binomio no aparece la resta, sino la suma:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

¿Cómo se soluciona este problema? La idea es que **siempre podemos escribir una resta en forma de suma**; una resta es la suma del primer número más el opuesto del segundo:

$$a - b = a + (-b)$$

En la fórmula del binomio eso se convertiría en:

$$(a + (-b))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i$$

$$(a - b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-1)^i \cdot b^i$$

$$(a - b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot a^{n-i} b^i$$

Es la misma fórmula, salvo por el factor $(-1)^i$ de cada término. Si i es par, ese factor se convierte en 1 y el término es positivo. Si i es impar, ese factor se convierte en -1 y el término es negativo:

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 - \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 +$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

Lo importante aquí es que **no es necesario usar la fórmula** para la resta; solamente es necesario deducirla de la fórmula de la suma y del hecho de que siempre podemos convertir una resta en una suma.

$$(2x - 3y^3)^3 = (2x - (3y^3))^3 =$$

$$= \dots =$$

$$= 8x^3 - 36x^2y^3 + 54xy^6 - 37y^9$$

3. ¿Cuál es el cuarto término del desarrollo del binomio siguiente?

$$\left(\frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{2}\right)^6 =$$

Según la fórmula del binomio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

si el primer término es:

$$\binom{n}{0} a^n b^0$$

el segundo es:

$$\binom{n}{1} a^{n-1} b^1$$

el tercero es:

$$\binom{n}{2} a^{n-2} b^2$$

y el cuarto es:

$$\binom{n}{3} a^{n-3} b^3$$

Si llamamos T_4 al cuarto término:

$$T_4 = \binom{n}{3} a^{n-3} b^3$$

Como en nuestro caso a es $\frac{3}{5}\alpha$ y b es $\frac{1}{2}$ y n es 6:

$$T_4 = \binom{6}{3} \left(\frac{3}{5}\alpha\right)^{6-3} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$T_4 = \binom{6}{3} \left(\frac{3}{5}\alpha\right)^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$T_4 = \binom{6}{3} \frac{3^3}{5^3}\alpha^3 \cdot \frac{1^3}{2^3}$$

$$T_4 = \binom{6}{3} \frac{27}{125}\alpha^3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$T_4 = \binom{6}{3} \frac{27}{125} \cdot \frac{1}{8}\alpha^3$$

$$T_4 = \binom{6}{3} \frac{27}{1000}\alpha^3$$

Si usamos la fórmula para los coeficientes binomiales:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20$$

Por lo tanto, el cuarto término es:

$$T_4 = 20 \cdot \frac{27}{1000}\alpha^3$$
$$T_4 = \frac{27}{50}\alpha^3$$

4. ¿Cuál es el término m-simo (*emésimo*) del desarrollo del binomio?

$$(a+b)^n =$$

El término *m-simo* (*emésimo*) es el término que, después de la expansión, está en la posición m. Antes veíamos que si: si el primer término es:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^{n-0}b^0$$

el segundo es:

$$T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1}b^1$$

el tercero es:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2}b^2$$

y el cuarto es:

$$T_4 = \binom{n}{3} a^{n-3}b^3$$

Por lo tanto, el término *emésimo* es:

$$T_m = \binom{n}{m-1} a^{n-(m-1)}b^{m-1}$$

5. Demuestra las tres identidades notables.

El cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados más el doble del producto. Es decir, el cuadrado de una suma es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Por definición del cuadrado:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$

Haciendo las multiplicaciones:

$$= a^2 + ab + ba + b^2 =$$

Si a y b son números reales, el producto es conmutativo (no importa el orden). Por lo tanto, ab es lo mismo que ba:

$$= a^2 + ab + ab + b^2 =$$

Sumando:

$$= a^2 + 2ab + b^2 \quad \square$$

El cuadrado de una diferencia es la suma de los cuadrados menos el doble del producto. Es decir, el cuadrado de una diferencia es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble del primero por el segundo:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Se puede demostrar de manera parecida a como se demuestra la fórmula para el cuadrado de la suma. Sin embargo, aquí vamos a usar la fórmula del cuadrado de la suma.

Cualquier resta es equivalente a la suma del opuesto:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 =$$

Ahora podemos usar la fórmula del cuadrado de una suma. Donde *el primero* es a y *el segundo* es $(-b)$:

$$= a^2 + (-b)^2 + 2a(-b) =$$

Manipulando los signos:

$$= a^2 + b^2 - 2ab \quad \square$$

La tercera identidad notable es el producto de la suma por la diferencia, que es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Para demostrarla, solamente tenemos que multiplicar:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 =$$

Como el producto entre reales es conmutativo ($ab = ba$):

$$= a^2 - ab + ab - b^2 =$$

$$= a^2 - b^2 \quad \square$$

6. Demuestra, por inducción, la fórmula del binomio de Newton.

La fórmula del binomio de Newton se puede escribir:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$$

donde el símbolo de sumatoria (esa letra griega sigma mayúscula) simplemente nos indica que tenemos que sumar una serie de términos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

La fórmula es cierta para $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\
1 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
1 &= 1 \quad \top
\end{aligned}
$$

Para demostrarla por inducción para el resto de casos:

a) Demostramos que es cierta cuando $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\
a+b &= 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b \\
a+b &= a+b \quad \top
\end{aligned}
$$

b) Suponemos que es cierto para n (*hipótesis de inducción*).

c) Demostramos que es cierta para $n+1$:

$$
(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 +
$$

$$
+ \binom{n+1}{1} a^{n+1-1} b^1 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}
$$

Por definición, sabemos que:

$$
(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n =
$$

Sustituyendo la hipótesis de inducción (es decir, la fórmula cuando el exponente es n):

$$
= (a+b) \cdot \binom{n}{0} a^n b^0 +
$$

$$
+ \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n \quad =
$$

Al multiplicar:

$$
= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 +
$$

$$
+ \binom{n}{1} a^n b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^1 b^n +
$$

$$
+ \binom{n}{0} a^n b^1 +
$$

$$
+ \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} =
$$

Como los coeficientes binomiales (o números combinatorios) cumplen:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{n+1}{0} = \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{0}$$

Tenemos:

$$\begin{gathered} = \genfrac{}{}{0pt}{}{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \\ + \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{1} a^n b^1 + \ldots + \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{n} a^1 b^n + \\ + \genfrac{}{}{0pt}{}{n+1}{0} a^n b^1 + \\ + \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{1} a^{n-1}b^2 + \ldots + \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{n} a^0 b^{n+1} = \end{gathered}$$

Hay términos que tienen la misma parte literal. Se pueden sumar teniendo en cuenta que los coeficientes binomiales cumplen:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{m} + \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{m+1} = \genfrac{}{}{0pt}{}{n+1}{m+1}$$

Y es fácil llegar a la expresión completa y terminar la demostración a partir de este punto.

7. Expande y simplifica:

$$\frac{xy^2}{2z} - \frac{3x^2y^3z^5}{\sqrt{7}} \;^2 =$$

¿El resultado es un polinomio?

Este ejercicio consiste en una simple aplicación de la primera de las identidades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

que podemos leer de varias maneras. Por ejemplo: *"el cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados más el doble del producto"* o también *"el cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo"*.

$$\frac{xy^2}{2z} - \frac{3x^2y^3z^5}{\sqrt{7}} \;^2 =$$

$$= \frac{xy^2}{2z} \;^2 + \frac{3x^2y^3z^5}{\sqrt{7}} \;^2 + 2\frac{xy^2}{2z}\frac{3x^2y^3z^5}{\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{(xy^2)^2}{(2z)^2} + \frac{(3x^2y^3z^5)^2}{(\sqrt{7})^2} + 2\frac{xy^2 \cdot 3x^2y^3z^5}{2z\sqrt{7}} =$$

Las siguientes líneas normalmente no se escriben:

$$= \frac{x^{1\cdot 2}y^{2\cdot 2}}{2^2z^2}+$$
$$+\frac{3^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2}z^{5\cdot 2}}{7}+$$
$$+2\frac{3x^{1+2}y^{2+3}z^5}{2z\sqrt{7}} =$$

Normalmente se escribe el resultado:

$$= \frac{x^2y^4}{4z^2}+$$
$$+\frac{9x^4y^6z^{10}}{7}+$$
$$+2\frac{3x^3y^5z^5}{2z\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{x^2y^4}{4z^2} + \frac{9x^4y^6z^{10}}{7} + \frac{3x^3y^5z^4}{\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^2y^4}{z^2} + \frac{9}{7}x^4y^6z^{10} + \frac{3}{\sqrt{7}}x^3y^5z^4 =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^2y^4}{z^2} + \frac{9}{7}x^4y^6z^{10} + \frac{3\sqrt{7}}{7}x^3y^5z^4$$

El resultado **no** es un polinomio; a pesar de que el segundo término y el tercer término son monomios porque las variables están multiplicadas entre si y elevadas a números naturales, en el primer término aparece la variable z dividiendo. El primer término **no** es un monomio y, por lo tanto, la expresión no es un polinomio.

8. Demuestra que $(a, b) = (-2, 3)$ cumple:

a)
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

b)
$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

Para el par $(a, b) = (-2, 3)$:

a) La expresión:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

es la **desigualdad triangular** que se cumple para cualquier par de números reales. En nuestro caso, comprobamos los valores del lado izquierdo (LI) y el lado derecho (LD):

$$LI = | - 2 + 3| = |1| = 1$$

$$LD = |-2| + |3| = 5$$

$$LI \leq LD$$

Se cumple.

b)

$$LI = |-2-3| = |-5| = 5$$
$$LD = ||-2| - |5|| =$$
$$= |2-5| = |-3| = 3$$

$$LI \geq LD$$

Se cumple.

9. Calcula el valor de la expresión algebraica:

$$\frac{(b-c)^2 - (a+b)^2}{(a+c)^3}$$

si $a+b=3$ y $b-c=5$.

Dada la expresión:

$$\frac{(b-c)^2 - (a+b)^2}{(a+c)^3} =$$

se nos dan los valores de $a+b$ y $b-c$, así que podemos sustituir:

$$= \frac{5^2 - 3^2}{(a+c)^3} =$$
$$= \frac{16}{(a+c)^3} =$$

El problema es que no tenemos el valor de la expresión $a+c$. Y no tenemos los valores de a y c. Pero podemos obtener la expresión $a+c$ restando las dos expresiones cuyos valores conocemos:

$$(a+b) - (b-c) = a+c$$
$$3-5 = a+c$$
$$-2 = a+c$$

Por lo tanto, la expresión que nos pedían es:

$$= \frac{16}{(-2)^3} =$$
$$= \frac{16}{-8} = -2$$

10. Calcula el valor de la expresión algebraica:

$$bc + b^2 + c^2 + cb$$

si $a + b = 9$ y $c - a = -5$.

No podemos obtener los valores de a, b y c a partir de las expresiones cuyos valores se nos dan; tenemos dos expresiones (que pueden funcionar como ecuaciones) y tres variables (que pueden funcionar como incógnitas de las ecuaciones). Es posible que podamos escribir la expresión algebraica cuyo valor desconocemos en función de las otras.

$$bc + b^2 + c^2 + cb =$$

Por la propiedad conmutativa del producto:

$$= bc + b^2 + c^2 + bc =$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc =$$

Pero, por la identidad notable del cuadrado de una suma:

$$= (b + c)^2 =$$

Podemos sumar y restar a dentro del paréntesis sin modificar el valor:

$$= (b + c + a - a)^2 =$$

Reordenando:

$$= (a + b + c - a)^2 =$$

Sustituyendo:

$$= (9 + (-5))^2 =$$
$$= 4^2 = 16$$

11. Si definimos la *suma paralalela* de dos números reales x e y como el número real z que cumple:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

y la representamos como:

$$z = x \parallel y$$

a) ¿Esta operación cumple la propiedad conmutativa?
b) ¿Esta operación cumple la propiedad asociativa?

a) Una operación binaria es conmutativa cuando el orden de los operandos no afecta al resultado. La suma de números reales y el producto de números reales son operaciones conmutativas porque $x + y = y + x$ y $x \cdot y = y \cdot x$. La diferencia de números reales y el cociente de números reales no son operaciones conmutativas porque $x - y \neq y - x$ y $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$.

Si tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Podemos hacer la suma en el lado derecho:

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot y}{x \cdot y} + \frac{1 \cdot x}{y \cdot x}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{x + y}{x \cdot y}$$

Podemos dar la vuelta a las fracciones en ambos lados:

$$z = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

Por lo tanto, podemos escribir la definición de la *"suma paralela"* como:

$$x \parallel y = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

Si cambiamos x por y y viceversa:

$$y \parallel x = \frac{y \cdot x}{y + x} =$$

pero como la suma y la multiplicación son conmutativas:

$$= \frac{x \cdot y}{x + y} = x \parallel y$$

Es decir, la *"suma paralela"* sí es conmutativa:

$$\boxed{x \parallel y = y \parallel x}$$

b) La suma y la multiplicación de números reales son asociativas porque:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Es decir, porque si hacemos la operación entre tres números, se pueden quitar los paréntesis.

Haremos las dos combinaciones de paréntesis:

$$
\begin{aligned}
&(x \parallel y) \parallel z = \\
&= \frac{x \cdot y}{x+y} \parallel z = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y}{x+y} \cdot z}{\frac{x \cdot y}{x+y} + z} = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{x+y}}{\frac{x \cdot y}{x+y} + \frac{z \cdot (x+y)}{x+y}} = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{x+y}}{\frac{x \cdot y}{x+y} + \frac{z \cdot (x+y)}{x+y}} = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{x+y}}{\frac{x \cdot y + z \cdot (x+y)}{x+y}} = \\
&= \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + z \cdot (x+y)} = \\
&= \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + x \cdot z + z \cdot y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x \parallel (y \parallel z) = \\
&= x \parallel \frac{y \cdot z}{y+z} = \\
&= \frac{x \cdot \frac{y \cdot z}{y+z}}{x + \frac{y \cdot z}{y+z}} = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{y+z}}{\frac{x \cdot (y+z)}{y+z} + \frac{y \cdot z}{y+z}} = \\
&= \frac{\frac{x \cdot y \cdot z}{y+z}}{\frac{x \cdot (y+z) + y \cdot z}{y+z}} = \\
&= \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot (y+z) + y \cdot z} = \\
&= \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}
\end{aligned}
$$

Comparamos ambos resultados:

$$\frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + x \cdot z + z \cdot y} = \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}$$

Por lo tanto, sí es asociativa:

$$(x \parallel y) \parallel z = x \parallel (y \parallel z)$$

12. Definimos la operación entre dos números reales x e y:

$$x \heartsuit y = 5y - 3x$$

¿Es conmutativa?

La operación *corazón* será conmutativa si el orden no es importante. Es decir, si:

$$x \heartsuit y = y \heartsuit x$$

para cualquier pareja de números x e y.

Vamos a desarrollar el lado izquierdo:

$$x \heartsuit y = 5y - 3x$$

Y el lado derecho:

$$y \heartsuit x = 5x - 3y$$

Y, evidentemente, no son en general iguales. Por ejemplo, no son iguales si $x = 2$ e $y = 1$:

$$2 \heartsuit 1 = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1$$
$$1 \heartsuit 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

aunque hay números para los que son iguales. Todos los que cumplen:

$$5y - 3x = 5x - 3y$$
$$-8x = -8y$$
$$x = y$$

Pero como existen números para los que no se cumple, la operación *corazón* no es conmutativa.

Polinomios

1. Sean los polinomios $P(x) = x^3 + 4x^2 + x$ y $Q(x) = x + 1$, encuentra:

a) grado$[P(x)]$
b) grado$[Q(x)]$
c) Coeficiente líder de $P(x)$
d) Coeficiente líder de $Q(x)$
e) Término independiente de $P(x)$
f) Término independiente de $Q(x)$
g) $P(x) + Q(x)$
h) $3P(x) - 2Q(x)$
i) $P(x) \cdot Q(x)$
j) $P(x)/Q(x) = P(x) : Q(x) = P(x) \div Q(x)$

a)

$$\text{grado}[P(x)] = 3$$

b)
$$\text{grado}[Q(x)] = 1$$

c) Coeficiente líder de $P(x) = 1$

d) Coeficiente líder de $Q(x) = 1$

e) Término independiente de $P(x) = 0$

f) Término independiente de $Q(x) = 1$

g)
$$\begin{gathered} P(x) + Q(x) = \\ = (x^3 + 4x^2 + x) + (x + 1) = \\ = x^3 + 4x^2 + x + x + 1 = \\ = x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \end{gathered}$$

h)
$$\begin{gathered} 3P(x) - 2Q(x) = \\ = 3 \cdot (x^3 + 4x^2 + x) - 2 \cdot (x + 1) = \\ = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 2x - 2 = \\ = 3x^3 + 12x^2 + x - 2 \end{gathered}$$

i)
$$\begin{gathered} P(x) \cdot Q(x) = \\ = (x^3 + 4x^2 + x) \cdot (x + 1) = \\ = x^4 + x^3 + 4x^3 + 4x^2 + x^2 + x = \\ = x^4 + 5x^3 + 5x^2 + x \end{gathered}$$

j)
$$\begin{gathered} \frac{P(x)}{Q(x)} = \\ = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{x + 1} \end{gathered}$$

Como el denominador es de grado 1 y es de la forma $x - a$, esta división se puede hacer de dos maneras:

- por el método de Ruffini
- por el algoritmo de la división larga

Por el método de Ruffini (que solamente se puede aplicar cuando el divisor se escribe $x - a$) tenemos la tabla:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & \\ -1 & & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}$$

Por lo tanto:

- el resto $R(x)$ es:

$$R(x) = 2$$

- el cociente $C(x)$ es:

$$C(x) = x^2 + 3x - 2$$

Y podemos escribir:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x}{x + 1} =$$
$$= x^2 + 3x - 2 + \frac{2}{x + 1}$$

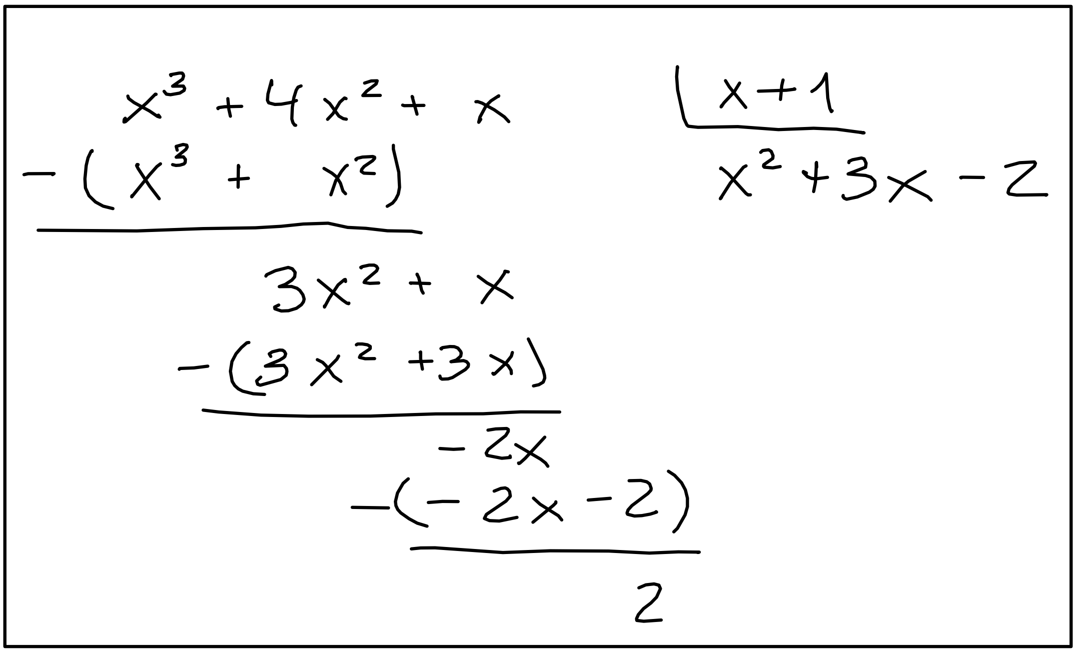


Figura 35: Versión a mano (manuscrita) del algoritmo de la división larga.

2. Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x$, encuentra:

a)
$$P(0)$$

b)
$$P(1)$$

c)
$$P(-1)$$

d)
$$P(2)$$

e)
$$P \;\; \frac{1}{2}$$

f)
$$P \;\; \sqrt{2}$$

g)
$$P \;\; 3\pi^2$$

a)

$$\begin{aligned} P(0) &= \\ &= 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 = 0 \end{aligned}$$

El valor de $P(0)$ de cualquier polinomio siempre coincide con su término independiente.

b)

$$\begin{aligned} P(1) &= \\ &= 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(-1) &= \\ &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) = -1 - 4 - 1 = -6 \end{aligned}$$

Siempre que hacemos sustituciones y no estamos colocando un número natural o una sola letra, debemos usar paréntesis.

d)

$$\begin{aligned} P(2) &= \\ &= 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 16 + 2 = -6 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) & \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{8} - \frac{4}{8} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{2}\right) &= \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right) = \\ &= \sqrt{8} - 4 \cdot 2 + \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{8} - 8 + \sqrt{2} = \\ &= 2\sqrt{2} - 8 + \sqrt{2} = \\ &= 3\sqrt{2} - 8 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} P\left(3\pi^2\right) &= \\ &= \left(3\pi^2\right)^3 - 4 \cdot \left(3\pi^2\right)^2 + \left(3\pi^2\right) = \\ &= 27\pi^6 - 4 \cdot 9\pi^4 + 3\pi^2 = \\ &= 27\pi^6 - 36\pi^4 + 3\pi^2 \end{aligned}$$

Lo que no se puede simplificar más.

3. Sea el polinomio $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$, encuentra $P(x+1)$.

En el polinomio: $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$ donde tenemos x tenemos que escribir $x+1$. Sustituimos usando paréntesis:

$$P(x) = -3 \cdot (x+1)^2 + 2 \cdot (x+1) - 1 =$$
$$= -3 \cdot (x+1)^2 + 2x + 2 - 1 =$$
$$= -3 \cdot (x+1)^2 + 2x + 1 =$$

Ahora usamos la identidad notable del cuadrado de una suma:

$$= -3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2x + 1 =$$
$$= -3x^2 - 6x - 3 + 2x + 1 =$$
$$= -3x^2 - 4x - 2$$

Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones polinómicas son, sin duda alguna, la base para el resto de ecuaciones.

Muchas ecuaciones que no son polinómicas se convierten en polinómicas con alguna transformación o con un cambio de variable. Y, en el caso de las ecuaciones que se transforman en polinómicas con un cambio de variable, para resolverlas es imprescindible saber cómo resolver las polinómicas.

1. Resuelve: $3x - 7 = 2 \cdot (x+5)$.

Es una *ecuación lineal* o *ecuación afín* o *ecuación polinómica de primer grado*.

$$3x - 7 = 2x + 10$$
$$3x - 2x = 10 + 7$$
$$x = 17$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = \{17\}$$

Por lo tanto hay una solución:

$$|K| = 1$$

2. Resuelve $5x^2 + 7 = 10$.

Es una ecuación cuadrática incompleta sin término de primer grado. No tenemos que usar la fórmula.

$$5x^2 + 7 = 10$$
$$5x^2 = 10 - 7$$
$$5x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$K = \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$$

$$|K| = 2$$

3. Resuelve $x^2 - 3x = 0$.

$$x^2 - 3x = 0$$

Es una ecuación cuadrática incompleta sin término independiente. No tenemos que usar la fórmula. Podemos sacar x como factor común:

$$x \cdot (x - 3) = 0$$

Un producto es cero si alguno de los factores es cero:

$$x \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$K = \{0, 3\}$$

$$|K| = 1$$

4. Resuelve $x^2 + 4 = 0$.

Es una ecuación cuadrática incompleta sin término de primer grado. No tenemos que usar la fórmula.

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

El conjunto de soluciones reales[15] es el **conjunto vacío**:

$$K = \{\} = \emptyset = \varnothing$$

Hay cero soluciones reales:

$$|K| = 0$$

5. Resuelve $x^2 + 2x + 1 = 0$.

[15]Tiene dos soluciones complejas: $2i$ y $-2i$, donde i es la *unidad imaginaria* ($i = \sqrt{-1}$).

$$a = 1, b = 2, c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Como el discriminante es cero ($\Delta = 0$), la ecuación solamente tiene una solución.

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$
$$x = \frac{-2}{2}$$

La solución es:

$$\boxed{x = -1}$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = \{-1\}$$
$$|K| = 1$$

6. Resuelve $x^2 + x - 6 = 0$.

$$a = 1, b = 1, c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Como el discriminante es positivo ($\Delta = 25$), la ecuación tiene dos soluciones reales.

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

La primera solución es con la suma:

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Y la segunda solución es con la resta:

$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Las soluciones son:

$$\boxed{x_1 = 2, x_2 = -3}$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = \{2, -3\}$$

$$|K| = 2$$

7. Resuelve $\beta^2 + 3\beta + 4 = 0$.

$$a = 1, b = 3, c = 4$$

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

$$\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Como el discriminante es negativo ($\Delta = -7$), la ecuación no tiene soluciones reales.

El conjunto de soluciones es:

$$K = \varnothing$$

$$|K| = 0$$

8. Resuelve $\gamma^2 - 3\gamma - 4 = 0$

$$a = 1, b = -3, c = -4$$

$$\gamma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\gamma = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Como el discriminante es positivo ($\Delta = 25$), la ecuación tiene dos soluciones reales.

$$\gamma = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

La primera solución es con la suma:

$$\gamma_1 = \frac{-3 + 5}{2}$$

Y la segunda solución es con la resta:

$$\gamma_2 = \frac{-3 - 5}{2}$$

Las soluciones son:

$$\boxed{\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -4}$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = \{1, -4\}$$
$$|K| = 2$$

9. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $(m-1)x^2 - mx - 2 = 0$ en función del parámetro m?

Hay que observar que x es la incógnita y m es el parámetro. Por lo tanto:

- $a =$ el coeficiente líder $= m - 1$
- $b =$ el coeficiente del término de grado $1 = -m$
- $c =$ el término independiente $= -2$

El discriminante Δ (o D) nos permite determinar la cardinalidad del conjunto de soluciones reales:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow |K| = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow |K| = 1 \\ \Delta > 0 \Rightarrow |K| = 2 \end{cases}$$

En nuestro caso, el discriminante es:

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (m-1) \cdot (-2)$$
$$\Delta = m^2 + 8 \cdot (m-1)$$
$$\Delta = m^2 + 8m - 8$$

Ahora tenemos que estudiar cuándo vale 0:

$$m^2 + 8m - 8 = 0$$
$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$
$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 32}}{2}$$
$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{2^5 \cdot 3}}{2}$$
$$m = -4 \pm 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}$$
$$m = -4 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$$

Por lo tanto, si $m = -4 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$ entonces $|K| = 1$.

Esos dos valores de m dividen la recta real en tres partes:

- $-\infty, -4 - 2 \cdot \sqrt{6}$
- $-4 - 2 \cdot \sqrt{6}, -4 + 2 \cdot \sqrt{6}$
- $-4 + 2 \cdot \sqrt{6}, \infty$

Hay que estudiar el signo del discriminante en cada intervalo según el valor de m. Teniendo en cuenta que:

$$-4 - 2 \cdot \sqrt{6} \approx -8,898979486$$
$$-4 + 2 \cdot \sqrt{6} \approx 0,8989794856$$

- Si $m \in \quad -\infty, -4 - 2 \cdot \sqrt{6}$

  cogemos $m = -10$

  $$\Delta = m^2 + 8m - 8$$
  $$\Delta = (-10)^2 + 8 \cdot (-10) - 8$$
  $$\Delta = 12 > 0$$

  Por lo tanto $|K| = 2$.

- Si $m \in \quad -4 - 2 \cdot \sqrt{6}, -4 + 2 \cdot \sqrt{6}$

  cogemos $m = 0$

  $$\Delta = m^2 + 8m - 8$$
  $$\Delta = 0^2 + 8 \cot 0 - 8$$
  $$\Delta = -8 < 0$$

  Por lo tanto $|K| = 0$.

- Si $m \in \quad -4 + 2 \cdot \sqrt{6}, \infty$

  cogemos $m = 1$

  $$\Delta = m^2 + 8m - 8$$
  $$\Delta = 1^2 + 8 \cdot 1 - 8$$
  $$\Delta = 1 > 0$$

  Por lo tanto $|K| = 2$.

10. La suma de los cuadrados de tres números enteros impares consecutivos es 83. ¿Cuáles son esos números?

Si el primer número impar es x, el siguiente número impar es $x+2$ y el siguiente a ése es $x+4$. Sus cuadrados serán x^2, $(x+2)^2$ y $(x+4)^2$. La suma de sus cuadrados por lo tanto es:

$$x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 83$$

Desarrollamos usando la primera identidad notable:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = 83$$

Ahora simplificamos:

$$\begin{gathered} 3x^2 + 12x + 20 = 83 \\ 3x^2 + 12x + 20 - 83 = 0 \\ 3x^2 + 12x - 63 = 0 \end{gathered}$$

Es una ecuación cuadrática completa que podemos resolver usando la fórmula:

$$\begin{gathered} x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-63)}}{2 \cdot 3} \\ x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 756}}{6} \\ x = \frac{-12 \pm \sqrt{900}}{6} \\ x = \frac{-12 \pm 30}{6} \\ x = -2 \pm 5 \end{gathered}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -7$$

Por lo tanto, los tres números enteros son:

- O 3, 5, 7.
- O -7, -5 y -3.

Evidentemente si una de las soluciones se cumple, la otra también debe cumplirse. Una simple comprobación:

$$3^2 + 5^2 + 7^2 = 9 + 25 + 49 = 83$$

muestra que efectivamente es solución.

11. La suma de los cuadrados de tres números **naturales** impares consecutivos es 83. ¿Cuáles son esos números?

El problema es exactamente igual que el anterior excepto por la palabra *"naturales"*. Esto implica que aquí solamente hay una solución posible:

$$3, 5, 7$$

porque la otra solución está formada por números negativos, que no son números naturales.

12. Escribe una ecuación polinómica cuyo conjunto de soluciones sea $K = \{1, -3, 5\}$ y cada solución sea solución sólo una vez.

El conjunto de soluciones tiene tres raíces: 1, -3 y 5. Si la ecuación polinómica se escribe:

$$P(x) = 0$$

las tres raíces nos permiten factorizar el polinomio:

$$(x-1) \cdot (x+3) \cdot (x-5) = 0$$

donde la raíz 1 anula el primer factor, la raíz -3 anula el segundo factor y la raíz 5 anula el tercer factor.

Como cada solución es solución solamente una vez, cada factor aparece una sola vez.

Ahora multiplicamos los dos primeros factores:

$$(x^2 + 3x - x - 3) \cdot (x-5) = 0$$

Simplificamos:

$$(x^2 + 2x - 3) \cdot (x-5) = 0$$

Volvemos a multiplicar:

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

Esta ecuación polinómica cumple las condiciones.

13. Escribe una ecuación polinómica en la que 1 sea solución 2 veces, 2 sea solución 1 vez y -5 sea solución 1 vez.

Tenemos:

$$(x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+5) = 0$$

Multiplicamos los dos primeros usando una de las identidades notables:

$$(x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+5) = 0$$
$$(x^2-2x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+5) = 0$$

Multiplicamos el primero y el segundo:

$$(x^3-2x^2-2x^2+4x+x-2) \cdot (x+5) = 0$$

Simplificamos:

$$(x^3-4x^2+5x-2) \cdot (x+5) = 0$$

Multiplicamos:

$$x^4+5x^3-4x^3-20x^2+$$
$$+5x^2+25x-2x-10 = 0$$

Simplificamos:

$$x^4+x^3-15x^2+23x-10 = 0$$

14. Encuentra las soluciones de:
a) $(x-3)(x+2)(x-1/2) = 0$
b) $(x+1)^2 \cdot (x-1)(x+4) = 0$
c) $(x-1)(x+2)(x^2+2) = 0$

a) Las soluciones son:

$$(x-3) \cdot (x+2) \cdot \quad x - \frac{1}{2} \quad = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es decir:

$$K = \quad 3, -2, \frac{1}{2}$$
$$|K| = 3$$

b) Sin necesidad de repetir los pasos del ejemplo anterior:

$$K = \{-1, 1, 4\}; \quad |K| = 3$$

Como el factor $(x+1)$ está elevado al cuadrado, la solución -1 es solución 2 veces. Es decir, -1 es una solución **de multiplicidad 2**.

c) Aquí dos soluciones son 1 y -2.

Pero el factor (x^2+2) nos dice:

$$x^2+2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$$

Así que tiene soluciones que no son reales. Pero el conjunto de las soluciones reales es:

$$K=\{-2,1\}; \quad |K|=2$$

15. Resuelve: $3x^3-15x^2+12x=0$.

Es una ecuación cúbica (= una ecuación polinómica de grado 3).

Aunque existe una fórmula para las ecuaciones cúbicas, es tan compleja y se usa con tan poca frecuencia, que en raras ocasiones es recordada por los matemáticos.

Los matemáticos saben que existen y en ocasiones saben deducirla, pero no la recuerdan de memoria.

Afortunadamente, esta ecuación cúbica es una **ecuación cúbica incompleta** porque le falta uno de los términos. Le falta el término independiente y podemos sacar x como factor común:

$$x\cdot(3x^2-15x+12)=0$$

Para que un producto sea cero, o el primer número es cero, o el segundo número es cero:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x^2-15x+12=0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es cuadrática y podemos aplicar la fórmula. Sin embargo, es recomendable dividir antes la ecuación entre 3; todos los coeficientes son múltiplos de 3:

$$x^2-5x+6=0$$

Ahora los coeficientes son números más pequeños y podemos usar la fórmula de manera más cómoda:

$$\begin{aligned} x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} &= \\ =\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} &= \\ =\frac{5\pm\sqrt{1}}{2} &= \\ =\frac{5\pm1}{2} & \end{aligned}$$

Nos da dos soluciones: 3 y 2.

Por lo tanto, el conjunto de soluciones reales es:

$$K = \{0, 2, 3\}$$

Y su cardinalidad es 3:

$$|K| = 3$$

16. Resuelve $x^4 + 21x^2 - 100 = 0$.

Es una ecuación cuártica (= ecuación polinómica de cuarto grado). Y para ellas existe una fórmula más compleja que para las ecuaciones cúbicas.

Sin embargo, no necesitamos la fórmula para las ecuaciones cuárticas porque es un caso especial: es una ecuación **bicuadrada**.

Una ecuación bicuadrada es una ecuación cuártica que solamente tiene términos de grado par (grado 0, grado 2 y grado 4). Se puede convertir en cuadrática con un **cambio de variable**:

$$x \to t = x^2 \to t^2 = x^4$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{gathered} t^2 + 21t - 100 = 0 \\ t = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1} = \\ = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 400}}{2} = \\ = \frac{-21 \pm \sqrt{841}}{2} = \\ = \frac{-21 \pm 29}{2} \end{gathered}$$

Lo que nos da dos posibilidades: -25 y 4.

Ahora tenemos que **deshacer el cambio de variable**:

$$\begin{gathered} t = -25 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \notin \mathbb{R} \\ t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{gathered}$$

Por lo tanto, solamente tiene dos soluciones reales:

$$\begin{gathered} K = \{\pm 2\} \\ |K| = 2 \end{gathered}$$

17. Resuelve $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Es una ecuación bicuadrada. Podemos convertirla en una ecuación cuadrática con el cambio de variable:

$$x \to t = x^2 \to t^2 = x^4$$

Al hacer el cambio de variable:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \\ = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \\ = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \\ = \frac{5 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Lo que nos da 2 y 1/2.

Ahora deshacemos el cambio de variable:

$$t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \\ = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Si racionalizamos:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

$$K = \quad \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|K| = 4$$

18. Resuelve $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

Es una ecuación bicuadrada. Podemos convertirla en una ecuación cuadrática con el cambio de variable:

$$x \to t = x^2 \to t^2 = x^4$$

Al hacer el cambio de variable:

$$t^2 + 5t + 4 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática. Podemos usar la fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \\ = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \\ = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \\ = \frac{-5 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

Que nos da dos posibles valores para t:

$$t_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$$
$$t_2 = \frac{-5-3}{2} = -4$$

Ahora tenemos de deshacer el cambio de variable:

$$t_1 = -1 \Rightarrow x_1^2 = -1$$
$$t_2 = -4 \Rightarrow x_2^2 = -4$$

No existe ningún valor real para el que x cumpla cualquiera de las dos condiciones anteriores. Por lo tanto, el conjunto de soluciones es el conjunto vacío:

$$K = \{\} = \varnothing$$

Hay cero soluciones:

$$|K| = 0$$

19. Escribe una ecuación bicuadrada que tenga 4 soluciones y coeficientes enteros. Una de las soluciones es 3 y otra de las soluciones es -1/2.

En una ecuación bicuadrada, las soluciones siempre van por parejas. Si una de las soluciones es 3, hay otra solución que es -3. Si una de las soluciones es -1/2, hay otra solución que es 1/2.

Por lo tanto, podemos escribir:

$$(x-3) \cdot (x+3) \cdot \quad x + \frac{1}{2} \quad \cdot \quad x - \frac{1}{2} \quad = 0$$

Usando la identidad notable:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

se obtiene:

$$(x^2 - 3^2) \cdot \left(x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$
$$(x^2 - 9) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Ahora multiplicamos ambos binomios:

$$x^4 - \frac{1}{4}x^2 - 9x^2 + \frac{9}{4} = 0$$
$$x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{36}{4}x^2 + \frac{9}{4} = 0$$
$$x^4 - \frac{37}{4}x^2 + \frac{9}{4} = 0$$

Pero los coeficientes no son enteros. Si multiplicamos por 4, conseguimos una ecuación bicuadrada con coeficientes enteros:

$$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$$

Podemos comprobar que es la ecuación que buscamos si comprobamos cada solución:

- $x = 3$

  $$LI = 4 \cdot 3^4 - 37 \cdot 3^2 + 9 = 0$$
  $$LD = 0$$

  $x = 3$ sí cumple la ecuación.

- $x = -3$

  $$LI = 4 \cdot (-3)^4 - 37 \cdot (-3)^2 + 9 = 0$$
  $$LD = 0$$

  $x = -3$ sí cumple la ecuación.

- $x = \frac{1}{2}$

  $$LI = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 37 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 = 0$$
  $$LD = 0$$

  $x = 1/2$ sí cumple la ecuación.

- $x = -\frac{1}{2}$

  $$LI = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 37 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 9 = 0$$
  $$LD = 0$$

  $x = -1/2$ sí cumple la ecuación.

Las cuatro soluciones cumplen la ecuación que hemos encontrado. Eso implica que la ecuación es correcta.

20. Demuestra que si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones x_1 y x_2, se cumplen las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Esas relaciones son las *fórmulas de Vieta* para ecuaciones cuadráticas que también se llaman *relaciones de Cardano-Vieta*.

François Viète (1540-1603) fue un matemático francés que escribía su nombre en latín como *"Franciscus Vieta"*. Por esa razón encontrarás en distintos idiomas, formas ligeramente diferentes de escribir su nombre: en algunos casos se usa el nombre francés y en otros casos se usa el nombre en latín.

Gerolamo Cardano (1501-1576) fue un matemático italiano que publicó, por primera vez, las complicadas fórmulas para resolver cualquier ecuación cúbica o cuadrática. Verás su nombre escrito de muchas maneras diferentes: Girolamo Cardano, Geronimo Cardano, Jérôme Cardan…

Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, entonces sabemos:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Multiplicamos los dos últimos factores de la derecha:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

Multiplicamos el coeficiente líder:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a \cdot x \cdot x_2 - ax_1 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

Podemos eliminar los términos de grado 2:

$$bx + c = -a \cdot x \cdot x_2 - ax_1 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$bx + c = (-ax_2 - ax_1) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

Para que el lado derecho y el lado izquierdo sean iguales siempre para cualquier valor de x, los coeficientes de cada grado deben ser iguales:

$$bx + c = (-ax_2 - ax_1) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} b = (-ax_2 - ax_1) \\ c = a \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = x_2 + x_1 \\ \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Tal y como queríamos demostrar.

21. Comprueba que se cumplen las fórmulas de Vieta para la ecuación cuadrática:

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

Empezamos por encontrar las soluciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 252}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 16}{2} \end{aligned}$$

Es decir:

$$x_1 = \frac{-2 + 16}{2} = \frac{14}{2} = 7$$
$$x_1 = \frac{-2 - 16}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Las fórmulas de Vieta son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Comprobamos la primera:

$$LI = x_1 + x_2 = 7 + (-9) = -2$$
$$LD = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$$

Es cierta.

Comprobamos la segunda:

$$LI = x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-9) = -63$$
$$LD = \frac{c}{a} = \frac{-63}{1} = -63$$

Es cierta.

Con lo que hemos comprobado las fórmulas de Vieta para esta ecuación cuadrática concreta.

22. Una de las soluciones de una ecuación cuadrática es 3/7, el término independiente vale 2 y el coeficiente líder vale 1. Escribe la ecuación y encuentra la otra solución.

Existen varios modos de resolver el ejercicio.

Modo 1: sustituimos en la ecuación.

Sabemos que cualquier ecuación cuadrática se puede escribir:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como el término independiente vale 2 y el coeficiente líder vale 1:

$$x^2 + bx + 2 = 0$$

El número 3/7 debe cumplir la ecuación:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{3}{7}\right) + 2 = 0$$

$$\frac{9}{49} + \frac{3b}{7} + 2 = 0$$

El mínimo común múltiplo de 49 y 7 es 49; 49 es múltiplo de 7:

$$\frac{9}{49} + \frac{21b}{49} + 2 = 0$$

Multiplicamos todo por 49:

$$9 + 21b + 2 \cdot 49 = 0$$

$$9 + 21b + 98 = 0$$

$$21b + 107 = 0$$

$$21b = -107$$

$$b = \frac{-107}{21}$$

Es decir, la ecuación es:

$$\boxed{x^2 - \frac{107}{21}x + 2 = 0}$$

La otra solución se puede obtener, por ejemplo, con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-\left(-\frac{107}{21}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{107}{21}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \sqrt{\frac{11449}{441} - 8}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \sqrt{\frac{11449}{441} - \frac{3528}{441}}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \sqrt{\frac{11449-3528}{441}}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \sqrt{\frac{7921}{441}}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \frac{\sqrt{7921}}{\sqrt{441}}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{107}{21} \pm \frac{89}{21}}{2}$$

Una de las soluciones es:

$$x_1 = \frac{\frac{107}{21} + \frac{89}{21}}{2} = \frac{\frac{107+89}{21}}{2} =$$
$$= \frac{196}{21 \cdot 2} = \frac{98}{21} = \frac{14}{3}$$

Y la otra solución es:

$$x_2 = \frac{\frac{107}{21} - \frac{89}{21}}{2} = \frac{\frac{107-89}{21}}{2} =$$
$$= \frac{\frac{18}{21}}{2} = \frac{18}{21 \cdot 2} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Modo 2: fórmulas de Vieta.

Otro modo es usar las fórmulas de Vieta:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Conocemos $a = 1$, $c = 2$ y $x_2 = 3/7$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7} = -\frac{b}{1} \\ x_1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{1} \end{cases}$$

De la segunda ecuación, podemos despejar x_1:

$$x_1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{3}$$

$$x_1 = \frac{14}{3}$$

Sustituimos en la primera:

$$x_1 + \frac{3}{7} = -b$$
$$\frac{14}{3} + \frac{3}{7} = -b$$
$$b = -\frac{14}{3} - \frac{3}{7}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 21:

$$b = -\frac{14 \cdot 7}{21} - \frac{3 \cdot 3}{21} =$$
$$b = -\frac{107}{21}$$

Es decir, la ecuación es:

$$\boxed{x^2 - \frac{107}{21}x + 2 = 0}$$

El segundo modo, que usa la fórmula de Vieta, parece más sencillo que el primero. ¿Por qué vemos los dos entonces?

Porque es importante darse cuenta de que, conociendo bien herramientas básicas generales podemos llegar a los mismos resultados que conociendo más herramientas que son más especializadas y menos generales.

22. Si definimos la operación:

$$x \heartsuit y = 5y - 3x$$

resuelve la ecuación siguiente:

$$3 \heartsuit x - 2(x+5) = 1$$

Es una ecuación sencilla. Solamente tenemos que cambiar la notación.

Por la definición de la operación *corazón*:

$$3 \heartsuit x = 5x - 3 \cdot 3$$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$5x - 3 \cdot 3 - 2(x+5) = 1$$

Que es una ecuación lineal con una incógnita:

$$5x - 9 - 2x - 10 = 1$$

$$3x - 19 = 1$$
$$3x = 20$$
$$x = \frac{20}{3}$$

$$K = \frac{20}{3}$$
$$|K| = 1$$

Fracciones algebraicas

1. Encuentra los polos de las siguientes fracciones algebraicas:

a)
$$\frac{x+3}{x-1}$$

b)
$$\frac{2x+1}{x^2+2x-35}$$

c)
$$\frac{3}{x^2+4x+5}$$

Un **polo** de una fracción algebraica es un valor de la variable para el cual el denominador de la fracción (es decir, el polinomio que hay debajo) es igual a cero.

a)
$$\frac{x+3}{x-1}$$

Tiene polos donde el denominador es 0:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Tiene un polo en 1.

b)
$$\frac{2x+1}{x^2+2x-35}$$

Tiene polos cuando el denominador es 0:

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \\
&= \frac{-2 \pm 12}{2} = \\
&= -1 \pm 6
\end{aligned}
$$

Es decir, tiene polos en $x_1 = 5$ y $x_2 = -7$.

c)

$$\frac{3}{x^2 + 4x + 5}$$

Tiene polos cuando el denominador es 0:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4x + 5 = 0 \\
x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}
\end{aligned}
$$

El discriminante es negativo:

$$
\begin{aligned}
\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = \\
= 16 - 20 = -4 < 0
\end{aligned}
$$

Por lo que no hay soluciones reales.

Esta fracción algebraica no tiene polos reales.

2. ¿Son equivalentes las fracciones algebraicas de cada pareja?

a)

$$\frac{x+3}{x-1}; \quad \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$$

b)

$$\frac{x+3}{x-1}; \quad \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 1}$$

Dos fracciones algebraicas son equivalentes (es decir, *iguales*) si, al dividir una fracción entre otra, el resultado es 1. O, equivalentemente, si al multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda, tenemos el mismo resultado que al multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda.

a) Dividimos la primera pareja de fracciones:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x+3}{x-1} \div \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} = \\
&= \frac{x+3}{x-1} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} = \\
&= \frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \\
&= \frac{(x+3) \cdot (x^2 + x - 2)}{(x-1) \cdot (x^2 + 5x + 6)} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x^3 + x^2 - 2x + 3x^2 + 3x - 6}{x^3 + 5x^2 + 6x - x^2 - 5x - 6} =$$
$$= \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} =$$
$$= 1$$

Son equivalentes.

b) Dividimos la primera pareja de fracciones:

$$\frac{x+3}{x-1} \div \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 1} =$$
$$= \frac{x+3}{x-1} : \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 1} =$$
$$= \frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 3} =$$
$$= \frac{(x+3) \cdot (x^2 + 2x - 1)}{(x-1) \cdot (x^2 + 4x + 3)} =$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3x^2 + 6x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x - x^2 - 4x - 3} =$$
$$= \frac{x^3 + 5x^2 + 5x - 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3} \neq 1$$

No son equivalentes.

3. Realiza las siguientes operaciones:

a)
$$\frac{1}{x} + \frac{x-2}{x}$$

b)
$$\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x}$$

c)
$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}$$

d)
$$\frac{1}{x} : \frac{x-2}{x}$$

e)
$$3 \cdot \frac{x-2}{x}$$

f)
$$3 : \frac{x-2}{x}$$

g)
$$\frac{x-2}{x} : 3$$

h)
$$\frac{x-2}{x}^{2}$$

De las operaciones con fracciones, la suma y la diferencia son las más difíciles cuando los denominadores son diferentes. Pero, en este caso, los denominadores son iguales.

a)
$$\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x}=$$

como tienen el mismo denominador:

$$=\frac{1+x-2}{x}=\frac{x-1}{x}$$

b)
$$\frac{1}{x}-\frac{x-2}{x}=$$

como tienen el mismo denominador:

$$=\frac{1-(x-2)}{x}=\frac{1-x+2}{x}=$$
$$=\frac{3-x}{x}$$

c)
$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x}=$$
$$=\frac{1\cdot(x-2)}{x\cdot x}=$$
$$=\frac{x-2}{x^2}$$

d)
$$\frac{1}{x}:\frac{x-2}{x}=$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x-2}=$$
$$=\frac{1\cdot x}{x\cdot(x-2)}=$$

Como el mismo factor (x) aparece en el numerador y el denominador, podemos eliminarlo:

$$=\frac{1}{x-2}$$

e)

$$3 \cdot \frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{3 \cdot (x-2)}{x} =$$
$$= \frac{3x-6}{x}$$

f)

$$3 : \frac{x-2}{x} =$$
$$= 3 \cdot \frac{x}{x-2} =$$
$$= \frac{3x}{x-2}$$

g)

$$\frac{x-2}{x} : 3 =$$
$$= \frac{x-2}{x} \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{(x-2) \cdot 1}{x \cdot 3} =$$
$$= \frac{x-2}{3x}$$

h)

$${\frac{x-2}{x}}^{2} =$$
$$= \frac{(x-2)^2}{x^2} =$$
$$= \frac{x^2-4x+4}{x^2}$$

4. Realiza las siguientes operaciones:

a)

$$x+2+\frac{x-2}{x}$$

b)

$$(x+2) \cdot \frac{x-2}{x}$$

c)

$$(x+2) : \frac{x-2}{x}$$

d)

$$x+2 \cdot \frac{x-2}{x}$$

En este ejercicio tenemos operaciones entre un polinomio y una fracción algebraica. Pero cualquier polinomio $P(x)$ se puede escribir como una fracción algebraica de denominador 1:

$$P(x) = \frac{P(x)}{1}$$

a)

$$x + 2 + \frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{x+2}{1} + \frac{x-2}{x} =$$

El mínimo común múltiplo de ambos denominadores es claramente x, por lo que:

$$= \frac{(x+2)\cdot x}{1\cdot x} + \frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{x^2+2x}{x} + \frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{x^2+2x+x-2}{x} =$$
$$= \frac{x^2+3x-2}{x}$$

b)

$$(x+2)\cdot\frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x} =$$
$$= \frac{x^2-4}{x}$$

c)

$$(x+2) : \frac{x-2}{x} =$$
$$= (x+2)\cdot\frac{x}{x-2} =$$
$$= \frac{(x+2)\cdot x}{x-2} =$$
$$= \frac{x^2+2x}{x-2}$$

d)

$$x + 2\cdot\frac{x-2}{x} =$$

Aquí hay que tener cuidado; la multiplicación solamente afecta a 2:

$$= x + \frac{2\cdot(x-2)}{x} =$$
$$= x + \frac{2x-4}{x} =$$

Ahora sumamos:

$$= \frac{x}{1} + \frac{2x-4}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{x} + \frac{2x-4}{x} =$$
$$= \frac{x^2+2x-4}{x}$$

5. ¿Cuál es la fracción recíproca de la siguiente fracción algebraica?

$$\frac{3x+2}{5x-1}$$

La **fracción recíproca** de una fracción algebraica (o *fracción inversa respecto a la multiplicación*) es la fracción que, multiplicada por ella, nos da 1.

Para encontrarla basta intercambiar el numerador y el denominador. Por lo que la fracción recíproca de:

$$\frac{3x+2}{5x-1}$$

es:

$$\frac{5x-1}{3x+2}$$

Como podemos demostrar fácilmente:

$$\frac{3x+2}{5x-1} \cdot \frac{5x-1}{3x+2} =$$
$$= \frac{(3x+2)\cdot(5x-1)}{(5x-1)\cdot(3x+2)} =$$

El producto de polinomios es conmutativo:

$$= \frac{(3x+2)\cdot(5x-1)}{(3x+2)\cdot(5x-1)} =$$
$$= 1$$

Observa que no es necesario hacer las multiplicaciones de los binomios para llegar al resultado.

Factorización

Un *factor* es cada uno de números o expresiones algebraicas (normalmente polinomios) que aparecen en una multiplicación. Factorizar es separar un número o una expresión algebraica (normalmente un polinomio) en una multiplicación de factores, donde los factores cumplen unas condiciones concretas.

En números, los factores de una factorización son números naturales **primos**. En polinomios, los factores de una factorización son binomios de grado 1 de la forma $x - a$.

Los números y los polinomios se comportan de manera muy similar y hay conceptos que se repiten: máximo común divisor, mínimo común múltiplo, algoritmo de la división larga, fracciones, fracciones impropias, simplificación de fracciones, suma y resta de fracciones...

1. Encuentra el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo:

a) $\text{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3)$
b) $\text{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3)$
c) $\text{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^4 \cdot (x+2))$
d) $\text{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^4 \cdot (x+2))$
e) $\text{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7)$
f) $\text{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7)$
g) $\text{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x+1)^2 \cdot (x-2))$
h) $\text{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x+1)^2 \cdot (x-2))$
i) $\text{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 7)$
j) $\text{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 7)$
k) $\text{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^2 \cdot (x-2))$
l) $\text{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^2 \cdot (x-2))$

Afortunadamente (= por suerte), nos piden el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números y polinomios, pero todos ellos están **factorizados**. Eso facilita encontrarlos porque:

- el máximo común divisor incluye solamente los factores que se repiten y siempre el de exponente menor
- el mínimo común múltiplo incluye todos los factores y, cuando alguno se repite, el de exponente mayor

a) $\text{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3) =$

$$= 2 \cdot 3 = 6$$

b) $\text{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3) =$

$$= 2^4 \cdot 3^2 = 144$$

c) $\text{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^4 \cdot (x+2)) =$

$$= (x-1) \cdot (x+2) =$$

$$= x^2 + x - 2$$

d) $\text{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^4 \cdot (x+2))$

$$= (x-1)^4 \cdot (x+2)^2 =$$

Aquí es necesario hacer varias multiplicaciones para llegar a:

$$= x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

e) $\text{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7) =$

No tienen factores comunes. Por lo que el máximo común divisor es 1:

$$= 1$$

f) $\mathrm{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 5^2 \cdot 7)$

No tienen factores comunes. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo es producto de todos los factores (con sus correspondientes exponentes):

$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 =$$
$$= 3150$$

g) $\mathrm{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x+1)^2 \cdot (x-2)) =$

No tienen factores comunes. Por lo que el máximo común divisor es 1:

$$= 1$$

h) $\mathrm{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x+1)^2 \cdot (x-2))$

No tienen factores comunes. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo es producto de todos los factores (con sus correspondientes exponentes):

$$= (x-1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2) =$$
$$= x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 12x + 8$$

i) $\mathrm{m.c.d}(2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 7)$

$$= 2$$

j) $\mathrm{m.c.m}(2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 7)$

$$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 =$$
$$= 252$$

k) $\mathrm{m.c.d}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^2 \cdot (x-2))$

$$= (x-1)$$

l) $\mathrm{m.c.m}((x-1) \cdot (x+2)^2, (x-1)^2 \cdot (x-2))$

$$= (x-1)^2 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-2) =$$
$$= x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 12x - 8$$

2. Factoriza los siguientes números naturales:
a) 16
b) 135
c) 2646
d) 8281

a) 16 es un número par, así que es divisible entre 2:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & \end{array}$$

8 también es par, así que es divisible entre 2:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & \end{array}$$

4 es divisible entre 2:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & \end{array}$$

Lo que nos da:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$16 = 2^4$$

b) 135 termina en 5. Por lo tanto, es divisible entre 5:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ 27 & \end{array}$$

27 es divisible entre 3; $2 + 7 = 9$ que es divisible entre 3:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$135 = 3^3 \cdot 5$$

c) 2646 es par y, entonces, divisible entre 2:

$$\begin{array}{r|l} 2646 & 2 \\ 1323 & \end{array}$$

1323 no es par. Pero la suma de sus cifras es divisible entre 3 ($1 + 3 + 2 + 3 = 9$), por lo que el número es divisible entre 3:

$$\begin{array}{r|l} 2646 & 2 \\ 1323 & 3 \\ 441 & \end{array}$$

441 también es divisible entre 3 porque $4 + 4 + 1 = 9$:

$$\begin{array}{r|l} 2646 & 2 \\ 1323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & \end{array}$$

147 también es divisible entre 3 porque $1 + 4 + 7 = 12$:

$$\begin{array}{r|l} 2646 & 2 \\ 1323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & \end{array}$$

49 es el cuadrado de 7:

$$\begin{array}{r|c} 2646 & 2 \\ 1323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7^2 \\ 1 & \end{array}$$

Normalmente este último paso se divide en dos y se escribe:

$$\begin{array}{r|l} 2646 & 2 \\ 1323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$$

d) 8281 no es:

- divisible entre 2, porque no es par
- divisible entre 5, porque no termina en 0 o 5
- divisible entre 3, porque $8 + 2 + 8 + 1 = 19$, que no es divisible entre 3

Los siguientes números primos que intentar son 7 y 11. El criterio de divisibilidad más sencillo de los dos es el de 11:

(8 + 8) - (2 + 1) = 16 - 3 = 13

Hemos sumado las cifras en posiciones pares y le hemos restado la suma de las cifras en posiciones impares. Y el resultado no es divisible entre 11, por lo tanto, 8281 no es divisible entre 11.

El criterio de divisibilidad entre 7 es más complicado:

828 - 2 · 1 = 826

volvemos a aplicar el criterio:

82 - 2 · 6 = 82 - 12 = 70

que es divisible entre 7. Por lo que 8281 es divisible entre 7:

$$\begin{array}{r|l} 8281 & 7 \\ 1183 & \end{array}$$

Comprobamos si 1183 también es divisible entre 7:

118 - 2 · 3 = 112

aplicamos el criterio otra vez:

11 - 2 · 2 = 7

por lo que sí es divisible entre 7.

$$\begin{array}{r|l} 8281 & 7 \\ 1183 & 7 \\ 169 & \end{array}$$

169 es el cuadrado de 13:

$$\begin{array}{r|r} 8281 & 7 \\ 1183 & 7 \\ 169 & 13^2 \\ 1 & \end{array}$$

$$8281 = 7^2 \cdot 13^2$$

3. Factoriza:
a) $P(x) = 3x + 6$
b) $Q(x) = 2x - 5$
c) $R(x) = 2x^2 - 4x$
d) $S(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2$

Estos polinomios son fáciles de factorizar; podemos **sacar números o variables como factor común**:

a) $P(x) = 3x + 6 =$

Todos los coeficientes son divisibles entre 3, por lo que sacamos 3 como factor común:

$$= 3(x + 2)$$

Por lo tanto, -2 es una raíz del polinomio.

b) $Q(x) = 2x - 5 =$

El coeficiente líder es 2. Sacamos 2 como factor común:

$$= 2 \cdot \quad x - \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, 5/2 es una raíz del polinomio.

c) $R(x) = 2x^2 - 4x =$

El coeficiente líder es 2. Lo sacamos como factor común:

$$= 2 \cdot (x^2 - x) =$$

Pero, además, todos los términos contienen x. Podemos sacar x como factor común:

$$= 2 \cdot x \cdot (x - 1)$$

Por lo tanto, 0 y 1 son raíces del polinomio.

La factorización también se podría escribir:

$$R(x) = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 1)$$

Con esta forma es más explícito que 0 es una raíz. Sin embargo, no suele utilizarse.

d) $S(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 =$

Ahora podemos sacar x^2 como factor común:

$$= x^2 \cdot (x + \sqrt{3})$$

Por lo tanto, las raíces son 0 (2 veces) y $\sqrt{3}$ (1 vez).

$$S(x) = (x - 0)^2 \cdot (x + \sqrt{3})$$

4. Factoriza:

a) $P(x) = x^2 + 2x - 15$
b) $Q(x) = -x^2 + 6x - 9$
c) $R(x) = 3x^2 + 6x - 24$
d) $S(x) = x^2 - 6x + 13$
e) $T(x) = x^2 - 6x$

En álgebra llamamos a estas expresiones **polinomios de segundo grado** o *polinomios cuadráticos*. En análisis (la parte de las matemáticas que estudia las funciones), las llamamos **funciones cuadráticas**.

Factorizar polinomios de segundo grado es muy sencillo; solamente tenemos que igualar a cero el polinomio y resolver la ecuación cuadrática:

a) $P(x) = x^2 + 2x - 15$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -5$ y el coeficiente líder es 1. Por lo tanto:

$$P(x) = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$$

Es decir:

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x + 5)$$

b) $Q(x) = -x^2 + 6x - 9$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

La soluciones son $x = 3$ y $x = 3$ y el coeficiente líder es -1. Por lo tanto:

$$Q(x) = -1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$$

$$Q(x) = -1 \cdot (x - 3)^2$$

c) $R(x) = 3x^2 + 6x - 24$

$$3x^2 + 6x - 24 = 0$$

Las soluciones son $x = 2$ y $x = -4$ y el coeficiente líder es 3. Por lo tanto:

$$R(x) = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$$

d) $S(x) = x^2 - 6x + 13$

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

No tiene soluciones reales. Por lo tanto, no podemos factorizarlo dentro de los reales. Debemos dejarlo así.

e) $T(x) = x^2 - 6x$

En este caso, sacar x como factor común es más directo que resolver la ecuación:

$$T(x) = x \cdot (x - 6)$$

5. Factoriza:

a) $P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$

b) $Q(x) = x^3 - 27$

En este caso, tenemos polinomios de grado 3 que nos dan ecuaciones cúbicas. Afortunadamente, son casos que podemos resolver:

a) $P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$

Podemos sacar 3 como factor común:

$$P(x) = 3 \cdot (x^3 - x^2 - 6x)$$

También podemos sacar x como factor común:

$$P(x) = 3 \cdot x \cdot (x^2 - x - 6)$$

Ahora solamente tenemos que resolver la ecuación:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

cuyas soluciones son $x = 3$ y $x = -2$. Por lo tanto, la factorización es:

$$P(x) = 3 \cdot x \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$$

b) $Q(x) = x^3 - 27$

Es una cúbica incompleta que solamente tiene el término de grado mayor y el término independiente. Aquí es sencillo despejar para encontrar las soluciones reales:

$$\begin{aligned} x^3 - 27 &= 0 \\ x^3 &= 27 \\ x &= \sqrt[3]{27} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Este procedimiento nos da una sola solución (que no se repite) y, por lo tanto, un solo factor: $(x - 3)$. ¿Qué ocurre con el resto de factores de la factorización? Para ello debemos dividir $Q(x)$ entre $x - 3$:

- por el algoritmo de la división larga

$$
\begin{array}{lrrrr|lll}
 & x^3 & & & -27 & x & -3 & \\
\cline{6-8}
\text{-)} & x^3 & -3x^2 & & & x^2 & +3x & +9 \\
\cline{2-3}
 & & 3x^2 & & & & & \\
 & \text{-)} & 3x^2 & -9x & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 9x & -27 & & & \\
 & & \text{-)} & 9x & -27 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & \mathbf{0} & & & \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

Figura 36: Algoritmo de la división larga de polinomios.

Como se ve en las figuras, el cociente es $x^2 + 3x + 9$.

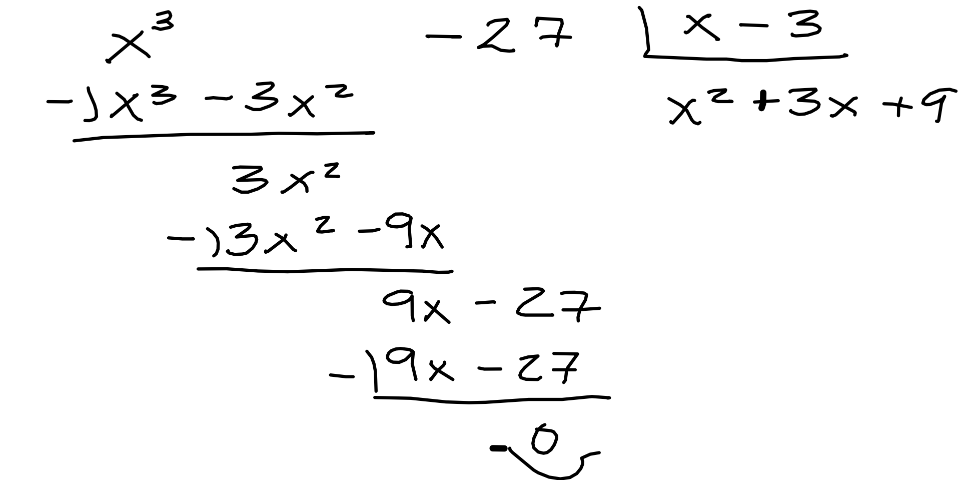


Figura 37: Algoritmo de la división larga de polinomios.

- por el método de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -27 \\
 & & & & \\
3 & & 3 & 9 & 27 \\
\hline
 & 1 & 3 & 9 & 0
\end{array}
$$

El cociente es $x^2 + 3x + 9$.

Por lo tanto, el polinomio es:

$$Q(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$$

Como la ecuación:

$$x^2 + 3x + 9 = 0$$

no tiene soluciones reales; su discriminante es negativo ($\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$), no hay más soluciones reales y no podemos factorizar más.

6. Factoriza:

$$P(x) = 2x^4 - 116x^2 + 882$$

Se trata de un polinomio de grado 4. Vemos que podemos sacar 2 como factor común; todos los coeficientes son pares:

$$P(x) = 2 \cdot (x^4 - 58x^2 + 441)$$

Para factorizar la expresión entre paréntesis, podemos resolver la ecuación:

$$x^4 - 58x^2 + 441 = 0$$

que es una ecuación cuártica. Pero es una ecuación cuártica **bicuadrada** que podemos convertir en una cuadrada con el cambio de variable:

$$x \to t = x^2$$
$$t^2 - 58t^2 + 441 = 0$$
$$t = \frac{-(-58) \pm \sqrt{(-58)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 441}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{58 \pm \sqrt{3364 - 1764}}{2} =$$
$$= \frac{58 \pm \sqrt{1600}}{2} =$$
$$= \frac{58 \pm 40}{2} =$$
$$= 29 \pm 20$$
$$t_1 = 49; t_2 = 9$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$t_1 = 49 \to x^2 = 49 \to x = \pm 7$$
$$t_2 = 9 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$$

Por lo tanto, la factorización es:

$$P(x) = 2 \cdot (x - 7) \cdot (x + 7) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

7. Factoriza:

$$P(x) = x^4 - 16$$

Aquí no podemos sacar nada como factor común. Debemos igualar a 0:

$$x^4 - 16 = 0$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \pm\sqrt[4]{16}$$
$$x = \pm 2$$

Solamente tenemos 2 raíces: 2 y -2. Y eso implica dos factores: $(x-2)$ y $(x+2)$. Con dos factores no podemos conseguir un polinomio de grado 4. Por lo tanto, vamos a dividir el polinomio original entre uno de los factores (primero entre $x - 2$):

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

Es decir:

$$P(x) = (x-2) \cdot (x^3 + 3x^2 + 4x + 8)$$

Ahora dividimos el cociente entre el otro factor $(x+2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 4 & 8 \\ & & & & \\ -2 & & -2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Es decir:

$$P(x) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$$

Como $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, no podemos factorizarlo más.

8. Factoriza el número natural 14994 sin hacer la tabla.

La factorización de números y la de polinomios se parecen más de lo que puedes pensar por los ejemplos anteriores.

Tenemos el número 14994:

$$14994 =$$

que es par porque termina en 4. Por lo tanto, podemos dividirlo entre 2 y eso nos da:

$$= 2 \cdot 7497 =$$

7497 no es divisible entre 2 porque no termina en cifra par y tampoco entre 5 porque no termina en 0 o 5. Si sumamos todas sus cifras, 7 + 4 + 9 + 7 = 27, obtenemos un número divisible entre 3. Por lo tanto, 7497 es divisible entre 3:

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2499 =$$

2499 también es divisible entre 3, porque 2 + 4 + 9 + 9 = 24 es divisible entre 3.

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 833 =$$
$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 833 =$$

833 no es divisible entre 3; 8 + 3 + 3 = 14, que no es divisible entre 3.

833 no es divisible entre 11; (8 + 3) - 3 = 8, que no es divisible entre 11.

833 es divisible entre 7; 83 - 2 · 3 = 77, que es divisible entre 7.

$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 119 =$$

119 es divisible entre 7; 11 - 2 · 9 = -7, que es divisible entre 7.

$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17 =$$
$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17$$

Y la factorización está terminada porque 17 es primo.

Recuerda que en un examen como la maturita oral de matemáticas, hay que evitar el uso de calculadora; el tiempo para terminar el examen es muy limitado. Sin embargo, aquí se puede factorizar un número con cierta rapidez dividiendo los sucesivos resultados en la calculadora.

Incluso podemos no aplicar los criterios de divisibilidad; si el resultado de la división tiene decimales, sabemos que el dividendo no es divisible entre el divisor. Y, por lo tanto, no es un factor. Por ejemplo:

Comprobamos si se puede dividir entre 5:

$$\texttt{14994} \boxed{\div} \texttt{5} \boxed{=}$$

$$\texttt{2998.8}$$

El resultado tiene decimales. Por lo que 14494 no es divisible entre 5. Pero en lugar de reescribir el número original, deshacemos la operación:

$$\texttt{2998.8} \boxed{\times} \texttt{5} \boxed{=}$$

$$\texttt{14994}$$

Comprobamos con 2:

$$\texttt{14994} \boxed{\div} \texttt{2} \boxed{=}$$

$$\texttt{7497}$$

Ya tenemos un factor: 2. Y no podemos usarlo otra vez; 7497 no es par.

Comprobamos con 3:

$$\texttt{7497} \boxed{\div} \texttt{3} \boxed{=}$$

$$\texttt{2499}$$

Volvemos a comprobar con 3:

$$\texttt{2499} \boxed{\div} \texttt{3} \boxed{=}$$

$$\texttt{833}$$

Volvemos a comprobar 3:

$$\texttt{833} \boxed{\div} \texttt{3} \boxed{=}$$

$$\texttt{277.6666667}$$

que no es entero. Recuperamos el número anterior:

$$\texttt{277.6666667} \boxed{\times} \texttt{3} \boxed{=}$$

833

Y así sucesivamente.

9. ¿Cuáles de las siguientes fracciones numéricas son propias y cuáles impropias? Escribe las impropias como suma de un entero y una fracción propia.
a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{12}{7}$
c) $\frac{23}{3}$
d) $\frac{2}{2}$

Una fracción numérica es propia cuando el denominador (el número de abajo) es mayor que el numerador (el número de arriba) y es impropia en caso contrario.

a) $\frac{2}{3}$

Es una fracción propia; el denominador es mayor que el numerador.

b) $\frac{12}{7}$

Es una fracción impropia; el denominador es menor que el numerador.

Al dividir 12 entre 7, el cociente es 1 y el resto es 5. Por lo tanto:

$$\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7}$$

c) $\frac{23}{3}$

Es una fracción impropia; el denominador es menor que el numerador.

Al dividir 23 entre 3, el cociente es 7 y el resto es 2. Por lo tanto:

$$\frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3}$$

d) $\frac{2}{2}$

Es una fracción impropia; el denominador es igual que el numerador.

Al dividir 2 entre 2, el cociente es 1 y el resto es 0. Por lo tanto:

$$\frac{2}{2} = 1$$

10. ¿Cuáles de las siguientes fracciones algebraicas son propias y cuáles impropias? Escribe las impropias como suma de un polinomio y una fracción propia.
a) $\frac{x-5}{x^2+3}$
b) $\frac{x^2+3}{x-5}$
c) $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x+1}$
d) $\frac{2x-3}{x-1}$

Una fracción algebraica es propia cuando el denominador (el polinomio de abajo) tiene grado mayor que el numerador (el polinomio de arriba) y es impropia en caso contrario.

a) $\frac{x-5}{x^2+3}$

Es propia, porque el grado del denominador (2) es mayor que el grado del denominador (1).

b) $\frac{x^2+3}{x-5}$

Es impropia, porque el grado del denominador (1) es menor que el grado del denominador (2).

El cociente de la división es x y el resto es $5x+3$ porque:

$$x^2+3 = x \cdot (x-5) + (5x+3)$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^2+3}{x-5} = x + \frac{5x+3}{x-5}$$

c) $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x+1}$

Es impropia, porque el grado del denominador (1) es menor que el grado del denominador (3).

El cociente de la división es x^2-3 y el resto es 4 porque:

$$\begin{gathered} x^3+x^2-3x+1 = \\ = (x^2-3) \cdot (x+1) + 4 \end{gathered}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^3+x^2-3x+1}{x+1} = x^2-3+\frac{4}{x+1}$$

d) $\frac{2x-3}{x-1}$

Es impropia, porque el grado del denominador (1) es igual que el grado del denominador (1).

Al dividir, el cociente es 2 y el resto es - 1. Es decir:

$$2x-3 = 2 \cdot (x-1) + (-1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{2x-3}{x-1} = 2 + \frac{-1}{x-1}$$

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones que se pueden escribir igualando una fracción algebraica a 0:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = K_P - K_Q$$

donde K_P es el conjunto de soluciones de $P(x) = 0$ y K_Q es el conjunto de soluciones $Q(x) = 0$. Es decir, es el conjunto de raíces del numerador menos el conjunto de polos de la fracción.

1. Resuelve:

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 7} = 0.$$

El numerador nos da la ecuación:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$
$$K_1 = \{-5, 1\}$$

El denominador nos da la ecuación:

$$2x - 7 = 0$$
$$2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2}$$
$$K_2 = \quad \frac{7}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es igual a la diferencia entre el conjunto de raíces del numerador y el conjunto de raíces del denominador:

$$K = K_1 - K_2$$
$$K = \{-5, 1\} - \quad \frac{7}{2}$$
$$K = \{-5, 1\}$$

2. ¿Qué número es el siguiente?

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

La expresión que nos dan es lo que se llama una **fracción continua**.

Llamamos x al número que buscamos:

$$x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Y ahora observamos que lo que hay en el denominador de la fracción mayor es igual al número completo. Por lo tanto, podemos escribir x en su lugar:

$$x=1+\frac{1}{x}$$

Si multiplicamos todo por x:

$$x^2=x+1$$
$$x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Uno de los números es el **número de oro** (o *número áureo*), representado con la letra griega *fi*:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sin embargo, la fracción continua no debería ser igual a dos números al mismo tiempo.

En la fracción continua se ve que todos los números que aparecen son positivos. Y tenemos división y suma de números positivos. El resultado debe ser positivo, por lo tanto:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.618033988\dots$$

no puede ser el resultado.

Por lo tanto:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

3. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x+1}=1$$

Se trata de una ecuación racional. Debemos sumar las dos fracciones algebraicas de la izquierda y para ello, debemos encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

En este caso:

$$\text{mín.c.m.}(x-1,x+1)=(x-1)\cdot(x+1)$$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{(x-1)\cdot(3x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}=1$$
$$\frac{x+1}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{3x^2-2x-3x+2}{(x-1)\cdot(x+1)}=1$$
$$\frac{x+1+3x^2-2x-3x+2}{(x-1)\cdot(x+1)}=1$$
$$\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}=1$$
$$\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$
$$\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-1}{(x-1)\cdot(x+1)}$$
$$\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x^2-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=0$$
$$\frac{3x^2-4x+3-x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}=0$$
$$\frac{2x^2-4x+4}{(x-1)\cdot(x+1)}=0$$

El denominador se anula cuando x es igual a 1 o a -1:

$$K_2=\{\pm1\}$$

El numerador se anula cuando:

$$2x^2-4x+4=0$$

Dividimos todo entre 2:

$$x^2-2x+2=0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$
$$x = 1 \pm \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Es decir:

$$K_1 = \{\} = \varnothing$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones:

$$K = K_1 - K_2 = \varnothing - \{\pm 1\} = \varnothing$$

Ecuaciones irracionales

Una ecuación irracional es una ecuación en la que la incógnita aparece dentro de una raíz (es decir, aparece en el radicando de la raíz).

Siempre hay que comprobar las soluciones.

1. Resuelve $\sqrt{x+1} = x - 1$.

La raíz está aislada en el lado izquierdo. Elevamos ambos lados al cuadrado:

$$\sqrt{x+1}^{\,2} = (x-1)^2$$

$$x + 1 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$.

Ahora hay que comprobar si son soluciones de la ecuación original.

Comprobamos $x_1 = 0$:

- LI $= \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1$
- LD $= x - 1 = 0 - 1 = -1$

No son iguales, por lo tanto, **0 no es solución**.

Comprobamos $x_2 = 3$:

- LI $= \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$
- LD $= x - 1 = 3 - 1 = 2$

Son iguales, por lo tanto, **3 sí es solución**.

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es:

$$K = \{3\}$$
$$|K| = 1$$

2. Resuelve $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = x$.

Aislamos una raíz:

$$\sqrt{x+1} = -\sqrt{x-2} + x$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(x - \sqrt{x-2}\right)^2$$

$$x + 1 = x^2 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 2x\sqrt{x-2}$$

$$x + 1 = x^2 + x - 2 - 2x\sqrt{x-2}$$

Aislando el término que tiene raíz:

$$2x\sqrt{x-2} = x^2 - 3$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$\left(2x\sqrt{x-2}\right)^2 = \left(x^2 - 3\right)^2$$

$$4x^2 \cdot (x-2) = x^4 + 9 - 6x^2$$

Operando y reordenando:

$$4x^3 - 8x^2 = x^4 + 9 - 6x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 9 = 0$$

Esta ecuación cuártica solamente tiene una solución real: 3. Ahora hay que comprobar si es solución de la ecuación original.

Comprobamos $x = 3$:

- LI $= \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$
- LD $= x = 3$

Son iguales, por lo tanto, **3 sí es solución**.

$$K = \{3\}$$
$$|K| = 1$$

3. Resuelve $\sqrt{3x + x^2} = x + \sqrt{x}$.

Una raíz está aislada en el primer miembro (en el lado izquierdo). Podemos elevar ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3x + x^2}\right)^2 = \left(x + \sqrt{x}\right)^2$$

$$3x + x^2 = \left(x + \sqrt{x}\right)^2$$

Usando una de las identidades notables:

$$3x + x^2 = x^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2x \cdot \sqrt{x}$$

$$3x + x^2 = x^2 + x + 2x \cdot \sqrt{x}$$
$$2x = 2x \cdot \sqrt{x}$$
$$x = x \cdot \sqrt{x}$$
$$x - x \cdot \sqrt{x} = 0$$

Sacamos x como factor común:

$$x \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right) = 0$$

Pero un producto es cero solamente si alguno de los factores es cero:

$$x \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones en la ecuación original. Comprobamos $x = 0$:

- LI $= \sqrt{3x + x^2} = 0$
- LD $= x + \sqrt{x} = 0$

Son iguales, por lo tanto, **0 sí es solución**.

Comprobamos $x = 1$:

- LI $= \sqrt{3x + x^2} = 2$
- LD $= x + \sqrt{x} = 2$

Son iguales, por lo tanto, **1 sí es solución**.

$$K = \{0, 1\}$$
$$|K| = 2$$

4. ¿Cuál es el número que equivale a la siguiente expresión?

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

Vamos a llamar x a este número:

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

Pero lo que hay dentro de la primera raíz:

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

coincide con la expresión completa y, por lo tanto, con x:

$$x = 2 + \sqrt{x}$$

Entonces, para encontrar x, solamente tenemos que resolver la ecuación irracional:

$$x = 2 + \sqrt{x}$$

Despejamos la raíz:

$$\sqrt{x} = x - 2$$

Elevamos ambos lados al cuadrado:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)^2 &= (x-2)^2 \\ x &= x^2 - 4x + 4 \\ 0 &= x^2 - 5x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0\end{aligned}$$

Que es una ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

- Comprobamos $x = 4$:
  - $\text{LI} = x = 4$
  - $\text{LD} = 2 + \sqrt{4} = 4$

  Como LI = LD, sí es solución.
- Comprobamos $x = 1$:
  - $\text{LI} = x = 1$
  - $\text{LD} = 2 + \sqrt{1} = 3$

  Como LI $\neq$ LD, no es solución.

El número es 4.

5. Demuestra que no existe un número real x que cumple:

$$\sqrt{x-2}-1=\sqrt{x+4}$$

Nos piden demostrar que la ecuación:

$$\sqrt{x-2}-1=\sqrt{x+4}$$

no tiene soluciones reales.

Vamos a aislar la primera raíz en el lado izquierdo:

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{x+4}+1$$

No sería necesario hacerlo así. Podríamos elevar al cuadrado ambos lados en la ecuación original. Pero al aislar la primera raíz, desaparece el signo menos y es más improbable cometer fallos:

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)^2$$

$$x-2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)^2$$

El cuadrado de una suma es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo:

$$x-2=\left(\sqrt{x+4}\right)^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{x+4}\cdot 1$$

$$x-2=x+4+1+2\cdot\sqrt{x+4}$$

$$-2=5+2\cdot\sqrt{x+4}$$

$$-7=2\cdot\sqrt{x+4}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados:

$$(-7)^2=\left(2\cdot\sqrt{x+4}\right)^2$$

$$49=4\cdot(x+4)$$

$$49=4x+16$$

$$33=4x$$

$$x=\frac{33}{4}$$

Comprobamos la solución que hemos encontrado. Sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación original:

$$LI=\sqrt{x-2}-1=\sqrt{\frac{33}{4}-2}-1=$$

$$=\sqrt{\frac{33}{4}-\frac{8}{4}}-1=$$

$$= \sqrt{\frac{33-8}{4}} - 1 =$$
$$= \sqrt{\frac{25}{4}} - 1 =$$
$$= \frac{5}{2} - 1 =$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{2}{2} =$$
$$= \frac{3}{2}$$

Sustituyendo en el lado derecho:

$$LD = \sqrt{x+4} = \sqrt{\frac{33}{4} + 4} =$$
$$= \sqrt{\frac{33}{4} + \frac{16}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{33+16}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{49}{4}} =$$
$$= \frac{7}{2}$$

El lado derecho y el lado izquierdo son **distintos**:

$$LI \neq LD$$
$$\frac{3}{2} \neq \frac{7}{2}$$

Por lo tanto, **no existe un número real que cumpla la ecuación**. La ecuación no tiene soluciones reales.

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una ecuación en la que la incógnita aparece como exponente de una potencia.

1. Resuelve: $2^x = 1$.

Podemos escribir 1 como 2^0. Por lo tanto, hay una solución:

$$x = 0$$

$$K = \{0\}$$
$$|K| = 1$$

Otro modo de resolverlo es despejar x usando el logaritmo en base 2:

$$2^x = 1 \Rightarrow x = \log_2(1)$$

El logaritmo de 1 en cualquier base es 0:

$$x = 0$$

2. Resuelve: $3^x = 0$.

Una potencia con base real distinta de cero nunca puede ser cero. Por lo tanto, no tiene solución:

$$K = \{\}$$

$$|K| = 0$$

3. Resuelve: $4^x = -2$.

Una potencia con base real distinta de cero nunca puede ser negativa. Por lo tanto, no tiene solución real:

$$K = \{\}$$

$$|K| = 0$$

Se puede argumentar con el logaritmo:

$$4^x = -2 \Rightarrow x = \log_4(-2) \notin \mathbb{R}$$

No existe el logaritmo de un número negativo dentro de los números reales.

4. Resuelve: $2^x = 1024$.

Si factorizamos 1024, tenemos que $1024 = 2^{10}$. Por lo tanto:

$$2^x = 2^{10}$$

$$x = 10$$

$$K = \{10\}$$

$$|K| = 1$$

5. Resuelve: $3^x = \sqrt{3}$.

Una raíz es una potencia con exponente racional. En particular, la raíz cuadrada de 3 es 3 elevado a un medio:

$$3^x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$K = \quad \frac{1}{2}$$

$$|K| = 1$$

6. Resuelve: $3 \cdot 5^x = 1875$.

Podemos dividir ambos lados entre 3:

$$5^x = \frac{1875}{3}$$

$$5^x = 625$$

Si factorizamos 625, tenemos 5^4:

$$5^x = 5^4$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

$$|K| = 1$$

7. Resuelve: $\frac{1}{2}\ ^{3x-1} = 16$.

Sabemos que $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ y que $16 = 2^4$:

$$2^{-1}\ ^{3x-1} = 2^4$$

$$2^{-3x+1} = 2^4$$

$$-3x + 1 = 4$$

$$-3x = 4 - 1$$

$$-3x = 3$$

$$x = -1$$

$$K = \{-1\}$$

$$|K| = 1$$

8. Resuelve: $2^x = 35$.

35 no es una potencia entera de 2. Así que solamente podemos coger un logaritmo. Podemos hacer:

$$2^x = 35 \Rightarrow x = \log_2(35)$$

Cambiando de base:

$$x = \frac{\log(35)}{\log(2)}$$

También se puede cambiar a base e con el logaritmo natural o neperiano:

$$x = \frac{\ln(35)}{\ln(2)}$$

Una aproximación decimal es:

$$x \approx 5.129283017$$

9. Resuelve: $2^{x-2} + 2^{x+1} = 1152$.

Este ejemplo es más complicado que los anteriores porque la incógnita aparece en más de uno de los exponentes:

$$2^{x-2} + 2^{x+1} = 1152$$

Podemos hacer:

$$2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2 = 1152$$

Sacamos la potencia con la incógnita como factor común:

$$2^x \cdot \quad 2^{-2} + 2 \quad = 1152$$

$$2^x = \frac{1152}{2^{-2} + 2}$$

$$2^x = \frac{1152}{4^{-1} + 2}$$

$$2^x = \frac{1152}{\frac{1}{4} + 2}$$

$$2^x = \frac{1152}{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$2^x = \frac{1152}{\frac{9}{4}}$$

$$2^x = \frac{1152 \cdot 4}{9}$$

$$2^x = 128 \cdot 4$$

$$2^x = 512$$

Factorizando 512:

$$2^x = 2^9$$

$$x = 9$$

$$K = \{9\}$$

$$|K| = 1$$

10. Resuelve: $0.25^x = 4^{x-3}$.

Sabemos que $0.25 = 1/4$, por lo tanto:

$$\frac{1}{4} \quad ^{x} = 4^{x-3}$$

Y $\frac{1}{4} = 4^{-1}$:

$$4^{-1} \quad ^{x} = 4^{x-3}$$

$$4^{-x} = 4^{x-3}$$

$$-x = x - 3$$

$$-x - x = -3$$

$$-2x = -3$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$K = \quad \frac{3}{2}$$
$$|K| = 1$$

11. Resuelve: $4^x + 2^{x+1} = -1$.

$$4^x + 2^{x+1} = -1$$

Podemos conseguir que todas las potencias tengan la misma base:

$$2^{2}\ {}^{x} + 2^{x+1} = -1$$

Por las propiedades de las potencias:

$$(2)^{2x} + 2^{x+1} = -1$$
$$(2)^{2x} + 2 \cdot 2^x = -1$$
$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = -1$$
$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = -1$$

Ahora podemos hacer el cambio de variable: $x \to t = 2^x$.

$$t^2 + 2 \cdot t = -1$$
$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática completa que podemos resolver con la fórmula:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Como el discriminante es 0, solamente hay una solución:

$$t = \frac{-2 \pm 0}{2}$$
$$t = \frac{-2}{2}$$
$$t = -1$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$2^x = -1$$

Que no tiene soluciones reales. Por lo tanto:

$$K = \{\} = \varnothing$$
$$|K| = 0$$

12. Resuelve: $4^x - \frac{3}{2} \cdot 2^{x+1} + 2 = 0$.

$$4^x - \frac{3}{2} \cdot 2^{x+1} + 2 = 0$$

$$4^x - \frac{3}{2} \cdot 2^x \cdot 2^1 + 2 = 0$$

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$${2^2}^{\;x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Ahora podemos hacer el cambio de variable: $x \to t = 2^x$.

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática completa que podemos resolver con la fórmula:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Como el discriminante es positivo, hay dos soluciones reales:

$$t = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = 2; \quad t_2 = 1$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$t_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$K = \{0, 1\}$$

$$|K| = 2$$

13. Resuelve la ecuación:

$$5 = \sqrt[x]{625}$$

Podemos reescribir:

$$5 = \sqrt[x]{625}$$

de la siguiente manera:

$$5 = 625^{\frac{1}{x}}$$

que es una ecuación exponencial. Podemos factorizar el número 625 y llegamos a:

$$625 = 5^4$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 5 &= \quad 5^4 \;\, {}^{\frac{1}{x}} \\ 5 &= 5^{\frac{4}{x}} \\ 5^1 &= 5^{\frac{4}{x}} \\ 1 &= \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

$$|K| = 1$$

14. Resuelve la ecuación:

$$4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72 + 3^{x+2}$$

Se trata de una ecuación exponencial en la que no coinciden los exponentes. Pero podemos usar las propiedades de las potencias y la ecuación:

$$4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72 + 3^{x+2}$$

se convierte en:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^{-1} &= 72 + 3^x \cdot 3^2 \\ 4 \cdot 3^x \cdot 3 - 3^x \cdot \frac{1}{3} &= 72 + 3^x \cdot 9 \\ 12 \cdot 3^x - 3^x \cdot \frac{1}{3} &= 72 + 9 \cdot 3^x \end{aligned}$$

Podemos multiplicar todo por 3:

$$36 \cdot 3^x - 3^x = 216 + 27 \cdot 3^x$$

Pasamos todas las potencias 3^x a la izquierda:

$$36 \cdot 3^x - 3^x - 27 \cdot 3^x = 216$$
$$8 \cdot 3^x = 216$$
$$3^x = \frac{216}{8}$$
$$3^x = 27$$

Por lo que x es es 3:

$$x = 3$$
$$K = \{3\}$$
$$|K| = 1$$

15. Resuelve la ecuación:

$$e^{x+2} = e^x + e^2$$

La expresión que nos dan es una ecuación, no una identidad (aunque lo parezca).

Podemos separar el lado derecho en el producto de dos potencias:

$$e^x \cdot e^2 = e^x + e^2$$

Podemos pasar el término que contiene x en el lado derecho al lado izquierdo:

$$e^x \cdot e^2 - e^x = e^2$$

Podemos sacar e^x como factor común:

$$e^x \cdot \quad e^2 - 1 \quad = e^2$$

Y despejar:

$$e^x = \frac{e^2}{e^2 - 1}$$

Si cogemos logaritmos en ambos lados:

$$x = \ln \quad \frac{e^2}{e^2 - 1}$$

Por las propiedades de los logaritmos:

$$x = \ln \quad e^2 \quad - \ln \quad e^2 - 1$$
$$x = 2 - \ln \quad e^2 - 1$$
$$K = \quad 2 - \ln \quad e^2 - 1$$
$$|K| = 1$$

16. Resuelve la ecuación:

$$3^{x+2} = \frac{3^x}{9^2}$$

Esta ecuación es más sencilla que muchas de las anteriores. Nos damos cuenta de que 9 es el cuadrado de 3:

$$3^{x+2} = \frac{3^x}{(3^2)^2}$$

$$3^{x+2} = \frac{3^x}{3^4}$$

Pero el cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes:

$$3^{x+2} = 3^{x-4}$$

Dos potencias de la misma base son iguales si sus exponentes son iguales:

$$x + 2 = x - 4$$

$$2 = -4 \quad \perp$$

Es una contradicción. Por lo tanto, no tiene solución:

$$K = \varnothing$$

$$|K| = 0$$

17. Resuelve la ecuación:

$$\frac{2^x + 2^x}{2^x \cdot 2^x} = \frac{5}{10}$$

Primero observamos que la fracción del lado derecho es reducible y la simplificamos:

$$\frac{2^x + 2^x}{2^x \cdot 2^x} = \frac{1}{2}$$

En el numerador de la parte izquierda:

$$\frac{2 \cdot 2^x}{2^x \cdot 2^x} = \frac{1}{2}$$

Podemos eliminar dos de las potencias de dos:

$$\frac{2}{2^x} = \frac{1}{2}$$

Y, despejando:

$$\frac{2}{1/2} = 2^x$$

$$2^x = \frac{2}{1/2}$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

$$|K| = 1$$

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es una ecuación en la que la incógnita aparece como argumento de un logaritmo.

1. Resuelve: $\log(x) = 1$.

Como escribimos $\log(x)$ se trata del logaritmo decimal: $\log(x) \equiv \log_{10}(x)$.

$$\log_{10}(x) = 1$$
$$x = 10^1$$
$$x = 10$$
$$K = \{10\}$$
$$|K| = 1$$

2. Resuelve: $\ln(x) = \frac{1}{2}$.

Como escribimos $\ln(x)$ se trata del logaritmo natural (o neperiano): $\ln(x) \equiv \log_e(x)$.

$$\log_e(x) = \frac{1}{2}$$
$$x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$x = \sqrt{e}$$
$$K = \quad \sqrt{e}$$
$$|K| = 1$$

3. Resuelve: $\log_2(x) = -3$.

$$\log_2(x) = -3$$
$$x = 2^{-3}$$
$$x = \frac{1}{8}$$
$$K = \quad \frac{1}{8}$$
$$|K| = 1$$

4. Resuelve: $\log(x-2) = 2\log(x-1) - \log(x)$.

$$\log(x-2) = 2\log(x-1) - \log(x)$$

Podemos meter el 2 dentro del logaritmo como exponente:

$$\log(x-2) = \log\left((x-1)^2\right) - \log(x)$$

La diferencia de logaritmos es igual al logaritmo de la división de los argumentos:

$$\log(x-2) = \log\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right)$$

Dos logaritmos son iguales si sus argumentos son iguales:

$$x-2 = \frac{(x-1)^2}{x}$$

$$x^2-2x = (x-1)^2$$

$$x^2-2x = x^2-2x+1$$

$$0 = 1 \quad \perp$$

Es una **contradicción**. Por lo tanto, no tiene soluciones:

$$K = \{\} = \varnothing$$

$$|K| = 0$$

5. Resuelve: $\log(2x-2) = 2\log(x-1) - \log(x)$.

$$\log(2x-2) = 2\log(x-1) - \log(x)$$

Podemos meter el 2 dentro del logaritmo como exponente:

$$\log(2x-2) = \log\left((x-1)^2\right) - \log(x)$$

La diferencia de logaritmos es igual al logaritmo de la división de los argumentos:

$$\log(2x-2) = \log\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right)$$

Dos logaritmos son iguales si sus argumentos son iguales:

$$2x-2 = \frac{(x-1)^2}{x}$$

$$2x^2-2x = (x-1)^2$$

$$2x^2-2x = x^2-2x+1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$K = \{\pm 1\}$$

$$|K| = 1$$

6. Resuelve: $\log(\ln(x)) = \ln(\log(x))$.

Podemos hacer un cambio de base en uno de los logaritmos internos. Por ejemplo, podemos cambiar el logaritmo neperiano:

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

Por lo tanto la ecuación se convierte en:

$$\log\left(\frac{\log x}{\log e}\right) = \ln(\log(x))$$

El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos:

$$\log(\log x) - \log(\log e) = \ln(\log(x))$$

Podemos convertir el logaritmo neperiano de la derecha:

$$\log(\log x) - \log(\log e) = \frac{\log(\log x)}{\log(e)}$$

Podemos hacer un cambio de variable para ver más claramente la ecuación:

$$x \longrightarrow y = \log(\log x)$$

$$\begin{aligned}
y - \log(\log e) &= \frac{y}{\log(e)} \\
y - \frac{y}{\log(e)} &= \log(\log e) \\
\log(e) \cdot y - y &= \log(e) \cdot \log(\log e) \\
y \cdot (\log(e) - 1) &= \log(e) \cdot \log(\log e) \\
y &= \frac{\log(e) \cdot \log(\log e)}{\log(e) - 1}
\end{aligned}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\log(\log x) = \frac{\log(e) \cdot \log(\log e)}{\log(e) - 1}$$

Despejamos el logaritmo interno:

$$\log x = 10^{\frac{\log(e) \cdot \log(\log e)}{\log(e) - 1}}$$

Por las propiedades de las potencias:

$$\log x = 10^{\log(e) \frac{\log(\log e)}{\log(e)-1}}$$
$$\log x = e^{\frac{\log(\log e)}{\log(e)-1}}$$

Por lo tanto:

$$x = 10^{e^{\frac{\log(\log e)}{\log(e)-1}}}$$
$$x \approx 78,891694$$

$$K = \left\{ 10^{e^{\frac{\log(\log e)}{\log(e)-1}}} \right\}$$
$$|K| = 1$$

7. Resuelve:
$$2 \cdot \log(x+1) - \log(x+3) = \log(x)$$

Un número por un logaritmo es el logaritmo del argumento elevado a ese número:

$$\log \left((x+1)^2 \right) - \log(x+3) = \log(x)$$

La resta de dos logaritmos, es el logaritmo del cociente de sus argumentos:

$$\log \left(\frac{(x+1)^2}{x+3} \right) = \log(x)$$

Podemos eliminar los logaritmos:

$$\frac{(x+1)^2}{x+3} = x$$
$$(x+1)^2 = x \cdot (x+3)$$

Desarrollando:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x$$
$$2x + 1 = 3x$$
$$1 = 3x - 2x$$
$$1 = x$$
$$x = 1$$

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

8. Resuelve:

$$\ln(x-1)+\ln(x+2)=1$$

La suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto:

$$\ln\left[(x-1)\cdot(x+2)\right]=1$$

$$(x-1)\cdot(x+2)=e^1$$
$$x^2+2x-x-2=e$$
$$x^2+x-2=e$$
$$x^2+x-2-e=0$$
$$x^2+x-(2+e)=0$$

Que es una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde:

- $a=1$
- $b=1$
- $c=-(2+e)$

Por lo que:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-(2+e))}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{9+4e}}{2}$$

El discriminante es $\Delta=9+4e>0$, por lo que hay dos soluciones.

$$|K|=2$$

9. Resuelve la ecuación:

$$\ln(x^4)+3\ln(x)-\ln\ \sqrt[3]{x}\ -1=4$$

Tenemos varios modos de proceder.

- **Modo 1**: sacamos todo de los logaritmos.

$$\ln(x^4)+3\ln(x)-\ln\ \sqrt[3]{x}\ -1=4$$
$$4\cdot\ln(x)+3\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\ln(x)-1=4$$
$$4\cdot\ln(x)+3\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\ln(x)=4+1$$
$$7\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\ln(x)=5$$
$$\frac{21}{3}\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\ln(x)=5$$

$$\frac{20}{3} \cdot \ln(x) = 5$$
$$\ln(x) = 5 \cdot \frac{3}{20}$$
$$\ln(x) = \frac{15}{20}$$

Por lo tanto:

$$x = e^{\frac{15}{20}}$$
$$x = e^{\frac{3}{4}}$$
$$K = \quad e^{\frac{3}{4}}$$
$$|K| = 1$$

- **Modo 2**: metemos todo en los logaritmos.

$$\ln(x^4) + 3\ln(x) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad - 1 = 4$$
$$\ln(x^4) + \ln(x^3) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad = 4 + 1$$
$$\ln(x^4) + \ln(x^3) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad = 5$$

La suma de logaritmos es el logaritmo del producto:

$$\ln(x^4 \cdot x^3) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad = 5$$
$$\ln(x^{4+3}) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad = 5$$
$$\ln(x^7) - \ln \quad \sqrt[3]{x} \quad = 5$$

La resta de logaritmos es el logaritmo del cociente:

$$\ln \quad \frac{x^7}{\sqrt[3]{x}} \quad = 5$$
$$\ln \quad \frac{x^7}{x^{\frac{1}{3}}} \quad = 5$$
$$\ln \quad x^{7-\frac{1}{3}} \quad = 5$$
$$\ln \quad x^{7-\frac{1}{3}} \quad = \ln \quad e^5$$
$$\ln \quad x^{\frac{20}{3}} \quad = \ln \quad e^5$$
$$x^{\frac{20}{3}} = e^5$$
$$x^{\frac{20}{3}} = e^5$$
$$x = e^{5 \cdot \frac{3}{20}}$$
$$x = e^{\frac{3}{4}}$$
$$K = \quad e^{\frac{3}{4}}$$
$$|K| = 1$$

Obtenemos el mismo resultado por ambos métodos.

10. Resuelve:

$$\log(x+3) - \log(x+1) = \log(x+1) - \log(x)$$

Por las propiedades de los logaritmos, la diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente:

$$\log \quad \frac{x+3}{x+1} \quad = \log \quad \frac{x+1}{x}$$

Podemos eliminar los logaritmos:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1}{x}$$
$$x \cdot (x+3) = (x+1) \cdot (x+1)$$
$$x^2 + 3x = (x+1)^2$$
$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1^2$$
$$3x = 2x + 1$$
$$x = 1$$

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

11. Resuelve:

$$\log_{27}(x+5) = \frac{1}{3}$$

Por la definición de logaritmo:

$$x + 5 = 27^{\frac{1}{3}}$$

Pero 27 elevado a 1 tercio es la raíz cúbica de 27:

$$x + 5 = \sqrt[3]{27}$$
$$x + 5 = 3$$
$$x = 3 - 5$$
$$x = -2$$

$$K = \{-2\}$$
$$|K| = 1$$

Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen las funciones trigonométricas (el seno, el coseno, la tangente…).

La dificultad de las ecuaciones trigonométricas está en que, en general, o no tienen ninguna solución o tienen un conjunto de soluciones infinito numerable. En las ecuaciones polinómicas, las racionales, las irracionales, las exponenciales y las logarítmicas, los conjuntos de soluciones son finitos.

Lo bueno es que las soluciones se agrupan en familias. Y si conoces una solución de la familia, puedes encontrar todas las demás de la misma familia.

Para eso, es imprescindible manejar bien la circunferencia goniométrica.

1. Resuelve: $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

La función inversa del seno es el arcoseno:

$$x = \arcsin \frac{1}{2}$$

que también se puede escribir:

$$x = \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

Pero esto tiene múltiples valores. En el primer cuadrante, el seno es 1/2 cuando el ángulo es 30°. Eso nos da un primer conjunto de soluciones:

$$K_1 = \{30° + n \cdot 360°; \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

¿En qué otro cuadrante es el seno positivo? En el segundo. ¿Y qué ángulo entre 90° y 180° tiene un seno de 1/2? Observando la circunferencia trigonométrica, eso nos da un ángulo de 180° - 30° = 150°. Por lo tanto, tenemos el segundo conjunto de soluciones:

$$K_2 = \{150° + n \cdot 360°; \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

A partir de ahora, no escribiremos que n es un número entero. Pero, si queremos ser muy correctos, debemos escribirlo siempre.

El conjunto de soluciones completo es:

$$K = K_1 \cup K_2$$
$$K = \{30° + n \cdot 360°\} \cup \{150° + n \cdot 360°\}$$

Donde el símbolo "∪" es el símbolo de la unión de conjuntos.

Ese conjunto se puede expresar también en radianes:

$$K = \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \cup \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

El conjunto de soluciones es **infinito numerable**. Su cardinalidad es *álef sub-cero*, la cardinalidad de los naturales:

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

Y ya hemos resuelto la ecuación.

ALUMNA: Hay una cosa que me parece difícil.

PROFESOR: ¿El qué?

ALUMNA: Cuando tenemos que el seno de equis es un medio y quitamos el seno, dice que hay infinitas soluciones.

PROFESOR: Sí. Así es.

ALUMNA: ¿Por qué hay más de una? Nunca había visto eso antes. . .

PROFESOR: Oh. Sí lo habías visto. En las ecuaciones polinómicas, por ejemplo.

ALUMNA: *Čo?*

PROFESOR: Imagina la ecuación $x^2 = 81$. ¿Qué tienes que hacer para quitar el cuadrado?

ALUMNA: Hacer la raíz cuadrada en los dos lados.

PROFESOR: ¿Y qué más?

ALUMNA: ¡Y poner más/menos! Así: [`Escribe.`] $x = \pm\sqrt{81}$. Es decir: $x = \pm 9$.

PROFESOR: Exacto. Porque 9 al cuadrado es 81. Pero -9 al cuadrado también es 81.

ALUMNA: Y 30° es una solución de $\sin x = 1/2$ porque $\sin 30°$ es un medio. Pero 150° también, porque $\sin 150°$ también es un medio. Y si sumamos o restamos una vuelta o dos vueltas o tres vueltas. . . tenemos otras soluciones.

PROFESOR: Muy bien. Lo has entendido.

2. Resuelve: $\cos x = 0$.

Si no se recuerda que el coseno es cero para 90 grados y 270 grados, es fácil deducirlo a partir de la circunferencia goniométrica. Solamente hay que recordar que el coseno de un ángulo es la coordenada x del punto de la circunferencia goniométrica que corresponde a ese ángulo.

$$K = \{90° + n \cdot 360°\} \cup \{270° + n \cdot 360°\}$$

La unión de esos conjuntos se puede expresar de forma más breve así:

$$K = \{90° + n \cdot 180°\}$$

En radianes:

$$K = \quad \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

3. Resuelve: $\cos x = 1$.

El coseno de un ángulo es 1 solamente para un ángulo recto de 90 grados y para todos los que se obtienen a partir de él dando vueltas completas:

$$K = \{90° + n \cdot 360°\}$$

En radianes:

$$K = \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

4. Resuelve: $\cos^2 x = 1$.

Esto es:

$$\cos^2 x = 1$$
$$(\cos x)^2 = 1$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1}$$
$$\cos x = \pm 1$$

Que equivale a dos ecuaciones:

- I: $\cos x = 1$

$$K_1 = \{0° + n \cdot 360°\}$$

- II: $\cos x = -1$

$$K_2 = \{180° + n \cdot 360°\}$$

$$K = K_1 \cup K_2$$

La unión de los dos conjuntos se puede expresar de manera más breve:

$$K = \{0° + n \cdot 180°\}$$

Y, en radianes:

$$K = \{0 + \pi n\}$$

que es un conjunto infinito numerable:

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

5. Resuelve: $\cos x = 3$.

Dentro del conjunto de los números reales, el coseno nunca puede ser mayor que 1 o menor que -1.

Podemos decirlo de otra manera: la imagen (= el recorrido) de la función coseno es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Que equivale a decir que para cualquier valor real de x, $\cos x \in [-1, 1]$. Es decir, que el coseno no puede ser menor que -1 o mayor que 1.

Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución dentro de los números reales.

$$K = \{\} = \varnothing$$

$$|K| = 0$$

6. Resuelve: $\sin x = \frac{3}{5}$.

Como $3/5$ es menor que 1 porque el denominador (5) es mayor que el numerador (3), sabemos que el seno puede tener este valor. Por lo tanto, esta ecuación trigonométrica tiene soluciones.

El principal problema con esta ecuación trigonométrica es que $3/5$ no es el valor de ninguna de las razones trigonométricas habituales (es decir, las de 0°, 30°, 45°, 60° o 90°). Lo que nos obliga a **usar la calculadora**.

$$x = \arcsin \frac{3}{5}$$

que se puede escribir:

$$x = \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

Ahora que vas a usar la calculadora, debes tener mucho cuidado:

1. Comprueba que la calculadora está en el modo de unidad angular adecuado:
   - `D` o `DEG` para grados sexagesimales
   - `R` o `RAD` para radianes
   - `G` o `GRA` para grados centesimales (gradianes)
2. Usa paréntesis para asegurarte de que haces el arcoseno del número correcto.

   En algunas calculadoras es necesario, en otras no. Aprende lo que ocurre con la tuya.
3. Ten en cuenta que la calculadora solamente da una solución. Las demás tienes que encontrarlas tú.

En grados sexagesimales, la calculadora da una solución:

$$x_1 \approx 36.86989765°$$

que está en el primer cuadrante. Pero, como 3/5 es positivo y el seno es positivo en el primer cuadrante y en el segundo, tendremos una solución en el segundo cuadrante:

$$x_2 = 180^\circ - x_1$$
$$x_2 = 180^\circ - 36.86989765^\circ$$
$$x_2 \approx 143.1301024^\circ$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es:

$$K = \{36.86989765^\circ + n \cdot 360^\circ\} \cup$$
$$\cup \{143.1301024^\circ + n \cdot 360^\circ\}$$

Donde tienes que tener en cuenta que hemos escrito aproximaciones. No los valores exactos.

7. Resuelve: $\sin x = \frac{7}{2}$.

Siete medios (7/2) es mayor que 1:

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} > 1$$

Pero el seno de un número real no puede ser mayor que 1. Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones reales. El conjunto de soluciones reales es el conjunto vacío:

$$K = \{\} = \emptyset = \varnothing$$

8. Resuelve: $\sin x = -\frac{2}{7}$.

El número $-\frac{2}{7}$ está en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ de posibles valores del seno. Por lo tanto, esta ecuación sí tendrá soluciones reales.

$$x = \arcsin \quad -\frac{2}{7}$$

O, equivalentemente:

$$x = \sin^{-1} \quad -\frac{2}{7}$$

Usamos la calculadora que nos da una solución:

$$x_1 \approx -16.60154960^\circ$$

Este ángulo pertenece al cuarto cuadrante. Lo podemos escribir como el equivalente positivo sumándole 360 grados:

$$x_1 \approx 343.3984504°$$

El seno es negativo en el tercer cuadrante y en el cuarto cuadrante. Nos falta encontrar la solución del tercer cuadrante. Para eso, solamente tenemos que sumar 180° a 16.60154960° (positivo):

$$x_2 \approx 180° + 16.60154960°$$
$$x_2 \approx 196.6015496°$$

Por lo que el conjunto de soluciones es:

$$K = \{196.6015496° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{343.3984504° + n \cdot 360°\}$$

9. Resuelve: $\cos x = -\frac{2}{7}$.

El número $-\frac{2}{7}$ está en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ de posibles valores del coseno. Por lo tanto, esta ecuación sí tendrá soluciones reales.

$$x = \arccos \quad -\frac{2}{7}$$

O, equivalentemente:

$$x = \cos^{-1} \quad -\frac{2}{7}$$

Usamos la calculadora que nos da una solución:

$$x_1 \approx 106.6015496°$$

Que está en el segundo cuadrante. El coseno es negativo en el segundo cuadrante y en el tercero. Por lo tanto, nos falta otra solución para encontrar el conjunto completo de soluciones.

Sabemos que 180° - 106.6015496° es 73.3984504°. Por lo que la solución del tercer cuadrante será:

$$x_2 \approx 180° + 73.3984504°$$
$$x_2 \approx 253.3984504°$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones reales es:

$$K = \{106.6015496° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{253.3984504° + n \cdot 360°\}$$

10. Resuelve: $2\cos^2 x - \cos x = 0$.

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

Como todos los términos tienen un coseno, podemos sacar el coseno como factor común:

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$

Un producto es cero si alguno de los factores es cero:

- I: $\cos x = 0$
- II: $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

El conjunto de soluciones será la unión de las soluciones de esas dos ecuaciones.

11. Resuelve: $\cos^2 x + 2\sin x = 0$.

$$\cos^2 x + 2\sin x = 0$$

Por el **teorema fundamental de la trigonometría**[16]:

$$1 - \sin^2 x + 2\sin x = 0$$

$$\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$

Si hacemos un cambio de variable: $x \to t = \sin x$.

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

Es una ecuación cuadrática cuyas soluciones son:

$$t_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad t_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Al deshacer el cambio de variable, obtenemos dos ecuaciones trigonométricas:

- I: $\sin x = 1 + \sqrt{2}$

  Que no tiene soluciones reales; el lado derecho es mayor que 1 y el seno no puede ser mayor que 1.

- II: $\sin x = 1 - \sqrt{2}$

  El lado derecho es mayor que -1 y menor que 1, así que puede existir.

  Podemos encontrar una de las soluciones del conjunto usando el arcoseno en la calculadora:

  $$x = \arcsin \quad 1 - \sqrt{2}$$

  $$x \approx -24,4698^\circ$$

  Esa solución está en el cuarto cuadrante. Habrá otra solución en el tercer cuadrante (donde el seno es negativo).

[16]Siempre que uses un teorema, debes decirlo explícitamente.

12. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = 3$$

El recorrido (= la imagen) de la función tangente es el conjunto de todos los números reales:

$$\operatorname{Rec}[\operatorname{tg} x] = \operatorname{Im}[\operatorname{tg} x] = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

por lo tanto, la tangente de un ángulo puede ser **cualquier número real**. Es decir, la tangente de un ángulo puede ser 3.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(3)$$

¿En qué cuadrante es positiva la tangente? Como la tangente es el seno entre el coseno:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

la tangente es positiva cuando el seno y el coseno tengan el mismo signo:

- ambos son positivos en el primer cuadrante
- ambos son negativos en el tercer cuadrante

Entonces la tangente es positiva en el primer cuadrante y en el tercero.

El valor de la arcotangente de 3 que se obtiene en una calculadora es aproximadamente:

$$\alpha_0 \approx 71.565°$$

que está en el primer cuadrante. La solución del tercer cuadrante se obtiene sumando 180:

$$\alpha_0' \approx 71.565° + 180°$$
$$\alpha_0' \approx 251.565°$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es:

$$K = \{71.565° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{251.565° + n \cdot 360°\}$$

Que se puede escribir:

$$K = \{71.565° + n \cdot 180°\}$$
$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

13. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 = 0$$

Por suerte, en esta ecuación trigonométrica, sólo aparece una razón trigonométrica y su argumento es siempre el mismo. Es fácil ver que puede convertirse en una ecuación cuadrática con un cambio de variable:

$$(\sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha \to t = \sin\alpha$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

Que puede resolverse:

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$$

Que nos da una sola solución para t:

$$t = 1$$

Ahora es necesario deshacer el cambio de variable:

$$\sin\alpha = 1$$

Y, por lo tanto, el conjunto de soluciones es:

$$K = \{90^\circ + n\cdot 360^\circ;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

O, en radianes:

$$K = \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$$
$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

14. Resuelve la ecuación:

$$\sin x + \cos x = 1$$

Esta ecuación tiene el problema de que tiene dos razones trigonométricas diferentes (un seno y un coseno). Y no podemos separarla en dos ecuaciones sacando un factor común. Y tampoco aparece una de las razones al cuadrado para que podamos usar el teorema fundamental de la trigonometría.

Pero si despejamos el coseno:

$$\cos x = 1 - \sin x$$

Podemos elevar al cuadrado en ambos miembros[17]:

$$(\cos x)^2 = (1 - \sin x)^2$$
$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x - 2\sin x$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, por lo que:

$$1 - \sin^2 x = 1 + \sin^2 x - 2\sin x$$
$$-\sin^2 x = \sin^2 x - 2\sin x$$
$$0 = 2\sin^2 x - 2\sin x$$
$$0 = \sin^2 x - \sin x$$

Sacando un seno como factor común:

$$0 = \sin x \cdot (\sin x - 1)$$

Obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación nos da 0 grados y 180 grados (y sus respectivas familias) y la segunda nos da 90 grados (y su familia). Pero ahora debemos comprobar si son soluciones de la ecuación original:

- $0°$
  $$LI = \sin 0° + \cos 0° = 0 + 1 = 1$$
  $$LD = 1$$
  Como $LI = LD$, sí es solución.
- $180°$
  $$LI = \sin 180° + \cos 180° = 0 + (-1) = -1$$
  $$LD = 1$$
  Como $LI \neq LD$, no es solución.
- $90°$
  $$LI = \sin 90° + \cos 90° = 1 + 0 = 1$$
  $$LD = 1$$
  Como $LI = LD$, sí es solución.

[17] Y este paso puede estar introduciendo soluciones que no estaban en la ecuación original.

Por lo tanto:

$$K = \{0° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{90° + n \cdot 360°\}$$

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

15. Resuelve
$$\tan^2 x = \sin x$$

Es una ecuación trigonométrica en la que aparecen dos razones trigonométricas diferentes y, además, una de ellas es la tangente.

La tangente es el seno partido el coseno:

$$(\tan x)^2 = \sin x$$
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \sin x$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin x$$

$$\sin^2 x = \sin x \cdot \cos^2 x$$

Seguimos teniendo dos razones trigonométricas distintas. Pero como el coseno está al cuadrado, podemos usar el teorema fundamental de la trigonometría para cambiarlo:

$$\sin^2 x = \sin x \cdot (1 - \sin^2 x)$$
$$\sin^2 x = \sin x - \sin^3 x$$

Reordenando:

$$\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x = 0$$

Que es una ecuación cúbica incompleta sin término independiente en $\sin x$ (es decir, si cambiamos $\sin x$ por t).

Podemos sacar un seno como factor común:

$$\sin x \cdot (\sin^2 x + \sin x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación da la familia de soluciones:

$$K_1 = \{0 + \pi n\}$$

La segunda ecuación:

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1}$$
$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solamente una de las soluciones es posible en los números reales; el seno no puede ser mayor que 1 o menor que -1.

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx$$
$$\approx 0,6180339887$$

Si usamos la calculadora:

$$x = \arcsin(0,6180339887) =$$
$$= 38,17270762°$$

Este ángulo está en el primer cuadrante. El seno es positivo también en el segundo cuadrante. Otro ángulo que es solución es:

$$180° - 38,17270762° =$$
$$= 141,8272924°$$

El conjunto completo de soluciones es:

$$K = \{0 + \pi n\} \cup$$
$$\cup \{38,17270762° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{141,8272924° + n \cdot 360°\}$$

O, expresando todo en grados sexagesimales:

$$K = \{0° + n \cdot 180°\} \cup$$
$$\cup \{38,17270762° + n \cdot 360°\} \cup$$
$$\cup \{141,8272924° + n \cdot 360°\}$$

Inecuaciones polinómicas

1. Resuelve: $3x - 1 < 2$.

Como es de primer grado (es decir, *es lineal*), es fácil de resolver despejando:

$$3x - 1 < 2$$
$$3x < 2 + 1$$
$$3x < 3$$
$$\boxed{x < 1}$$

El conjunto de soluciones:

$$K = \{x \in \mathbb{R};\ x < 1\}$$

se puede escribir en forma de intervalo:

$$K = (-\infty, 1)$$

Hay infinitas soluciones, pero es un **infinito no numerable**, es decir, su cardinalidad es mayor que la cardinalidad de los números naturales. Para ser precisos, es la cardinalidad de los reales:

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

2. Resuelve: $3x - 1 \geq 2$.

Como es de primer grado (es decir, *es lineal*), es fácil de resolver despejando:

$$3x - 1 \geq 2$$
$$3x \geq 2 + 1$$
$$3x \geq 3$$
$$\boxed{x \geq 1}$$

El conjunto de soluciones:

$$K = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$$

se puede escribir en forma de intervalo:

$$K = [1, \infty)$$

que en Eslovaquia se acostumbra a escribir:

$$K = \langle 1, \infty)$$

Hay infinitas soluciones, pero es un **infinito no numerable**, es decir, su cardinalidad es mayor que la cardinalidad de los números naturales. Para ser precisos, es la cardinalidad de los reales:

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

3. Resuelve: $-3x - 1 \geq 2(x + 1)$.

$$-3x - 1 \geq 2(x + 1)$$
$$-3x - 1 \geq 2x + 2$$
$$-3x - 2x \geq 1 + 2$$
$$-5x \geq 3$$

Ahora es importante ver que, al despejar, la desigualdad cambia:

$$x \leq \frac{3}{-5}$$

$$x \leq -\frac{3}{5}$$

El conjunto de soluciones:

$$K = \quad x \in \mathbb{R};\ x \leq -\frac{3}{5}$$

se puede escribir en forma de intervalo:

$$K = \quad -\infty, -\frac{3}{5}$$

que en Eslovaquia se acostumbra a escribir:

$$K = \quad -\infty, -\frac{3}{5}$$

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

4. Resuelve: $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Para resolver las inecuaciones polinómicas de grado mayor que 1, primero factorizamos el polinomio:

$$P(x) = x^2 + 5x - 6$$

Para lo que resolvemos la ecuación:

$$P(x) = 0$$
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

que tiene dos soluciones reales:

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 1$$

Como el coeficiente líder de $P(x)$ es 1, la factorización es:

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6) \cdot (x - 1)$$

Por lo que la inecuación se puede escribir:

$$(x + 6) \cdot (x - 1) > 0$$

Podemos separar la recta real en varios intervalos: $(-\infty, -6)$, $(-6, 1)$ y $(1, \infty)$.

Ahora tenemos que estudiar el signo en cada intervalo:

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$(x + 6) \cdot (x - 1)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución es:

$$K = (-\infty, -6) \cup (1, \infty)$$

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

5. Resuelve: $x^2 + 5x - 6 < 0$.

El procedimiento es el mismo que antes:

$$(x + 6) \cdot (x - 1) < 0$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$(x + 6) \cdot (x - 1)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución es:

$$K = (-6, 1)$$

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

6. Resuelve: $x^2 + 5x - 6 \leq 0$.

El procedimiento es el mismo que antes:

$$(x + 6) \cdot (x - 1) \leq 0$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$(x + 6) \cdot (x - 1)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución es:

$$K = [-6, 1]$$

Que, en Eslovaquia, se escribe:

$$K = \langle -6, 1 \rangle$$

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

7. Resuelve: $2x^2 + 10x - 12 \leq 0$.

Las soluciones de la ecuación son las mismas que en los casos anteriores. Pero, como el coeficiente líder es 2, la factorización es:

$$2x^2 + 10x - 12 = 2 \cdot (x + 6) \cdot (x - 1)$$

El resto se resuelve como en los ejemplos anteriores.

Inecuaciones racionales

1. Resuelve:
$$\frac{2x-2}{3} \leq 3 \cdot (x + 2).$$

Aunque parezca una inecuación racíonal, es realmente polinómica:

$$\begin{gathered}
\frac{2x-2}{3} \leq 3 \cdot (x+2) \\
2x - 2 \leq 3 \cdot 3 \cdot (x+2) \\
2x - 2 \leq 9x + 18 \\
2x - 9x \leq 2 + 18 \\
-7x \leq 20 \\
x \geq -\frac{20}{7} \\
K = \quad -\frac{20}{7}, \infty
\end{gathered}$$

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

2. Resuelve:
$$\frac{x^2 + 5x + 6}{3x - 2} < 0.$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{3x - 2} < 0$$

Si factorizamos el numerador:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

La inecuación se puede escribir:
$$\frac{(x+2)(x+3)}{3x-2} < 0$$

Podemos factorizar el denominador:

$$3x - 2 = 3 \quad x - \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la inecuación se puede escribir:

$$\frac{(x+2)(x+3)}{3\quad x-\frac{2}{3}} < 0$$

Dividimos la recta real en intervalos con los números -2, -3 y $\frac{2}{3}$: $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $\quad -2,\frac{2}{3}\quad$, $\frac{2}{3},\infty\quad$.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{2}{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x+3)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto:

$$K = (-\infty,-3) \cup \quad -2,\frac{2}{3}$$

3. Resuelve:

$$\frac{x^2+5x+6}{3x-2} \geq 0.$$

El procedimiento es el mismo que en el caso anterior.

La diferencia es que ahora la desigualdad no es estricta. Sino que tenemos un *mayor o igual que*.

Eso hace que los extremos de los intervalos sean cerrados si son raíces del numerador (el polinomio de arriba) y **abiertos** si son raíces del denominador.

Por lo tanto:

$$K = [-3,-2] \cup \quad \frac{2}{3},\infty$$

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal de dos incógnitas se puede representar como una línea recta en el plano.

1. Resuelve la ecuación $6x+2y=4$.

La ecuación:

$$6x+2y=4$$

se puede reescribir como:

$$6x+2y-4=0$$

que es la ecuación implícita o general de una recta en 2 dimensiones. O si despejamos y:

$$y=-3x+2$$

que es la ecuación explícita de una recta en 2 dimensiones (la pendiente es $m = -3$ y la ordenada en el origen es $n = 2$).

Para dibujar una recta necesitamos solamente dos puntos. Calculamos tres para que el tercero sirva de control.

x	y
-1	5
0	2
1	-1

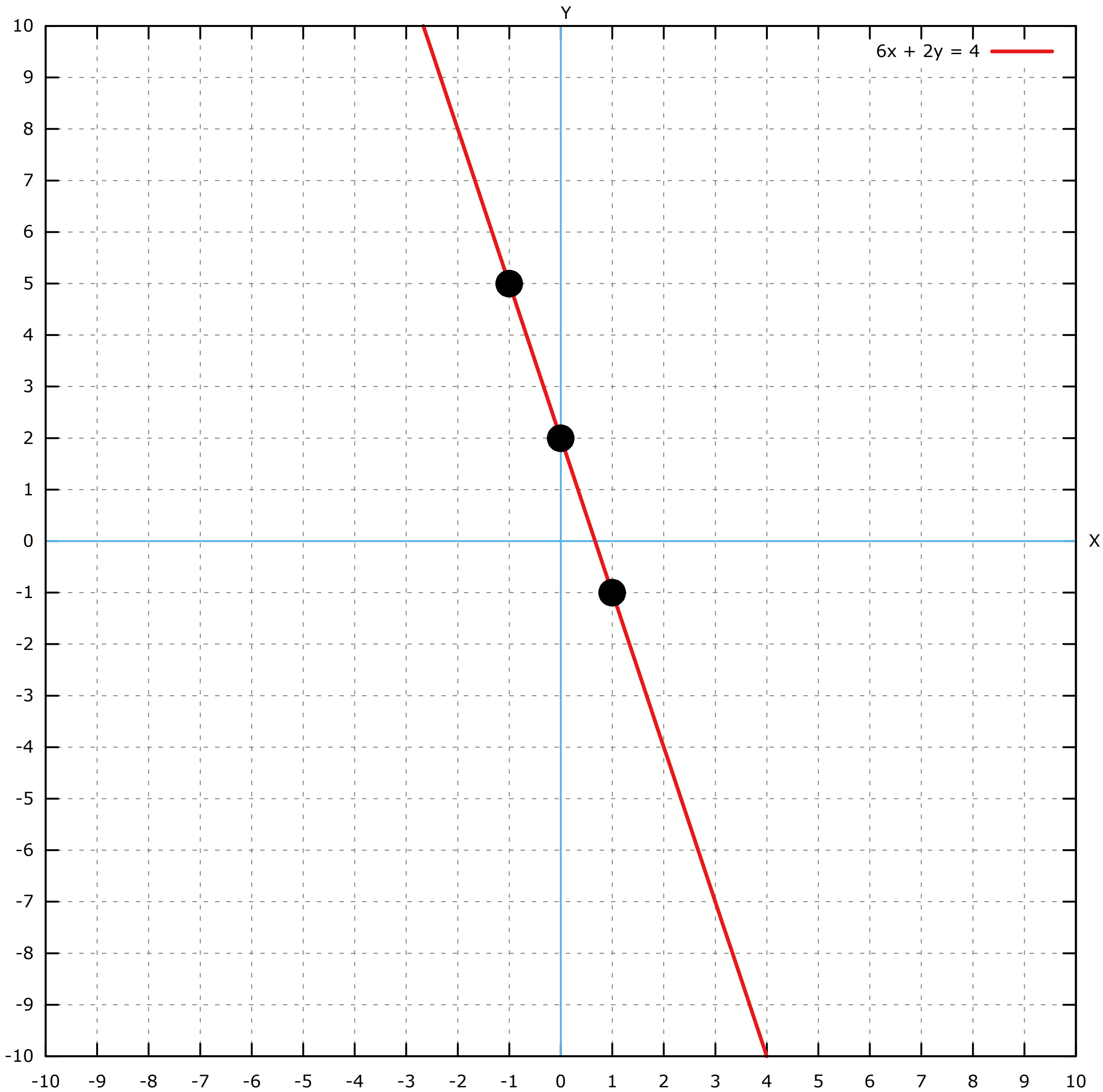


Figura 38: La recta es solución de la ecuación $6x + 2y = 4$. Esa recta pasa (entre muchos otros) por los puntos (-1, 5), (0, 2) y (1, -1).

Si definimos los puntos (0, 2) y (1, -1) como A y B:

$$A = (0, 2)$$

$$B = (1, -1)$$

entonces el conjunto de soluciones se puede escribir como:

$$K = r = \overleftrightarrow{AB}$$

Es decir, el conjunto de soluciones K es la recta r que pasa por los puntos A y B.

Y su cardinalidad es la cardinalidad del continuo:

$$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

Es decir, hay una cantidad **infinita no numerable** de soluciones.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal de dos incógnitas se puede representar como un semiplano en el plano delimitado por una recta.

1. Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y + x \leq 3 \\ 2x - y > 5 \end{cases}.$$

La primera inecuación:

$$y + x \leq 3$$

se puede convertir en una ecuación:

$$y + x = 3$$

Podemos hacer una tabla de valores para dibujar la recta:

x	y
-1	4
0	3
1	2

Un punto bajo la recta es $(0, 0)$ y un punto encima de la recta es $(4, 0)$. Comprobamos si cumplen la inecuación $y + x \leq 3$:

- $(0, 0)$

$$0 + 0 \leq 3$$
$$0 \leq 3 \quad \top$$

- $(4, 0)$

$$4 + 0 \leq 3$$
$$4 \leq 3 \quad \bot$$

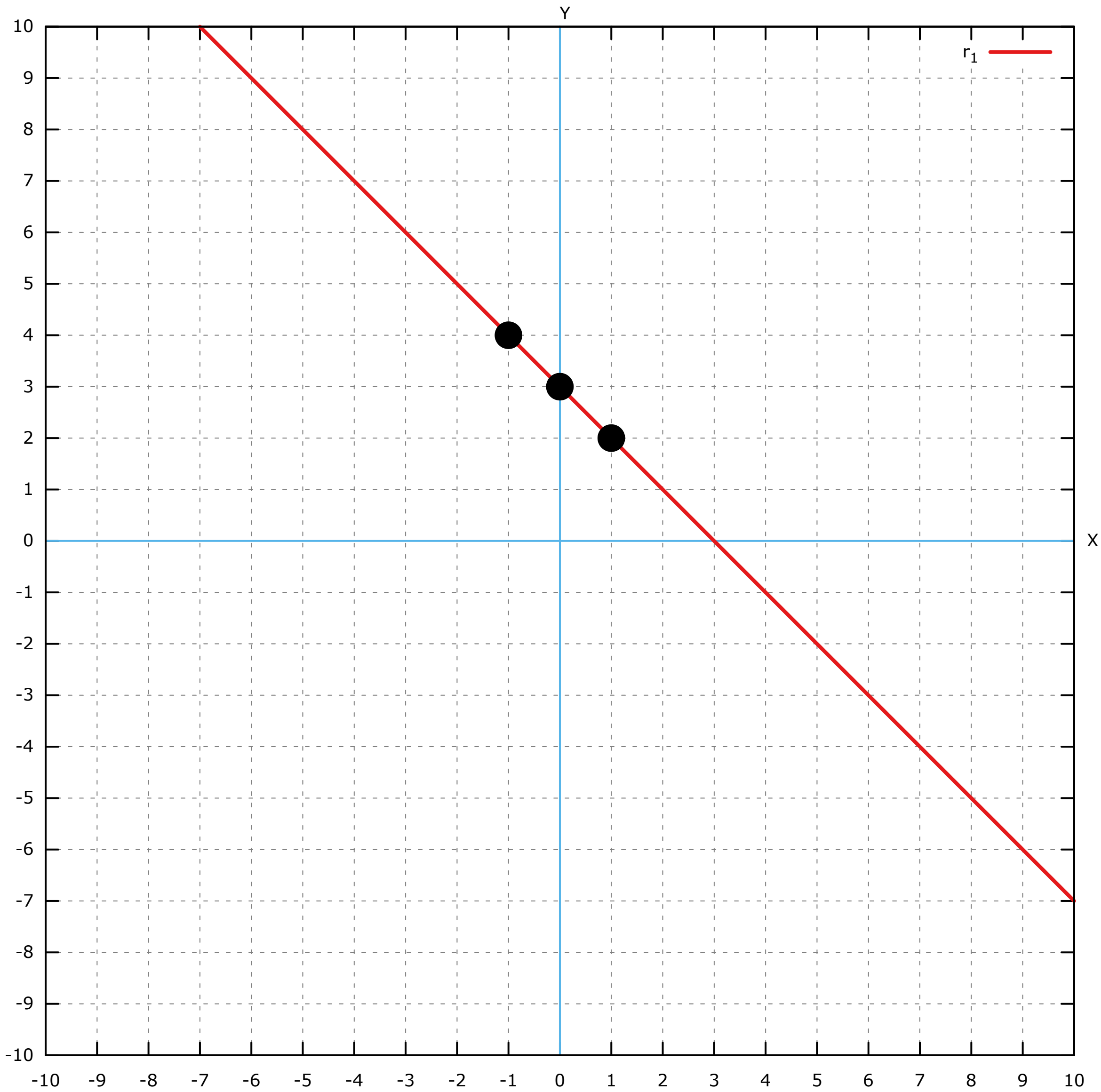


Figura 39: Inecuación. Paso 1. La recta es solución de la ecuación $y + x = 3$.

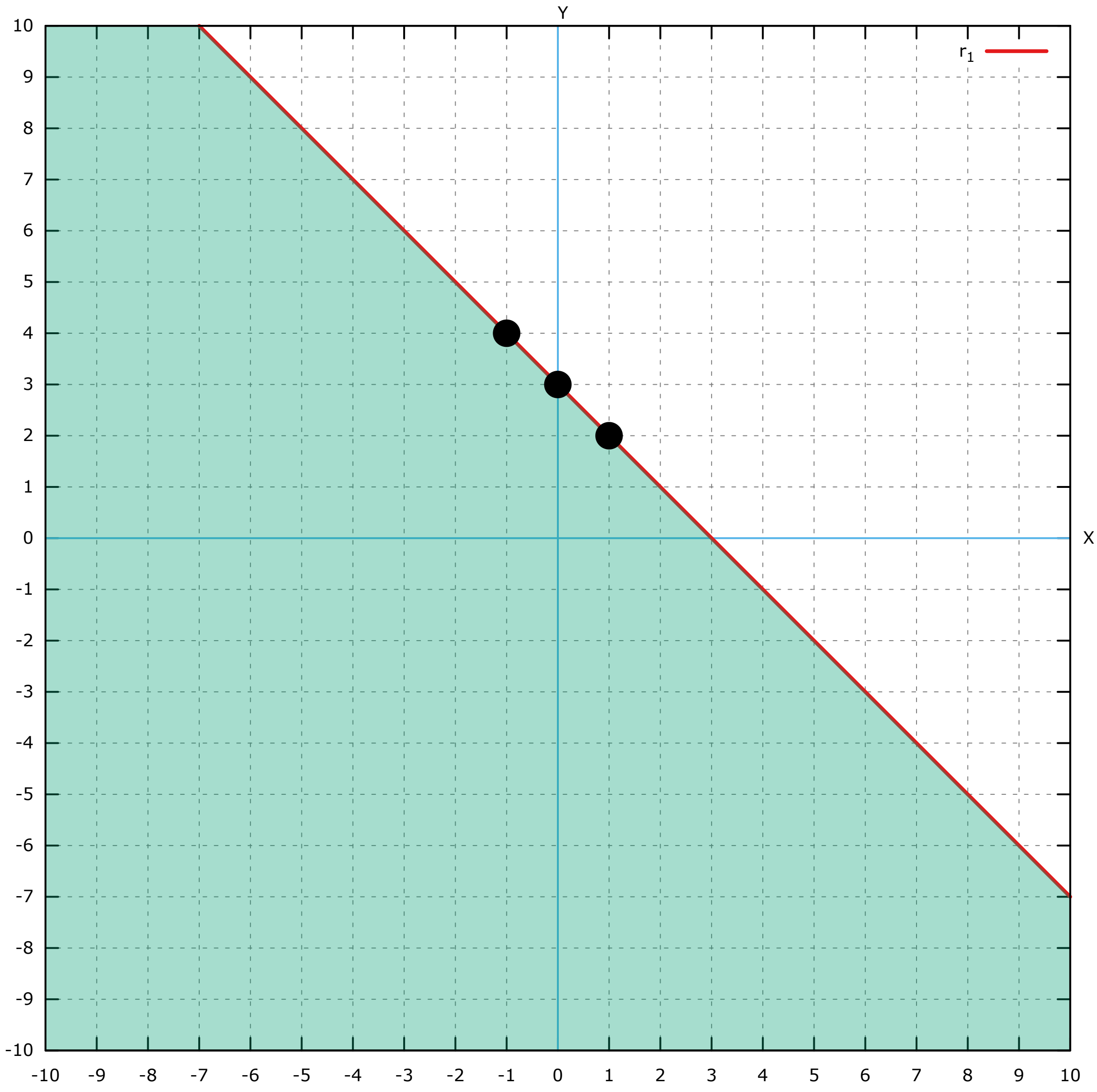


Figura 40: Inecuación. Paso 2. El semiplano inferior (incluyendo a la recta) es solución de la inecuación $y + x \leq 3$.

Por lo tanto, las soluciones son el semiplano **debajo** de la recta **y** la propia recta.

La segunda inecuación:

$$2x - y > 5$$

se puede convertir en una ecuación:

$$2x - y = 5$$

$$y = 2x - 5$$

Podemos hacer una tabla de valores para dibujar la recta:

x	y
0	-5
1	-3
2	-1

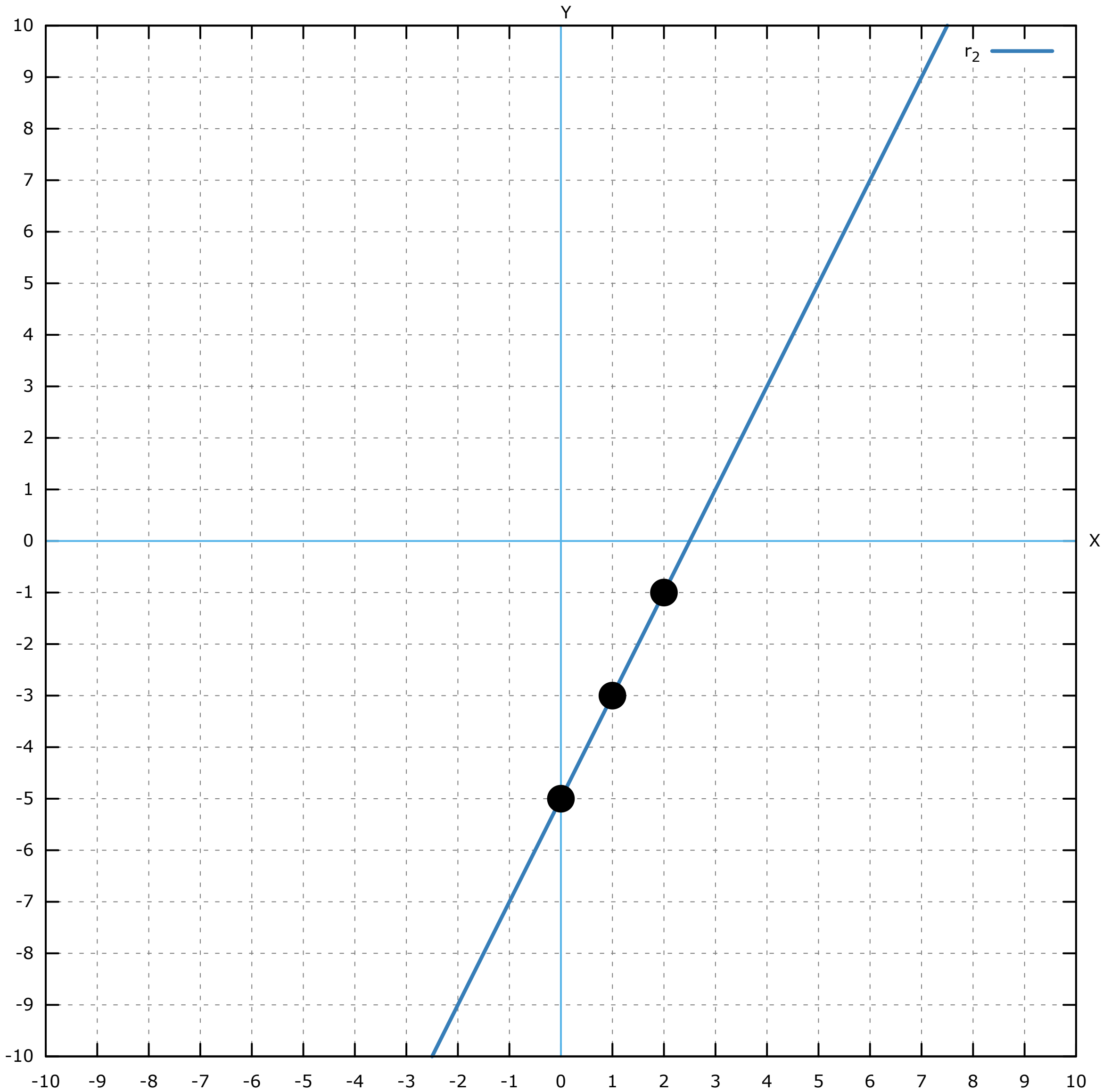


Figura 41: Inecuación. Paso 3. La recta es solución de la ecuación $2x - y = 5$.

Un punto encima de la recta es $(0, 0)$ y un punto debajo de la recta es $(4, 0)$. Comprobamos si cumplen la inecuación $2x - y > 5$:

- $(0, 0)$

$$2 \cdot 0 + 0 > 5$$
$$0 > 5 \quad \perp$$

- $(4, 0)$

$$2 \cdot 4 + 0 > 5$$
$$8 \leq 5 \quad \top$$

Por lo tanto, las soluciones son el semiplano **debajo** de la recta sin incluir la propia recta; la desigualdad es estricta.

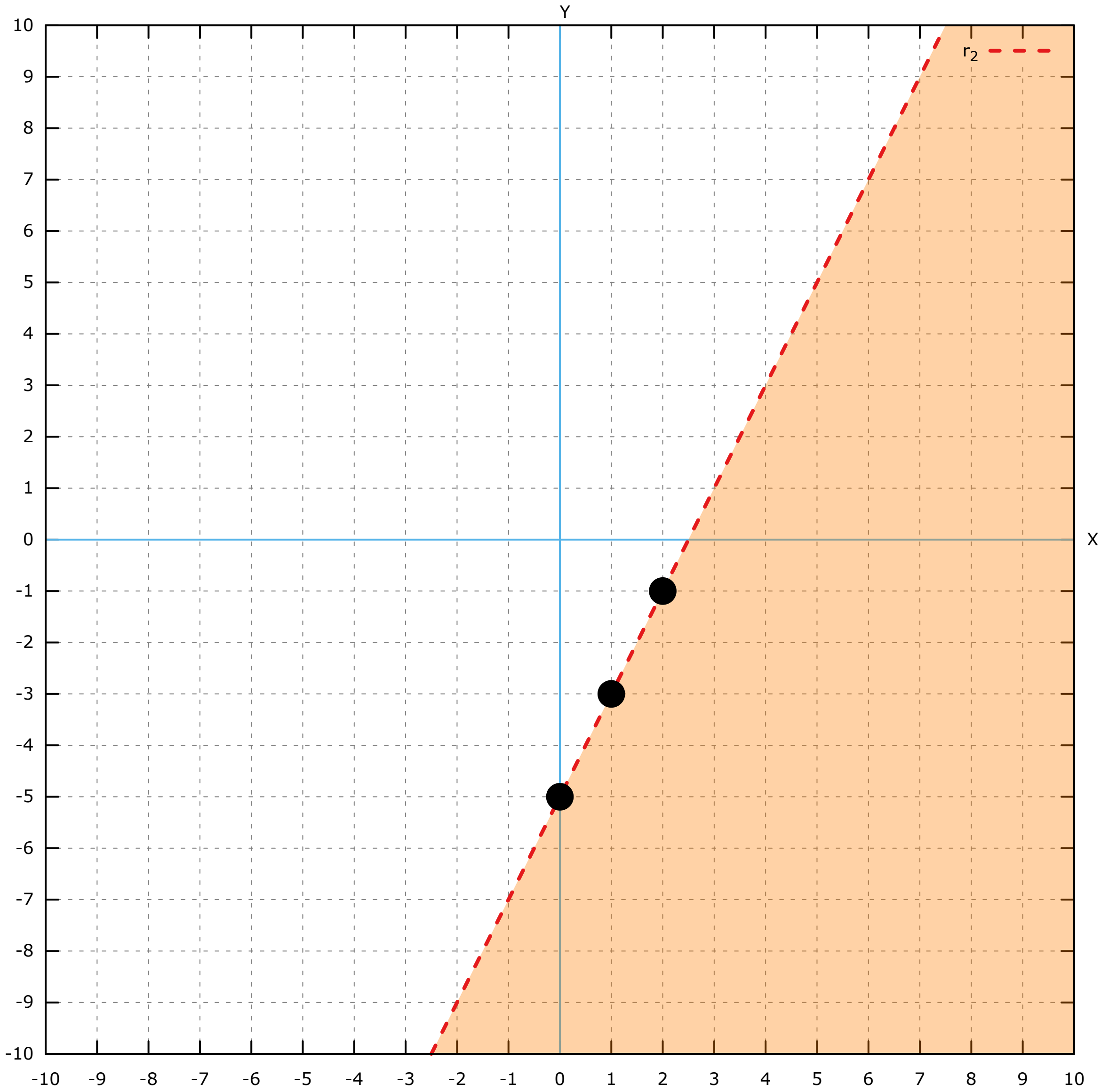


Figura 42: Inecuación. Paso 4. El semiplano inferior (sin incluir a la recta) es solución de la inecuación $2x - y > 5$.

Es decir, el conjunto de soluciones es la región del plano que está debajo de las dos rectas.

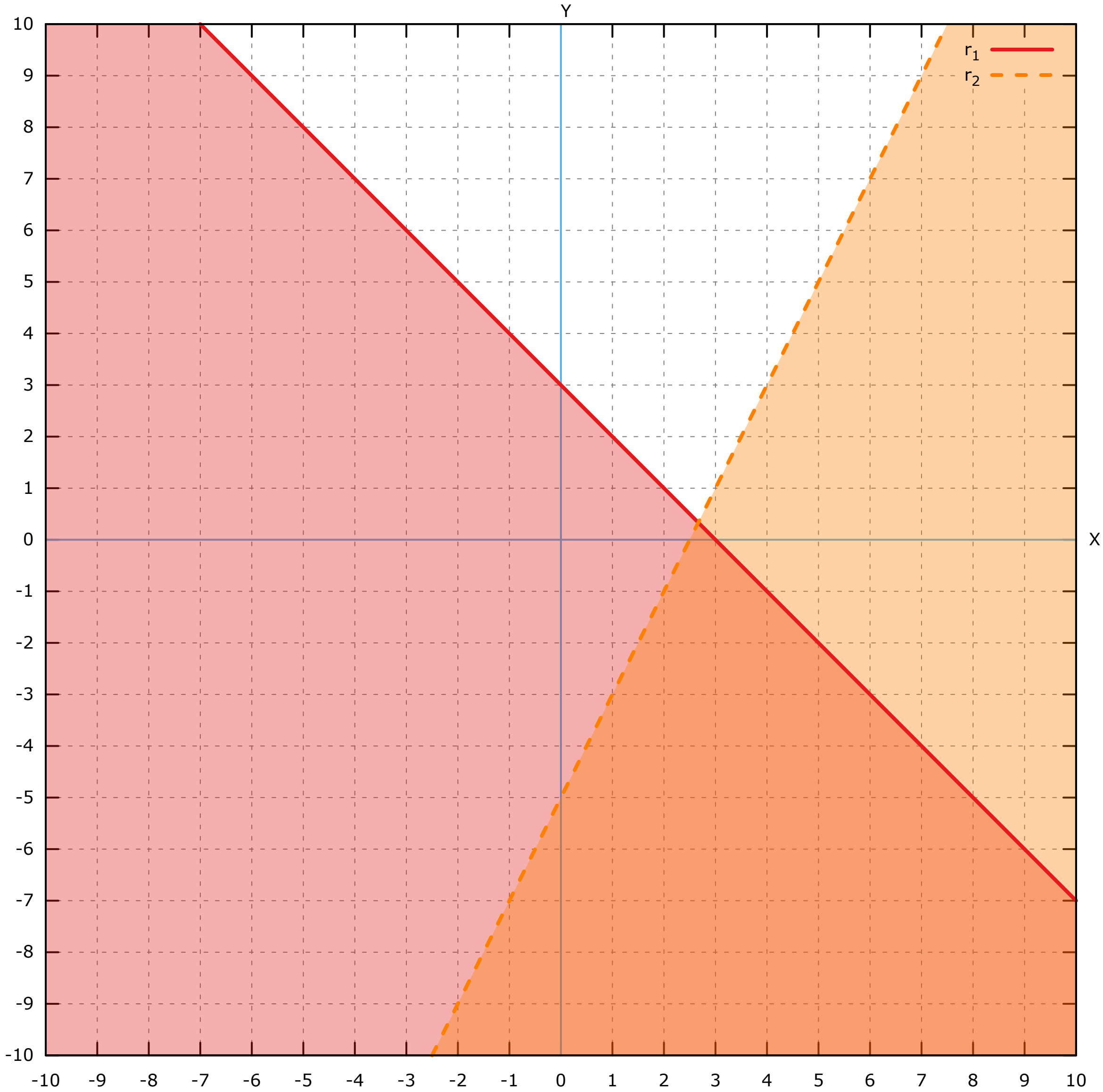


Figura 43: Inecuación. Paso 5. El conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones $2x - y > 5$ y $y + x \leq 3$.

Sistemas lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden representar gráficamente: cuando hay 2 incógnitas, la ecuación es una recta en el plano; cuando hay 3 incógnitas, la ecuación es un plano en el espacio.

¡Ordena siempre las incógnitas!

1. Resuelve por el **método de reducción**:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

El **método de reducción** se basa en sumar las ecuaciones (multiplicadas por los números adecuados) para eliminar una de las incógnitas.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

podemos multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por -2 y sumarlas:

$$\begin{array}{rlcrcl} 3\cdot & (2x & + & 3y & = & 3) \\ -2\cdot & (3x & + & 5y & = & 7) \\ \hline & & & -y & = & -5 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$y = 5$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones o aplicando reducción otra vez:

$$x = 6$$

$$(x, y) = (-6, 5)$$

Hay **una solución**. El sistema es un SCD (**Sistema Compatible Determinado**).

$$K = \{(-6, 5)\}$$
$$|K| = 1$$

2. Resuelve por el **método de sustitución**:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

En el **método de sustitución**, se despeja una de las variables de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación para obtener una ecuación con una sola incógnita. Cuando se conoce el valor de esa incógnita, se sustituye en alguna de las ecuaciones y se despeja el valor de la otra incógnita.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

podemos despejar y de la primera ecuación:

$$2x + 3y = 3 \Rightarrow 3y = -2x + 3 \Rightarrow y = \frac{-2x+3}{3}$$

y sustituir en la segunda:

$$3x + 5 \cdot \quad \frac{-2x+3}{3} \quad = 7$$

$$9x + 5 \cdot (-2x + 3) = 21$$

$$9x - 10x + 15 = 21$$

$$-x + 15 = 21$$

$$-x = 6$$

$$x = -6$$

Que podemos sustituir, por ejemplo, en la primera:

$$2 \cdot (-6) + 3y = 3$$

$$-12 + 3y = 3$$

$$3y = 15$$

$$y = 5$$

Por lo que la solución es:

$$(x, y) = (-6, 5)$$

$$K = \{(-6, 5)\}$$

$$|K| = 1$$

Como $|K| = 1$, es un **SCD**.

3. Resuelve por el **método de igualación**:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

En el **método de igualación**, se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las ecuaciones resultantes. Al hacerlo, queda una ecuación con una sola incógnita y se resuelve. Con el valor obtenido para una de las incógnitas, se obtiene el valor de la otra sustituyendo en alguna de las ecuaciones.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

despejamos y de ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} y & = & \frac{-2x+3}{3} \\ y & = & \frac{-3x+7}{5} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-2x+3}{3} = \frac{-3x+7}{5}$$

$$5 \cdot (-2x + 3) = 3 \cdot (-3x + 7)$$
$$-10x + 5 = -9x + 21$$
$$\ldots$$

Y se llega a la misma solución:

$$(x, y) = (-6, 5)$$
$$K = \{(-6, 5)\}$$
$$|K| = 1$$

Como $|K| = 1$, es un **SCD**.

4. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & 6y & = & 7 \end{array}$$

Si no se especifica el método, podemos usar el que deseemos. Por ejemplo, el método de reducción.

Vamos a eliminar x haciendo $E_2 - 2 \cdot E_1$ (la ecuación 2 menos el doble de la ecuación 1):

$$(4x + 6y = 7) - 2 \cdot (2x + 3y = 1)$$
$$0 = 5 \quad \perp$$

Es una **contradicción**. Por lo tanto, el sistema no tiene soluciones:

$$K = \{\} = \varnothing$$
$$|K| = 0$$

y es un **SI** (Sistema Incompatible).

5. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & 6y & = & 2 \end{array}$$

Si no se especifica el método, podemos usar el que deseemos. Por ejemplo, el método de reducción.

Vamos a eliminar x haciendo $E_2 - 2 \cdot E_1$ (la ecuación 2 menos el doble de la ecuación 1):

$$(4x + 6y = 2) - 2 \cdot (2x + 3y = 1)$$
$$0 = 0 \quad \top$$

Es una **tautología**. Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

Este infinito es un infinito **no numerable**. Para ser más precisos, es la *cardinalidad del continuo*, es decir, la cardinalidad de los reales:

$$|K| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$$

Es un **SCI** (Sistema Compatible Indeterminado).

6. Resuelve:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \end{array}\right\}$$

Podemos usar combinaciones de los métodos de reducción, igualación y sustitución. Pero un método sistemático es el método de Gauss[18].

El **método de Gauss** o **método de Gauss-Jordan** es la evolución natural del método de reducción a casos con más de dos variables. La idea es reducir variables hasta que el sistema quede en *forma escalonada*, es decir, que el sistema transformado tenga una ecuación con una sola incógnita, una ecuación con dos incógnitas, una ecuación con tres incógnitas y así sucesivamente.

Aunque se puede hacer con ecuaciones, a veces, por comodidad, se escribe en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Cambiamos la fila 3 por la fila 3 menos la fila 1 ($F3 \to F3 - F1$):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Cambiamos la fila 3 por el opuesto de la mitad de la fila 3 ($F3 \to -\frac{1}{2}F3$):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Ahora cambiamos la fila 2 por la fila 2 menos la fila 1 ($F2 \to F2 - F1$):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Y esa matriz es una matriz en forma escalonada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

[18]Carl Friedrich Gauss es de quien se cuenta que sumó los números del 1 al 100 muy rápidamente cuando era un niño.

Por lo tanto, según la segunda fila: $y = 2$. Usando la tercera, tenemos que $2 + z = 5$ y por lo tanto $z = 4$. Y ahora, con la primera, tenemos que $x + 2 + 3 = 6$ y entonces $x = 1$.

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Hay una sola solución. Es un **SCD**.

> **7**. Resuelve usando la regla de Cramer:
>
> $$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

La regla de Cramer permite resolver sistemas de ecuaciones usando determinantes. Empezamos con un ejemplo sencillo de dos variables y dos ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

Si es un SCD, las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{matrix} 3 & 3 \\ 7 & 5 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix}}; \quad y = \frac{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix}}$$

Es decir, en el numerador y en el denominador tenemos el mismo determinante, pero en el de arriba, hemos sustituido la columna de la incógnita que nos interesa por la columna sin incógnita.

$$x = \frac{3 \cdot 5 - 3 \cdot 7}{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3} = -6$$
$$y = \frac{2 \cdot 7 - 3 \cdot 3}{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3} = 5$$

$$K = \{(-6, 5)\}$$

> **8**. Explica las ventajas de la regla de Cramer.

La regla de Cramer tiene algunas ventajas:

- para SCD nos permite encontrar las soluciones de forma mecánica
- para SCD **nos permite encontrar el valor de cualquiera de las incógnitas sin encontrar las demás**

  Esta ventaja permite **usar la regla de Cramer** para comprobar alguna incógnita en una solución encontrada por otro modo.

y desventajas:

- para sistemas de más de 3 variables, requiere calcular determinantes muy grandes y complicados

9. Resuelve por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & - & 1z & = & 7 \\ 1x & + & 5y & + & 3z & = & 9 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & - & 1z & = & 7 \\ 1x & + & 5y & + & 3z & = & 9 \end{array}\right\}$$

Si es un SCD, las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{matrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{matrix}}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{matrix}}$$

$$z = \frac{\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{matrix}}{\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{matrix}}$$

Falta hacer los determinantes. Si observas bien, solamente es necesario hacer 4.

10. La parábola de una función cuadrática pasa por los puntos (-1, 10), (1, 4) y (2, 7). Encuentra la expresión de la función.

Una función cuadrática siempre se puede escribir de la manera:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Este ejercicio nos pide los coeficientes del polinomio (a, b y c) y nos da tres puntos. Cada uno de ellos nos dice el valor de $f(x)$ para un valor de x:

$$(-1, 10) \rightarrow f(-1) = 10$$
$$(1, 4) \rightarrow f(1) = 4$$
$$(2, 7) \rightarrow f(2) = 7$$

Sustituyendo en la expresión general:

$$f(-1) = 10 \to a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 10$$
$$f(1) = 4 \to a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4$$
$$f(2) = 7 \to a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7$$

Esto nos da un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a - b + c & = & 10 \\ a + b + c & = & 4 \\ 4a + 2b + c & = & 7 \end{cases}$$

Si a la ecuación 2 le restamos la ecuación 1, desaparecen las incógnitas a y c:

$$(a + b + c) - (a - b + c) = 4 - 10$$
$$2b = -6$$
$$\boxed{b = -3}$$

Si a la tercera ecuación le restamos la segunda:

$$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 7 - 4$$
$$3a + b = 3$$

Como $b = -3$:

$$3a - 3 = 3$$
$$3a = 6$$
$$\boxed{a = 2}$$

Sustituyendo en la primera los valores de a y b:

$$2 - (-3) + c = 10$$
$$5 + c = 10$$
$$\boxed{c = 5}$$

Por lo tanto, la función cuadrática buscada es:

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 3x + 5}$$

11. Resuelve el sistema de ecuaciones según el valor del parámetro m:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & my & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

Usando el método de reducción, podemos eliminar x. Para ello podemos multiplicar la primera ecuación por 3 y le podemos restar el doble de la segunda ecuación:

$$3 \cdot (2x + my) - 2 \cdot (3x + 5y) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 7$$

$$6x + 3my - 6x - 10y = 9 - 21$$
$$3my - 10y = -12$$

Si sacamos y como factor común:

$$(3m - 10)y = -12$$

Despejando[19] y:

$$y = \frac{-12}{3m - 10}$$

Sustituyendo en la segunda ecuáción:

$$3x + 5 \cdot \quad \frac{-12}{3m - 10} \quad = 7$$
$$3x - \frac{60}{3m - 10} = 7$$
$$3x = 7 + \frac{60}{3m - 10}$$
$$3x = \frac{7 \cdot (3m - 10)}{3m - 10} + \frac{60}{3m - 10}$$
$$3x = \frac{21m - 70}{3m - 10} + \frac{60}{3m - 10}$$
$$3x = \frac{21m - 10}{3m - 10}$$
$$x = \frac{21m - 10}{9m - 30}$$

Por lo tanto:

$$K = \{(x, y)\} = \quad \frac{21m - 10}{9m - 30}, \frac{-12}{3m - 10}$$

Si $m \neq 10/3$, entonces el sistema tiene una solución. Es un *SCD* (*sistema compatible determinado*).

Cuando $m = 10/3$ el sistema se convierte en:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & \frac{10}{3}y & = & 3 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 10y & = & 9 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

Dividiendo la primera ecuación entre 2:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 9/2 \\ 3x & + & 5y & = & 7 \end{array}$$

Las dos ecuaciones se contradicen entre si. En este caso el sistema es un *SI* (*sistema incompatible*).

[19]Solamente podemos hacer esto si $3m - 10$ es distinto de cero.

12. Discute el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x - y = 2 \end{cases}$$

"Discutir" un sistema de ecuaciones es estudiar cuántas soluciones tiene dependiendo de algún parámetro. Es decir, básicamente lo que hacíamos en el ejercicio anterior.

Hay herramientas avanzadas para hacer esto que usan **matrices**, **determinantes**, **rango de una matriz** y el precioso **teorema de Rouché-Frobenius**.

Aquí lo haremos sin recurrir a esas herramientas.

Si usamos reducción y sumamos las dos ecuaciones, podemos encontrar x:

$$2x = m + 2$$
$$x = \frac{m+2}{2}$$
$$x = \frac{m}{2} + 1$$

Y ahora podemos sustituir en la primera ecuación y despejar y:

$$\frac{m}{2} + 1 + y = m$$

$$y = m - \left(\frac{m}{2} + 1\right)$$
$$y = \frac{m}{2} - 1$$

La solución es:

$$(x, y) = \left(\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} - 1\right)$$

Siempre podemos calcular x e y. No importa el valor de m.

Por lo tanto, el sistema siempre es un `SCD` (*sistema compatible determinado*). Es decir, siempre tiene una sola solución, sin importar el valor de m.

13. Discute el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - my = 2 \end{cases}$$

Si usamos reducción y restamos las dos ecuaciones, podemos encontrar y:

$$y + my = 1 + 2$$
$$y + my = 3$$

Sacamos y como factor común:

$$y \cdot (1+m) = 3$$

Pasamos dividiendo $1+m$ a la derecha:

$$y = \frac{3}{1+m}$$

Si sustituimos en la primera ecuación:

$$x + \frac{3}{1+m} = 1$$
$$x = 1 - \frac{3}{1+m}$$
$$x = \frac{1+m}{1+m} - \frac{3}{1+m}$$
$$x = \frac{-2+m}{1+m}$$

Es decir, la solución es:

$$(x, y) = \quad \frac{-2+m}{1+m}, \frac{3}{1+m}$$

Pero aquí **HAY DIVISIONES** y **NO PODEMOS DIVIDIR ENTRE 0**. Por lo que los divisores no pueden ser cero. Si son cero, tenemos problemas:

$$\text{DIVISOR} = 0 \implies \text{PROBLEMAS}$$
$$1 + m = 0$$
$$m = -1$$

Por lo tanto:

- Si $m = -1$, no hay solución:

  $$K = \varnothing, |K| = 0$$

  Es un *sistema incompatible* (`SI`).

  Es fácil comprobarlo, porque si $m = -1$, el sistema se convierte en:

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

  Las dos ecuaciones se contradicen entre si.

- Si $m \neq -1$, hay una solución:

  $$K = \quad \frac{-2+m}{1+m}, \frac{3}{1+m} \quad , |K| = 1$$

  Es un *sistema compatible determinado* (`SCD`).

14. Discute el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Podemos usar reducción y, a la segunda ecuación, restarle el doble de la primera:

$$(2x + 2y = 4) - 2(x + y = m)$$
$$0 = 4 - 2m$$

¡Han desaparecido las dos incógnitas!

- Si $m = 2$, tenemos una tautología:

  $$0 = 0$$

  El sistema es compatible, pero indeterminado (`SCI`). Tiene infinitas soluciones no numerables.

  $$|K| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

  Es fácil ver que, en ese caso, el sistema es:

  $$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

  La segunda ecuación es el doble de la primera, por lo que no *"añade"* información a la primera. Por esa razón tenemos infinitas soluciones.

- Si $m \neq 2$, tenemos una contradicción:

  $$0 \neq 4 - 2m$$

  Por lo que el sistema no tiene solución. Es *incompatible* (`SI`).

  $$K = \varnothing, |K| = 0$$

Sistemas no lineales

1. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 2 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9 \end{array}$$

Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x e y). Pero la primera ecuación sí es lineal y la segunda no lo es.

A pesar de ello, podemos usar el método de sustitución.

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 2x - 2$$

Y sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} x^2 + (2x-2)^2 &= 9 \\ x^2 + 4x^2 - 8x + 4 &= 9 \\ 5x^2 - 8x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Es una ecuación cuadrática en la que podemos usar la fórmula:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-5)}}{2 \cdot 5} \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 100}}{10} \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{164}}{10} \\ x &= \frac{8 \pm 2\sqrt{41}}{10} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{41}}{5} \end{aligned}$$

Para encontrar y:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 2 \\ y &= 2 \cdot \frac{4 \pm \sqrt{41}}{5} - 2 \\ y &= \frac{8 \pm 2\sqrt{41}}{5} - \frac{10}{5} \\ y &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{41}}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$K = \quad \frac{4 \pm \sqrt{41}}{5}, \frac{-2 \pm 2\sqrt{41}}{5}$$

O, lo que es lo mismo:

$$K = \quad \frac{4 - \sqrt{41}}{5}, \frac{-2 - 2\sqrt{41}}{5} \quad ,$$

$$\frac{4+\sqrt{41}}{5}, \frac{-2+2\sqrt{41}}{5}$$

Es decir, hay **dos soluciones**:

$$|K| = 2$$

Una interpretación geométrica de las ecuaciones ayuda a entender por qué son dos soluciones.

- La ecuación lineal se representa como una línea recta en el plano
- La ecuación cuadrática se representa como una circunferencia de centro (0, 0) y radio 3

Cuando tenemos una línea recta y una circunferencia, las posibilidades son: o no se cortan (0 soluciones), o se cortan en un solo punto (1 solución) o se cortan en dos puntos (2 soluciones).

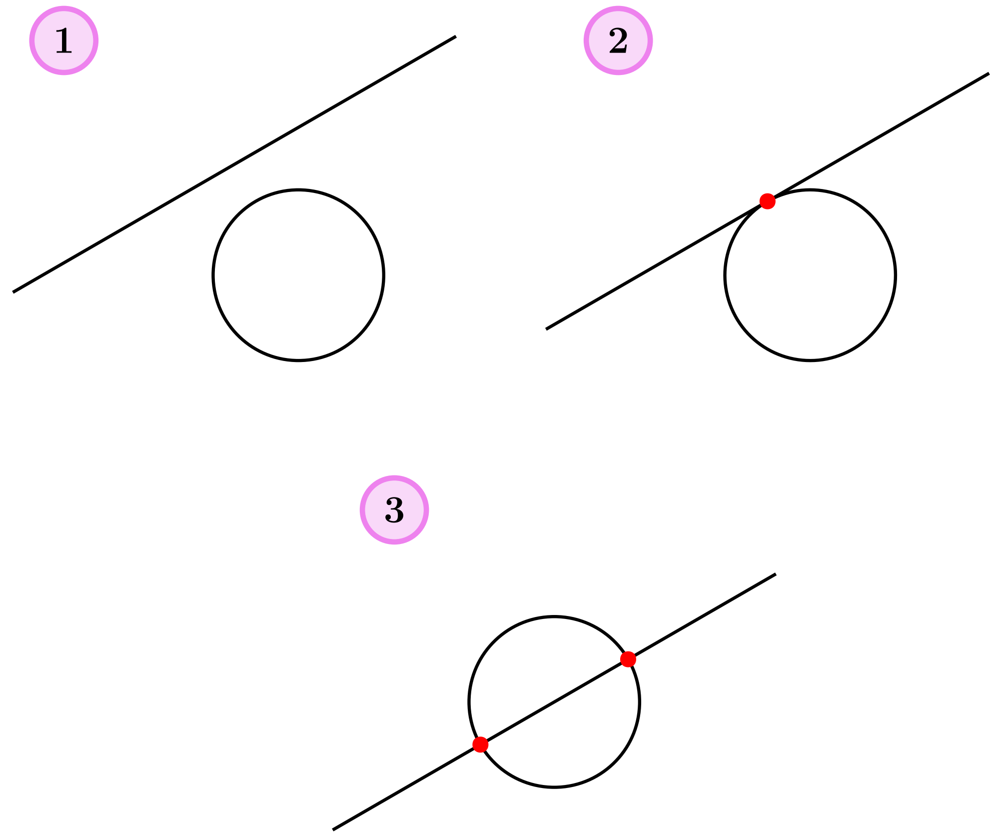


Figura 44: Posiciones relativas de una recta y una circunferencia en el plano: 1) no se cortan, 2) son tangentes y se cortan en un punto, 3) son secantes y se cortan en dos puntos.

2. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{x^2}{4} & + & \frac{y^2}{16} & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9 \end{array}$$

Aquí podríamos hacer dos cambios de variable:

- $x \rightarrow a = x^2$
- $y \rightarrow b = y^2$

que convierte el sistema de ecuaciones en un sistema lineal:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{a}{4} & + & \frac{b}{16} & = & 1 \\ a & + & b & = & 9 \end{array}$$

Sin embargo, no es necesario hacer los cambios de variable. Tenemos el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{x^2}{4} & + & \frac{y^2}{16} & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9 \end{array}$$

y podemos despejar x^2 en la segunda ecuación:

$$x^2 = 9 - y^2$$

y sustituir en la primera:

$$\frac{9 - y^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El mínimo común múltiplo de ambas fracciones es 16. Por lo tanto:

$$\frac{4 \cdot (9 - y^2)}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{36 - 4y^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{36 - 3y^2}{16} = 1$$

$$36 - 3y^2 = 16$$

$$-3y^2 = 16 - 36$$

$$-3y^2 = -20$$

$$y^2 = \frac{20}{3}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$$

Sacando factores fuera de la raíz:

$$y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$y = \pm\frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Multiplicando las raíces:

$$y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

Ahora obtenemos los valores correspondientes para x. Como:

$$x^2 = 9 - y^2$$

al sustituir:

$$\begin{aligned}
x^2 &= 9 - \left(\pm\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)^2 \\
x^2 &= 9 - \frac{4 \cdot 15}{9} \\
x^2 &= 9 - \frac{20}{3} \\
x^2 &= \frac{27}{3} - \frac{20}{3} \\
x^2 &= \frac{7}{3} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \\
x &= \pm\frac{\sqrt{21}}{3}
\end{aligned}$$

Cada una de los dos valores de y que hemos obtenido nos da cada uno de los dos valores de x que hemos obtenido. Por lo tanto hay **cuatro** soluciones:

$$\begin{aligned}
K = \Bigg\{ &\left(\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{2\sqrt{15}}{3}\right), \\
&\left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{2\sqrt{15}}{3}\right), \\
&\left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{2\sqrt{15}}{3}\right), \\
&\left(\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$|K| = 4$$

Geométricamente una de las ecuaciones es una circunferencia centrada en el origen y de radio 3 unidades. La otra ecuación es una elipse[20] centrada en el origen y de semiejes 2 y 4.

Como la circunferencia y la elipse tienen el mismo centro y el radio de la circunferencia es mayor que uno de los semiejes y menor que el otro semieje, debe haber cuatro puntos de corte entre ambas curvas.

[20]Una de las secciones cónicas junto con la circunferencia, la parábola y la hipérbola.

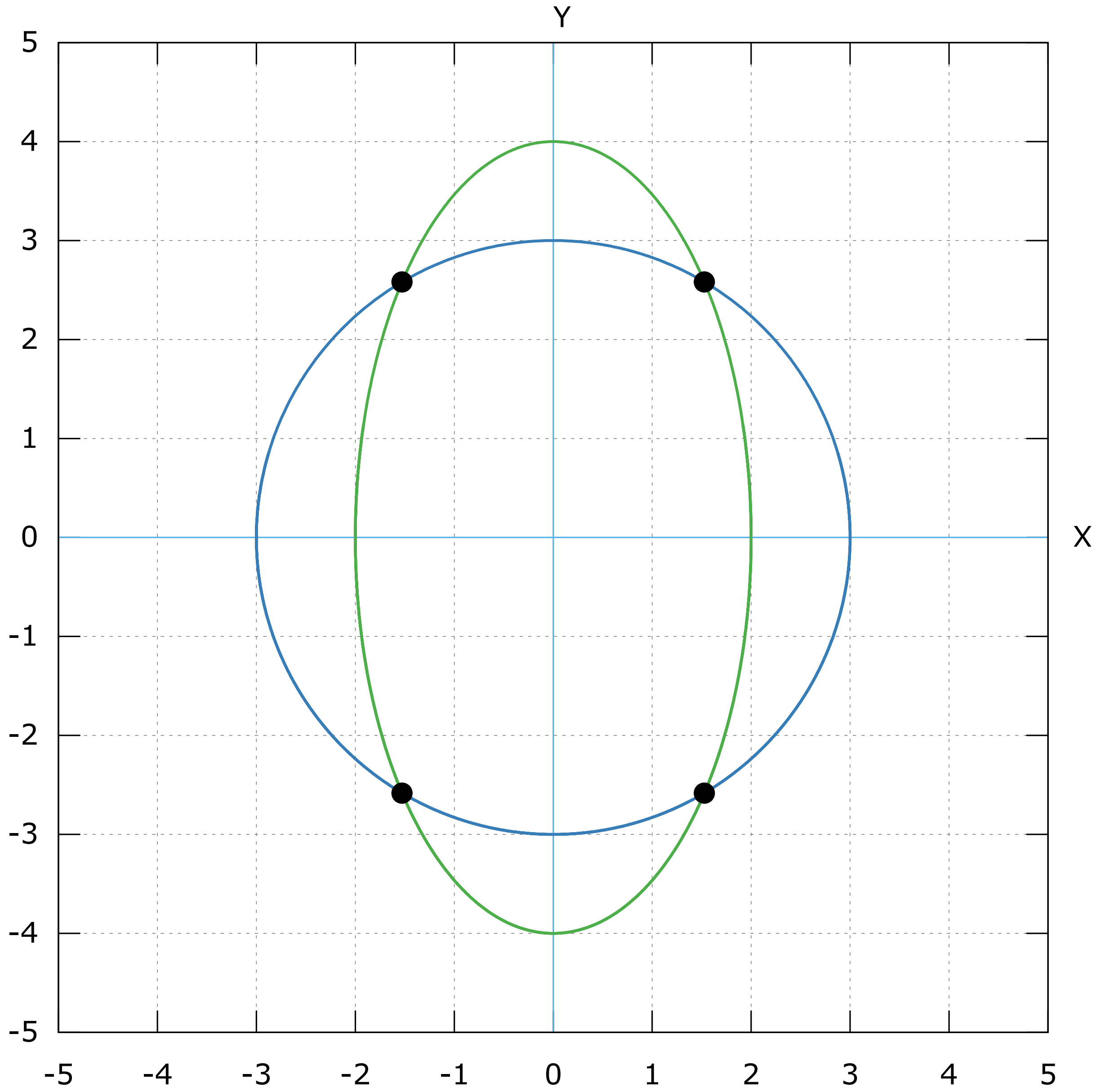


Figura 45: La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ tienen cuatro puntos de intersección.

3. Resuelve:

$$\begin{array}{rcrcr} 2^x & + & 3^y & = & 251 \\ 2^{x-1} & - & 2 \cdot 3^y & = & -482 \end{array}$$

El sistema sería más sencillo si, para cada incógnita, solamente apareciesen potencias con la misma base y el mismo exponente. Por las propiedades de las potencias, podemos reescribir la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcrcr} 2^x & + & 3^y & = & 251 \\ 2^x \cdot 2^{-1} & - & 2 \cdot 3^y & = & -482 \end{array}$$

Ahora podemos hacer dos cambios de variable:

- $x \to a = 2^x$
- $y \to b = 3^y$

Y el sistema se convierte en:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 251 \\ a \cdot 2^{-1} & - & 2 \cdot b & = & -482 \end{array}$$

un sistema lineal que podemos resolver fácilmente con cualquiera de los métodos habituales. Podemos multiplicar por 2 la primera ecuación y sumarle la segunda para eliminar b:

$$2(a+b) + (a \cdot 2^{-1} - 2b) = 2 \cdot 251 + (-482)$$

$$2a + a \cdot 2^{-1} = 20$$

Si multiplicamos por 2:

$$4a + a = 40$$

$$5a = 40$$

$$a = 8$$

Sustituyendo en $a + b = 251$:

$$8 + b = 251$$

$$b = 243$$

Ahora hay que deshacer los cambios de variable:

$$a = 8 \to 2^x = 8 \to x = 3$$

$$b = 243 \to 3^y = 243 \to y = 5$$

que podemos demostrar factorizando 8 ($= 2^3$) y factorizando 243 ($= 3^5$).

Por lo tanto:

$$K = (3, 5)$$

$$|K| = 1$$

4. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ \log(x) & + & \log(y) & = & 2 \end{array}$$

La suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto, por lo que la segunda ecuación se transforma:

$$\log(x) + \log(y) = 2$$
$$\log(x \cdot y) = 2$$

Cuando no se indica explícitamente la base del logaritmo, se trata del logaritmo decimal (= en base 10). Y podemos escribir 2 como el logaritmo decimal de 100:

$$\log(x \cdot y) = \log(100)$$

Ahora podemos eliminar los logaritmos:

$$x \cdot y = 100$$

Lo cual nos permite escribir el sistema:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ x & \cdot & y & = & 100 \end{array}$$

Aunque no es lineal, podemos despejar x de la primera:

$$x = 5 - 2y$$

y sustituir en la segunda:

$$(5 - 2y) \cdot y = 100$$
$$5y - 2y^2 = 100$$
$$2y^2 - 5y + 100 = 0$$

Y al resolverla:

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 100}}{2 \cdot 2}$$

El discriminante es negativo ($\Delta < 0$) por lo que esta ecuación cuadrática no tiene soluciones. Eso implica que el sistema no tiene soluciones:

$$K = \varnothing$$
$$|K| = 0$$

5. Resuelve:

$$\begin{array}{rcrcr} -5x & + & y & = & 50 \\ \log(x) & + & \log(y) & = & 3 \end{array}$$

Como en el ejercicio anterior, podemos combinar ambos logaritmos en la segunda ecuación:

$$\log(x) + \log(y) = 3$$
$$\log(x \cdot y) = 3$$
$$\log(x \cdot y) = \log(10^3)$$
$$x \cdot y = 10^3$$
$$x \cdot y = 1000$$

El sistema se convierte en:

$$\begin{array}{rcrcr} -5x & + & y & = & 50 \\ x & \cdot & y & = & 1000 \end{array}$$

Despejamos y de la primera:

$$y = 5x + 50$$

y sustituimos en la segunda:

$$x \cdot (5x + 50) = 1000$$
$$5x^2 + 50x = 1000$$

Dividimos todo entre 5:

$$x^2 + 10x = 200$$
$$x^2 + 10x - 200 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática con la fórmula:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 800}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2}$$
$$x = \frac{-10 \pm 30}{2}$$
$$x = -5 \pm 15$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -20$$

Ahora, como $y = 5x + 50$, podemos encontrar y:

$$y_1 = 5x_1 + 50 = 100$$
$$y_2 = 5x_2 + 50 = -50$$

Aparentemente tenemos 2 soluciones: (10, 100) y (-20, -50). Sin embargo, la última solución no sirve en la ecuación con logaritmos, porque al sustituir:

$$\log(-20) + \log(-50) = 3$$

tenemos logaritmos de números negativos, cosa que no es posible dentro de los números reales.

Por lo tanto:

$$K = \{(10, 100)\}$$
$$|K| = 1$$

6. Resuelve:

$$\begin{array}{rcrcl} \ln(x) & + & \ln(y) & = & 4 \\ 3\ln(x) & - & 2\ln(y) & = & 1 \end{array}$$

Aunque podríamos hacer un cambio de variable, basta multiplicar la primera ecuación por 2 y sumarle la segunda para eliminar una de las variables:

$$2(\ln(x) + \ln(y)) + (3\ln(x) - 2\ln(y)) = 2 \cdot 4 + 1$$
$$5\ln(x) = 9$$
$$\ln(x) = \frac{9}{5}$$
$$x = e^{\frac{9}{5}}$$

Podemos sustituir el valor de $\ln(x)$ en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{9}{5} + \ln(y) = 4$$
$$\ln(y) = 4 - \frac{9}{5}$$

$$\ln(y) = \frac{20}{5} - \frac{9}{5}$$
$$\ln(y) = \frac{11}{5}$$
$$y = e^{\frac{11}{5}}$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema es:

$$K = \quad e^{\frac{9}{5}}, e^{\frac{11}{5}}$$

$$|K| = 1$$

7. Resuelve:

$$\begin{array}{rcrcr} 2\sin(x) & + & 3\cos(y) & = & -2 \\ 4\sin(x) & + & \cos(y) & = & 1 \end{array}$$

Podríamos hacer un cambio de variable. Pero si despejamos el coseno en la segunda ecuación:

$$4\sin(x) + \cos(y) = 1$$
$$\cos(y) = 1 - 4\sin(x)$$

podemos sustituir en la primera:

$$2\sin(x) + 3(1 - 4\sin(x)) = -2$$
$$2\sin(x) + 3 - 12\sin(x) = -2$$
$$-10\sin(x) = -5$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación en la que el coseno está despejado:

$$\cos(y) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\cos(y) = -1$$

Es decir:

$$(\sin(x), \cos(y)) = \quad \frac{1}{2}, -1$$

Ahora debemos despejar x e y.

Sabemos que el seno es positivo en el primer cuadrante y en el segundo cuadrante. Y que es 1/2 cuando el ángulo es de 30°. Por lo que en el segundo cuadrante será 180° - 30° = 150°. En radianes son $\pi/6$ y $5\pi/6$. Por lo que:

$$x \in K_x = \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \cup \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

En cuando al coseno, sabemos que es -1 cuando el ángulo es 180°. Es decir, π radianes:

$$y \in K_y = \{\pi + 2\pi n\}$$

Por lo tanto, las soluciones deberían ser todas las parejas formadas por todos los posibles valores de x y todos los posibles valores de y:

$$K = K_1 \times K_2$$

que es un conjunto infinito numerable:

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

Vamos a comprobar las posibilidades en las que los ángulos están entre 0° y 360°: $(\pi/6, \pi)$ y $(5\pi/6, \pi)$.

- $(\pi/6, \pi)$

  La primera ecuación:

$$\begin{gathered} 2\sin(x) + 3\cos(y) = -2 \\ 2\sin(\pi/6) + 3\cos(\pi) = -2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-1) = -2 \end{gathered}$$

  se cumple.

  La segunda ecuación:

$$\begin{gathered} 4\sin(x) + \cos(y) = 1 \\ 4\sin(\pi/6) + \cos(\pi) = 1 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = 1 \end{gathered}$$

  también se cumple.

- $(5\pi/6, \pi)$

  La primera ecuación:

$$\begin{gathered} 2\sin(x) + 3\cos(y) = -2 \\ 2\sin(5\pi/6) + 3\cos(\pi) = -2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-1) = -2 \end{gathered}$$

  se cumple.

La segunda ecuación:

$$4\sin(x) + \cos(y) = 1$$
$$4\sin(5\pi/6) + \cos(\pi) = 1$$
$$4 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = 1$$

también se cumple.

8. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & -2 \\ x & \cdot & y & = & 3 \end{array}$$

Podemos despejar y de la primera ecuación:

$$y = -2x - 2$$

y sustituir en la segunda:

$$x \cdot (-2x - 2) = 3$$
$$-2x^2 - 2x = 3$$
$$-2x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

Con la fórmula para las ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

El discriminante es negativo, así que no existen soluciones.

$$K = \varnothing$$
$$|K| = 0$$

Geométricamente tenemos una recta y una hipérbola[21] equilátera. El resultado nos dice que la recta pasa entre las dos ramas de la hipérbola sin tocar ninguna de ellas.

9. Resuelve:

$$\begin{array}{ccccc} -2x & + & y & = & -2 \\ x & \cdot & y & = & 3 \end{array}$$

Podemos despejar y de la primera ecuación:

[21] Una de las secciones cónicas, junto a la circunferencia, la elipse y la parábola.

$$y = 2x - 2$$

y sustituir en la segunda:

$$x \cdot (2x - 2) = 3$$
$$2x^2 - 2x = 3$$
$$2x^2 - 2x - 3 = 0$$

Con la fórmula para las ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Como:

$$y = 2x - 2$$

entonces:

$$y = 2 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} - 2$$
$$y = 1 \pm \sqrt{7} - 2$$
$$y = -1 \pm \sqrt{7}$$

Por lo tanto:

$$K = \quad \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}, -1 \pm \sqrt{7}$$

O, equivalentemente:

$$K = \quad \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, -1 - \sqrt{7} \quad , \quad \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, -1 + \sqrt{7}$$

$$|K| = 2$$

La recta corta a la hipérbola en 2 puntos.

10. Resuelve:

$$\begin{array}{rcrcl} 9x & - & xy & = & 12 \\ (x-4)^2 & + & (y-5)^2 & = & 8 \end{array}$$

En la primera ecuación podemos despejar x o y.

Si despejamos y:

$$xy = 9x - 12$$
$$y = \frac{9x-12}{x}$$

Si despejamos x:

$$x \cdot (9-y) = 12$$
$$x = \frac{12}{9-y}$$

y es una función homográfica de x, por lo que sabemos que su gráfica es una hipérbola equilátera con las asíntotas paralelas a los ejes.

La segunda ecuación es la ecuación de una circunferencia centrada en el punto $(4,\,5)$ y con radio $\sqrt{8}$.

Si imaginamos las diversas posiciones relativas de una circunferencia y una hipérbola, podemos imaginar que el mínimo es que haya 0 soluciones y el máximo es de cuatro soluciones.

Sustituimos $y = \frac{9x-12}{x}$ en la segunda ecuación:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 8$$
$$(x-4)^2 + \left(\frac{9x-12}{x} - 5\right)^2 = 8$$
$$(x-4)^2 + \left(\frac{9x-12}{x} - \frac{5x}{x}\right)^2 = 8$$
$$(x-4)^2 + \left(\frac{4x-12}{x}\right)^2 = 8$$

Usamos la identidad notable del cuadrado de una diferencia:

$$x^2 - 8x + 16 + \frac{16x^2 - 96x + 144}{x^2} = 8$$

Multiplicamos por x^2:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x^2 - 96x + 144 = 8x^2$$
$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 96x + 144 = 0$$

¡Es una ecuación cuadrática completa! No tienes que conocer la fórmula de las ecuaciones cuárticas a pesar de que existe[22]. ¿Cómo la resolvemos?

Por el **teorema de las raíces racionales** de Gauss, si existen raíces racionales, son los cocientes posibles entre los divisores enteros del término independiente (144) y los divisores enteros del coeficiente líder (1). Como el coeficiente líder es 1, esto equivale a buscar los divisores de 144: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 9, ± 12, ± 16, ± 18, ± 24, ± 36, ± 48, ± 72, ± 144. Y comprobar todos ellos. ¡Pero son 30!

¿Hay algún modo de acotar las soluciones (si existen)? La circunferencia está centrada en (4, 5) y el radio es $\sqrt{8}$, que es menor que 3. Por lo tanto, si (x, y) es una solución, debe estar en:

$$4 - 3 < x < 4 + 3 \Rightarrow x \in (1, 7)$$
$$5 - 3 < x < 5 + 3 \Rightarrow y \in (2, 8)$$

Mirando en la lista de divisores, quedan descartados todos los negativos y solamente nos quedan 2, 3, 4 y 6.

Comprobamos los candidatos:

- $x = 2$

$$2^4 - 8 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 144 = 0$$
$$0 = 0 \quad \top$$

  ¡Sí es una solución!

- $x = 3$

$$3^4 - 8 \cdot 3^3 + 24 \cdot 3^2 - 96 \cdot 3 + 144 = 0$$
$$-63 = 0 \quad \perp$$

  No es una solución.

- $x = 4$

$$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 24 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 144 = 0$$
$$-16 = 0 \quad \perp$$

  No es una solución.

- $x = 6$

$$6^4 - 8 \cdot 6^3 + 24 \cdot 6^2 - 96 \cdot 6 + 144 = 0$$
$$0 = 0 \quad \top$$

  ¡Sí es una solución!

[22] Y, como repetimos a menudo, probablemente ningún profesor de matemáticas que conoces las recuerda de memoria.

Afortunadamente estas soluciones nos permiten factorizar dividiendo por el método de Ruffini. Primero entre $(x-2)$:

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & -8 & 24 & -96 & 144 \\ & & & & & \\ 2 & & 2 & -12 & 24 & -144 \\ \hline & 1 & -6 & 12 & -72 & 0 \end{array}$$

Y al resultado, entre $(x-6)$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -72 \\ & & & & \\ 6 & & 6 & 0 & 72 \\ \hline & 1 & 0 & 12 & 0 \end{array}$$

Por lo que la ecuación cuártica:

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 96x + 144 = 0$$

se puede escribir:

$$(x-2) \cdot (x-6) \cdot (x^2+12) = 0$$

Por lo tanto, el resto de soluciones deberían venir de:

$$x^2 + 12 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{12} \notin \mathbb{R}$$

Es decir, las dos únicas soluciones reales[23] son 2 y 6. Hay dos puntos de corte.

Tenemos que encontrar y:

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{9x-12}{x} = \frac{9 \cdot 2 - 12}{2} = 3$$
$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{9x-12}{x} = \frac{9 \cdot 6 - 12}{6} = 7$$

Por lo tanto:

$$K = \{(2,3),(6,7)\}$$
$$|K| = 2$$

ALUMNO: ¡Esto es muy complicado!

PROFESOR: ¡Ah! `[Grita sorprendido.]` Me has asustado. Creía que estaba solo.

ALUMNO: No. He estado desde el principio de este ejercicio. Y es muy complicado.

PROFESOR: No es tan complicado. Pero es laborioso y requiere conocimientos de varios temas para poder resolverlo mejor.

[23] Que además de ser reales, son naturales.

ALUMNO: Usted lo ha dicho: de **varios** temas. ¡Incluso aparece una ecuación cuártica completa! ¡Usted ha dicho muchas veces que, en general, no tenemos herramientas para resolverlas!

PROFESOR: Oh. Has recordado la palabra *“herramienta”*.

ALUMNO: Sí, claro: *“nastroj”*.

PROFESOR: Tienes razón. En general no tenemos las herramientas para resolver cualquier ecuación cuártica. Pero en este caso podíamos.

Pero lo importante no es el problema en si, sino las herramientas y conocimientos que hemos usado:

- reconocer que la ecuación de una función homográfica es una hipérbola
- reconocer la ecuación de una circunferencia, su centro y su radio
- aplicar el método de sustitución
- aplicar el teorema de las raíces racionales
- listar los divisores enteros de un número
- aplicar el método de Ruffini
- factorizar un polinomio
- resolver ecuaciones cuadráticas

La mayoría de ellas son herramientas que debes conocer bien.

Ecuaciones con valor absoluto

1. Resuelve:

$$|x-3| = 4$$

Por definición, el valor absoluto de un número real x es:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es decir: el número opuesto (= con el signo cambiado) si es negativo y el mismo número si no es negativo. Por lo que las ecuaciones que contienen valores absolutos se pueden separar en varias ecuaciones.

$$|x-3| = 4 \equiv$$

equivale a dos ecuaciones:

$$\equiv \begin{cases} -(x-3) = 4 & \text{si } x-3 < 0 \\ x-3 = 4 & \text{si } x-3 \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x-3 < 0$:

$$-(x-3) = 4$$
$$3-x = 4$$

$$-x = 4 - 3$$
$$-x = 1$$
$$x = -1$$

La condición es $x - 3 < 0$:
$$x < 3$$

Y la solución que hemos encontrado no contradice la condición. Por lo tanto, -1 sí es solución.

- Si $x - 3 \geq 0$:

$$x - 3 = 4$$
$$x = 4 + 3$$
$$x = 7$$

La condición es $x - 3 \geq 0$:
$$x \geq 3$$

Y la solución que hemos encontrado no contradice la condición. Por lo tanto, 7 sí es solución.

$$K = \{-1, 7\}$$
$$|K| = 2$$

2. Resuelve:

$$|x - 3| = x + 1$$

$$|x - 3| = x + 1 \equiv$$
$$\equiv \begin{cases} -(x-3) = x + 1 & \text{si } x - 3 < 0 \\ x - 3 = x + 1 & \text{si } x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} -x + 3 = x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 = x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Si $x < 3$:

$$-x + 3 = x + 1$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

Que no contradice la condición. Por lo tanto, 1 sí es solución.

- Si $x \geq 3$:

$$x - 3 = x + 1$$
$$-3 = 1 \quad \perp$$

  Que es una contradicción.

Por lo tanto:

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

3. Resuelve:

$$|x - 3| = |x + 1|$$

Como hay dos valores absolutos, hay cuatro posibilidades diferentes:

$$|x - 3| = |x + 1|$$
$$\begin{cases} -(x-3) = -(x+1) & \text{si } x < 3 \wedge x < -1 \\ -(x-3) = x+1 & \text{si } x < 3 \wedge x \geq -1 \\ x-3 = -(x+1) & \text{si } x \geq 3 \wedge x < -1 \\ x-3 = x+1 & \text{si } x \geq 3 \wedge x \geq -1 \end{cases}$$

Pero en el tercer caso, las condiciones se contradicen; un número no puede ser, a la vez, menor que -1 y mayor o igual que 3. Por lo que desaparece uno de los casos:

$$\begin{cases} -(x-3) = -(x+1) & \text{si } x < 3 \wedge x < -1 \\ -(x-3) = x+1 & \text{si } x < 3 \wedge x \geq -1 \\ x-3 = x+1 & \text{si } x \geq 3 \wedge x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+3 = -x-1 & \text{si } x < 3 \wedge x < -1 \\ -x+3 = x+1 & \text{si } x < 3 \wedge x \geq -1 \\ x-3 = x+1 & \text{si } x \geq 3 \wedge x \geq -1 \end{cases}$$

Dos de los casos nos dan contradicciones:

$$\begin{cases} 3 = -1 & \text{si } x < 3 \wedge x < -1 \\ -2x = -2 & \text{si } x < 3 \wedge x \geq -1 \\ -3 = 1 & \text{si } x \geq 3 \wedge x \geq -1 \end{cases}$$

Por lo que solamente nos queda:

$$x = 1$$

Y la condición en este caso es que el número debe ser menor que 3 y mayor o igual que -1. Como la condición se cumple, 1 es solución.

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

4. Resuelve:

$$|x - 3| = 4$$

Pero usa comprobación para eliminar soluciones que no sean válidas en lugar de las condiciones.

$$|x - 3| = 4 \to \begin{cases} -(x-3) = 4 \\ x - 3 = 4 \end{cases}$$

La primera ecuación nos da:

$$-(x - 3) = 4$$
$$-x + 3 = 4$$
$$-x = 4 - 3$$
$$-x = 1$$
$$x = -1$$

La segunda ecuación nos da:

$$x - 3 = 4$$
$$x = 4 + 3$$
$$x = 7$$

Comprobamos las soluciones:

- $x = -1$

  $$LI = |x - 3| = |-1 - 3| = 4$$
  $$LD = 4$$

  Como $LD = LI$, -1 sí es solución.

- $x = 7$

  $$LI = |x - 3| = |7 - 3| = 4$$
  $$LD = 4$$

  Como $LD = LI$, 7 sí es solución.

$$K = \{-1, 7\}$$
$$|K| = 2$$

5. Resuelve:

$$|x-3| = x+1$$

Pero usa comprobación para eliminar soluciones que no sean válidas en lugar de las condiciones.

$$|x-3| = x+1 \to \begin{cases} -(x-3) = x+1 \\ x-3 = x+1 \end{cases}$$

La primera ecuación nos da:

$$-(x-3) = x+1$$
$$-x+3 = x+1$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

La segunda ecuación nos da:

$$x-3 = x+1$$
$$-3 = 1 \quad \perp$$

que es una contradicción.

Comprobamos la única solución ($x = 1$):

$$LI = |x-3| = 4$$

$$LD = x+1 = 4$$

Como $LI = LD$, 1 sí es solución.

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

6. Resuelve:

$$|x-3| = |x+1|$$

Pero usa comprobación para eliminar soluciones que no sean válidas en lugar de las condiciones.

$$|x-3| = |x+1| \to \begin{cases} -(x-3) = -(x+1) \\ -(x-3) = x+1 \\ x-3 = -(x+1) \\ x-3 = x+1 \end{cases}$$

Que son equivalentes a:

$$\begin{cases} -x+3=-x-1 \\ -x+3=x+1 \\ x-3=-x-1 \\ x-3=x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3=-1 & \perp \\ x=1 \\ x=1 \\ -3=1 & \perp \end{cases}$$

Comprobamos la única solución que hemos obtenido ($x = 1$):

$$LI = |x-3| = 2$$
$$LD = |x+1| = 2$$

Como $LI = LD$, $x = 1$ sí es solución.

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

7. Resuelve la inecuación:

$$|x-3| = x+1$$

Usando dos métodos diferentes.

Modo 1.

Primero usaremos el método que hemos usado en los ejercicios anteriores.

La inecuación original se puede separar en dos:

$$\begin{cases} x-3=x+1 & \text{si } x-3\geq 0 \\ -(x-3)=x+1 & \text{si } x-3<0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} -3=1 & \text{si } x\geq 3 \\ -x+3=x+1 & \text{si } x<3 \end{cases}$$

La primera ecuación es una contradicción. La segunda:

$$-x+3 = x+1$$
$$-x-x = -3+1$$
$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

que cumple la condición $x < 3$.

Comprobamos la solución $x = 1$ en la ecuación original:

$$LI = |x - 3| = |1 - 3| = |-2| = 2$$
$$LD = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

El lado derecho y el lado izquierdo son iguales. Por lo tanto, $x = 1$ sí es solución.

$$K = \{1\}$$
$$|K| = 1$$

Modo 2.

Podemos elevar al cuadrado ambos lados:

$$(|x - 3|)^2 = (x + 1)^2$$

Por las propiedades del valor absoluto:

$$(x - 3)^2 = (x + 1)^2$$

Usando identidades notables:

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 + 1 + 2x$$
$$9 - 6x = 1 + 2x$$
$$9 - 1 = 6x + 2x$$
$$8 = 8x$$
$$x = 1$$

Se puede comprobar como en el método anterior que, efectivamente, es una solución.

Problemas y ecuaciones

1. La diagonal interna de un cubo mide 5 metros más que la diagonal lateral. ¿Cuál es el valor de las longitudes de las diagonales si la arista mide 10 metros?

Como es un problema geométrico, dibujamos el problema.

Claramente vemos que hay un triángulo rectángulo $\triangle BDG$ en el que:

- $\overline{BD}$ es una diagonal lateral del cubo y es un cateto del triángulo rectángulo
- $\overline{DG}$ es una arista del cubo y es un cateto del triángulo rectángulo
- $\overline{GB}$ es una diagonal interior del cubo y es la hipotenusa del triángulo

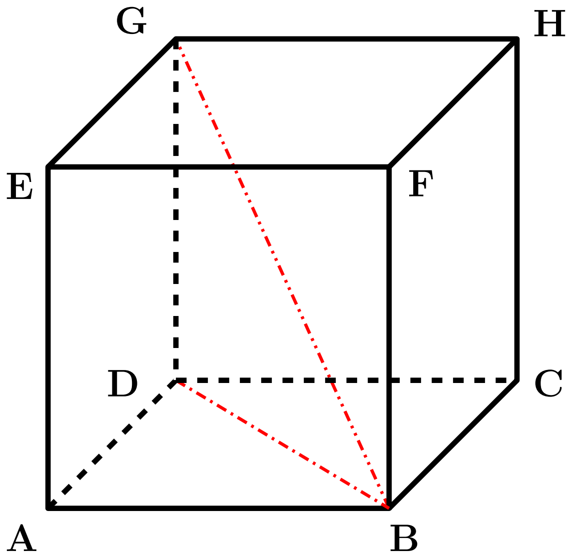


Figura 46: En el cubo, los vértices B, D y G determinan un triángulo rectángulo. $\overline{BD}$ es una diagonal lateral, $\overline{DG}$ es una arista y $\overline{GB}$ es una diagonal interior.

Las longitudes son:

- x = la diagonal lateral
- 10 metros = la arista
- $x + 5$ = la diagonal interior

Pero, por el teorema de Pitágoras:

$$(x+5)^2 = x^2 + 10^2$$
$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 100$$
$$10x = 75$$
$$x = 75/10$$
$$x = 7.5 \text{ m}$$

Por lo tanto:

- la diagonal lateral mide 7.5 metros
- la diagonal interior mide 12.5 metros
- la arista mide 10 metros

2. Un monitor tiene 23 pulgadas[a] y sabemos que la razón de aspecto entre su ancho y su alto es 16:9. ¿Cuáles son sus dimensiones?

[a]**pulgada**: en inglés, *"inch"*. 1 pulgada es aproximadamente igual a 2,54 centímetros.

Un monitor es aproximadamente un rectángulo. Y, desafortunadamente, es habitual dar el tamaño de su diagonal en pulgadas (una de las unidades del sistema imperial británico) en lugar de en centímetros.

$$d = 23 \text{ in}$$

Por otro lado, si x es el ancho e y es el alto, nos dicen que la razón de aspecto es 16:9, lo que equivale a:

$$\frac{x}{y} = \frac{16}{9}$$

Si dibujamos el problema, vemos claramente que las longitudes d, x e y son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Donde la diagonal es la hipotenusa y los lados del rectángulo son los catetos. Podemos usar el teorema de Pitágoras:

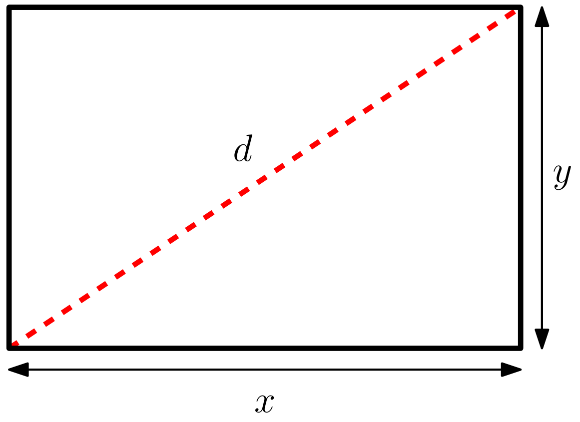


Figura 47: Un monitor rectangular de diagonal d, anchura x y altura y.

$$d^2 = x^2 + y^2$$

Sustituyendo la longitud de la diagonal en pulgadas:

$$23^2 = x^2 + y^2$$
$$529 = x^2 + y^2$$

Lo que nos da un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ 529 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Podemos despejar y de la primera ecuación:

$$\frac{x}{y} = \frac{16}{9}$$
$$x = \frac{16}{9} \cdot y$$
$$\frac{9}{16} \cdot x = y$$
$$y = \frac{9}{16} \cdot x$$

Y sustituimos en la segunda:

$$529 = x^2 + \left(\frac{9}{16} \cdot x\right)^2$$
$$529 = x^2 + \left(\frac{9}{16}\right)^2 \cdot x^2$$
$$529 = x^2 + \frac{9^2}{16^2} \cdot x^2$$
$$529 = x^2 + \frac{81}{256} \cdot x^2$$
$$529 = x^2 \left(1 + \frac{81}{256}\right)$$
$$529 = x^2 \left(\frac{256}{256} + \frac{81}{256}\right)$$
$$529 = x^2 \cdot \frac{337}{256}$$
$$529 \cdot \frac{256}{337} = x^2$$
$$x^2 = \frac{135424}{337}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{135424}{337}}$$

Pero como x es una longitud, solamente nos interesa la solución positiva:

$$x \approx 20.04623735 \text{ in}$$

Por lo que y será:

$$y = \frac{9}{16} \cdot x$$
$$y \approx \frac{9}{16} \cdot 20.04623735$$
$$y \approx 11.27600851 \text{ in}$$

Ahora convertimos las dimensiones a centímetros:

$$x \approx 20.04623735 \text{ in} \cdot \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}$$
$$y \approx 11.27600851 \text{ in} \cdot \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}$$

$$x \approx 50.91744287 \text{ cm}$$
$$y \approx 28.64106162 \text{ cm}$$

3. En un rectángulo, el lado más largo mide 7 metros más que el lado más corto. Y la superficie del rectángulo es de 60 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Un dibujo rápidamente nos da la idea de cómo es el problema.

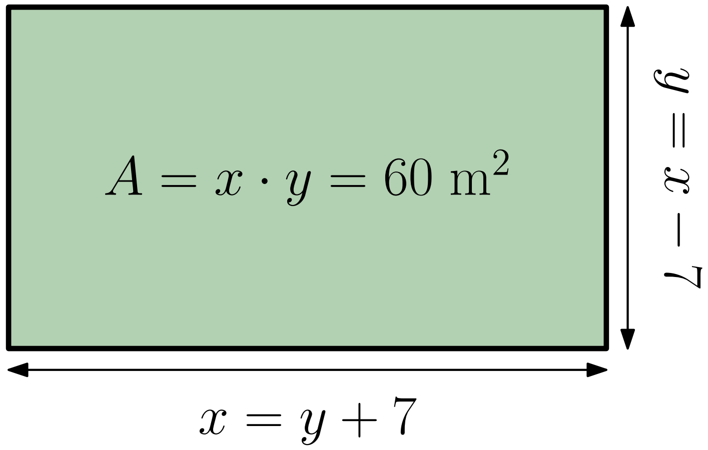


Figura 48: Un rectángulo de área 60 metros cuadrados donde el lado más largo mide 7 metros más que el más corto.

Si:

- x = longitud del lado largo
- y = longitud del lado corto

sabemos que $x = y + 7$ o, equivalentemente, que $y = x - 7$. Por otro lado, la superficie (= el área[24]) es:

$$A = x \cdot y = 60$$

Si sustituimos y por $x - 7$ en la expresión del área:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 60 \\ x \cdot (x - 7) &= 60 \\ x^2 - 7x &= 60 \\ x^2 - 7x - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Que es una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

Las soluciones son:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} =$$

[24]*"Área"* es una palabra femenina, pero empieza con una letra *a* acentuada. Por eso se usa el artículo masculino *"el"*. Esto ocurre con otras palabras femeninas: el agua, el aula, el águila...

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} =$$
$$= \frac{7 \pm \sqrt{289}}{2} =$$
$$= \frac{7 \pm 17}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 + 17}{2}, \quad x_2 = \frac{7 - 17}{2}$$
$$x_1 = 12, \quad x_2 = -5$$

Solamente la solución positiva tiene sentido en este caso; estamos trabajando con longitudes, que no pueden ser negativas.

$$x = 12 \text{ m}$$

Por lo tanto la otra longitud es:

$$y = 12 - 5$$
$$y = 7 \text{ m}$$

4. Leonor Izquierdo tendrá la misma edad que tiene Antonio Machado en este momento dentro de 19 años. Dentro de 2 años, la suma de sus edades será de 53 años. ¿Qué edades tienen los dos en este momento?

Primero escogemos nombres para las incógnitas:

- $x =$ la edad de Leonor ahora
- $y =$ la edad de Antonio ahora

La edad de Leonor dentro de 19 años es la misma edad que la que tiene Antonio ahora:

$$x + 19 = y$$

La edad de Leonor dentro de dos años será $x + 2$ y la de Antonio será $y + 2$. La suma es:

$$(x + 2) + (y + 2) = 53$$
$$x + y + 4 = 53$$
$$x + y = 49$$

Eso nos da un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 19 = y \\ x + y = 49 \end{cases}$$

Podemos sustituir y por $x + 19$ en la segunda ecuación:

$$x + x + 19 = 49$$
$$2x = 49 - 19$$
$$2x = 30$$
$$x = \frac{30}{2}$$
$$x = 15$$

Leonor tiene 15 años. Y, por lo tanto, Antonio tiene:

$$y = x + 19 = 34 \text{ años}$$

Antonio Machado Ruiz (1875-1939) fue un importante poeta español de la generación del 98. Leonor Izquierdo Cuevas (1894-1912) fue su mujer, que falleció de tuberculosis a los 18 años de edad.

Pensando en la enfermedad de su mujer, Machado escribió un célebre poema que empieza así:

> *Al olmo viejo, hendido por el rayo*
> *y en su mitad podrido,*
> *con las lluvias de abril y el sol de mayo,*
> *algunas hojas verdes le han salido.*

5. El producto de las edades actuales de dos amigos es 288 y dentro de 2 años será 360. ¿Qué edades tienen ambos amigos?

Identificamos las incógnitas:

- x = edad del primer amigo
- y = edad del segundo amigo

Ahora nos dan dos condiciones y cada una de ellas da una ecuación:

- El producto de las edades actuales es 288:

$$x \cdot y = 288$$

- El producto de las edades dentro de dos años es 360:

$$(x + 2) \cdot (y + 2) = 360$$

Es un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x \cdot y = 288 \\ (x + 2) \cdot (y + 2) = 360 \end{cases}$$

Si despejamos y de la primera ecuación:

$$y = \frac{288}{x}$$

y sustituimos en la segunda:

$$(x+2) \cdot \quad \frac{288}{x} + 2 \quad = 360$$
$$288 + 2x + \frac{576}{x} + 4 = 360$$
$$2x + \frac{576}{x} + 288 + 4 - 360 = 0$$
$$2x + \frac{576}{x} - 68 = 0$$

Si multiplicamos por x:

$$2x^2 + 576 - 68x = 0$$

Reordenamos:

$$2x^2 - 68x + 576 = 0$$

y dividimos entre dos:

$$x^2 - 34x + 288 = 0$$

tenemos una ecuación cuadrática que podemos resolver con la fórmula:

$$x = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 288}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 1152}}{2} =$$
$$= \frac{34 \pm \sqrt{4}}{2} =$$
$$= \frac{34 \pm 2}{2} =$$
$$= 17 \pm 1$$

$$x_1 = 16; \quad x_2 = 18$$

Por lo que:

$$y_1 = \frac{288}{x_1} = \frac{288}{16} = 18$$
$$y_2 = \frac{288}{x_2} = \frac{288}{18} = 16$$

Por lo que un amigo tiene 16 años y el otro tiene 18 años.

Si intercambiamos las dos variables en las ecuaciones, se observa que las ecuaciones no cambian. Las ecuaciones son simétricas respecto al intercambio de sus variables, lo cual sugería que las soluciones serían simétricas: o el primero tiene 16 y el segundo tiene 18 años, o el primero tiene 18 y el segundo tiene 16 años.

6. El producto de dos números naturales es 345 y su suma es 38. ¿Cuáles son los dos números?

Asignamos nombres a las incógnitas:

- x = primer número
- y = segundo número

Las dos condiciones nos dan dos ecuaciones:

- su producto es 345:

$$x \cdot y = 345$$

- su suma es 38:

$$x + y = 38$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \cdot y = 345 \\ x + y = 38 \end{cases}$$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = 38 - x$$

y sustituimos en la primera:

$$x \cdot (38 - x) = 345$$
$$38x - x^2 = 345$$
$$x^2 - 38x + 345 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-38) \pm \sqrt{(-38)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 345}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{38 \pm \sqrt{1444 - 1380}}{2} =$$
$$= \frac{38 \pm \sqrt{64}}{2} =$$

$$= \frac{38 \pm 8}{2} =$$
$$= 19 \pm 4$$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = 23$$

Por lo que y será:

$$y_1 = 23, \quad y_2 = 15$$

Es decir, los números son 15 y 23.

7. El producto de dos números naturales es 345 y su suma es 38. ¿Cuáles son los dos números? Deduce los números **sin usar ecuaciones**.

Si el problema tiene solución natural, podemos usar las propiedades de los números naturales para resolverlo.

Llamamos a los dos números desconocidos x e y. Y sabemos que su producto es 345, que, como termina en 5, es divisible entre 5. Por lo tanto, al menos uno de los números debe ser divisible entre 5. Por lo tanto x o y deben terminar en 0 o 5.

Pero, como el producto termina en 5, no pueden terminar en 0. Tienen que terminar en 5.

La suma es 38, que es par. Eso implica que los dos números son impares (para que su suma sea impar). Si uno termina en 5, el otro no puede terminar en 5, porque la suma terminaría en 0. El otro número debe terminar en 3 para que la suma termine en 8.

- x termina en 5
- y termina en 3

Los dos números tienen que ser menores que 38 para que la suma pueda ser 38. Entonces:

- o los dos tienen dos cifras
- o uno tiene una cifra y el otro tiene dos cifras

Consideramos cada uno de los casos:

- Si los dos tienen dos cifras, la cifra de las decenas tiene que ser 1 o 2. Pero si las cifras de las unidades suman 8, las cifras de las decenas deben sumar 3. Por lo tanto, una cifra es 1 y la otra es 2. Eso solamente nos da dos opciones:
  - x es 15 e y es 23
  - x es 25 e y es 13
- Si uno tiene dos cifras y el otro tiene una cifra, la cifra de las decenas debe ser 3. Eso nos da dos posibilidades:
  - x es 5 e y es 33
  - x es 35 e y es 3

Comprobamos todas las posibilidades:

- $15 \cdot 23 = 345$
- $25 \cdot 13 = 325$
- $5 \cdot 33 = 165$

- $35 \cdot 3 = 105$

Por lo que los números son 15 y 23.

8. La diferencia entre los cuadrados de dos números naturales impares sucesivos es 88. ¿Cuáles son?

Si el primer número impar es x, el segundo número impar es $x+2$. La diferencia de los cuadrados es 88:

$$(x+2)^2 - x^2 = 88$$
$$x^2 + 4x + 4 - x^2 = 88$$
$$4x + 4 = 88$$
$$4x = 88 - 4$$
$$4x = 84$$
$$x = 21$$

El primer número es 21. Por lo que el segundo número es 23.

9. Un conjunto de estudiantes decide alquilar un autobús para hacer un viaje al detector de ondas gravitacionales Virgo en Pisa, Italia. El coste del alquiler es de 4800 euros y se reparte en partes iguales entre todos los estudiantes. Pero tres días antes del viaje, cuatro de los estudiantes enferman y ahora los demás tienen que pagar 40 euros más que antes. ¿Cuántos estudiantes había originalmente?

x va a representar el número de estudiantes que había originalmente. Por lo que $x-4$ será el número de estudiantes que hay al final.

Originalmente, cada estudiante tenía que pagar:

$$\frac{4800}{x}$$

pero al final tienen que pagar 40 euros más:

$$\frac{4800}{x} + 40$$

que es lo mismo que repartir los 4800 euros entre los estudiantes que hay al final:

$$\frac{4800}{x} + 40 = \frac{4800}{x-4}$$
$$\frac{4800 + 40x}{x} = \frac{4800}{x-4}$$

Podemos pasar los denominadores multiplicando al lado contrario:

$$(4800 + 40x) \cdot (x-4) = 4800x$$

$$4800x - 19200 + 40x^2 - 160x = 4800x$$
$$-19200 + 40x^2 - 160x = 0$$

Es una ecuación cuadrática. La reordenamos:

$$40x^2 - 160x - 19200 = 0$$

Todos los coeficientes son divisibles entre 10, por lo que simplificamos dividiendo entre 10:

$$4x^2 - 16x - 1920 = 0$$

Todos los coeficientes son divisibles entre 4, por lo que simplificamos dividiendo entre 4:

$$x^2 - 4x - 480 = 0$$

Usamos la fórmula para las ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480)}}{2 \cdot 1} &= \\ = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1920}}{2} &= \\ = \frac{4 \pm \sqrt{1936}}{2} &= \\ = \frac{4 \pm 44}{2} &= \\ = 2 \pm 22 & \end{aligned}$$

$$x_1 = 24, \quad x_2 = -20$$

La cantidad de estudiantes no puede ser negativa[25], por lo que:

- originalmente había 24 alumnos
- finalmente hay 20 alumnos
- originalmente pagaban $4800/24 = 200$ euros por alumno
- finalmente pagan 240 euros por alumno

10. El perímetro de un rectángulo es 72 cm. Y uno de los lados es 6cm mayor que el otro. Encuentra las dimensiones del rectángulo y su área.

Asignamos letras a las incógnitas:

- $x =$ lado corto
- $y = x + 6 =$ lado largo

[25]No importa lo malos que sean.

El perímetro p de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados:

$$\begin{gathered} p = 72 \\ x + x + (x+6) + (x+6) = 72 \\ 4x + 12 = 72 \\ 4x = 72 - 12 \\ 4x = 60 \\ x = \frac{60}{4} \\ x = 15 \end{gathered}$$

El lado corto mide 15 centímetros y el lado largo mide 15 + 6 = 21 centímetros.

El área A de un rectángulo es producto de la base (que puede ser el lado largo, por ejemplo) por la altura (que puede ser el lado corto):

$$\begin{gathered} A = 15 \cdot 21 = \\ = 315 \text{ cm}^2 \end{gathered}$$

11. El área de un rectángulo es de 425 centímetros cuadrados. Si la diferencia entre su base y su altura es de 8 centímetros, ¿cuáles son sus dimensiones? ¿Cuál es su perímetro?

Asignamos letras a las incógnitas:

- $x =$ base
- $y =$ altura

Supondremos que la altura es mayor que la base: $y = x + 8$. Si omitimos las unidades, el área A es:

$$A = 425$$

Pero el área es la base por la altura:

$$x \cdot y = 425$$

Pero como $y = x + 8$:

$$\begin{gathered} x \cdot (x+8) = 425 \\ x^2 + 8x = 425 \\ x^2 + 8x - 425 = 0 \end{gathered}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-425)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64+1700}}{2} =$$
$$= \frac{-8 \pm \sqrt{1764}}{2} =$$
$$= \frac{-8 \pm 42}{2} =$$
$$= -4 \pm 21$$

Hay dos posibilidades:

$$x_1 = 17, \quad x_2 = -25$$

Pero la negativa no es posible; estamos buscando longitudes. Por lo tanto:

$$x = 17 \text{ cm} \Rightarrow y = 17 + 8 = 25 \text{ cm}$$

El perímetro p es la longitud total de todos los lados:

$$p = 2x + 2y = 2 \cdot 17 + 2 \cdot 25 = 84 \text{ cm}$$

12. El isótopo de carbono que tiene 6 protones y 8 neutrones (el carbono 14) no es un isótopo estable. Es un isótopo que se desintegra y, por lo tanto, decimos que es radiactivo. La desintegración consiste en que un neutrón se convierte en un protón, un electrón y un antineutrino. El protón que se crea, se queda en el núcleo y las otras partículas salen disparadas (son la radiación). Finalmente queda un núcleo de nitrógeno 14.
El proceso de desintegración es aleatorio (= al azar): no podemos predecir cuándo se desintegrará un núcleo concreto. Pero cuando hay muchos núcleos, sabemos que cada vez que pasan 5730 años, la cantidad de núcleos se reduce a la mitad.
Encuentra fórmula de la ley de desintegración radiactiva $m(t)$ donde m es la masa y t es el tiempo. Y calcula cuánto tiempo ha pasado si queda un 30 % del carbono 14 original.

La masa de carbono 14 m es proporcional al número de núcleos. Por lo que si el número de núcleos se reduce a la mitad después de 5730 años, también lo hará la masa de carbono 14.

Si m_0 es la masa original:

- después de 5730 años:

$$m_1 = \frac{m_0}{2}$$

- después de 5730 + 5730 años:

$$m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m_0}{4}$$

Es fácil ver que es un decrecimiento exponencial. Y no es difícil imaginar que la fórmula que buscamos es:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$$

Nos piden también averiguar cuánto tiempo pasa si el carbono 14 que queda sin desintegrar es el 30 % de la cantidad original. Eso quiere decir que:

$$\frac{m}{m_0} = 30\,\% = \frac{30}{100}$$

Despejando de la ley de desintegración radiactiva:

$$\frac{m}{m_0} = 2^{-\frac{t}{5730}}$$

Sutituyendo:

$$\frac{30}{100} = 2^{-\frac{t}{5730}}$$
$$\frac{3}{10} = 2^{-\frac{t}{5730}}$$

Lo cual nos da una ecuación exponencial. Como no podemos manipular las bases para resolverla sin usar logaritmos, optamos por coger el logaritmo decimal en ambos lados:

$$\log\left(\frac{3}{10}\right) = \log\left(2^{-\frac{t}{5730}}\right)$$
$$\log(3) - \log(10) = -\frac{t}{5730} \cdot \log(2)$$
$$\log(10) - \log(3) = \frac{t}{5730} \cdot \log(2)$$
$$\frac{\log(10) - \log(3)}{\log(2)} = \frac{t}{5730}$$
$$5730 \cdot \frac{\log(10) - \log(3)}{\log(2)} = t$$
$$t = 5730 \cdot \frac{\log(10) - \log(3)}{\log(2)}$$
$$t = 5730 \cdot \frac{1 - \log(3)}{\log(2)}$$
$$t \approx 9952.81$$

Es necesario que pasen casi 10000 años.

13. En un cultivo de bacterias en el que no hay competencia con otras especies y hay espacio y alimento suficiente, las bacterias se duplican cada 20 minutos. Si la población inicial es de 100 bacterias, escribe la ley que describe el crecimiento de la población y calcula cuánto tiempo tardan en alcanzar una cantidad de 102400 bacterias.

Si N es el número de bacterias:

- $N(t = 0) = 100$
- $N(t = 20 \text{ min}) = 100 \cdot 2$
- $N(t = 2 \cdot 20 \text{ min}) = 100 \cdot 2^2$
- $N(t = 3 \cdot 20 \text{ min}) = 100 \cdot 2^3$
- ...

La ley debe ser:

$$N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$$

Nos piden calcular cuándo la población de bacterias es de 102400 bacterias:

$$102400 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$$
$$1024 = 2^{\frac{t}{20}}$$

Pero 1024 es una potencia de 2:

$$2^{10} = 2^{\frac{t}{20}}$$
$$10 = \frac{t}{20}$$
$$t = 200 \text{ min}$$
$$t = 3 \text{ h} + 20 \text{ min}$$

¡Tres horas y 20 minutos!

14. En una reacción química de primer orden, la velocidad de la reacción es proporcional a la concentración del reactivo. Eso permite escribir la concentración del reactivo en cualquier momento así:

$$[A] = [A]_0 \cdot e^{-kt}$$

donde:
- $[A]$ es la molaridad del reactivo en el instante t
- $[A]_0$ es la molaridad inicial ($t = 0$)
- t es el tiempo
- k es la constante de velocidad

La reacción en la que el ciclopropano se convierte en propeno es de primer orden. Si inicialmente tenemos una concentración de 0,5 mol/L y, al cabo de 10 minutos, tenemos una concentración de 0,3345 mol/L, ¿cuál es la constante de velocidad? (La reacción se produce a 500 grados Celsius.)

Es un problema de cinética química muy similar a los problemas de desintegración radiactiva; tenemos una exponencial decreciente. Eso implica que la cantidad de reactivo disminuye con el tiempo.

Sabemos que:

- $t = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$
- $[A]_0 = 0.5 \text{ mol/L}$
- $[A] = 0.3345 \text{ mol/L}$ (cuando $t = 10$ min)

Tenemos la ley de la concentración, de donde queremos despejar k:

$$[A] = [A]_0 \cdot e^{-kt}$$

Dividimos entre la concentración inicial:

$$\frac{[A]}{[A]_0} = e^{-kt}$$

Hacemos el logaritmo neperiano (o natural) de ambos lados:

$$\ln \left(\frac{[A]}{[A]_0}\right) = \ln \left(e^{-kt}\right)$$

$$\ln \left(\frac{[A]}{[A]_0}\right) = -kt$$

$$\ln([A]) - \ln([A]_0) = -kt$$

$$\ln([A]_0) - \ln([A]) = kt$$

$$k = \frac{\ln([A]_0) - \ln([A])}{t}$$

Sustituyendo los valores:

$$k = \frac{\ln(0.5) - \ln(0.3345)}{600}$$

$$k = 0.0006699520314 \text{ s}^{-1}$$

En notación exponencial:

$$k \approx 6.69 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

15. En una reacción química de primer orden, sabemos que la concentración del reactivo cuando ha pasado un tiempo t ($[A]$) es igual a la concentración inicial ($[A]_0$) por el número e elevado a menos el producto de la constante de velocidad k por el tiempo t:

$$[A] = [A]_0 \cdot e^{-kt}$$

Si la constante de velocidad de una reacción química es $6.7 \cdot 10^{-4}$ s^{-1}, encuentra el tiempo necesario para que la concentración de reactivo sea la mitad de la concentración inicial.

Nos dicen que la concentración final es igual a la mitad de la inicial:

$$[A] = \frac{[A]_0}{2}$$

Sustituyendo en la ley:

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 \cdot e^{-kt}$$

Podemos dividir entre la concentración inicial:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

Podemos multiplicar por 2:

$$1 = 2e^{-kt}$$

Y podemos multiplicar por e^{kt}:

$$e^{kt} = 2$$

Hacemos el logaritmo neperiano de ambos lados:

$$\ln\left(e^{kt}\right) = \ln(2)$$
$$kt = \ln(2)$$
$$t = \frac{\ln(2)}{k}$$

$$t = \frac{\ln(2)}{6.7 \cdot 10^{-4}}$$
$$t = 1034.55 \text{ s}$$

Este tiempo se puede llamar *semivida* o *periodo de semidesintegración* y se suele representar como $t_{\frac{1}{2}}$.

16. En un corral[a] hay conejos[b] y gallinas. En total hay 116 patas y 35 cabezas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

[a] Terreno rodeado de vallas dentro del que hay animales de granja.

[b] **Conejo:** *králik* (sk), *rabbit* (en), *kuniklo* (eo). **Liebre:** *zajac* (sk), *hare* (en), *leporo* (eo). En *Alicia en el país de las maravillas* (*Alice's Adventures in Wonderland*) del matemático Lewis Carroll (cuyo nombre real era Charles Lutwidge Dodgson), Alicia persigue al Conejo Blanco al principio del libro y más tarde ve a la Liebre de Marzo con el Sombrerero Loco en la merienda.

Asignamos símbolos a las incógnitas:

- x = número de conejos
- y = número de gallinas

Nos dicen que hay 116 patas en total. Un conejo tiene 4 patas, por lo que x conejos tienen $4x$ patas. Una gallina tiene 2 patas, por lo que y gallinas tienen $2y$ patas. El total es:

$$4x + 2y = 116$$

Podemos simplificar la ecuación dividiendo entre 2:

$$2x + y = 58$$

Nos dicen que hay 35 cabezas en total. Un conejo tiene 1 cabeza, por lo que x conejos tienen x cabezas. Una gallina tiene 1 cabeza, por lo que y gallinas tienen y cabezas. El total es:

$$x + y = 35$$

Eso nos da un sencillo sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 58 \\ x + y & = & 35 \end{array}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda:

$$(2x + y) - (x + y) = 58 - 35$$
$$x = 23$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$23 + y = 35$$
$$y = 35 - 23$$
$$y = 12$$

$$(x, y) = (23, 12)$$

Es decir, hay 23 conejos y 12 gallinas.

17. En una muestra biológica tenemos arañas, moscas y libélulas. En total hay 69 artrópodos, 478 patas y 124 alas. ¿Cuántos artrópodos hay de cada tipo?

- $x =$ número de arañas

  una araña tiene 8 patas (porque es un arácnido) y 0 alas
- $y =$ número de moscas

  una mosca tiene 6 patas (porque es un insecto) y 2 alas (porque es un díptero)
- $z =$ número de libélulas

  una libélula tiene 6 patas (porque es un insecto) y 4 alas

Eso nos da un sistema con tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{lcr} x + y + z & = & 69 \\ 8x + 6y + 6z & = & 478 \\ 0x + 2y + 4z & = & 124 \end{array}\right\}$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{lcr} x+y+z & = & 69 \\ 4x+3y+3z & = & 239 \\ y+2z & = & 62 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema, podemos usar el método que prefiramos.

Si a la segunda ecuación le restamos el triple de la primera:

$$(4x+3y+3z)-3(x+y+z)=239-3\cdot 69$$
$$x=32$$

Sustituimos en la primera:

$$32+y+z=69$$
$$y+z=69-32$$
$$y+z=37$$

Si a la tercera ecuación le restamos la que acabamos de obtener:

$$(y+2z)-(y+z)=62-37$$
$$z=25$$

Como $y+z=37$:

$$y+25=37$$
$$y=37-25$$
$$y=12$$

Es decir:

$$(x,y,z)=(32,12,25)$$

Hay 32 arañas, 12 moscas y 25 libélulas.

18. Una madre es 21 años mayor que su hijo y en 6 años el niño será 5 veces menor que ella. ¿Qué edad tiene el hijo?

Si asignamos las variables:

- edad del hijo ahora: x
- edad de la madre ahora: $x+21$
- edad del hijo dentro de 6 años: $x+6$
- edad de la madre dentro de 6 años: $x+21+6$

Se nos da la condición de que la madre dentro de seis años será 5 veces mayor que el hijo:

$$x + 21 + 6 = 5 \cdot (x + 6)$$
$$x + 27 = 5x + 30$$
$$x + -5x = 30 - 27$$
$$-4x = 3$$
$$x = \frac{-3}{4}$$

¿Qué significa el signo menos en esta solución? Podemos interpretarlo como un tiempo anterior al nacimiento del hijo. Es decir, estamos hablando de un momento 3/4 de año antes del nacimiento.

Pero 3/4 de año son 9 meses. Hablamos de 9 meses antes del parto (= del nacimiento) del hijo.

Geometría básica

Este capítulo incluye varias cosas que son básicas para trabajar en geometría y también algo sobre secciones planas de poliedros.

Cosas como las distintas unidades para medir ángulos, el teorema de Pitágoras, la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo, los teoremas de Euclides (el del cateto y el de la altura), el concepto de semejanza… son esenciales y debes manejarlos con soltura.

Unidades angulares

1. Expresa cada uno de los siguientes ángulos en grados sexagesimales, radianes, grados centesimales y vueltas.

a) $\alpha = 15^\circ$
b) $\beta = \frac{3\pi}{5}$
c) $\gamma = 40^g$
d) $\delta = 40\,\tau$

La letra griega tau minúscula representa una vuelta.

Para realizar la conversión de unidades, debemos saber cuál es la relación entre unas unidades angulares y las restantes. Sabemos que una vuelta (que nosotros vamos a simbolizar τ) es:

$$1\,\tau = 360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 400^g$$

a) $\alpha = 15^\circ$

El primer ángulo está expresado en grados sexagesimales.

Para convertirlo en vueltas, solamente tenemos que usar que $1\,\tau = 360^\circ$ como factor de conversión:

$$\begin{aligned} \alpha = 15^\circ \cdot \frac{1\,\tau}{360^\circ} &= \\ = \frac{15}{360}\,\tau = \frac{1}{24}\,\tau \end{aligned}$$

Para convertirlo en radianes, usamos que $360^\circ = 2\pi$ rad:

$$\begin{aligned} \alpha = 15^\circ \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} &= \\ = \frac{30\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \end{aligned}$$

Para convertirlo en grados centesimales (también llamados *gradianes*), usamos que $360° = 400^g$:

$$\begin{aligned}\alpha = 15° \cdot \frac{400^g}{360°} &= \\ = \left(\frac{15 \cdot 400}{360}\right)^g &= \\ = \left(\frac{15 \cdot 40}{36}\right)^g &= \\ = \left(\frac{5 \cdot 40}{12}\right)^g &= \\ = \left(\frac{5 \cdot 10}{3}\right)^g &= \\ = \left(\frac{50}{3}\right)^g\end{aligned}$$

b) $\beta = \frac{3\pi}{5}$

Cuando no se se especifica la unidad angular, se sobreentiende que se trata de una medida en **radianes**.

$$\beta = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$$

Convertimos a vueltas:

$$\begin{aligned}\beta = \frac{3\pi}{5} \text{ rad} \cdot \frac{1\,\tau}{2\pi \text{ rad}} &= \\ = \frac{3}{10}\,\tau\end{aligned}$$

Convertimos a grados sexagesimales:

$$\begin{aligned}\beta = \frac{3\pi}{5} \text{ rad} \cdot \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} &= \\ = 108°\end{aligned}$$

Convertimos a grados centesimales:

$$\begin{aligned}\beta = \frac{3\pi}{5} \text{ rad} \cdot \frac{400^g}{2\pi \text{ rad}} &= \\ = 120^g\end{aligned}$$

c) $\gamma = 40^g$

Convertimos a vueltas:

$$\gamma = 40^g \cdot \frac{1\,\tau}{2\pi \text{ rad}} =$$

$$= \frac{3}{10}\,\tau$$

Convertimos a grados sexagesimales:

$$\begin{aligned} \gamma &= 40^g \cdot \frac{360°}{400^g} = \\ &= 36° \end{aligned}$$

Convertimos a radianes:

$$\begin{aligned} \gamma &= 40^g \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{400^g} = \\ &= \frac{\pi}{5} \text{ rad} \end{aligned}$$

d) $\delta = 40\,\tau$

Nosotros usamos el símbolo τ (la letra griega *tau* minúscula) para **vuelta**. También se puede escribir la palabra completa.

Convertimos a grados sexagesimales:

$$\begin{aligned} \delta &= 40\,\tau \cdot \frac{360°}{1\,\tau} = \\ &= 14\,400° \end{aligned}$$

Convertimos a radianes:

$$\begin{aligned} \delta &= 40\,\tau \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1\,\tau} = \\ &= 80\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

Convertimos a grados centesimales:

$$\begin{aligned} \delta &= 40\,\tau \cdot \frac{400^g}{1\,\tau} = \\ &= 16\,000^g \end{aligned}$$

2. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de radio 4 metros si el ángulo que hay entre los radios que van a sus extremos es de 15 grados? ¿Cuál es el área del sector circular correspondiente?

La longitud de la circunferencia completa l es:

$$l = 2\pi r$$

donde r es el radio. Es decir:

$$l = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ m} =$$

$$\approx 25.13 \text{ m}$$

El ángulo que determina una circunferencia completa es de 360°. Debe existir una relación de proporcionalidad directa entre la longitud del arco l_a, la longitud de la circunferencia l, el ángulo del arco 30° y el ángulo de la circunferencia 360°:

$$\frac{l_a}{l} = \frac{30^\circ}{360^\circ}$$
$$l_a = l \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ}$$
$$l_a = 8\pi \cdot \frac{1}{12}$$
$$l_a = \frac{8\pi}{12} \text{ m}$$
$$l_a = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$$
$$l_a \approx 2.094 \text{ m}$$

El área (= la superficie) del círculo contenido en la circunferencia es:

$$S = \pi r^2$$
$$S = \pi 4^2$$
$$S = 16\pi \text{ m}^2$$

También existe proporcionalidad entre la superficie del círculo completo S y la superficie del sector circular S_a:

$$\frac{S_a}{S} = \frac{30^\circ}{360^\circ}$$
$$S_a = S \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ}$$
$$S_a = 16\pi \cdot \frac{1}{12}$$
$$S_a = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^2$$
$$S_a \approx 4.189 \text{ m}^2$$

3. ¿Existe alguna fórmula que dé la longitud de un arco de circunferencia y la superficie de un sector circular a partir del radio y el ángulo?

En el ejercicio anterior hemos visto que si l_a es la longitud del arco, l es la longitud de la circunferencia, r es el radio y $\alpha(^\circ)$ es el ángulo en grados sexagesimales:

$$l_a = l \cdot \frac{\alpha(^\circ)}{360^\circ}$$
$$l_a = 2\pi r \cdot \frac{\alpha(^\circ)}{360^\circ}$$

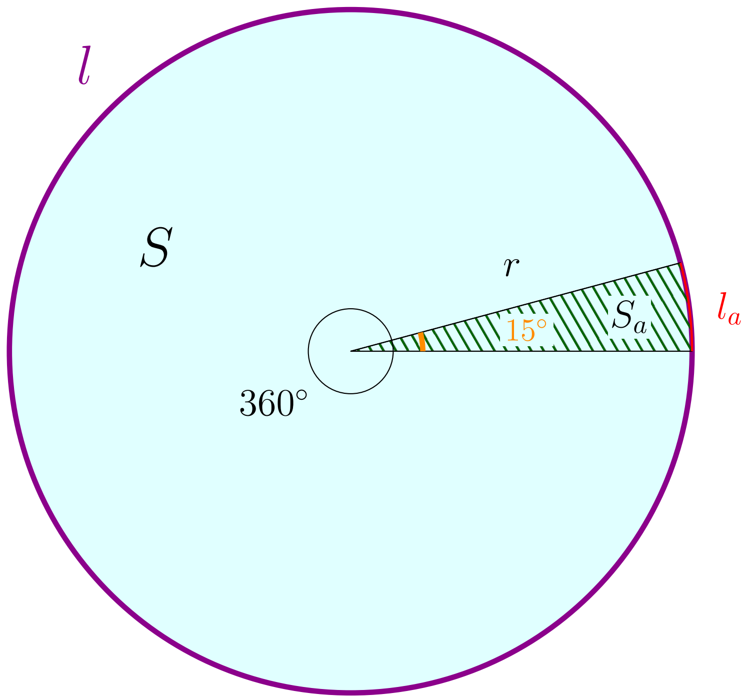


Figura 49: Un arco de circunferencia y un sector circular.

Del mismo modo, la fórmula para la superficie es:

$$S_a = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha(°)}{360°}$$

Pasa algo interesante si cambiamos las fórmulas para que el ángulo esté expresado en radianes:

$$l_a = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\boxed{l_a = r \cdot \alpha}$$

$$S_a = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\boxed{S_a = r^2 \cdot \frac{\alpha}{2}}$$

Si α es igual a 1 radián, entonces **la longitud del arco es igual al radio**. Ésa es, de hecho, la definición de *radián*: *"un radián es la medida de un ángulo cuyo arco de circunferencia tiene la misma longitud que su radio"*.

El radián es la **unidad natural** para medir ángulos. Y, por esta razón, se puede omitir la unidad.

4. Dados los ángulos siguientes, pasa a forma compleja el que esté en forma incompleja y viceversa:

a) $\alpha = 30° \ 45' \ 40''$

b) $\beta = 7300''$

a) El ángulo α está en forma compleja:

   30 grados [sexagesimales], 45 minutos y 40 segundos.

$$\alpha = 30^\circ 45' 40'' =$$

   es en realidad una suma:

$$= 30^\circ + 45' + 40'' =$$

   Usando factores de conversión:

$$\begin{aligned} &= 30^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} \cdot \frac{60''}{1'} + 45' \cdot \frac{60''}{1'} + 40'' = \\ &= 30 \cdot 60 \cdot 60 + 45 \cdot 69 + 40 = \\ &= 111145'' \end{aligned}$$

b) El ángulo β está en forma incompleja:

   Debemos hacer la división entera de 7300” entre 60. El cociente es 121 y el resto es 40. Por lo tanto:

$$\beta = 7300'' = 121' + 40'' =$$

   Ahora debemos hacer la división entera de 121’ entre 60. El cociente es 2 y el resto es 1. Por lo tanto:

$$= 2^\circ + 1' + 40''$$

Yo **siempre prefiero la forma incompleja** en grados.

5. Pasa a grados, minutos y segundos:

$$\alpha = 45,123^\circ$$

Nos piden pasar de la forma incompleja en grados a la forma compleja. Dado el ángulo:

$$\alpha = 45,123^\circ =$$

separamos su parte entera y la parte decimal:

$$= 45^\circ + 0,123^\circ =$$

Pasamos la parte decimal a minutos:

$$\begin{aligned} &= 45^\circ + 0,123^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} = \\ &= 45^\circ + 7,38' = \end{aligned}$$

Separamos la parte entera y la parte decimal de los minutos:

$$= 45° + 7' + 0,38' =$$

Pasamos la parte decimal a segundos:

$$= 45° + 7' + 0,38' \cdot \frac{60''}{1'} =$$
$$= 45° + 7' + 22,8''$$

6. Cambia los siguientes ángulos de forma compleja a incompleja y viceversa **usando la calculadora**:
a) α = 25,234°
b) β = 30° 23’ 40”

Como sabes, hay circunstancias en las que es mejor no depender de la calculadora. Un examen oral de maturita es una de esas circunstancias. Si puedes evitar usar la calculadora en el examen, evítalo.

ALUMNO: ¿Entonces no me van a preguntar esto en maturita?

PROFESOR: No. No te van a pedir hacer esto usando la calculadora.

ALUMNO: ¿Pero pueden pedirme hacerlo sin calculadora?

PROFESOR: Normalmente no. Pero es algo que el tribunal que te examine supone que sabes hacer desde educación primaria. Es decir, antes de llegar al instituto.

ALUMNO: Ah. Entiendo…

PROFESOR: ¿Por dónde iba…? ¡Ah! Estaba diciendo que, siempre que sea posible, debes evitar usar la calculadora.

Pero conocer bien tu calculadora puede ser muy útil para comprobar resultados o llegar rápidamente a algunos resultados. Y la mayoría de las calculadoras científicas tienen modos para convertir unidades angulares. En particular, suele existir una tecla que tiene los símbolos de grado, minuto y segundo: [° ’ "].

a) Solamente tenemos que teclear:

`25.234` [° ’ "] [=]

El resultado es:

`25° 14’ 2.4"`

b) Primero tecleamos:

30 [° ’ "] 23 [° ’ "] 40 [° ’ "] [=]

Y después:

$$\boxed{\texttt{SHIFT}}\ \boxed{\texttt{°'"}}$$

El resultado es:

`30.39444444`

Que es el resultado en grados sexagesimales.

7. Sean los ángulos siguientes:

a)
$$370°$$

b)
$$2348°$$

c)
$$-48°$$

d)
$$-748°$$

Encuentra sus ángulos equivalentes entre 0° y 360°.

Es sencillo convertir ángulos mayores que 360° o menores que 0° a ángulos equivalentes en el intervalo [0°, 360°).

a)
$$370°$$

Si dividimos 370 entre 360, el cociente es 1 y el resto es 10.

Es decir, 370 es una vuelta más 10 grados. Por lo tanto:

$$370° = 10°$$

b)
$$2348°$$

Si dividimos 2348 entre 360, el cociente es 6 y el resto es 188.

Es decir, 2348 es 6 vueltas más 188 grados. Por lo tanto:

$$2348° = 188°$$

c)
$$-48°$$

Es un ángulo negativo. Pero su valor absoluto es mayor que 0 y menor que 360. Podemos convertirlo en un ángulo equivalente fácilmente sumando 360:

$$-48° = -48° + 360° = 312°$$

d)
$$-748°$$

Si dividimos 748 entre 360, el cociente es 2 y el resto es 28. Por lo tanto:

$$-748° = -2 \text{ vueltas} - 20° =$$
$$= -20° =$$

Sumamos 360 para convertirlo en positivo:

$$= -20° + 360° =$$
$$= 340°$$

Triángulos

1. Si a, b, c son las longitudes de los lados y α, β, γ son las medidas de sus ángulos, determina si existen los siguientes triángulos y, en caso de existir, si son rectángulos.
a) $\alpha = 20°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 60°$
b) $\alpha = 15°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 50°$
c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm
d) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm
e) $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm
f) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

a) $\alpha = 20°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 60°$

Si sumamos los tres ángulos:

$$\alpha + \beta + \gamma =$$
$$= 20° + 100° + 60° =$$
$$= 180°$$

la suma es un ángulo llano. Por lo tanto, sí forman un triángulo; en geometría plana euclídea, la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es un ángulo llano.

b) $\alpha = 15°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 50°$

La suma de los tres ángulos:

$$\alpha + \beta + \gamma =$$
$$= 15° + 90° + 50° =$$
$$= 155°$$

no es 180°. Por lo tanto, no forman un triángulo.

c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

Para que tres segmentos puedan formar un triángulo, la suma de las longitudes de dos de los lados siempre debe ser mayor que el otro lado. Es lo que se llama **desigualdad triangular**. Es decir, debe cumplirse:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$$

Comprobamos:

$$\begin{cases} 3+4>5 \quad \top \\ 4+5>3 \quad \top \\ 5+3>4 \quad \top \end{cases}$$

La desigualdad triangular se cumple en todos los casos. Por lo tanto **sí es un triángulo**.

Para comprobar si es un triángulo rectángulo, solamente tenemos que ver si se cumple el teorema de Pitágoras. El cuadrado del lado más largo debe ser igual a la suma de los cuadrados de los lados más cortos. En nuestro caso:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 25 \quad \top$$

Por lo que **sí es un triángulo rectángulo**.

d) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm

Debe cumplirse la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$$

Comprobamos:

$$\begin{cases} 7+4>4 \quad \top \\ 4+4>7 \quad \top \\ 4+7>4 \quad \top \end{cases}$$

Se cumplen, por lo que **sí es un triángulo**.

Comprobamos si se cumple el teorema de Pitágoras. Aquí el lado más largo es a:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$7^2 = 4^2 + 4^2$$

$$49 = 16 + 16$$
$$49 = 32 \quad \color{red}{\perp}$$

Es una contradicción, por lo que no es un triángulo rectángulo. Como el cuadrado del lado más largo es mayor que la suma de los cuadrados de los otros lados, es un triángulo **obtusángulo**. Como dos de los lados son iguales entre si, es un triángulo **isósceles**.

e) $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

Debe cumplirse la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$$

Comprobamos:

$$\begin{cases} 10+4>4 & \color{green}{\top} \\ 4+5>10 & \color{red}{\perp} \\ 5+10>4 & \color{green}{\top} \end{cases}$$

No se cumple una de las tres. Por lo tanto, **no es un triángulo**.

f) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

Debe cumplirse la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$$

Comprobamos:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2} & \color{green}{\top} \\ \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2} & \color{green}{\top} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2} & \color{green}{\top} \end{cases}$$

Demostrar que las tres desigualdades se cumplen no es trivial. Vamos a comprobar la tercera, que parece la menos evidente de las tres:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Podemos elevar al cuadrado en ambos lados:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$ {\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 + {\frac{\sqrt{3}}{2}}^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} > {\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 $$

$$ \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{5}{4} $$

$$ \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{5}{4} $$

Lo cual es cierto.

Por lo tanto, **si es un triángulo**.

Podemos ver que se cumple el teorema de Pitágoras:

$$ {\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 + {\frac{\sqrt{3}}{2}}^2 = {\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 $$

Por lo que es un **triángulo rectángulo**.

2. ¿Cómo puede determinarse si un triángulo es obtusángulo, acutángulo o rectángulo a partir de las longitudes de sus lados?

Si a y b son los lados más cortos y c es el lado más corto:

- si es rectángulo, cumple el teorema de Pitágoras:

$$ c^2 = a^2 + b^2 $$

- si es acutángulo:

$$ c^2 < a^2 + b^2 $$

- si es obtusángulo:

$$ c^2 > a^2 + b^2 $$

Esto está íntimamente relacionado con el teorema del coseno:

$$ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) $$

Por definición, un triángulo es:

- rectángulo cuando tiene dos ángulos agudos (menores que 90°) y un ángulo recto (igual a 90°)
- acutángulo cuando tiene tres ángulos agudos (menores que 90°)
- obtusángulo cuando tiene dos ángulos agudos (menores que 90°) y un ángulo obtuso (mayor que 90°)

3. El perímetro de un triángulo equilátero es 300 centímetros. Encuentra la longitud de sus lados, su altura y su área.

En un triángulo equilátero, los tres lados son iguales. Por lo tanto, si el perímetro es $p = 300$ cm, uno solo de los lados debe medir $x = 300/3 = 100$ cm.

Por otro lado, cualquiera de las alturas va desde un vértice al medio del lado opuesto. Y esto nos permite dibujar un triángulo rectángulo.

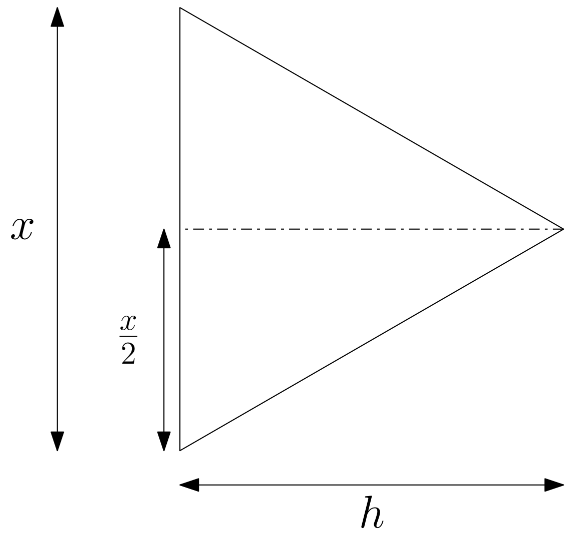


Figura 50: Un triángulo equilátero, con su base x y su altura h. Normalmente dibujamos la base **abajo**, pero eso no es lo que define una base.

Por el teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \\
100^2 &= \left(\frac{100}{2}\right)^2 + h^2 \\
10\,000 &= 2\,500 + h^2 \\
h^2 &= 7500 \\
h &= \pm\sqrt{7500}
\end{aligned}
$$

Pero la altura debe ser positiva:

$$h = \sqrt{7500}$$

Factorizando:

$$h = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^4}$$

podemos sacar cosas fuera de la raíz:

$$h = 2 \cdot 5^2\sqrt{3}$$

$$h = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

Aproximadamente:

$$h \approx 86.603 \text{ m}$$

Ahora podemos calcular la superficie (= el área):

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$
$$S = \frac{100 \cdot 50\sqrt{3}}{2}$$
$$S = 2\,500\sqrt{3} \text{ m}^2$$

4. Una escalera (de mano) está apoyada en una pared. La escalera mide 6 metros de longitud y la parte apoyada en el suelo está a 3 metros de la pared. ¿A qué altura llega la escalera?

Tenemos un triángulo rectángulo. Donde la hipotenusa mide 6 metros y uno de los catetos mide 3 metros. La altura h a la que llega la escalera es el cateto que falta.

Por el teorema de Pitágoras.

$$6^2 = 3^2 + h^2$$
$$36 = 9 + h^2$$
$$h^2 = 27$$
$$h = \pm\sqrt{27}$$

Como la altura debe ser positiva:

$$h = \sqrt{27} \text{ m}$$

Factorizando podemos escribirlo:

$$h = 3 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

Si no tenemos calculadora y no tenemos tiempo para hacer manualmente la raíz cuadrada[26], podemos dar una estimación. Sabemos que 27 no es un cuadrado perfecto. El mayor de los cuadrados perfectos menores que 27 es 25. Y el menor de los cuadrados perfectos mayores que 27 es 36. Por lo tanto:

$$\sqrt{25} < h = \sqrt{27} < \sqrt{36}$$
$$5 < h = \sqrt{27} < 6$$

Como 27 está significativamente más cerca de 25 que de 36, h probablemente estará más cerca de 5 que de 6.

[26] El algoritmo habitual para calcular la raíz cuadrada es lento y más complicado que el de la división.

Si tenemos una calculadora, vemos que es así:

$$h = \sqrt{27} \approx 5.196 \text{ m}$$

5. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 15 centímetros y la proyección [ortogonal] de uno de los catetos sobre la hipotenusa es de 4 centímetros. Encuentra la longitud de los dos catetos. Haz el ejercicio de dos maneras diferentes:

a) con el teorema de Euclides del cateto

b) sin el teorema de Euclides del cateto

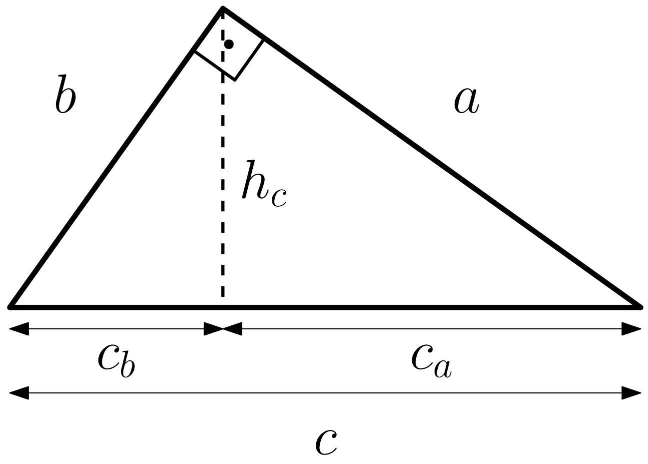


Figura 51: Un triángulo rectángulo de catetos a y b, hipotenusa c, altura sobre la hipotenusa h_c, proyección del cateto a sobre c igual a c_a y proyección del cateto b sobre c igual a c_b.

a) Si c_b es la proyección del cateto b, sobre la hipotenusa c, el teorema de Euclides del cateto dice:

$$b^2 = c_b \cdot c$$

$$b^2 = 4 \cdot 15$$
$$b^2 = 60$$
$$b = \pm\sqrt{60}$$

Como es una longitud, debe ser positiva:

$$b = \sqrt{60} \text{ cm}$$

Podemos encontrar la proyección del otro cateto:

$$c = c_a + c_b$$
$$c_a = c - c_b$$
$$c_a = 15 - \sqrt{60}$$

El teorema de Euclides para el cateto a dice:

$$a^2 = c_a \cdot c$$
$$a^2 = (15 - \sqrt{60}) \cdot 15$$
$$a^2 = 225 - 15\sqrt{60}$$
$$a = \pm\sqrt{225 - 15\sqrt{60}}$$

Solamente nos interesa la solución positiva:

$$a = \sqrt{225 - 15\sqrt{60}}$$

b) No necesitamos el teorema de Euclides del cateto para resolver el ejercicio. Observamos que hay dos triángulos rectángulos pequeños dentro del triángulo rectángulo completo. Uno tiene los lados a, h_c y c_a. El otro tiene los lados b, h_c y c_b. Si aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos:

$$a^2 = h_c^2 + c_a^2$$
$$b^2 = h_c^2 + c_b^2$$

Si restamos ambas ecuaciones, podemos eliminar la altura, que no nos interesa:

$$a^2 - b^2 = c_a^2 - c_b^2$$

Para el triángulo completo, el teorema de Pitágoras dice:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$

Sustituyendo arriba:

$$(c^2 - b^2) - b^2 = c_a^2 - c_b^2$$
$$c^2 - 2b^2 = c_a^2 - c_b^2$$

Sabemos que $c_a = c - c_b$:

$$c^2 - 2b^2 = (c - c_b)^2 - c_b^2$$
$$c^2 - 2b^2 = c^2 + c_b^2 - 2c_b \cdot c - c_b^2$$
$$-2b^2 = -2c_b \cdot c$$
$$b^2 = c_b \cdot c$$

¡Acabamos de demostrar el teorema de Euclides del cateto! A partir de este punto, podemos hacer lo mismo que en apartado anterior para terminar el ejercicio.

6. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 centímetros y la proyección de uno de los catetos sobre esta, mide 4 centímetros. Encuentra la altura. Haz el ejercicio de dos maneras diferentes:
a) con el teorema de Euclides de la altura
b) sin el teorema de Euclides de la altura

a) El teorema de Euclides de la altura se puede escribir:

$$h_c^2 = c_a \cdot c_b$$

donde h_c es la altura sobre la hipotenusa c, c_a es la proyección del lado a sobre la hipotenusa c y c_b es la proyección del lado b sobre la hipotenusa c.

Como:

$$c = c_a + c_b$$

tenemos:

- $c = 10$ cm
- $c_a = 4$ cm
- $c_b = 6$ cm

Por el teorema de la altura:

$$h_c^2 = c_a \cdot c_b$$
$$h_c^2 = 4 \cdot 6$$
$$h_c^2 = 24$$
$$h_c = \pm\sqrt{24}$$

La altura debe ser positiva:

$$h_c = \sqrt{24} \text{ cm}$$

b) La altura h_c divide el triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos más pequeños. Los tres triángulos (el original y los dos pequeños) deben cumplir el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h_c^2 + c_a^2$$
$$b^2 = h_c^2 + c_b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si sumamos las dos primeras ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = h_c^2 + c_a^2 + h_c^2 + c_b^2$$
$$a^2 + b^2 = 2h_c^2 + c_a^2 + c_b^2$$

Pero, por la tercera ecuación, el lado derecho es igual a c^2:

$$c^2 = 2h_c^2 + c_a^2 + c_b^2$$

Pero como $c = c_a + c_b$:

$$(c_a + c_b)^2 = 2h_c^2 + c_a^2 + c_b^2$$

Por la identidad notable:

$$c_a^2 + c_b^2 + 2c_a \cdot c_b = 2h_c^2 + c_a^2 + c_b^2$$
$$2c_a \cdot c_b = 2h_c^2$$

$$h_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Hemos demostrado el teorema de Euclides de la altura. Ahora podemos terminar el ejercicio como hemos hecho en el apartado anterior.

Semejanza

1. Un edificio proyecta sobre el suelo una sombra que podemos medir y tiene 30 metros de longitud. Tenemos un palo que tiene una longitud de 80 centímetros. Colocamos el palo cerca del edificio en el mismo momento del día apoyado verticalmente en el suelo. La sombra del palo mide 130 centímetros. ¿Cuál es la altura del edificio?

Los rayos de luz del Sol vienen de una distancia tan grande que se pueden considerar paralelos entre si en nuestro problema. Por lo tanto, llegan con el mismo ángulo de inclinación al edificio y al palo.

Al dibujar el problema, observamos que se forman dos triángulos rectángulos y, como el ángulo de inclinación de los rayos de luz del Sol es el mismo en el edificio y en el palo, **los dos triángulos son semejantes**.

Como son semejantes, sabemos que:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Que también puede escribirse:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Despejamos lo que queremos encontrar:

$$y_1 = y_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

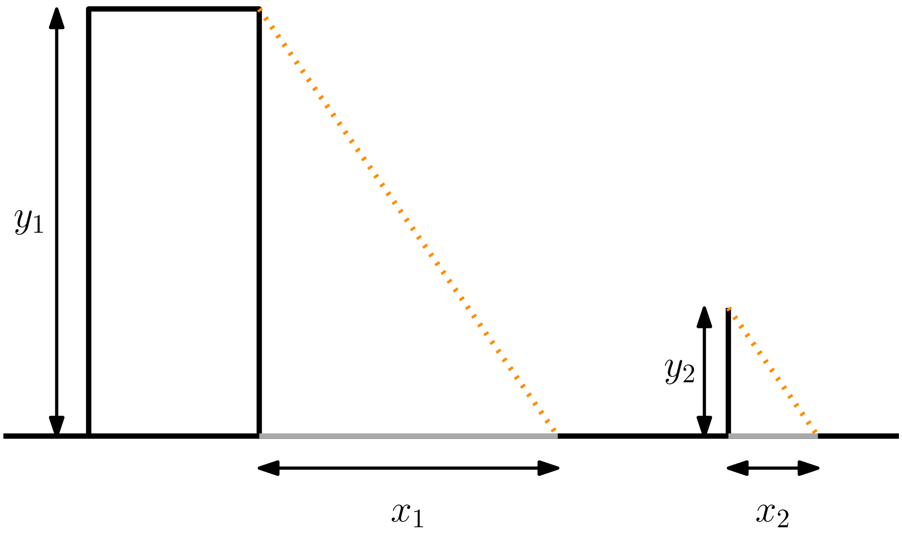


Figura 52: Un edificio de altura y_1 y un palo de altura y_2 proyectan sombras de longitudes x_1 y x_2 respectivamente. Como los rayos luminosos son paralelos, los dos triángulos que se ven son semejantes entre si.

Sustituimos:

$$y_1 = 80 \text{ cm} \cdot \frac{30 \text{ m}}{130 \text{ cm}}$$
$$y_1 \approx 18.46 \text{ m}$$

2. Demuestra el teorema de Euclides del cateto usando semejanza de triángulos.

Si dibujamos un triángulo rectángulo y la altura sobre la hipotenusa, vemos que la altura lo separa en dos triángulos rectángulos más pequeños. Todos los triángulos tienen un ángulo común (el recto, de 90°). Pero es evidente que los pequeños comparten al menos otro ángulo con el triángulo original. Y eso implica que el tercer ángulo también es compartido por los tres triángulos.

Cuando tres triángulos tienen los mismos ángulos, **son semejantes**.

En la figura, el triángulo original y el triángulo inferior de la derecha son semejantes. La hipotenusa c del original está relacionada con la hipotenusa a del inferior de la derecha. Y el cateto a del original está relacionado con el cateto c_a del inferior de la derecha. Como son semejantes:

$$\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}$$

Despejando:

$$a^2 = c_a \cdot c$$

Quod erat demonstrandum.

Para el cateto b se demuestra de modo parecido.

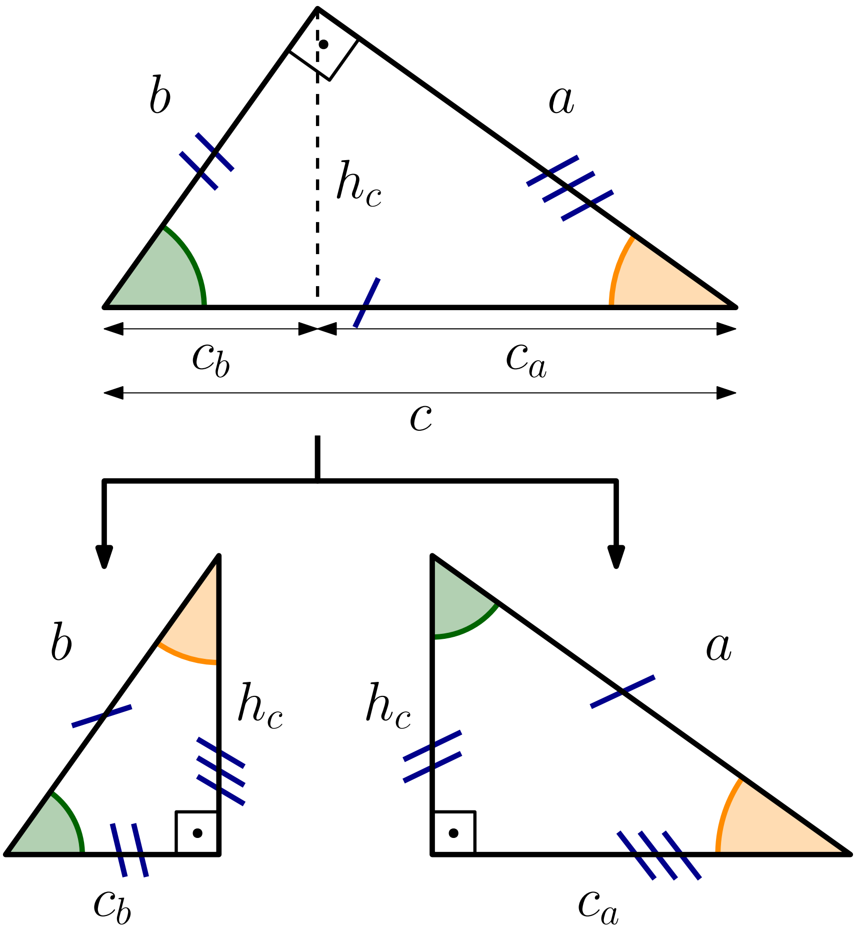


Figura 53: Al dividir un triángulo rectángulo en dos usando la altura sobre la hipotenusa, el resultado son dos triángulos rectángulos más pequeños que tienen los mismos ángulos y, por lo tanto, son semejantes al triángulo original.

3. Demuestra el teorema de Euclides de la altura usando semejanza de triángulos.

Con un razonamiento similar al ejercicio anterior, podemos usar la semejanza entre los dos triángulos pequeños.

Como:

- h_c de la izquierda está relacionado con c_a de la izquierda
- c_b de la izquierda está relacionado con h_c de la derecha

tenemos:

$$\frac{h_c}{c_a} = \frac{c_b}{h_c}$$

Despejando:

$$h_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Como queríamos demostrar.

4. Demuestra el teorema de Pitágoras usando semejanza de triángulos.

Como hemos dicho, la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos más pequeños semejantes a él.

Sabemos que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa suman la hipotenusa:

$$c = c_a + c_b$$

Por semejanza del triángulo que incluye c_b con el triángulo original, tenemos:

$$\frac{c_b}{b} = \frac{b}{c}$$

es decir:

$$c_b = \frac{b^2}{c}$$

Por semejanza del triángulo que incluye c_a con el triángulo original, tenemos:

$$\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c}$$

es decir:

$$c_a = \frac{a^2}{c}$$

Sustituyendo en la primera expresión que hemos escrito:

$$c = c_a + c_b$$
$$c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$$

Multiplicando por c:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que es el teorema de Pitágoras, **como queríamos demostrar**.

5. En un mapa, la distancia entre dos ciudades es de 3 centímetros. Y en el mapa se dice que la escala es de 1:50000. ¿Cuál es la distancia real entre las ciudades?

Es un sencillo problema de semejanza en el que nos dicen que:

$$\frac{x_{\text{mapa}}}{x_{\text{realidad}}} = \frac{1}{50\,000}$$

Esa razón es la **razón de semejanza** entre el mapa y la realidad. Es una *razón* porque es un cociente entre dos números. Aunque muchas veces la razón de semejanza es una fracción, puede no ser una fracción; puede ser un cociente entre dos números que no son enteros.

Y tenemos la distancia en el mapa:

$$\frac{3 \text{ cm}}{x_{\text{realidad}}} = \frac{1}{50\,000}$$

Podemos escribir las fracciones recíprocas:

$$\frac{x_{\text{realidad}}}{3 \text{ cm}} = \frac{50\,000}{1}$$

Despejando:

$$x_{\text{realidad}} = \frac{50\,000}{1} \cdot 3 \text{ cm} =$$
$$= 150\,000 \text{ cm} =$$
$$= 1\,500 \text{ m} =$$
$$= 1.5 \text{ km}$$

La distancia entre ambas ciudades es de un kilómetro y medio.

6. Una pirámide tiene un volumen de 15 m³ y una base cuadrada de lado 2 m. Otra pirámide es semejante a la primera y el lado de su base mide 5 m. Encuentra la razón de semejanza entre ambas pirámides y el volumen de la segunda pirámide.

La razón de semejanza es el cociente entre las **longitudes** de segmentos semejantes.

$$r = \frac{5 \text{ m}}{2 \text{ m}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

La razón de semejanza es la misma para cualquier par de **longitudes** de segmentos semejantes de las dos pirámides:

$$r = \frac{l'}{l}$$

donde l' es una longitud de la segunda pirámide y l es la longitud semejante de la primera pirámide.

Sin embargo, las superficies y los volúmenes cumplen otras relaciones:

$$\frac{S'}{S} = r^2; \quad \frac{V'}{V} = r^3$$

Usamos la segunda relación:

$$\frac{V'}{V} = r^3$$

Sustituyendo los valores que conocemos:

$$\begin{aligned} \frac{V'}{15} &= \quad \frac{5}{2}^{\;3} \\ \frac{V'}{15} &= \frac{125}{8} \\ V' &= 15 \cdot \frac{125}{8} \\ V' &= \frac{15 \cdot 125}{8} \\ V' &= \frac{1875}{8} \end{aligned}$$

Aproximadamente:

$$V' = 234.375 \text{ m}^3$$

Secciones planas

1. Un cubo de arista 2 metros tiene vértices ABCDEFGH.
Encuentra la sección plana que se obtiene con los puntos L, M y N. Donde L es el punto medio entre A y B, M, el punto medio entre B y C y N, el punto medio entre B y F.
Calcula la longitud del perímetro de esa sección plana.

Un cubo (= un hexaedro regular) tiene 8 vértices, 6 caras y 12 aristas.

(En un episodio de *Los Simpson*, lo llaman *"frinkaedro"*. Es el episodio *"Treehouse of Horror VI"* de la séptima temporada de la serie, emitido en 1995, cuando el profesor Frink menciona que el cubo se llama así en honor a su descubridor: él mismo.)

Lo habitual es que los vértices se etiqueten con las letras de la A a la H. A, B, C y D forman un cuadrado (normalmente la cara inferior del cubo) y E, F, G y H forman otro cuadrado. E está sobre A, F está sobre B, G está sobre C y H está sobre D.

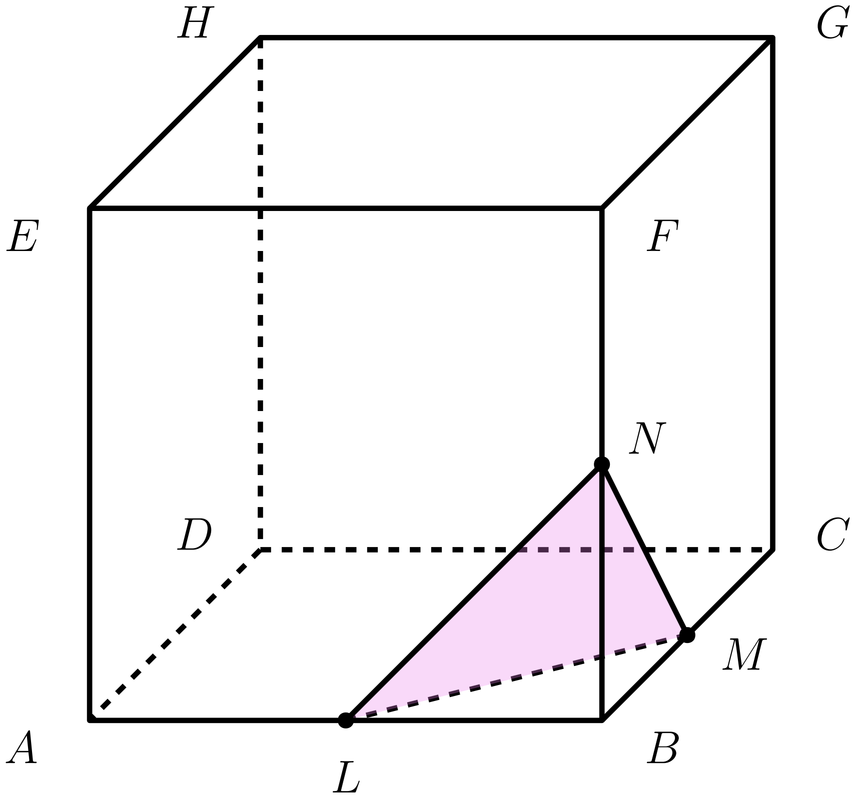


Figura 54: El cubo ABCDEFGH y la sección triangular.

Si dibujamos el problema, observamos que el plano de la sección está completamente determinado por los puntos L, M y N. La sección es el triángulo $\triangle LMN$ y el triángulo es, obviamente, **equilátero**:

$$|\overline{LM}| = |\overline{MN}| = |\overline{NL}|$$

Llamaremos l a esa longitud. Por otro lado $\overline{LM}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle LBM$. Por el teorema de Pitágoras:

$$|\overline{LM}|^2 = |\overline{LB}|^2 + |\overline{BM}|^2$$

La arista del cubo es 2 metros. Entonces:

$$|\overline{LB}| = |\overline{BM}| = \frac{|\overline{AB}|}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto:

$$|\overline{LM}|^2 = 1^2 + 1^2$$

$$|\overline{LM}| = \pm\sqrt{2}$$

Como es una longitud, debe ser positiva:

$$|\overline{LM}| = \sqrt{2}$$

El perímetro será:

$$\begin{aligned} p = |\overline{LM}| + |\overline{LB}| + |\overline{BM}| = \\ = \sqrt{2} + 1 + 1 = \\ = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Con las unidades:

$$p = (2 + \sqrt{2}) \text{ m}$$

2. ¿Cuál es el volumen de las dos partes en las que el cubo queda dividido en el ejercicio anterior?

El volumen completo del cubo es:

$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ V &= 2^3 \\ V &= 8 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

La parte inferior es una pirámide de base triangular. Su volumen es:

$$V_p = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

La altura es $|\overline{BN}|$:

$$|\overline{BN}| = \frac{|\overline{AB}|}{2} = 1 \text{ m}$$

La base es un triángulo y la fórmula para calcular el área de un triángulo es:

$$A_{\text{base}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Como:

$$\begin{aligned} \text{base}_{\text{triángulo}} = |\overline{LB}| = 1 \text{ m} \\ \text{altura}_{\text{triángulo}} = |\overline{BM}| = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

entonces:

$$A_{\text{base}} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ \text{m}^2$$

El volumen de la pirámide es, por lo tanto:

$$V_p = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{3} = \frac{1}{6}\ \text{m}^3$$

Y el de la parte superior en la que queda dividido el cubo es:

$$V_s = V - V_p =$$
$$= 8 - \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{8 \cdot 6 - 1}{6} = \frac{48 - 1}{6} =$$
$$= \frac{47}{6}\ \text{m}^3$$

4. Sea el cubo ABCDEFGH de arista 3 metros. ¿Cuál es la sección plana determinada por B, C y G? Calcula su perímetro y su área.

Si hacemos el dibujo, vemos que la sección plana coincide con una de las caras. Es decir, es el cuadrado $\square BCGF$.

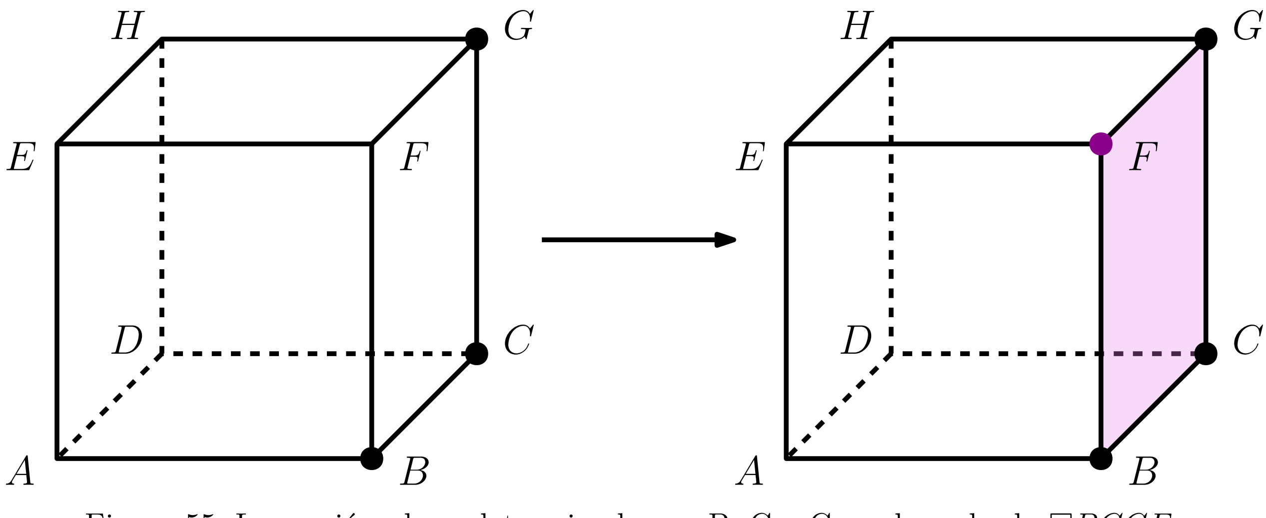


Figura 55: La sección plana determinada por B, C y G es el cuadrado $\square BCGF$.

Cada lado del cuadrado es igual a los demás:

$$|\overline{BC}| = |\overline{CG}| = |\overline{GF}| = |\overline{FB}| = 3\ \text{m}$$

Por lo tanto, su superficie es:

$$S = l^3 = 3^2 = 9\ \text{m}^2$$

y su perímetro es:

$$p = 4l = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}$$

5. Sea el cubo ABCDEFGH de arista 1 metro. Encuentra la sección plana determinada por A, F y G. Calcula su perímetro y su área.

Al dibujarlo, es obvio que la sección plana es el cuadrilátero $\square AFGD$. Y el cuadrilátero es un rectángulo.

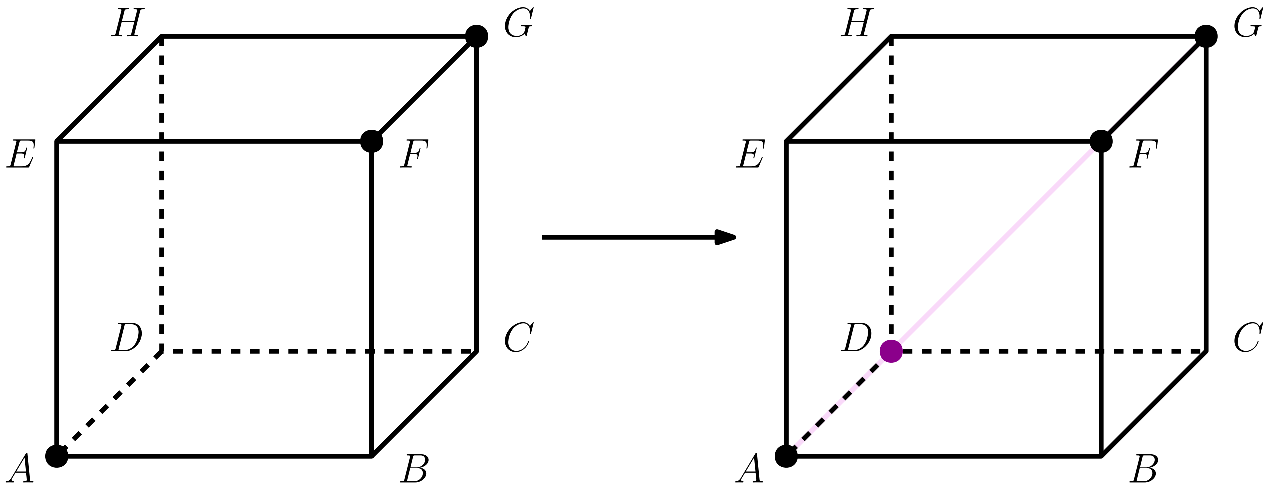


Figura 56: La sección plana es un rectángulo. Tal y como hemos dibujado el cubo, estamos viendo el rectángulo con una perspectiva que lo muestra como una línea.

$$|\overline{AF}| = |\overline{DG}|$$

Como la arista es de 1 metro:

$$|\overline{AD}| = |\overline{FG}| = 1 \text{ m}$$

Encontrar $|\overline{AF}|$ es posible si usamos el triángulo $\triangle ABF$. Por Pitágoras:

$$|\overline{AF}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BF}|^2$$
$$|\overline{AF}|^2 = 1^2 + 1^2$$
$$|\overline{AF}|^2 = 2$$
$$|\overline{AF}| = \pm\sqrt{2}$$

Como es una longitud, debe ser positiva:

$$|\overline{AF}| = \sqrt{2} \text{ m}$$

Por lo tanto, el perímetro es:

$$p = |\overline{AD}| + |\overline{FG}| + |\overline{AF}| + |\overline{DG}|$$

$$p = 1 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} =$$
$$= (2 + 2\sqrt{2}) \text{ m}$$

Su área es:

$$A = |\overline{AD}| \cdot |\overline{FG}| =$$
$$= 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ m}^2$$

6. ¿Cuál es el volumen de las dos partes en las que queda dividido el cubo del ejercicio anterior?

Por simetría, ambas partes tienen el mismo volumen:

$$V_{p1} = V_{p2}$$

Y el volumen total del cubo es la suma de los volúmenes de las partes:

$$V = V_{p1} + V_{p2}$$

Por lo que el volumen de cada parte es la mitad del volumen del cubo:

$$V_{p1} = V_{p2} = \frac{V}{2}$$

El volumen del cubo es el cubo de la arista:

$$V = a^3 =$$
$$= 1^3 = 1 \text{ m}^3$$

El de las partes es:

$$V_{p1} = V_{p2} = \frac{1}{2} \text{ m}^3$$

7. Sea un cubo ABCDEFGH de arista 3 metros. Un plano corta al cubo en:
- L = punto medio entre A y E,
- M = punto medio entre E y F,
- N = punto medio entre F y G.

Encuentra la sección plana y su perímetro.

Cuando hacemos el dibujo, podemos ver que la sección plana es un hexágono regular. Los tres vértices restantes son otros puntos medios:

$$O = \frac{G + C}{2}$$
$$P = \frac{C + D}{2}$$

$$Q = \frac{A + D}{2}$$

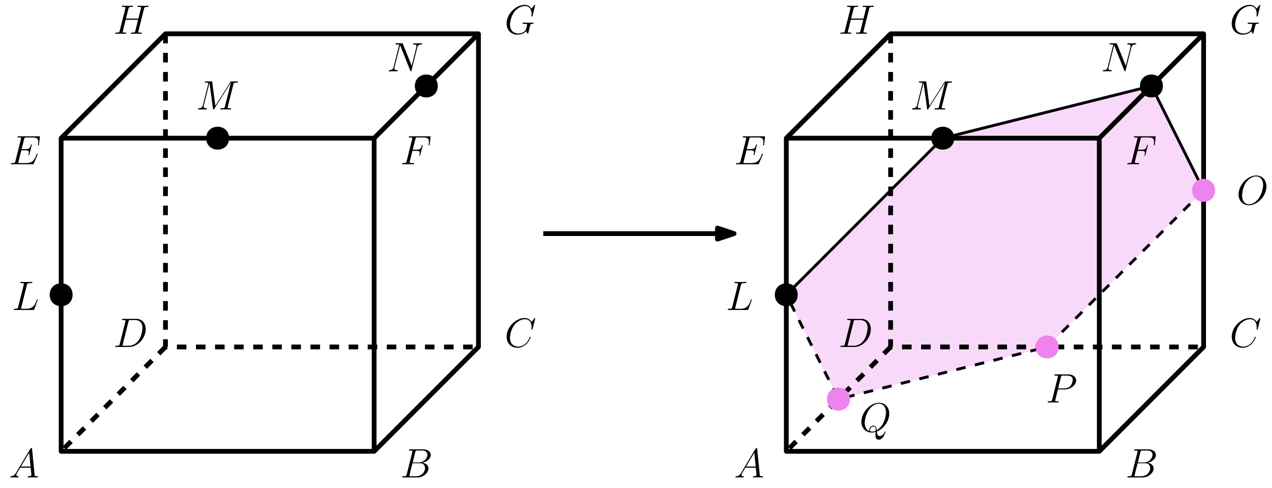


Figura 57: La sección plana es un hexágono.

Además, todos los lados del hexágono son iguales. Por consiguiente, es un **hexágono regular**.

Por el triángulo rectángulo $\triangle LME$ tenemos:

$$|\overline{LM}|^2 = |\overline{LE}|^2 + |\overline{ME}|^2$$

Pero ambos catetos son la mitad de la arista:

$$|\overline{LM}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$|\overline{LM}|^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$|\overline{LM}| = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$$

Como es una longitud:

$$|\overline{LM}| = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$|\overline{LM}| = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}$$

$$|\overline{LM}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos:

$$|\overline{LM}| = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$|\overline{LM}| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

El perímetro del hexágono es:

$$p = 6 \cdot |\overline{LM}| =$$
$$= 6 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 9\sqrt{2} \text{ m}$$

8. Calcula el volumen de n cono recto truncado si el radio superior es 3 m, el inferior es 10 m y la altura es 5 m.

Llamaremos r al radio superior, R al radio inferior y x a la altura del cono truncado[27].

Dibujamos el cono truncado para hacernos una mejor idea.

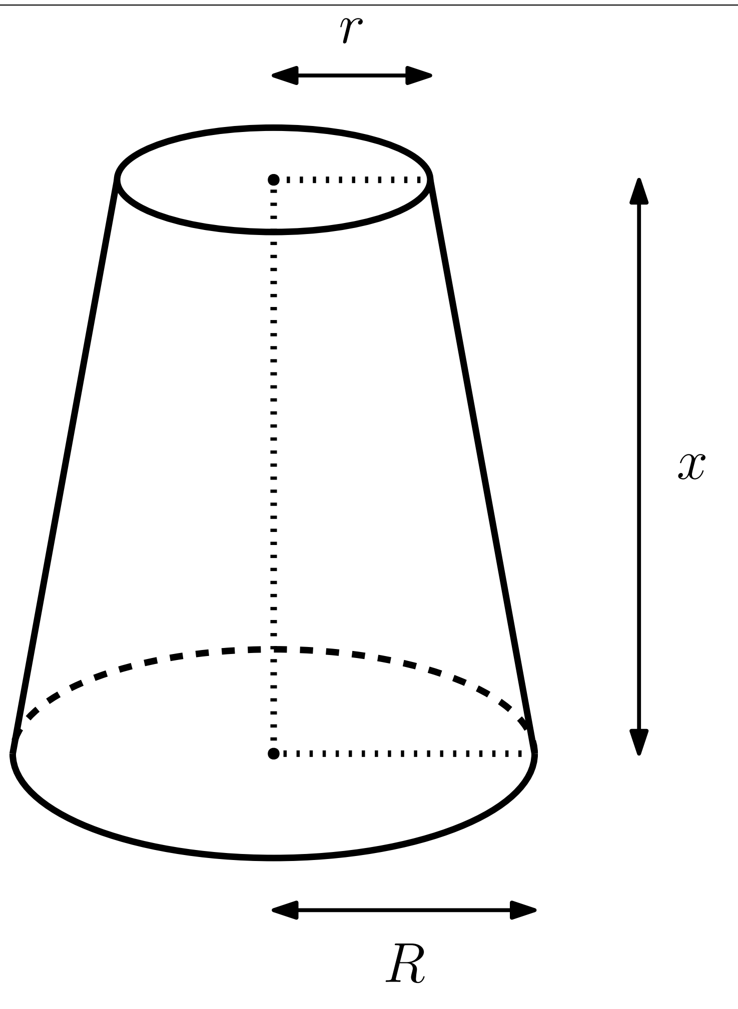


Figura 58: Un cono truncado. Con un radio superior r, un radio inferior R y una altura x.

Si completamos el cono y llamamos H a la altura del cono completo y h a la altura del pequeño cono que hemos cortado, podemos ver que hay dos triángulos que son semejantes.

Por lo tanto:

[27]Recuerda que r es *erre minúscula* y R es *erre mayúscula*. En este caso podríamos decir *erre pequeña* y *erre grande* porque r es menor que R y transmite bien la idea.

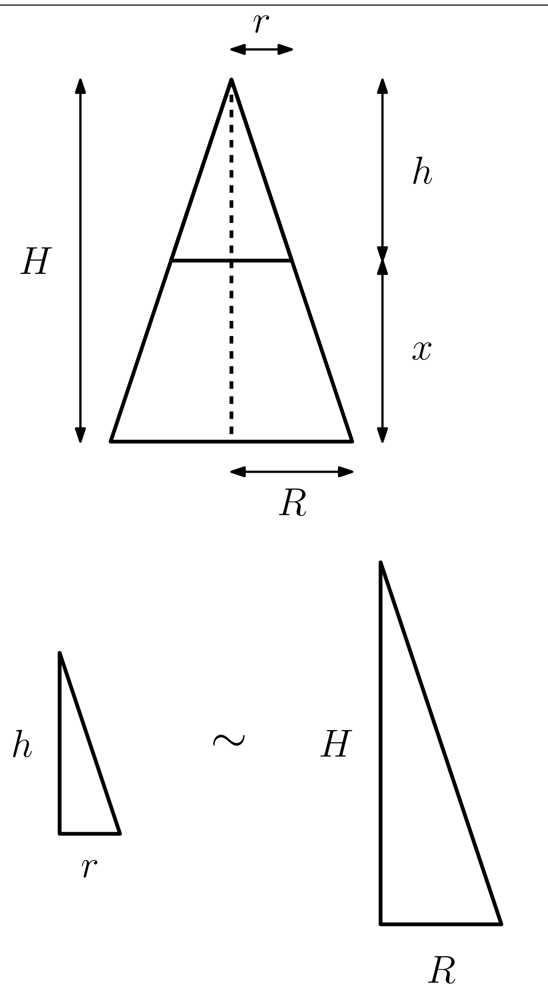


Figura 59: Existen dos triángulos que son semejantes; los conos lo son.

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R}$$

Sabemos que $H = h + x$:

$$\frac{h}{r} = \frac{h+x}{R}$$
$$h = \frac{r}{R} \cdot (h+x)$$
$$h = \frac{r}{R} \cdot h + \frac{r}{R} \cdot x$$
$$h - \frac{r}{R} \cdot h = \frac{r}{R} \cdot x$$
$$h \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{r}{R} \cdot x$$
$$h = \frac{\frac{r}{R} \cdot x}{1 - \frac{r}{R}}$$
$$h = \frac{\frac{r}{R} \cdot x}{\frac{R-r}{R}}$$
$$h = \frac{rx}{R-r}$$

El volumen del cono completo es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot \text{altura} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

El volumen del cono pequeño es:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

El volumen del cono truncado es:

$$V_t = V - V_p =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Sabemos que $H = h + x$. Por lo tanto:

$$V_t =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (h+x) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h =$$

Y sabemos que h es $h = (rx)/(R-r)$:

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \quad \frac{rx}{R-r} + x \quad - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{rx}{R-r} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \quad R^2 \cdot \quad \frac{rx + Rx - rx}{R-r} \quad - r^2 \cdot \frac{rx}{R-r} \quad =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \quad R^2 \cdot \quad \frac{Rx}{R-r} \quad - r^2 \cdot \frac{rx}{R-r}$$

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \quad \frac{R^3 x}{R-r} - \frac{r^3 x}{R-r}$$

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{x}{R-r} \cdot (R^3 - r^3)$$

Sustituyendo:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{5}{10-3} \cdot (10^3 - 3^3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{5}{7} \cdot (1000 - 27) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{5}{7} \cdot (973) =$$

$$= \frac{5 \cdot 973 \cdot \pi}{3 \cdot 7} =$$

$$= \frac{5 \cdot 139 \cdot \pi}{3} =$$

$$= \frac{695}{3} \pi \text{ m}^3$$

9. Demuestra que la fórmula:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{x}{R-r} \cdot (R^3 - r^3)$$

para el volumen de un cono truncado de radios R y r y altura x se puede escribir:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x \cdot (R^2 + r^2 + rR)$$

Solamente tenemos que demostrar que:

$$\frac{R^3 - r^3}{R-r} = R^2 + r^2 + rR$$

Y para eso debemos hacer una división de polinomios que debe ser exacta. Es decir, el resto debe ser cero.

Pero otro modo más sencillo de comprobarlo es ver que:

$$(R^2 + r^2 + rR) \cdot (R - r) = R^3 - r^3$$

$$R^2 \cdot R - R^2 \cdot r + r^2 \cdot R - r^2 \cdot r + rR \cdot R - rR \cdot r = R^3 - r^3$$

$$R^3 - R^2r + r^2R - r^3 + rR^2 - r^2R = R^3 - r^3$$
$$R^3 + r^2R - r^3 - r^2R = R^3 - r^3$$
$$R^3 - r^3 = R^3 - r^3 \quad \top$$

Lo cual es cierto. Tal y como queríamos demostrar.

$$\begin{array}{rllll|l}
 & R^3 & -r^3 & & & R \quad -r \\ \cline{6-6}
\text{-)} & R^3 & -rR^2 & & & R^2 \quad +r^2 \quad +rR \\ \cline{2-3}
 & & -r^3 & +rR^2 & & \\
\text{-)} & & -r^3 & +r^2R & & \\ \cline{3-4}
 & & & rR^2 & -r^2R & \\
\text{-)} & & & rR^2 & -r^2R & \\ \cline{4-5}
 & & & & \mathbf{0} & \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

Figura 60: El cociente de la división de $R^3 - r^3$ entre $R - r$ es $R^2 + r^2 + rR$ y el resto es cero.

10. Sea el ortoedro ABCDEFGH donde: $|\overline{AB}| = 4$ m, $|\overline{BF}| = 1$ m y $|\overline{BC}| = 2$ m. Si $L = (E + F)/2$, encuentra la sección plana dada por L, G y C. Calcula su perímetro.

Un ortoedro (= un paralelepípedo rectangular) es un poliedro en el que todas las caras son rectángulos y los ángulos entre dos caras contiguas son siempre de 90 grados sexagesimales. Si dibujamos el ortoedro, observamos que la sección es un rectángulo de vértices L, G, C y M. Donde M es el punto medio entre A y B:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Los lados $|\overline{LM}|$ y $|\overline{GC}|$ miden lo mismo:

$$|\overline{LM}| = |\overline{GC}| = 1 \text{ m}$$

La longitud de $\overline{LF}$ es:

$$|\overline{LF}| = \frac{|\overline{EF}|}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

Y la de $\overline{FG}$ es:

$$|\overline{FG}| = 2 \text{ m}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$|\overline{LG}|^2 = |\overline{LF}|^2 + |\overline{FG}|^2$$

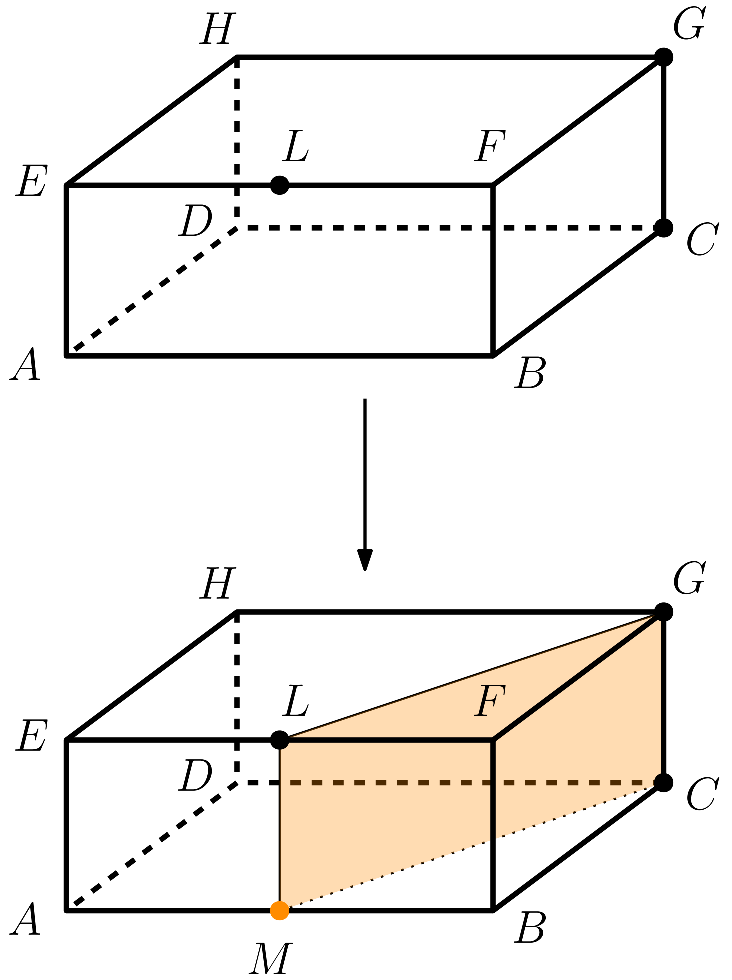


Figura 61: El ortoedro y su sección plana.

$$|\overline{LG}|^2 = 2^2 + 2^2$$
$$|\overline{LG}|^2 = 8$$
$$|\overline{LG}| = \pm\sqrt{8}$$

Como es una longitud:

$$|\overline{LG}| = \sqrt{8}$$
$$|\overline{LG}| = \sqrt{4 \cdot 2}$$
$$|\overline{LG}| = 4 \cdot \sqrt{2}$$

El perímetro es:

$$p = |\overline{LM}| + |\overline{MC}| + |\overline{CG}| + |\overline{GL}|$$

$$p = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 =$$
$$= (4 + 4\sqrt{2}) \text{ m}$$

11. Encuentra los volúmenes de las dos partes en las que queda dividido el ortoedro del ejercicio anterior.

La parte de la derecha es un **prisma de base triangular** y sus vértices son M, B, C, L, F y G.

La base es el triángulo $\triangle MBC$ cuya área es:

$$A_{\text{base}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ m}^2$$

El volumen del prisma es:

$$V_{p1} = \frac{A_{\text{base} \cdot \text{altura}}}{3} =$$
$$= \frac{2\sqrt{2} \cdot 1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$$

El volumen del ortoedro completo es:

$$V_{\text{ortoedro}} = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \text{ m}^3$$

Por lo el volumen de la otra parte del ortoedro es:

$$V_{p2} = V - V_{p1} =$$
$$= 8 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{24 - 2\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$$

12. En una pirámide recta truncada de base cuadrada, la base inferior tiene un lado de 10 m y la base superior de 3 m. Si su altura es 7 m, calcula su volumen.

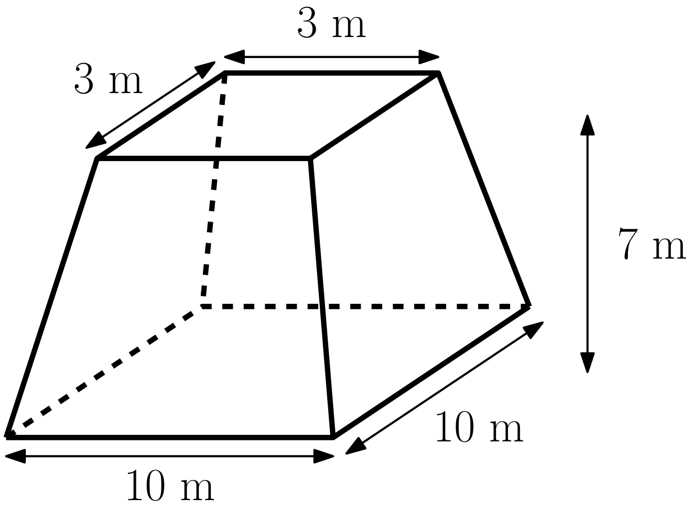


Figura 62: Pirámide truncada de base cuadrada.

Por semejanza se llega a:

$$\frac{h}{l/2} = \frac{H}{L/2}$$

$$h = l \cdot \frac{H}{L}$$

Y como $H = h + x$:

$$h = \frac{l}{L} \cdot (h + x)$$

$$h - \frac{l}{L} = \frac{l}{L} \cdot x$$

$$h \cdot \quad 1 - \frac{l}{L} \quad = \frac{l}{L} \cdot x$$

$$h = \frac{\frac{l}{L}x}{1 - \frac{l}{L}}$$

$$h = \frac{\frac{lx}{L}}{\frac{L-l}{L}}$$

$$h = \frac{lx}{L - l}$$

Es decir:

$$h = \frac{3 \cdot 7}{10 - 3} = \frac{3 \cdot 7}{7} = 3 \text{ m}$$

$$H = h + x = 3 + 7 = 10 \text{ m}$$

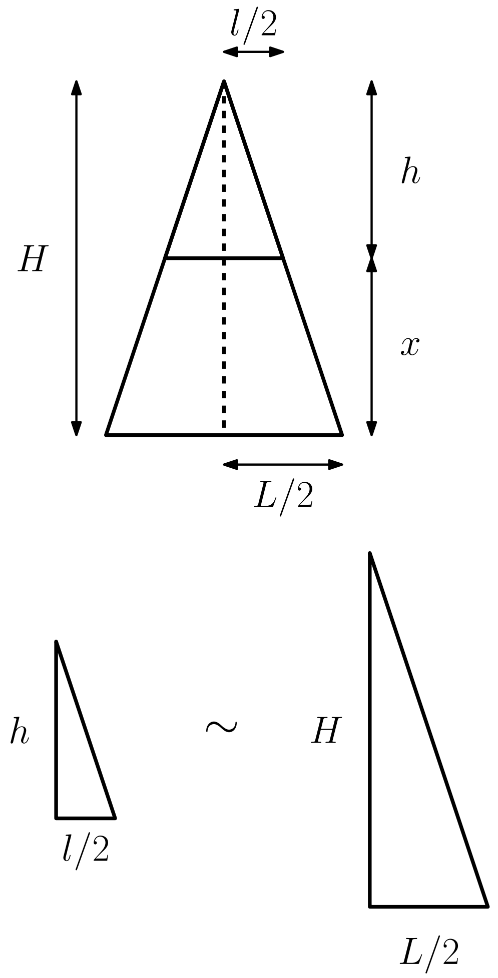


Figura 63: La semejanza nos permite encontrar relaciones entre las alturas de los conos que *crean* al cono truncado.

$$V_{\text{grande}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3} = \frac{L^2 \cdot H}{3} =$$
$$= \frac{10^2 \cdot 10}{3} = \frac{100}{3}\ \text{m}^3$$

$$V_{\text{pequeño}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot l}{3} =$$
$$= \frac{3^2 \cdot 3}{3} = 3^2 = 9\ \text{m}^3$$

El volumen de la pirámide truncada es:

$$V = V_{\text{grande}} - V_{\text{pequeño}} = \frac{1000}{3} - 9 =$$
$$= \frac{1000}{3} - \frac{27}{3} =$$
$$= \frac{973}{3}\ \text{m}^3$$

13. ¿Qué significa la palabra *“truncado”*?

El infinitivo *“truncar”* significa *“cortar”*.

Por lo tanto, *“truncada”* es *“cortada”* y *“truncado”* es *“cortado”*.

El sustantivo *“truncamiento”* designa a la acción de cortar. Y, como sabes es un modo de aproximar expresiones decimales de números.

14. ¿Cuál es la sección plana que se obtiene al cortar un cilindro recto con un plano cuya normal forma un ángulo pequeño respecto al eje del cilindro?

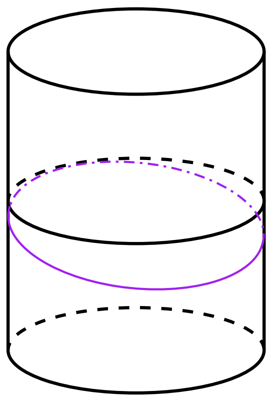


Figura 64: La sección plana es una elipse.

La sección plana es una elipse.

¿Hay algún modo de demostrarlo analíticamente? (Es decir, con ecuaciones.) Sí, pero no corresponde a este tema.

Trigonometría

Cualquier polígono en el plano se puede separar en varios triángulos. Y cualquier triángulo se puede separar en dos triángulos rectángulos.

Por esta razón, los triángulos juegan un papel especial dentro de la geometría del plano. Y la trigonometría no solamente incluye la relación entre los tres lados de un triángulo rectángulo (el teorema de Pitágoras) y la relación entre los tres ángulos de cualquier triángulo (que la suma es un ángulo llano, es decir, de 180°), sino que incluye las relaciones entre ángulos y lados a través de las **razones trigonométricas**.

En trigonometría hay decenas de fórmulas. Sin embargo, basta conocer unas pocas y algo de trigonometría básica para poder hacer casi cualquier problema.

Elige bien qué herramientas vas a meter en tu caja de herramientas. Y aprende a usar muy bien las herramientas que elijas.

Por ejemplo, es más práctico recordar la fórmula del seno de una suma y saber usarla muy bien que recordar la fórmula del seno de una suma, la del seno de una diferencia y la del seno del ángulo doble. Porque las dos últimas se pueden obtener rápida y fácilmente a partir de la primera si se conoce bien.

Triángulos rectángulos

1. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 3 metros y el otro cateto mide 4 metros. Encuentra:

a) Las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.
b) Los ángulos agudos.

Como es un triángulo rectángulo y tenemos dos de los catetos (a y b), podemos encontrar la hipotenusa (c) con el **teorema de Pitágoras**:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 3^2 + 4^2$$
$$c^2 = 9 + 16$$
$$c^2 = 25$$
$$c = \pm\sqrt{25}$$

Como c es una longitud, no puede ser negativa. Tiene que ser positiva:

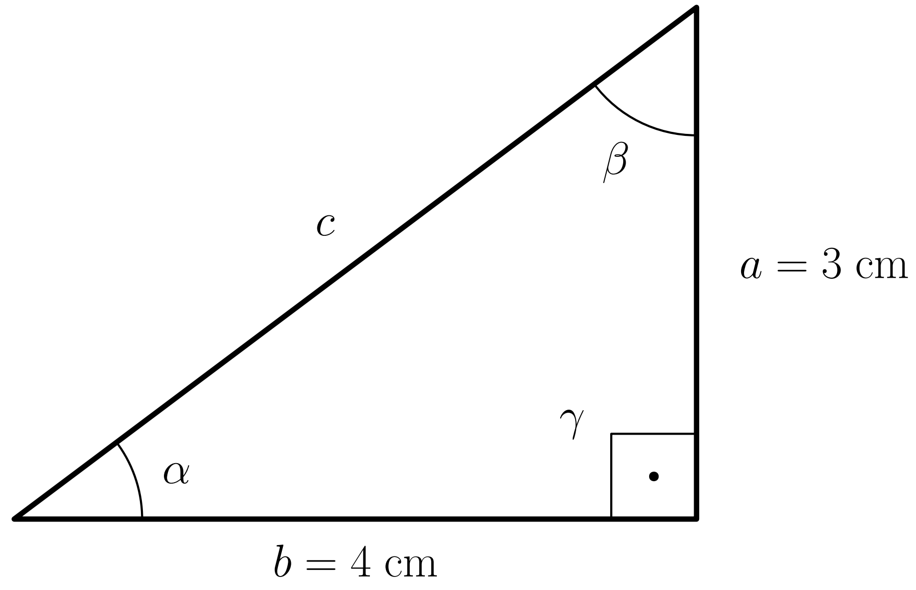


Figura 65: Un triángulo de catetos 3 y 4 centímetros.

$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5 \text{ m}$$

Ahora podemos contestar a las preguntas:

a) Las razones trigonométricas más importantes son el seno, el coseno y la tangente. Sus recíprocas son, respectivamente la cosecante, la secante y la cotangente.

En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo es el cateto opuesto a ese ángulo entre la hipotenusa. El cateto opuesto a α es a:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

El coseno de un ángulo es el cateto contiguo (= adyacente) a ese ángulo entre la hipotenusa. El cateto contiguo a α es b:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$$

La tangente de un ángulo es el cateto opuesto entre el cateto contiguo:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

o, equivalentemente, el seno entre el coseno:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

Encontrar las recíprocas es trivial. Especialmente porque hemos dejado los resultados en forma de fracción y no en forma decimal:

$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$
$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$$
$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

Las razones trigonométricas del ángulo β están relacionadas con las de α. Porque el cateto opuesto a α es el cateto contiguo a β y el cateto contiguo a α es el opuesto a β. Por lo tanto:

$$\sin(\beta) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\beta) = \sin(\alpha)$$
$$\text{tg}(\beta) = \text{cotg}(\alpha)$$
$$\text{cosec}(\beta) = \sec(\alpha)$$
$$\sec(\beta) = \text{cosec}(\alpha)$$

b) Para encontrar los ángulos, podemos escoger el valor de una de las razones trigonométricas. Por ejemplo, el seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Y hacer su inversa. Es decir, el arcoseno:

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

El arcoseno se escribe también como:

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{3}{5}$$
$$\alpha = 36.86989765°$$

Para encontrar el ángulo β, como la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es un ángulo llano:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta = 180° - \alpha - \beta$$
$$\beta = 53.13010235°$$

Porque, evidentemente, el ángulo γ es de 90°.

2. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 8 metros y la hipotenusa mide 17 metros. Encuentra:

a) Las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.
b) Los ángulos agudos.

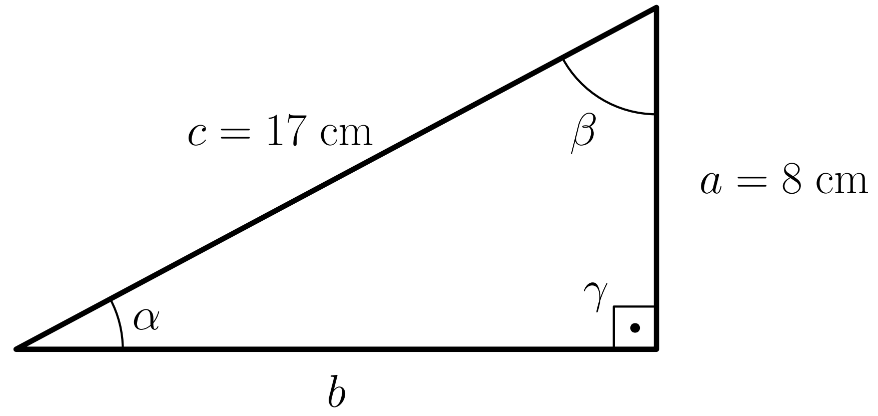


Figura 66: Un triángulo de cateto 8 e hipotenusa 17 centímetros.

Como es un triángulo rectángulo y tenemos un cateto (a) y la hipotenusa (c), podemos encontrar el otro cateto (b) con el **teorema de Pitágoras**:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 289 - 64$$
$$b^2 = 225$$
$$b = \pm\sqrt{225}$$

Como es una longitud, debe ser positiva:

$$b = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

a) Las razones de α son:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \\ = \frac{a}{c} = \frac{8}{17}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto contiguo a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \\ = \frac{b}{c} = \frac{15}{17}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto contiguo a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \\ = \frac{a}{b} = \frac{8}{15}$$

$$\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{17}{8}$$
$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{17}{15}$$
$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{15}{8}$$

Y, como es un triángulo rectángulo, las de β son:

$$\sin(\beta) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\beta) = \sin(\alpha)$$
$$\text{tg}(\beta) = \text{cotg}(\alpha)$$
$$\text{cosec}(\beta) = \sec(\alpha)$$
$$\sec(\beta) = \text{cosec}(\alpha)$$

b) En cuanto a los ángulos, podemos encontrar el ángulo α usando la inversa del seno. Es decir, el arcoseno:

$$\sin(\alpha) = \frac{8}{17}$$

Y hacer su inversa. Es decir, el arcoseno:

$$\alpha = \arcsin\ \frac{8}{17}\ =$$
$$= \sin^{-1}\ \frac{8}{17}\ =$$
$$= 28.07248694°$$

Podemos encontrar el otro ángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta = 61.92751306°$$

3. Resuelve el triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide $a = 40$ m y su ángulo opuesto es $\alpha = 30°$.

Resolver un triángulo significa *encontrar las medidas de todos sus lados y sus ángulos.*

En los ejemplos anteriores ya hemos resuelto triángulos rectángulos. Pero en esos casos conocíamos dos lados y solamente un ángulo (el ángulo recto). Aquí conocemos dos ángulos (el ángulo α y el ángulo recto) y un lado.

En un problema de estas características (un problema geométrico), muchas veces es aconsejable dibujar el triángulo. Y etiquetar los lados, ángulos, puntos... que necesitemos. El dibujo es orientativo porque no medimos realmente los lados y los ángulos.

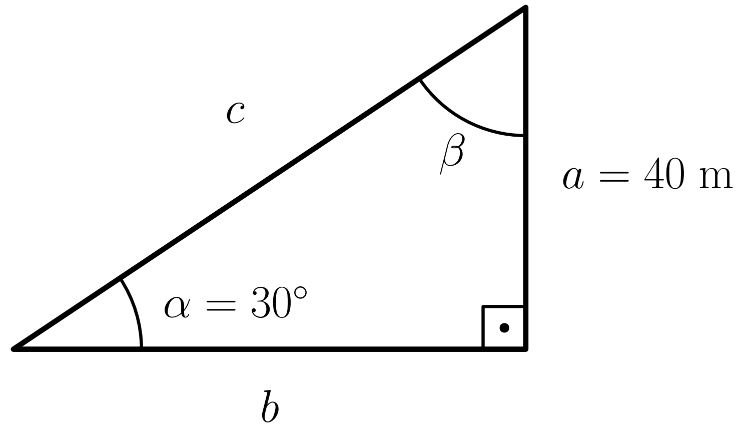


Figura 67: Triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide $a = 40$ m y su ángulo opuesto es $\alpha = 30°$.

En cualquier triángulo (sea rectángulo o no), la suma de todos sus ángulos es 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

El ángulo γ es de 90°:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Por lo tanto:

$$\beta = 90° - \alpha$$
$$\beta = 90° - 30°$$
$$\beta = 60°$$

El seno de un ángulo (α) es el cateto opuesto (a) partido por la hipotenusa (c):

$$\sin(30°) = \frac{a}{c}$$
$$c = \frac{a}{\sin(30°)}$$
$$c = \frac{40}{\sin(30°)}$$
$$c = \frac{40}{1/2}$$
$$c = 80 \text{ m}$$

Ahora podemos encontrar b de varias maneras:

- por el teorema de Pitágoras, a partir de los otros lados:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 80^2 - 40^2$$
$$b^2 = 4800$$

$$b = \pm\sqrt{4800}$$

De las dos soluciones, solamente la positiva tiene sentido aquí:

$$b = \sqrt{4800}$$
$$b = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

- por la tangente, a partir del cateto conocido a y del ángulo conocido α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{40}{b}$$
$$b = \frac{40}{\operatorname{tg}30^\circ}$$
$$b = \frac{40}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}$$
$$b = \frac{40}{\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}}$$
$$b = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

- por el coseno, a partir del ángulo y la hipotenusa

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$b = c\cdot\cos\alpha$$
$$b = 80\cdot\cos 30^\circ$$
$$b = 80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$b = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

4. Resuelve el triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide 40 m y uno de los ángulos agudos es $\alpha = 60^\circ$.

Sabemos:

$$\begin{cases} c = 40 \text{ m} \\ \alpha = 60^\circ \\ \gamma = 90^\circ \end{cases}$$

Y desconocemos β, b y a. Para resolver el triángulo, debemos encontrar ese ángulo y esos dos lados (que son los catetos).

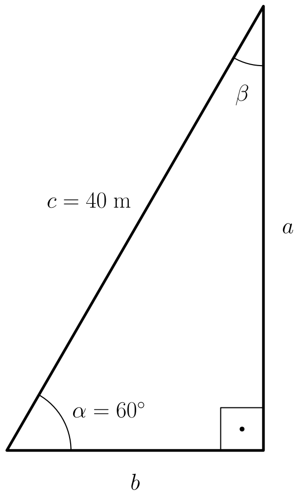


Figura 68: Triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide 40 m y uno de los ángulos agudos es $\alpha = 60°$.

El ángulo β es fácil de encontrar; sabemos que en cualquier triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\beta = 30°$$

Ahora podemos usar las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\sin(60°) = \frac{a}{40}$$

$$40 \cdot \sin(60°) = a$$

$$a = 40 \cdot \sin(60°)$$

El valor exacto del seno de 60 grados sexagesimales es un valor bien conocido:

$$a = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

Su aproximación decimal es:

$$a \approx 34.64101615 \text{ m}$$

A partir de aquí, podemos encontrar b de dos maneras:

- con el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 40^2 - \left(20 \cdot \sqrt{3}\right)^2$$

$$b^2 = 1600 - 1200$$

$$b^2 = 400$$

$$b = \pm\sqrt{400}$$

Como tiene que ser positivo:

$$b = 20 \text{ m}$$

- con el coseno de α

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(60°) = \frac{b}{40}$$

$$40 \cdot \cos(60°) = b$$

$$b = 40 \cdot \cos(60°)$$

El valor exacto del coseno de 60 grados sexagesimales es 1/2:

$$b = 20 \text{ m}$$

Ya hemos completado la resolución del triángulo rectángulo.

5. Resuelve el triángulo rectángulo: $a = 10$ cm, $\alpha = 18°40'$, $\gamma = 90°$.

El ángulo beta (β) se puede obtener porque la suma de los ángulos es 180 grados:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$18°40' + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 71°20'$$

La hipotenusa c se puede encontrar a partir del seno del ángulo alfa (α):

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\sin(18°40') = \frac{10}{c}$$

$$c = \frac{10}{\sin(18°40')}$$

$$c \approx 31.24 \text{ cm}$$

El lado que queda se puede encontrar usando el teorema de Pitágoras[28]:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

[28]Aunque no es el único modo.

$$(31.24)^2 = (10)^2 + b^2$$

$$b^2 = (31.24)^2 - (10)^2$$

$$b = \sqrt{(31.24)^2 - (10)^2}$$

$$b \approx 29.6 \text{ cm}$$

6. Resuelve el triángulo rectángulo: $a = 15$, $b = 18$, $\gamma = 90°$.

El lado que falta es la hipotenusa. Podemos usar el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 15^2 + 18^2$$

$$c^2 = 549$$

$$c = \sqrt{549}$$

$$c \approx 23.43$$

Para encontrar el ángulo alfa (α) podemos usar el seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{15}{23.43}$$

$$\sin(\alpha) \approx 0.64$$

Para despejar el ángulo, es necesario usar el *arcoseno* que se escribe como arcsin, arc sen, $\sin^{-1}$ o sen^{-1}:

$$\alpha = \sin^{-1}(0.64) \approx 39.81°$$

$$\alpha = 39° \; 48' \; 20.06''$$

Para obtener el ángulo beta (β), usamos que la suma de todos es 180 grados:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\ldots$$

$$\beta \approx 50.19°$$

7. Resuelve el triángulo rectángulo: $c = 8.9$ m, $a = 8.4$ m, $\gamma = 90°$.

Podemos usar el teorema de Pitágoras para encontrar el lado que falta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(8.9)^2 = (8.4)^2 + b^2$$

$$b^2 = (8.9)^2 - (8.4)^2$$

$$b = \sqrt{(8.9)^2 - (8.4)^2}$$

$$b \approx 2.94 \text{ m}$$

Y ahora la definición del seno para encontrar el ángulo alfa:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{8.4}{8.9}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \quad \frac{8.4}{8.9}$$

$$\alpha \approx 70.70°$$

Y ahora, encontrar el ángulo que falta es trivial[29]:

$$\beta \approx 19.30°$$

[29] Los matemáticos usan mucho esa palabra cuando algo les parece muy sencillo.

Razones de ángulos cualesquiera

1. El ángulo β está en el primer cuadrante. Su coseno es 3/7. Encuentra sus demás razones trigonométricas.

$$\cos\beta = \frac{3}{7}$$

El teorema fundamental de la trigonometría dice:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

sustituyendo:

$$\sin^2\beta + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta + \frac{9}{49} = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{9}{49}$$

$$\sin^2\beta = \frac{49}{49} - \frac{9}{49}$$

$$\sin^2\beta = \frac{40}{49}$$

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{40}{49}}$$

$$\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{40}}{7}$$

$$\sin\beta = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Como el ángulo está en el primer cuadrante, todas sus razones trigonométricas son positivas:

$$\boxed{\sin\beta = \frac{2\sqrt{10}}{7}}$$

Para calcular la tangente:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{10}}{3}}$$

La cotangente es la recíproca de la tangente:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{\frac{2\sqrt{10}}{3}}$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

Si racionalizamos:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{3}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}\beta = \frac{3\cdot\sqrt{10}}{20}}$$

La secante es la recíproca del coseno:

$$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$\sec\beta = \frac{1}{3/7}$$

$$\boxed{\sec\beta = \frac{7}{3}}$$

La cosecante es la recíproca del seno:

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\beta}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\frac{2\sqrt{10}}{7}}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{7}{2\sqrt{10}}$$

Racionalizamos:

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{7}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec}\beta = \frac{7\sqrt{10}}{20}}$$

2. El ángulo α está en el segundo cuadrante. Su seno es $1/7$. Encuentra sus demás razones trigonométricas.

En el segundo cuadrante, el seno es positivo, el coseno es negativo y, por lo tanto, la tangente es negativa.

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{49} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{49}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{49}{49} - \frac{1}{49}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{48}{49}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{48}{49}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{48}}{7}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 12}}{7}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{12}}{7}$$

Como, en el segundo cuadrante, el coseno es negativo:

$$\boxed{\cos \alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{12}}{7}}$$

Por la definición de la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1/7}{-\frac{2 \cdot \sqrt{12}}{7}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{12}}$$

Si racionalizamos:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{12}}{24}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{24}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{24}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

La cotangente es la recíproca de la tangente:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = -2\sqrt{3}}$$

La cosecante es la recíproca del seno:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{1/7}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = 7}$$

La secante es la recíproca del coseno:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{-\frac{2\cdot\sqrt{12}}{7}}$$

$$\sec\alpha = -\frac{7}{2\cdot\sqrt{12}}$$

$$\boxed{\sec\alpha = -\frac{7\sqrt{12}}{24}}$$

Identidades trigonométricas

1. Encuentra una fórmula para $\sin(3x)$ en función del seno y el coseno de x.

Podemos separar el argumento del seno en una suma:

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) =$$

El seno de una suma es el seno del primer ángulo por el coseno del segundo más el coseno del primero por el seno del segundo:

$$= \sin(2x)\cdot\cos(x) + \cos(2x)\cdot\sin(x) =$$

Podemos escribir $2x$ como $x + x$:

$$= \sin(x + x) \cdot \cos(x) + \cos(x + x) \cdot \sin(x) =$$

Aplicamos nuevamente la fórmula del seno de una suma:

$$= (\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x)) \cdot \cos(x)+$$
$$+ \cos(x + x) \cdot \sin(x) =$$

Realizamos algunas simplificaciones:

$$= (2\sin(x) \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) + \cos(x + x) \cdot \sin(x) =$$
$$= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + \cos(x + x) \cdot \sin(x) =$$

El coseno de una suma es el producto de los cosenos menos el producto de los senos:

$$= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x))\cdot$$
$$\cdot \sin(x) =$$
$$= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) =$$
$$= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + \sin(x) \cdot \cos^2(x) - \sin^3(x) =$$
$$= 3\sin(x) \cdot \cos^2(x) - \sin^3(x) =$$

Existe la posibilidad de sustituir el cuadrado del coseno usando el teorema fundamental de la trigonometría:

$$= 3\sin(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) =$$
$$= 3\sin(x) - 3\sin^3(x) - \sin^3(x) =$$
$$= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

2. Encuentra una fórmula para $\cos(3x)$ en función del seno y el coseno de x.

Podemos separar el argumento del coseno en una suma:

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) =$$

El coseno de una suma es el producto de los cosenos menos el producto de los senos:

$$= \cos(2x) \cdot \cos(x) - \sin(2x) \cdot \sin(x) =$$

Podemos escribir $2x$ como $x + x$:

$$= \cos(x + x) \cdot \cos(x) - \sin(x + x) \cdot \sin(x) =$$

Usamos otra vez la fórmula del coseno de una suma:

$$= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)) \cdot \cos(x) +$$
$$- \sin(x + x) \cdot \sin(x) =$$
$$= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x + x) \cdot \sin(x) =$$

Usamos la fórmula del seno de una suma:

$$= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) +$$
$$-(\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x)) \cdot \sin(x) =$$
$$= \cos^3(x) - \sin^2(x) \cdot \cos(x) - (2\sin(x) \cdot \cos(x)) \cdot \sin(x) =$$
$$= \cos^3(x) - \sin^2(x) \cdot \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) =$$

Con la fórmula fundamental de la trigonometría, podemos sustituir el seno:

$$= \cos^3(x) - (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) +$$
$$-2(1 - \cos^2(x))\cos(x) =$$
$$= \cos^3(x) - 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) =$$
$$= \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x) =$$
$$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

3. Demuestra la identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sin(2x)}{1 - \cos(2x)}$$

Para demostrar la identidad trigonométrica, transformaremos el lado derecho hasta convertirlo en el lado izquierdo.

$$\frac{\sin(2x)}{1 - \cos(2x)} =$$

Como $2x = x + x$:

$$= \frac{\sin(x + x)}{1 - \cos(x + x)} =$$

Usamos la fórmula del seno de una suma:

$$= \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)}{1 - \cos(x + x)} =$$
$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1 - \cos(x + x)} =$$

Usamos la fórmula del coseno de una suma:

$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-(\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x))} =$$
$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-(\cos^2(x)-\sin^2(x))} =$$
$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\cos^2(x)+\sin^2(x)} =$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+\sin^2(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\sin^2(x)} =$$
$$= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} =$$
$$= \frac{1}{\tan(x)}$$

Quod erat demonstrandum.

4. Demuestra la identidad trigonométrica:

$$\sin(2x)\cdot(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x)$$

Empezamos en la identidad:

$$\sin(2x)\cdot(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x)$$

Sabemos que $2x = x + x$:

$$\sin(x+x)\cdot(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x)$$

Por la fórmula del seno de una suma:

$$(\sin(x)\cdot\cos(x)+\cos(x)\cdot\sin(x))\cdot(1+\tan^2(x)) =$$
$$= 2\tan(x)$$
$$2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x)$$

La tangente es el seno partido el coseno:

$$2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\left(1+\quad\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\quad^2\right) = 2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\quad\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\quad = 2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\quad\frac{1}{\cos^2(x)}\quad=2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$2\cdot\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)}=2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\quad\top$$

Es una tautología. Por lo tanto, la identidad es cierta para cualquier valor real de x.

5. Demuestra la identidad trigonométrica:

$$\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)-1+\cos(x)}$$

Vamos a trabajar con la identidad como su fuese una ecuación. Modificaremos ambos lados. Empezamos por pasar los denominadores (que están dividiendo) a los lados contrarios (donde pasan multiplicando):

$$(1+\sin(x))\cdot(\sin(x)-1+\cos(x))=$$
$$=\cos(x)\cdot(1+\sin(x)-\cos(x))$$
$$(1+\sin(x))\cdot(\sin(x)-1+\cos(x))=$$
$$=\cos(x)+\cos(x)\sin(x)-\cos^2(x)$$
$$\sin(x)-1+\cos(x)+\sin^2(x)-\sin(x)+\sin(x)\cos(x)=$$
$$=\cos(x)+\cos(x)\sin(x)-\cos^2(x)$$
$$-1+\cos(x)+\sin^2(x)+\sin(x)\cos(x)=$$
$$=\cos(x)+\cos(x)\sin(x)-\cos^2(x)$$
$$-1+\sin^2(x)+\sin(x)\cos(x)=\cos(x)\sin(x)-\cos^2(x)$$
$$-1+\sin^2(x)=-\cos^2(x)$$
$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Que es el teorema fundamental de la trigonometría, que sabemos que es cierto. Por lo que hemos demostrado la igualdad.

6. Demuestra que en un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera de lados a, b, c y ángulos α, β y γ se cumple:

$$\frac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)}{\sin(\alpha)-\sin(\beta)}=\frac{a+b}{a-b}$$

Tenemos que observar que aparecen dos senos y sus lados correspondientes opuestos. Eso nos sugiere usar el teorema del seno para la demostración; en este teorema aparecen precisamente los senos y sus lados opuestos.

Por el teorema del seno:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

que también podemos escribir:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Si despejamos el seno de beta:

$$\sin(\beta) = \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{a}$$

Podemos transformar el lado izquierdo de la identidad que pretendemos demostrar:

$$\frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\sin(\alpha) - \sin(\beta)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{a}}{\sin(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \frac{b}{a}} =$$

Podemos sacar el seno de alfa como factor común tanto arriba como abajo:

$$= \frac{\sin(\alpha) \cdot \ \ 1 + \frac{b}{a}}{\sin(\alpha) \cdot \ \ 1 - \frac{b}{a}} =$$

Los senos se cancelan:

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{a} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{a}} =$$

$$= \frac{a+b}{a-b}$$

$$\square$$

7. Demuestra:

$$\sin(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\ \ \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\ \ \frac{x}{2}}$$

En la igualdad:

$$\sin(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\ \ \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\ \ \frac{x}{2}}$$

como $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$:

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Por comodidad, cambiaremos de variable:

$$x\to y=\frac{x}{2}$$

y tenemos:

$$\sin(y+y)=\frac{2\operatorname{tg}(y)}{1+\operatorname{tg}^2(y)}$$

Por la fórmula del seno de una suma:

$$\sin(y)\cdot\cos(y)+\cos(y)\cdot\sin(y)=\frac{2\operatorname{tg}(y)}{1+\operatorname{tg}^2(y)}$$
$$2\cdot\sin(y)\cdot\cos(y)=\frac{2\operatorname{tg}(y)}{1+\operatorname{tg}^2(y)}$$
$$\sin(y)\cdot\cos(y)=\frac{\operatorname{tg}(y)}{1+\operatorname{tg}^2(y)}$$
$$\sin(y)\cdot\cos(y)\cdot(1+\operatorname{tg}^2(y))=\operatorname{tg}(y)$$
$$\sin(y)\cdot\cos(y)\cdot\left(1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}\right)=\operatorname{tg}(y)$$
$$\sin(y)\cdot\cos(y)\cdot\frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)}=\operatorname{tg}(y)$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin(y)\cdot\cos(y)\cdot\frac{1}{\cos^2(y)}=\operatorname{tg}(y)$$
$$\frac{\sin(y)\cdot\cos(y)}{\cos^2(y)}=\operatorname{tg}(y)$$
$$\frac{\sin(y)}{\cos(y)}=\operatorname{tg}(y)$$

$\square$

8. Demuestra:

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$$

Vamos a transformar el lado izquierdo en el lado derecho.

Sabemos que la tangente es el seno partido el coseno:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \\ &= \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \end{aligned}$$

Por las fórmulas del seno y el coseno de una suma:

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)+\cos(x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\sin(x)} = \\ &= \frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \end{aligned}$$

Si dividimos el numerador y el denominador entre el cuadrado del coseno:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \\ &= \frac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1-\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \\ &= \frac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1-{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}^2} = \end{aligned}$$

Por la definición de la tangente:

$$= \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Q.E.D.

9. Demuestra:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

donde $\sec x$ es la *secante* de x. Es decir:

$$\sec x \equiv \frac{1}{\cos x}$$

Modo 1

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

es un modo abreviado de escribir:

$$(\operatorname{tg} x)^2 + 1 = (\sec x)^2$$

La tangente es el seno partido el coseno:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = (\sec x)^2$$

La secante es la recíproca del coseno:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Si multiplicamos los dos lados por el cuadrado del coseno:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

que es el teorema fundamental de la trigonometría, que es cierto.

Como queríamos demostrar.

Modo 2

Sabemos que el teorema fundamental de la trigonometría es:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Si dividimos entre el cuadrado del coseno:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

Dentro del primer par de paréntesis tenemos la tangente de x y, dentro del segundo, está la secante de x:

$$(\operatorname{tg} x)^2 + 1 = (\sec x)^2$$
$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Q.E.D.

10. Demuestra que:

$$2 \sin x \cos x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$$

Elevamos la expresión de la derecha entre paréntesis:

$$2\sin x\cos x + 1 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2\sin x\cos x$$
$$2\sin x\cos x + 1 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$$
$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Que es el teorema fundamental de la trigonometría, que sabemos que es correcto. Por lo que hemos demostrado que la identidad es cierta.

11. Expresa el seno de la suma de tres ángulos en función de las razones trigonométricas de esos ángulos.

El enunciado nos pide escribir:

$$\sin(x + y + z) =$$

usando las razones trigonométricas de x, y y z. Podemos separar el argumento del seno en dos partes:

$$= \sin(x + (y + z)) =$$

Si usamos el seno de la suma de dos ángulos:

$$= \sin(x) \cdot \cos(y + z) + \cos(x) \cdot \sin(y + z) =$$

Ahora podemos usar el coseno de la suma de dos ángulos:

$$= \sin(x) \cdot (\cos(y) \cdot \cos(z) - \sin(y) \cdot \sin(z)) +$$
$$+ \cos(x) \cdot \sin(y + z) =$$

Y el seno de la suma de dos ángulos:

$$= \sin(x) \cdot (\cos(y) \cdot \cos(z) - \sin(y) \cdot \sin(z)) +$$
$$+ \cos(x) \cdot (\sin(y) \cdot \cos(z) + \cos(y) \cdot \sin(z)) =$$

Eliminando los paréntesis:

$$= \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) - \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) +$$
$$+ \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z) + \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(z)$$

12. Demuestra la fórmula:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Encuentra una fórmula similar para el seno del ángulo mitad.

En la fórmula aparece un coseno. Vamos a partir de la siguiente expresión que contiene cosenos, x y la mitad de x:

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

Usamos la fórmula del coseno de una suma:

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$
$$\cos x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x + 1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}$$
$$\square$$

Como queríamos demostrar.

Si en la demostración anterior, a partir de este punto:

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

usamos el teorema fundamental de la trigonometría para sustituir el coseno:

$$\cos x = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$$
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Que es la expresión que se pide.

13. Simplifica la expresión:

$$\operatorname{sen}(45^\circ + x) + \cos(30^\circ + x)$$

Hay varios modos de hacer esto. Pero usaremos las fórmulas del seno de una suma y del coseno de una suma:

- El seno de una suma es el producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo más el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

- El coseno de una suma es el producto de los cosenos menos el producto de los senos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Por lo tanto:

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}(45^\circ + x) + \cos(30^\circ + x) = \\ = \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos x + \cos 45^\circ \cdot \sin x + \\ +(\cos 30^\circ \cdot \cos x - \sin 30^\circ \cdot \sin x) = \\ = \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos x + \cos 45^\circ \cdot \sin x + \\ + \cos 30^\circ \cdot \cos x - \sin 30^\circ \cdot \sin x =\end{gathered}$$

Conocemos las razones trigonométricas de 30 y 45 grados:

$$\begin{gathered}= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x = \\ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot \sin x\end{gathered}$$

14. Demuestra:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Podemos convertir $2x$ en $x + x$:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) =$$

Podemos usar la fórmula del coseno de una suma:

$$\begin{gathered}= \cos(x) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = \\ = (\cos(x))^2 - (\operatorname{sen}(x))^2 = \\ = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) =\end{gathered}$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1)$:

$$\begin{gathered}= 1 - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \\ = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)\end{gathered}$$

$$\square$$

Como queríamos demostrar.

15. Un problema te pide demostrar:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Pero te quedas en blanco y no sabes qué fórmula utilizar para la demostración. ¿Qué haces en ese caso?

En ese caso puedes optar por ilustrar cómo funciona la identidad que se pide demostrar. Para hacerlo, puedes coger varios valores de las variables que aparecen (en este caso, solamente x):

Si $x = 30$ grados sexagesimales, entonces el lado izquierdo es:

$$\mathrm{LI} = \cos(2x) = \cos(2 \cdot 30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

y el lado derecho es:

$$\begin{aligned} \mathrm{LD} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 30° = \\ = 1 - 2 \cdot {\frac{1}{2}}^{2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \\ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

como LI y LD son iguales, vemos que se cumple.

Si $x = 40$ grados sexagesimales, entonces el lado izquierdo es:

$$\mathrm{LI} = \cos(2x) = \cos(2 \cdot 45°) = \cos(90°) = 0$$

y el lado derecho es:

$$\begin{aligned} \mathrm{LD} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 45° = \\ = 1 - 2 \cdot {\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = 1 - 2 \cdot \frac{2}{4} = \\ = 1 - \frac{2}{2} = 0 \end{aligned}$$

como LI y LD son iguales, vemos que se cumple.

Puede hacerse lo mismo para otros valores bien conocidos de x como 0 grados y 90 grados.

No es una demostración propiamente dicha. Pero muestra que sabes en qué consiste la igualdad.

16. Demuestra que la fórmula:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

es consecuencia de la fórmula:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Es decir, tenemos que transformar la segunda fórmula en la primera.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Pasamos el 2 (que divide el lado derecho) al lado izquierdo:

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x)$$

Cambiamos el coseno del ángulo doble de lado:

$$\cos(2x) + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$$

Pasamos el seno al otro lado:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Como queríamos demostrar.

17. Escribe la fórmula siguiente usando solamente cosenos:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Por la relación fundamental de la trigonometría, sabemos que *el cuadrado del seno de un ángulo más el cuadrado del coseno del mismo ángulo es igual a 1*:

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$$

Por lo tanto, la fórmula:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

se puede convertir en:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \cdot (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2 + 2\cos^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

Tal como queríamos escribir.

18. Un problema te pide demostrar:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

Pero te quedas en blanco y no sabes qué fórmula utilizar para la demostración. ¿Qué haces en ese caso?

Si no recuerdas cómo demostrarlo geométricamente y no sabes cómo demostrarlo a partir de la fórmula de Euler de los números complejos, tienes un problema.

Pero puedes intentar **ejemplificar** la fórmula. Ver que se cumple para casos concretos.

- Si x es 30° e y es 60° entonces:

$$LI = \sin(30° + 60°)$$

$$LI = \sin(90°)$$

$$LI = 1$$

$$LD = \sin(30°) \cdot \cos(60°) +$$
$$+ \cos(30°) \cdot \sin(60°)$$
$$LD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$LD = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$
$$LD = 1$$

Los dos lados son iguales. Por lo tanto, se cumple la identidad (la fórmula) para este caso concreto.

- Si x es 0° e y es 90° entonces:

$$LI = \sin(0° + 90°)$$
$$LI = \sin(90°)$$
$$LI = 1$$

$$LD = \sin(0°) \cdot \cos(90°) +$$
$$+ \cos(0°) \cdot \sin(90°)$$
$$LD = 0 \cdot 0 +$$
$$+ 1 \cdot 1$$
$$LD = 1$$

Los dos lados son iguales. Por lo tanto, se cumple la identidad (la fórmula) para este caso concreto.

- Si x es 45° e y es 45° entonces:

$$LI = \sin(45° + 45°)$$
$$LI = \sin(90°)$$
$$LI = 1$$

$$LD = \sin(45°) \cdot \cos(45°) +$$
$$+ \cos(45°) \cdot \sin(45°)$$
$$LD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$LD = 1$$

Los dos lados son iguales. Por lo tanto, se cumple la identidad (la fórmula) para este caso concreto.

Aunque no es una demostración formal, es mejor que no decir nada.

Observa que es necesario saber las razones trigonométricas de 0, 30, 40, 60 y 90 grados sexagesimales.

19. Encuentra el valor exacto de las razones trigonométricas de un ángulo de 75°.

Nos piden el valor exacto, no una aproximación. Por lo tanto, una calculadora no es la herramienta más adecuada para conseguir el valor[30]; las calculadoras normalmente trabajan con aproximaciones.

Podemos usar la fórmula del seno de una suma:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

porque 75° es igual a 30° más 45°, dos ángulos cuyas razones trigonométricas exactas son bien conocidas.

Recuerda que:

$$\begin{aligned}
\sin(30°) &= \frac{1}{2} \\
\cos(30°) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin(45°) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos(45°) &= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{gathered}
\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \\
= \sin(30°) \cdot \cos(45°) + \cos(30°) \cdot \sin(45°) = \\
= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{4} = \\
= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{4} = \\
= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
\end{gathered}$$

Ahora podemos obtener el coseno de varias maneras:

- con el teorema fundamental de la trigonometría
- con la fórmula del coseno de una suma

[30] Aunque sí puede servirnos para comprobar el resultado

Con el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\begin{gathered}
\sin^2(75^\circ) + \cos^2(75^\circ) = 1 \\
\cos^2(75^\circ) = 1 - \sin^2(75^\circ) = \\
= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \\
= 1 - \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16} = \\
= \frac{16}{16} - \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16} = \\
= \frac{16}{16} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{16} = \\
= \frac{16}{16} - \frac{2+6+2\cdot\sqrt{12}}{16} = \\
= \frac{16}{16} - \frac{8+2\cdot\sqrt{12}}{16} = \\
= \frac{8-2\cdot\sqrt{12}}{16} \\
= \frac{8-2\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{16} \\
= \frac{8-4\cdot\sqrt{3}}{16} \\
= \frac{4\cdot(2-\sqrt{3})}{16} \\
= \frac{2-\sqrt{3}}{4}
\end{gathered}$$

Tomamos la raíz cuadrada:

$$\cos(75^\circ) = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Como 75° está en el primer cuadrante, el coseno debe ser positivo:

$$\begin{gathered}
\cos(75^\circ) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \\
= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}
\end{gathered}$$

Ahora calcularemos el coseno usando otro método: la fórmula del coseno de una suma. Esa fórmula es:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\cos(75°) &= \cos(30° + 45°) = \\
&= \cos(30°) \cdot \cos(45°) - \sin(30°) \cdot \sin(45°) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

¡Parecen resultados diferentes! La verdad es que el último parece más sencillo. ¿Son realmente el mismo número? Vamos a comprobarlo: supondremos que son iguales, transformaremos ambos lados de la igualdad y, si llegamos a una tautología, habremos demostrado que lo son.

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Multiplicamos por 4:

$$2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Introducimos el 2 dentro del radicando:

$$\begin{gathered}
\sqrt{2^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\
\sqrt{4 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \\
\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}
\end{gathered}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\begin{gathered}
\left(\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 \\
8 - 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 \\
8 - 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \\
8 - 4\sqrt{3} = 6 + 2 - 2 \cdot \sqrt{12} \\
8 - 4\sqrt{3} = 6 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \\
8 - 4\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3} \quad \top
\end{gathered}$$

Ahora podemos calcular la tangente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(75^\circ) = \frac{\sin(75^\circ)}{\cos(75^\circ)} &= \\
= \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} &= \\
= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} &= \\
= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} &= \\
= \frac{6+2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{6-2} &= \\
= \frac{8+2\cdot\sqrt{12}}{4} &= \\
= \frac{8+4\sqrt{3}}{4} &= \\
= \frac{2+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

La cosecante, la secante y la cotangente son las recíprocas:

$$\operatorname{cosec}(75^\circ) = \frac{1}{\sin(75^\circ)}$$
$$\sec(75^\circ) = \frac{1}{\cos(75^\circ)}$$
$$\operatorname{cotg}(75^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(75^\circ)}$$

Teoremas del seno y del coseno

1. Si a, b y c son las tres longitudes de los lados de un triángulo y c es mayor o igual que las otras dos, se sabe:

- si $c^2 < a^2 + b^2$, el triángulo es acutángulo
- si $c^2 = a^2 + b^2$, el triángulo es rectángulo
- si $c^2 > a^2 + b^2$, el triángulo es obtusángulo

Demuestra este criterio de clasificación.

El modo más sencillo de justificar el criterio de clasificación es usar el **teorema del coseno**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

donde γ es el ángulo opuesto al lado c.

Estudiamos los tres tipos de triángulo por separado:

- Si el triángulo es acutángulo, todos sus ángulos son agudos.

  Por lo tanto, el ángulo γ debe estar comprendido entre 0° y 90° (sin incluir ninguno de ellos):

$$\gamma \in (0°, 90°)$$

  Eso corresponde al primer cuadrante donde el coseno es positivo. Por lo tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) < a^2 + b^2$$

- Si el triángulo es rectángulo, un ángulo es recto.

  El ángulo γ es de 90°. Y el coseno de 90° es igual a cero:

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(90°) = \\ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = \\ = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

- Si el triángulo es obtusángulo, uno de los ángulos es obtuso.

  El ángulo γ debe ser mayor que 90° y menor que 180°. Es decir, debe estar en el segundo cuadrante. Pero el coseno es negativo en el segundo cuadrante. Por lo tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) > a^2 + b^2$$

2. Dos lados de un triángulo miden 20 y 57 centímetros y forman un ángulo entre ellos de 45°. Encuentra el lado que falta.

No sabemos si el triángulo es rectángulo, pero podemos asumir que no.

Cuando tenemos triángulos no rectángulos, el modo más sencillo de resolver es usando el teorema del seno o el teorema del coseno. En este caso, como tenemos dos lados (a y b) y el ángulo que hay entre ellos (γ) y queremos el lado opuesto a ese ángulo (c), podemos calcularlo con el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
$$c^2 = 20^2 + 57^2 - 2 \cdot 20 \cdot 57 \cdot \cos(45°)$$
$$c^2 = 400 + 3249 - 2280 \cdot \cos(45°)$$

El valor exacto del coseno de 45 grados sexagesimales es conocido:

$$c^2 = 3649 - 2280 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 = 3649 - 1140 \cdot \sqrt{2}$$
$$c = \pm\sqrt{3649 - 1140 \cdot \sqrt{2}}$$

Como tiene que ser positivo:

$$c = \sqrt{3649 - 1140 \cdot \sqrt{2}}$$

Aproximadamente:

$$c \approx 45.13088232 \text{ cm}$$

3. Los tres lados de un triángulo miden 9 cm, 6 cm y 4 cm. Encuentra el ángulo opuesto al lado de 9 cm.

Vamos a nombrar los lados del siguiente modo:

$$\begin{cases} c = 9 \text{ cm} \\ b = 6 \text{ cm} \\ a = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

Vemos que cumplen la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} c = 9 < a + b = 4 + 6 = 10 \\ b = 6 < a + c = 4 + 9 = 13 \\ a = 4 < b + c = 6 + 9 = 15 \end{cases}$$

por lo tanto, es posible que exista el triángulo.

Además, el cuadrado del lado más largo es:

$$c^2 = 9^2 = 81$$

Y la suma de los otros dos cuadrados es:

$$a^2 + b^2 = 4^2 + 6^2 = 52$$

Por lo que no es rectángulo. Como:

$$c^2 > a^2 + b^2$$

es un triángulo obtusángulo. El ángulo que buscamos debe ser mayor que 90°.

Usando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

podemos despejar el coseno:

$$2ab\cos(\gamma) + c^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-29}{48}\right)$$

El coseno es negativo en el segundo cuadrante (y en el tercero, que no nos interesa aquí) por lo que el ángulo va a ser mayor que 90° y menor que 180°:

$$\gamma = 127.1688997°$$

4. Los tres lados de un triángulo miden 9 cm, 7 cm y 6 cm. Encuentra el ángulo opuesto al lado de 9 cm.

Vamos a nombrar los lados del siguiente modo:

$$\begin{cases} c = 9 \text{ cm} \\ b = 7 \text{ cm} \\ a = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

Vemos que cumplen la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} c = 9 < a + b = 6 + 7 = 13 \\ b = 7 < a + c = 6 + 9 = 15 \\ a = 6 < b + c = 7 + 9 = 16 \end{cases}$$

por lo tanto, es posible que exista el triángulo.

Además, el cuadrado del lado más largo es:

$$c^2 = 9^2 = 81$$

Y la suma de los otros dos cuadrados es:

$$a^2 + b^2 = 6^2 + 7^2 = 85$$

Por lo que no es rectángulo. Como:

$$c^2 < a^2 + b^2$$

es un triángulo acutángulo. El ángulo que buscamos debe ser menor que 90°.

Usando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

podemos despejar el coseno:

$$2ab\cos(\gamma) + c^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos \quad \frac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\gamma = \arccos \quad \frac{4}{84}$$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{21}$$

El coseno es positivo en el primer cuadrante (y en el cuarto, que no nos interesa aquí) por lo que el ángulo va a ser menor que 90° y mayor que 0°:

$$\gamma = 87.27059736°$$

5. Los tres lados de un triángulo miden 33 cm, 56 cm y 65 cm. Encuentra el ángulo opuesto al lado de 65 cm.

Vamos a nombrar los lados del siguiente modo:

$$\begin{cases} c = 65 \text{ cm} \\ b = 56 \text{ cm} \\ a = 33 \text{ cm} \end{cases}$$

Vemos que cumplen la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} c = 65 < a + b = 33 + 56 = 89 \\ b = 56 < a + c = 33 + 65 = 98 \\ a = 33 < b + c = 56 + 65 = 121 \end{cases}$$

por lo tanto, es posible que exista el triángulo.

Si calculamos el cuadrado del lado más largo:

$$c^2 = 65^2 = 4225$$

y si calculamos la suma de los cuadrados de los otros lados:

$$a^2 + b^2 = 33^2 + 56^2 = 4225$$

¡Son iguales!

$$c^2 = a^2 + b^2$$

¡Es un triángulo rectángulo! Y como buscamos el ángulo opuesto del lado más largo, entonces sabemos que el resultado es 90°.

Podemos confirmarlo directamente con el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

$$2ab\cos(\gamma) + c^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos \frac{33^2 + 56^2 - 65^2}{2 \cdot 33 \cdot 56}$$

$$\gamma = \arccos(0)$$

$$\gamma = 90°$$

6. Los tres lados de un triángulo miden 4 cm, 9 cm y 25 cm. Encuentra el ángulo opuesto al lado de 25 cm.

Vamos a nombrar los lados del siguiente modo:

$$\begin{cases} c = 25 \text{ cm} \\ b = 9 \text{ cm} \\ a = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

Comprobamos si cumplen la desigualdad triangular:

$$\begin{cases} c = 25 > a + b = 9 + 4 = 13 \\ b = 9 < a + c = 4 + 25 = 29 \\ a = 4 < b + c = 9 + 25 = 34 \end{cases}$$

¡NO se cumple! ¡No existe un triángulo que cumpla esas condiciones!

Si no nos hubiésemos percatado de esto, al buscar el ángulo con el teorema del coseno, pasaría lo siguiente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

$$2ab\cos(\gamma) + c^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{4^2 + 9^2 - 25^2}{2 \cdot 4 \cdot 9}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{-528}{72}\right)$$

¡Pero el argumento del arcocoseno es **menor que menos uno**! Y el coseno no puede ser mayor que 1 o menor que -1. Por lo tanto, no tiene solución.

7. Un lado de un triángulo mide 70 m y su ángulo opuesto mide 30°. Otro de los ángulos mide 40°, encuentra el lado opuesto a ese ángulo.

En este caso, no podemos usar el teorema del coseno; tenemos solamente un lado. Pero podemos usar el teorema del coseno:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Si a es el lado desconocido, α es 40°, b es el lado que mide 70 m y β mide 30°.

$$\frac{a}{\sin(40°)} = \frac{70}{\sin(30°)}$$

$$a = \frac{70 \cdot \sin(40°)}{\sin(30°)}$$
$$a \approx 89.99026536 \text{ m}$$

El ejercicio no lo pide, pero podríamos calcular el ángulo que falta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 110°$$

Usando el teorema del seno:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$
$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$
$$c = \frac{70 \cdot \sin(110°)}{\sin(30°)}$$
$$c \approx 131.5569669 \text{ m}$$

El ejercicio no pedía resolver completamente el triángulo, pero lo hemos hecho usando el teorema del seno dos veces y el hecho de que la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es igual a 180°.

8. Dos lados de un triángulo miden 3 cm y 4 cm. El ángulo opuesto al lado de 3 cm es de 45°. Encuentra el ángulo opuesto al lado de 4 cm.

Nuevamente podemos usar el teorema del seno; tenemos:

$$\begin{cases} a = 3 \text{ cm} \\ b = 4 \text{ cm} \\ \alpha = 45° \end{cases}$$

y nos piden β.

Por lo tanto:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$$
$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a}$$
$$\sin(\beta) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4}{3}$$
$$\sin(\beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\beta = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Y aquí **tenemos un problema**: el seno es positivo en el primer cuadrante y en el segundo cuadrante. Por lo tanto, hay dos posibles soluciones:

$$\beta_1 = 70.52877937°$$

$$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 109.4712206°$$

Es decir, hay dos posibles triángulos. ¿Los dos son solución?

Para cada uno de ellos obtenemos un ángulo γ:

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 64.47122063°$$

$$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 = 25.5287794°$$

Si usamos el teorema del seno otra vez:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

$$c_1 = \frac{3 \cdot \sin(64.47122063°)}{\sin(45°)}$$

$$c_2 = \frac{3 \cdot \sin(25.5287794°)}{\sin(45°)}$$

$$c_1 = 3.828427125 \text{ cm}$$

$$c_1 = 1.828427127 \text{ cm}$$

Ahora podemos comprobar si los dos triángulos son verdaderas soluciones usando la desigualdad triangular:

- primera solución: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3.828427125$ cm.

$$\begin{cases} a = 3 < b + c = 7.828427125 \\ b = 4 < a + c = 6.828427125 \\ c = 3.828427125 < a + b = 7 \end{cases}$$

  Cumple la desigualdad triangular, por lo que sí es una solución.

- segunda solución: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 1.828427127$ cm.

$$\begin{cases} a = 3 < b + c = 5.828427127 \\ b = 4 < a + c = 4.828427127 \\ c = 1.828427127 < a + b = 7 \end{cases}$$

  Cumple la desigualdad triangular, por lo que sí es una solución.

Hay dos soluciones. Dos triángulos que cumplen las condiciones del enunciado.

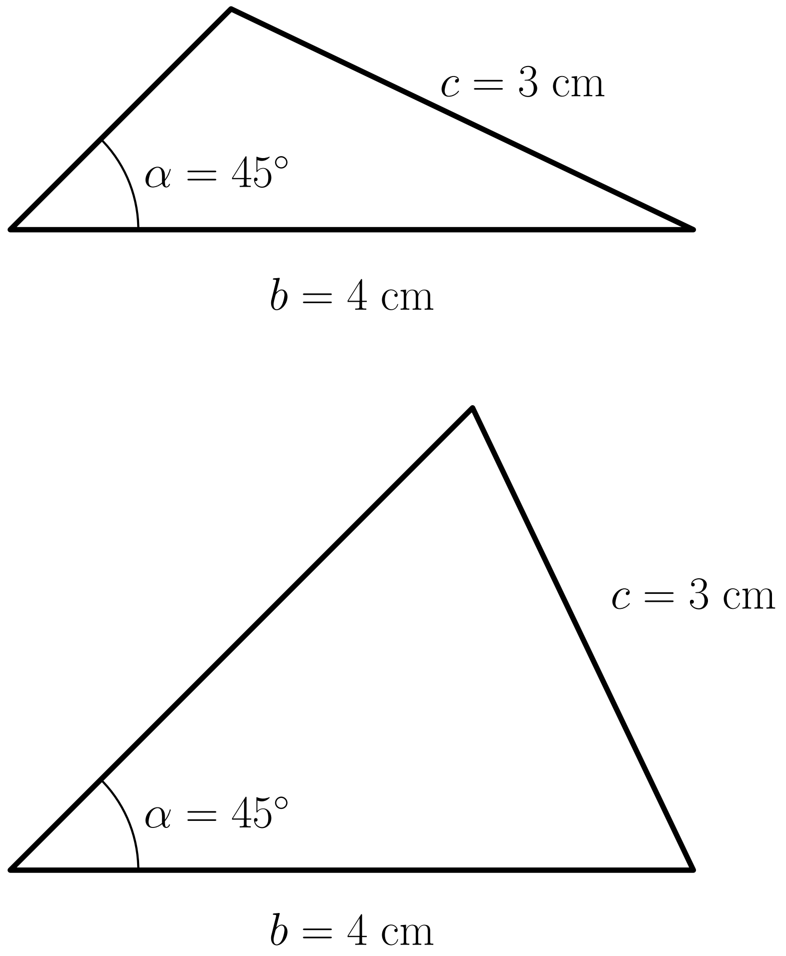


Figura 69: Dos triángulos diferentes cumplen que a = 3 cm, b = 4 cm y α = 45°.

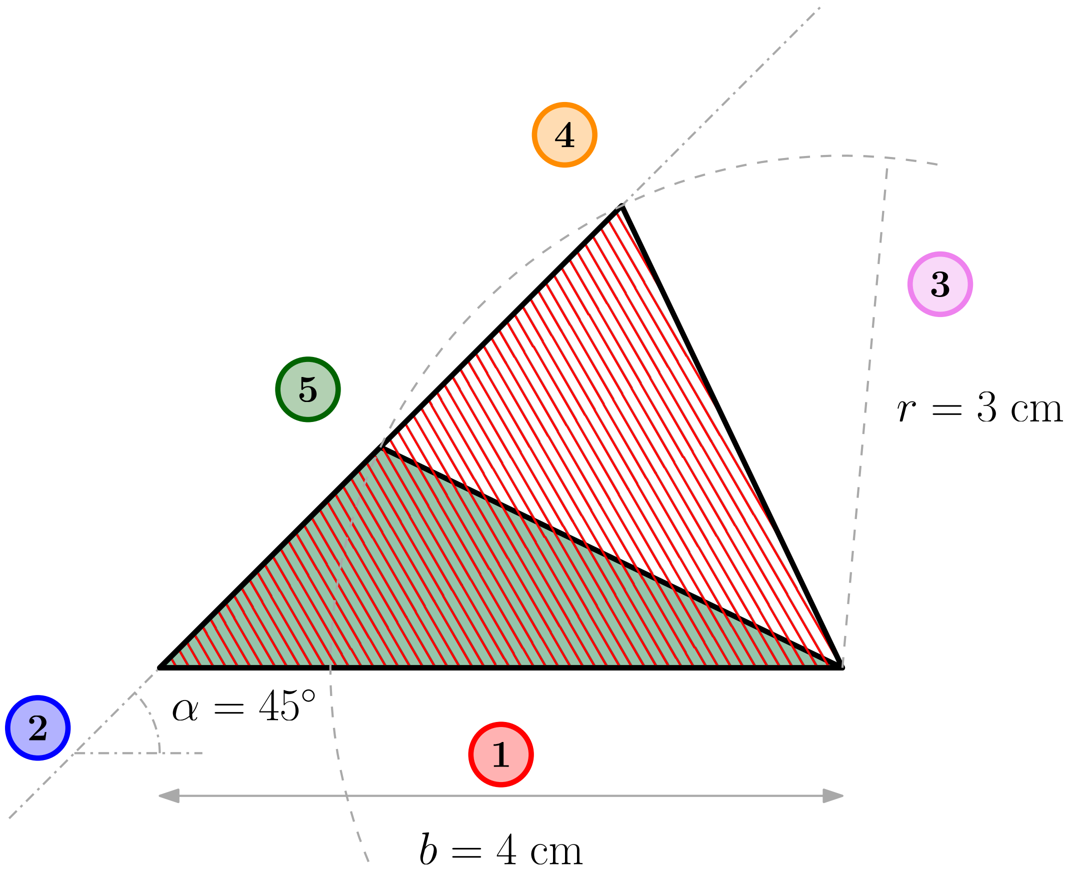


Figura 70: Construcción geométrica de las soluciones con regla, transportador de ángulos y compás: 1) Dibujamos el lado de 4 cm. 2) Dibujamos una línea recta que forma un ángulo de 45° con el lado de 4 cm y pasa por un extremo. 3) Dibujamos una circunferencia de radio 3 cm con centro en el otro extremo del lado de 4 cm. 4) El primer punto de corte entre la circunferencia y la recta nos da un triángulo. 5) El segundo punto de corte, el segundo triángulo.

9. Dos lados de un triángulo miden 15 y 35 centímetros y forman un ángulo entre ellos de 45°. Resuelve el triángulo.

Dado que conocemos el ángulo entre dos de los lados, podemos usar el teorema del coseno para encontrar el lado opuesto al ángulo.

Si los lados conocidos y el ángulo conocido son:

- $a = 15$ cm
- $b = 35$ cm
- $\gamma = 45°$

entonces no conocemos:

- α, que es el ángulo opuesto al lado a
- β, que es el ángulo opuesto al lado b
- c, que es el lado opuesto al ángulo γ

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
$$c^2 = 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35\cos(45°)$$
$$c^2 = 225 + 1225 - 1050 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$c^2 = 1450 - 1050 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$c^2 = 1450 - 525 \cdot \sqrt{2}$$
$$c = \pm\sqrt{1450 - 525 \cdot \sqrt{2}}$$

Como es una longitud, solamente puede ser positiva:

$$c = \sqrt{1450 - 525 \cdot \sqrt{2}} \text{ cm}$$

El valor decimal aproximado es:

$$c \approx 26,59958420 \text{ cm}$$

Ahora podemos usar el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Por lo que:

$$\sin(\alpha) = \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{c}$$
$$\sin(\alpha) = \sin(45°) \cdot \frac{15}{26,59958420}$$

$$\alpha = \arcsin \quad \sin(45^\circ) \cdot \frac{15}{26,59958420}$$

$$\alpha_1 \approx 23,50009932^\circ$$

Pero hay otra solución posible:

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$$

$$\alpha_2 = 156,4999007^\circ$$

Como:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta_1 = 180^\circ - 45^\circ - 23,50009932^\circ =$$
$$= 111,5^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 45^\circ - 156,4999007^\circ =$$
$$= -21,4999007^\circ$$

¡Pero el ángulo no puede ser negativo! Por lo que tenemos que los ángulos tienen que ser:

$$\alpha_1 \approx 23,50009932^\circ$$

$$\beta_1 \approx 111,5^\circ$$

10. Resuelve el triángulo de lados a = 40 m, b = 26 m y el ángulo $\gamma = 30^\circ$ (donde γ es el ángulo entre a y b).

Este triángulo puede no ser rectángulo. Podemos dibujarlo como si fuese acutángulo (aunque no sabemos si lo es).

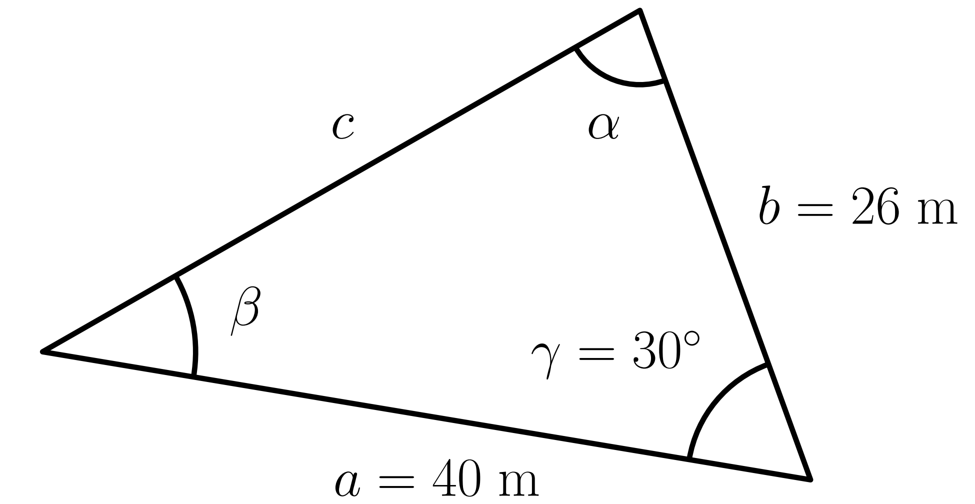


Figura 71: Triángulo de lados a = 40 m, b = 26 m y el ángulo $\gamma = 30^\circ$ (donde γ es el ángulo entre a y b).

Por los datos que tenemos, el teorema más aconsejable es el **teorema del coseno**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$
$$c^2 = 40^2 + 26^2 - 2 \cdot 40 \cdot 26 \cdot \cos(30°)$$
$$c^2 = 2276 - 2080 \cdot \cos(30°)$$
$$c^2 = 2276 - 2080 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$c^2 = 2276 - 1040 \cdot \sqrt{3}$$
$$c = \pm\sqrt{2276 - 1040 \cdot \sqrt{3}}$$

En este caso, solamente tiene sentido la positiva:

$$c = \sqrt{2276 - 1040 \cdot \sqrt{3}}$$

$$c \approx 21,78685751 \text{ m}$$

Ahora podemos encontrar los ángulos que faltan usando el **teorema del seno**:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

por lo que α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin\gamma$$
$$\sin\alpha = \frac{40}{21,78685751} \cdot \sin 30°$$
$$\sin\alpha = 1,835969230 \cdot 0,5$$
$$\sin\alpha = 0,917984615$$
$$\alpha = \arcsin(0,917984615)$$

Hay dos soluciones posibles:

$$\alpha_1 = 66,63320236°$$
$$\alpha_2 = 180 - 66,63320236° = 113,3667976°$$

Podemos encontrar β:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$\beta_1 = 83,36679764°$$
$$\beta_2 = 36,6332024°$$

Por lo que hay dos triángulos que pueden ser solución. Habría que comprobar si ambos existen o no.

Problemas geométricos

1. Calcula el perímetro y el área de un polígono regular de n lados si su radio es r.

Un polígono regular de n lados tiene n vértices y n radios (los segmentos que salen del centro y llegan a los vértices).

Por ejemplo, un octágono como el de la figura tiene 8 lados (n = 8). Y el ángulo α es una vuelta completa (360 grados sexagesimales) dividida entre el número de lados y dividida entre 2.

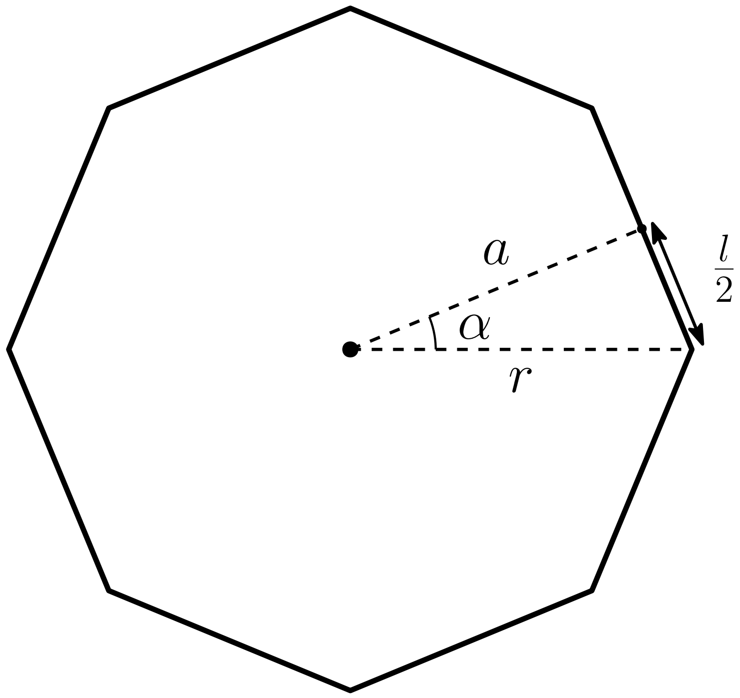


Figura 72: Un octágono ($n = 8$) donde a es **la** apotema, r es el radio, l es la longitud de un lado y α es el ángulo entre un radio y una apotema contiguos.

Por lo tanto, para cualquier polígono regular, α es:

$$\alpha = \frac{360°}{2n}$$

El radio, la apotema y la mitad de un lado forman un triángulo rectángulo donde el radio es la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = a^2 + \frac{l}{2}^{\,2}$$

Por otro lado, sabemos que el radio es la hipotenusa y la mitad del lado es el cateto opuesto a α. Por lo tanto, el seno de alfa nos relaciona las tres cosas:

$$\sin\alpha = \frac{l/2}{r}$$
$$l = 2r \cdot \sin\alpha$$

El perímetro p es la suma de todos los lados:

$$\boxed{p = n \cdot l = 2nr \cdot \sin\alpha}$$

Un polígono regular de n lados se puede dividir en n triángulos isósceles donde los lados iguales son dos radios y el lado desigual es el lado del polígono. La altura de esos polígonos es igual a la apotema a.

Podemos encontrar la apotema a partir del radio y el ángulo:

$$a = r\cos\alpha$$

La superficie de uno de los triángulos isósceles es:

$$S_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$$

$$S_{\text{triángulo}} = \frac{l\cdot a}{2}$$

$$S_{\text{triángulo}} = \frac{2r\cdot\sin\alpha\cdot a}{2}$$

$$S_{\text{triángulo}} = \frac{2r\cdot\sin\alpha\cdot r\cos\alpha}{2}$$

$$S_{\text{triángulo}} = r^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

El polígono:

$$S = n\cdot S_{\text{triángulo}}$$

$$\boxed{S = n\cdot r^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

2. Se dibuja un pentágono regular de radio 10 centímetros. Cada uno de sus lados es la base de un triángulo rectángulo y el ángulo opuesto es de 30 grados. La figura resultante es una estrella de cinco puntas. Calcula el perímetro externo de la estrella.

Si dibujamos los cinco radios del pentágono interior (los segmentos que van desde el centro del polígono regular a cada uno de sus vértices), vemos que el pentágono queda dividido en 5 triángulos isósceles iguales entre si. Y el ángulo desigual será β y los dos ángulos iguales entre si serán γ.

El ángulo β debe ser la quinta parte de 360°:

$$\beta = \frac{360°}{5} = 72°$$

Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es un ángulo llano (= de 180 grados sexagesimales):

$$\beta + \gamma + \gamma = 180°$$

$$\beta + 2\gamma = 180°$$

$$72° + 2\gamma = 180°$$

$$2\gamma = 180° - 72°$$

$$2\gamma = 108°$$

$$\gamma = 54°$$

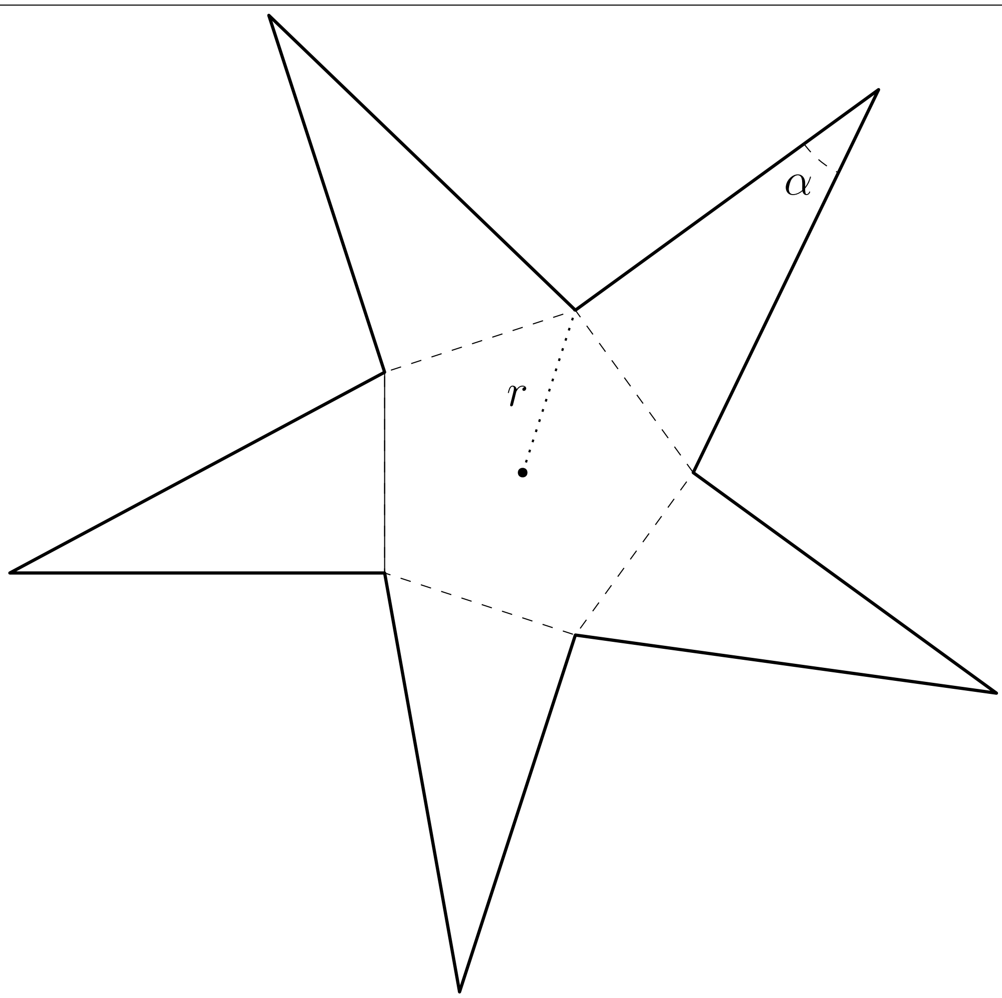


Figura 73: La estrella de cinco puntas.

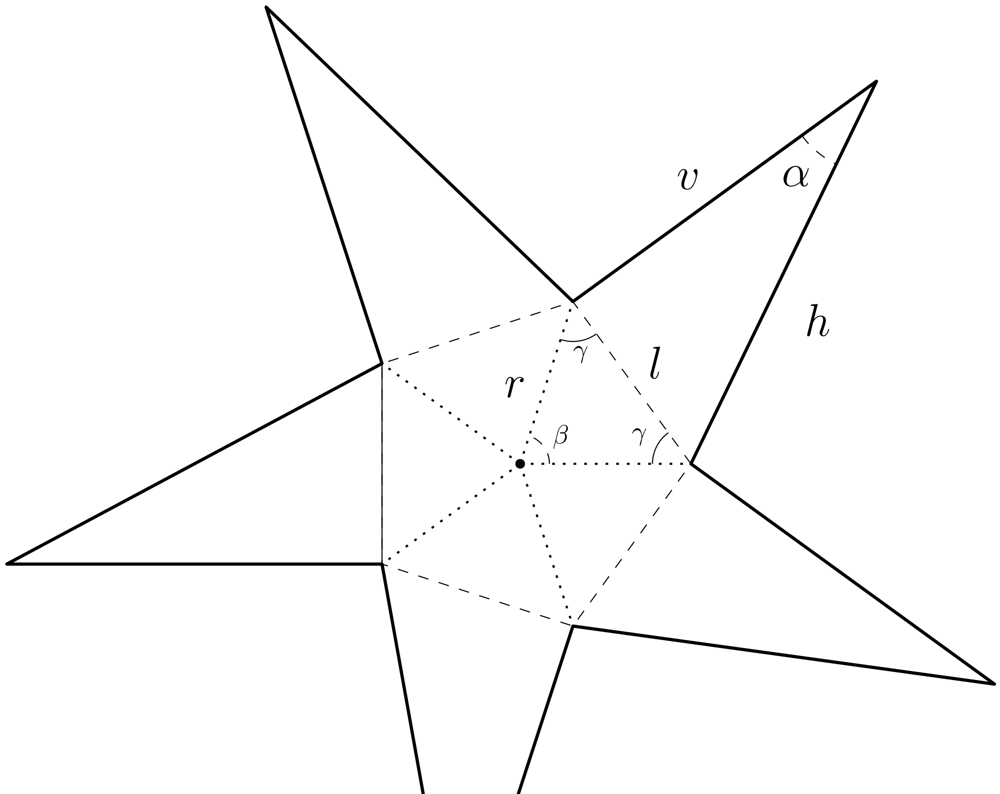


Figura 74: El polígono regular queda dividido en 5 triángulos isósceles iguales entre si. Hemos etiquetado todos los lados y ángulos que podemos necesitar para el desarrollo.

Por el teorema del seno:

$$\frac{r}{\sin(72^\circ)} = \frac{l}{\sin(54^\circ)}$$

Podemos despejar l:

$$l = r \cdot \frac{\sin(54^\circ)}{\sin(72^\circ)}$$

$$l = 10 \cdot \frac{\sin(54^\circ)}{\sin(72^\circ)}$$

Si ahora observamos cualquiera de los triángulos rectángulos que forman la estrella, vemos que tenemos el **cateto opuesto** al ángulo $\alpha = 30^\circ$. Y esto nos permite encontrar los lados que faltan (h y v):

$$\sin(30^\circ) = \frac{l}{h}$$

$$\mathrm{tg}(30^\circ) = \frac{l}{v}$$

Es decir:

$$h = \frac{l}{\sin(30^\circ)}$$

$$v = \frac{l}{\mathrm{tg}(30^\circ)}$$

El seno de 30 grados sexagesimales es 1/2. Y la tangente de 30 grados es $\sqrt{3}$.

$$h = \frac{l}{1/2} = 2l$$

$$v = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}l}{3}$$

El perímetro p es la suma de todos esos lados. Hay cinco h y hay 5 v:

$$p = 5h + 5v$$

$$p = 10l + \frac{5\sqrt{3}l}{3}$$

Es decir:

$$p = \quad 10 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad l$$

$$p = \frac{30 + 5\sqrt{3}}{3} \cdot l$$

Sustituyendo el valor que habíamos encontrado para l:

$$p = \frac{30 + 5\sqrt{3}}{3} \cdot$$
$$\cdot 10 \cdot \frac{\sin(54°)}{\sin(72°)}$$

Aproximadamente:

$$p \approx 109.621 \text{ cm}$$

3. En un paralelogramo, las diagonales forman un ángulo de 150° entre ellas. Una de las diagonales mide 30 cm y la otra diagonal mide 40 cm. Encuentra las dimensiones del paralelogramo, es decir, las longitudes de sus lados.

Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a otro. Para que esto sea posible, las longitudes de los lados paralelos deben ser iguales.

Hacemos un dibujo de un paralelogramo $\square ABCD$ para orientarnos. Pero cuando no medimos realmente las longitudes, el dibujo solamente es orientativo. El dibujo puede *"engañarnos"* si no tenemos esto en cuenta.

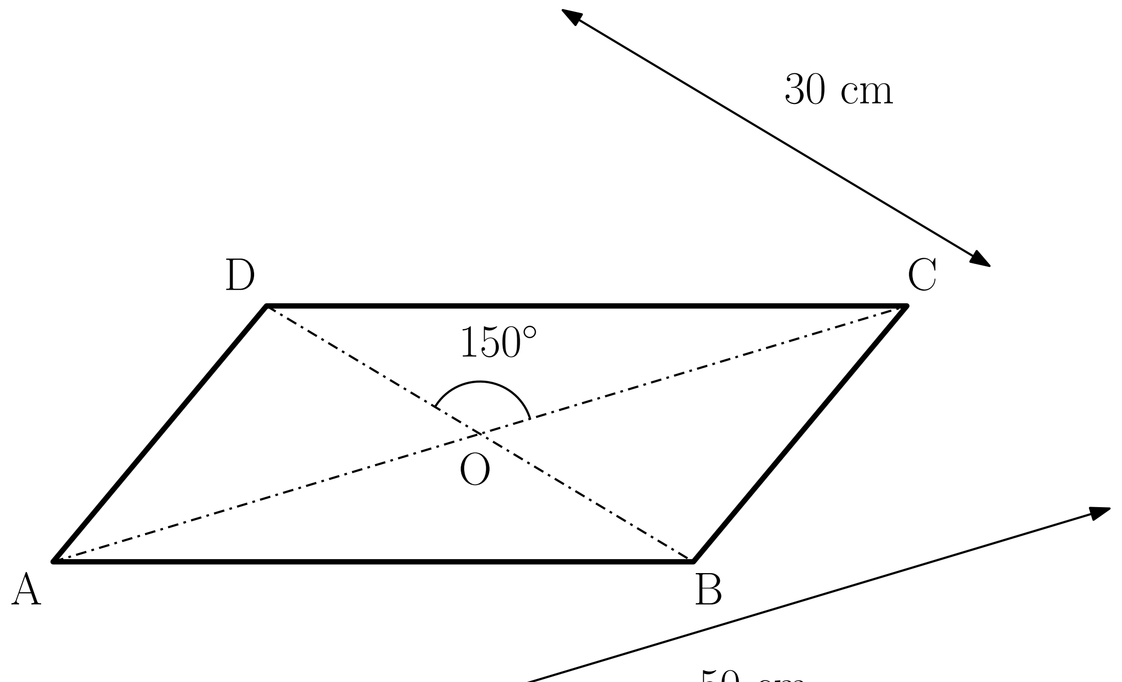


Figura 75: Un paralelogramo en el que conocemos sus diagonales y el ángulo entre ellas.

Las diagonales dividen el cuadrilátero en cuatro triángulos. Si O es la intersección de las diagonales, podemos centrarnos en el triángulo $\triangle OCD$ en el que sabemos el ángulo $\angle DOC$ y las longitudes $|\overline{OC}|$ y $|\overline{OD}|$:

- $\angle DOC = 150°$
- $|\overline{OC}| = 50/2 = 25$ cm
- $|\overline{OD}| = 30/2 = 15$ cm

Ahora podemos usar el teorema del **coseno**:

$$|\overline{CD}|^2 = |\overline{OC}|^2 + |\overline{OD}|^2 - 2 \cdot |\overline{OC}| \cdot |\overline{OD}| \cdot \cos(\angle DOC)$$

Sustituyendo:

$$|\overline{CD}|^2 = 25^2 + 15^2 - 2 \cdot 25 \cdot 15 \cdot \cos(150°)$$
$$|\overline{CD}|^2 = 850 - 750 \cdot \cos(150°)$$

150° está en el segundo cuadrante, donde el coseno es negativo. Y es fácil ver que:

$$\cos(150°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo:

$$|\overline{CD}|^2 = 850 + 750 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|\overline{CD}|^2 = 850 + 375 \cdot \sqrt{3}$$
$$|\overline{CD}| = \pm\sqrt{850 + 375 \cdot \sqrt{3}}$$

Como la longitud debe ser positiva:

$$|\overline{CD}| = \sqrt{850 + 375 \cdot \sqrt{3}}$$
$$|\overline{CD}| = \sqrt{25 \cdot 34 + 25 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}}$$
$$|\overline{CD}| = 5 \cdot \sqrt{34 + 15 \cdot \sqrt{3}} \text{ cm}$$

El lado $\overline{AB}$ mide lo mismo:

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 5 \cdot \sqrt{34 + 15 \cdot \sqrt{3}} \text{ cm}$$

Solamente nos faltan dos lados. Si observamos el triángulo $\triangle OBC$, necesitamos el ángulo $\angle BOC$. Pero es evidente que:

$$2\angle BOC + 2 \cdot 150° = 360°$$
$$2\angle BOC + 300° = 360°$$
$$2\angle BOC = 60°$$
$$\angle BOC = 30°$$

Ahora aplicamos el teorema del coseno:

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 - 2 \cdot |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \cos(\angle BOC)$$
$$|\overline{BC}|^2 = 15^2 + 25^2 - 2 \cdot 15 \cdot 25 \cdot \cos(30°)$$

$$|\overline{BC}|^2 = 850 - 750 \cdot \cos(30°)$$
$$|\overline{BC}|^2 = 850 - 750 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|\overline{BC}|^2 = 850 - 375 \cdot \sqrt{3}$$
$$|\overline{BC}| = \pm\sqrt{850 - 375 \cdot \sqrt{3}}$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{850 - 375 \cdot \sqrt{3}}$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{25 \cdot 34 - 25 \cdot 15 \cdot \sqrt{3}}$$
$$|\overline{BC}| = 5 \cdot \sqrt{34 - 15 \cdot \sqrt{3}}\ \text{cm}$$

Aproximadamente:

$$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = 14,1591\ \text{cm}$$
$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 38,7236\ \text{cm}$$

4. Desde un avión que vuela horizontalmente se observa un cuadrado dibujado en el suelo. La línea de visión que une el avión y el centro del cuadrado forma un ángulo de 30 grados respecto a la horizontal. Cuando el avión se mueve 200 metros horizontalmente, la línea de visión forma un ángulo de 40 grados sexagesimales respecto a la horizontal. ¿A qué altura está el avión?

Es un problema geométrico. Y, obviamente, es un problema de trigonometría. Como suele ser normal en este tipo de problemas, es buena idea hacer un dibujo y etiquetar los datos.

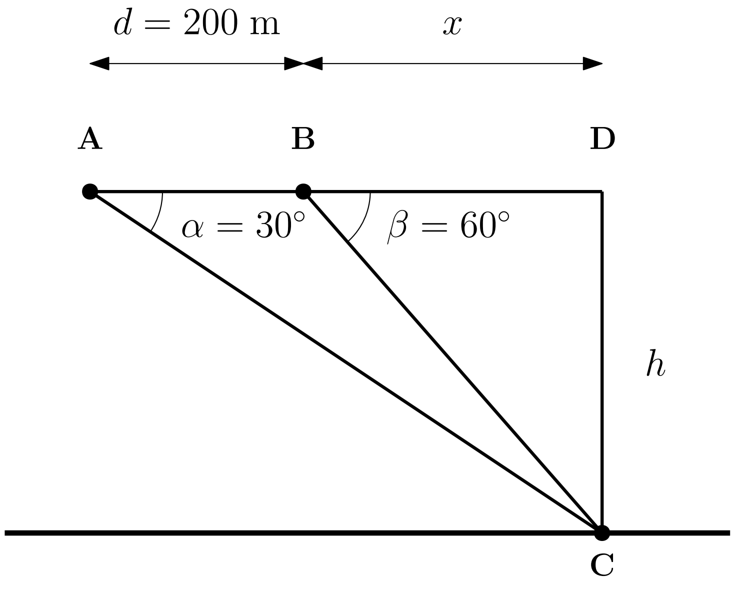


Figura 76: El avión se mueve horizontalmente una distancia $d = 200$ m y la línea de visión que une el avión con el centro del cuadrado en el suelo (C) cambia de inclinación de $\alpha = 30$ grados cuando el avión está en A a $\beta = 60$ grados cuando está en B.

Si se observa con atención el dibujo, hay dos triángulos: $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$. Y ambos son triángulos rectángulos.

En el triángulo $\triangle ACD$, el lado opuesto a α es $\overline{CD}$, que mide h y el lado contiguo a α es $\overline{AD}$ que mide $x + d$. La tangente del ángulo relaciona ambos lados:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d+x}$$

En el triángulo $\triangle BCD$, el lado opuesto a β es $\overline{CD}$, que mide h y el lado contiguo a β es $\overline{BD}$ que mide x. La tangente del ángulo relaciona ambos lados:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x}$$

Tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d+x} \\ \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x} \end{cases}$$

Despejamos x de la segunda (porque nos interesa h):

$$x \cdot \operatorname{tg}\beta = h$$

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$$

Sustituyendo en la primera:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d + \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}}$$

Pasamos el denominador multiplicando al lado izquierdo:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \quad d + \frac{h}{\operatorname{tg}\beta} \quad = h$$

Multiplicando para eliminar los paréntesis:

$$d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{h \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = h$$

$$d \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \cdot h = h$$

$$d \cdot \operatorname{tg}\alpha = h - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \cdot h$$

$$h - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \cdot h = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Sacamos h como factor común:

$$h \cdot \quad 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \quad = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$\boxed{h = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}}$$

Sabemos que la tangente de 30 grados es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y la tangente de 60 grados es:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Sustituyendo en la fórmula que hemos deducido:

$$h = 200 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}}$$

$$h = 200 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$h = 200 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$h = 200 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$h = 200 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$h = 100 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$h = 100 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 100 \cdot \sqrt{3}$$

$$h = 100 \cdot \sqrt{3} \text{ m} \approx 173.21 \text{ m}$$

5. Desde un avión que vuela horizontalmente se observa un cuadrado dibujado en el suelo. La línea de visión que une el avión y el centro del cuadrado forma un ángulo de 30 grados respecto a la horizontal. Cuando el avión se mueve 200 metros horizontalmente, la línea de visión forma un ángulo de 40 grados sexagesimales respecto a la horizontal. ¿A qué altura está el avión? **Resuelve el problema de otro modo.**

Es el mismo problema que antes. Pero queremos resolverlo de un modo diferente.

El ángulo $\angle ABC$ debe ser 180 grados menos 60 grados. Es decir, es 120 grados sexagesimales. Y, por lo tanto, el ángulo $\angle BCA$ es 30 grados.

IMPORTANTE: Como en un dibujo normalmente no representamos los ángulos y las distancias de manera exacta, no debemos dejarnos engañar por él.

Por el teorema del seno, sabemos que, en cualquier triángulo, las divisiones de los lados entre los senos de los ángulos opuestos son iguales:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin 30^\circ} = \frac{|\overline{BC}|}{\sin 30^\circ}$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$$

IMPORTANTE: El dibujo sugiere que ambos lados tienen distinta longitud. Sin embargo, tienen la misma.

Es decir, ambos lados miden 200 metros. Y el lado $\overline{BC}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle BDC$ donde h es el cateto opuesto a β. La razón trigonométrica que relaciona un ángulo con su cateto opuesto y su hipotenusa es el seno:

$$\sin 60° = \frac{h}{200}$$
$$200 \cdot \sin 60° = h$$
$$200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$
$$h = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$
$$h = 100 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$
$$h \approx 173.21 \text{ m}$$

6. En su órbita alrededor del Sol, la Tierra está en su perihelio[a] a 147 098 290 km de distancia del Sol y en su afelio[b] a 152 098 232 km de distancia del Sol. Sirio (α *Canis Majoris*), una de las estrellas más brillantes en el cielo terrestre, está a 8.7 años luz de distancia del Sol. ¿Cuáles son los ángulos que forman la línea de visión entre la Tierra y Sirio y la línea que une la Tierra y el Sol en el afelio y en perihelio?

[a]**perihelio**: punto más cercano al Sol.
[b]**afelio**: punto más alejado del Sol.

Cuando una estrella está relativamente cerca de nuestro Sistema Solar, al observarla desde la Tierra en épocas diferentes del año, su posición en el cielo respecto al resto de estrellas parece cambiar. A esto se le llama **paralaje**.

Es similar a lo que ocurre cuando pones un dedo de tu mano delante de tus ojos a unos pocos centímetros y miras el dedo primero con el ojo derecho (cerrando el izquierdo) y después con el ojo izquierdo (cerrando el derecho). El dedo parece *moverse*.

La órbita terrestre es, según la primera ley de Kepler, una elipse con el Sol en uno de los focos de la elipse. Si dibujamos el problema, vemos que tenemos dos triángulos rectángulos. Para encontrar los ángulos, solamente es necesario usar la tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{z}{x}$$
$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{z}{y}$$

Con la arcotangente:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \quad \frac{z}{x}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \quad \frac{z}{y}$$

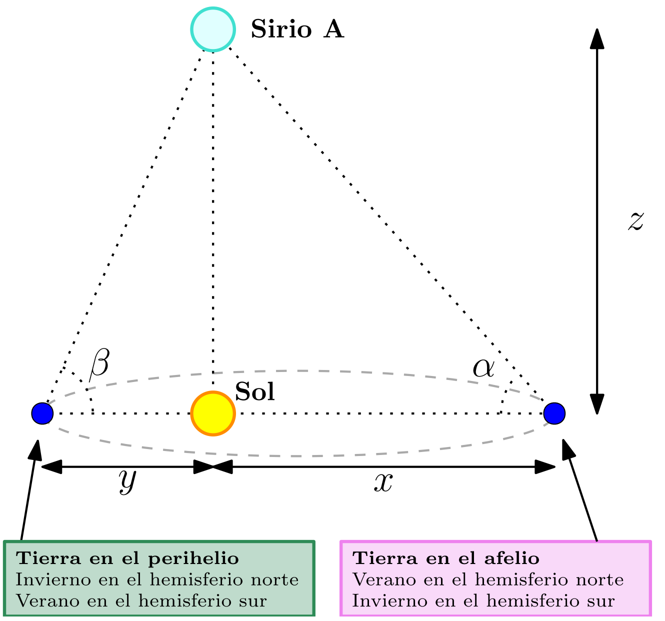


Figura 77: La Tierra orbita alrededor del Sol es una órbita elíptica. Sirio A es la estrella principal de la estrella binaria Sirio.

Un año luz es la distancia que la luz recorre en el vacío durante un año. La velocidad de la luz en el vacío[31] es de 300 000 km/s. Es decir, 300 000 000 m/s. Un año son 365 días, cada día tiene 24 horas, cada hora tiene 60 minutos y cada minuto tiene 60 segundos. Por lo tanto, un año es aproximadamente $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$ s. Por lo tanto, un año luz es: 300 000 000 $\cdot$ 31 536 000 metros. Es decir: $9.4608 \cdot 10^{15}$ metros.

Sustituyendo los datos en las fórmulas:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \quad \frac{9.4608 \cdot 10^{15}}{152\,098\,232\,000}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \quad \frac{9.4608 \cdot 10^{15}}{147\,098\,290\,000}$$

$$\alpha = 89.99907887^\circ$$

$$\beta = 89.99910915^\circ$$

¡La diferencia es muy pequeña! Lo cual quiere decir que no es fácil de observar.

Históricamente, la distancia de Sirio se obtuvo por ese método. Se midieron los dos ángulos y la distancia entre los dos puntos de observación. Y a partir de esos datos, se pudo obtener la distancia de Sirio A.

[31] Es, en realidad, un valor un poco más pequeño.

Funciones

El **análisis matemático** (o símplemente *análisis*) es la rama de las matemáticas que estudia las funciones.

Una función es un objeto matemático que relaciona el cambio en dos magnitudes distintas. Y continuamente nos gusta relacionar magnitudes diferentes: ¿cómo varía la longitud de un trozo de metal cuando cambia la temperatura?, ¿cómo cambia la cantidad de dinero que tenemos que pagar según el número de minutos que dura una llamada telefónica?, ¿cuántas personas infectadas por un virus hay en función del día de la semana?, ¿cuáles son las ventas de una empresa en función del mes del año?, ¿cuál es la velocidad de una reacción química en función de la concentración de un reactivo?...

De ahí viene la importancia de las funciones: permiten crear modelos para describir relaciones existentes en la realidad.

Desafortunadamente, el temario eslovaco deja fuera una de las herramientas más esenciales para estudiar las funciones y entenderlas: las derivadas. Las derivadas y las integrales forman parte del temario español de matemáticas en los últimos años de la enseñanza secundaria (antes de la universidad).

Propiedades

1. Encuentra la paridad de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 + 4$$
$$g(x) = x^3 + \sin(x)$$
$$h(x) = e^x$$

Si hacemos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$$

la función $f(x)$ tiene **simetría par** o *simetría axial respecto al eje de ordenadas* (el vertical, el que normalmente es Y).

Si hacemos $g(-x)$:

$$g(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin(x) =$$
$$= -(x^3 + \sin(x)) = -g(x)$$

la función $g(x)$ tiene **simetría impar** o *simetría central respecto al origen de coordenadas* (el punto (0, 0)).

Si hacemos $h(-x)$:

$$h(-x) = e^{-x} \neq h(x)$$
$$h(-x) = e^{-x} \neq -h(x)$$

o, lo que es lo mismo:

$$h(-x) \neq \pm h(x)$$

la función exponencial **no tiene paridad definida**. No es ni par ni impar.

2. La parte positiva de la gráfica de una función $f(x)$ aparece en la figura adjunta. Completa la gráfica para que:
a) $f(x)$ sea par
b) $f(x)$ sea impar
c) $f(x)$ no tenga paridad definida

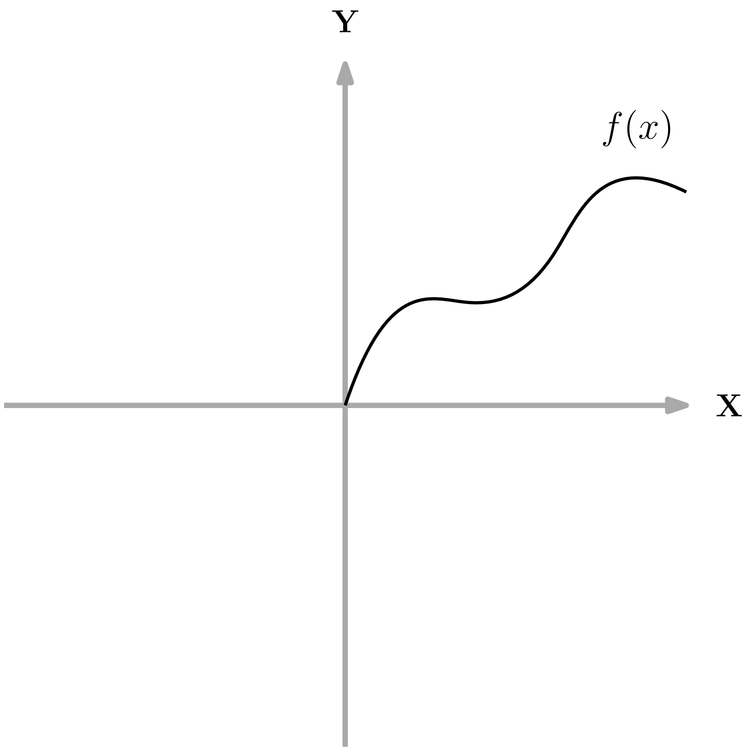


Figura 78: Parte positiva de una función $f(x)$.

La versión par se obtiene **reflejando la parte positiva** en el eje de ordenadas (el eje vertical) como si éste fuese un espejo. Así se obtiene la parte de los números negativos.

La versión impar se obtiene **reflejando la parte positiva en el eje de ordenadas** (el eje vertical) como si éste fuese un espejo **y** después **reflejando el resultado en el eje de abscisas** (el eje horizontal). Así se obtiene la parte de los números negativos.

La versión sin paridad definida se obtiene dibujando cualquier curva distinta de las anteriores.

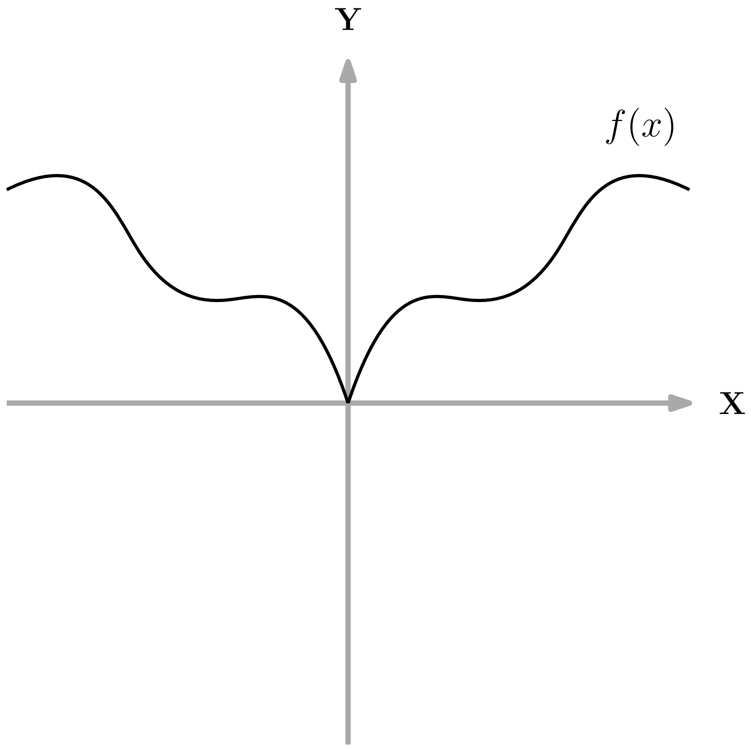


Figura 79: Versión par de $f(x)$.

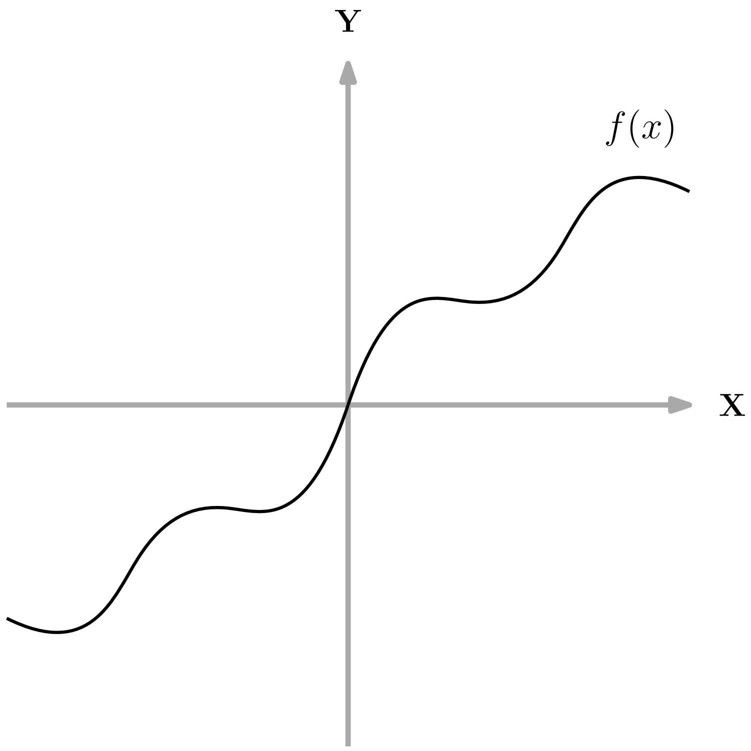


Figura 80: Versión impar de $f(x)$.

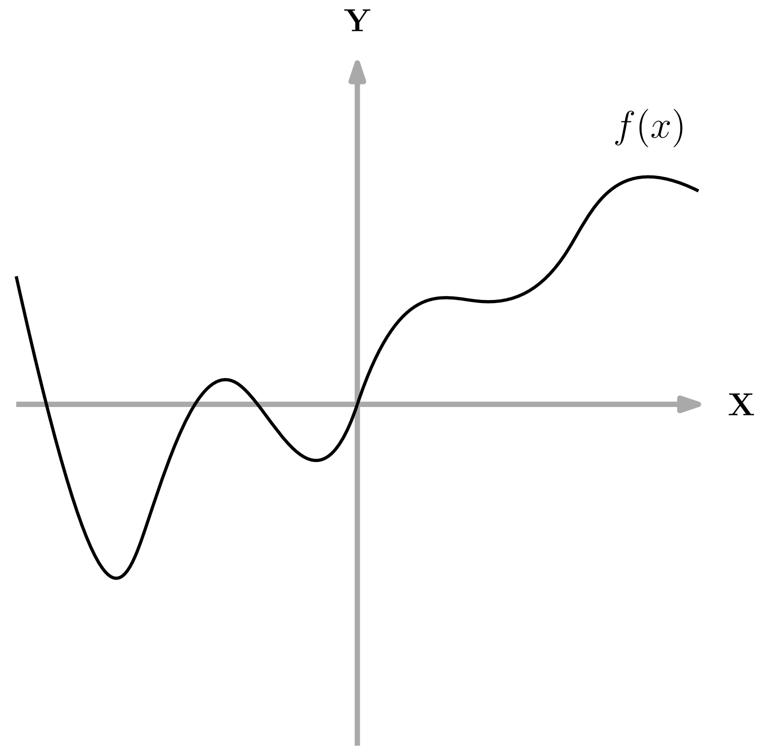


Figura 81: Versión sin paridad definida de $f(x)$.

3. Una función $f(x)$ es periódica y el periodo vale 6. Si $f(1) = 3$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 7$, calcula $f(223)$.

Una función es periódica en todo $\mathbb{R}$ si y solamente si existe un número real T llamado *periodo* para el que:

$$f(x) = f(x + n \cdot T); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

El enunciado del ejercicio nos dice que el periodo es $T = 6$:

$$f(x) = f(x + n \cdot 6); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$f(x) = f(x + 6n); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $f(223)$ debería repetir a $f(1)$, $f(2)$ o $f(3)$:

$$\begin{cases} 223 = 1 + 6n \\ 223 = 2 + 6n \\ 223 = 3 + 6n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 222 = 6n \\ 221 = 6n \\ 220 = 6n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = \frac{222}{6} = 37 \in \mathbb{Z} \\ n = \frac{221}{6} \notin \mathbb{Z} \\ n = \frac{220}{6} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f(223) = f(1) = 3$$

.

> **4**. Una función $f(x)$ es periódica y el periodo vale 7. Si $f(1) = 3$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 7$, calcula $f(177)$.

Una función es periódica en todo $\mathbb{R}$ si y solamente si existe un número real T llamado *periodo* para el que:

$$f(x) = f(x + n \cdot T); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

El enunciado del ejercicio nos dice que el periodo es $T = 7$:

$$f(x) = f(x + n \cdot 7); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$f(x) = f(x + 7n); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $f(177)$ debería repetir a $f(1)$, $f(2)$ o $f(3)$:

$$\begin{cases} 177 = 1 + 7n \\ 177 = 2 + 7n \\ 177 = 3 + 7n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 176 = 7n \\ 175 = 7n \\ 174 = 7n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = \frac{176}{7} \notin \mathbb{Z} \\ n = \frac{175}{7} = 25 \in \mathbb{Z} \\ n = \frac{174}{7} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f(177) = f(2) = -1$$

.

> **5**. Encuentra el periodo de la función $f(x) = 3 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

El periodo de la función seno $\sin(x)$ es 2π (es decir, una vuelta completa). Por lo tanto, si x_0 es un valor cualquiera de x y x_1 es la primera vez que se repite:

$$2x_0 - \frac{\pi}{3} + 2\pi = 2x_1 - \frac{\pi}{3}$$
$$2x_0 + 2\pi = 2x_1$$
$$2x_1 - 2x_0 = 2\pi$$
$$x_1 - x_0 = \pi$$

Pero, por definición de periodo:

$$T = \pi$$

6. Encuentra el periodo de la función $f(x) = 2 \cdot \text{tg} \ \frac{x}{3}$.

La función tangente $\text{tg}(x)$ tiene un periodo de π (es decir, de media vuelta). Por lo tanto, si x_0 es un valor cualquiera de x y x_1 es la primera vez que se repite:

$$\frac{x_0}{3} + \pi = \frac{x_1}{3}$$
$$\frac{x_1}{3} - \frac{x_0}{3} = \pi$$
$$\frac{x_1 - x_0}{3} = \pi$$
$$x_1 - x_0 = 3\pi$$

Pero, por definición de periodo:

$$T = 3\pi$$

Dominio

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones racionales:

a)
$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

b)
$$g(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 1}$$

c)
$$h(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

En una función racional siempre hay una división y pueden existir problemas cuando el divisor se anula (= es igual a cero). Por lo tanto debemos buscar el conjunto de valores para los que se anula el denominador. Los dominios serán el conjunto de los números reales menos el conjunto de valores para los que se anula el denominador.

a)
$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

El divisor se anula:

$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$
$$K = \{-1\}$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Esta función es una función homográfica porque es una racional en la que el denominador es un polinomio de grado 1 y el numerador es un polinomio de grado 0 o 1. El número que no pertenece al dominio es una **asíntota vertical** por la izquierda y la derecha.

b)
$$g(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$$

El divisor se anula:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$x = \pm 1$$
$$K = \{\pm 1\}$$

Por lo tanto el dominio es:

$$\text{Dom}[g(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[g(x)] = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

Esos dos valores (x = -1, x = 1) son asíntotas verticales de la función.

c)
$$h(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$$

El divisor se anula:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$
$$K = \{\} = \varnothing$$

Por lo tanto el dominio es:

$$\text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R}$$

Es decir, el dominio es todos los reales.

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones irracionales:
a) $f(x) = \sqrt{x+1}$
b) $g(x) = \sqrt[3]{3x-2}$
c) $h(x) = \sqrt[4]{x^2-5x+6}$

Cuando aparecen raíces, tenemos problemas solamente si el índice de la raíz es par y el radicando (= lo que hay dentro de la raíz) es negativo. Por lo tanto tenemos que buscar el conjunto de números que hacen que el radicando sea negativo:

a)
$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

La raíz es cuadrada, por lo que es de índice par. Podemos tener problemas si el radicando es negativo:

$$x + 1 < 0$$
$$x < -1$$
$$K = \{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$$
$$K = (-\infty, -1)$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - (-\infty, -1)$$
$$\text{Dom}[f(x)] = [1, \infty)$$

b)
$$g(x) = \sqrt[3]{3x-2}$$

La raíz es cúbica. El índice de la raíz es impar. No tenemos problemas con el dominio:

$$\text{Dom}[g(x)] = \mathbb{R}$$

c)

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$$

La raíz es cuarta. Por lo tanto el índice es par. Tenemos problemas si el radicando es negativo:

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Para resolver esta inecuación, resolvemos la ecuación:

$$\begin{gathered} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ x = \frac{5 \pm 1}{2} \end{gathered}$$

Hay dos soluciones:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

Eso nos permite factorizar el lado izquierdo de la inecuación (recordando que el coeficiente líder es 1):

$$\begin{gathered} x^2 - 5x + 6 < 0 \iff \\ \iff 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) < 0 \end{gathered}$$

Podemos hacer una tabla para resolver la inecuación:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto:

$$K = (2, 3)$$

y el dominio es:

$$\begin{gathered} \text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - K \\ \text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - (2, 3) \\ \text{Dom}[h(x)] = (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \end{gathered}$$

3. Encuentra el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:
a) $f(x) = \ln(x+1)$
b) $g(x) = \log(3x-2)$
c) $h(x) = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

Cuando hay logaritmos, tenemos problemas si el argumento es negativo o cero:

a)

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$x + 1 \leq 0$$
$$x \leq -1$$
$$K = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1\}$$
$$K = (-\infty, -1]$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - (-\infty, -1]$$
$$\text{Dom}[f(x)] = (1, \infty)$$

b)

$$g(x) = \log(3x-2)$$

$$3x - 2 \leq 0$$
$$x \leq \frac{2}{3}$$
$$K = \quad x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{2}{3}$$
$$K = \quad -\infty, \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}[g(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[g(x)] = \mathbb{R} - \quad -\infty, \frac{2}{3}$$
$$\text{Dom}[g(x)] = \quad \frac{2}{3}, \infty$$

c)

$$h(x) = \log_2 (x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es:

$$K = [2, 3]$$

y el dominio es:

$$\text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - K$$
$$\text{Dom}[h(x)] = \mathbb{R} - [2, 3]$$
$$\text{Dom}[h(x)] = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

4. Encuentra el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 2}$$

En este caso hay dos divisiones. Tenemos problemas si los divisores son cero.

El primer divisor se anula cuando:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

$$K_1 = \{1\}$$

El segundo divisor se anula cuando:

$$x^2 - 2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$K_2 = \{\pm\sqrt{2}\}$$

El dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - K_1 - K_2$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{1\} - \{\pm\sqrt{2}\}$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{1, \pm\sqrt{2}\}$$

5. Encuentra el dominio de las funciones:

a) $f(x) = 3$
b) $g(x) = 3x + 7$
c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 12$
d) $i(x) = \sin(x)$
e) $j(x) = \cos(x)$
f) $k(x) = e^x$

Ninguna de las funciones contiene divisiones, raíces o logaritmos.

Las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son polinómicas y el dominio de cualquier función polinómica es igual al conjunto de todos los números reales.

El seno y el coseno (las funciones $i(x)$ y $j(x)$) tienen como dominio todos los números reales.

La función exponencial $k(x) = e^x$ también tiene como dominio todos los números reales.

6. Encuentra el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 - 25}$$

La función tiene dos fuentes de problemas para el dominio:

- una raíz de índice par (la raíz cuadrada)
- una división

Tenemos que encontrar los números que dan problemas para cada caso:

- La raíz da problemas si el radicando es negativo:

$$x - 3 < 0$$
$$x < 3$$
$$K_1 = (-\infty, 3)$$

- La división da problemas si el divisor es cero:

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$
$$K_2 = \{\pm 5\}$$

El dominio de la función es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - K_1 - K_2$$
$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - (-\infty, 3) - \{\pm 5\}$$
$$\text{Dom}[f(x)] = [3, \infty) - \{\pm 5\}$$
$$\text{Dom}[f(x)] = [3, \infty) - \{5\}$$

Puntos de corte

1. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = 3x + 2x^2 - 2$$

Es una función cuadrática. Sus términos aparecen desordenados, así que los ordenamos:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

El eje de ordenadas es el eje vertical. Normalmente llamamos *eje* Y al eje de ordenadas y es la recta en la que x es 0.

Encontrar el punto de corte con el eje Y es sencillo:

$$y = f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 2$$
$$y = f(0) = -2$$

La función $f(x)$ corta el eje Y en (0, -2).

El eje de abscisas es el eje horizontal. Normalmente llamamos *eje* X al eje de abscisas y es la recta en la que todos los puntos están a una altura 0: $y = 0$.

Por lo tanto:

$$y = 0$$
$$f(x) = 0$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática completa y podemos resolver con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es decir:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} =$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} =$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$
$$= \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Tenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

La función $f(x)$ corta el eje X en (-2, 0) y en (1/2, 0).

2. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x-10}$$

Se trata de una función racional. Concretamente, de una función homográfica.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \frac{3 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 - 10}$$
$$y = \frac{1}{-10}$$
$$y = -\frac{1}{10}$$

  Hay un punto de corte en (0, -1/10).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$\frac{3x+1}{2x-10} = 0$$
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

  Hay un punto de corte en (-1/3, 0).

3. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

Se trata de una función cuadrática.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = 0^2 + 3 \cdot 0 + 2$$

$$y = 2$$

Hay un punto de corte en (0, 2).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2 \cdot 1}$$

Como el discriminante es negativo ($\Delta = -15$), no tiene soluciones reales.

No tiene puntos de corte con el eje X.

4. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = 4x - 3$$

Se trata de una función afín. Donde la pendiente es 4 y la ordenada en el origen es -3.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = 4 \cdot 0 - 3$$
$$y = -3$$

Hay un punto de corte en (0, -3).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$4x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Hay un punto de corte en (3/4, 0).

5. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{x - 3}$$

Se trata de una función racional. Concretamente de una homográfica.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \frac{2}{0-3}$$
$$y = -\frac{2}{3}$$

Hay un punto de corte en (0, - 2/3).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$\frac{2}{x-3} = 0$$

La ecuación no tiene soluciones. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje X.

6. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = e^x$$

Se trata de una función exponencial. Se trata **de** la función exponencial.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = e^0$$
$$y = 1$$

Hay un punto de corte en (0, 1).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$e^x = 0$$

La ecuación no tiene soluciones en los números reales. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje X.

7. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \cos(x)$$

Se trata de la función coseno.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \cos(0)$$
$$y = 1$$

  Hay un punto de corte en (0, 1).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$y = 0$$
$$\cos(x) = 0$$
$$x = \arccos(0)$$

  La ecuación tiene infinitas soluciones:

$$K = \{0 + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

  Por lo que hay infinitos (un infinito numerable) puntos de corte con el eje X de la forma:

$$(0 + 2\pi n, 0)$$

8. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \ln(x)$$

Se trata de la función **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano**. Es decir, una función logarítmica donde la base es el número e y el argumento es x.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \ln(0)$$

  Pero el logaritmo neperiano de cero (cualquier logaritmo, en realidad) no existe.

  $x = 0$ no pertenece al dominio de la función logaritmo.

  Por lo tanto no hay puntos de corte con el eje Y. (Hay una asíntota vertical por la derecha.)

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = e^0$$
$$x = 1$$

Corta el eje X en (1, 0).

9. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

Es una función racional. Concretamente es una función homográfica. Y más concretamente es una **función de proporcionalidad inversa**.

La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una hipérbola [equilátera] en la que las asíntotas **coinciden con los ejes de coordenadas**. Por lo tanto, no es posible que la gráfica corte a los ejes. **No hay puntos de corte**.

Podemos demostrarlo fácilmente:

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \frac{2}{0}$$

  Pero no es posible dividir entre 0.

  $x = 0$ no pertenece al dominio de la función $f(x)$.

  Por lo tanto no hay puntos de corte con el eje Y.

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$\frac{2}{x} = 0$$

  Que no tiene soluciones. Por lo que no hay puntos de corte con el eje X.

10. Encuentra los puntos de corte con los ejes de la gráfica de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Es una función polinómica de primer grado. Es decir, es una función afín. Pero como no tiene término independiente, pertenece a un subtipo de las funciones afines: es una **función de proporcionalidad directa**.

La gráfica de una función de proporcionalidad es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Por lo tanto, el único punto de corte es (0, 0).

Lo comprobamos:

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$

$$y = f(0)$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$y = 0$$

Hay un punto de corte con el eje Y en (0, 0).

- Puntos de corte con el eje X: $y = 0$

$$\frac{1}{2}x = 0$$
$$x = 0$$

Hay un punto de corte con el eje X en (0, 0).

Ambos puntos de corte son el mismo punto de corte: el origen de coordenadas (0, 0).

11. ¿Cuál es la relación entre los puntos de corte con el eje de abscisas de una función cuadrática y su vértice?

Sabemos que una función cuadrática se escribe:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Si x_1 y x_2 son los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje de abscisas (el eje X), sabemos que la función cuadrática también se puede escribir:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Si multiplicamos:

$$f(x) = a \cdot (x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$
$$f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2)$$

Comparando con:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es evidente que:

$$b = -a(x_1 + x_2)$$

Como sabemos que la x del vértice es:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Sustituyendo:

$$x_v = \frac{a(x_1 + x_2)}{2a}$$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Es decir, la coordenada x del vértice es **la media aritmética simple** de los dos puntos de corte. Lo cual es lógico; el vértice determina un eje de simetría y los puntos de corte tienen que estar a la misma distancia del eje de simetría, por lo que el eje de simetría debe estar en el punto medio entre los puntos de corte.

Observa que esta relación sigue siendo cierta cuando los dos puntos de corte son el mismo. En ese caso, el vértice coincide con el punto de corte.

ALUMNO: ¿Y si las raíces de la función no son reales?

PROFESOR: La respuesta a esa pregunta deberías buscarla en el tema de números complejos. ;)

Clasificación

1. Indica a qué familias pertenecen las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 2x - 3$

c) $f(x) = 3 - 2x$

d) $f(x) = x^2 + 2$

e) $f(x) = x^2 - 4$

f) $f(x) = x^2 + x$

g) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

h) $f(x) = x^3$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

j)

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

k)

$$f(x) = \frac{2x - 2}{3x + 1}$$

l)

$$f(x) = 4 + \frac{-2}{x - 1}$$

m)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

n) $f(x) = e^x$

ñ)

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}^{\;x}$$

o) $f(x) = \sin(x)$

p) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$

q) $f(x) = \cos(x)$

r) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

a)

$$f(x) = 2$$

Función: **constante** = *polinómica de grado cero*

Gráfica: línea recta horizontal.

b)

$$f(x) = 2x - 3$$

Función: **afín** = *polinómica de grado uno*

Gráfica: línea recta inclinada.

Es creciente porque la pendiente $m = 2 > 0$.

c)

$$f(x) = 3 - 2x$$

Función: **afín** = *polinómica de grado uno*

Gráfica: línea recta inclinada.

Es decreciente porque la pendiente $m = -2 < 0$.

d)

$$f(x) = x^2 + 2$$

Función: **cuadrática** = *polinómica de grado dos*

Gráfica: parábola.

Es una parábola *"feliz"* porque el coeficiente líder es positivo: $a = 1 > 0$. La parábola no corta el eje X porque $y = f(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Como es *"feliz"* y no corta el eje X, debe estar encima del eje X.

Es par porque es un polinomio y todos los términos son de grado par.

e)

$$f(x) = x^2 - 4$$

Función: **cuadrática** = *polinómica de grado dos*

Gráfica: parábola.

Es una parábola *"feliz"* porque el coeficiente líder es positivo: $a = 1 > 0$. La parábola corta el eje X en x = 2 y x = -2 porque $y = f(x) = 0$ tiene esas dos soluciones reales.

Es par porque es un polinomio y todos los términos son de grado par.

f)

$$f(x) = x^2 + x$$

Función: **cuadrática** = *polinómica de grado dos*

Gráfica: parábola.

Es una parábola *"feliz"* porque el coeficiente líder es positivo: $a = 1 > 0$. La parábola corta el eje X en x = 0 y x = -1 porque $y = f(x) = 0$ tiene esas dos soluciones reales.

No tiene paridad definida porque tiene términos de grado par (x^2) y de grado impar (x).

g)

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

Función: **cuadrática** = *polinómica de grado dos*

Gráfica: parábola.

Es una parábola *“triste”* porque el coeficiente líder es negativo: $a = -3 < 0$.

No tiene paridad definida porque tiene términos de grado par ($-3x^2$, -1) y de grado impar ($2x$).

h)

$$f(x) = x^3$$

Función: **cúbica** = *polinómica de grado tres*

Como es un monomio sin coeficiente, también se considera una función **potencial**

Gráfica: una curva que tiene simetría impar

i)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Función: **irracional**

Como es una potencia de exponente racional ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$), también se considera una función *radical*.

Gráfica: la mitad de una parábola, pero cuyo eje coincide con el eje X

j)

$$f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$$

Función: **homográfica** (familia dentro de las racionales)

Gráfica: una hipérbola [equilátera] cuyas asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas. Tiene una asíntota vertical en $x = -1$ (por la derecha y la izquierda) y una asíntota horizontal en $y = 2$.

k)

$$f(x) = \frac{2x-2}{3x+1}$$

Función: **homográfica** (familia dentro de las racionales)

Gráfica: una hipérbola [equilátera] cuyas asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas. Tiene una asíntota vertical en $x = -1/3$ (por la derecha y la izquierda) y una asíntota horizontal en $y = 2/3$.

l)

$$f(x) = 4 + \frac{-2}{x-1}$$

Función: **homográfica** (familia dentro de las racionales)

Gráfica: una hipérbola [equilátera] cuyas asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas. Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ (por la derecha y la izquierda) y una asíntota horizontal en $y = 4$.

m)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Función: **homográfica** (familia dentro de las racionales)

Como es de la forma $\frac{k}{x}$, también se puede considerar una función *de proporcionalidad inversa.*

Gráfica: una hipérbola [equilátera] cuyas asíntotas coinciden con los ejes.

n)

$$f(x) = e^x$$

Función: **exponencial**. (De hecho, como la base es el número e, es **la** función exponencial.)

Gráfica: una curva exponencial. Es creciente porque la base es mayor que 1.

ñ)

$$f(x) = \frac{1}{2}^{x}$$

Función: **exponencial**.

Gráfica: una curva exponencial. Es decreciente porque la base es menor que 1.

o)

$$f(x) = \sin(x)$$

Función: **trigonométrica**. Es la función **seno** que se representa también como $\text{sen}(x)$ según las normas ortotipográficas del español.

Gráfica: una curva sinusoidal. Es periódica.

p)

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

Es la misma función que la anterior.

q)

$$f(x) = \cos(x)$$

Función: **trigonométrica**. Es la función **coseno**.

Gráfica: una curva sinusoidal. Es periódica.

r)

$$f(x) = \text{tg}(x)$$

Función: **trigonométrica**. Es la función **tangente** que se representa también como $\tan(x)$.

Gráfica: es periódica y tiene infinitas asíntotas verticales.

s)

$$f(x) = |x|$$

Función: es la función **valor absoluto** que es una función que se puede definir a trozos.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Gráfica: es la bisectriz del cuadrante I y la bisectriz del cuadrante II.

Formas equivalentes

1. Demuestra que una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ siempre se puede escribir de la forma:

$$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$$

Donde (x_v, y_v) son las coordenadas del vértice de la parábola.

Sabemos que la coordenada x del vértice se calcula con:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Y la coordenada y del vértice es:

$$y_v = f(x_v)$$
$$y_v = f \quad \frac{-b}{2a}$$

Sustituyendo en la expresión general de la función cuadrática:

$$y_v = a \cdot \quad \frac{-b}{2a}^{\;2} + b \cdot \frac{-b}{2a} + c$$
$$y_v = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$
$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c$$
$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$
$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Si sustituimos x_v e y_v en:

$$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$$

tendremos:

$$f(x) = a \cdot \left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + 2 \cdot x \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = ax^2 + a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + 2a \cdot x \frac{b}{2a} + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = ax^2 + \frac{b^2}{4a} + bx + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2 + 4ac - b^2}{4a}$$
$$f(x) = ax^2 + bx + a$$

Que es lo que queríamos demostrar.

2. Demuestra que una función homográfica

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se puede escribir de la forma:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx + d}$$

El modo más sencillo de demostrar que son equivalentes (y encontrar la relación entre a, b, α y β) es igualar ambas expresiones:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \alpha + \frac{\beta}{cx + d}$$

Si multiplicamos por $cx + d$:

$$ax + b = \alpha \cdot (cx + d) + \beta$$
$$ax + b = \alpha c x + \alpha d + \beta$$

Para que dos polinomios sean iguales, todos sus coeficientes deben ser iguales. Por lo tanto:

$$\begin{cases} a = \alpha c \\ b = \alpha d + \beta \end{cases}$$

Es decir:

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{c}}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$b = \frac{a}{c} \cdot d + \beta$$

$$\beta = b - \frac{ad}{c}$$

$$\boxed{\beta = \frac{bc - ad}{c}}$$

Que es lo que nos pedían.

Ahora podemos ver un ejemplo concreto:

$$f(x) = \frac{4x + 7}{2x - 6}$$

donde:

- $a = 4$
- $b = 7$
- $c = 2$
- $d = -6$

Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\beta = \frac{bc - ad}{c} = \frac{7 \cdot 2 - 4 \cdot (-6)}{2} =$$
$$= \frac{38}{2} = 19$$

Entonces:

$$f(x) = 2 + \frac{19}{2x - 6}$$

No merece la pena memorizar las fórmulas para α y β. Es más práctico obtener una forma a partir de la otra con operaciones como la división de polinomios o la suma de fracciones algebraicas.

3. Para cada una de las funciones siguientes escribe otra forma equivalente:

a)

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 7}$$

b)

$$g(x) = 3 + \frac{x - 2}{x + 5}$$

Las dos funciones son funciones homográficas que se pueden escribir:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

y:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

La función $f(x)$ del apartado a está dada en la primera forma y la función $g(x)$ del apartado b está dada en la segunda forma.

a)

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-7}$$

Tenemos que dividir. El cociente es 3 y el resto es 22.

Por lo tanto:

$$f(x) = 3 + \frac{22}{x-7}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} & 3x & + & 1 & x - 7 \\ \text{-)} & 3x & - & 21 & 3 \\ \hline & & & \mathbf{22} & \end{array}$$

Figura 82: División de $3x+1$ entre $x-7$. El cociente es 3 y resto es 22.

b)

$$g(x) = 3 + \frac{x-2}{x+5}$$

Tenemos que sumar:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3\cdot(x+5)}{x+5} + \frac{x-2}{x+5} = \\ &= \frac{3x+15+x-2}{x+5} = \\ &= \frac{4x+13}{x+5} \end{aligned}$$

4. ¿Cuál es la fórmula de una función cuadrática cuyo vértice es (2, -4) y su coeficiente líder es 3?

Modo 1

Si usamos la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como el coeficiente líder es 3:

$$f(x) = 3x^2 + bx + c$$

Pero como la coordenada x del vértice es:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$
$$2 = \frac{-b}{2 \cdot 3}$$
$$b = -12$$

Es decir:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + c$$

Sabemos además que $y_v = f(x_v)$, por lo tanto:

$$-4 = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + c$$
$$-4 = -12 + c$$
$$12 - 4 = +c$$
$$c = 8$$

Es decir:

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 12x + 8}$$

Modo 2

Una función cuadrática de vértice (x_v, y_v) y coeficiente líder a puede escribirse:

$$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$$

Por lo tanto:

$$f(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 + (-4)$$
$$f(x) = 3 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 4$$
$$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 - 4$$
$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 12x + 8}$$

El segundo modo es más directo, más rápido. Pero requiere recordar la expresión exacta de una función cuadrática en función de su coeficiente líder y las coordenadas de su vértice.

5. Reescribe las siguientes funciones en la forma a^x:
a) $f(x) = 3^{2x}$
b) $f(x) = 27^{\frac{x}{3}}$
c) $f(x) = 0.1^{-x}$

a)
$$f(x) = 3^{2x}$$

$$f(x) = 3^{2\cdot x}$$
$$f(x) = {3^2}^{\ x}$$
$$f(x) = 9^x$$

Como el exponente es x y la base es mayor que 1, es una exponencial creciente.

b)
$$f(x) = 27^{\frac{x}{3}}$$

$$f(x) = 27^{\frac{1}{3}\cdot x}$$
$$f(x) = {27^{\frac{1}{3}}}^{\ x}$$
$$f(x) = {\sqrt[3]{27}}^{\ x}$$
$$f(x) = 3^x$$

Como el exponente es x y la base es mayor que 1, es una exponencial creciente.

c)
$$f(x) = 0.1^{-x}$$

$$f(x) = 0.1^{-1\cdot x}$$
$$f(x) = {0.1^{-1}}^{\ x}$$
$$f(x) = 10^x$$

Como el exponente es x y la base es mayor que 1, es una exponencial creciente.

Monotonía

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 3 - 2x$
b) $g(x) = 5x + 2$
c) $h(x) = -1$
d) $i(x) = x - 1$

Las funciones $f(x)$, $g(x)$ e $i(x)$ son **funciones afines** (= *funciones polinómicas de grado 1*). Por lo tanto, sus gráficas son líneas rectas inclinadas y serán crecientes o decrecientes en todos los reales dependiendo de la pendiente:

a) $f(x) = 3 - 2x$

Reescribiendo la función:

$$f(x) = -2x + 3$$

Vemos que la pendiente es $m = -2 < 0$. Como la pendiente es negativa:

$f(x)$ es **decreciente** en todo $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 5x + 2$

Vemos que la pendiente es $m = 5 > 0$. Como la pendiente es positiva:

$g(x)$ es **creciente** en todo $\mathbb{R}$.

c) $i(x) = x - 1$

Vemos que la pendiente es $m = 1 > 0$. Como la pendiente es positiva:

$i(x)$ es **creciente** en todo $\mathbb{R}$.

La función $h(x)$ es una **función constante** (= *función polinómica de grado 0*). Su gráfica es una línea recta horizontal. Podemos considerar que es un caso especial de función afín con pendiente igual a 0. La función es **constante** en todos los reales.

c) $h(x) = -1$

$h(x)$ es **constante** en todo $\mathbb{R}$.

2. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
b) $g(x) = 8 - 2x - x^2$

Las dos funciones son **funciones cuadráticas** (= *funciones polinómicas de grado 2* = *funciones polinómicas de segundo grado*) y, por lo tanto, sus gráficas son parábolas verticales. Por lo tanto, serán crecientes a un lado del vértice y decrecientes al otro lado.

Si la parábola tiene curvatura positiva, es decir, es una *parábola feliz*, primero decrecerá y después crecerá. Si la parábola tiene curvatura negativa, es decir, es una *parábola triste*, primero crecerá y después decrecerá.

Que una parábola sea *feliz* o *triste* depende del signo del coeficiente líder. Si el coeficiente líder es positivo, la parábola es *feliz*. Si el coeficiente líder es negativo, la parábola es *triste*.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Encontramos la coordenada x del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1$$

Y el coeficiente líder es positivo:

$$a = 2 > 0$$

por lo que la parábola es *feliz*. Primero baja y luego sube.

Por lo tanto:

- En $(-\infty, 1)$, $f(x)$ es decreciente.
- En $(1, \infty)$, $f(x)$ es creciente.

b) $g(x) = 8 - 2x - x^2$

Reordenamos el polinomio:

$$g(x) = -x^2 - 2x + 8$$

Encontramos la coordenada x del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$$

Y el coeficiente líder es negativo:

$$a = -1 < 0$$

por lo que la parábola es *triste*. Primero sube y luego baja.

Por lo tanto:

- En $(-\infty, -1)$, $f(x)$ es creciente.
- En $(-1, \infty)$, $f(x)$ es decreciente.

3. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:
a) $f(x) = (x + 2)/(x - 3)$
b) $g(x) = (2 - x)/(-x + 1)$

Se trata de dos **funciones homográficas**. Sus gráficas son hipérbolas equiláteras con las asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas.

Por lo tanto, son siempre crecientes o decrecientes. Las dos ramas en las que se divide la hipérbola suben o bajan.

a)

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

La asíntota vertical está donde se anula el denominador (que es el único número real que no pertenece al dominio):

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

Una rama estará a la derecha y otra rama estará a la izquierda de la asíntota vertical.

La asíntota horizontal se obtiene dividiendo los coeficientes líderes del numerador y del denominador:

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora solamente tenemos que comprobar si la rama a la izquierda de la asíntota vertical está encima o debajo de la asíntota horizontal. Para eso cogemos un valor cualquiera de x que sea menor que la asíntota vertical. Como la asíntota vertical está en $x = 3$, cogemos $x = 0$ y calculamos $f(0)$:

$$y = f(0) = \frac{0+2}{0-3} = -\frac{2}{3} < y_{\text{AH}} = 1$$

La rama izquierda está debajo de la asíntota horizontal, por lo tanto, $f(x)$ siempre es decreciente:

$f(x)$ es **decreciente** en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

b)

$$g(x) = \frac{2-x}{-x+1}$$

Podemos reescribirla como:

$$g(x) = \frac{-x+2}{-x+1}$$
$$g(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

La asíntota vertical está donde se anula el denominador (que es el único número real que no pertenece al dominio):

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Una rama estará a la derecha y otra rama estará a la izquierda de la asíntota vertical.

La asíntota horizontal se obtiene dividiendo los coeficientes líderes del numerador y del denominador:

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora solamente tenemos que comprobar si la rama a la izquierda de la asíntota vertical está encima o debajo de la asíntota horizontal. Para eso cogemos un valor cualquiera de x que sea menor que la asíntota vertical. Como la asíntota vertical está en $x = 1$, cogemos $x = 0$ y calculamos $f(0)$:

$$y = f(0) = \frac{0-2}{0-1} = 1 > y_{\text{AH}} = 1$$

La rama izquierda está encima de la asíntota horizontal, por lo tanto, $f(x)$ siempre es creciente:

$f(x)$ es **creciente** en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

4. Compara el crecimiento de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$
b) $g(x) = 3x + 4$
c) $h(x) = -4x + 2$

Las tres funciones son afines.

Sus pendientes son:

$$m_f = \frac{2}{5}$$
$$m_g = 3$$
$$m_h = -4$$

Por el signo de las pendientes, $f(x)$ y $g(x)$ son crecientes y $h(x)$ es decreciente.

Si comparamos los valores absolutos de las pendientes:

$$|m_f| = \frac{2}{5} < |m_g| = 3 < |m_h| = 4$$

vemos que: $f(x)$ está menos inclinada que $g(x)$ y $g(x)$ está menos inclinada que $h(x)$.

5. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:
a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 0.25^{-x}$
c) $h(x) = 3^{2x}$
d) $i(x) = 2^{-3x}$

Las cuatro funciones son **funciones exponenciales**. Por lo tanto son siempre crecientes o siempre decrecientes.

Para estudiarlas mejor, las reescribiremos con el exponente igual a x:

a) $f(x) = 2^x$

Cuando el exponente es x, la base es 2, que es mayor que 1. Por lo tanto, es **creciente** en todos los reales.

b) $g(x) = 0.25^{-x}$

$$g(x) = \quad \frac{1}{4}^{\;-x}$$
$$g(x) = \quad \frac{1}{4}^{\;-1\cdot x}$$
$$g(x) = \quad \frac{1}{4}^{\;-1 \quad x}$$
$$g(x) = 4^x$$

Cuando el exponente es x, la base es 4, que es mayor que 1. Por lo tanto, es **creciente** en todos los reales.

c) $h(x) = 3^{2x}$

$$h(x) = 3^{2\cdot x}$$
$$h(x) = \quad 3^{2} \quad ^{x}$$
$$h(x) = 9^{x}$$

Cuando el exponente es x, la base es 9, que es mayor que 1. Por lo tanto, es **creciente** en todos los reales.

d) $i(x) = 2^{-3x}$

$$i(x) = 2^{-3\cdot x}$$
$$i(x) = \quad 2^{-3} \quad ^{x}$$
$$i(x) = \quad 2^{-3} \quad ^{x}$$
$$i(x) = \quad 8^{-1} \quad ^{x}$$
$$i(x) = \quad \frac{1}{8} \quad ^{x}$$

Cuando el exponente es x, la base es $1/8$, que es menor que 1. Por lo tanto, es **decreciente** en todos los reales.

6. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \log(x)$
b) $g(x) = \log_{1/2}(x)$
c) $h(x) = \ln(x)$
d) $i(x) = \log_{3/5}(x)$

Las cuatro funciones son **funciones logarítmicas** con distintas bases. Cuando el argumento del logaritmo es x, solamente tenemos que ver si la base es mayor que 1 o menor que 1. Eso nos dice si crece en su dominio o decrece en su dominio.

a) $f(x) = \log(x)$

Cuando la base no se indica explícitamente, es un logaritmo decimal. Es decir, la base es 10:

$$f(x) = \log(x) = \log_{10}(x)$$

La base (10) es mayor que 1. Por lo tanto es **creciente** (muy despacio) en su dominio.

b) $g(x) = \log_{1/2}(x)$

La base (1/2) es menor que 1. Por lo tanto es **decreciente** (muy despacio) en su dominio.

c) $h(x) = \ln(x)$

Cuando se usa el símbolo “ln”, el logaritmo es el *logaritmo neperiano* o *logaritmo natural*. La base es el número e.

$$h(x) = \ln(x) = \log_e(x)$$

La base (e) es mayor que 1; e es algo mayor que 2,718. Por lo tanto es **creciente** (muy despacio) en su dominio.

d) $i(x) = \log_{3/5}(x)$

La base (3/5) es menor que 1. Por lo tanto es **decreciente** (muy despacio) en su dominio.

7. Estudia la monotonía de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 5x - 6 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \frac{5-3x}{2} & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

La función $f(x)$ es una **función definida a trozos**:

- El primer trozo corresponde al intervalo $(-\infty, 0)$ y es una función afín.

  Como la pendiente es 3, la pendiente es positiva y la función es **creciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$.

- El segundo trozo corresponde al intervalo $[0, 4)$ y es una función cuadrática.

  Como el coeficiente líder de $x^2 + 5x - 6$ es 1, que es positivo, la parábola es *alegre*: primero decrece y luego crece. Decrece a la izquierda del vértice y crece a la derecha del vértice.

  El vértice se encuentra con:

  $$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2 \cdot 1} = -5/2$$

  El vértice no está dentro del intervalo $[0, 4)$. El vértice está a la izquierda del intervalo, por lo tanto, en el intervalo, la función **crece**.

- El tercer trozo corresponde al intervalo $[4, \infty)$ y es una función afín.

  Se puede ver que:

  $$\frac{5 - 3x}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

  Como la pendiente es -3/2, la pendiente es negativa y la función es **decreciente** en el intervalo $[4, \infty)$.

Representación gráfica

1. Sea la función:

$$f(x) = \frac{5x + 7}{-7x + 3}$$

Indica:

a) La familia a la que pertenece

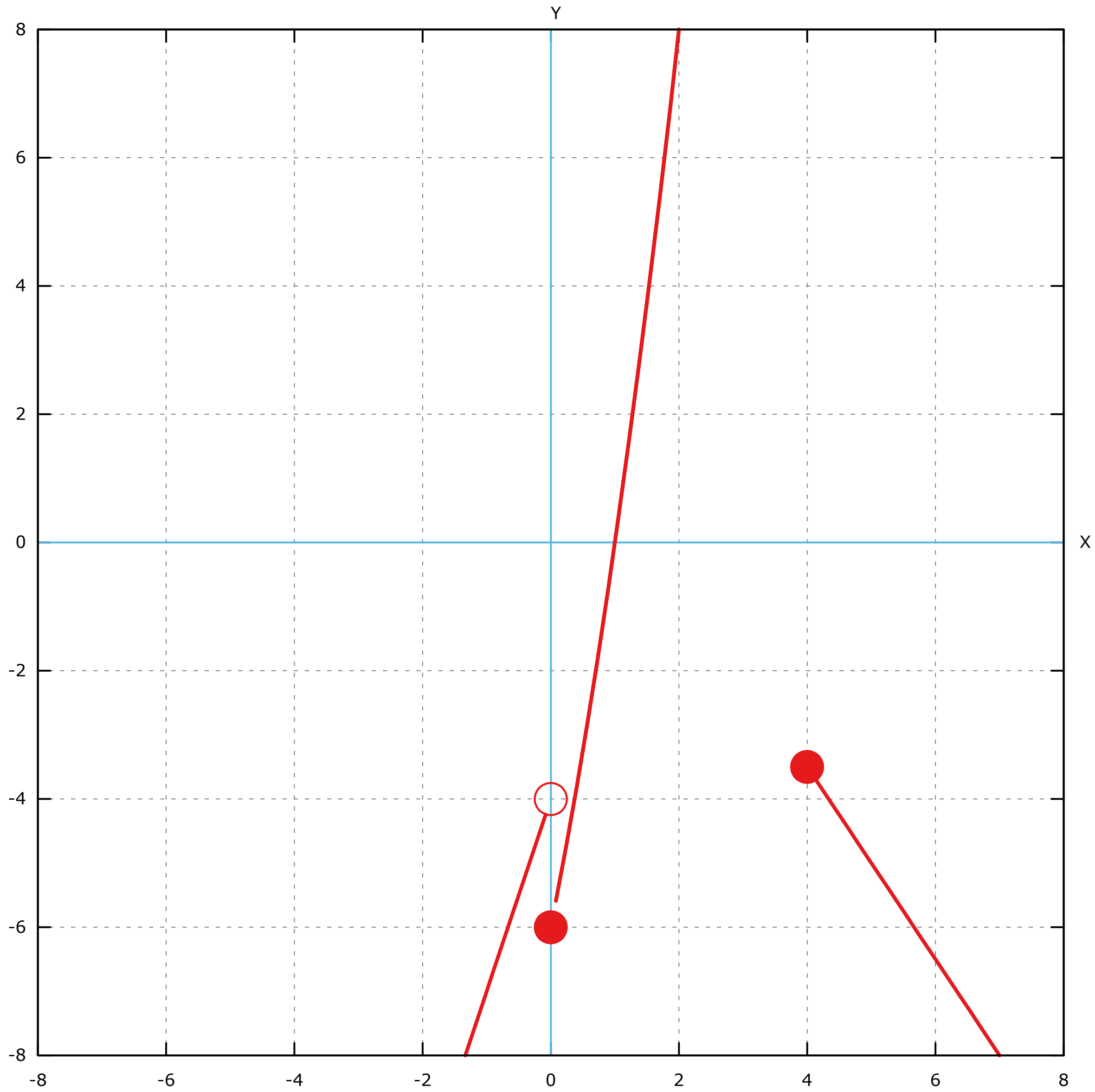


Figura 83: Gráfica de la función definida a trozos $f(x)$ que es $3x-4$ cuando $x<0$; x^2+5x-6 si $0\leq x<4$ y $(5-3x)/2$ si $x\geq 4$.

b) Su dominio, su recorrido (= su imagen) y sus asíntotas
c) Su continuidad y derivabilidad
d) El nombre del tipo de curva de su gráfica
e) Su periodicidad
f) Su simetría de paridad
g) Un esbozo de la gráfica

a) Es una **función homográfica**. Es decir, un tipo de función racional.

b)

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \frac{-3}{-7} = \mathbb{R} - \{3/7\}$$

$$\text{Im}[f(x)] = \mathbb{R} - \frac{5}{-7} = \mathbb{R} - \{-5/7\}$$

c) Como es homográfica, es continua y derivable en todos los puntos de su dominio. No es continua ni derivable en $x = 3/7$ donde tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito (una discontinuidad asintótica).

d) Es una hipérbola (una hipérbola equilátera, para ser más precisos). La hipérbola es una de las secciones cónicas no degeneradas junto a la circunferencia, la elipse y la parábola.

e) No es periódica porque es una función racional.

f) No es ni par ni impar porque el numerador y el denominador no son ni pares ni impares.

g) Se dibujan las asíntotas.

Se busca un valor de x que esté a la derecha o a la izquierda de la asíntota vertical.

Se calcula $f(x)$ y se ve si está encima o debajo de la asíntota horizontal.

Eso permite saber qué rama está encima y qué rama está debajo.

2. Sea la función:

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6$$

Indica:
a) La familia a la que pertenece
b) El dominio
c) Su continuidad y derivabilidad
d) El nombre del tipo de curva de su gráfica
e) Su periodicidad
f) Su simetría de paridad
g) Los puntos de corte con los dos ejes
h) Las coordenadas del vértice
i) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
j) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
k) $f(-1)$

a) Es una **función cuadrática**. Es decir, una función polinómica de segundo grado.

b) Como es polinómica, el dominio son todos los reales $\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R}$.

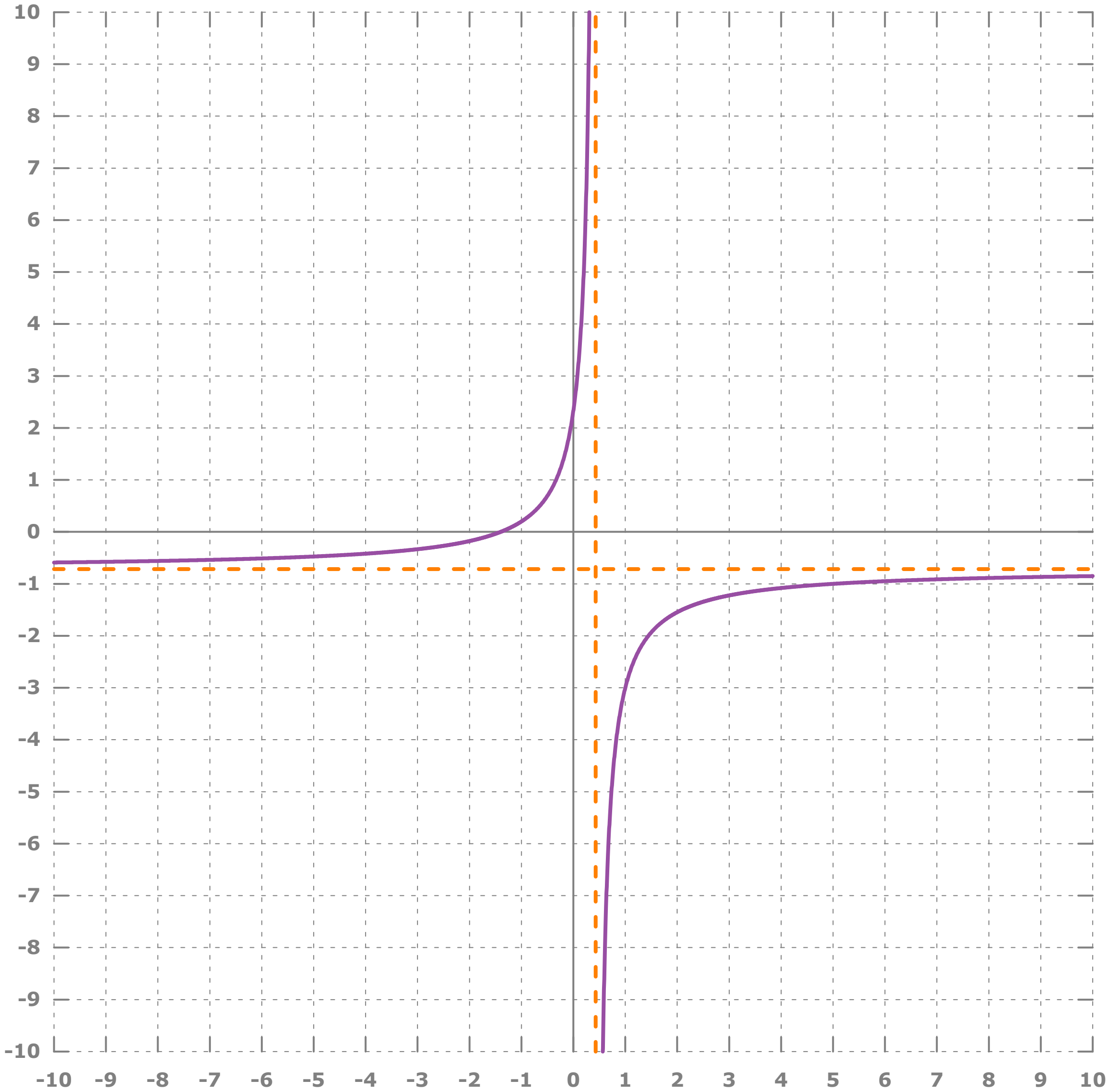


Figura 84: Gráfica de la función $f(x) = \frac{5x+7}{-7x+3}$.

c) Como es polinómica, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

   Continua significa, informalmente, que podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel (o la tiza de la pizarra).

   Derivable significa que la curva es suave. Que no tiene *picos*.

d) Como el coeficiente líder es negativo, es una **parábola *triste***.

e) No es periódica porque es polinómica.

f) No es ni par ni impar porque tiene términos de grado par y de grado impar.

g) Con el eje Y: (0, -6). Con el eje X: (2 , 0), (3 , 0).

h) $x_v = \frac{-5}{-2} = 2.5$, $y_v = 0.25$

i) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -12$

j) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -12$

k) $f(-1) = -12$

Como es una parábola *triste* (la curvatura es negativa), hay un **máximo absoluto** en el vértice.

3. Sea la función:

$$f(x) = x^2 + 2x - 8.$$

¿Tiene extremos relativos?

$f(x)$ es una **función cuadrática**, es decir, una función polinómica de segundo grado.

La gráfica de una función cuadrática es la curva llamada **parábola**. El eje de simetría de la parábola es vertical.

Su coeficiente líder es $a = 1$. Como es positivo, la parábola es una parábola *"feliz"*. Es decir, con curvatura positiva.

El vértice de la parábola es, por lo tanto, un **mínimo absoluto**. Así que sí tiene extremos relativos.

Las coordenadas del vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- la coordenada x del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

- la coordenada y del vértice:

$$y_v = f(x_v)$$

$$y_v = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8$$

$$y_v = 1 - 2 - 8 = -9$$

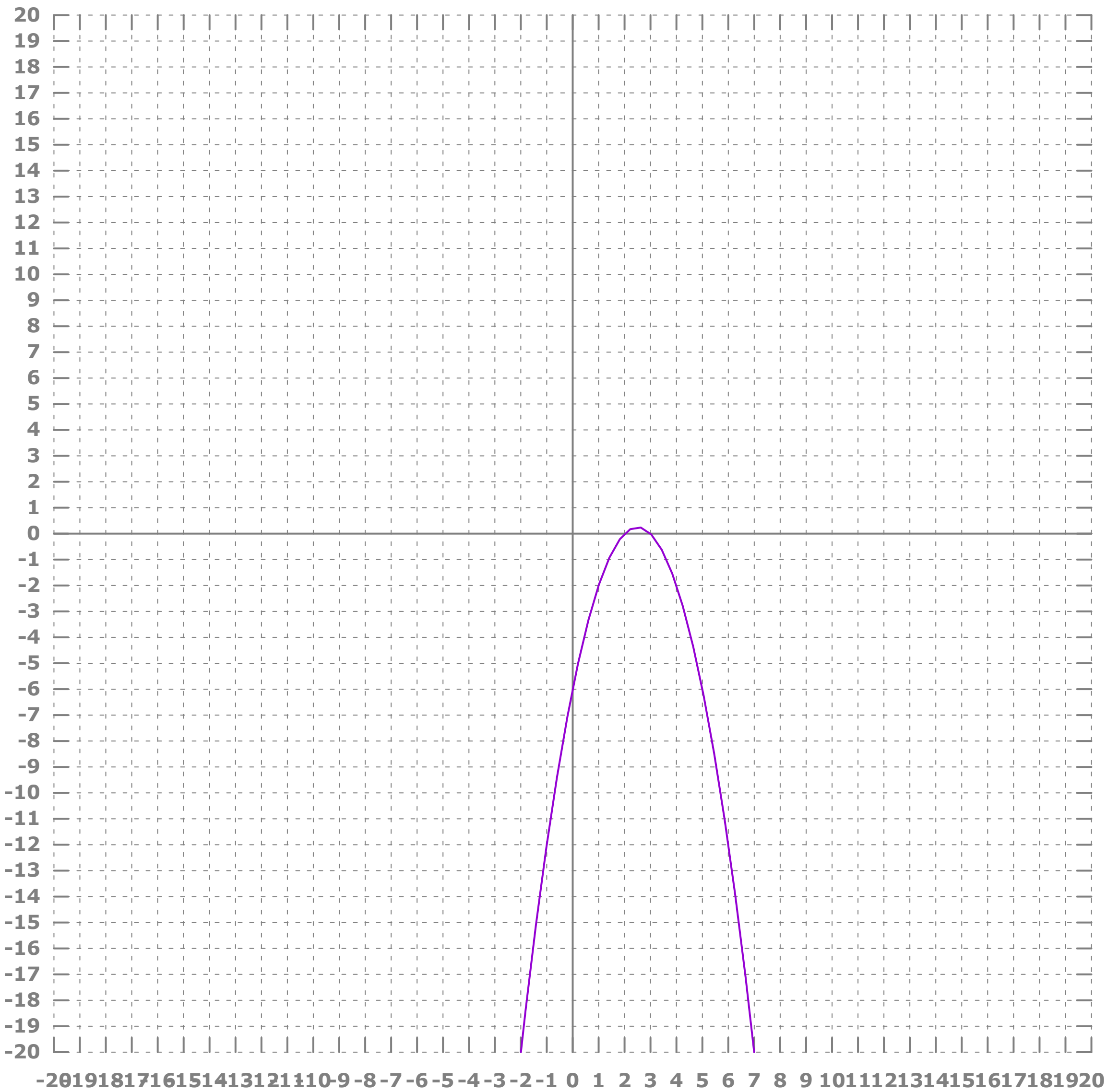


Figura 85: Gráfica de $f(x) = -x^2 + 5x - 6$.

El vértice está en (-1, -9).

Por lo tanto hay un **mínimo absoluto** en (-1, -9).

La imagen (el recorrido) es:

$$\mathrm{Im}[f(x)] = [-9, \infty)$$

4. Sea la función:

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 4.$$

¿Tiene extremos relativos?

$f(x)$ es una **función cuadrática**, es decir, una función polinómica de segundo grado.

La gráfica de una función cuadrática es la curva llamada **parábola**. El eje de simetría de la parábola es vertical.

Su coeficiente líder es $a = -2$. Como es negativo, la parábola es una parábola *"triste"*. Es decir, con curvatura negativa.

El vértice de la parábola es, por lo tanto, un **máximo absoluto**. Así que sí tiene extremos relativos.

Las coordenadas del vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- la coordenada x del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} = 1/2$$

- la coordenada y del vértice:

$$y_v = f(x_v)$$

  - 2x^2 + 2x + 4

$$y_v = f(1/2) = -2 \cdot (1/2)^2 + 2 \cdot (1/2) + 4$$

$$y_v = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

El vértice y el máximo absoluto está en:

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \quad .$$

La imagen (el recorrido) es:

$$\mathrm{Im}[f(x)] = \quad -\infty, \frac{9}{2}$$

Interpretación de gráficas

1. Estudia las siguientes propiedades de la función representada en la gráfica α: el dominio, el recorrido, la simetría, las asíntotas, la monotonía, los extremos, la curvatura, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.

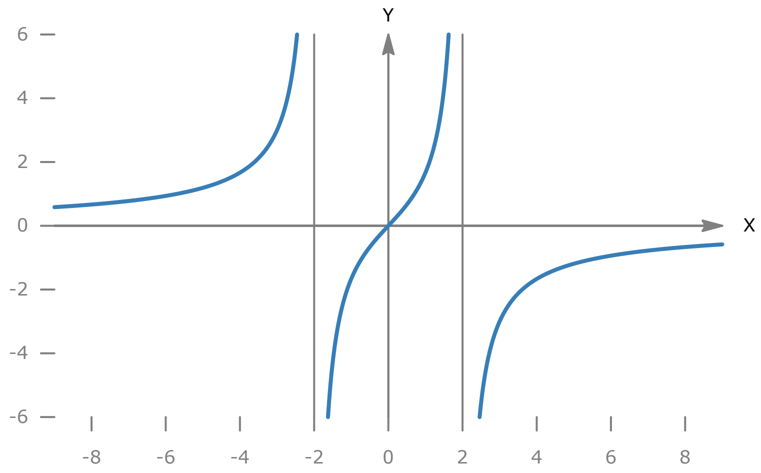


Figura 86: Gráfica α.

- El dominio

  La función está definida en todos los reales excepto en $x = -2$ y $x = 2$. Si hacemos una recta vertical en esos puntos, la recta no corta a la función, por lo tanto, no pertenecen al dominio:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

  O, lo que es lo mismo:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

- El recorrido o la imagen

  Si hacemos una recta horizontal y la movemos verticalmente, vemos que esa recta siempre corta a la función en al menos un punto.

  Por lo tanto, el recorrido o imagen de la función es el conjunto de todos los números reales:

$$\text{Rec}[f(x)] = \text{Im}[f(x)] = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

- La simetría o paridad

  La función tiene paridad impar. Es decir, simetría central respecto al origen de coordenadas.

  Eso es porque la parte de la gráfica a la izquierda del eje de ordenadas (el eje vertical, que aquí es el eje Y) se puede obtener a partir de la parte a la derecha haciendo: 1) una reflexión respecto al eje vertical y 2) una reflexión respecto al eje horizontal de la imagen obtenida en el paso anterior.

Por lo tanto, aunque no sabemos la fórmula:

$$f(-x) = -f(x)$$

- Las asíntotas

  La función tiene 2 asíntotas verticales (AV), 1 asíntota horizontal (AH) y 0 asíntotas oblicuas (AO).

  - $\exists$ AV en $x = 2$ por la izquierda y la derecha

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

  - $\exists$ AV en $x = -2$ por la izquierda y la derecha

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$$

  - $\exists$ AH en $y = 0$ hacia $-\infty$ y ∞

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$$

- La monotonía

  - En $(-\infty, -2)$, **crece**
  - En $(-2, 2)$, **crece**
  - En $(2, \infty)$, **crece**

- Los extremos

  La función no tiene extremos de ningún tipo. No tiene ni máximos ni mínimos.

- La curvatura

  - En $(-\infty, -2)$: curvatura positiva (*feliz*)
  - En $(-2, 0)$: curvatura negativa (*triste*)
  - En $(0, 2)$: curvatura positiva (*feliz*)
  - En $(2, \infty)$: curvatura negativa (*triste*)

- Los puntos de inflexión

  Como la curvatura cambia en 0 (y la función es continua en ese punto), hay un punto de inflexión en $x = 0$.

- La continuidad

  La función es continua en todo $\mathbb{R}$, excepto en -2 y 2.

  Podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel en todos los puntos, excepto en esos dos: -2 y 2.

- La derivabilidad

  La función es derivable en todo $\mathbb{R}$, excepto en -2 y 2.

  La función es *suave* (no tiene *picos*) en todo $\mathbb{R}$, excepto en esos dos puntos.

- Los puntos de corte con los ejes

  Tiene un punto de corte con ambos ejes en el origen de coordenadas: (0, 0).

- La periodicidad

  La función **no** es periódica porque no podemos construir la curva completa repitiendo un trozo de ella.

- La acotación

  La función **no** está acotada porque no está acotada ni inferior ni superiormente. Es decir, no existen cotas inferiores (números que están debajo de cualquier valor de la función) y no existen cotas superiores (números que están encima de cualquier valor de la función).

- La inyectividad

  La función **no** es inyectiva[32] porque podemos hacer líneas horizontales que cortan a la función más de una vez.

2. Estudia las siguientes propiedades de la función representada en la gráfica β: el dominio, el recorrido, la simetría, las asíntotas, la monotonía, los extremos, la curvatura, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.

- El dominio

  La función está definida en todos los reales excepto en $x = -2$ y $x = 2$. Si hacemos una recta vertical en esos puntos, la recta no corta a la función, por lo tanto, no pertenecen al dominio:

$$\mathrm{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

  O, lo que es lo mismo:

$$\mathrm{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

- El recorrido o la imagen

  Si hacemos una recta horizontal y la movemos verticalmente, hay un intervalo donde la recta no corta a la función: (1/4, 1],

  Por lo tanto, el recorrido o imagen de la función es el conjunto de todos los números reales:

$$\mathrm{Rec}[f(x)] = \mathrm{Im}[f(x)] = \mathbb{R} - \quad \frac{1}{4}, 1$$

  También se puede expresar como una unión de conjuntos:

$$\mathrm{Rec}[f(x)] = \quad -\infty, \frac{1}{4} \quad \cup (1, \infty)$$

[32] En eslovaco: *nie je prostá*.

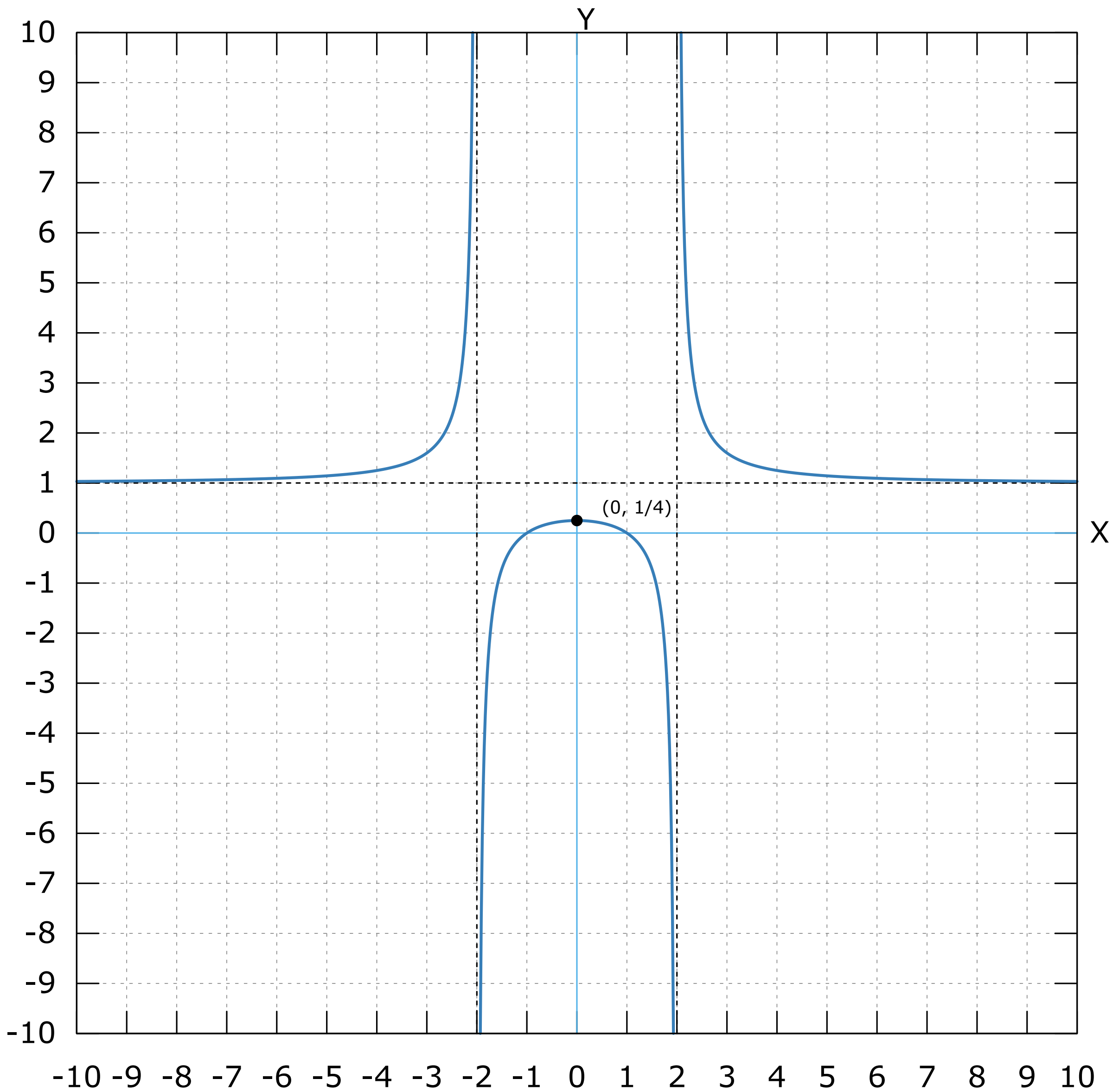


Figura 87: Gráfica β.

- La simetría o paridad

  La función tiene paridad par. Es decir, simetría axial respecto al eje vertical (el eje de ordenadas).

  Eso es porque la parte de la gráfica a la izquierda del eje de ordenadas (el eje vertical, que aquí es el eje Y) se puede obtener a partir de la parte a la derecha haciendo una reflexión respecto al eje vertical.

  Por lo tanto, aunque no sabemos la fórmula:

$$f(-x) = f(x)$$

- Las asíntotas

  La función tiene 2 asíntotas verticales (AV), 1 asíntota horizontal (AH) y 0 asíntotas oblicuas (AO).

  - $\exists$ AV en $x = 2$ por la izquierda y la derecha

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

  - $\exists$ AV en $x = -2$ por la izquierda y la derecha

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$$

  - $\exists$ AH en $y = 1$ hacia $-\infty$ y ∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

- La monotonía
  - En $(-\infty, -2)$, **crece**
  - En $(-2, 0)$, **crece**
  - En $(0, 2)$, **decrece**
  - En $(2, \infty)$, **decrece**

- Los extremos

  La función tiene un **máximo relativo** en el punto (0, 1/4). No es un máximo absoluto porque hay valores de la función porque hay valores encima de él.

  Los máximos relativos también pueden llamarse *máximos locales*.

- La curvatura
  - En $(-\infty, -2)$: curvatura positiva (*feliz*)
  - En $(-2, 2)$: curvatura negativa (*triste*)

- En $(2, \infty)$: curvatura positiva (*feliz*)

- Los puntos de inflexión

  Como la curvatura no cambia en ningún punto donde sea continua, **no hay puntos de inflexión**.

- La continuidad

  La función es continua en todo $\mathbb{R}$, excepto en -2 y 2.

  Podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel en todos los puntos, excepto en esos dos: -2 y 2.

- La derivabilidad

  La función es derivable en todo $\mathbb{R}$, excepto en -2 y 2.

  La función es *suave* (no tiene *picos*) en todo $\mathbb{R}$, excepto en esos dos puntos.

- Los puntos de corte con los ejes

  Tiene un punto de corte con el eje Y: (0, 1/4).

  Tiene dos puntos de corte con el eje X: (-1, 0), (1, 0).

- La periodicidad

  La función **no** es periódica porque no podemos construir la curva completa repitiendo un trozo de ella.

- La acotación

  La función **no** está acotada porque no está acotada ni inferior ni superiormente. Es decir, no existen cotas inferiores (números que están debajo de cualquier valor de la función) y no existen cotas superiores (números que están encima de cualquier valor de la función).

- La inyectividad

  La función **no** es inyectiva porque podemos hacer líneas horizontales que cortan a la función más de una vez.

3. Estudia las siguientes propiedades de la función representada en la gráfica γ: el dominio, el recorrido, la simetría, las asíntotas, la monotonía, los extremos, la curvatura, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.

- El dominio

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

- El recorrido o la imagen

$$\text{Rec}[f(x)] = \text{Im}[f(x)] = (0, \infty)$$

- La simetría o paridad

  La función no tiene paridad definida. No es ni par ni impar.

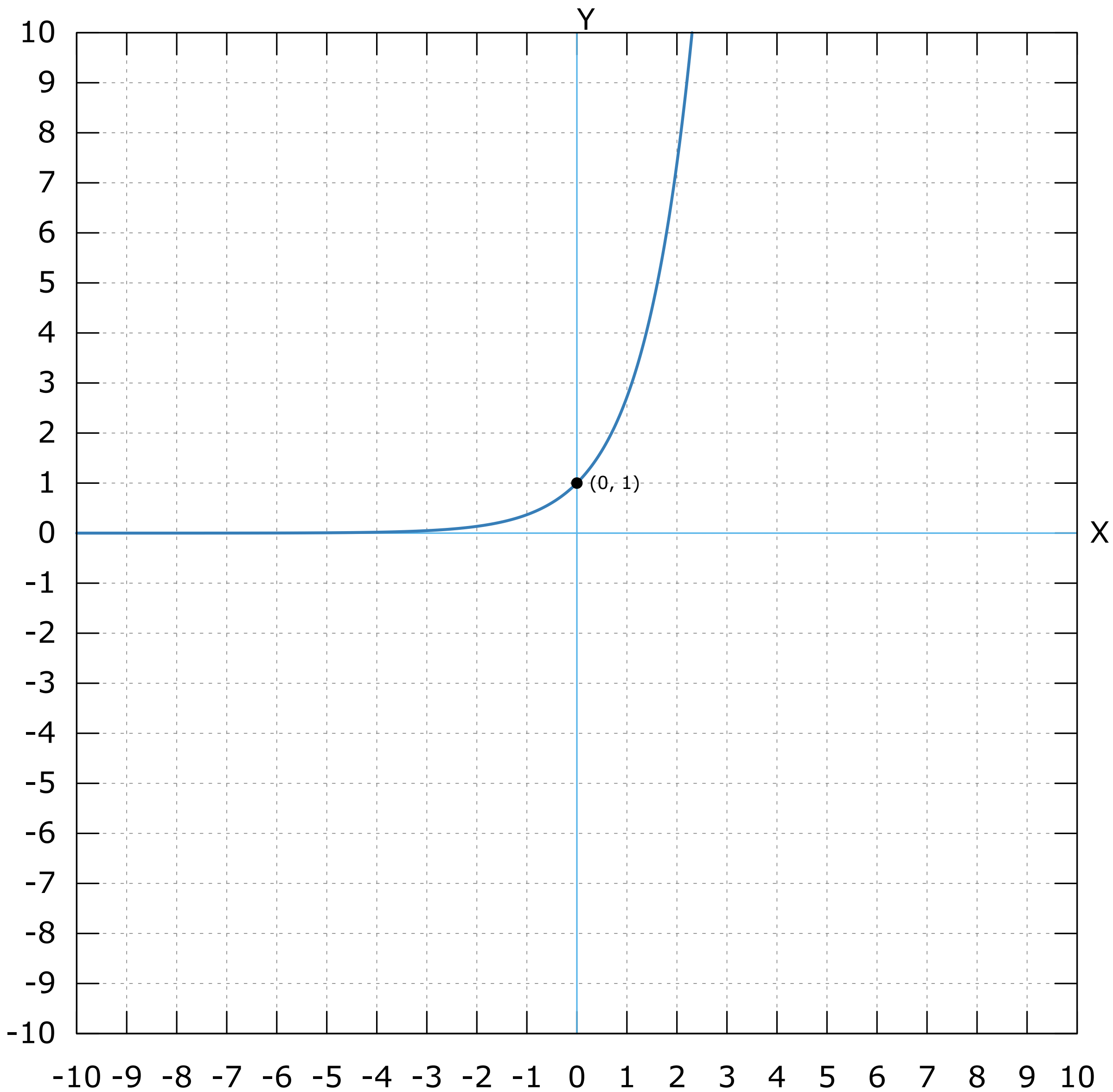


Figura 88: Gráfica γ.

- Las asíntotas

  La función tiene 0 asíntotas verticales (AV), 1 asíntota horizontal (AH) y 0 asíntotas oblicuas (AO).

  - $\exists$ AH en $y = 0$ hacia $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

- La monotonía

  Siempre es creciente.

- Los extremos

  No tiene extremos.

- La curvatura

  La curvatura siempre es positiva (*feliz*).

- Los puntos de inflexión

  No tiene puntos de inflexión.

- La continuidad

  Es continua en todos los reales.

- La derivabilidad

  Es derivable en todos los reales.

- Los puntos de corte con los ejes

  Solamente corta el eje Y: (0, 1).

- La periodicidad

  La función **no** es periódica porque no podemos construir la curva completa repitiendo un trozo de ella.

- La acotación

  La función está acotada inferiormente porque existen números que están debajo de cualquier valor de la función. Pero no está acotada superiormente.

  Cotas inferiores son el 0, el -1/2, el -0.1…

- La inyectividad

  La función **sí** es inyectiva porque ninguna línea horizontal corta a la función más de una vez.

Por la apariencia de la función puede tratarse de una **función exponencial creciente.**

De hecho, comparando valores, parece ser la **función exponencial natural**:

$$f(x) = e^x$$

4. Estudia las siguientes propiedades de la función representada en la gráfica δ: el dominio, el recorrido, la simetría, las asíntotas, la monotonía, los extremos, la curvatura, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.

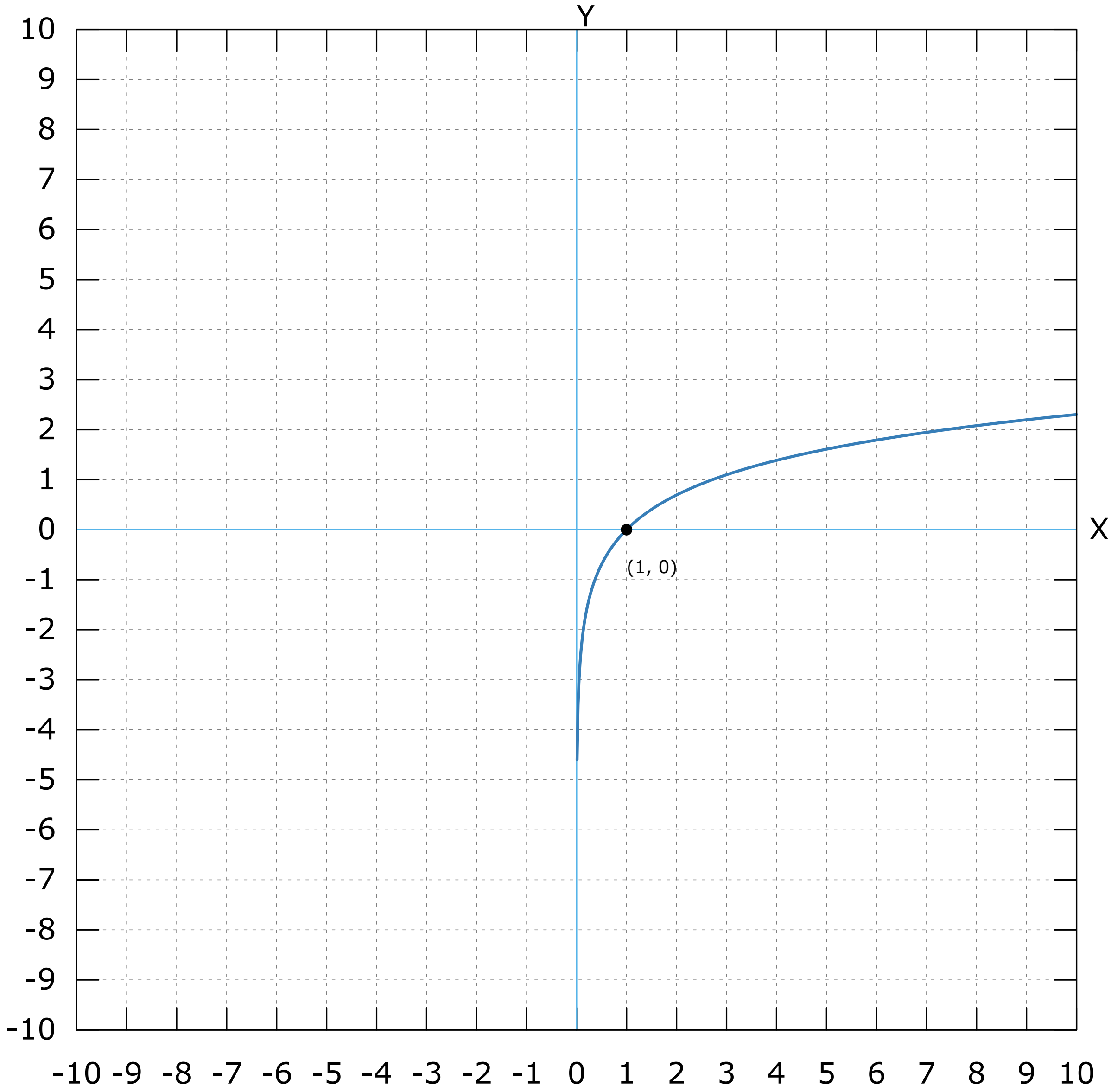


Figura 89: Gráfica δ.

- El dominio

$$\mathrm{Dom}[f(x)] = (0, \infty)$$

- El recorrido o la imagen

$$\mathrm{Rec}[f(x)] = \mathrm{Im}[f(x)] = \mathbb{R}$$

- La simetría o paridad

La función no tiene paridad definida. No es ni par ni impar.

- Las asíntotas

  La función tiene 1 asíntota vertical (AV), 0 asíntotas horizontales (AH) y 0 asíntotas oblicuas (AO).

  - ∃ AV en $x = 0$ por la derecha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

- La monotonía

  Siempre es creciente. Es estrictamente creciente.

- Los extremos

  No tiene extremos.

- La curvatura

  La curvatura siempre es negativa (*triste*).

- Los puntos de inflexión

  No tiene puntos de inflexión.

- La continuidad

  Es continua en los reales positivos.

- La derivabilidad

  Es derivable en los reales positivos.

- Los puntos de corte con los ejes

  Solamente corta el eje X: (1, 0).

- La periodicidad

  La función **no** es periódica porque no podemos construir la curva completa repitiendo un trozo de ella.

- La acotación

  La función **no** está acotada.

  Puede parecerlo, pero en principio la función es estrictamente creciente. (Aunque crece muy despacio.)

- La inyectividad

  La función **sí** es inyectiva porque ninguna línea horizontal corta a la función más de una vez.

Por la apariencia de la función puede tratarse de una **función logarítmica creciente.**

De hecho, comparando valores, parece ser la **función logaritmo natural** o **logaritmo neperiano**:

$$f(x) = \ln(x)$$

5. Estudia las siguientes propiedades de la función representada en la gráfica ϵ: el dominio, el recorrido, la simetría, las asíntotas, la monotonía, los extremos, la curvatura, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.

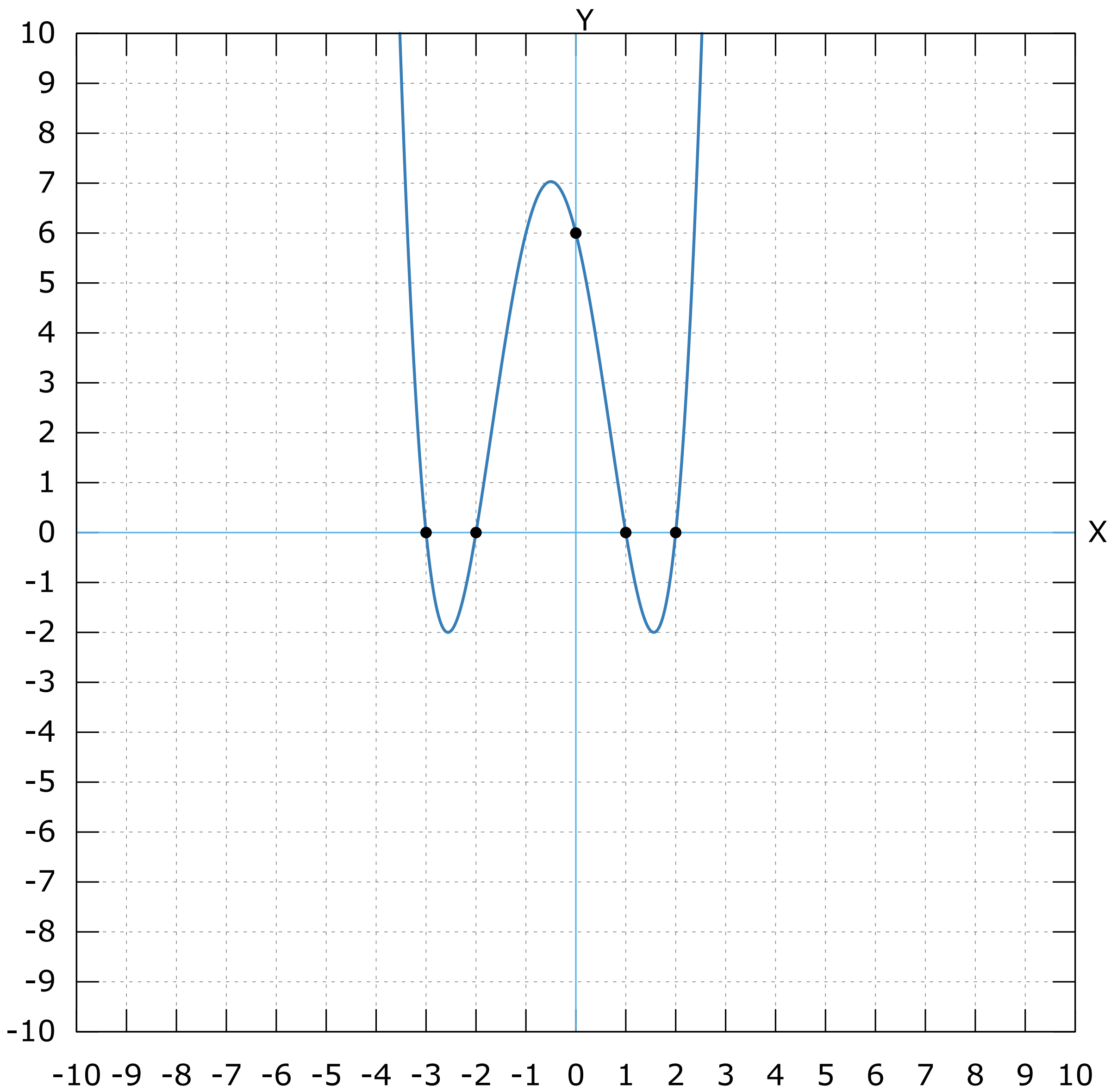


Figura 90: Gráfica ϵ.

- El dominio

$$\mathrm{Dom}[f(x)] = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

- El recorrido o la imagen

$$\mathrm{Rec}[f(x)] = \mathrm{Im}[f(x)] = [2, \infty)$$

- La simetría o paridad

La función no tiene paridad definida. No es ni par ni impar.

- Las asíntotas

  La función no tiene asíntotas.

- La monotonía

  La gráfica no nos permite decir los valores exactos de los intervalos, pero primero decrece, después crece, después vuelve a decrecer y finalmente vuelve a crecer.

- Los extremos

  Tiene un máximo relativo entre $x = -1$ y $x = 0$.

  Tiene dos máximos absolutos. Uno entre -2 y -3 y otro entre 1 y 2.

- La curvatura

  La curvatura es primero *"feliz"*, después *"triste"* y después *"feliz"*.

- Los puntos de inflexión

  Tiene puntos de inflexión entre -2 y -1 y entre 0 y 1.

- La continuidad

  Es continua en los reales positivos.

- La derivabilidad

  Es derivable en los reales positivos.

- Los puntos de corte con los ejes

  Corta el eje X en (-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0).

  Corta el eje Y en (0, 6).

- La periodicidad

  La función **no** es periódica porque no podemos construir la curva completa repitiendo un trozo de ella.

- La acotación

  La función está acotada inferiormente.

- La inyectividad

  La función **no** es inyectiva porque hay líneas horizontales que cortan a la función más de una vez.

Por la apariencia de la función puede tratarse de una **función polinómica.** Como tiene cuatro puntos de corte con el eje X y tiene tres extremos, es posible que sea un polinomio de grado 4.

6. En la gráfica ζ aparecen varias funciones. Explica razonadamente a qué familias de funciones pueden pertenecer y qué relaciones hay entre ellas.

Observando la gráfica:

- Todas las funciones son continuas y son derivables.
- El dominio de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ parece ser el conjunto de todos los reales.

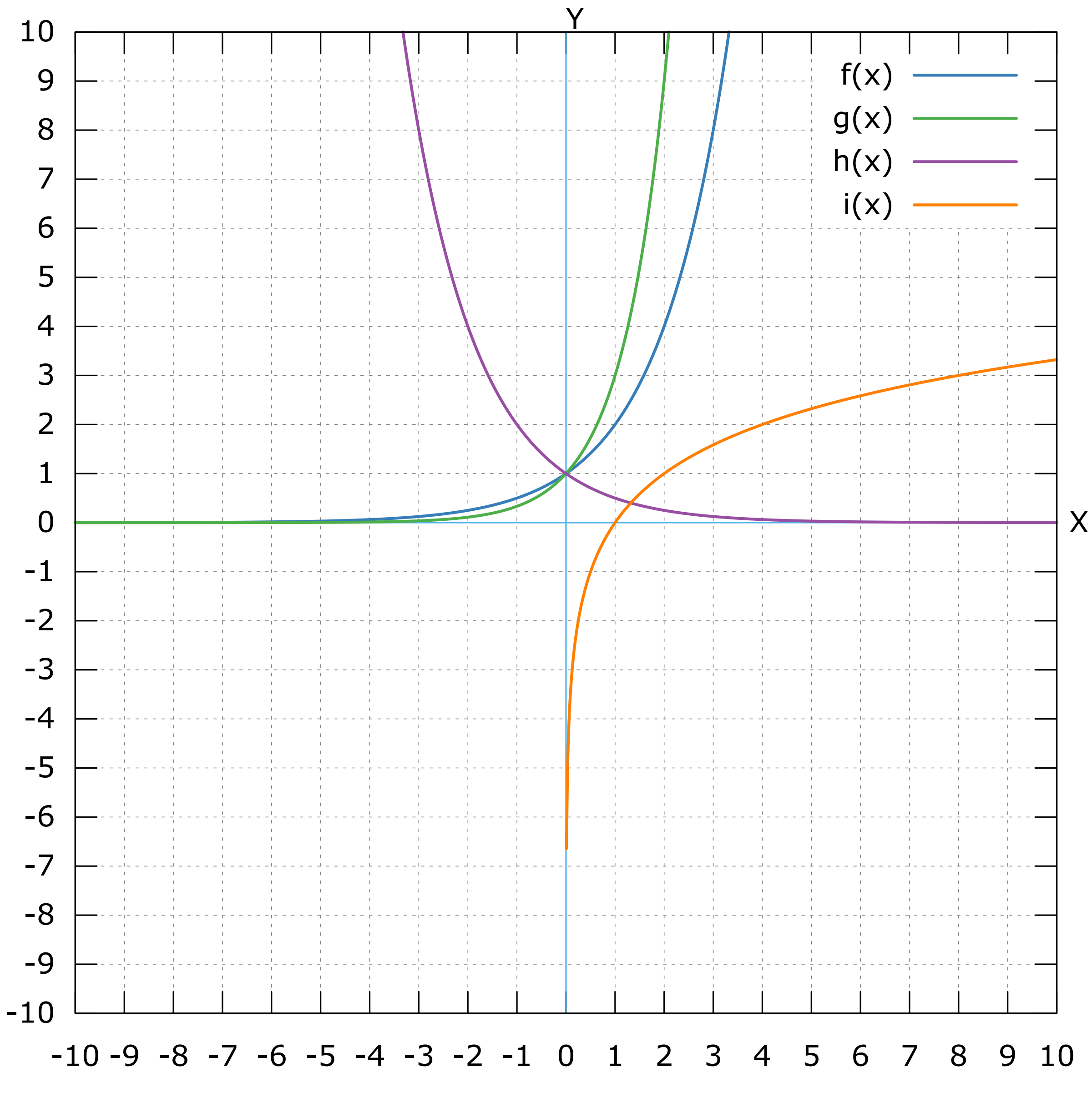


Figura 91: Gráfica ζ.

- El dominio de la función $i(x)$ es el conjunto de los reales positivos.
- El recorrido (= la imagen) de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ es el conjunto de los reales positivos.
- El recorrido (= la imagen) de la función $i(x)$ parece ser el conjunto de todos los reales.
- Las tres primeras pasan por (0, 1).
- La última pasa por (1, 0).
- Las tres primeras tienen una A.H. en $y = 0$.
- La última tiene una A.V. en $x = 0$.

Todo esto (y algunas cosas más) sugiere que:

- $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son **funciones exponenciales**
  - Como $f(x)$ y $g(x)$ son crecientes, si el exponente es x, la base debe ser mayor que 1.
  - Como $h(x)$ es decreciente, si el exponente es x, la base debe ser menor que 1.
- $i(x)$ es una **función logarítmica**
  - Como $i(x)$ es creciente, si el argumento del logaritmo es x, la base del logaritmo debe ser mayor que 1.

Además:

1. Como $g(x)$ crece más rápidamente que $f(x)$, la base de $g(x)$ debe ser mayor que la de $f(x)$.
2. Como $h(x)$ es un reflejo respecto al eje vertical (= eje de ordenadas = eje Y) de la función $f(x)$ entonces: $h(x) = f(-x)$.
3. Como $i(x)$ es un reflejo respecto a la bisectriz de los cuadrantes I y III, tiene que ser la inversa respecto a la composición de $f(x)$: $i(x) = f^{-1}(x)$.

Si hacemos una tabla de valores de $f(x)$ y $g(x)$ a partir de la gráfica:

x	$f(x)$	$g(x)$
0	1	1
1	2	3
2	4	9

Por esto y por los razonamientos anteriores:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 2^x \\ g(x) = 3^x \\ h(x) = f(-x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ i(x) = f^{-1}(x) = \log_2(x) \end{array}}$$

> **7**. En la gráfica η aparecen varias funciones. Explica razonadamente a qué familias de funciones pueden pertenecer y qué relaciones hay entre ellas.

Las cuatro funciones representadas parecen **funciones potenciales con exponente natural (mayor que cero)**:

$$x^n;\ n \in \mathbb{N}^*$$

Lo parecen porque todas pasan por (0, 0) y por (1, 1). Y porque las formas de las curvas son similares a las que conocemos de esas funciones.

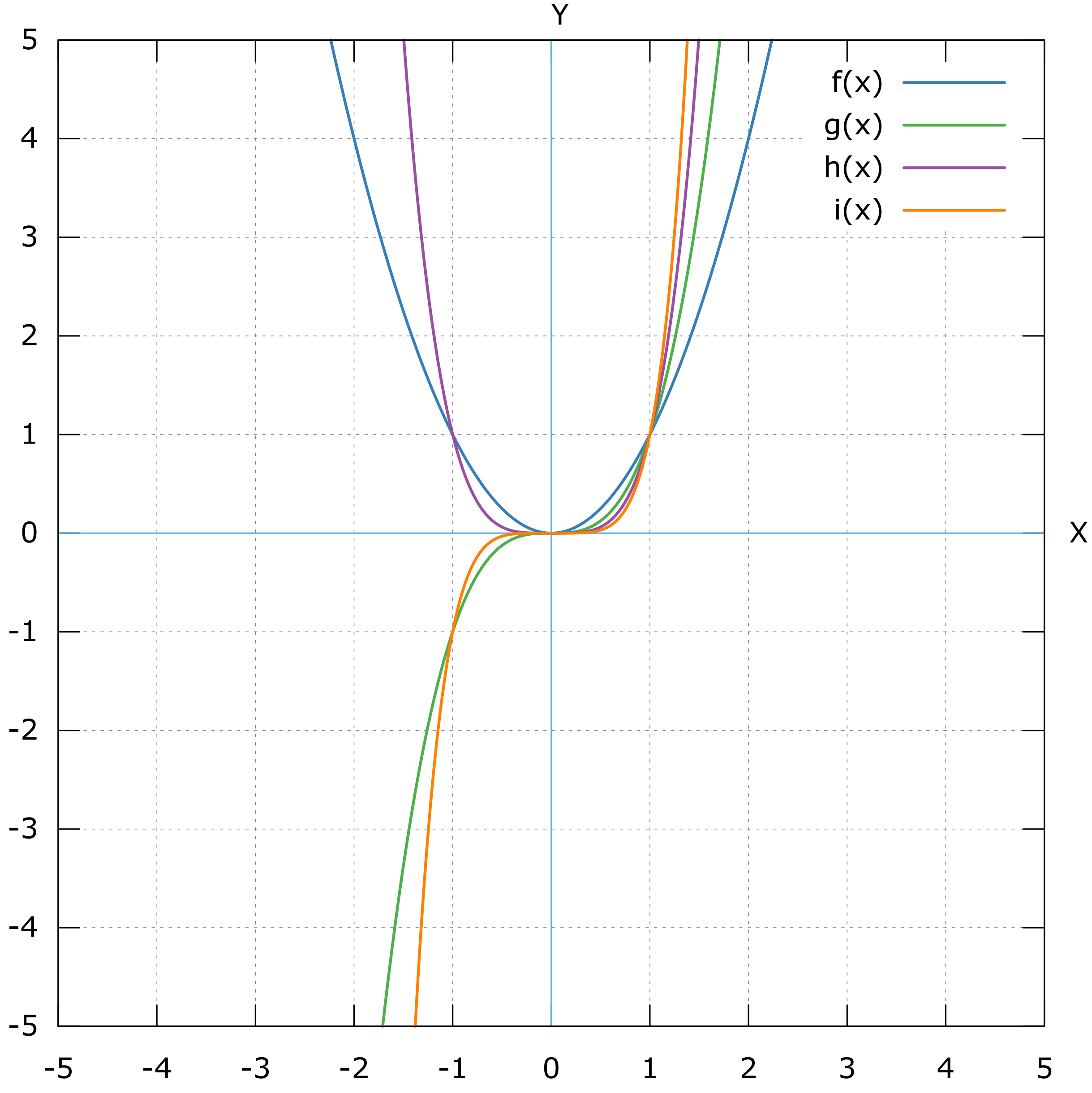


Figura 92: Gráfica η.

- $f(x)$ y $h(x)$ son funciones pares.

  Por lo tanto, el exponente debe ser par.
- $g(x)$ e $i(x)$ son funciones impares.

  Por lo tanto, el exponente debe ser impar.

La función $f(x)$ pasa por (2, 4). Eso nos sugiere que es:

$$f(x) = x^2$$

El exponente de $h(x)$ debería ser mayor que el de $f(x)$; la función $h(x)$ crece más rápidamente que $f(x)$. Por lo tanto, podría ser:

$$h(x) = x^4$$

Las otras dos funciones podrían ser:

$$g(x) = x^3$$
$$i(x) = x^5$$

8. En la gráfica *θ* aparecen varias funciones. Explica razonadamente a qué familias de funciones pueden pertenecer y qué relaciones hay entre ellas.

Las cuatro funciones representadas parecen **funciones potenciales con exponente entero negativo**:

$$x^n;\ n \in \mathbb{Z}^-$$

Parecen funciones potenciales con exponente entero negativo porque:

- $x = 0$ es el único punto que no pertenece al dominio
- $x = 0$ es una asíntota vertical en todos los casos
- $y = 0$ es el único punto que no pertenece al recorrido (= a la imagen)
- $y = 0$ es una asíntota horizontal en todos los casos
- todas pasan por (1, 1)
- todas son o pares o impares

  Es decir, todas tienen paridad definida.
- la forma general de las curvas

Las funciones que tienen simetría par (es decir, simetría axial respecto al eje de ordenadas) deben tener exponente par. Es decir, $g(x)$ e $i(x)$ tienen exponente par.

Las funciones que tienen simetría impar (es decir, simetría central respecto al origen de coordenadas) deben tener exponente impar. Es decir, $f(x)$ y $h(x)$ tienen exponente impar.

De las cuatro funciones, la que decrece hacia ∞ más lentamente es $f(x)$ que además parece tener la forma de una hipérbola equilátera. Por lo tanto:

$$f(x) = x^{-1}$$

O, lo que es lo mismo:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

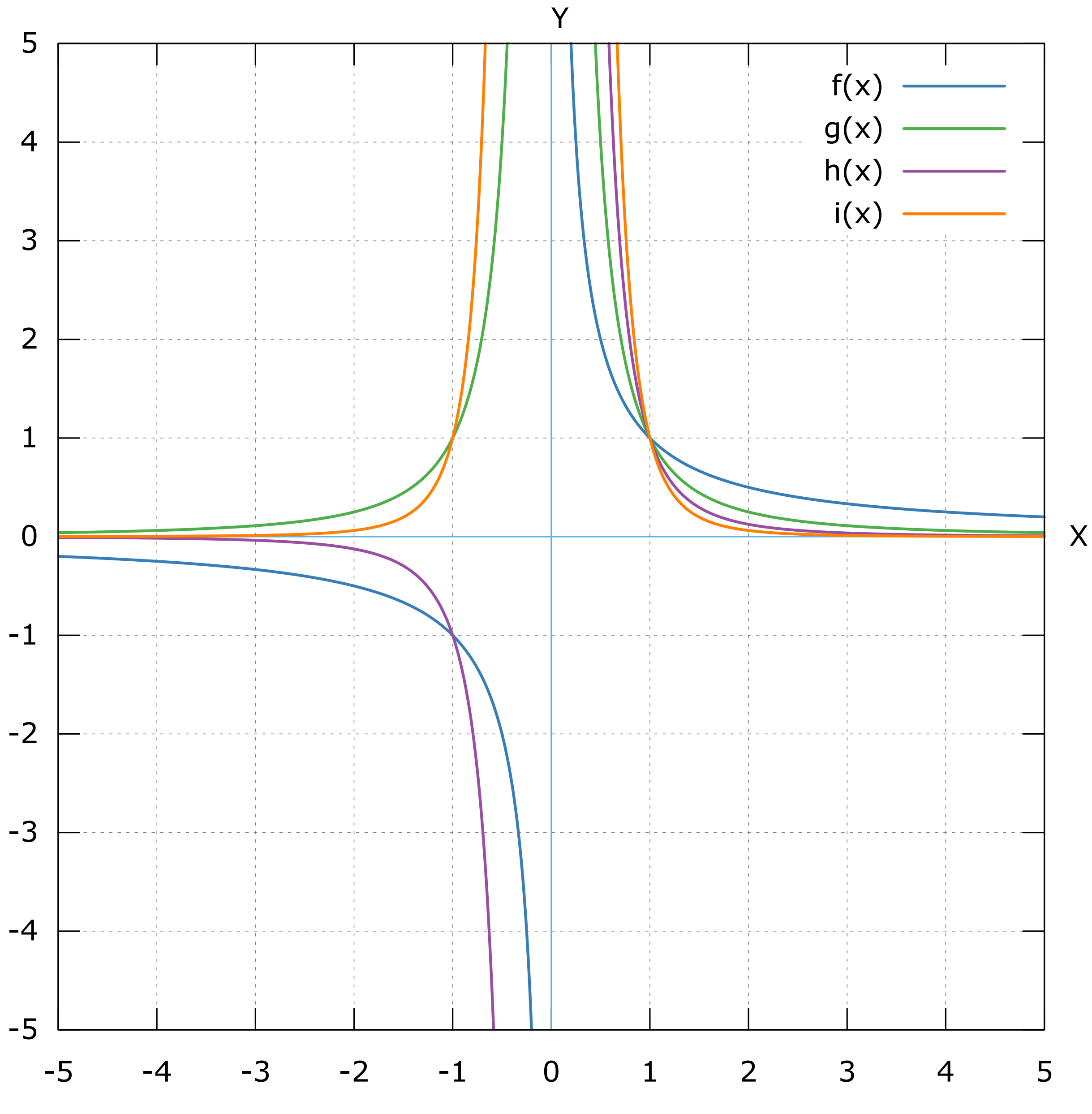


Figura 93: Gráfica θ.

Es decir, la **función de proporcionalidad inversa**.

Comparando lo rápido que decrecen las demás y sus paridades, podemos suponer:

$$g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$
$$h(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$
$$i(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

9. En la gráfica ι aparecen varias funciones. Explica razonadamente a qué familias de funciones pueden pertenecer y qué relaciones hay entre ellas.

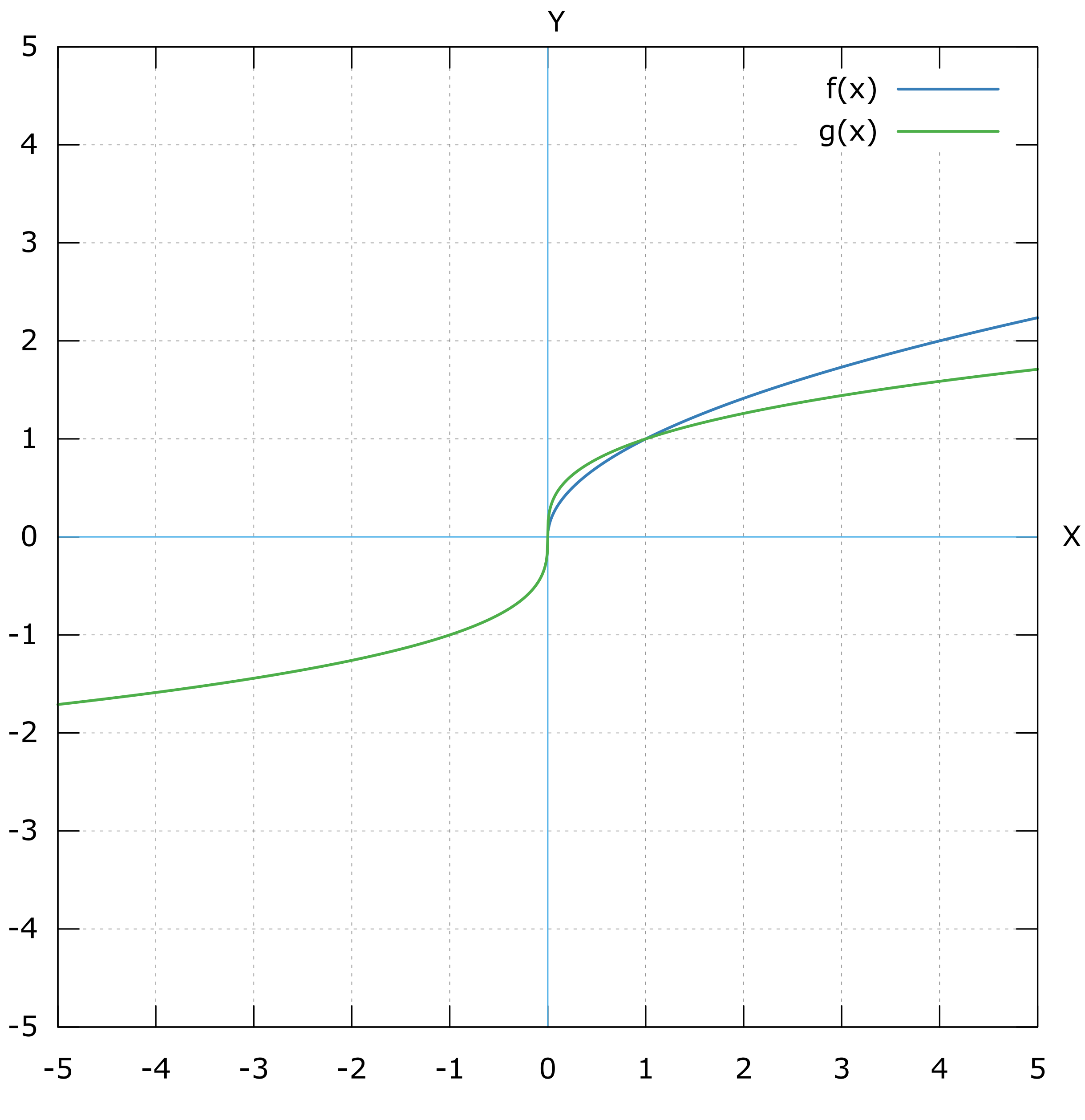


Figura 94: Gráfica ι.

La función $f(x)$ solamente está definida para los números reales positivos o para el cero. Es decir, su dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = [0, \infty)$$

Esto y el hecho de que la curva parezca la mitad de una parábola con su eje de simetría en el eje de abscisas, nos sugiere que la función $f(x)$ es la función **raíz cuadrada** de x:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Lo cual coincide con los valores que se pueden sacar de la gráfica:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(4) = 2 \end{cases}$$

Incluso observamos que $f(2)$ es ligeramente menor que 2.5, que es lo que ocurre con la raíz cuadrada de dos:

$$\sqrt{2} \approx 1.414 < 2.5$$

Por otro lado, el dominio de la función $g(x)$ es igual a todos los reales. Además tiene simetría impar (= simetría central respecto al origen de coordenadas):

$$g(-x) = -g(x)$$

Pasa por (1, 1) y por (-1, -1) y hacia ∞ crece más lentamente que $f(x)$. Eso sugiere que probablemente es:

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

Es decir, se trata de dos **funciones radicales** o, lo que es lo mismo, **funciones potenciales con exponentes fraccionarios**.

10. En la gráfica κ aparece una función. ¿A qué familia es posible que pertenezca? ¿Cuál es su posible fórmula?
En la gráfica se han señalado varios puntos para facilitar la tarea.

La gráfica muestra claramente:

- una AV (asíntota vertical) en $x = 3$ por la derecha y la izquierda

  y que el dominio es:

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R} - \{3\}$$

- una AH (asíntota horizontal) en $y = 1$ hacia $-\infty$ y hacia ∞

  y que la imagen es:

$$\text{Im}[f(x)] = \mathbb{R} - \{1\}$$

- la función no tiene simetría de paridad

  pero tiene **simetría central respecto al punto de corte de las dos asíntotas**

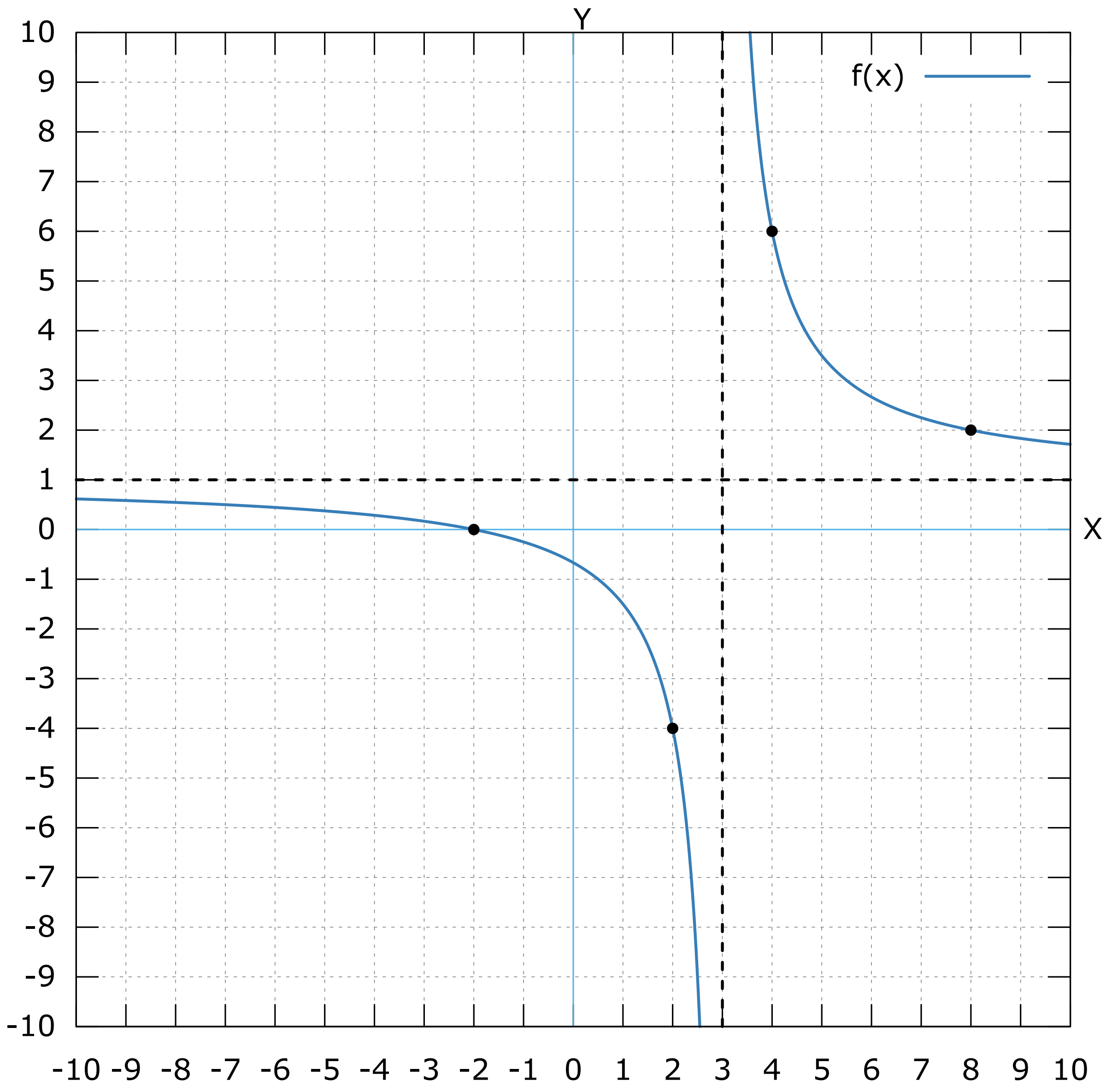


Figura 95: Gráfica κ.

- la forma de la curva es la de una hipérbola equilátera con las asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas

Por lo tanto, la función debería ser una **función homográfica** que puede escribirse:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

o también:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

La asíntota vertical de una función homográfica está donde se anula el denominador:

$$cx + d = 0$$

$$x = -d/c$$

Como la asíntota vertical está en $x = 3$:

$$-d/c = 3$$

Por otro lado, la asíntota horizontal de una función homográfica está en a/c por lo que:

$$a/c = 1$$

Observando los puntos de la función, vemos que:

$$f(-2) = 0$$

$$\frac{a\cdot(-2)+b}{c\cdot(-2)+d} = 0$$

$$-2a + b = 0$$

Si cogemos que a es igual a 1, entonces c tiene que ser 1, d tiene que ser -3 y b tiene que ser 2.

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

Comprobamos que es así para los otros tres puntos que aparecen marcados en la gráfica:

$$f(2) = \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$f(4) = \frac{4+2}{4-3} = \frac{6}{1} = 6$$

$$f(8) = \frac{8+2}{8-3} = \frac{10}{5} = 2$$

Todos los valores coinciden con los puntos de la gráfica, lo que indica que hemos encontrado la fórmula correcta para la función.

Operaciones con funciones

1. Sean las funciones $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$ y $h(x) = 2^x$, realiza las siguientes operaciones de funciones y expresa el resultado de la forma más compacta posible:

a) $f + g$
b) $f - g$
c) $f \cdot g$
d) $\frac{f}{g}$
e) $f + h$
f) $g \cdot h$

a)

$$f + g =$$
$$= (2x + 3) + \frac{2}{x+1} =$$

Es la suma de un polinomio y una fracción algebraica. Convertimos el polinomio en una fracción algebraica con denominador 1:

$$= \frac{2x+3}{1} + \frac{2}{x+1} =$$

El mínimo común múltiplo de ambas fracciones es $x + 1$:

$$= \frac{(2x+3)\cdot(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+3}{x+1} + \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+3+2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+5}{x+1}$$

Esta fracción algebraica no se puede simplificar; el denominador $(x+1)$ ya está factorizado y la raíz correspondiente (que es polo de la fracción) es -1. Y esa raíz no es raíz del numerador, porque no lo anula:

$$2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1) + 5 = 2 \neq 0$$

Por lo tanto, la fracción es irreducible y podemos dejar la función así.

b)

$$f - g =$$

Los pasos son muy similares a los pasos en el apartado anterior:

$$= (2x + 3) - \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x+3}{1} - \frac{2}{x+1} =$$

$$= \frac{(2x+3)\cdot(x+1)}{x+1} - \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+3}{x+1} - \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+3-2}{x+1} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+1}{x+1}$$

Que es irreducible.

c)

$$f \cdot g =$$
$$= (2x+3) \cdot \frac{2}{x+1} =$$
$$= \frac{(2x+3)\cdot 2}{x+1} =$$
$$= \frac{4x+6}{x+1}$$

Que es irreducible:

d)

$$\frac{f}{g} =$$
$$= \frac{(2x+3)}{\frac{2}{x+1}} =$$
$$= (2x+3) : \frac{2}{x+1} =$$
$$= (2x+3) \cdot \frac{x+1}{2} =$$
$$= \frac{(2x+3)\cdot(x+1)}{2} =$$
$$= \frac{2x^2+5x+3}{2} =$$

Que es un polinomio. Escribiéndolo con sus coeficientes:

$$= x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

e)

$$f + h =$$
$$= (2x+3) + 2^x =$$
$$= 2x + 3 + 2^x$$

La expresión no puede simplificarse más.

f)

$$
\begin{aligned}
&g \cdot h = \\
&= \frac{2}{x+1} \cdot 2^x = \\
&= \frac{2 \cdot 2^x}{x+1} = \\
&= \frac{2^{1+x}}{x+1} = \\
&= \frac{2^{x+1}}{x+1}
\end{aligned}
$$

La expresión no puede simplificarse más.

El último paso, en el que se reordena el exponente y se pasa de $1+x$ a $x+1$ no es necesario, pero hace que la expresión sea más simétrica y *bonita*.

Composición

1. Sean las funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \frac{2x-1}{x+4}$, calcula:
a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f \circ f$
d) $g \circ g$

El pequeño símbolo $\circ$ no es un círculo, sino el símbolo de la **composición de funciones**. Por comodidad, $f \circ g$ se puede leer *efe de ge*, $g \circ f$ se puede leer *ge de efe*... Aunque hay otros modos de leerlo, son más confusos y, por eso, no los mencionamos.

Como **la composición de funciones no es (en general) conmutativa**, sabemos que los apartados a) y b) tendrán posiblemente soluciones diferentes.

a) $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot [g] + 2 =$$

Sustituimos la función g:

$$= 3 \cdot \frac{2x-1}{x+4} + 2 = \frac{6x-3}{x+4} + 2 =$$

Sumamos las fracciones:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6x-3}{x+4} + \frac{2x+8}{x+4} = \frac{6x-3+2x+8}{x+4} = \\
&= \frac{8x+5}{x+4}
\end{aligned}
$$

b) $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2[f]-1}{[f]+4} =$$

Sustituimos la función f:

$$= \frac{2[3x+2]-1}{[3x+2]+4} = \frac{6x+4-1}{3x+2+4} =$$

$$= \frac{6x+3}{3x+6}$$

c) $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 \cdot [f] + 2 =$$
$$= 3 \cdot [3x+2] + 2 =$$
$$= 9x + 6 + 2 =$$
$$= 9x + 8$$

d) $g \circ g$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{2[g]-1}{[g]+4} =$$
$$= \frac{2 \quad \frac{2x-1}{x+4} \quad -1}{\frac{2x-1}{x+4} \quad +4} =$$
$$= \frac{\frac{4x-2}{x+4} - 1}{\frac{2x-1}{x+4} + 4} =$$
$$= \frac{\frac{4x-2}{x+4} - \frac{x+4}{x+4}}{\frac{2x-1}{x+4} + \frac{4x+16}{x+4}} =$$
$$= \frac{\frac{3x-6}{x+4}}{\frac{6x+15}{x+4}} =$$
$$= \frac{3x-6}{6x+15}$$

2. Encuentra la función inversa de $f(x) = 5x + 4$.

$f(x)$ es una *función afín*. La función inversa (respecto a la composición) de una función afín también es una función afín.

$$f(x) = 5x + 4$$
$$y = 5x + 4$$
$$-5x = -y + 4$$
$$x = \frac{-y+4}{-5}$$
$$x = \frac{1}{5}y - \frac{4}{5}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}$$

La pendiente de la inversa es 1/5 y su ordenada en el origen es -4/5.

3. Demuestra que la función inversa de $f(x) = 5x + 4$ es $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$.

Una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ siempre cumplen:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

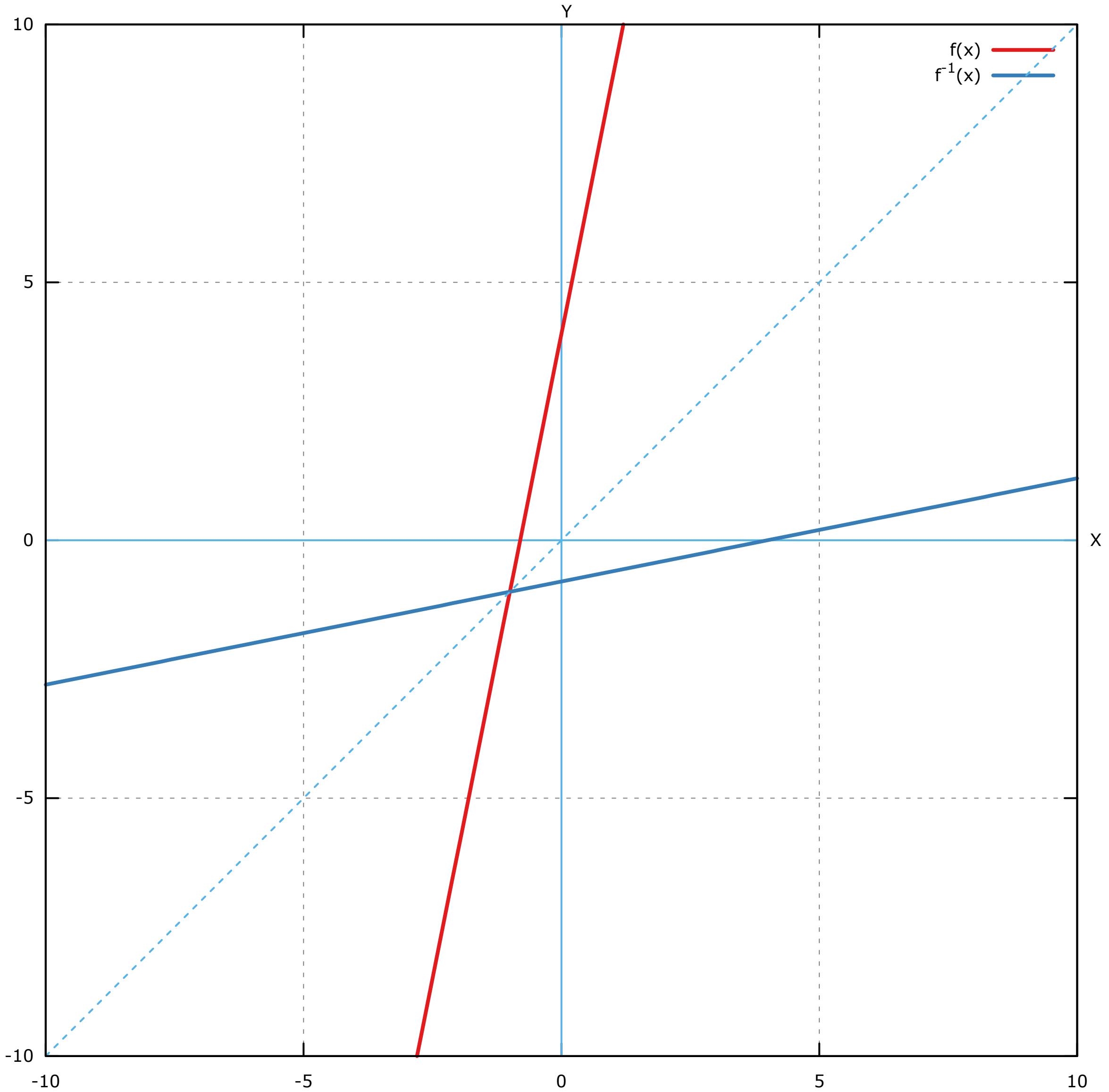


Figura 96: Gráfica de la función $f(x) = 5x + 4$ y de su inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$. Una es reflejo de la otra respecto a la bisectriz de los cuadrantes primero y segundo. Es decir, respecto a la gráfica de la función identidad $I(x) = x$.

donde I es la **función identidad**:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Calculamos $f \circ f^{-1}$:

$$f(f^{-1}(x)) = 5 \cdot \quad f^{-1} \quad + 4 =$$
$$= 5 \cdot \quad \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} \quad + 4 =$$
$$= x - 4 + 4 = x$$

Calculamos $f^{-1} \circ f$ (aunque no sería necesario):

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{5}[f] - \frac{4}{5} =$$
$$= \frac{1}{5}\left[5x + 4\right] - \frac{4}{5} =$$
$$= x + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = x$$

Como queríamos demostrar.

4. Encuentra la función inversa de

$$f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 6}.$$

La función

$$f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 6}$$

es una función homográfica (y su gráfica es una hipérbola equilátera).

La función inversa de una función homográfica es otra función homográfica. (En algunos casos, la función inversa de la función homográfica es la misma función.)

$$y = \frac{4x + 1}{2x - 6}$$
$$y \cdot (2x - 6) = 4x + 1$$
$$2yx - 6y = 4x + 1$$
$$2yx - 4x = 6y + 1$$

Sacamos x como factor común:

$$x \cdot (2y - 4) = 6y + 1$$

Dividimos:

$$x = \frac{6y + 1}{2y - 4}$$

Por lo tanto:

$$f^{-1}(x) = \frac{6x + 1}{2x - 4}$$

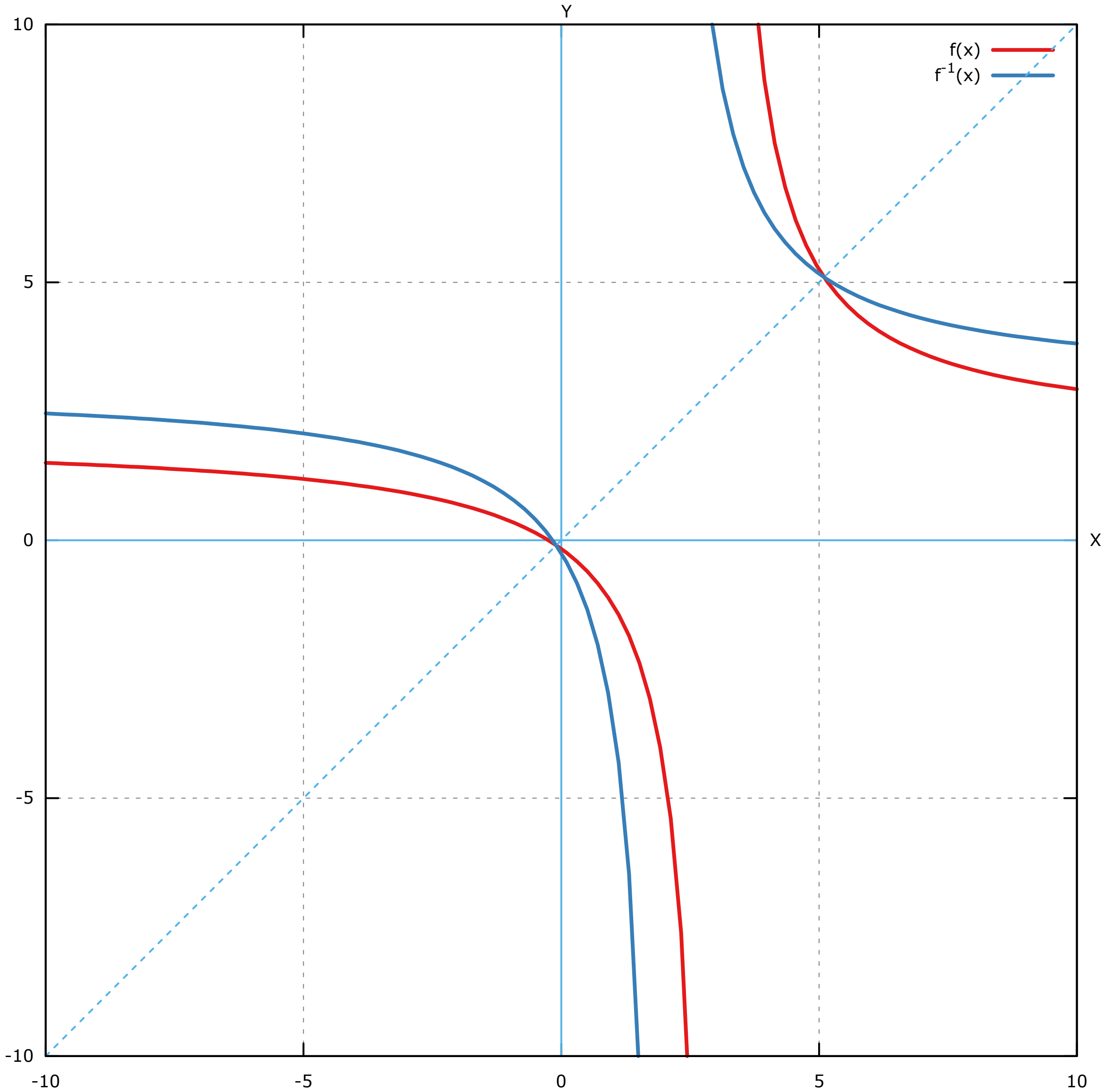


Figura 97: Gráfica de la función $f(x) = \frac{4x+1}{2x-6}$ y de su inversa $f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{2x-4}$. Una es reflejo de la otra respecto a la bisectriz de los cuadrantes primero y segundo. Es decir, respecto a la gráfica de la función identidad $I(x) = x$.

5. Demuestra que la función inversa de $f(x) = \frac{4x+1}{2x-6}$ es $f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{2x-4}$.

Una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ siempre cumplen:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

donde I es la **función identidad**:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Calculamos $f \circ f^{-1}$:

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{4[f^{-1}] + 1}{2[f^{-1}] - 6} =$$

$$= \frac{4 \quad \frac{6x+1}{2x-4} \quad + 1}{2 \quad \frac{6x+1}{2x-4} \quad - 6} =$$

$$= \frac{\frac{24x+4}{2x-4} + 1}{\frac{12x+2}{2x-4} - 6} =$$

$$= \frac{\frac{24x+4}{2x-4} + \frac{2x-4}{2x-4}}{\frac{12x+2}{2x-4} - \frac{12x-24}{2x-4}} =$$

$$= \frac{\dfrac{26x}{2x-4}}{\dfrac{26}{2x-4}} = x$$

Se puede demostrar que es el mismo resultado si hacemos $f^{-1} \circ f$.

6. ¿Es lo mismo la función inversa que la función recíproca?

No.

Por ejemplo, la función inversa de:

$$f(x) = x - 3$$

es:

$$f^{-1}(x) = x + 3$$

Y su función recíproca es:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-3}$$

Otro ejemplo es que la función inversa del seno:

$$f(x) = \sin(x)$$

es el arcoseno:

$$f(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

mientras que la función recíproca del seno es la cosecante:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sin(x)} = \text{cosec}(x)$$

Desafortunadamente, elevar a -1 puede significar cosas diferentes dependiendo del contexto.

7. ¿Puede una función ser igual a su inversa?

Sí.

El ejemplo más evidente es la función identidad: $I(x) = x$.

$$I(I(x)) = x$$

Pero, por ejemplo, también algunas funciones homográficas son inversas de ellas mismas.

8. Sean $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x^2 - x$. Encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$.

Para encontrar $f \circ g$, hacemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot [g] - 4 =$$
$$= 3 \cdot [x^2 - x] - 4 = 3x^2 - 3x - 4$$

Para encontrar $g \circ f$, hacemos:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f]^2 - [f] =$$
$$= [3x - 4]^2 - [3x - 4] =$$

Usando una de las identidades notables:

$$= 9x^2 + 16 - 24x - [3x - 4] =$$

$$= 9x^2 + 16 - 24x - 3x + 4 =$$
$$= 9x^2 - 27x + 20$$

Transformaciones

1. Sea la función:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8.$$

a) Dibuja su gráfica.
b) Indica sus extremos.

c) Dibuja la gráfica de $f(x+2)$.

La función $f(x)$ es una función cuadrática y su coeficiente líder es positivo ($a = 1 > 0$). Por lo tanto, es una parábola *"feliz"* y tiene un mínimo absoluto en su vértice.

Encontramos el vértice de la parábola:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$
$$y_v = f(x_v) = f(1) =$$
$$= 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Tiene un mínimo absoluto en (1, -9). Y es el único extremo que tiene la función. No tiene máximos y no tiene más mínimos relativos (se puede considerar que el mínimo absoluto es también un mínimo relativo). Por lo que hemos contestado al apartado c.

Encontramos los puntos de corte:

- Con Y: $x = 0$

$$y = f(x) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$$

$$(0, -8)$$

- Con X: $y = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} =$$
$$= \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$$

$$(-2, 0), \ (4, 0)$$

Podemos encontrar algún otro punto a la gráfica añadiendo otro valor de x. Por ejemplo, $x = -1$, que está a la izquierda del eje de simetría de la parábola:

$$\begin{gathered} x = -1 \rightarrow \\ \rightarrow y = f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 8 = \\ = -5 \end{gathered}$$

El punto adicional es: $(-1, -5)$.

A continuación solamente tenemos que seguir los siguientes pasos para dibujar la gráfica:

1. Dibujar los ejes, sus etiquetas y las marcas de escala.
2. Dibujar el vértice y el eje de simetría.
3. Dibujar los puntos de corte con los ejes.
4. Dibujar los puntos adicionales que hemos calculado.
5. Reflejar todos los puntos respecto al eje de simetría.
6. Unir los puntos para formar la parábola.

Una vez completada, hemos contestado el apartado a.

Nos falta el apartado c, en el que básicamente hacemos una traslación.

La función $T_2(x) = x + 2$, realiza una traslación de 2 unidades. La función $f(x + 2)$ equivale a $f(T_2(x))$. Eso equivale a mover la función 2 unidades hacia la izquierda. Por lo tanto, solamente tenemos que dibujar la función 2 unidades hacia la izquierda. Para ello solamente tenemos que mover todos los puntos 2 unidades hacia la izquierda.

2. A partir de la gráfica de una función $f(x)$ de tu elección, indica cómo son las gráficas de:

a) $f(x - 3) + 2$
b) $-f(x)$
c) $f(2x)$
d) $0.5f(x)$
e) $|f(x)|$

a) $f(x - 3) + 2$

La gráfica se mueve 3 unidades hacia la derecha y dos unidades hacia arriba.

b) $-f(x)$

La gráfica se refleja respecto al eje de abscisas.

c) $f(2x)$

La gráfica se comprime horizontalmente reduciendo la escala a la mitad.

d) $0.5f(x)$

La gráfica se comprime verticalmente reduciendo la escala a la mitad.

e) $|f(x)|$

La parte de la gráfica bajo el eje de abscisas se refleja respecto a ese eje.

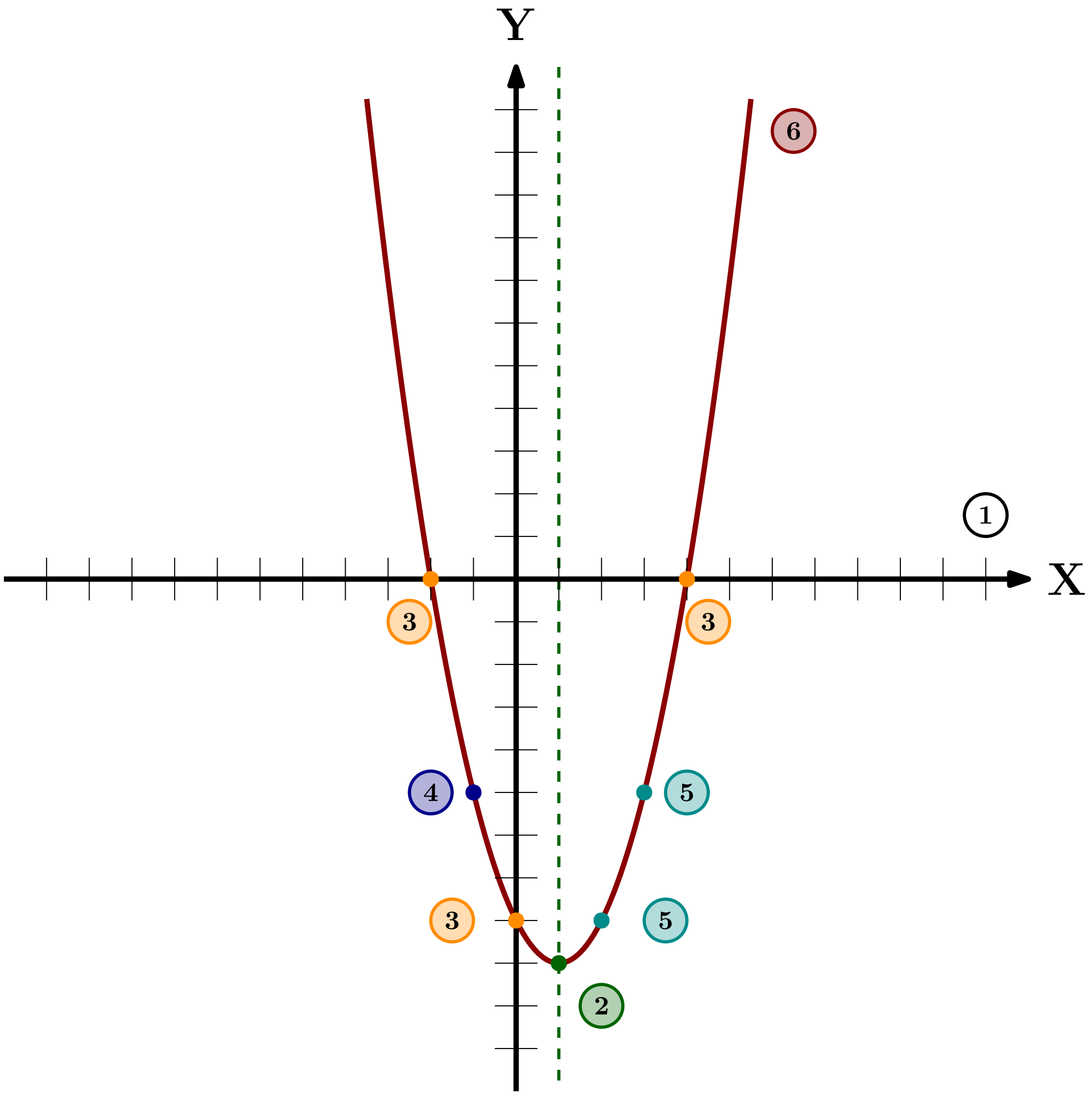


Figura 98: 1) Ejes y marcas de escala. 2) Vértice y eje de simetría. 3) Puntos de corte. 4) Puntos adicionales. 5) Reflejos respecto al eje de simetría. 6) Parábola.

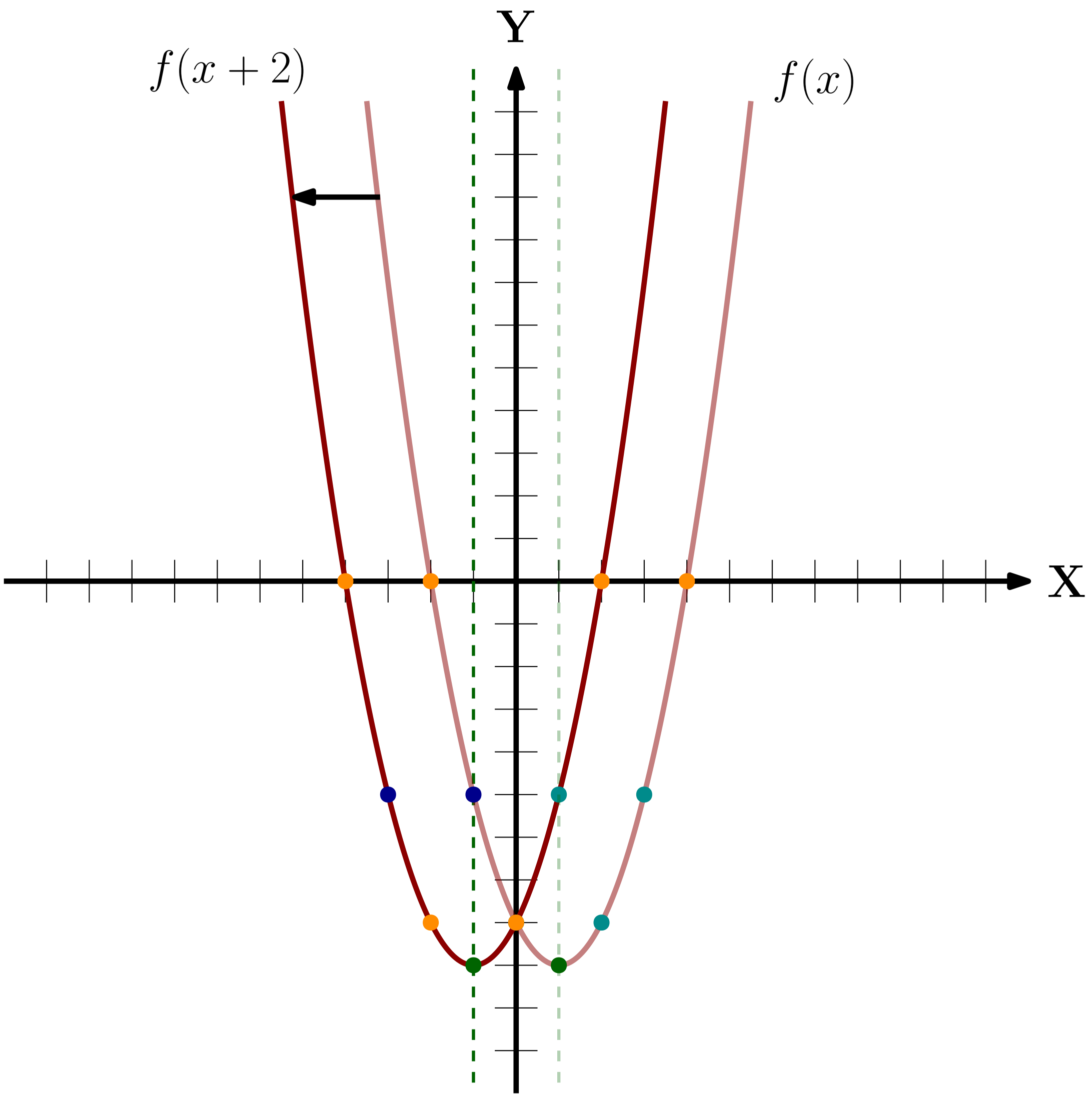


Figura 99: $f(x) = x^2 - 2x - 8$ y $f(x+2)$.

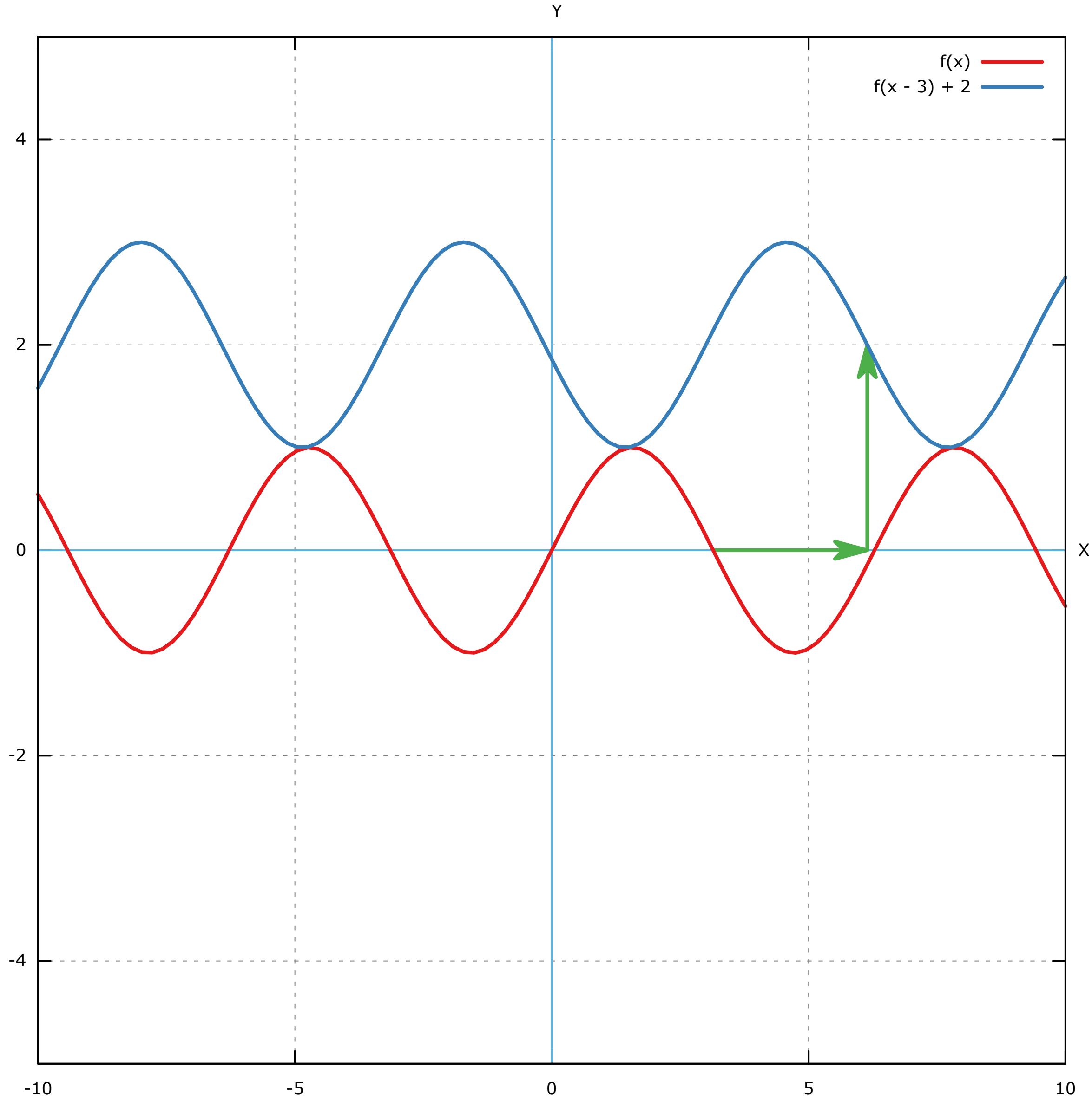


Figura 100: $f(x)$ y $f(x-3)+2$.

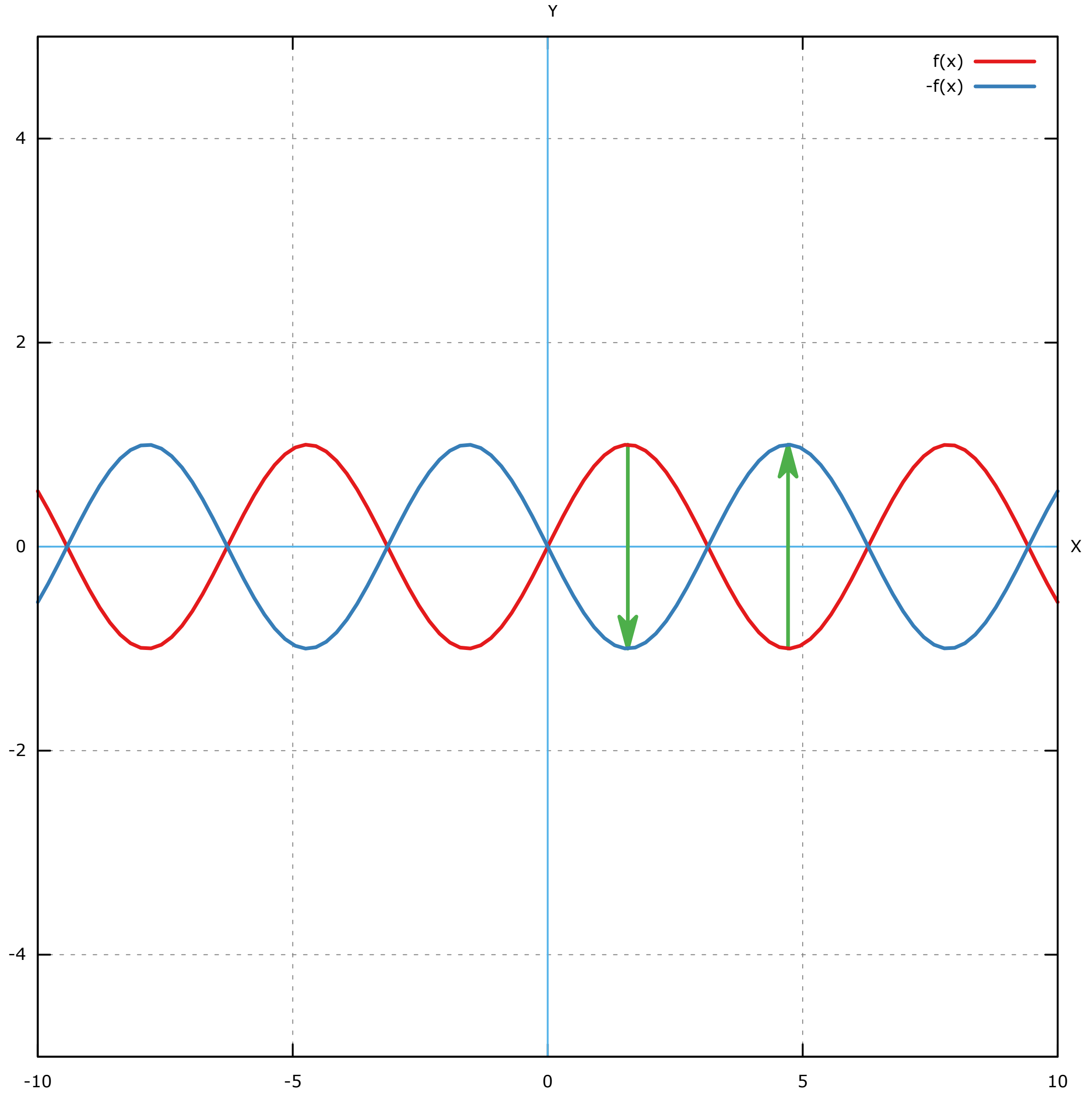


Figura 101: $f(x)$ y $-f(x)$.

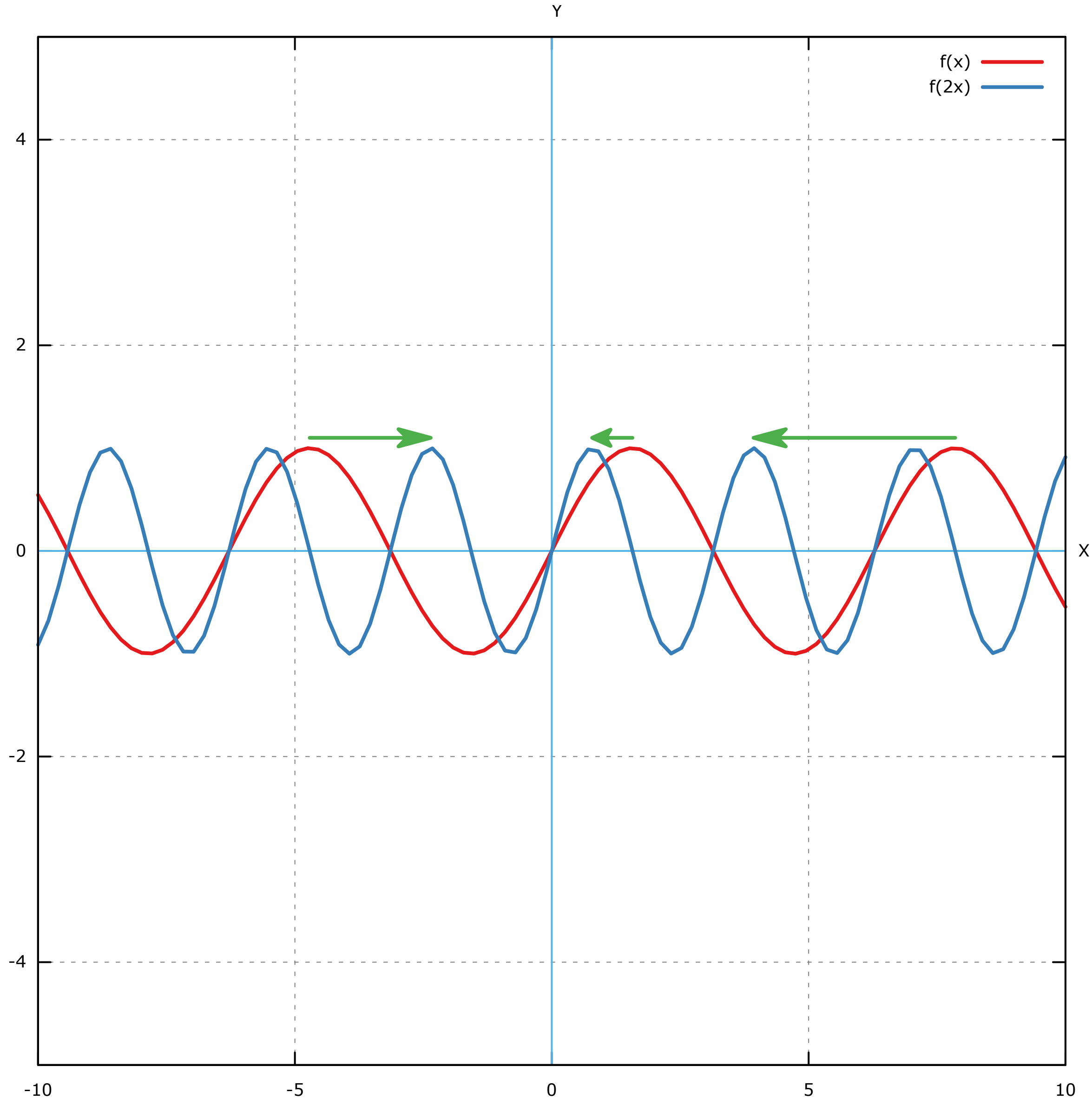


Figura 102: $f(x)$ y $f(2x)$.

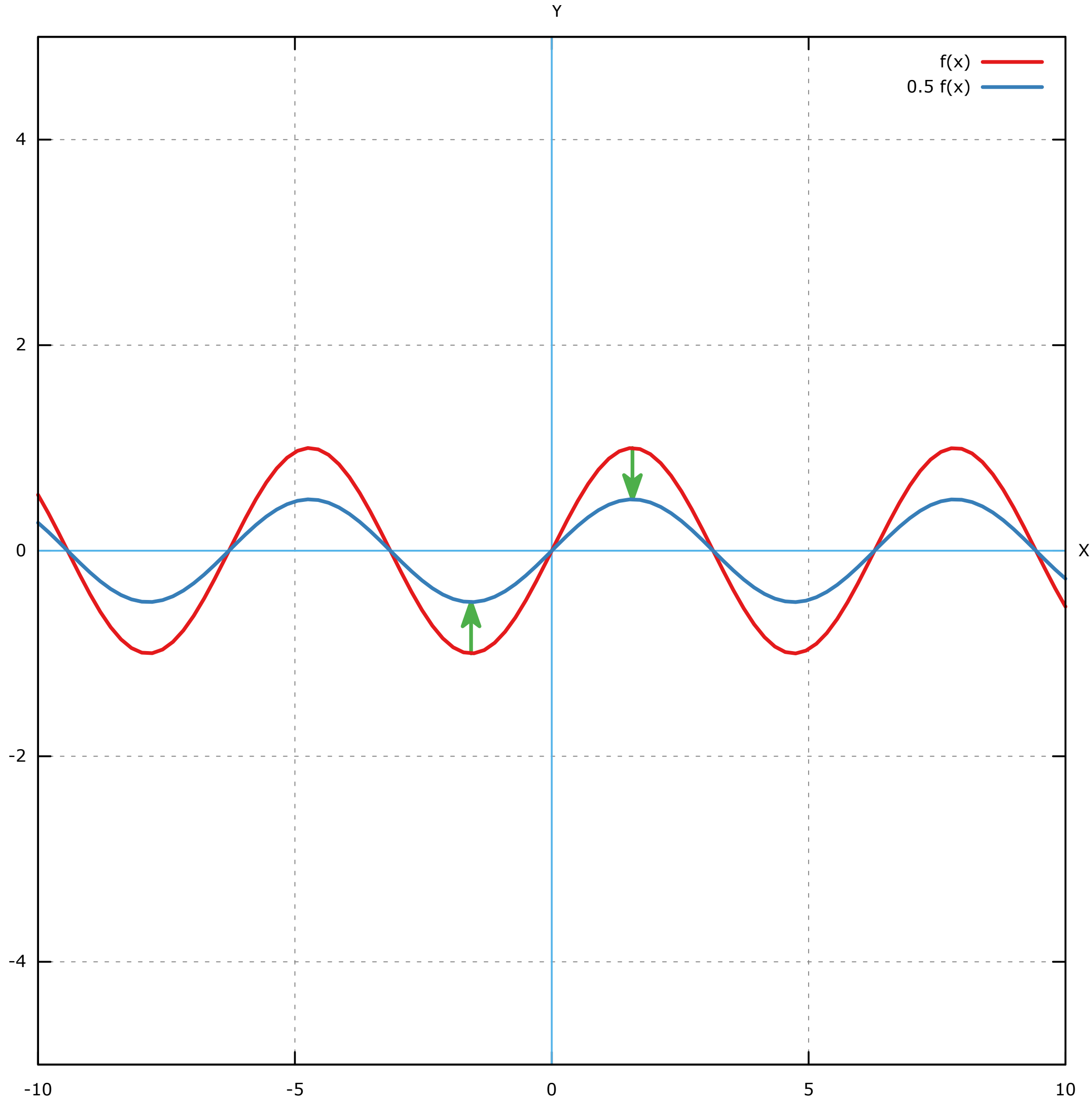


Figura 103: $f(x)$ y $0.5f(x)$.

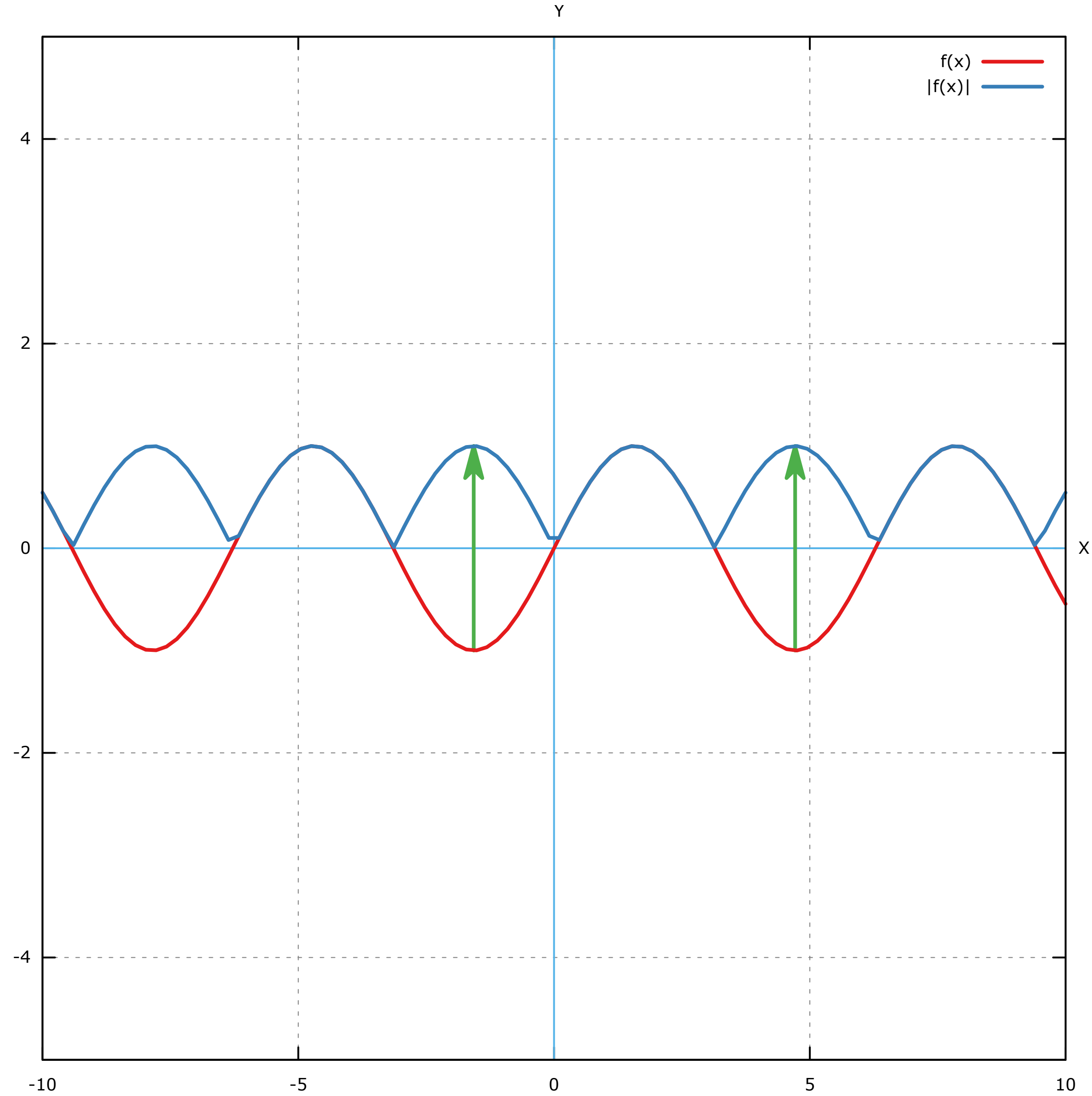


Figura 104: $f(x)$ y $|f(x)|$.

3. Haz la gráfica de la función:

$$f(x) = |x + 1|$$

Tenemos dos maneras de hacerlo:

- dibujamos la gráfica de la función $x + 1$ y la transformamos con el valor absoluto
- o redefinimos $f(x)$ como una función definida a trozos.

Modo 1

La función $g(x) = x + 1$ es una **función afín** y su gráfica es una línea recta inclinada. Como el coeficiente líder es la pendiente, y es 1, entonces la recta es creciente.

Calculamos una tabla con tres valores (el tercero sirve como comprobación):

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	3

A continuación:

1. Dibujamos todos los puntos.
2. Unimos los puntos con una línea recta.
3. Reflejamos las partes que están bajo el eje de abscisas.

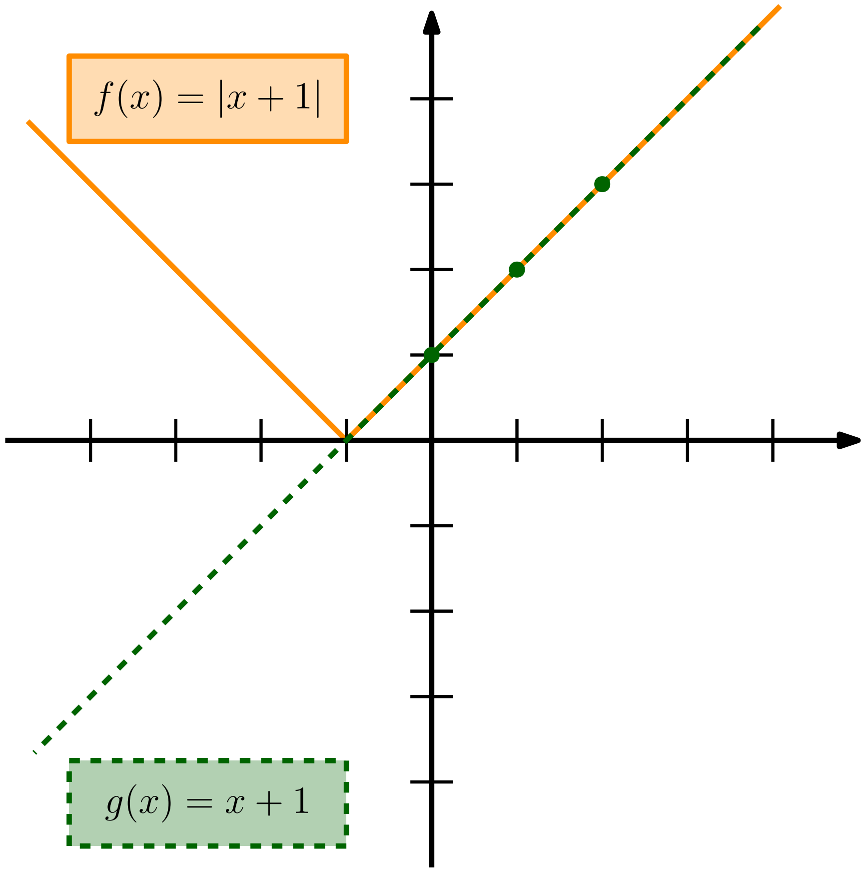


Figura 105: La función $f(x) = |x + 1|$ dibujada a partir de la función $g(x) = x + 1$.

Modo 2

La función $f(x) = |x+1|$ equivale a:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Reordenando los trozos:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Ambos trozos son funciones afines, correspondientes a líneas rectas. Hacemos tablas con valores dentro del intervalo de cada una de ellas:

- Para $-x-1$:

x	$-x-1$
-3	2
-2	1
-1^*	0^*

  Hemos añadido el asterisco al punto (-1, 0) porque este punto no forma parte de ese trozo.

- Para $x+1$:

x	$x+1$
-1	0
0	1
1	2

4. Haz la gráfica de la función:

$$f(x) = |(x+3) \cdot (x-1)|$$

Dentro del valor absoluto aparece una función cuadrática a la que llamaremos $g(x)$:

$$g(x) = (x+3) \cdot (x-1)$$

por lo que sabemos que la gráfica de

$$f(x) = |g(x)|$$

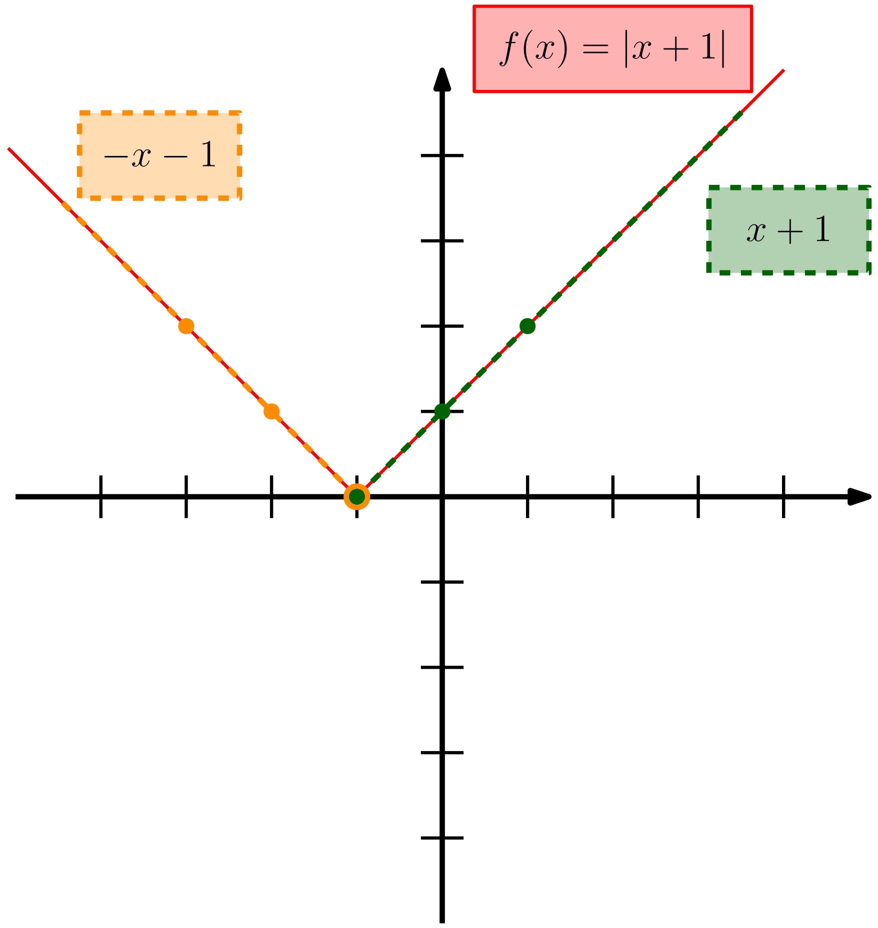


Figura 106: La función $f(x) = |x+1|$ dibujada a partir de sus trozos.

será una parábola en la que las partes por debajo del eje de abscisas se reflejan respecto a este eje.

Como la función $g(x)$ está factorizada, es fácil encontrar los puntos de corte con el eje de abscisas (el eje X): son $x =$ -3 y $x = 1$.

El punto de corte con el eje de ordenadas (el eje Y) es fácil de encontrar:

$$y = g(0) = (0 + 3) \cdot (0 - 1) = -3$$

Para encontrar el vértice, expandiremos la expresión dentro del valor absoluto:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x + 3) \cdot (x - 1) = \\ &= x^2 - x + 3x - 3 = \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

Ahora el vértice es:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$
$$y_v = g(x_v) = g(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4s$$

Con esta información ya podemos hacer un esbozo de la gráfica de la función.

5. Explica los tipos de transformaciones geométricas que existen en la composición de funciones.

Si definimos las funciones:

- **Identidad:** $I(x) = x$
- **Traslaciones:** $T_d(x) = x + d$

  donde d es un número real que puede ser positivo o negativo
- **Escalas:** $E_k(x) = k \cdot x$

  donde k es un número real positivo
- **Opuesta:** $O(x) = -x$
- **Valor absoluto:** $\text{abs}(x) = |x|$

Y las componemos con otras funciones en un orden u otro, lo que hacemos es **transformar geométricamente** la curva de la gráfica de la función original. Y dependiendo del orden de la composición, se obtiene un resultado u otro.

- $I(x) = x$

  No cambia la función:

$$I(f(x)) = f(I(x)) = f(x)$$

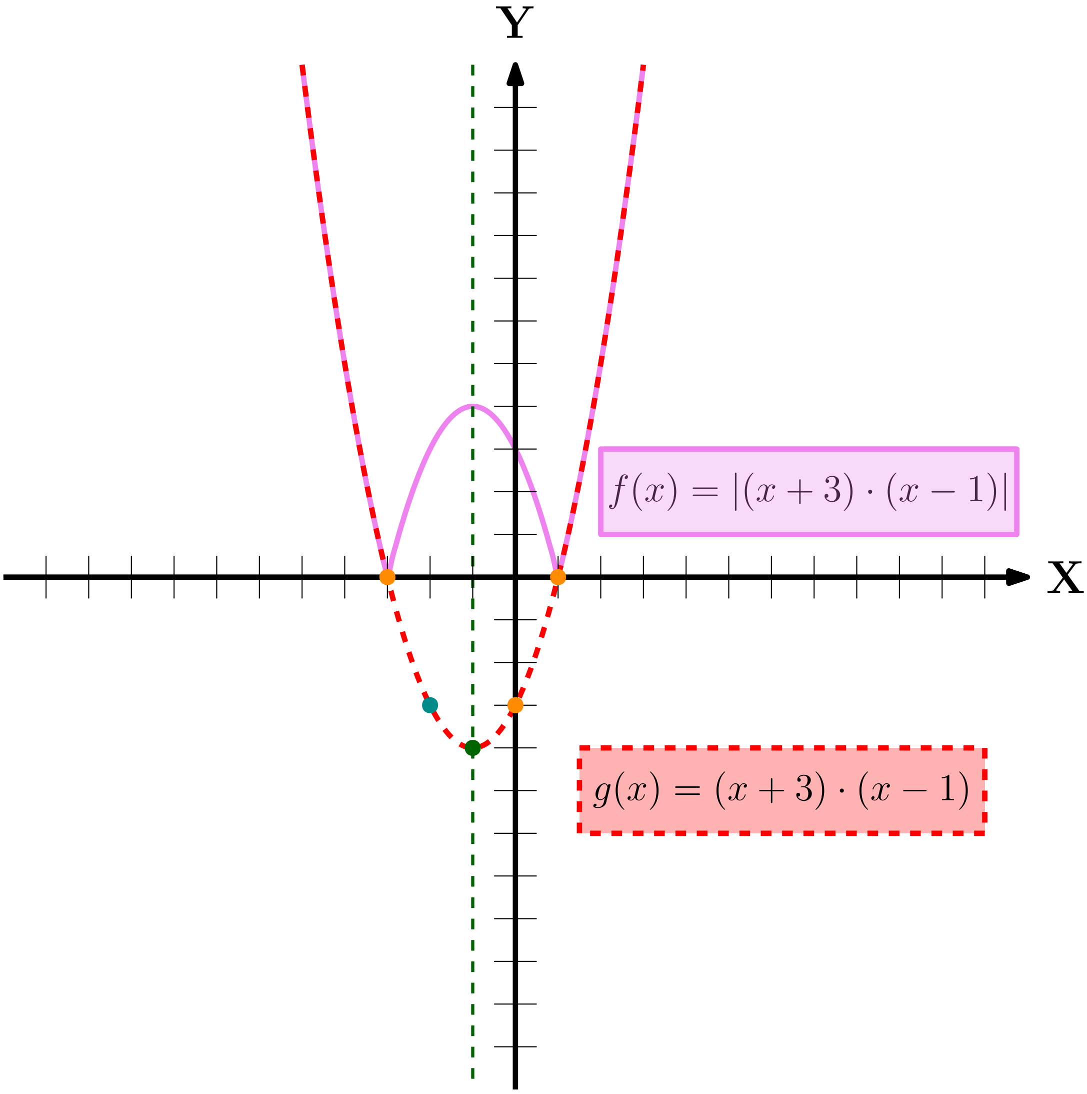


Figura 107: Función $g(x) = (x+3)\cdot(x-1)$ y $f(x) = |g(x)|$.

- $T_d(x) = x \pm d$

  Es una **traslación**.

  - $T_d(f(x)) = f(x) + d$

    Traslación de la función

    $y \to y + d$

    - $d > 0$: sube la gráfica d unidades.
    - $d < 0$: baja la gráfica $|d|$ unidades.

  - $f(T_d(x)) = f(x + d)$

    Función de la traslación

    $x \to x + d$

    - $d > 0$: mueve la gráfica hacia la izquierda d unidades.
    - $d < 0$: mueve la gráfica hacia la derecha $|d|$ unidades.

- $E_k(x) = k \cdot x$

  Es un **escalado** porque *estira* o *encoge* la función.

  - $E_k(f(x)) = k \cdot f(x)$

    Escala de la función

    $y \to k \cdot y$

    - $k > 1$: estira verticalmente la gráfica en un factor k.
    - $k < 1$: encoge verticalmente la gráfica en un factor k.

  - $f(E_k(x)) = f(k \cdot x)$

    Función de la escala

    $x \to k \cdot x$

    - $k > 1$: encoge horizontalmente la gráfica en un factor k.
    - $k < 1$: estira horizontalmente la gráfica en un factor k.

- $O(x) = -x$

  Es una **simetría axial** porque refleja.

  - $O(f(x)) = -f(x)$

    Opuesta de la función

    $y \to -y$

    Refleja la función respecto al eje X. Si la función era negativa, se convierte en positiva. Si la función era positiva, la convierte en negativa.

  - $f(O(x)) = f(-x)$

    Función de la opuesta

    $x \to -x$

    Refleja la función respecto al eje Y.

- $\text{abs}(x) = |x|$
  - $\text{abs}(f(x)) = |f(x)|$

    Valor absoluto de la función

    $y \to |y|$

    Convierte en positivo todo lo negativo. Por lo tanto, refleja solamente las partes negativas de la función respecto al eje X.
  - $f(\text{abs}(x)) = f(|k|)$

    Función del valor absoluto

    $x \to |x|$

    Hace que la parte a la izquierda del eje Y sea un reflejo de la parte a la derecha del eje Y, sin cambiar la parte a la derecha del eje Y.

Por supuesto, es posible combinar varias transformaciones.

Límites y continuidad

1. Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

Calcula los límites:

a)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

c)

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

a) El límite lateral por la izquierda (por los números más pequeños) cuando equis tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - 3x + 1 \right) =$$

$$= 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

b) El límite lateral por la derecha (por los números más grandes) cuando equis tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 - 3x + 1 \right) =$$

$$= 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

c) El límite cuando equis tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

Como los dos límites laterales existen y son iguales, el límite existe y es igual:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

2. Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Calcula los límites:

a)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

c)

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

a) El límite lateral por la izquierda (por los números más pequeños) cuando equis tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{0^-} =$$

Como el denominador se acerca a 0 por los negativos (por eso ponemos 0^-) entonces el límite es $-\infty$:

$$= -\infty$$

b) El límite lateral por la derecha (por los números más grandes) cuando equis tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{0^+} =$$

Como el denominador se acerca a 0 por los positivos (por eso ponemos 0^+) entonces el límite es ∞:

$$= \infty$$

c) Los límites laterales no son iguales; no existe el límite.

3. Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Calcula los límites:

a)
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)$$
b)
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)$$
c)
$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

a) El límite lateral por la izquierda (por los números más pequeños) cuando equis tiende a menos uno:
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{-1^- + 1} =$$
-1^- indica que nos acercamos a -1 por los números más pequeños que él. Por ejemplo, -1,0001. Por lo tanto el denominador tiende a 0^- (*"0 negativo"*):
$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{0^-} =$$
$$= -\infty$$

b) El límite lateral por la derecha (por los números más grandes) cuando equis tiende a menos 1:
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{-1^+ + 1} =$$
$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{0^+} =$$
$$= \infty$$

c) Los límites laterales no son iguales; no existe el límite.

4. Sea $f(x)$ la función
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
calcula los límites laterales en x = 1.

El límite por la izquierda:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} x =$$
$$= 1$$

El límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} x^2+1 =$$
$$= 1^2+1 = 2$$

Los dos límites laterales existen y son finitos, pero son diferentes. Por lo tanto no existe el límite:

$$\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

En este caso, la función tiene una **discontinuidad inevitable de salto finito**.

5. Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcula los límites laterales en x = 1.

El límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} x =$$
$$= 1$$

El límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} 2x^2-1 =$$
$$= 2\cdot 1^2 - 1 = 1$$

Los dos límites laterales existen, son finitos y son iguales. Por lo tanto, existe el límite:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Como la función en $f(1)$:

$$f(1) = 2\cdot 1^2 - 1 = 1$$

Tenemos:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 1$$

6. Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los límites laterales en x = 1.

El límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x \to 1^-} x =$$
$$= 1$$

El límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$
$$= \lim_{x \to 1^-} 2x^2 - 1 =$$
$$= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

Los dos límites laterales existen, son finitos y son iguales. Por lo tanto, existe el límite:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Como la función en $f(1)$:

$$f(1) = 3$$

Tenemos:

$$f(1) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Por lo tanto la función tiene una **discontinuidad evitable**.

6. Estudia la continuidad de $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Es una función **definida a trozos**. Para estudiar su continuidad, primero estudiamos cada intervalo:

- Si $x \in (-\infty, 1)$

  La fórmula es $\frac{x}{x-2}$ que corresponde a una función homográfica. Que es continua en todos los reales, excepto en el valor de x que no pertenece al dominio.

  Como hay una división, no podemos calcular la expresión cuando se anula el denominador. Es decir, cuando $x = 2$.

  Pero 2 no pertenece a este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en este intervalo.

- Si $x \in (1, 2)$

  La fórmula es $2x + 1$. Es una función polinómica (para ser más concretos, es una función afín). Y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

  Por lo tanto $f(x)$ es continua en este intervalo.

- Si $x \in (2, \infty)$

  La fórmula es $x^2 - 3x + 1$. Es una función polinómica (para ser más concretos, es una función cuadrática). Y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

  Por lo tanto $f(x)$ es continua en este intervalo.

Ahora necesitamos estudiar la continuidad en los dos puntos que unen un intervalo (un trozo) con el siguiente.

- En $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x+1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

  Los límites laterales existen, son finitos, pero distintos entre si.

  En $x = 1$, hay una **discontinuidad inevitable de salto finito**.

- En $x = 2$:

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x+1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \quad x^2 - 3x + 1 \quad = \\ = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$$

  Los límites laterales existen, son finitos, pero distintos entre si.

  En $x = 2$, hay una **discontinuidad inevitable de salto finito**.

7. Estudia la continuidad de $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Es una función **definida a trozos**. Para estudiar su continuidad, primero estudiamos cada intervalo:

- Si $x \in (-\infty, 1)$

  La fórmula es $\frac{x}{x+2}$: la de una función homográfica. Sabemos que las homográficas son continuas en todos los reales excepto donde existe la asíntota vertical (el punto que no pertenece al dominio).

  El denominador $(x+2)$ se anula cuando $x = -2$. Y -2 está en este intervalo.

  Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1) - \{-2\}$. Y en $x = -2$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito (como sucede cuando hay asíntotas verticales).

- Si $x \in (1, \infty)$

  $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ es una función polinómica de grado 1 (es decir, una función afín). Todas las funciones polinómicas son continuas en todos los reales.

  Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(1, \infty)$.

Ahora estudiamos la continuidad en el punto que nos falta:

- En $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad &= \\ = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

  Los límites laterales existen y son iguales al valor de la función:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

  por lo tanto la función es continua en $x = 1$.

En resumen: la función es continua en todos los reales, excepto en $x = -2$, donde tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Matrices y determinantes

Si preguntases a alguien en inglés *«¿qué es "matriz"?»*, probablemente obtendrías muchas respuestas.

Los aficionados al cine te dirían que *"The Matrix"* (1999) es una famosa película dirigida por las hermanas Wachowski. Un tipógrafo que trabaja en una imprenta te diría que es un molde para los tipos de letra. Un especialista en metalurgia te hablaría de aleaciones metálicas. Un anatomista te hablaría de anatomía. Y un biólogo celular, de la sustancia intercelular en un tejido…

La misma pregunta en español daría las mismas respuestas, con la excepción de *"The Matrix"*, que se estrenó en España como *"Matrix"*.

Pero cuando preguntes a un matemático, el matemático estará horas hablando[33].

Porque para un matemático (y para ti) una matriz es una *"caja"* de números. Y esa caja de números puede representar cosas muy diferentes.

Generalmente esa caja va a estar relacionada con sistemas de ecuaciones o con vectores. Pero hay muchas otras cosas que se pueden representar como matrices: rotaciones en el plano y en el espacio, un grafo[34] de conexiones en una red de amigos, los números complejos…

Por esa razón, las matrices son importantes. Y un número muy especial que se obtiene de una matriz (el determinante), también es importante.

Aunque **no forman parte del temario de maturita**, dan herramientas útiles.

Matrices

1. Sea la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{2} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son sus dimensiones?
b) ¿Cuál es el elemento 2×3?
c) ¿Cuál es el elemento 3×2?
d) ¿Es simétrica o antisimétrica?

[33]El escritor y divulgador Isaac Asimov en el ensayo *"To Tell a Chemist"* (publicado en mayo de 1965 en la revista *"The Magazine of Fantasy and Science Fiction"*) usaba los múltiples significados de algunas palabras para distinguir entre quién es químico y quién no. Algo parecido a lo que hemos hecho aquí.

[34]Que no es lo mismo que una gráfica

a) Es una matriz con 3 filas y 3 columnas. Es decir, es una matriz 3×3 o una matriz cuadrada de orden 3.

b) El elemento 2×3 de la matriz está en la segunda fila y en la tercera columna: 3/7.

c) El elemento 3×2 de la matriz está en la tercera fila y en la segunda columna: 5.

d) No es ni simétrica ni antisimétrica.

La matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & \frac{3}{7} & 4 \end{pmatrix}$$

Una matriz es simétrica cuando:

$$A^t = A$$

y antisimétrica cuando:

$$A^t = -A$$

Y en este caso no se cumple ninguna de las condiciones.

2. Sea la matriz A:

$$A = \begin{matrix} 2 & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{2} & 5 & \pi \end{matrix}$$

a) ¿Cuáles son sus dimensiones?
b) ¿Cuál es el elemento 2×3?
c) ¿Cuál es el elemento 3×2?
d) ¿Es simétrica o antisimétrica?

a) La matriz A tiene 2 filas y 3 columnas. Por lo tanto es una matriz 2×3. No es una matriz cuadrada porque no tiene el mismo número de filas y de columnas.
b) El elemento 2×3 está en la segunda fila y en la tercera columna: π.
c) No hay elemento 3×2 porque no sólo hay dos filas y ese elemento debería estar en la tercera.
d) Como no es cuadrada, no puede ser ni simétrica ni antisimétrica.

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} \quad , \quad B = \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \quad .$$

Calcula:
a) $A + B$
b) $3A - 2B$
c) A^t
d) B^t

e) AB
f) BA

a)

$$A + B =$$
$$= \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 1+2 & 3+(-5) \\ -1+1 & 2+3 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

b)

$$3A - 2B =$$
$$= 3 \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} - 2 \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{matrix} - \begin{matrix} 4 & -10 \\ 2 & 6 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 3-4 & 9-(-10) \\ -3-2 & 6-6 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} -1 & 19 \\ -5 & 0 \end{matrix}$$

c)

$$A^t = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

d)

$$B^t = \begin{matrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{matrix}$$

e)

$$AB =$$
$$= \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-5) + 3\cdot 3 \\ -1\cdot 2 + 2\cdot 1 & -1\cdot(-5) + 2\cdot 3 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 5 & 4 \\ 0 & 11 \end{matrix}$$

f)

$$BA =$$
$$= \begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} 2 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} 7 & -4 \\ 6 & 9 \end{matrix}$$

4. ¿Qué significa *"el producto de matrices no es, en general, conmutativo"*? Usa ejemplos para ilustrar tu respuesta.

Una operación binaria es conmutativa cuando el orden de los elementos no influye en el resultado: la suma de números reales ($x + y = y + x$), el producto de números reales ($x \cdot y = y \cdot x$), la unión de conjuntos ($A \cup B = B \cup A$), la conjunción lógica ($p \wedge q = q \wedge p$), el producto escalar de vectores ($\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$) y las rotaciones en el plano son ejemplos de operaciones binarias conmutativas.

Una operación binaria no es conmutativa cuando el orden de los elementos influye en el resultado: la resta de números reales ($a - b \neq b - a$), la división de números reales ($a/b \neq b/a$), el producto cartesiano de conjuntos ($A \times B \neq B \times A$), la composición de funciones ($f \circ g \neq g \circ f$), el producto vectorial de vectores ($\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$) y las rotaciones en el espacio son ejemplos de operaciones binarias **no conmutativas**.

Si A y B son dos matrices, **en general**:

$$AB \neq BA$$

Las palabras *"en general"* son importantes; indican que pueden existir parejas de matrices que sí conmuten.

Ejemplos de parejas de matrices que no conmutan:

1) No conmutan porque la operación es posible en un orden y no es posible en el otro:

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad , \quad B = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$$

La matriz A es una matriz 2×2 y la matriz B es una matriz 2×1. Para que un producto de matrices sea posible, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz. Por lo tanto: AB existe, pero BA no existe:

$$AB = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\nexists BA$$

2) No conmutan porque las matrices resultantes no tienen las mismas dimensiones:

$$C = \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} \quad , \quad D = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$$

$$CD = \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} =$$
$$= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

$$DC = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 0 \cdot 2 & 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

3) No conmutan porque, aunque ambos productos existen y tienen las mismas dimensiones, el resultado es distinto en cada caso:

$$E = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad , \quad F = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$EF = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$FE = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{matrix}$$

5. ¿Qué significa *"el producto de matrices es asociativo"*? Usa un ejemplo para ilustrar tu respuesta.

La suma y el producto de números reales son asociativos porque:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Por la asociatividad de estas operaciones, es posible escribirlas *sin paréntesis*:

$$(x + y) + z = x + (y + z) =$$
$$= x + y + z$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) =$$
$$= x \cdot y \cdot z$$

En el caso del producto de matrices:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Como ejemplo vamos a definir tres matrices cuadradas de orden 2:

$$A = \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

Para comprobar:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Empezamos por calcular el lado izquierdo:

$$(A \cdot B) \cdot C =$$
$$= \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 1 & 10 \\ 6 & -8 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 8 & 53 \\ -20 & -22 \end{matrix}$$

Ahora calculamos el lado derecho:

$$A \cdot (B \cdot C) =$$
$$= \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 13 \\ -4 & -7 \end{matrix} =$$
$$= \begin{matrix} 8 & 53 \\ -20 & -22 \end{matrix}$$

Por lo tanto esto es un ejemplo de asociatividad del producto de matrices.

Por lo tanto, en el producto de más de dos matrices podemos eliminar los paréntesis:

$$(A \cdot B) \cdot C =$$
$$= A \cdot (B \cdot C) =$$
$$= A \cdot B \cdot C$$

6. Resuelve la ecuación matricial siguiente:

$$3X - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 7 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 20 + 2 \\ -19 - 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 22/3 \\ -22/3 \end{pmatrix}}$$

X es una matriz 2×1. Como tiene una sola columna es una **matriz columna**.

7. Para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^{2023}.

Para calcular A^{2023} deberíamos multiplicar A por si misma más de 2000 veces. Eso parece que nos llevaría demasiado tiempo.

Cuando nos hacen una pregunta así es porque las potencias de la matriz siguen algún tipo de patrón fácil de obtener cuando se calculan las primeras potencias.

Cuando el exponente es 1:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando el exponente es 2:

$$A^2 = A \cdot A =$$

$$= \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} = -I$$

donde I es la matriz identidad de orden 2.

Cuando el exponente es 3:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (-I) = -A$$

Cuando el exponente es 4:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = -I \cdot (-I) = I$$

Para los siguientes, es evidente que se repite el ciclo:

$$\begin{gathered} A^5 = A^4 \cdot A = A \\ A^6 = A^4 \cdot A^2 = -I \\ A^7 = A^4 \cdot A^3 = -A \\ A^8 = A^4 \cdot A^4 = I \\ \cdots \end{gathered}$$

Como el ciclo (la repetición) es de cuatro, para cualquier número n podemos saber si es el primero de su ciclo, el segundo, el tercero o el cuarto, observando el resto de la división de n entre 4.

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si el resto de } n/4 \text{ es } 1 \\ -I & \text{si el resto de } n/4 \text{ es } 2 \\ -A & \text{si el resto de } n/4 \text{ es } 3 \\ I & \text{si el resto de } n/4 \text{ es } 0 \end{cases}$$

Hacemos la división de 2023 entre 4 y vemos que el resto es 3:

$$2023 = 4 \cdot 505 + \mathbf{3}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{A^{2023} = -A}$$

8. Para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula A^{2023}.

Calculamos A^n para distintos valores de n:

$$A^1 = A$$

$$\begin{gathered} A^2 = A \cdot A = \\ = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{gathered}$$

Donde I es la matriz identidad de orden 3.

Por lo tanto:

$$\begin{gathered} A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A \\ A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I \\ A^5 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I \\ \cdots \end{gathered}$$

Hay un ciclo que se repite cada 2. Por lo tanto, dependiendo del resto de la división $n/2$, tendremos un resultado u otro:

$$A^n = \begin{cases} I & \text{si el resto de } n/2 \text{ es } 0 \\ A & \text{si el resto de } n/2 \text{ es } 1 \end{cases}$$

O, dicho de modo más elegante:

$$A^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ A & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

O incluso más elegante:

$$A^n = \begin{cases} I & \text{si } 2 \mid n \\ A & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

Como 2023 es impar:

$$A^{2023} = A$$

9. Una matriz A es:
a) idempotente si $A^2 = A$
b) nilpotente si $A^2 = 0$
c) involutiva si $A^2 = I$
Pon al menos un ejemplo de cada una.

a) La matriz identidad es idempotente porque:

$$I^2 = I$$

Pero la siguiente matriz también es idempotente:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

b) La matriz nula es nilpotente porque:

$$0^2 = 0$$

como se puede ver en:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Otro ejemplo es:

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

c) La matriz identidad es involutiva porque:

$$I^2 = I$$

Otro ejemplo es:

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

10. ¿Puede ser una matriz su propia inversa?
Si la respuesta es afirmativa, encuentra las ecuaciones que deben satisfacer los elementos de una matriz cuadrada de orden 2 para ser su propia inversa. Si la respuesta es negativa, demuestra que no puede existir una matriz cuadrada de orden 2 que sea su propia inversa.

Sí.

Ocurre no solamente con las matrices identidad. Las matrices involutivas son precisamente las que son su propia inversa y hay matrices involutivas que no son la identidad.

Si definimos A:

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

A es su propia inversa:

$$A = A^{-1}$$

si:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A \cdot A = I$$

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a \cdot a + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ c \cdot a + d \cdot c & c \cdot b + d \cdot d \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Lo cual nos da las ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases}$$

que son las ecuaciones que se nos pedían.

11. Encuentra todas las matrices cuadradas simétricas de orden 2 en la que todos los elementos de la diagonal principal son 0 y son iguales a su propia inversa.

Son cuadradas de orden 2, simétricas y con los elementos de la diagonal iguales a cero las matrices de la forma:

$$A = \begin{matrix} 0 & x \\ x & 0 \end{matrix}$$

Si es igual a su inversa:

$$A = A^{-1}$$

como:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A \cdot A = I$$

$$\begin{matrix} 0 & x \\ x & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & x \\ x & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0\cdot 0 + x\cdot x & 0\cdot x + x\cdot 0 \\ x\cdot 0 + 0\cdot x & x\cdot x + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da la ecuación:

$$x^2 = 1$$

Que tiene dos soluciones:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Por lo tanto, solamente hay dos matrices que cumplen las condiciones:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Encuentra la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) usando la definición y variables para cada elemento,
b) por el método de Gauss.

a) Si la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 5a + 2c = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

que se pueden separar en dos sistemas diferentes:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

En el primer sistema despejamos c de la primera ecuación:

$$c = 1 - 3a$$

y sustituimos en la segunda:

$$5a + 2 \cdot (1 - 3a) = 0$$
$$5a + 2 - 6a = 0$$
$$-a + 2 = 0$$
$$a = 2$$

por lo que c:

$$c = 1 - 3 \cdot 2 = -5$$

En el segundo sistema despejamos d de la primera ecuación:

$$d = -3b$$

y sustitumos en la segunda:

$$5b + 2 \cdot (-3b) = 1$$
$$5b - 6b = 1$$
$$-b = 1$$
$$b = -1$$

por lo que d es:

$$d = 3$$

La inversa debe ser:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{matrix}$$

Comprobamos que es la inversa:

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) & 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Por el método de Gauss debemos escribir:

$$A|I$$

y transformar A para convertirla en I. Cuando A esté convertida en I, I se habrá convertido en A.

Las transformaciones permitidas son cambios de una fila por combinaciones lineales de esa fila con las demás.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Queremos convertir el primer 1 de la primera fila en 0. Para eso podemos cambiar la primera fila por el doble de la primera menos la segunda: $F_1 \to 2F_1 - F_2$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Queremos convertir el 5 de la segunda fila en 0. Para eso podemos cambiar la segunda fila por la segunda fila menos el doble de la primera: $F_2 \to F_2 - 2F_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

Necesitamos que el 2 de la segunda fila sea 1. Para eso podemos cambiar la segunda fila por la mitad de la segunda fila: $F_2 \to F_2/2$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Por lo que la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tal y como hemos obtenido por el otro método.

13. Encuentra la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aunque puede usarse el método de las incógnitas, obtendríamos 9 ecuaciones con 9 incógnitas. Lo cual es poco manejable. Por eso usaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Queremos hacer cero el primer elemento en la segunda fila. Para eso podemos hacer: $F_2 \to 2F_2 - 5F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -13 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Queremos hacer cero el primer elemento de la tercera fila. Para eso podemos hacer: $F_3 \to 2F_1 - 3F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -13 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Por comodidad, cambiamos los signos de dos de las filas: $F_2 \to -F_2$ y $F_3 \to -F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Queremos anular el segundo elemento de la tercera fila: $F_3 \to F_2 - F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora queremos anular el tercer elemento de la segunda fila: $F_2 \to 8F_2 - 13F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -26 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora queremos anular el tercer elemento de la primera fila: $F_1 \to 4F_1 - F_3$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 12 & 4 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -26 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Para anular el segundo elemento de la primera fila: $F_1 \to 2F_1 - F_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 30 & -6 & -18 \\ 0 & 8 & 0 & -26 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora debemos hacer 1 todos los elementos no nulos de las tres primeras columnas. Para eso podemos dividir la primera fila entre 24; la segunda fila, entre 8 y la tercera fila, entre 8.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 30/24 & -6/24 & -18/24 \\ 0 & 1 & 0 & -26/8 & 10/8 & 14/8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/8 & -2/8 & 2/8 \end{array}\right)$$

Por lo que la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 30/24 & -6/24 & -18/24 \\ -26/8 & 10/8 & 14/8 \\ 2/8 & -2/8 & 2/8 \end{pmatrix}$$

Simplificando algunas fracciones:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & -3/4 \\ -13/4 & 5/4 & 7/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Puedes comprobar que realmente es la inversa.

14. En mecánica cuántica existen tres matrices llamadas *matrices de Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad ,$$

$$\sigma_y = \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix} \quad ,$$

$$\sigma_z = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

donde i es la *unidad imaginaria*: $i^2 = -1$.
Calcula el cuadrado de las tres.

El cuadrado de la primera matriz de Pauli:

$$\sigma_x^2 = \sigma_x \cdot \sigma_x =$$

$$= \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = I$$

El cuadrado de la segunda matriz de Pauli:

$$\sigma_y^2 = \sigma_y \cdot \sigma_y =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-i) \cdot i & 0 \cdot 1 + (-i) \cdot 0 \\ i \cdot 0 + 0 \cdot i & i \cdot (-i) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

El cuadrado de la tercera matriz de Pauli:

$$\sigma_z^2 = \sigma_z \cdot \sigma_z =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por lo tanto:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_y^2 = I$$

Determinantes

1. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = (1),\ B = (-3),$$
$$C = \left(\frac{7}{5}\right)$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden 1 es simplemente ese número:

$$\det(\mathrm{A}) = |A| = 1$$
$$\det(\mathrm{B}) = |B| = -3$$
$$\det(\mathrm{C}) = |C| = \frac{7}{5}$$

Observa que no es el *valor* absoluto del número (que está dentro de la matriz). Es el determinante de la matriz.

2. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

El determinante de una matriz se como el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

La diagonal principal está formada por los elementos en los que el índice de la fila y el índice de la columna coinciden. Es decir, es la diagonal que *baja hacia la derecha*.

Por lo tanto:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-7) = 23$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = -73$$

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot (-3) - 1 \cdot 6 = 0$$

Era fácil ver que el último determinante era 0. Si alguna fila es combinación lineal de las demás filas, el determinante es cero. En este caso, la fila dos es menos el triple de la fila uno: $F_2 = 3F_1$.

3. Calcula el determinante de la matriz:

$$R = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\det(R) = |R| = \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{vmatrix} =$$
$$= \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot (-\cos(\alpha)) =$$
$$= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) =$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$= 1$$

Es decir, el determinante siempre es 1, independientemente del valor de α.

La matriz R para α está relacionada con las rotaciones (= los giros) en el plano. Como puedes imaginar, α es el ángulo de la rotación.

4. En mecánica cuántica existen tres matrices llamadas *matrices de Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\sigma_y = \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix}$$

$$\sigma_z = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

donde i es la *unidad imaginaria*: $i^2 = -1$.
Calcula el determinante de las tres.

$$|\sigma_x| = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$
$$= 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$|\sigma_y| = \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix} =$$
$$= 0 \cdot 0 - (-i) \cdot i =$$
$$= i^2 = -1$$

$$|\sigma_z| = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} =$$
$$= 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1$$

5. ¿Existe la inversa de las matrices siguientes?

$$A = \begin{matrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{matrix} , B = \begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{matrix}$$

Para cualquier matriz cuadrada A:

$$\boxed{\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0}$$

Es decir, solamente tenemos que calcular el determinante para saber si tiene inversa o no.

$$|A| = \begin{matrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{matrix} =$$
$$= 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 =$$

$$= 6 + 5 = 11 \neq 0$$

por lo tanto, existe la inversa de A: $\exists A^{-1}$.

$$|B| = \begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 =$$

$$= -4 + 4 = 0$$

por lo tanto, **no existe** la inversa de B: $\nexists B^{-1}$.

La matriz B es una **matriz singular** o **matriz degenerada** porque es una matriz cuadrada no tiene inversa.

6. Encuentra el valor de m para que la matriz:

$$A = \begin{matrix} m & 2m \\ 5 & 3+m \end{matrix}$$

no tenga inversa.

La matriz A no tiene inversa si su determinante es cero:

$$|A| = 0$$

$$\begin{matrix} m & 2m \\ 5 & 3+m \end{matrix} = 0$$

$$m \cdot (3 + m) - 2m \cdot 5 = 0$$

$$3m + m^2 - 10m = 0$$

$$m^2 - 7m = 0$$

Es una ecuación cuadrática incompleta, por lo que no es necesario usar la fórmula para resolverla. Sacamos m como factor común:

$$m \cdot (m - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 7 = 0 \Rightarrow m = 7 \end{cases}$$

Por lo tanto, si m es 0 o 7, la matriz A no tiene inversa.

$$\begin{cases} \exists A^{-1} & \text{si } m \neq 0 \wedge m \neq 7 \\ \nexists A^{-1} & \text{si } m = 0 \vee m = 7 \end{cases}$$

7. Calcula el determinante de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 3 existen varios métodos. Utiliza el que consideres más conveniente.

- Por la regla de Sarrus o similares:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} =$$
$$= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 +$$
$$-7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 1 =$$
$$= 45 + 84 + 96 +$$
$$-105 - 72 - 48 =$$
$$= 0$$

  Por lo tanto, la matriz es singular (o degenerada). Es decir, no tiene inversa.

- Desarrollando por una fila:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} =$$

  Si desarrollamos por la primera fila, podemos reducir el determinante de orden 3 a 3 determinantes de orden 2:

$$= 1 \cdot \begin{matrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{matrix} - 2 \cdot \begin{matrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{matrix} + 3 \cdot \begin{matrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} =$$
$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) +$$
$$-2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) +$$
$$+3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$
$$= 0$$

8. Calcula el determinante de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Por la regla de Sarrus o similares:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} =$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + (-4) \cdot 8 \cdot 1 +$$
$$-7 \cdot 5 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 3 =$$

$$= 135 + 84 - 32 +$$
$$-35 + 72 - 144 =$$
$$= 80 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz **no** es singular. Es decir, **sí** tiene inversa.

- Desarrollando por una fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

Si desarrollamos por la primera fila, podemos reducir el determinante de orden 3 a 3 determinantes de orden 2:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) +$$
$$-2 \cdot ((-4) \cdot 9 - 6 \cdot 7) +$$
$$+1 \cdot ((-4) \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$
$$= 80$$

9. ¿Cuál es el método más rápido de calcular el siguiente determinante? ¿La regla de Sarrus o el desarrollo por una fila?

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Desarrollar por una fila es mucho más sencillo en este caso porque en la segunda fila hay muchos ceros.

El signo que debemos añadir se obtiene haciendo $(-1)^{i+j}$, donde i es el índice de la fila y j es el índice de la columna.

Por lo que los signos serían:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Queremos hacerlo por la segunda fila:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ \color{red}{-} & \color{blue}{+} & \color{green}{-} \\ + & - & + \end{matrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} =$$

$$= -0 \cdot \begin{matrix} 2 & 1 \\ 8 & 9 \end{matrix} +$$

$$+5 \cdot \begin{matrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{matrix} +$$

$$-0 \cdot \begin{matrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{matrix} =$$

Desaparecen dos de ellos:

$$= 5 \cdot \begin{matrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{matrix} =$$

$$= 5 \cdot (3 \cdot 9 - 1 \cdot 7) =$$

$$= 100$$

10. Calcula el determinante:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & m \end{matrix}$$

Estudia la existencia de la matriz inversa asociada según el valor de m.

Podemos desarrollar por la última fila; tiene un 0 en ella:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & m \end{matrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{matrix} - 3 \cdot \begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{matrix} + m \cdot \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{matrix} + m \cdot \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$

$$= -3 \cdot (1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1) + m \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot 1) =$$

$$= -15 + 2m =$$

$$= 2m - 15$$

Si el determinante es cero, no existe la inversa. Si el determinante no es cero, sí existe la inversa. Por tanto:

$$\begin{cases} \exists A^{-1} & \text{si } m \neq 15/2 \\ \nexists A^{-1} & \text{si } m = 15/2 \end{cases}$$

11. Calcula el determinante:

$$\begin{matrix} a & 3a & 5a \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \cdot a & 3 \cdot a & 5 \cdot a \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{matrix} =$$

Por las propiedades de los determinantes:

$$= a \cdot \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{matrix} =$$

$$= a \cdot \begin{matrix} 1 & 3 \cdot 1 & 5 \\ 1 & 3 \cdot (-1) & 3 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot a \cdot \begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} =$$

Desarrollando por la última fila:

$$= 3a \cdot \quad 2 \cdot \begin{matrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} - 1 \cdot \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \quad =$$

$$= 3a \cdot (-4 + 2) =$$

$$= -6a$$

12. Se sabe que el determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

y que el determinante de la identidad es igual a 1:

$$|I| = 1$$

Demuestra que:

$$A^{-1} \; = \frac{1}{|A|}$$

A^{-1} es la matriz inversa de A. Por definición, eso implica que:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Nos quedamos con una de las igualdades:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Hacemos el determinante del lado derecho y del lado izquierdo:

$$|A^{-1} \cdot A| = |I|$$

El determinante de la identidad es 1:

$$|A^{-1} \cdot A| = 1$$

El determinante del producto es el producto de los determinantes:

$$|A^{-1}| \cdot |A| = 1$$

Pasamos al lado derecho el determinante de A:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Como queríamos demostrar.

13. Si el determinante:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = 3$$

calcula el determinante:

$$\begin{matrix} 2b & 2a \\ 2d & 2c \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2b & 2a \\ 2d & 2c \end{matrix} =$$

podemos sacar un 2 como factor común de la primera fila:

$$= 2 \cdot \begin{matrix} b & a \\ 2d & 2c \end{matrix} =$$

Y otro 2 como factor común de la segunda fila:

$$= 2 \cdot 2 \cdot \begin{matrix} b & a \\ d & c \end{matrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{matrix} b & a \\ d & c \end{matrix} =$$

Si intercambiamos dos columnas **contiguas**, el signo cambia:

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Pero el determinante que tenemos ahora es el que sabemos que es 3:

$$= -4 \cdot 3 = -12$$

14. Demuestra que el determinante siguiente es múltiplo de 7:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 28 & 14 & -63 & 35 \\ \pi & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{23} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

No es necesario calcular el determinante completo. Solamente es necesario usar las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 28 & 14 & -63 & 35 \\ \pi & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{23} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

La segunda fila está formada por múltiplos de 7:

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 4 \cdot 7 & 2 \cdot 7 & -9 \cdot 7 & 5 \cdot 7 \\ \pi & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{23} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Podemos sacar el 7 fuera:

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -9 & 5 \\ \pi & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{23} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Hemos demostrado que el determinante original es 7 por otro determinante. Por lo tanto, el determinante es múltiplo de 7.

Rango

1. Define el concepto de rango de una matriz.

El rango de una matriz A es el número de filas o columnas linealmente independientes entre si. Y el rango se puede escribir:

$$\text{rango}(A)$$

Si la matriz A es una matriz de n filas y m columnas (es decir, de dimensiones $n \times m$), sabemos que el rango debe ser:

$$0 \leq \text{rango}(A_{n\times m}) \leq \text{mín}(n, m)$$

Donde $\text{mín}(n, m)$ representa el mínimo de n y m.

El rango es solamente 0 cuando la matriz es nula. Es decir, cuando todos sus elementos son 0.

Para ilustrar el concepto de rango, veamos varios ejemplos:

$$\text{rango} \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{matrix} = 2$$

porque la segunda fila y la primera fila son linealmente independientes.

$$\text{rango} \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{matrix} = 1$$

porque la segunda fila es el doble de la primera. Solamente hay una fila linealmente independiente.

$$\text{rango} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 2$$

porque la segunda fila no se puede obtener a partir de la primera. Hay dos filas linealmente independientes.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

porque la tercera fila es la suma de la primera y la segunda. Es decir, la tercera fila es una combinación lineal de las dos primeras y las dos primeras son linealmente independientes entre si. Es decir: hay dos filas linealmente independientes.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

porque las tres filas son linealmente independientes entre si.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1$$

porque la segunda fila es la primera fila multiplicada por -1 y la tercera es la segunda fila multiplicada por 3. Es decir, solamente hay una fila linealmente independiente.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

porque es una matriz nula.

2. Explica la relación entre el rango de una matriz y el determinante.

Cuando el determinante de una matriz cuadrada es 0, sabemos que sus filas son linealmente dependientes.

Eso nos da un método para encontrar el rango de una matriz cualquiera:

1. Acotamos[35] el rango teniendo en cuenta que:

   $$0 \leq \text{rango}(A_{n\times m}) \leq \text{mín}(n, m)$$

   Si es una matriz nula, el rango es 0.

   En caso contrario, hacemos:

   $$l = \text{mín}(n, m)$$
   $$0 < \text{rango}(A_{n\times m}) \leq l$$

   Y pasamos al siguiente paso.

2. Calculamos el determinante de todas las submatrices de orden l.

   Si alguno de los determinantes es distinto de cero, el orden de la submatriz es el rango del determinante.

   Si todos los determinantes son cero. El rango es menor que el orden de las submatrices. Y pasamos al punto 3.

3. Cambiamos l por $l - 1$ y volvemos al punto 2.

3. Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 (es una matriz de dimensiones 3×3) y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 3$$

Solamente hay una submatriz cuadrada de orden 3: la propia matriz. Calculamos su determinante:

[35] Una *cota* es valor que está por encima (*cota superior*) o por debajo (*cota inferior*)

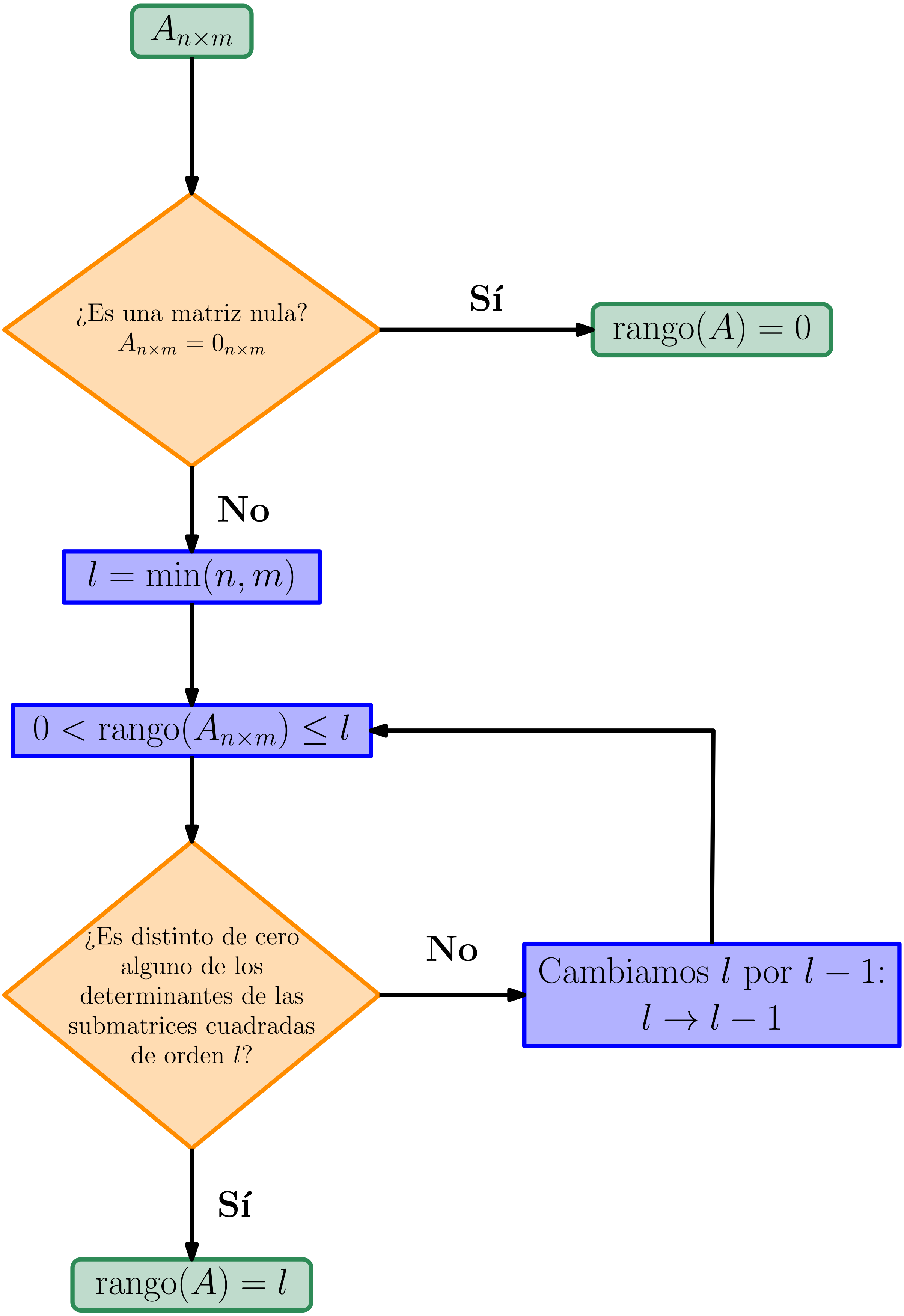


Figura 108: Diagrama de flujo que muestra cómo calcular el rango de una matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= -88 \neq 0$$

Como el único determinante de orden 3 es distinto de cero, el rango de la matriz A es 3:

$$\text{rango}(A) = 3$$

4. Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 (es una matriz de dimensiones 3×3) y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 3$$

Solamente hay una submatriz cuadrada de orden 3: la propia matriz. Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= 0$$

Como el único determinante de orden 3 es igual a cero, el rango de la matriz A es menor que 3.

Ahora estudiamos los determinantes de las submatrices cuadradas de orden 2. Por ejemplo, la formada por los elementos que están en las filas de la 1 a la 2 y en las columnas de la 1 a la 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= 11 \neq 0$$

Como hay un determinante de orden 2 distinto de cero, el rango de la matriz es 2:

$$\text{rango}(A) = 2$$

5. Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 (es una matriz de dimensiones 3×3) y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 3$$

Solamente hay una submatriz cuadrada de orden 3: la propia matriz. Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= 0$$

Como el único determinante de orden 3 es igual a cero, el rango de la matriz A es menor que 3.

Ahora estudiamos los determinantes de las submatrices cuadradas de orden 2. Por ejemplo, la formada por los elementos que están en las filas de la 1 a la 2 y en las columnas de la 1 a la 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= 0$$

Es nulo. Pero hay más submatrices cuadradas de orden 2. Por ejemplo, la formada por los elementos entre las filas 1 y 2 y las columnas 2 y 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= -3 \neq 0$$

Hay al menos un determinante no nulo de orden 2. Por lo tanto, el rango es 2:

$$\text{rango}(A) = 2$$

6. Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 (es una matriz de dimensiones 3×3) y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 3$$

En este caso es evidente que solamente hay una fila linealmente independiente; la segunda es el doble de la primera y la tercera es el triple de la primera. Por lo que el rango es 1.

Sin embargo, vamos a suponer que no nos damos cuenta de ello y seguimos el método sistemático.

Solamente hay una submatriz cuadrada de orden 3: la propia matriz. Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{array} = \ldots =$$
$$= 0$$

Como es 0, el rango tiene que ser menor que 3.

Calculamos los determinantes de las submatrices de orden 2:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{array} = 0$$

$$\ldots$$

Todos ellos son cero. Por lo que el rango tiene que ser menor que 2. Pero por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) < 2$$

el rango es 1:

$$\text{rango}(A) = 1$$

7. Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz de dimensiones 3×4 y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 3$$

Hay varias submatrices cuadradas de orden tres. La submatriz formada por las tres primeras columnas nos da el determinante:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array} = \ldots = 0$$

Como es nulo, tenemos que comprobar los demás. Por ejemplo, el formado por tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \ldots = 1 \neq 0$$

Hay al menos un determinante de orden 3 que no es nulo. Por lo tanto:

$$\text{rango}(A) = 3$$

8. Calcula el rango de la matriz A según el parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz de dimensiones 2×2. Es decir, es una matriz cuadrada de orden 2 y no es nula. Por lo tanto:

$$0 < \text{rango}(A) \leq 2$$

Solamente hay una submatriz de orden 2: la propia matriz. Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 4$$

Si $m - 4 = 0$, el rango es menor que 2. Si $m - 4 \neq 0$, el rango es 2.

Por lo tanto:

$$\begin{cases} m = 4 \Rightarrow 0 < \text{rango}(A) < 2 \\ m \neq 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \end{cases}$$

Cuando m es 4, la matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

que, evidentemente, es de rango 1. Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{cases} m = 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 1 \\ m \neq 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \end{cases}}$$

Geometría analítica

La geometría analítica conecta el álgebra y la geometría.

Las soluciones de una ecuación lineal son puntos en la recta real, las soluciones de una ecuación de dos incógnitas son puntos en el plano, las soluciones de una ecuación de tres incógnitas son puntos en el espacio... Una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta en el plano, una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio... Tener más de una recta en el plano equivale a tener más de una ecuación lineal con dos incógnitas y, por lo tanto, equivale a tener un sistema de ecuaciones lineales.

Vectores

1. Sean los vectores $\vec{a} = (1, 3)$ y $\vec{b} = (2, 5)$. Calcula:

a) a
b) b
c) $|\vec{a}|$
d) $|\vec{b}|$
e) $\vec{a} + \vec{b}$
f) $\vec{a} - \vec{b}$
g) $2 \cdot \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
h) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
i) $\vec{b} \cdot \vec{a}$
j) $\angle\vec{b}\vec{a}$

a) El módulo de $\vec{a}$ es:

$$a = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

El módulo también se puede escribir: $|\vec{a}|$.

b) El módulo de $\vec{b}$ es:

$$b = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

El módulo también se puede escribir: $|\vec{b}|$.

c) Ya habíamos calculado el módulo de $\vec{a}$.

d) Ya habíamos calculado el módulo de $\vec{b}$.

e) La suma es:

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,3)+(2,5)=(1+2,3+5)$$
$$\vec{a}+\vec{b}=(3,8)$$

f) La diferencia es:

$$\vec{a}-\vec{b}=(1,3)-(2,5)=(1-2,3-5)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(-1,-2)$$

g) Tenemos:

$$2\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=$$
$$=2\cdot(1,3)+\frac{1}{3}\cdot(2,5)=$$
$$=(2,6)+\quad\frac{2}{3},\frac{5}{3}\quad=$$
$$=\quad 2+\frac{2}{3},6+\frac{5}{3}\quad=$$
$$=\quad\frac{6}{3}+\frac{2}{3},\frac{18}{3}+\frac{5}{3}\quad=$$
$$=\quad\frac{8}{3},\frac{23}{3}$$

h) El producto escalar es:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,3)\cdot(2,5)=1\cdot 2+3\cdot 5=17$$

i) Como el producto escalar es conmutativo:

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=17$$

j) $\angle\vec{b}\vec{a}$ es el ángulo entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a}$. Por comodidad, vamos a llamar alfa a ese ángulo:

$$\angle\vec{b}\vec{a}=\alpha$$

Como el producto escalar se puede calcular también con los módulos de los vectores y el ángulo entre ellos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos(\alpha)$$

y conocemos varios de ellos:

$$17=\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos(\alpha)$$

Podemos obtener el ángulo:

$$17=\sqrt{290}\cdot\cos(\alpha)$$
$$\sqrt{290}\cdot\cos(\alpha)=17$$
$$\cos(\alpha)=\frac{17}{\sqrt{290}}$$
$$\cos(\alpha)=\frac{17}{\sqrt{290}}\cdot\frac{\sqrt{290}}{\sqrt{290}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{17\sqrt{290}}{290}$$

$$\alpha = \arccos \quad \frac{17\sqrt{290}}{290}$$

Si calculamos la aproximación numérica:

$$\alpha \approx 3.36646°$$

2. Sean los vectores $\vec{a}$ = (1, 3, -2) y $\vec{b}$ = (-2, 5, 1). Calcula:

a) a
b) b
c) $|\vec{a}|$
d) $|\vec{b}|$
e) $\vec{a} + \vec{b}$
f) $\vec{a} - \vec{b}$
g) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
h) $\vec{b} \cdot \vec{a}$
i) $\angle\vec{b}\vec{a}$
j) $\vec{a} \times \vec{b}$
k) $\vec{b} \times \vec{a}$

a) El módulo de $\vec{a}$ es:

$$a = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

El módulo también se puede escribir: $|\vec{a}|$.

b) El módulo de $\vec{b}$ es:

$$b = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

El módulo también se puede escribir: $|\vec{b}|$.

c) Ya habíamos calculado el módulo de $\vec{a}$.

d) Ya habíamos calculado el módulo de $\vec{b}$.

e) La suma es:

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -2) + (-2, 5, 1) =$$
$$= (1 + (-2), 3 + 5, -2 + 1)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 8, -1)$$

f) La diferencia es:

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 3, -2) - (-2, 5, 1)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (3, -2, -3)$$

g) El producto escalar es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, -2) \cdot (-2, 5, 1) =$$
$$= 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 11$$

h) Como el producto escalar es conmutativo:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 11$$

i) El producto escalar se puede calcular también con los módulos de los vectores y el ángulo entre ellos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

Conocemos varios de ellos:

$$11 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{30} \cdot \cos(\alpha)$$
$$11 = \sqrt{420} \cdot \cos(\alpha)$$
$$\sqrt{420} \cdot \cos(\alpha) = 11$$
$$\cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{420}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{420}} \cdot \frac{\sqrt{420}}{\sqrt{420}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{11\sqrt{420}}{420}$$
$$\alpha = \arccos \frac{11\sqrt{420}}{420}$$

Si calculamos la aproximación numérica:

$$\alpha \approx 57.53767^\circ$$

j) El producto vectorial se puede calcular con un determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinante se puede calcular por la regla de Sarrus o cualquier otro método. Aquí desarrollamos por la primera fila:

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$
$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Cada determinante de orden 2 se calcula:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11$$

Por lo tanto:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 13\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 11\hat{k}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (13, 3, 11)$$

k) Como el producto vectorial es **anticonmutativo**:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = -(13, 3, 11)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (-13, -3, -11)$$

3. Sean los vectores $\vec{v}$ = (a, 3, -2) y $\vec{u}$ = (-2, 5, 1). Encuentra a para que los vectores sean:
a) Perpendiculares
b) Paralelos

Dos vectores **no nulos** son perpendiculares si su producto escalar es 0:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{u}$$

Por lo tanto:

$$(a, 3, -2) \cdot (-2, 5, 1) = 0$$
$$-2a + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 0$$
$$-2a + 15 - 2 = 0$$
$$-2a + 13 = 0$$
$$-2a = -13$$
$$a = \frac{-13}{-2}$$
$$a = \frac{13}{2}$$

Por lo tanto, son perpendiculares si a es $\frac{13}{2}$.

Dos vectores **no nulos** son paralelos si su producto vectorial es el vector nulo $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{v} \parallel \vec{u}$$

Por lo tanto:

$$(a, 3, -2) \times (-2, 5, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

La componente X se puede obtener:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 13$$

La componente Y:

$$\begin{matrix} a & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix} = a \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = a - 4$$

Y la componente Z:

$$- \begin{matrix} a & 3 \\ -2 & 5 \end{matrix} = a \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 5a + 6$$

Por lo tanto:

$$(13, a - 4, 5a + 6) = (0, 0, 0)$$

¡Ningún valor de a permite que se cumpla esta igualdad! Por lo tanto, nunca pueden ser paralelos.

4. Encuentra un vector unitario paralelo al vector $\vec{v} = (2, 4)$ y encuentra un vector unitario perpendicular al vector $\vec{v}$.

Encontrar un vector paralelo es muy sencillo; es cualquier vector proporcional a $\vec{v}$. Que sea unitario implica que el módulo es 1. Para ello, calculamos el módulo del vector $\vec{v}$:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

El vector unitario se encuentra “dividiendo” el vector entre el módulo:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(2, 4)}{2\sqrt{5}} =$$
$$= \quad \frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{2\sqrt{5}} \quad =$$
$$= \quad \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \quad =$$

Racionalizando:

$$= \quad \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conseguir un vector perpendicular a otro en 2D es muy sencillo. Solamente hay que cambiar el orden de las dos componentes y el signo de alguna de ellas. Por lo tanto:

$$\hat{n} = \quad -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Donde $\hat{n}$ es el vector unitario perpendicular al vector $\vec{v}$ que es paralelo al vector unitario $\hat{v}$:

$$\hat{n} \perp \vec{v} \parallel \hat{v}$$

5. Sean los vectores $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{u} = (-3,1)$ en la base canónica. Sea la base $B = \{(1,1),(-1,1)\}$. Expresa los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ en la base B.

Llamamos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a los vectores de la base B:

$$\vec{a} = (1,1)$$
$$\vec{b} = (-1,1)$$

Como forman una base, el vector $\vec{v}$ se puede escribir como una combinación lineal de ambos:

$$\vec{v} = v_a \cdot \vec{a} + v_b \cdot \vec{b}$$

donde v_a y v_b son dos números reales que son los componentes del vector en la base B:

$$\vec{v} = (v_a, v_b)_B$$

Sustituyendo los vectores por sus componentes en la base canónica:

$$(1,2) = v_a \cdot (1,1) + v_b \cdot (-1,1)$$
$$(1,2) = (v_a - v_b, v_a + v_b)$$
$$\begin{array}{rcl} 1 & = & v_a - v_b \\ 2 & = & v_a + v_b \end{array}$$

Podemos usar el método de reducción para resolver el sistema. Si sumamos ambas ecuaciones, se elimina v_b:

$$1 + 2 = (v_a - v_b) + (v_a + v_b)$$
$$3 = 2v_a$$
$$v_a = \frac{3}{2}$$

Podemos volver a usar el método de reducción para eliminar v_a si a la segunda ecuación le restamos la primera:

$$2 - 1 = (v_a + v_b) - (v_a - v_b)$$
$$1 = 2v_b$$
$$v_b = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_B$$

Podemos hacer lo mismo con el vector $\vec{u}$:

$$\vec{u} = u_a \cdot \vec{a} + u_b \cdot \vec{b}$$
$$(-3, 1) = u_a \cdot (1, 1) + u_b \cdot (-1, 1)$$
$$(-3, 1) = (u_a, u_a) + (-u_b, u_b)$$
$$(-3, 1) = (u_a - u_b, u_a + u_b)$$

$$\begin{array}{lcl} -3 & = & u_a - u_b \\ 1 & = & u_a + u_b \end{array}$$

Por el método de reducción, podemos eliminar u_b si sumamos ambas ecuaciones:

$$-3 + 1 = (u_a - u_b) + (u_a + u_b)$$
$$-2 = 2u_a$$
$$u_a = -1$$

Por el método de reducción, podemos eliminar u_a si restamos ambas ecuaciones:

$$1 - (-3) = (u_a + u_b) - (u_a - u_b)$$
$$4 = 2u_b$$
$$u_b = 2$$

Por lo tanto $\vec{u}$:

$$\vec{u} = (-1, 2)$$

6. Sea la base $B = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. ¿Es ortogonal?

Nos preguntan si los vectores de la base son perpendiculares entre si. Los vectores de la base son, en coordenadas canónicas:

$$\vec{a} = (1, 1)$$
$$\vec{b} = (-1, 1)$$

El criterio de perpendicularidad nos asegura que los vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 1) \cdot (-1, 1) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

Como el producto escalar es cero, son perpendiculares (= normales = ortogonales) entre si. Y, por lo tanto, la base es ortogonal.

7. Sea la base $B = \{(1,1),(-1,1)\}$. ¿Es ortonormal? En caso de que no lo sea, ¿cómo puedes convertirla en ortonormal?

Una base es ortonormal cuando: 1) sus vectores son perpendiculares (= normales = ortogonales) entre si, 2) sus vectores son unitarios (= el módulo es 1).

En el ejercicio anterior hemos demostrado que la base es ortogonal. Es decir, que sus vectores son perpendiculares entre si.

Ahora solamente tenemos que comprobar si los vectores son además unitarios o no. Para ello, calculamos el módulo:

$$
\begin{aligned}
|(1,1)| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\
|(-1,1)| &= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Los módulos no son iguales a 1. Por lo tanto, no son unitarios y la base no es ortonormal.

Podemos conseguir dos vectores unitarios a partir de los vectores que tenemos si simplemente dividimos los vectores entre sus módulos:

$$
\begin{aligned}
\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} &= \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Racionalizando obtenemos la base B':

$$
B' = \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}
$$

que sí es ortonormal.

8. Encuentra los vectores que son perpendiculares a $\vec{v} = (1,-1,2)$ y $\vec{u} = (3,2,-2)$ y tienen módulo igual a 3.

Encontrar un vector perpendicular a dos vectores en 3D es sencillo: calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$
\vec{a} = \vec{v} \times \vec{u}
$$

$$
\vec{a} = \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix} =
$$

$$
= (-2, 8, 5)
$$

Pero el módulo de este vector no es 1 (= no es unitario). Calculamos el módulo:

$$
a = |\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 5^2}
$$

$$a = \sqrt{93}$$

Para conseguir un vector de módulo 3, solamente tenemos que dividir $\vec{a}$ entre su módulo y multiplicar por 3:

$$\frac{3}{\sqrt{93}} \cdot (-2, 8, 5) =$$
$$= \quad \frac{-6}{\sqrt{93}}, \frac{24}{\sqrt{93}}, \frac{15}{\sqrt{93}}$$

Hay otro vector que tiene la misma dirección y el mismo módulo, pero cuyo sentido es opuesto:

$$\frac{6}{\sqrt{93}}, \frac{-24}{\sqrt{93}}, \frac{-15}{\sqrt{93}}$$

9. Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ tienen módulos iguales a 3 y 5 unidades respectivamente. Y el ángulo entre ellos es de 30 grados. ¿Cuál es el módulo del producto vectorial? ¿Cuál es el producto escalar?

El **módulo del producto vectorial** se puede calcular usando solamente los módulos y el **seno** del ángulo entre ambos vectores:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = v \cdot u \cdot \sin(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = 3 \cdot 5 \cdot \sin(30°) =$$
$$= 15 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

El **producto escalar** se puede calcular usando solamente los módulos y el **coseno** del ángulo entre ambos vectores:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u \cdot \cos(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot 5 \cdot \cos(30°) =$$
$$= 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

10. Sean los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (-1, 3, 5)$. Encuentra:
a) sus módulos
b) su producto escalar

c) el coseno del ángulo entre ellos
d) el seno del ángulo entre ellos
e) el producto vectorial
f) el módulo del producto vectorial a partir de sus componentes
g) el módulo del producto vectorial sin usar sus componentes

a) Los módulos se calculan:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$b = |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

b) El producto escalar es la suma es la suma del producto de las componentes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (-1, 3, 5) =$$
$$= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 =$$
$$= 20$$

Como es conmutativo:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} =$$
$$= 20$$

c) Sabemos que el producto escalar también se puede calcular:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

donde a es el módulo de $\vec{a}$, b es el módulo de $\vec{b}$ y α es el ángulo entre los vectores. Por lo tanto:

$$20 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \cos(\alpha)$$

Por lo tanto, el coseno es:

$$\cos(\alpha) = \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{20}{7\sqrt{10}}$$

Racionalizando:

$$\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

d) Como tenemos el valor del coseno, podemos encontrar el seno fácilmente con el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2 \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \frac{4 \cdot 10}{49} \\
\sin^2(\alpha) &= \frac{49 - 40}{49} \\
\sin^2(\alpha) &= \frac{9}{49} \\
\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{\frac{9}{49}} \\
\sin(\alpha) &= \pm\frac{3}{7}
\end{aligned}$$

e) El producto vectorial:

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \\
&= \hat{\imath} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \\
&-\hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \\
&+\hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= (2 \cdot 5 - 3 \cdot 3)\hat{\imath} + \\
&-(1 \cdot 5 - 3 \cdot (-1))\hat{\jmath} + \\
&+(1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1))k = \\
&= 1\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 5\hat{k} = \\
&= (1, -8, 5)
\end{aligned}$$

Como el producto vectorial es anticonmutativo:

$$\begin{aligned}
&\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} = \\
&= -(1, -8, 5) = \\
&= (1, 8, -5)
\end{aligned}$$

f) El módulo del producto vectorial a partir de sus componentes:

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}| = |(1,-8,5)| = \\ = \sqrt{1^2+(-8)^2+5^2} = \\ = \sqrt{90} = \\ = \sqrt{9\cdot 10} = \\ = 3\sqrt{10}\end{aligned}$$

g) El módulo del producto vectorial se puede calcular si se conocen los módulos de los vectores y el seno del ángulo entre ellos:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot \sin(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{14}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{3}{7}$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{14\cdot 35}\cdot\frac{3}{7}$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{7^2\cdot 2\cdot 5}\cdot\frac{3}{7}$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = 7\cdot\sqrt{2\cdot 5}\cdot\frac{3}{7}$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{2\cdot 5}\cdot 3$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = 3\cdot\sqrt{10}$$

Que es el mismo resultado del apartado anterior.

11. Calcula el producto mixto de $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-2,-1,5)$ y $\vec{c}=(3,-1,3)$ usando la definición y usando el determinante.

El producto mixto de tres vectores se define:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Por lo tanto, primero calcularemos la parte del producto vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{b}\times\vec{c} = \\ = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ -2 & -1 & 5\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix} = \\ = \hat{\imath}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix} +\end{aligned}$$

$$-\hat{\jmath}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}+$$

$$+\hat{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=((-1)\cdot 3-(-1)\cdot 5)\hat{\imath}+$$

$$-((-2)\cdot 3-3\cdot 5)\hat{\jmath}+$$

$$+((-2)\cdot(-1)-3\cdot(-1))k=$$

$$=2\hat{\imath}+21\hat{\jmath}+5\hat{k}=$$

$$=(2,21,5)$$

Por lo tanto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=$$

$$=(1,2,3)\times(2,21,5)=$$

$$=1\cdot 2+2\cdot 21+3\cdot 5=$$

$$=59$$

El producto mixto se puede calcular directamente con un determinante:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=59$$

12. Demuestra que la siguiente proposición es falsa:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}}$$

La proposición dice que si el producto escalar de un vector por un segundo vector es igual al producto escalar de ese mismo vector por un tercer vector, entonces el segundo vector y el tercer vector son iguales entre si.

Un modo de demostrar que es falso es buscar un contrajemplo. Y es relativamente fácil de encontrar:

$$\vec{a}=(3,1)$$

$$\vec{b}=(1,-1)$$

$$\vec{c}=(x,y)$$

Si hacemos los productos escalares:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,1)\cdot(1,-1)=$$

$$= 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 3 - 1 =$$
$$= 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (3, 1) \cdot (x, y) =$$
$$= 3 \cdot x + 1 \cdot y =$$
$$= 3x + y$$

Queremos que los dos sean iguales:

$$2 = 3x + y$$

Hay infinitas parejas de x e y que cumplen esa ecuación y no son la pareja (1, -1). Por ejemplo, si $x = 2$ e $y = -6$, se cumple que son iguales.

No necesitamos buscar más casos. Hemos encontrado un **contraejemplo** y, para demostrar que una proposición es falsa, solamente necesitamos encontrar un contraejemplo:

$$\vec{a} = (3, 1)$$
$$\vec{b} = (1, -1)$$
$$\vec{c} = (2, -6)$$

$$(3, 1) \cdot (1, -1) = (3, 1) \cdot (2, -6) \not\Rightarrow$$
$$\not\Rightarrow (1, -1) = (2, -6)$$

13. Observa que en la figura aparecen dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$. Además hay cuatro vectores unitarios que forman dos bases ortonormales: $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ es la base canónica y $B = \{\hat{a}, \hat{b}\}$. Expresa los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ como combinaciones lineales de los vectores de ambas bases y sus componentes en cada base.

En la base canónica formada por $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{v} = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} = (5, 8)$$
$$\vec{u} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} = (6, 2)$$

En la base B formada por $\hat{a}$ y $\hat{b}$:

$$\vec{v} = 4\hat{a} + 4\hat{b} = (4, 4)_B$$
$$\vec{u} = -2\hat{a} + 3\hat{b} = (-2, 3)_B$$

14. Si $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{c} = (0, m, 2)$:

a) calcula $\vec{a} \times \vec{b}$

b) encuentra el valor de m para el que el producto mixto de los tres vectores se anule

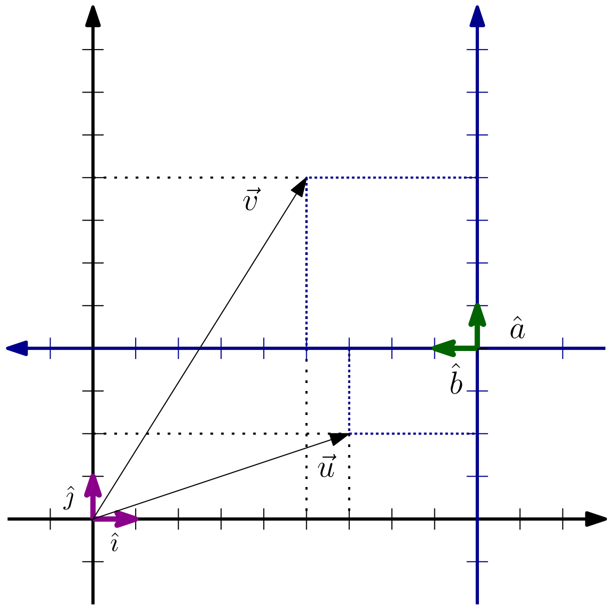


Figura 109: Hay cuatro vectores unitarios que forman dos bases ortogonales. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ se pueden escribir como combinaciones lineales de las dos bases.

a)

$$\vec{a}\times\vec{b} =$$
$$= (2,1,0)\times(-1,0,1) =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \hat{\imath}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$-\hat{\jmath}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+\hat{k}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 1\hat{k} =$$
$$= \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k} =$$
$$= (1,2,1)$$

b) El producto mixto se anula cuando es cero:

$$[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = 0$$

Pero, por la definición del producto vectorial:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$
$$(0,m,2)\cdot(1,2,1) = 0$$

$$0 \cdot 1 + m \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$m = -1$$

ALUMNA: Un momento, un momento. Ha multiplicado los tres vectores en un orden, pero, ¿por qué no primero a, después b y después c?

PROFESOR: Hay dos razones para ello. La primera es porque eso me permitía usar el resultado del primer apartado y calcular rápidamente el segundo.

ALUMNA: ¿Y la segunda?

PROFESOR: La segunda es más importante, y es que el producto mixto de tres vectores es el mismo si se hace una permutación cíclica…

ALUMNA: ¿Permutación cíclica?

PROFESOR: Lo que quiere decir es que:

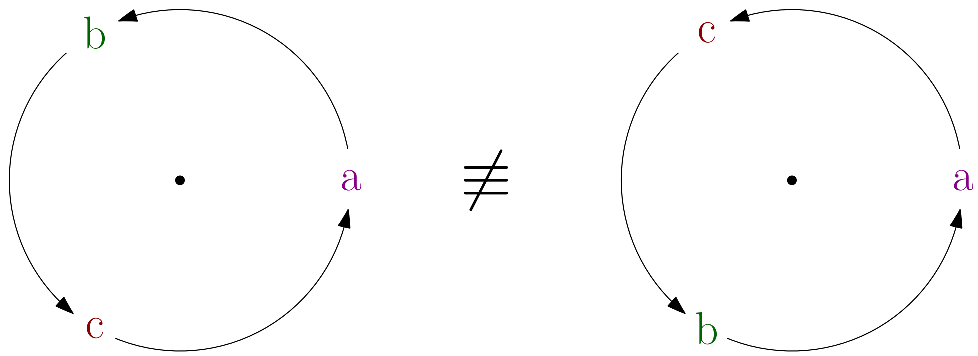
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

ALUMNA: ¿La palabra *“cíclica”* está relacionada con *“círculos”* o *“circunferencia”*?

PROFESOR: Con la palabra *“ciclo”*; que se relaciona con la palabra *círculo*.

ALUMNA: Oh. Creo que ya lo entiendo. Si ponemos las letras en un orden en un círculo, las permutaciones cíclicas son todas las listas que podemos hacer recorriendo el círculo en el mismo sentido a partir de cada letra. `[Hace un dibujo.]`

PROFESOR: ¡Exacto! ¡Muy bien!



a, b, c	a, c, b
b, c, a	c, b, a
c, a, b	b, a, c

Figura 110: Permutaciones cíclicas.

15. Si $\vec{a} = (2, m)$, $\vec{b} = (1, -3)$ y $\vec{c} = (m+1, m-1)$, encuentra m para que el vector:

$$2\vec{a} - \vec{b}$$

sea perpendicular a $\vec{c}$.

El vector siguiente vector es fácil de calcular:

$$2\vec{a} - \vec{b} =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot (2, m) - (1, -3) = \\ &= (4, 2m) - (1, -3) = \\ &= (4 - 1, 2m + 3) = \\ &= (3, 2m + 3) \end{aligned}$$

Si es perpendicular a $\vec{c}$, entonces su producto escalar debe ser cero:

$$(3, 2m + 3) \perp (m + 1, m - 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (3, 2m + 3) \cdot (m + 1, m - 1) = 0 \\ &3 \cdot (m + 1) + (2m + 3) \cdot (m - 1) = 0 \\ &3m + 3 + 2m^2 - 2m + 3m - 3 = 0 \\ &2m^2 + 4m = 0 \end{aligned}$$

Dividiendo entre dos ambos lados de la ecuación:

$$m^2 + 2m = 0$$

Es una ecuación cuadrática incompleta sin término independiente. Podemos resolverla fácilmente sacando m como factor común:

$$m \cdot (m + 2) = 0$$

Lo que implica que:

$$\begin{cases} \boxed{m = 0} \\ m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2} \end{cases}$$

- Cuando $m = 0$:

$$\vec{a} = (2, 0)$$
$$2\vec{a} - \vec{b} = (3, 3)$$
$$\vec{c} = (1, -1)$$

- Cuando $m = -2$:

$$\vec{a} = (2, -2)$$
$$2\vec{a} - \vec{b} = (3, -1)$$
$$\vec{c} = (-1, -3)$$

Y es fácil comprobar en ambos casos que se cumplen las condiciones del problema.

16. Sean los vectores $\vec{a} = (2, m)$ y $\vec{b} = 3\hat{\jmath} - 5\hat{\imath}$. Encuentra m para que ambos sean paralelos entre si.

Los vectores son:

$$\begin{cases} \vec{a} = (2, m) \\ \vec{b} = 3\hat{\jmath} - 5\hat{\imath} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{a} = (2, m) \\ \vec{b} = (-5, 3) \end{cases}$$

Para que sean paralelos:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$$

Es decir:

$$\frac{2}{-5} = \frac{m}{3}$$

$$m = \frac{-6}{5}$$

Es decir:

$$\begin{cases} m = -6/5 \implies \vec{a} \parallel \vec{b} \\ m \neq -6/5 \implies \vec{a} \nparallel \vec{b} \end{cases}$$

17. Sean los vectores $\vec{a} = (2, m)$ y $\vec{b} = 3\hat{\jmath} - 5\hat{\imath}$. Encuentra m para que ambos sean perpendiculares entre si.

Los vectores son:

$$\begin{cases} \vec{a} = (2, m) \\ \vec{b} = 3\hat{\jmath} - 5\hat{\imath} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{a} = (2, m) \\ \vec{b} = (-5, 3) \end{cases}$$

Para que sean perpendiculares:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Es decir:

$$(2, m) \cdot (-5, 3) = 0$$

$$-10 + 3m = 0$$

$$m = \frac{10}{3}$$

Es decir:

$$\begin{cases} m = 10/3 \implies \vec{a} \perp \vec{b} \\ m \neq 10/3 \implies \vec{a} \not\perp \vec{b} \end{cases}$$

Rectas 2D

1. ¿Están alineados los puntos A(2, 3), B(1, 4) y C(5, 4)?

Varios puntos están alineados cuando todos ellos pertenecen a la misma recta.

Un modo de comprobar si es así, es encontrar los vectores que unen uno de los puntos con los otros dos:

$$\overrightarrow{AB} = (1,4) - (2,3) = (-1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5,4) - (2,3) = (3,1)$$

Y ver si son paralelos. Para eso basta ver si son proporcionales. Pero no lo son:

$$\frac{3}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Por lo tanto, los puntos **no están alineados**.

2. ¿Están alineados los puntos A(2, 3), B(3, 5) y C(4, 7)?

Podemos hacer lo mismo que en el ejercicio anterior:

$$\overrightarrow{AB} = (3,5) - (2,3) = (1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4,7) - (2,3) = (2,4)$$

Y, por lo tanto:

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$$

Por lo tanto, los puntos **sí están alineados**.

3. ¿Están alineados los puntos A(1, 3), B(2, 4) y C(7, 9)?

Encontramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,4) - (1,3) = (1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7,9) - (1,3) = (6,6)$$

Como se ve, $\overrightarrow{AB}$ es directamente proporcional a $\overrightarrow{AC}$ (y viceversa):

$$\overrightarrow{AC} = 6 \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Por lo tanto, ambos vectores tienen la misma dirección:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

Eso implica que **los tres puntos están alineados**.

4. ¿Están alineados los puntos A(1, -1), B(3, 5) y C(2, -3)?

Encontramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5) - (1, -1) = (2, 6)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -3) - (1, -1) = (1, -2)$$

Los dos vectores no son directamente proporcionales; no existe un número que, multiplicado por uno de los vectores, nos dé el otro vector. Por lo tanto, no son paralelos:

$$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$$

Y **los puntos no están alineados**.

> **5**. ¿Cuáles son los nombres de las ecuaciones de la recta en el plano? (Es decir, en 2D.) ¿Cuáles de ellas tienen una forma única?

Las ecuaciones de la recta en el plano son:

- ecuación vectorial
- ecuaciones paramétricas
- ecuación continua
- ecuación normal
- ecuación general o ecuación implícita
- ecuación explícita
- ecuación punto-pendiente
- ecuación canónica o ecuación segmentaria

Solamente dos de ellas tienen una forma única:

- ecuación explícita
- ecuación canónica o ecuación segmentaria

Es decir, solamente hay una forma correcta de escribir esas ecuaciones para una recta determinada. Porque:

- la primera depende de la pendiente y de la ordenada en el origen y una recta solamente tiene una pendiente y una ordenada en el origen.
- la segunda depende de los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Y solamente existen esos puntos de corte.

Las demás ecuaciones dependen de vectores directores, normales y puntos. Y una recta tiene infinitos vectores directores (proporcionales entre si), infinitos vectores normales (proporcionales entre si) e infinitos puntos por los que pasa.

Así que hay infinitas maneras distintas de escribir **correctamente** la ecuación de una recta usando ecuaciones vectoriales, paramétricas, continuas, normales, generales o punto-pendiente.

> **6**. Sea una recta en el plano que pasa por (2, 1) y (3, -2). Encuentra todas las ecuaciones de la recta.

Queremos las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos:

$$A = (2, 1) \in r$$

$$B = (3, -2) \in r$$

La recta r se puede escribir también como $\overleftrightarrow{AB}$:

$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

Primero encontramos un *vector director*, como el que sale de A y llega a B:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A =$$
$$= (3, -2) - (2, 1) =$$
$$= (1, -3)$$

$$\vec{r} = (1, -3) \parallel r$$

Cualquier vector proporcional será también un vector director.

La **ecuación vectorial** es:

$$\boxed{r \equiv (x, y) = (2, 1) + (1, -3) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Las **ecuaciones paramétricas** son:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

La **ecuación continua** es:

$$\boxed{r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3}}$$

Pasando los denominadores al lado opuesto:

$$-3 \cdot (x - 2) = 1 \cdot (y - 1)$$
$$-3x + 6 = y - 1$$

Pasando todo al lado izquierdo:

$$-3x - y + 7 = 0$$

Por lo que la **ecuación general** o **ecuación implícita** es:

$$\boxed{r \equiv -3x - y + 7 = 0}$$

Observando los coeficientes de la ecuación general, un vector normal a r es:

$$\vec{n}_r = (-3, -1) \perp r$$

Y, si usamos el punto (2, 1), una **ecuación normal** podría ser:

$$\boxed{r \equiv -3 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) = 0}$$

A partir de la ecuación general podemos obtener la **ecuación explícita** despejando y:

$$-3x - y + 7 = 0 \Rightarrow -3x + 7 = y \Rightarrow y = -3x + 7$$

$$\boxed{r \equiv y = -3x + 7}$$

donde:

- la pendiente es $m = -3$
- la ordenada en el origen es $n = 7$

Para la **ecuación punto-pendiente** necesitamos un punto (x_0, y_0) y la pendiente m:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Podemos escoger el punto (2, 1) y la pendiente es -3:

$$y - 1 = -3 \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{r \equiv y - 1 = -3 \cdot (x - 2)}$$

Solamente nos falta la ecuación canónica o segmentaria de la recta.

Para eso, cogemos la general:

$$-3x - y + 7 = 0$$

Llevamos el término independiente a la derecha:

$$-3x - y = -7$$

Dividimos todo entre el término independiente:

$$\frac{-3x}{-7} + \frac{-y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$$\frac{3x}{7} + \frac{y}{7} = 1$$

$$\frac{x}{7/3} + \frac{y}{7} = 1$$

$$\boxed{r \equiv \frac{x}{7/3} + \frac{y}{7} = 1}$$

Por lo que la recta corta:

- al eje X en (7/3, 0)
- al eje Y en (0, 7)

7. Encuentra la ecuación normal de una recta que pasa por (1, -3) y tiene el vector normal (2, 5).

Sabemos:

$$\begin{cases} P = (1, -3) \in r \\ \vec{r} = (2, 5) \parallel r \end{cases}$$

Un vector normal se puede obtener cambiando de orden las componentes de un vector director y cambiando el signo de una de ellas:

$$\vec{n} = (5, -2) \perp r$$

$$\boxed{r \equiv 5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 3) = 0}$$

8. Encuentra todas las ecuaciones de la recta que tiene pendiente 3 y pasa por el punto (1, 2).

La ecuación más sencilla de encontrar es la **ecuación punto-pendiente**, precisamente porque tenemos un punto de la recta y tenemos la pendiente de la recta:

$$m = 3$$
$$(x_0, y_0) = (1, 2) \in r$$

La ecuación punto-pendiente en general es de la forma:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Por lo tanto,a **ecuación punto-pendiente** de la recta es:

$$\boxed{y - 2 = 3 \cdot (x - 1)}$$

Si despejamos y y simplificamos:

$$y - 2 = 3x - 3$$
$$y = 3x - 3 + 2$$
$$y = 3x - 1$$

Tenemos la **ecuación explícita** de la recta:

$$\boxed{y = 3x - 1}$$

Si llevamos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$y - 3x + 1 = 0$$

tenemos la **ecuación general** o **ecuación implícita** de la recta:

$$\boxed{y - 3x + 1 = 0}$$

Ahora podemos pasar el término independiente al lado derecho:

$$y - 3x = -1$$

dividir ambos miembros entre -1:

$$-y + 3x = 1$$

Llevas los coeficientes debajo:

$$\frac{y}{-1} + \frac{x}{1/3} = 1$$

$$\frac{x}{1/3} + \frac{y}{-1} = 1$$

lo que nos da la **ecuación canónica** o **ecuación segmentaria** de la recta:

$$\boxed{\frac{x}{1/3} + \frac{y}{-1} = 1}$$

que indica que la recta pasa por los puntos (1/3, 0) y (0, -1).

Si volvemos a la ecuación general:

$$y - 3x + 1 = 0$$

Podemos pasar $3x$ al lado derecho:

$$y + 1 = 3x$$

Y ahora dividir ambos lados entre 3:

$$\frac{y+1}{3} = \frac{x}{1}$$
$$\frac{y+1}{3} = \frac{x-0}{1}$$

que nos da la **ecuación continua** de la recta:

$$\boxed{\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{3}}$$

Por lo tanto, la recta pasa por (0, -1) y un vector director es (1, 3).

Por lo tanto, la **ecuación vectorial** de la recta es:

$$\boxed{(x, y) = (0, -1) + (1, 3) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Si un vector director es (1, 3), un posible vector normal[36] es (3, -1).

Una **ecuación normal** de la recta con vector normal (3, -1) que pasa por (0, -1) es:

$$3(x - 0) - 1(y - (-1)) = 0$$

[36] Recuerda que en 2D para encontrar un vector normal (perpendicular) a otro solamente tienes que cambiar el orden de las coordenadas cartesianas y cambiar el signo de una de las dos.

$$\boxed{3(x-0)-(y+1)=0}$$

9. Para la recta r que pasa por A(2, -1) y B(-3, 2), encuentra un vector director, un vector normal y la ecuación de la recta en todas sus formas.

Para los dos vectores que pide el enunciado, usamos:

- un vector director: $\vec{r} \parallel r$
- un vector normal: $\vec{n}_r \perp r$

Un vector director puede ser el vector que sale del punto A y llega al punto B:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A =$$

$$= (-3,2) - (2,-1) = (-5,3)$$

Podemos encontrar un vector normal cambiando el orden de las coordenadas de un vector director y cambiando el signo a una de las coordenadas:

$$\vec{n}_r = (3,5)$$

Hasta ahora tenemos la siguiente información sobre la recta r:

- dos puntos por los que pasa. Vamos a usar sólo uno de ellos:

$$A = (2,-1)$$

- un vector director:

$$\vec{r} = (-5,3)$$

- un vector normal:

$$\vec{n}_r = (3,5)$$

- **VECTORIAL**

$$r : \boxed{(x,y) = (2,-1) + (-5,3)\cdot t}$$

- **PARAMÉTRICAS**

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

$$r : \boxed{\begin{array}{ccccc} x & = & 2 & - & 5t \\ y & = & -1 & + & 3t \end{array}}$$

- **CONTINUA**

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-(-1)}{3}$$

$$r : \boxed{\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3}}$$

- **NORMAL**

$$3\cdot(x-2) + 5\cdot(y-(-1)) = 0$$

$$r : \boxed{3(x-2) + 5(y+1) = 0}$$

- **GENERAL** o **IMPLÍCITA**

  Se puede obtener a partir de la continua o a partir de la normal. Por ejemplo, a partir de la normal, eliminamos los paréntesis:

$$3(x-2)+5(y+1)=0$$

$$3x-6+5y+5=0$$

  Y simplificamos:

$$r:\boxed{3x+5y-1=0}$$

- **CANÓNICA** o **SEGMENTARIA**

  Podemos obtenerla a partir de la general. Aislamos el término independiente en la derecha:

$$3x+5y-1=0$$

$$3x+5y=1$$

  En la derecha tenemos 1, que es lo que queremos. Ahora debemos hacer:

$$r:\boxed{\frac{x}{1/3}+\frac{y}{1/5}=1}$$

  Por lo tanto, los puntos de corte de la recta con los ejes son:

$$\frac{1}{3},0 \quad ; \quad 0,\frac{1}{5}$$

- **EXPLÍCITA**

  Podemos obtenerla a partir de la general, despejando y:

$$3x+5y-1=0$$

$$5y=-3x+1$$

$$y=\frac{-3x+1}{5}$$

  Que reescribimos:

$$r:\boxed{y=\frac{-3}{5}x+\frac{1}{5}}$$

  O también:

$$y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

  Por lo tanto:

  - la pendiente es:

$$m=-\frac{3}{5}$$

  - la ordenada en el origen es:

$$n=\frac{1}{5}$$

- **PUNTO-PENDIENTE**

  Como tenemos la pendiente y un punto:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-1) = -\frac{3}{5} \cdot (x - 2)$$

$$r : \boxed{y + 1 = -\frac{3}{5} \cdot (x - 2)}$$

12. ¿Pertenece el punto P(2, 3) a la recta $r : (x, y) = (2, 3) + (1, 2)t$?

Para que el punto pertenezca a la recta, debe cumplir la ecuación. Es decir, si sustituimos en la ecuación, tiene que ser posible:

$$r : (2, 3) = (2, 3) + (1, 2)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 + 1t & \rightarrow t = 0 \\ 3 = 3 + 2t & \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

Como los valores de t son los mismos, entonces el punto **sí** pertenece a la recta:

$$P \in r$$

En este caso no era necesario hacer nada; ¡el punto aparece en la ecuación vectorial!

11. Sea la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

determina si los siguientes puntos pertenecen a ella:
a) A(1, 1)
b) B(-2, 3)

Para que los puntos pertenezcan a la recta, deben cumplir las ecuaciones de la recta.

Nos dan las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Debe existir un valor del parámetro t para el cual se cumplan simultáneamente (= a la vez) ambas ecuaciones.

a) A(1, 1)

Sustituimos el punto en las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 3 - 2t \\ 1 & = & -1 + 2t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ t & = & 1 \end{array}$$

Ambas ecuaciones dan el mismo valor al parámetro. Por lo tanto, A sí pertenece a la recta r:

$$A \in r$$

b) B(-2, 3)

Sustituimos el punto en las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lcr} -2 & = & 3-2t \\ 3 & = & -1+2t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcl} t & = & \frac{5}{2} \\ t & = & 2 \end{array}$$

Las dos ecuaciones se contradicen; el parámetro t no puede ser simultáneamente $5/2$ y 2. Por lo tanto, B no pertenece a la recta r:

$$B \notin r$$

12. ¿Pertenece el punto P(5, 1) a la recta $r : (x, y) = (2, 3) + (1, 2)t$?

Para que el punto pertenezca a la recta, debe cumplir la ecuación. Es decir, si sustituimos en la ecuación, tiene que ser posible:

$$r : (5, 1) = (2, 3) + (1, 2)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 + 1t & \rightarrow t = 3 \\ 1 = 3 + 2t & \rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Como los valores de t no son los mismos, entonces el punto **no** pertenece a la recta:

$$P \notin r$$

13. ¿Pertenece el punto P(3, 2) a la recta $r : y = 2x + 3$?

Si el punto (3, 2) es un punto de la recta, entonces tiene que ser una solución de la ecuación.

- LI = lado izquierdo de la ecuación = y

  Como el punto es (3, 2), la y de ese punto es 2.

  $$LI = y = 2$$

- LD = lado derecho de la ecuación = $2x + 3$

  Como el punto es (3, 2), la x de ese punto es 3.

  $$LD = 2x + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

¡El lado derecho y el izquierdo no son iguales para el punto (3, 2)! ¡$LI \neq LD$!

El punto **no** es solución de la ecuación. Por lo tanto, **no** es un punto de la recta. P no pertenece a la recta:

$$P \notin r$$

14. Escribe la recta $r : y = 3x - 5$ de todas las formas posibles.

- **EXPLÍCITA**

  Nos dan la ecuación explícita:

  $$\boxed{y = 3x - 5}$$

  Por lo que sabemos:

  - la pendiente $= m = 3$
  - la ordenada en el origen $= n =$ -5

- **GENERAL** o **IMPLÍCITA**

  Se puede obtener reordenando la explícita:

  $$\boxed{-3x + y + 5 = 0}$$

  $$-3x + 1y + 5 = 0$$

  Lo que nos indica un vector normal:

  $$\vec{n}_r = (-3, 1)$$

  Y el vector director se puede encontrar intercambiando las coordenadas del vector normal y cambiando el signo a una de ellas:

  $$\vec{r} = (1, 3)$$

- **CANÓNICA** o **SEGMENTARIA**

  Se puede obtener a partir de cualquiera de las dos formas anteriores:

  $$-3x + y = -5$$

  Dividimos entre -5:

  $$\frac{-3x + y}{-5} = \frac{-5}{-5}$$
  $$\frac{-3x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1$$
  $$\frac{3x}{5} + \frac{y}{-5} = 1$$

  Tenemos que eliminar el 3 en el primer numerador. Podemos llevarlo debajo si dividimos:

  $$\boxed{\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5} = 1}$$

  Por lo tanto, los puntos de corte con los ejes son:

  $$\frac{5}{3}, 0 \quad ; (0, -5)$$

- **NORMAL**

  $$\boxed{-3 \cdot \quad x - \frac{5}{3} \quad + 1 \cdot (y - 0) = 0}$$

- **VECTORIAL**

  Ahora tenemos un vector director y un punto de la recta.

$$\boxed{(x, y) = (0, -5) + (1, 3) \cdot t}$$

- **PARAMÉTRICAS**

  Tenemos el mismo punto de partida que en la vectorial: un vector director y un punto.

$$\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$$

  Podemos eliminar el 1:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$$

  E incluso el 0:

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -5 + 3t \end{cases}}$$

- **CONTINUA**

  Aquí también partimos del vector director y de un punto:

$$\boxed{\frac{x-0}{1} = \frac{y+5}{3}}$$

- **PUNTO-PENDIENTE**

  Como tenemos la pendiente y tenemos un punto:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-5) = m3 \cdot (x - 0)$$

$$\boxed{y + 5 = 3 \cdot (x - 0)}$$

14. Escribe la recta $r : 2y - 4x + 3 = 0$ de todas las formas posibles.

- **GENERAL** o **IMPLÍCITA**

  Nos dan la forma general, pero desordenada. La ordenamos[37]:

$$\boxed{-4x + 2y + 3 = 0}$$

  Por lo tanto, un vector director es:

$$\vec{r} = (-4, 2)$$

  Y un vector normal es:

$$\vec{n}_r = (2, 4)$$

[37]Aunque el orden es una simple convención. Que y esté primero y x esté después no es incorrecto, simplemente no es lo que hacemos normalmente.

- **CANÓNICA** o **SEGMENTARIA**

  A partir de la general:

$$-4x + 2y + 3 = 0$$
$$-4x + 2y = -3$$
$$\frac{-4x + 2y}{-3} = \frac{-3}{-3}$$
$$\frac{-4x}{-3} + \frac{2y}{-3} = 1$$
$$\frac{4x}{3} + \frac{2y}{-3} = 1$$
$$\boxed{\frac{x}{3/4} + \frac{y}{-3/2} = 1}$$

  Por lo que los puntos de corte con los ejes son:

$$\frac{3}{4}, 0 \quad ; \quad 0, -\frac{3}{2}$$

- **NORMAL**

$$\boxed{2 \cdot \quad x - \frac{3}{4} \quad + 4 \cdot (y - 0) = 0}$$

- **EXPLÍCITA**

  A partir de la general:

$$-4x + 2y + 3 = 0$$
$$2y = 4x - 3$$
$$y = \frac{4x - 3}{2}$$
$$y = \frac{4x}{2} - 32$$
$$\boxed{y = 2x - 32}$$

  Por lo tanto:

  - la pendiente = m = 2
  - la ordenada en el origen = n = - 3/2

- **PUNTO-PENDIENTE**

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$
$$\boxed{y - 0 = 2 \cdot \quad x - \frac{3}{4}}$$

- **VECTORIAL**

$$\boxed{(x, y) = \quad \frac{3}{4}, 0 \quad + (-4, 2) \cdot t}$$

- **PARAMÉTRICAS**

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{3}{4} - 4t \\ y = 0 + 2t \end{cases}}$$

- **CONTINUA**

$$\boxed{\frac{x - 3/4}{-4} = \frac{y - 0}{2}}$$

15. Encuentra tres puntos de la recta $r : (x, y) = (1, 2) \cdot t + (2, -3)$.

Observa que la ecuación está en forma vectorial. Pero no está escrita en el orden habitual. Reordenamos:

$$(x, y) = (2, -3) + (1, 2) \cdot t$$

t es un parámetro que puede tener cualquier valor real.

Eso quiere decir que cada valor de t nos da un punto de la recta:

- $t = 0$
$$(x, y) = (2, -3) + (1, 2) \cdot 0$$
$$(x, y) = (2, -3)$$

- $t = 1$
$$(x, y) = (2, -3) + (1, 2) \cdot 1$$
$$(x, y) = (3, -1)$$

- $t = 2$
$$(x, y) = (2, -3) + (1, 2) \cdot 2$$
$$(x, y) = (4, 1)$$

- ...

16. Encuentra tres puntos de la recta r: $2x + y - 3 = 0$.

Aquí podemos dar valores arbitrarios[38] a x (o a y) y obtener la y (o la x) a partir de la ecuación.

Por ejemplo:

- Si $x = 0$:
$$2 \cdot 0 + y - 3 = 0$$
$$y = 3$$
$$(0, 3)$$

[38] Es decir, cualquier valor.

- Si $x = 1$:

$$2 \cdot 1 + y - 3 = 0$$
$$y = 1$$
$$(1, 1)$$

- Si $x = 2$:

$$2 \cdot 2 + y - 3 = 0$$
$$y = -1$$
$$(2, -1)$$

- ...

17. Encuentra (si existe) la recta paralela a $r : x + y - 3 = 0$ que pasa por $(2, 1)$.

Vamos a llamar a esa nueva recta s. Y se nos dice:

$$\begin{cases} s \parallel r : x + y - 3 = 0 \\ (2, 1) \in s \end{cases}$$

Pero si s y r son paralelas, es porque tienen el mismo vector normal o el mismo vector director. Pero según la ecuación de r:

$$\vec{n}_r = (1, 1)$$

Por lo tanto:

$$\vec{n}_s = (1, 1)$$
$$r \equiv \boxed{1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 1) = 0}$$

Rectas 3D

1. Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (0, 1, 2)$.

La recta r definida por los puntos A y B:

$$r \equiv \overleftrightarrow{AB}$$

es una recta en el espacio (en 3D o $\mathbb{R}^3$). Las rectas en el espacio tienen menos ecuaciones que las rectas en el plano.

Un vector director de r puede ser el vector que sale de A y llega a B:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 2) - (1, 2, 1)$$
$$\vec{r} = (-1, -1, 1)$$

Podemos escribir la **ecuación vectorial**:

$$\boxed{r \equiv (x, y, z) = (1, 2, 1) + (-1, -1, 1) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Y las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 1t \\ y = 2 - 1t \\ z = 1 + 1t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

Y las **ecuaciones continuas** son:

$$\boxed{r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}}$$

Usando las ecuaciones continuas, podemos encontrar las ecuaciones generales de dos planos:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow x - y + 1 = 0$$
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow x + z - 2 = 0$$

Por lo que también podemos hacer:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}}$$

Es decir, la recta r es la intersección de los planos $\Pi_1 \equiv x - y + 1 = 0$ y $\Pi_2 \equiv x + z - 2 = 0$:

$$r = \Pi_1 \cap \Pi_2$$

2. Encuentra las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A = (1, -2, -1)$ y $B = (0, 1, 2)$.

La recta r definida por los puntos A y B:

$$r \equiv \overleftrightarrow{AB}$$

es una recta en el espacio (en 3D o $\mathbb{R}^3$). Las rectas en el espacio tienen menos ecuaciones que las rectas en el plano.

Un vector director de r puede ser el vector que sale de A y llega a B:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 2) - (1, -2, -1)$$
$$\vec{r} = (-1, 3, 3)$$

Podemos escribir la **ecuación vectorial**:

$$\boxed{r \equiv (x, y, z) = (0, 1, 2) + (-1, 3, 3) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Y las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 - 1t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

Y las **ecuaciones continuas** son:

$$\boxed{r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{3}}$$

Usando las ecuaciones continuas, podemos encontrar las ecuaciones generales de dos planos:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x + y - 1 = 0$$
$$\frac{x}{-1} = \frac{z-2}{3} \Rightarrow 3x + z - 2 = 0$$

Por lo que también podemos hacer:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}}$$

Es decir, la recta r es la intersección de los planos $\Pi_1 \equiv 3x + y - 1 = 0$ y $\Pi_2 \equiv 3x + z - 2 = 0$:

$$r = \Pi_1 \cap \Pi_2$$

3. ¿Por qué en 2D decimos **la ecuación continua** de la recta y en 3D decimos **las ecuaciones continuas** de la recta?

En 2D ($\mathbb{R}^2$) hay solamente una ecuación porque solamente hay un signo "=". Por ejemplo:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$$

En 3D ($\mathbb{R}^3$) hay más de una ecuación porque hay varios signos "=". Por ejemplo:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}$$

4. ¿Por qué no existe la ecuación normal de la recta en 3D?

Porque en 3D una recta no tiene un vector normal. Hay infinitos vectores normales (perpendiculares) a la recta que no son paralelos entre si.

La ecuación normal requiere un solo vector normal.

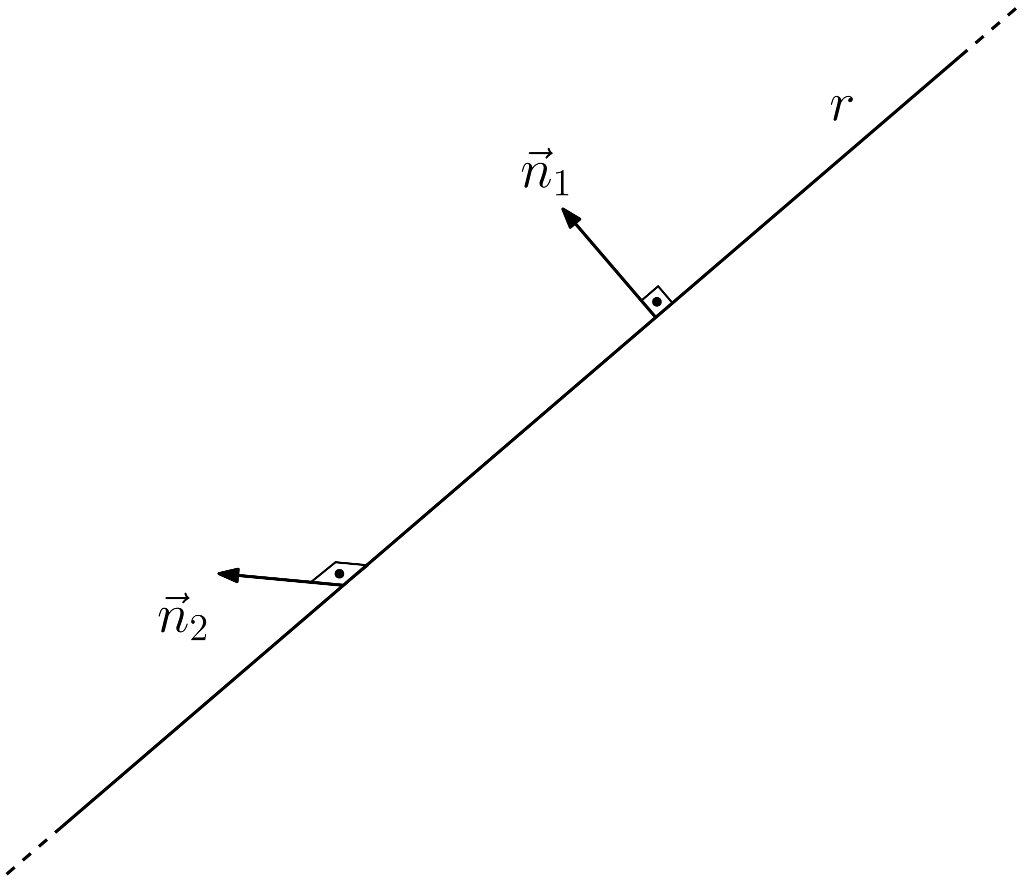


Figura 111: Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son perpendiculares (normales) a la recta r, pero no tienen la misma dirección.

5. Sea la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

determina si los siguientes puntos pertenecen a ella:

a) A(1, 2, 3)

b) B(0, 3, 13)

En este caso, tenemos una recta en el espacio (en 3D). Pero hacemos lo mismo que en el ejercicio anterior.

a) A(1, 2, 3)

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 2 = -1 + 2t \\ 3 = 3 + 5t \end{cases}$$

que nos da:

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \\ t = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no pertenece: $A \notin r$.

b) B(0, 3, 13)

$$\begin{cases} 0 = 2 - t \\ 3 = -1 + 2t \\ 13 = 3 + 5t \end{cases}$$

que nos da:

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, sí pertenece: $A \in r$.

6. Encuentra todas las ecuaciones de la recta que pasa por A(1, 1, 1) y B(0, 2, 1).

Queremos buscar la recta r para la que:

$$A \in r \wedge B \in r$$

Encontramos un vector director de la recta:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A =$$
$$= (0,2,1) - (1,1,1) = (-1,1,0)$$

Escribimos la[39] ecuación vectorial de la recta:

$$r \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + (-1,1,0) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones continuas son:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Que se pueden separar en las ecuaciones de dos planos cuya intersección es la recta:

$$r = \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{z}{1} \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Problemas de rectas

1. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(1, 2) y B(5, 6).

La **mediatriz** m de un segmento $\overline{AB}$ es la recta que pasa por el punto medio del segmento M y es perpendicular al segmento.

Primero buscamos el punto medio, que es simplemente la media aritmética de ambos puntos:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,2)+(5,6)}{2} =$$
$$= \frac{(6,8)}{2} = (3,4)$$

Ahora tenemos que encontrar un vector que sea paralelo al segmento $\overline{AB}$. Para eso, simplemente encontramos el vector que sale de A y va a B:

[39] O más bien *"una"* ecuación vectorial; existen infinitas ecuaciones vectoriales correctas para la misma recta.

$$\overrightarrow{AB} = B - A =$$
$$= (5, 6) - (1, 2) = (4, 4)$$

Pero cualquier vector directamente proporcional a ese vector también tiene la misma dirección. Por lo que podemos multiplicar por 1/4 y tenemos:

$$m \perp (1, 1)$$

Esto nos permite encontrar un vector director de la recta m. Solamente tenemos que cambiar el orden de las componentes del vector (1, 1) y cambiar el signo de una de ellas:

$$m \parallel (-1, 1) \perp (1, 1)$$

Ahora que tenemos un vector director y un punto de la recta m, podemos escribir su ecuación vectorial:

$$m \equiv (x, y) = (3, 4) + (-1, 1) \cdot t; \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Sea el triángulo $\triangle ABC$ de vértices A(1, 2), B(3, 1) y C(2, 4). Encuentra las coordenadas del **circuncentro**.

De los múltiples centros que tiene un triángulo, el **circuncentro** es el punto en el que se cortan las tres mediatrices de los lados de un triángulo. El circuncentro es, además, el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Para encontrar las coordenadas del circuncentro (que llamaremos O), tenemos que encontrar las ecuaciones de dos de las mediatrices y debemos calcular las intersecciones de las dos. Y para facilitar la resolución del problema, no es mala idea hacer un dibujo.

El dibujo parece indicar que el circuncentro O coincide con M_a, el punto medio del lado $\overline{BC}$. Pero, como cualquier dibujo que no se haga con precisión usando regla y compás, es conveniente no confiar demasiado en él.

Encontramos los puntos medios:

A(1, 2), B(3, 1) y C(2, 4)

$$M_a = \frac{B + C}{2} = \frac{(3, 1) + (2, 4)}{2}$$
$$M_b = \frac{C + A}{2} = \frac{(2, 4) + (1, 2)}{2}$$
$$M_c = \frac{A + B}{2} = \frac{(1, 2) + (3, 1)}{2}$$

$$M_a = \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$$
$$M_b = \frac{3}{2}, 3$$

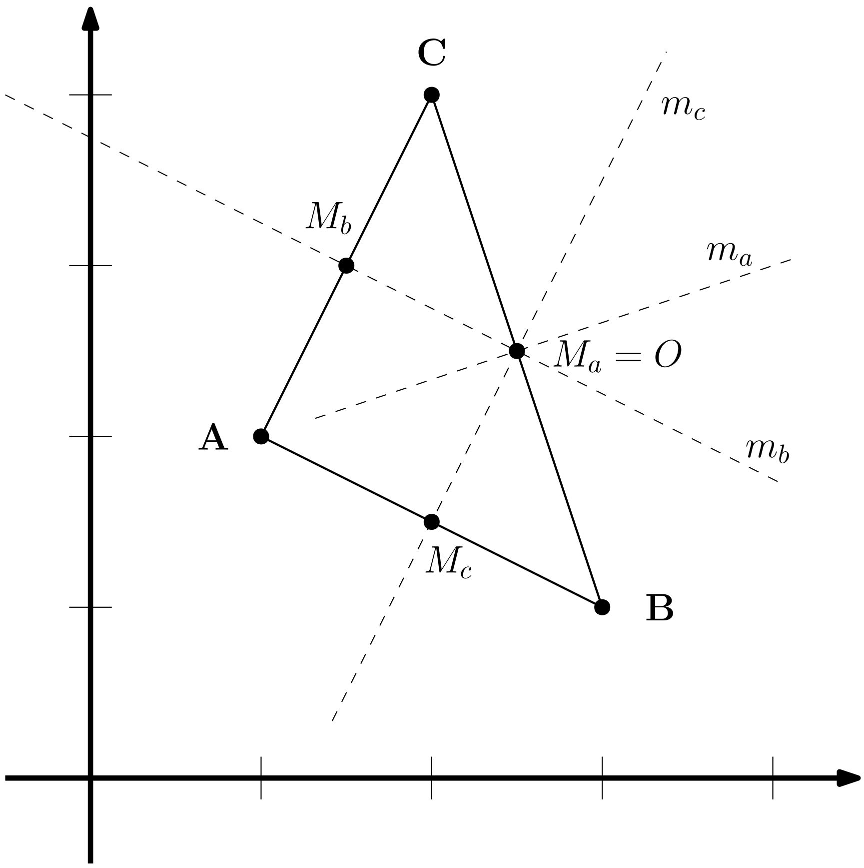


Figura 112: El triángulo $\triangle ABC$, con sus vértices, los puntos medios M_a, M_b y M_c de los lados, las mediatrices m_a, m_b y m_c y su circuncentro O.

$$M_c = \quad 2, \frac{3}{2}$$

Encontramos los vectores paralelos a los lados:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 3)$$
$$\overrightarrow{CA} = A - C = (-1, -2)$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1)$$

Cada uno de ellos es normal a cada una de las mediatrices:

$$m_a \perp \overrightarrow{BC} = (-1, 3)$$
$$m_b \perp \overrightarrow{CA} = (-1, -2)$$
$$m_c \perp \overrightarrow{AB} = (2, -1)$$

Las ecuaciones normales de las tres mediatrices serán:

$$m_a \equiv -1 \cdot \quad x - \frac{5}{2} \quad + 3 \cdot \quad y - \frac{5}{2} \quad = 0$$
$$m_b \equiv -1 \cdot \quad x - \frac{3}{2} \quad - 2 \cdot (y - 3) = 0$$
$$m_c \equiv 2 \cdot (x - 2) - 1 \cdot \quad y - \frac{3}{2} \quad = 0$$

Convirtiéndolas en ecuaciones generales (o implícitas):

$$m_a \equiv -x + \frac{5}{2} + 3y - \frac{15}{2} = 0$$
$$m_b \equiv -x + \frac{3}{2} - 2y + 6 = 0$$
$$m_c \equiv 2x - 4 - y + \frac{3}{2} = 0$$

Multiplicando por 2 y simplificando:

$$m_a \equiv -2x + 5 + 6y - 15 = 0$$
$$m_b \equiv -2x + 3 - 4y + 12 = 0$$
$$m_c \equiv 4x - 8 - 2y + 3 = 0$$

$$m_a \equiv -2x + 6y - 10 = 0$$
$$m_b \equiv -2x - 4y + 15 = 0$$
$$m_c \equiv 4x - 2y - 5 = 0$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda:

$$
\begin{aligned}
(-2x + 6y - 10) - (-2x - 4y + 15) &= 0 - 0 \\
6y - 10 + 4y - 15 &= 0 \\
10y - 25 &= 0 \\
10y &= 25 \\
2y &= 5 \\
y &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Si sustituimos en la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
-2x + 6 \cdot \frac{5}{2} - 10 &= 0 \\
-2x + 15 - 10 &= 0 \\
-2x + 5 &= 0 \\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$$O \equiv \quad \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$$

Es decir, el circuncentro O sí coincide con el punto medio M_a, tal como sugería el dibujo.

(Sin embargo, esto es así porque en este dibujo realmente se han tomado las medidas para que las posiciones sean exactas.)

3. Sea el triángulo $\triangle ABC$ de vértices A(1, 2), B(3, 1) y C(2, 4). Encuentra la **mediana** que pasa por A.

La **mediana** es un segmento que pasa por un vértice del triángulo y por la mitad del lado opuesto.

Como nos piden la mediana que pasa por A, necesitamos el punto medio M_a entre B y C:

$$
\begin{aligned}
M_a &= \frac{B + C}{2} = \\
&= \frac{(3, 1) + (2, 4)}{2} = \\
&= \frac{(5, 5)}{2} = \\
&= \quad \frac{5}{2}, \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

La mediana que nos piden es el segmento $\overline{AM_a}$. Pero, si queremos la recta μ_a que contiene a ese segmento, como tenemos los puntos por los que pasa (A y M_a), podemos encontrar su ecuación:

$$\mu_a \parallel \overrightarrow{AM_a}$$

$$A \in \mu_a$$

$$\overrightarrow{AM_a} = M_a - A = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) - (1,2) =$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mu_a \equiv (x,y) = (1,2) + \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot t; \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Sea el triángulo $\triangle ABC$ de vértices A(1, 2), B(3, 1) y C(2, 4). Encuentra las coordenadas del **baricentro** del triángulo.

El **baricentro** de un triángulo es la intersección de las medianas del triángulo. Vamos a llamar O_b al baricentro.

Primero haremos un dibujo para orientarnos mejor. Siempre teniendo en cuenta que el dibujo, si no está hecho con precisión de regla y compás, es solamente orientativo.

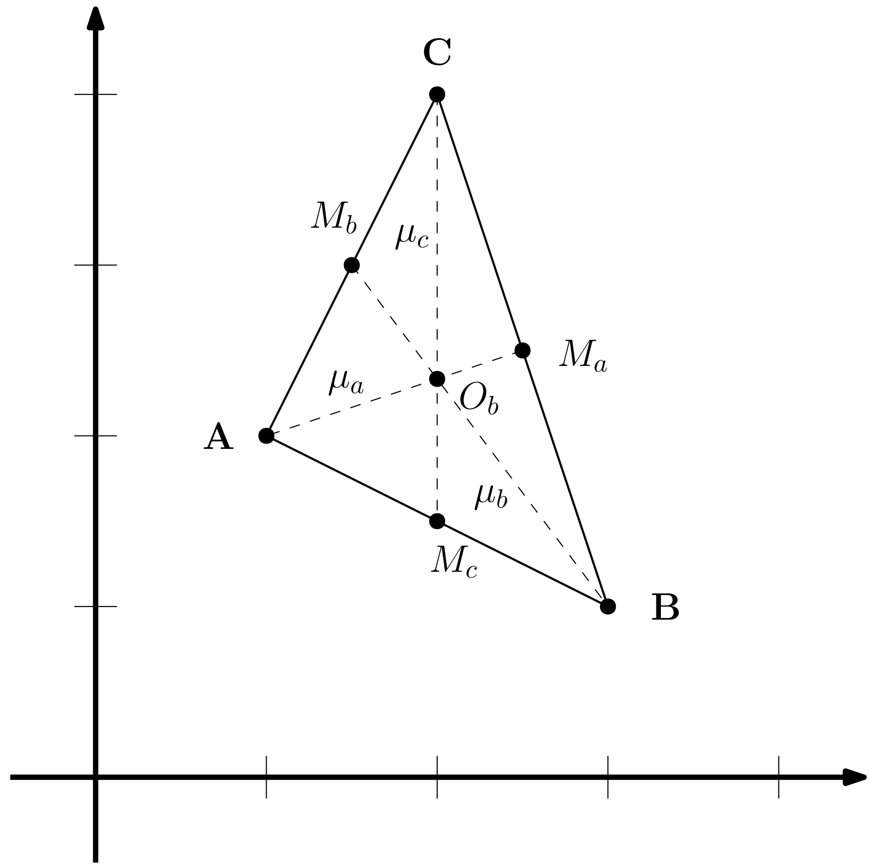


Figura 113: El triángulo $\triangle ABC$, con sus vértices, los puntos medios M_a, M_b y M_c de los lados, las medianas μ_a, μ_b y μ_c y su baricentro O_b.

Encontramos los puntos medios de los lados:

$$M_a = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$M_b = \frac{C+A}{2} = \quad \frac{3}{2}, 3$$
$$M_c = \frac{A+B}{2} = \quad 2, \frac{3}{2}$$

Ahora podemos encontrar los vectores directores de las medianas:

$$\mu_a = \overrightarrow{AM_a} =$$
$$= \quad \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \quad - (1,2) =$$
$$= \quad \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\mu_b = \overrightarrow{AM_b} =$$
$$= \quad \frac{3}{2}, 3 \quad - (3,1) =$$
$$= \quad -\frac{3}{2}, 2$$

$$\mu_c = \overrightarrow{AM_c} =$$
$$= \quad 2, \frac{3}{2} \quad - (2,4) =$$
$$= \quad 0, -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto, las ecuaciones vectoriales son:

$$\mu_a \equiv (x,y) = (1,2) + \quad \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \quad \cdot t$$
$$\mu_b \equiv (x,y) = (3,1) + \quad -\frac{3}{2}, 2 \quad \cdot t$$
$$\mu_c \equiv (x,y) = (2,4) + \quad 0, -\frac{5}{2} \quad \cdot t$$

Las ecuaciones continuas de las dos primeras serán:

$$\mu_a \equiv \frac{x-1}{\frac{3}{2}} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}}$$
$$\mu_b \equiv \frac{x-3}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-1}{2}$$

Forman un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{\frac{3}{2}} & = & \frac{y-2}{\frac{1}{2}} \\ \frac{x-3}{-\frac{3}{2}} & = & \frac{y-1}{2} \end{cases}$$

Podemos transformar las ecuaciones para eliminar fracciones:

$$\begin{array}{rcl} x-1 & = & 3\cdot(y-2) \\ 4\cdot(x-3) & = & -3\cdot(y-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x-1 & = & 3y-6 \\ 4x-12 & = & -3y+3 \end{array}$$

Si al cuadruple de la primera (= cuatro veces la primera) le restamos la segunda:

$$4(x-1)-(4x-12)=4(3y-6)-(-3y+3)$$
$$4x-4-4x+12=12y-24+3y-3$$
$$8=15y-27$$
$$8+27=15y$$
$$35=15y$$
$$y=\frac{35}{15}$$
$$y=\frac{7}{3}$$

Si sumamos ambas ecuaciones:

$$(x-1)+(4x-12)=(3y-6)+(-3y+3)$$
$$5x-13=-3$$
$$5x=10$$
$$x=2$$

Por lo tanto:

$$O_b = \quad 2, \frac{7}{3}$$

> **5**. Sea el triángulo $\triangle ABC$ de vértices A(1, 2), B(3, 1) y C(2, 4). Encuentra la altura h_a (para la que el segmento $\overline{BC}$ es la base) y la intersección de esa altura con su base correspondiente.

Sabemos que la altura h_a pasa por A y es perpendicular a $\overline{BC}$:

$$h_a \perp \overline{BC} = C - B = (2,4)-(3,1)=(-1,3)$$

Entonces, su ecuación normal es:

$$h_a \equiv -1\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)=0$$
$$-x+1+3y-6=0$$

Y su ecuación general es:

$$h_a \equiv -x + 3y - 5 = 0$$

Necesitamos la recta que contiene el segmento $\overline{BC}$. Si llamamos a esa recta r_a:

$$r_a \parallel \overline{BC} = C - B = (2,4) - (3,1) = (-1,3)$$

Entonces, su ecuación continua es:

$$r_a \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3}$$
$$3 \cdot (x-2) = -1 \cdot (y-4)$$
$$3x - 6 = -y + 4$$
$$3x - 6 = -y + 4$$
$$3x = -y + 10$$

Y su ecuación general es:

$$r_a \equiv 3x + y - 10 = 0$$

La intersección es el punto que cumple ambas ecuaciones: la ecuación de la altura h_a y de la recta r_a. Entonces tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y - 5 & = & 0 \\ 3x + y - 10 & = & 0 \end{array}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y le sumamos la segunda:

$$3 \cdot (-x + 3y - 5) + (3x + y - 10) = 3 \cdot 0 + 0$$
$$-3x + 9y - 15 + 3x + y - 10 = 0$$
$$10y - 25 = 0$$
$$10y = 25$$
$$y = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$-x + 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 0$$
$$-x + \frac{15}{2} - 5 = 0$$
$$-x + \frac{15}{2} - \frac{10}{2} = 0$$
$$-x + \frac{5}{2} = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

El punto de intersección buscado es:

$$(x, y) = \quad \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$$

6. Encuentra el punto simétrico del punto P(1, 2) respecto a la recta $r \equiv x - y + 3 = 0$.

Primero comprobamos que el punto P no pertenece a la recta r. Para ello, sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación de la recta:

$$1 - 2 + 3 = 0$$
$$2 = 0 \quad \perp$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto:

$$P \notin r$$

Primero encontramos una recta s que sea perpendicular a r y pase por P. La ecuación de r que tenemos es la ecuación general:

$$r \equiv x - y + 3 = 0$$

que nos da un vector normal de r:

$$\vec{n}_r = (1, -1)$$

El vector normal de s es perpendicular al vector normal de r:

$$s \perp r \Rightarrow \vec{n}_s \perp \vec{n}_r$$

Por lo tanto, solamente tenemos que intercambiar las coordenadas de $\vec{n}_r$ y cambiar uno de los signos para obtener el vector normal de s:

$$\vec{n}_s = (1, 1)$$

Como tenemos un punto por el que pasa s y un vector normal, podemos escribir fácilmente la ecuación normal:

$$\begin{matrix} P = (1, 2) \in s \\ \vec{n}_s = (1, 1) \perp s \end{matrix} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s \equiv 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) = 0$$

La ecuación general (o implícita) de la recta s es:

$$s \equiv x + y - 3 = 0$$

Ahora buscamos el punto de intersección entre r y s al que vamos a llamar M. Este punto debe cumplir simultáneamente ambas ecuaciones (las de las dos rectas).

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones:

$$(x - y + 3) + (x + y - 3) = 0 + 0$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$0 - y + 3 = 0$$
$$y = 3$$

Es decir:

$$M = r \cap s = (0, 3)$$

El punto M es el punto medio entre el punto P y su simétrico P'.

$$M = \frac{P + P'}{2}$$

entonces:

$$P' = 2M - P$$
$$P' = 2 \cdot (0, 3) - (1, 2)$$
$$P' = (0, 6) - (1, 2)$$
$$P' = (-1, 4)$$

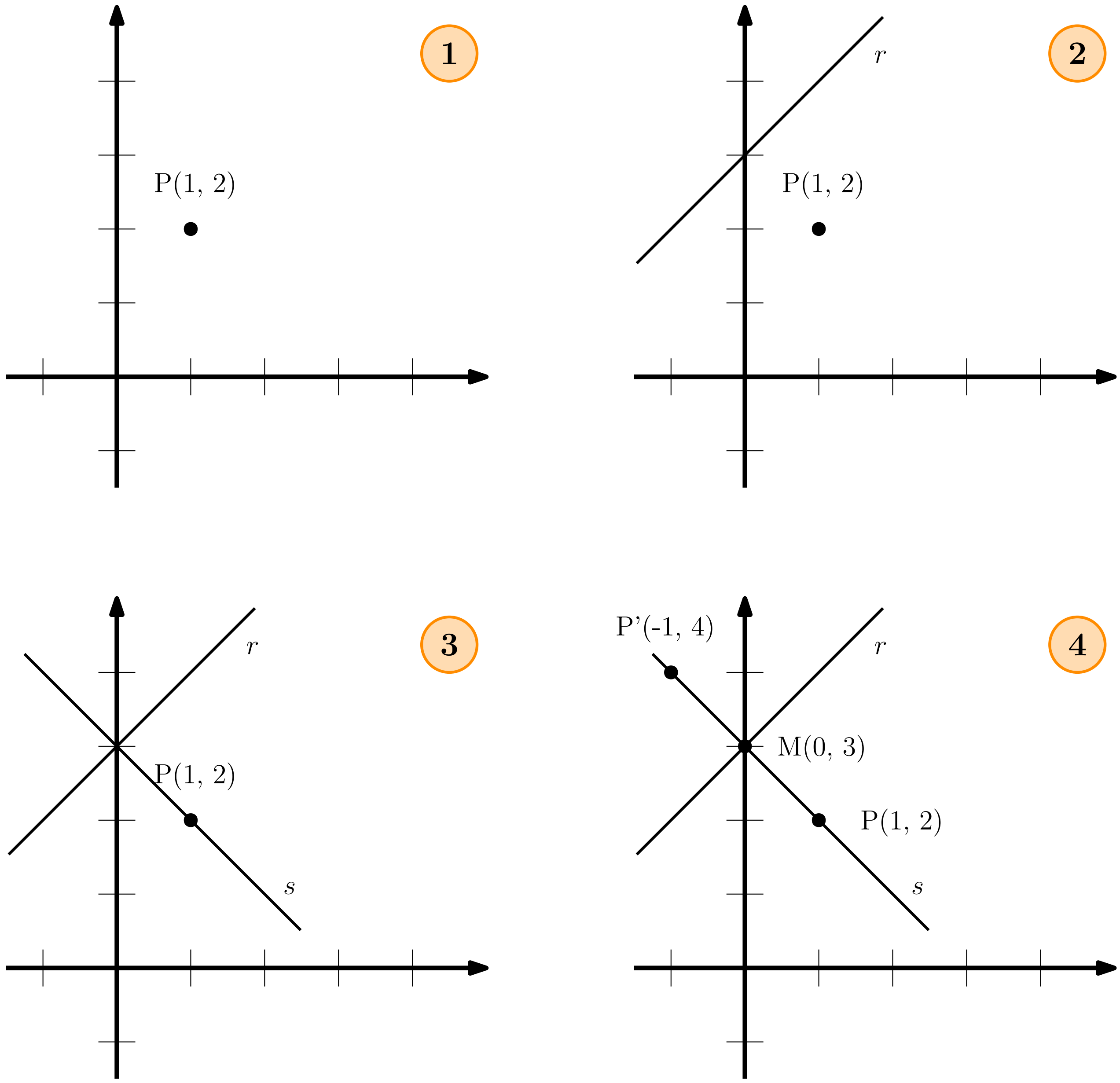


Figura 114: 1. Tenemos el punto P. 2. Tenemos la recta r. 3. Encontramos la recta s que es perpendicular a r y pasa por P. 4. La intersección de r y s nos da el punto medio M entre P y su simétrico P', lo que nos permite encontrar el simétrico.

Posiciones relativas de rectas

Dos rectas en 2D pueden ser paralelas, coincidentes o secantes. Dos rectas en 3D pueden ser paralelas, coincidentes, secantes o cruzadas.

1. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en el plano si la recta r pasa por los puntos A(2, 3) y B(3, 5) y la ecuación general de la recta s es: $3x - 2y + 1 = 0$.

Si r pasa por A(2, 3) y B(3, 5), un vector director de la recta es:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,5) - (2,3) = (1,2) \parallel r$$

Un vector normal será:

$$\vec{n}_r = (-2,1) \perp r$$

Si escogemos el punto A, la ecuación normal será:

$$r \equiv -2 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-3) = 0$$

Desarrollando:

$$-2x + 4 + y - 3 = 0$$

obtenemos la general (o implícita):

$$r \equiv -2x + y + 1 = 0$$

Si comparamos las dos ecuaciones generales, observamos:

$$\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-2}$$

Si los cocientes (las divisiones) de los coeficientes de x e y no son iguales, las rectas son **secantes**. Es decir: se cortan en un punto.

Encontrar el punto es resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + y + 1 & = 0 \\ 3x - 2y + 1 & = 0 \end{cases}$$

Puede demostrarse que la solución del sistema es:

$$(x,y) = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$$

Por lo tanto, r y s se cortan en el punto P:

$$r \cap s = P = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$$

donde $\cap$ es, evidentemente, el operador de intersección de la teoría de conjuntos.

2. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en el plano si:

$$r \equiv 6x - 4y + 3 = 0$$

$$s \equiv 3x - 2y + 1 = 0$$

Si A es el coeficiente de x, B es el coeficiente de y y C es el término independiente en la ecuación implícita (o general) de r y para s usamos A', B' y C' tenemos que:

- **Coincidentes:**
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$
- **Paralelas:**
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$
- **Secantes:**
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

En este caso:

$$\frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{3}{1}$$

Por lo tanto, las rectas son **paralelas**:

$$r \cap s = \varnothing \wedge r \parallel s$$

3. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en el plano si:

$$r \equiv 6x - 4y + 3 = 0$$

$$s \equiv 3x - 2y + 3/2 = 0$$

Si A es el coeficiente de x, B es el coeficiente de y y C es el término independiente en la ecuación implícita (o general) de r y para s usamos A', B' y C' tenemos que:

- **Coincidentes:**
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$
- **Paralelas:**
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$
- **Secantes:**
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

En este caso:

$$\frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} = \frac{3}{3/2}$$

Por lo tanto, las rectas son **coincidentes**. Son la misma recta:

$$r \cap s = r = s$$

4. Encuentra el punto de intersección de las rectas:

$$r \equiv x - 4y + 3 = 0$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

Cuando tenemos una recta expresada en paramétricas y otra de las rectas expresada en forma general (o normal, o explícita, o canónica o punto-pendiente), es muy sencillo encontrar la intersección (si existe). Solamente tenemos que sustituir en la ecuación que no es paramétrica:

$$(2 + 3t) - 4(-1 + t) + 3 = 0$$

y resolver la ecuación resultante:

$$2 + 3t + 4 - 4t + 3 = 0$$
$$-t + 9 = 0$$
$$-t = -9$$
$$t = 9$$

Ahora sustituimos en las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot 9 \\ y = -1 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 29 \\ y = 8 \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las rectas r y s es:

$$r \cap s = (29, 8)$$

Comprobamos que efectivamente cumple la ecuación de la recta r:

$$x - 4y + 3 = 0$$
$$29 - 4 \cdot 8 + 3 = 0$$
$$29 - 32 + 3 = 0$$
$$0 = 0 \quad \top$$

Una tautología. Por lo que efectivamente, hemos encontrado la intersección.

5. Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{y}{1} = \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{1}$$

$$s \equiv \frac{z}{1} = \frac{x}{-1} = \frac{y}{1}$$

Por sus ecuaciones, r y s son rectas en el espacio (= en tres dimensiones). Por lo tanto, las rectas pueden ser:

- coincidentes, si son la misma recta (es decir, tienen la misma dirección y todos sus puntos son comunes)
- paralelas, si tienen la misma dirección, pero ningún punto común
- secantes, si tienen direcciones distintas y su intersección es un solo punto
- cruzadas, si tienen direcciones distintas y su intersección es el conjunto vacío

Reescribimos las ecuaciones de manera ordenada:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$
$$s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

Son vectores directores de las rectas:

$$\vec{r} = (3, 1, 1) \parallel r$$
$$\vec{s} = (-1, 1, 1) \parallel s$$

Claramente, los vectores no son paralelos; no son proporcionales entre si:

$$\nexists k \in \mathrm{R}; \vec{r} = k \cdot \vec{s}$$

Por lo tanto, las rectas tienen que ser *secantes* o *cruzadas*.

Las ecuaciones nos dan dos puntos de las rectas:

$$R = (1, 0, 1) \in r$$
$$S = (0, 0, 0) \in r$$

Podemos encontrar un vector que sale de un punto y llega al otro. Por ejemplo:

$$\overrightarrow{RS} = S - R =$$
$$= (0, 0, 0) - (1, 0, 1) =$$
$$= (-1, 0, -1)$$

Si calculamos el producto mixto de los tres vectores (los vectores directores de las dos rectas y un vector que va de un punto a de la recta r a un punto de la recta s), podemos determinar las posiciones relativas:

$$\vec{R}S, \vec{r}, \vec{s} \ = \overrightarrow{RS} \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4$$

El determinante **no es nulo**, por lo tanto, los tres vectores no están en el mismo plano. Y, por lo tanto, **las rectas se cruzan**.

Planos

1. Encuentra el plano que contiene a los puntos A(2, 1, 1), B(1, 2, 3) y C(-1, 2, 1).

Podemos encontrar dos vectores directores del plano:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \Pi$$
$$\overrightarrow{AC} \parallel \Pi$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (2, 1, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, 1) - (2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0)$$

Para la **ecuación vectorial** del plano solamente necesitamos un punto (vamos a usar B) y dos vectores directores:

$$\Pi \equiv X = B + \overrightarrow{AB}\mu + \overrightarrow{AC}\lambda$$
$$\Pi \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + (-1, 1, 2)\mu + (-3, 1, 0)\lambda$$

Donde μ y λ son parámetros que pueden tener cualquier valor real.

Ahora las ecuaciones paramétricas son:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + \lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

Para encontrar las demás ecuaciones, podemos proceder de varias maneras:

1. Encontramos el vector normal y la ecuación normal.
2. Eliminamos los parámetros despejando y sustituyendo.
3. Eliminamos los parámetros igualando un determinante a cero.

Vamos a hacerlo de las tres maneras:

1. Encontramos el vector normal y la ecuación normal.

   Podemos encontrar un vector normal multiplicando vectorialmente los dos vectores directores:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$$
$$= (-1, 1, 2) \times (-3, 1, 0) =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k} =$$
$$= (-2 - 6, 2)$$

   La ecuación normal del plano será:

$$\Pi \equiv -2(x-1) - 6(y-2) + 2(z-3) = 0$$

   Desarrollando:

$$-2x + 2 - 6y + 12 + 2z - 6 = 0$$
$$-2x - 6y + 2z + 8 = 0$$

   Dividiendo entre -2, encontramos una **ecuación general** o **ecuación implícita** del plano:

$$\Pi \equiv x + 3y - z - 4 = 0$$

   Si pasamos el término independiente a la derecha:

$$x + 3y - z = 4$$

   Y dividimos entre 4 para convertirlo en 1:

$$\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{z}{4} = 1$$

   Que nos da la **ecuación segmentaria** o **ecuación canónica** del plano:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4/3} + \frac{z}{-4} = 1$$

2. Eliminamos los parámetros despejando y sustituyendo.

   A partir de:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + \lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

   Podemos despejar μ de la tercera ecuación:

$$\mu = \frac{z-3}{2}$$

Y sustituir en las otras dos:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{z-3}{2} - 3\lambda \\ y = 2 + \frac{z-3}{2} + \lambda \end{cases}$$

Si despejamos λ de la segunda ecuación:

$$\lambda = y - 2 - \frac{z-3}{2}$$

podemos sustituir en la primera:

$$x = 1 - \frac{z-3}{2} - 3 \cdot \quad y - 2 - \frac{z-3}{2}$$
$$x = 1 - \frac{z-3}{2} - 3y + 6 + \frac{3z-9}{2}$$
$$x = 7 + \frac{-z+3+3z-9}{2} - 3y$$
$$x = 7 + \frac{2z-6}{2} - 3y$$
$$x = 7 + z - 3 - 3y$$
$$x = 4 + z - 3y$$

Reordenando encontramos la ecuación general o implícita:

$$\Pi \equiv x + 3y - z - 4 = 0$$

Los coeficientes de las variables nos dan un vector normal:

$$\vec{n} = (1, 3, -1)$$

Con el que podemos encontrar la ecuación normal:

$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-3) = 0$$
$$\Pi \equiv (x-1) + 3 \cdot (y-2) - (z-3) = 0$$

A partir de la general:

$$x + 3y - z - 4 = 0$$

Podemos llegar a la canónica o segmentaria:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4/3} + \frac{z}{-4} = 1$$

3. Eliminamos los parámetros igualando un determinante a cero.

   A partir de:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + \lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

   Podemos tener:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x - 1 = -\mu - 3\lambda \\ y - 2 = \mu + \lambda \\ z - 3 = 2\mu \end{cases}$$

   Para que podemos eliminar los parámetros, el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{matrix} x-1 & -1 & -3 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-3 & 2 & 0 \end{matrix} = 0$$

   Pero eso equivale a:

$$\begin{matrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{matrix} = 0$$

$$-2(x-1) - 6(y-2) + 2(z-3) = 0$$

   Que es una ecuación normal del plano. Dividiendo entre -2, obtenemos una ecuación normal del plano más elegante:

$$(x-1) + 3(y-2) - (z-3) = 0$$

   Multiplicando:

$$x - 1 + 3y - 6 - z + 3 = 0$$

   Obtenemos la ecuación general o implícita del plano:

$$x + 3y - z + 4 = 0$$

   Y a partir de ella se puede obtener la canónica o segmentaria:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4/3} + \frac{z}{-4} = 1$$

2. Encuentra el plano que contiene a los puntos A(2, 1, 1), B(1, 2, 3) y C(-1, 3, 1).

Podemos encontrar dos vectores directores del plano:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \Pi$$
$$\overrightarrow{AC} \parallel \Pi$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,3) - (2,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,3,1) - (2,1,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-3,2,0)$$

Para la **ecuación vectorial** del plano solamente necesitamos un punto (vamos a usar B) y dos vectores directores:

$$\Pi \equiv X = B + \overrightarrow{AB}\mu + \overrightarrow{AC}\lambda$$
$$\Pi \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + (-1,1,2)\mu + (-3,2,0)\lambda$$

Donde μ y λ son parámetros que pueden tener cualquier valor real.

Ahora las ecuaciones paramétricas son:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + 2\lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

Para encontrar las demás ecuaciones, podemos proceder de varias maneras:

1. Encontramos el vector normal y la ecuación normal.
2. Eliminamos los parámetros despejando y sustituyendo.
3. Eliminamos los parámetros igualando un determinante a cero.

Vamos a hacerlo de las tres maneras:

1. Encontramos el vector normal y la ecuación normal.

   Podemos encontrar un vector normal multiplicando vectorialmente los dos vectores directores:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$$
$$= (-1,1,2) \times (-3,2,0) =$$
$$= \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{matrix} =$$
$$= -4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 1\hat{k} =$$
$$= (-4,-6,1)$$

La ecuación normal del plano será:

$$\Pi \equiv -4(x-1) - 6(y-2) + 1(z-3) = 0$$

Desarrollando:

$$-4x + 4 - 6y + 12 + z - 3 = 0$$
$$-4x - 6y + z + 13 = 0$$

Dividiendo entre -1, encontramos una **ecuación general** o **ecuación implícita** del plano:

$$\Pi \equiv 4x + 6y - z - 13 = 0$$

Si pasamos el término independiente a la derecha:

$$4x + 6y - z = 13$$

Y dividimos entre 13 para convertirlo en 1:

$$\frac{4x}{13} + \frac{6y}{13} - \frac{z}{13} = 1$$
$$\frac{4x}{13} + \frac{6y}{13} + \frac{z}{-13} = 1$$
$$\frac{x}{13/4} + \frac{6y}{13/4} + \frac{z}{-13} = 1$$

Que nos da la **ecuación segmentaria** o **ecuación canónica** del plano:

$$\frac{x}{13/4} + \frac{6y}{13/4} + \frac{z}{-13} = 1$$

2. Eliminamos los parámetros despejando y sustituyendo.

   A partir de:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + 2\lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

   Podemos despejar μ de la tercera ecuación:

$$\mu = \frac{z-3}{2}$$

   Y sustituir en las otras dos:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{z-3}{2} - 3\lambda \\ y = 2 + \frac{z-3}{2} + 2\lambda \end{cases}$$

   Si despejamos λ de la segunda ecuación:

$$\lambda = \frac{y - 2 - \frac{z-3}{2}}{2}$$
$$\lambda = \frac{2y - 4 - z + 3}{4}$$
$$\lambda = \frac{2y - z - 1}{4}$$

podemos sustituir en la primera:

$$x = 1 - \frac{z-3}{2} - 3 \cdot \quad \frac{2y - z - 1}{4}$$

Multiplicando todo por 4:

$$4x = 4 - 2(z-3) - 3 \cdot (2y - z - 1)$$

$$4x = 4 - 2z + 6 - 6y + 3z + 3$$
$$4x = -2z - 6y + 3z + 13$$
$$4x = -6y + z + 13$$
$$4x + 6y - z - 13 = 0$$

que es la ecuación general.

Los coeficientes de las variables nos dan un vector normal:

$$\vec{n} = (4, 6, -1)$$

Con el que podemos encontrar la ecuación normal:

$$\Pi \equiv 4(x-1) + 6(y-2) - 1(z-3) = 0$$

A partir de la general:

$$4x + 6y - z - 13 = 0$$

Podemos llegar a la canónica o segmentaria:

$$\frac{x}{13/4} + \frac{6y}{13/4} + \frac{z}{-13} = 1$$

3. Eliminamos los parámetros igualando un determinante a cero.

A partir de:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu - 3\lambda \\ y = 2 + \mu + 2\lambda \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

Podemos tener:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x-1=-\mu-3\lambda \\ y-2=\mu+2\lambda \\ z-3=2\mu \end{cases}$$

Para que podemos eliminar los parámetros, el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z-3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pero eso equivale a:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-1)-6(y-2)+1(z-3)=0$$

$$-4(x-1)-6(y-2)+(z-3)=0$$

Que es una ecuación normal del plano.

Multiplicando:

$$-4x+4-6y+12+z-3=0$$

Obtenemos la ecuación general o implícita del plano:

$$-4x-6y+z+13=0$$

Y a partir de ella se puede obtener la canónica o segmentaria:

$$\frac{x}{13/4}+\frac{6y}{13/4}+\frac{z}{-13}=1$$

3. Encuentra el plano cuyo vector normal es (1, 3, -2) y pasa por P(2, 5, 3).

Podemos encontrar rápidamente la **ecuación normal** del plano:

$$\Pi \equiv 1\cdot(x-1)+3\cdot(y-5)-2\cdot(z-3)=0$$

A partir de ella, se puede obtener la **ecuación general** o **ecuación implícita**:

$$x-1+3y-15-2z+6=0$$

$$\Pi \equiv x+3y-2z-10=0$$

Pasamos el término independiente a la derecha:

$$x+3y-2z=10$$

Dividimos entre 10 para que el lado derecho sea igual a 1:

$$\frac{x}{10}+\frac{3y}{10}+\frac{-2z}{10}=1$$

Y eso nos permite encontrar la **ecuación segmentaria** o **ecuación canónica**:

$$\Pi \equiv \frac{x}{10}+\frac{y}{10/3}+\frac{z}{-5}=1$$

La ecuación segmentaria nos dice los puntos en los que el plano corta a los ejes de coordenadas: $(10,0,0)$, $(0,10/3,0)$ y $(0,0,-5)$.

Encontrar las ecuaciones paramétricas es sencillo; podemos directamente decidir que los parámetros μ y λ son iguales a las variables y y z respectivamente.

Por lo tanto, las **ecuaciones paramétricas** son:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 10 - 3\mu + 2\lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Y la vectorial:

$$\Pi \equiv (x,y,z) =$$
$$= (10,0,0) + (-3,1,0)\mu + (2,0,1)\lambda$$

4. Encuentra el plano que pasa por P(2, 1, -3) y es paralelo a los vectores (2, 1, 1) y (3, -1, 1).

La ecuación vectorial es:

$$(x,y,z) = (2,1,-3) + (2,1,1)t + (3,-1,1)s$$

donde t y s son parámetros que pueden tener cualquier valor real.

Las ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t + 3s \\ y = 1 + t - s \\ z = -3 + t + s \end{cases}$$

Podemos encontrar un vector normal:

$$\vec{n} = (2,1,1) \times (3,-1,1) =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$-\hat{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 5\hat{k} =$$

$$= (2, 1, -5)$$

La ecuación normal es:

$$\Pi \equiv 2(x-2) + 1(y-1) - 5(z+3) = 0$$

A partir de ella, obtenemos la general o implícita:

$$\Pi \equiv 2x + y - 5z - 20 = 0$$

Pasamos el término independiente a la derecha:

$$2x + y - 5z = 20$$

Dividimos entre 20 para convertir el lado derecho en 1:

$$\frac{2x}{20} + \frac{y}{20} + \frac{-5z}{20} = 1$$

Lo que nos da la ecuación segmentaria o canónica:

$$\Pi \equiv \frac{x}{10} + \frac{y}{20} + \frac{z}{-4} = 1$$

Que indica que el plano Π corta los ejes en $(10, 0, 0)$, $(0, 20, 0)$ y $(0, 0, -4)$.

5. Encuentra al menos dos de las ecuaciones de un plano que pasa por (2, 0, 0), (0, -3, 0) y (0, 0, 5).

Los tres puntos son los puntos de intersección del plano con los ejes de coordenadas. Por lo tanto, podemos escribir fácilmente la ecuación canónica o segmentaria:

$$\Pi \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{5} = 1$$

El mínimo común múltiplo de 2, 3 y 5 es 30:

$$\frac{15x}{30} + \frac{10y}{-30} + \frac{6z}{30} = 1$$

Podemos llevar el signo menos arriba:

$$\frac{15x}{30} + \frac{-10y}{30} + \frac{6z}{30} = 1$$
$$\frac{15x - 10y + 6z}{30} = 1$$
$$15x - 10y + 6z = 30$$

Y tenemos la ecuación general o ecuación implícita:

$$\Pi \equiv 15x - 10y + 6z = 30$$

6. Encuentra el plano que pasa por P(2, 5, 3). y contiene la recta:

$$r \equiv \frac{y+1}{-1} = \frac{x-3}{2} = \frac{z-2}{5}$$

Las ecuaciones continuas de la recta r son:

$$r \equiv \frac{y+1}{-1} = \frac{x-3}{2} = \frac{z-2}{5}$$

Pero no están ordenadas como es habitual, así las reordenamos:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

Un vector director de la recta r es:

$$\vec{r} = (2, -1, 5) \parallel r$$

Y un punto contenido en la recta es:

$$R = (3, -1, 2) \in r$$

Pero tanto el punto como la recta pertenecen al plano. Por lo que el vector director de la recta también es un vector director del plano.

Podemos encontrar otro vector director de la recta: el vector que va de P a R, por ejemplo.

$$\overrightarrow{PR} = R - P =$$
$$= (3, -1, 2) - (2, 5, 3) =$$
$$= (1, -6, -1)$$

Podemos encontrar un vector normal al plano usando el producto vectorial de los dos vectores directores:

$$\vec{n}_\Pi = \vec{r} \times \overrightarrow{PR} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$-\hat{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+\hat{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 31\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 11\hat{k} =$$

$$= (31, 7, -11)$$

Con estos datos podemos encontrar todas las ecuaciones posibles para el plano.

La ecuación normal es:

$$\Pi \equiv 31 \cdot (x-2) + 7 \cdot (y-5) - 11 \cdot (z-3) = 0$$

Operando se obtiene la ecuación general:

$$\Pi \equiv 31x + 7y - 11z - 64 = 0$$

Y podríamos seguir y obtener las restantes.

7. ¿Determinan los tres puntos A(1, 2, 3), B(2, 1, 4) y C(4, 3, -1) completamente un plano?

Tres puntos determinan completamente un plano si no están alineados ni son coincidentes (son iguales entre si).

Por lo tanto vamos a encontrar dos vectores que unan parejas de esos puntos. Por ejemplo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 4) - (1, 2, 3) =$$
$$= (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 3, -1) - (1, 2, 3) =$$
$$= (3, 1, -4)$$

Como los dos vectores no son directamente proporcionales entre si, no tienen la misma dirección y, por lo tanto **no están alineados**.

Esto implica que **los tres puntos determinan completamente un plano en el espacio**.

8. ¿Para qué valor de m los puntos A(1, 2, 3), B(2, m, $4+m$) y C(4, $m+1$, $5m+1$) no determinan completamente un plano?

Si están alineados, los puntos no determinan completamente un plano.

Encontramos los vectores que unen las parejas de puntos:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{AB} = B - A = \\ = (2, m, 4+m) - (1, 2, 3) = \\ = (1, m-2, 1+m)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\overrightarrow{AC} = C - A = \\ = (4, m+1, 5m+1) - (1, 2, 3) = \\ = (3, m-1, 5m-2)\end{gathered}$$

Si los puntos no están alineados, entonces los vectores son proporcionales. Y la primera componente nos dice que, en ese caso:

$$\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Lo que implica para la segunda componente que:

$$\begin{gathered}m - 1 = 3 \cdot (m-2) \\ m - 1 = 3m - 6) \\ m - 3m = 1 - 6) \\ -2m = -5) \\ m = \frac{5}{2}\end{gathered}$$

Para la tercera componente debemos tener:

$$\begin{gathered}5m - 2 = 3 \cdot (1+m) \\ 5m - 2 = 3 + 3m \\ 5m - 3m = 3 + 2 \\ 2m = 5 \\ m = \frac{5}{2}\end{gathered}$$

Como las dos soluciones coinciden, existe un valor de m para el que los vectores son proporcionales entre si. Eso implica que los puntos están alineados y que no se puede determinar un plano completamente con ellos.

9. ¿Para qué valor de m los puntos A(1, 2, 3), B(2, m, $4+m$) y C(4, $m+1$, $5m$) no determinan completamente un plano?

Este ejercicio es una variación muy pequeña del ejercicio anterior; solamente cambia la tercera coordenada del tercer punto.

Encontramos los vectores que unen las parejas de puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A =$$
$$= (2, m, 4 + m) - (1, 2, 3) =$$
$$= (1, m - 2, 1 + m)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A =$$
$$= (4, m + 1, 5m) - (1, 2, 3) =$$
$$= (3, m - 1, 5m - 3)$$

Si los puntos no están alineados, entonces los vectores son proporcionales. Y la primera componente nos dice que, en ese caso:

$$\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Lo que implica para la segunda componente que:

$$m - 1 = 3 \cdot (m - 2)$$
$$m - 1 = 3m - 6$$
$$m - 3m = 1 - 6$$
$$-2m = -5$$
$$m = \frac{5}{2}$$

Para la tercera componente debemos tener:

$$5m - 3 = 3 \cdot (1 + m)$$
$$5m - 3 = 3 + 3m$$
$$5m - 3m = 3 + 3$$
$$2m = 6$$
$$m = 3$$

Como las dos soluciones **no** coinciden, los vectores nunca pueden ser proporcionales. Y, por lo tanto, siempre podrán determinar completamente un plano; los puntos no están alineados.

10. ¿Son **coplanarios** los puntos A(2, 3, 1), B(1, 4, 5), C(-1, 3, 2), D(5, 1, 7)?

Varios puntos son coplanarios si todos ellos pertenecen al mismo plano. Hay varios modos de comprobar esto. Por ejemplo: se pueden encontrar las ecuaciones del plano que pasa por tres de los puntos y comprobar si el cuarto punto pertenece a ese plano.

Sin embargo, el modo más rápido es calcular el **producto mixto** de los vectores que se pueden formar uniendo un punto con los tres restantes. Si ese producto es cero, son coplanarios. Si ese producto es distinto de cero, no son coplanarios.

Calculamos primero los tres vectores:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = B - A = (1,4,5) - (2,3,1) = \\ = (-1,1,4) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,3,2) - (2,3,1) = \\ = (-3,0,1) \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (5,1,7) - (2,3,1) = \\ = (3,-2,6)\end{aligned}$$

El producto mixto será:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \ = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) =$$

$$= \begin{matrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{matrix} =$$

$$= (-1) \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \cdot -2 +$$

$$-4 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 \cdot (-3) =$$

$$= 0 + 3 + 24 - 0 - 2 + 18 =$$

$$= 43 \neq 0$$

Por lo tanto, los tres puntos son coplanarios:

$$\nexists \Pi; \ A, B, C, D \in \Pi$$

11. ¿Son **coplanarios** los puntos A(2, 3, 1), B(1, 4, 5), C(-1, 3, 2), D(-2, 4, 6)?

Para determinar si los cuatro puntos son coplanarios, calcularemos el producto mixto de tres vectores que se obtienen usando un punto como origen y los otros tres puntos como extremo de cada vector:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = B - A = (1,4,5) - (2,3,1) = \\ = (-1,1,4) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,3,2) - (2,3,1) = \\ = (-3,0,1) \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (-2,4,6) - (2,3,1) = \\ = (-4,1,5)\end{aligned}$$

El producto mixto será:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \ = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) =$$

$$= \begin{matrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{matrix} =$$

$$= (-1) \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) \cdot 1 +$$
$$-4 \cdot 0 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot (-3) =$$
$$= 0 - 4 - 12 - 0 + 1 + 15 =$$
$$= 0$$

El producto mixto es cero, por lo tanto, los cuatro puntos son coplanarios.

Que el producto sería cero era fácil de ver; los tres vectores no eran **linealmente independientes** porque:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

12. Determina los posibles valores de m para que los puntos A(2, 1, 0), B(3, 0, -1), C(0, 1, 1) y D(2, -1, m) sean coplanarios. Encuentra la ecuación general del plano cuando son coplanarios.

Encontramos los vectores que unen uno de los puntos con los tres restantes:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, -1) - (2, 1, 0) =$$
$$= (1, -1, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, 1) - (2, 1, 0) =$$
$$= (1, 0, 1)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2, -1, m) - (2, 1, 0) =$$
$$= (0, -2, m)$$

Si son coplanarios, el producto mixto de estos tres vectores es 0:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \;\; = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$$
$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & m \end{matrix} = 0$$

$$1 \cdot 0 \cdot m + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) +$$
$$-0 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot m = 0$$

$$0 + 0 + 2 - 0 + 2 + m = 0$$
$$m = -4$$

Es decir, los puntos pertenecen al mismo plano cuando $m = -4$.

Son vectores directores, por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Podemos calcular el producto vectorial para conseguir un vector normal del plano:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \\
= \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} = \\
= \hat{\imath} \begin{matrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \\
-\hat{\jmath} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + \\
+\hat{k} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \\
= (-1, -2, -1)
\end{aligned}
$$

Por lo que la ecuación normal del plano para ese vector normal y el punto A:

$$-1(x-2) - 2(y-1) - 1(z-0) = 0$$

Y a partir de ella podemos conseguir la ecuación general:

$$
\begin{gathered}
-x + 2 - 2y + 2 - z = 0 \\
x + 2y + z - 4 = 0
\end{gathered}
$$

Distancias

1. Sean los puntos A(1, 2), B(4, - 1) y C(-2, 5). Encuentra:
a) La distancia entre A y B.
b) La distancia a la que está C del origen de coordenadas.
c) La longitud del segmento $\overline{AM_{BC}}$ donde M_{BC} es el punto medio del segmento $\overline{BC}$.

a)

$$d(A, B) =$$

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que une los puntos:

$$
\begin{gathered}
= |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \\
= |(4, -1) - (1, 2)| = |(3, -3)| =
\end{gathered}
$$

Y el módulo se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes:

$$= \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

b)

$$d(C, O) =$$

El origen de coordenadas es el punto (0, 0), por lo que aquí basta hacer directamente:

$$= \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

c)

$$|\overline{AM_{BC}}| =$$

Primero tenemos que encontrar el punto medio entre B y C:

$$M_{BC} = \frac{B + C}{2} =$$
$$= \frac{(4, -1) + (-2, 5)}{2} =$$
$$= \frac{(2, 4)}{2} =$$
$$= (2, 4)$$

Ahora tenemos que encontrar un vector que va de A a M_{BC}:

$$\overrightarrow{AM_{BC}} =$$
$$= (2, 4) - (1, 2) = (1, 2)$$

Por lo tanto:

$$|\overline{AM_{BC}}| =$$
$$= \left|\overrightarrow{AM_{BC}}\right| =$$
$$= |(1, 2)| =$$
$$= \sqrt{1^2 + 2^2} =$$
$$= \sqrt{5}$$

2. Encuentra la distancia entre el punto P(2, 1) y la recta:

$$r \equiv x + y - 3 = 0$$

Existe una fórmula para encontrar la distancia entre un punto y una recta en 2D (= en el plano = en dos dimensiones):

$$\begin{matrix} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ P = (x_0, y_0) \end{matrix} \Rightarrow d(P, r) =$$
$$= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

La distancia es **cero** porque el punto P pertenece a la recta:

$$P \in r$$

3. Encuentra la distancia entre el punto P(1, -3) y la recta:

$$r \equiv 5x - 7y - 3 = 0$$

Con la fórmula para la distancia entre un punto y una recta en 2D (= en el plano = en dos dimensiones):

$$\begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ P = (x_0, y_0) \end{array} \Rightarrow d(P, r) =$$

$$= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|5 \cdot 1 + (-7) \cdot (-3) + (-3)|}{\sqrt{5^2 + (-7)^2}} = \\ &= \frac{23}{\sqrt{74}} = \end{aligned}$$

Racionalizando:

$$= \frac{23\sqrt{74}}{74} \neq 0$$

La distancia no es cero. Por lo tanto, el punto no pertenece a la recta:

$$P \notin r$$

4. Sin usar la fórmula, calcula la distancia entre el punto P(2, 1) y la recta:

$$r \equiv 4x - 5y + 3 = 0$$

A partir de la ecuación de la recta:

$$r \equiv 4x - 5y + 3 = 0$$

sabemos que su vector normal es:

$$\vec{n}_r = (4, -5) \perp r$$

Encontraremos una recta s que es perpendicular a la recta r y pasa por P. Si s es perpendicular a r, entonces:

$$\vec{s} = \vec{n}_r = (4, -5)$$

Y, por lo tanto:

$$\vec{n}_s = \vec{r} = (4, 5)$$

$$\begin{array}{l} \vec{n}_s = (4,5) \\ P = (2,1) \in s \end{array} \quad \Rightarrow s \equiv 4 \cdot (x-2) + 5 \cdot (y-1) = 0$$

Es decir:

$$s \equiv 4 \cdot (x-2) + 5 \cdot (y-1) = 0$$
$$s \equiv 4x + 5y - 13 = 0$$

El punto de la recta r más cercano a punto P es la intersección de las rectas r y s. Llamaremos a ese punto Q:

$$Q = r \cap s$$

Debe cumplir ambas ecuaciones. Lo cual nos da un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 4x + 5y - 13 = 0 \end{cases}$$

Podemos aplicar el método de reducción. Si sumamos ambas ecuaciones:

$$(4x - 5y + 3) + (4x + 5y - 13) = 0 + 0$$
$$8x - 10 = 0$$
$$8x = 10$$
$$x = 10/8$$
$$x = 5/4$$

Su restamos las ecuaciones del sistema:

$$
\begin{gathered}
(4x - 5y + 3) - (4x + 5y - 13) = 0 + 0 \\
16 + 10y = 0 \\
10y = -16 \\
y = -16/10 \\
y = -4/5
\end{gathered}
$$

El punto Q es:

$$Q = \left(\frac{5}{4}, \frac{-4}{5}\right)$$

La distancia entre r y P es la distancia entre P y Q:

$$
\begin{gathered}
d(r, P) = d(P, Q) = \\
= |\overline{PQ}| = \\
= \left|\left(\frac{5}{4}, \frac{-4}{5}\right) - (2, 1)\right| = \\
= \left|\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{5}\right)\right| = \\
= \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} = \\
= \sqrt{\frac{1521}{400}} = \\
= \frac{39}{20}
\end{gathered}
$$

5. Encuentra la distancia entre las dos rectas:

$$
\begin{gathered}
r \equiv 4x - 5y + 3 = 0 \\
s \equiv 8x - 10y + 7 = 0
\end{gathered}
$$

Las rectas están en forma general y es fácil ver que son paralelas porque:

$$\frac{4}{8} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{3}{7}$$

Escogemos un punto de una de ellas. Por ejemplo, de la primera hacemos que $x = 0$:

$$
\begin{gathered}
4 \cdot 0 - 5y + 3 = 0 \\
y = 5/3
\end{gathered}
$$

Es decir, el punto:

$$R = \quad 0, \frac{5}{3} \quad \in r$$

Como:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(R, s)$$

hemos convertido un problema de distancia entre rectas en un problema de distancia entre una recta y un punto. Podemos aplicar la fórmula:

$$\begin{array}{l} s \equiv Ax + By + C = 0 \\ R = (x_0, y_0) \end{array} \quad \Rightarrow d(R, s) =$$

$$= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\begin{aligned} d(R, s) = \frac{|8 \cdot 0 - 10 \cdot 5/3 + 7|}{\sqrt{8^2 + (-10)^2}} &= \\ = \frac{|0 - 50/3 + 7|}{\sqrt{164}} &= \\ = \frac{|-50/3 + 21/3|}{\sqrt{164}} &= \\ = \frac{29/3}{\sqrt{164}} &= \\ = \frac{29}{3\sqrt{164}} &= \\ = \frac{29\sqrt{164}}{3 \cdot 164} &= \\ = \frac{29\sqrt{164}}{492} & \end{aligned}$$

6. Calcula la distancia entre el punto $P(1, 3, 5)$ y el plano:

$$\Pi \equiv 4x + 2z - 5y + 3 = 0$$

Reordenamos la ecuación del plano:

$$\Pi \equiv 4x - 5y + 2z + 3 = 0$$

Sabemos que la ecuación entre un punto y un plano se puede calcular:

$$\begin{array}{l} \Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ P = (x_0, y_0, z_0) \end{array} \quad \Rightarrow d(P, \Pi) =$$

$$= \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(P,\Pi) &= \frac{|4\cdot 1 - 5\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3|}{\sqrt{4^2+(-5)^2+2^2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{45}} = \\ &= \frac{2\sqrt{45}}{45} \end{aligned}$$

7. Calcula la distancia entre los dos planos:

$$\Pi_1 \equiv 4x + 2z - 5y + 3 = 0$$
$$\Pi_2 \equiv 4x + 2z - 5y - 7 = 0$$

Los dos planos son paralelos porque:

$$\frac{4}{4} = \frac{-5}{-5} = \frac{2}{2} \neq \frac{3}{-7}$$

Podemos calcular la distancia escogiendo un punto de uno de los planos y calculando su distancia al otro. Sin embargo, basta con hacer:

$$\begin{aligned} d(\Pi_1,\Pi_2) &= \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \\ &= \frac{|-7-3|}{\sqrt{4^2+(-5)^2+2^2}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{45}} = \\ &= \frac{10\sqrt{45}}{45} = \\ &= \frac{2\sqrt{45}}{9} \end{aligned}$$

Pero, por supuesto, este método requiere memorizar la fórmula.

8. Calcula la distancia entre el punto $P(1,2,-3)$ y la recta:

$$r \equiv (x,y,z) = (2,1,3) + (-3,1,7)\cdot t$$

Para un punto P y una recta r se puede calcular:

$$d(P,r) = \frac{\vec{r} \times \overrightarrow{PR}}{|\vec{r}|}$$

donde R es cualquier punto de la recta r, $\vec{r}$ es cualquier vector director de la recta r y $\overrightarrow{PR}$ es un vector que va del punto P al punto R.

En nuestro caso:

$$\vec{r} = (-3, 1, 7)$$
$$R = (2, 1, 3)$$
$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2, 1, 3) - (1, 2, -3) =$$
$$= (1, -1, 6)$$

Calculamos el producto vectorial en la fórmula:

$$\vec{r} \times \overrightarrow{PR} =$$
$$= \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \end{array} =$$
$$= \ldots = (13, 25, 2)$$

Por lo tanto:

$$d(P, r) = \frac{|(13, 25, 2)|}{|(-3, 1, 7)|} =$$
$$= \frac{\sqrt{13^2 + 25^2 + 2^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 7^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{798}}{\sqrt{59}} =$$
$$= \sqrt{\frac{798}{59}}$$

9. Calcula la distancia entre las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (2, 1, 3) + (-3, 1, 7) \cdot t$$
$$s \equiv (x, y, z) = (1, 3, 2) + (-1, 3, 7) \cdot t$$

Se puede calcular la distancia entre dos rectas en 3D usando la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS}}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$$

Donde $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de r y s respectivamente. Y R y S son puntos de r y s respectivamente. En nuestro caso:

$$R = (2, 1, 3)$$
$$S = (1, 3, 2)$$
$$\vec{r} = (-3, 1, 7)$$

$$\vec{s} = (-1, 3, 7)$$

Calculamos fácilmente el vector que une los puntos R y S:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (-1, 3, 7) - (-3, 1, 7) =$$
$$= (2, 2, 0)$$

Calculamos el producto mixto de los tres vectores:

$$\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS} \; =$$
$$= \begin{matrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix} =$$
$$= \ldots = 0$$

Por lo que la distancia entre ambas rectas es cero. Es decir, se cortan. (No pueden ser coincidentes porque los vectores directores no son proporcionales.)

10. Calcula la distancia entre las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (2, 1, 3) + (-3, 1, 7) \cdot t$$
$$s \equiv (x, y, z) = (1, 3, 2) + (1, 3, 7) \cdot t$$

Se puede calcular la distancia entre dos rectas en 3D usando la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS}}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$$

Donde $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de r y s respectivamente. Y R y S son puntos de r y s respectivamente. En nuestro caso:

$$R = (2, 1, 3)$$
$$S = (1, 3, 2)$$
$$\vec{r} = (-3, 1, 7)$$
$$\vec{s} = (1, 3, 7)$$

Calculamos fácilmente el vector que une los puntos R y S:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (-1, 3, 7) - (-3, 1, 7) =$$
$$= (2, 2, 0)$$

Calculamos el producto mixto de los tres vectores:

$$\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS} \; =$$

$$= \begin{matrix} -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix} =$$
$$= \ldots = 28$$

Calculamos también el producto vectorial de los dos vectores directores:

$$\vec{r} \times \vec{s} = (-3, 1, 7) \times (1, 3, 7) =$$
$$= \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{matrix} =$$
$$= \ldots = (-14, 28, -10)$$

Por lo tanto, según la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|28|}{|(-14, 28, -10)|} =$$
$$= \frac{28}{\sqrt{(-14)^2 + 28^2 + (-10)^2}} =$$
$$= \frac{28}{\sqrt{1080}} =$$
$$= \frac{28}{\sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}} =$$
$$= \frac{28}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}} =$$
$$= \frac{14}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}} =$$
$$= \frac{14}{3 \cdot \sqrt{30}} =$$
$$= \frac{14\sqrt{30}}{90}$$

Otros problemas métricos

1. Calcula el volumen de un tetraedro de vértices A(0, 1, 0), B(2, 3, 0), C(6, 0, 0), D(2, 2, 5).

Si los vértices de un tetraedro son A, B, C y D, podemos calcular el volumen del tetraedro como el producto mixto de los vectores que se obtienen uniendo uno de los vértices con los tres vértices restantes:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \quad \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$$

Calculamos primero los tres vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,0) - (0,1,0) =$$
$$= (2,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (6,0,0) - (0,1,0) =$$
$$= (6,-1,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (2,2,5) - (0,1,0) =$$
$$= (2,1,5)$$

El producto mixto de tres vectores es el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \;=$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) =$$

que equivale al determinante:

$$= \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} =$$

Como en la tercera columna todos los elementos, excepto uno, son cero, podemos desarrollar por la tercera columna:

$$= 5 \cdot \begin{matrix} 2 & 2 \\ 6 & -1 \end{matrix} =$$
$$= 5 \cdot (-2 - 12) = 5 \cdot (-14) = -70$$

El volumen es, por lo tanto:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |-70| = \frac{35}{3}\ \mathrm{u}^3$$

Donde u representa la palabra *“unidades”*.

2. Calcula el área de $\triangle ABC$ si $A(1,2,3)$, $B(2,-1,4)$ y $C = (-2,3,5)$.

Hay más de un modo de hacer este problema[40]. Cada uno de los modos que vamos a usar a continuación necesita conocimientos ligeramente diferentes.

Modo 1: con la fórmula de Herón.

[40]¡Como siempre!

La fórmula de Herón[41] dice que la superficie S de un triángulo se puede calcular usando las longitudes de los lados a, b y c:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

donde s es el *semiperímetro*, es decir, la mitad del perímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Podemos calcular esas tres longitudes:

$$\begin{gathered} a = \overline{BC} = \\ = |(-2,3,5)-(2,-1,4)| = \\ = |(-4,4,1)| = \\ = \sqrt{(-4)^2+4^2+1^2} = \\ = \sqrt{33} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b = \overline{AC} = \\ = |(-2,3,5)-(1,2,3)| = \\ = |(-3,1,2)| = \\ = \sqrt{(-3)^2+1^2+2^2} = \\ = \sqrt{14} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} c = \overline{AB} = \\ = |(2,-1,4)-(1,2,3)| = \\ = |(1,-3,1)| = \\ = \sqrt{1^2+(-3)^2+1^2} = \\ = \sqrt{11} \end{gathered}$$

El semiperímetro es:

$$\begin{gathered} s = \frac{a+b+c}{2} = \\ = \frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2} \end{gathered}$$

Calculamos el radicando:

[41] En honor al matemático griego Herón de Alejandría

$$s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)=$$

$$=\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\sqrt{33}\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\sqrt{14}\quad\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\sqrt{11}\quad=$$

$$=\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\frac{2\sqrt{33}}{2}\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\frac{2\sqrt{14}}{2}\quad\cdot\quad\frac{\sqrt{33}+\sqrt{14}+\sqrt{11}}{2}-\frac{2\sqrt{11}}{2}\quad=$$

$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}\quad+\sqrt{33}}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}\quad-\sqrt{33}}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{33}-\quad\sqrt{14}-\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{\sqrt{33}+\quad\sqrt{14}-\sqrt{11}}{2}=$$

Una suma por una diferencia es la diferencia de los cuadrados:

$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}\quad^{2}-\quad\sqrt{33}\quad^{2}}{4}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{33}\quad^{2}-\quad\sqrt{14}-\sqrt{11}\quad^{2}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}\quad^{2}-33}{4}\cdot$$

$$\cdot\frac{33-\quad\sqrt{14}-\sqrt{11}\quad^{2}}{4}=$$

Por las identidades notables del cuadrado de una suma y del cuadrado de una diferencia:

$$=\frac{14+11+2\sqrt{11}\sqrt{14}-33}{4}\cdot$$

$$\cdot\frac{33-\quad14+11-2\sqrt{11}\sqrt{14}}{4}=$$

$$=\frac{-8+2\sqrt{154}}{4}\cdot$$

$$\cdot\frac{8+2\sqrt{154}}{4}=$$

$$=\frac{-4+\sqrt{154}}{2}\cdot$$

$$\cdot \frac{4+\sqrt{154}}{2} =$$

Usando la fórmula para la suma por la diferencia:

$$= \frac{\sqrt{154}^{\ \ 2} - 4^2}{4} =$$

$$= \frac{154-16}{4} = \frac{138}{4} = \frac{69}{2}$$

La superficie es:

$$S = \overline{\frac{69}{2}}\ \mathrm{cm}^2$$

$$S \approx 5,87\ \mathrm{cm}^2$$

Modo 2: con el producto vectorial.

La superficie del triángulo $\triangle ABC$ se puede calcular:

$$S = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{2}$$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$A(1,2,3)$, $B(2,-1,4)$ y $C = (-2,3,5)$

$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,4) - (1,2,3) =$$
$$= (1,-3,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2,3,5) - (1,2,3) =$$
$$= (-3,1,2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$$

$$= \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{matrix} =$$

$$= \hat{\imath} \begin{matrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} +$$

$$-\hat{\jmath} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix} +$$

$$+\hat{k} \begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{matrix} =$$

$$= (-7,-5,-8)$$

La superficie es entonces:

$$S = \frac{|(-7,-5,-8)|}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+(-8)^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{138}}{2} \text{ cm}^2$$

$$S \approx 5,87 \text{ cm}^2$$

Modo 3: la mitad de un lado por la altura.

Sabemos que la superficie de un triángulo es la mitad del producto de un lado por la altura correspondiente a ese lado. Por ejemplo:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Sabemos que:

$$a = |\overline{BC}| = |\overrightarrow{BC}| =$$
$$= |C - B| = |(-2,3,5) - (2,-1,4)| =$$
$$= |(-4,4,1)| =$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 1^2} =$$
$$= \sqrt{33}$$

La altura h_a sobre el lado a es un cateto de un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es b y el ángulo opuesto a h_a es γ. Por lo tanto:

$$h_a = b \cdot \sin(\gamma)$$

Podemos hacer los vectores que salen de C para calcular el ángulo entre ellos a través del producto escalar:

$$\overrightarrow{CA} = (3,-1,-2)$$
$$\overrightarrow{CB} = (4,-4,-1)$$

El producto escalar de ambos es:

$$(3,-1,-2) \cdot (4,-4,-1) =$$
$$= 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) =$$
$$= 12 + 4 + 2 = 18$$

El módulo de ambos es:

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{14}$$
$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{33}$$

Por lo tanto:

$$18 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{33} \cdot \cos(\gamma)$$
$$\cos(\gamma) = \frac{18}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{33}}$$

Su cuadrado es:

$$\cos^2(\gamma) = \frac{324}{14 \cdot 33} = \frac{54}{77}$$

Por el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma) =$$
$$= 1 - \frac{54}{77} = \frac{23}{77}$$

$$\sin(\gamma) = \sqrt{\frac{23}{77}}$$

Por lo que:

$$h_a = b \cdot \sin(\gamma)$$
$$h_a = \sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{23}{77}}$$

La superficie es:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{33}\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{23}{77}}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{33}\sqrt{14} \cdot \sqrt{23}}{2 \cdot \sqrt{77}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{11}\sqrt{2}\sqrt{7} \cdot \sqrt{23}}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{11}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt{23}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{138}}{2}\ \text{cm}^2$$

$$S \approx 5,87\ \text{cm}^2$$

Cónicas

Las *secciones cónicas* son las líneas curvas que se obtienen de la intersección de un cono y un plano. Las secciones cónicas no degeneradas son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Todas ellas son importantes en geometría, en ingeniería e incluso en mecánica celeste (la parte de la física que estudia el movimiento de objetos celestes como estrellas, planetas y satélites). La parábola y la hipérbola son importantes en análisis de funciones.

Del mismo modo que las ecuaciones lineales de dos variables representan líneas rectas en el plano, las ecuaciones cuadráticas de dos variables representan secciones cónicas en el plano.

1. Encuentra la ecuación que verifican todos los puntos de coordenadas (x, y) en el plano que están a una distancia de 6 unidades del punto C(2, 3).

Nos dicen que distancia de un punto $P = (x, y)$ al punto $C = (2, 3)$ es igual a 6 unidades:

$$\mathrm{d}(P, C) = 6$$

Pero esa distancia es la misma que la longitud del segmento tiene a los puntos como extremo:

$$\overline{PC} \; = 6$$

o igual al módulo del vector que sale de un punto y llega al otro:

$$\overrightarrow{CP} \; = 6$$

Ese vector se calcula fácilmente:

$$|P - C| = 6$$

$$|(x, y) - (2, 3)| = 6$$

$$|(x - 2, y - 3)| = 6$$

Eso equivale a:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 6$$

Elevando al cuadrado en ambos lados:

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 6^2}$$

Que es, por supuesto, la ecuación de una circunferencia de centro (2, 3) y radio igual a 6 unidades.

Los cuadrados se podrían desarrollar para escribir la ecuación de una manera distinta:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$$

2. Encuentra la ecuación que verifican todos los puntos de coordenadas (x, y) en el plano que están a una distancia de r unidades del punto $C(x_0, y_0)$.

Se trata del mismo ejercicio que el ejercicio anterior, pero con un centro y un radio genéricos.

$$\mathrm{d}(P, C) = r$$

$$\overline{PC} = r$$
$$\overrightarrow{CP} = r$$
$$|P - C| = r$$
$$|(x, y) - (x_0, x_0)| = r$$
$$|(x - x_0, y - y_0)| = r$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Se puede desarrollar, tal como ocurre en el ejercicio anterior:

$$x^2 + x_0^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 + y_0^2 - 2 \cdot y \cdot y_0 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x - 2 \cdot y_0 \cdot y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

3. ¿Qué representan gráficamente las siguientes ecuaciones?

a)
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

b)
$$x^2 + (y + 3)^2 = 5$$

c)
$$y^2 + \quad x + \frac{1}{2} \quad ^2 = 3$$

a) Es una circunferencia donde:
   - el centro es (-2, 3)
   - el radio es $\sqrt{16} = 4$

b) Es una circunferencia donde:
   - el centro es (0, -3)
   - el radio es $\sqrt{5}$

c) Es una circunferencia donde:
   - el centro es (-1/2, 0)
   - el radio es $\sqrt{3}$

4. Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5 que está centrada en (2, -1).

La ecuación de una circunferencia en el plano se puede escribir:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

donde r es el radio y (x_0, y_0) es el centro.

Por lo tanto:

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 25$$

es decir:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=25$$

5. Escribe la ecuación de la circunferencia centrada en (1, 2) que pasa por (3, 7).

El radio de la circunferencia es simplemente la distancia entre ambos puntos:

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{d}((1,2),(3,7)) = \\ &= |(3,7)-(1,2)| = |(2,5)| = \\ &= \sqrt{2^2+5^2} = \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{29}\right)^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=29$$

6. La ecuación de una circunferencia es:

$$x^2+4x+y^2-6y-36=0$$

Encuentra su centro y su radio.

Lo primero que podemos hacer es sacar un 2 como factor común de los términos de grado 1:

$$x^2+2\cdot 2\cdot x+y^2-2\cdot 3\cdot y-36=0$$

Esto nos sugiere *completar cuadrados*. Podemos sumar y restar el cuadrado de 2:

$$x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+y^2-2\cdot 3\cdot y-36=0$$
$$(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2)-2^2+y^2-2\cdot 3\cdot y-36=0$$

Lo que aparece entre paréntesis es el cuadrado de $x+2$:

$$(x+2)^2-2^2+y^2-2\cdot 3\cdot y-36=0$$
$$(x+2)^2-4+y^2-2\cdot 3\cdot y-36=0$$
$$(x+2)^2+y^2-2\cdot 3\cdot y-40=0$$

Podemos sumar y restar el cuadrado de 3:

$$(x+2)^2+y^2-2\cdot 3\cdot y+3^2-3^2-40=0$$
$$(x+2)^2+(y^2-2\cdot 3\cdot y+3^2)-3^2-40=0$$

Lo que aparece entre el segundo grupo de paréntesis es el cuadrado de $y-3$:

$$(x+2)^2+(y-3)^2-3^2-40=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2-9-40=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2-49=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=49$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=7^2$$

Por lo tanto:

- el centro es (-2, 3)
- el radio es 7

7. Sea la circunferencia de ecuación:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=9$$

Determina:
  a) su centro y su radio
  b) las posiciones de los puntos A(6, 2), B(1, -2) y C(2, 3) respecto a la circunferencia
  c) la inecuación de su círculo

a) Como la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=9$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=3^2$$

- el centro es (3, 2)
- el radio es $r=3$

b) El lado izquierdo de la ecuación de la circunferencia es el cuadrado de la distancia al centro. Por lo tanto solamente tenemos que ver si para cada punto es mayor, igual o menor que el radio al cuadrado. Eso nos permite determinar la posición de los puntos.

Si A(6, 2):

$$LI=(6-3)^2+(2-2)^2=9$$

Como es igual a r^2, A es un punto de la circunferencia.

Si B(1, -2):

$$LI=(1-3)^2+((-2)-2)^2=20>9$$

Como es mayor que r^2, B está *fuera* de la circunferencia.

Si C(2, 3):

$$LI=(2-3)^2+(3-2)^2=2<9$$

Como es menor que r^2, C está *dentro* de la circunferencia.

c) El círculo está formado por todos los puntos que están dentro de la circunferencia. Es decir:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 9$$

O, si queremos que la circunferencia esté incluida:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 9$$

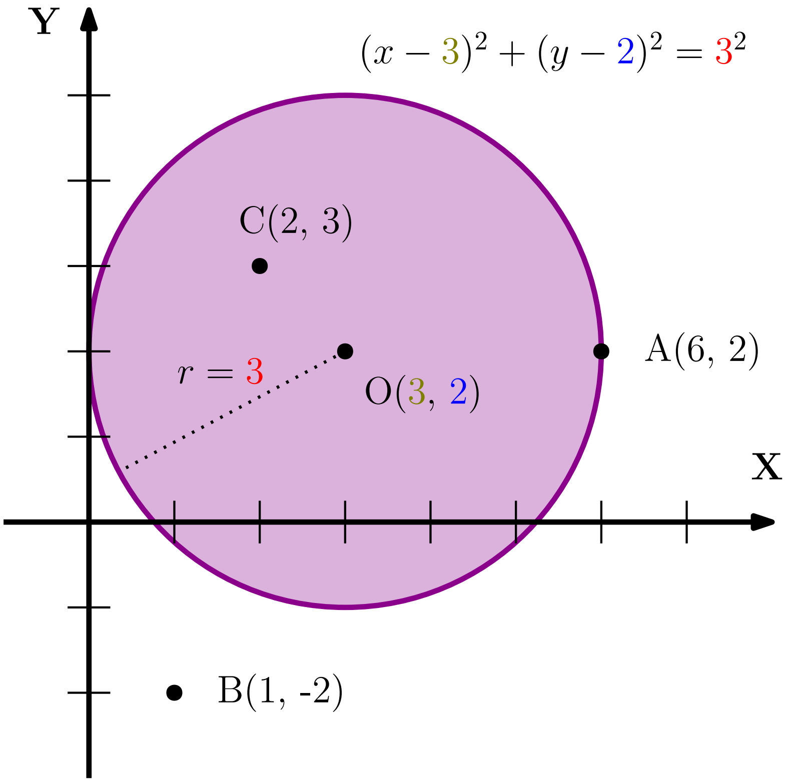


Figura 115: Tres puntos y una circunferencia. El punto A pertenece a ella, el punto B es externo y el punto C es interno.

8. ¿Cuáles son las posibles posiciones relativas de dos circunferencias en el plano?

Dos circunferencias pueden ser:

- **Exteriores**: la distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.

  La intersección de ambas es el conjunto vacío.

- **Interiores**: la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.

  La intersección de ambas es el conjunto vacío.

- **Secantes**: la distancia entre los centros es mayor que la diferencia de los radios.

  La intersección de ambas contiene dos puntos. Es decir, se cortan en dos puntos.

- **Coincidentes**: tienen el mismo centro y el mismo radio.

  La intersección es la propia circunferencia.
- **Concéntricas**: sus centros coinciden y no tienen puntos comunes.
- **Tangentes**: su intersección es un solo punto.
  - **tangentes interiores**: la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.
  - **tangentes exteriores**: la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

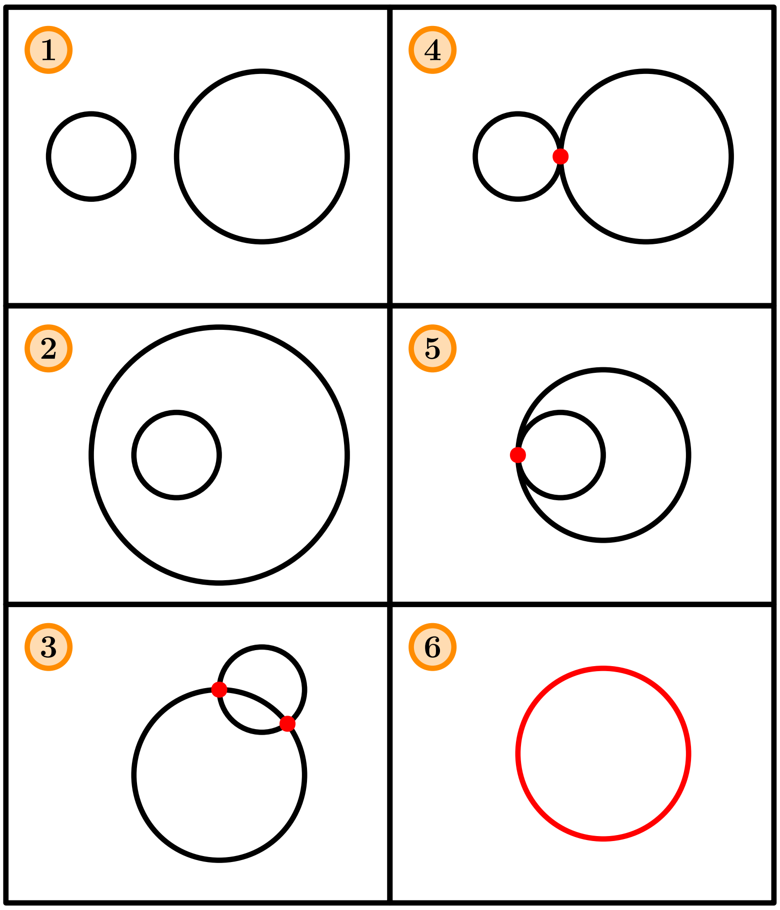


Figura 116: Posiciones relativas de dos circunferencias: 1. exteriores, 2. interiores, 3. secantes, 4. tangentes exteriores, 5. tangentes interiores, 6. coincidentes. Las concéntricas son interiores con un centro común.

9. ¿Cuál es la posición relativa de las circunferencias c_1 y c_2?

$$c_1 \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$
$$c_2 \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Las ecuaciones nos dan los centros de ambas circunferencias:

$$O_1 = (1, -3)$$
$$O_2 = (-2, 1)$$

Como son distintos, no pueden ser concéntricas (ni coincidentes).

Y los radios:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = 3$$

Calculamos la distancia entre los dos centros:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(O_1, O_2) = |(-2,1) - (1,-3)| = \\ = |(-3,4)| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \\ = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\mathrm{d}(O_1, O_2) = r_1 + r_2$$

Por lo tanto son **tangentes exteriores**.

Para encontrar el punto de tangencia, basta resolver el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases}$$

Desarrollando:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 = 4 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5 = 9 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4 \end{cases}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda:

$$-2x + 6y - (4x - 2y) = -6 - 4$$
$$8y - 6x = -10$$

Dividiendo todo entre 2:

$$4y - 3x = -5$$

Despejamos y:

$$y = \frac{3x - 5}{4}$$

Sustituimos en la ecuación de c_1:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$
$$(x+2)^2 + \left(\frac{3x-5}{4} - 1\right)^2 = 9$$
$$(x+2)^2 + \left(\frac{3x-5}{4} - \frac{4}{4}\right)^2 = 9$$
$$(x+2)^2 + \left(\frac{3x-9}{4}\right)^2 = 9$$
$$(x+2)^2 + \frac{(3x-9)^2}{16} = 9$$
$$x^2 + 4x + 4 + \frac{9x^2 - 54x + 81}{16} = 9$$

Multiplicamos todo por 16:

$$16 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 9x^2 - 54x + 81 = 16 \cdot 9$$
$$16x^2 + 64x + 64 + 9x^2 - 54x + 81 = 144$$
$$25x^2 + 10x + 145 = 144$$
$$25x^2 + 10x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1}}{2 \cdot 25} =$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{50} =$$

El discriminante es 0, por lo que solamente existe una solución para esta ecuación cuadrática:

$$= \frac{-10 \pm 0}{50} =$$
$$= \frac{-10}{50} =$$
$$= \frac{-1}{5} =$$
$$= -\frac{1}{5}$$

El valor de y será:

$$y = \frac{3 \cdot \frac{-1}{5} - 5}{4} =$$
$$= \frac{\frac{-15}{5} - 5}{4} =$$
$$= \frac{\frac{-15}{5} - \frac{25}{5}}{4} =$$
$$= \frac{-\frac{40}{5}}{4} =$$

$$= \frac{-8}{4} =$$
$$= -2$$

El punto de tangencia es:

$$(x, y) = \quad -\frac{1}{5}, -2$$

Es decir:

$$c_1 \cap c_2 = \quad -\frac{1}{5}, -2$$

10. ¿Cuál es la posición relativa de las circunferencias c_1 y c_2?

$$c_1 \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$
$$c_2 \equiv (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Los centros son:

$$O_1 = (1, -3)$$
$$O_2 = (2, -4)$$

Como son distintos, no pueden ser concéntricas (ni coincidentes).

Y los radios:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = 5$$

Calculamos la distancia entre los dos centros:

$$\mathrm{d}(O_1, O_2) = |(2, -4) - (1, -3)| =$$
$$= |(1, -1)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} =$$
$$= \sqrt{2}$$

Vemos que:

$$\mathrm{d}(O_1, O_2) = \sqrt{2} < r_2 - r_1 = 3$$

Por lo tanto, las circunferencias son **interiores** (una está dentro de la otra).

11. ¿Cuál es la posición relativa de las circunferencias c_1 y c_2?

$$c_1 \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

$$c_2 \equiv (x+4)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Los centros son:

$$O_1 = (1, -3)$$
$$O_2 = (-4, 4)$$

Como son distintos, no pueden ser concéntricas (ni coincidentes).

Y los radios:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = 5$$

Calculamos la distancia entre los dos centros:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(O_1, O_2) &= |(-4,4) - (1,-3)| = \\ &= |(-5,7)| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \\ &= \sqrt{74} \approx 8.602 \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\mathrm{d}(O_1, O_2) = \sqrt{74} > r_1 + r_2 = 7$$

Por lo tanto, las circunferencias son **exteriores**.

12. Demuestra que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \sin(t) \\ y = y_0 + r \cdot \cos(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio r y centro (x_0, y_0).

Debemos eliminar el parámetro t y conseguir una sola ecuación sin t. Pero despejar t de una ecuación nos daría una expresión complicada con arcosenos o arcocosenos.

Primero aislamos las razones trigonométricas:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{r} = \sin(t) \\ \frac{y-y_0}{r} = \cos(t) \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado los dos lados de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 = \sin^2(t) \\ \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = \cos^2(t) \end{cases}$$

Si sumamos las dos:

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2=\sin^2(t)+\cos^2(t)$$

Pero, por el teorema fundamental de la trigonometría, el lado derecho es 1:

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{r^2}+\frac{(y-y_0)^2}{r^2}=1$$

Multiplicamos por r^2:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

que es la ecuación de una circunferencia, *como queríamos demostrar*.

13. Sea la circunferencia:

$$c\equiv(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la circunferencia cuando $x=1$.

La circunferencia tiene un radio de 3 unidades y su centro está en (-1, 2).

Queremos encontrar una recta que llamaremos r. Nos dicen que el punto de tangencia tiene abscisa $x=1$. Podemos encontrar las coordenadas del punto sustituyendo en la ecuación:

$$(1+1)^2+(y-2)^2=9$$
$$4+(y-2)^2=9$$
$$(y-2)^2=5$$
$$y-2=\pm\sqrt{5}$$
$$y=2\pm\sqrt{5}$$

Es decir, no hay una recta que cumpla estas condiciones, **hay dos rectas tangentes** que cumplen las condiciones y hay dos puntos de tangencia:

$$c\cup r_1=P_1=(1,2+\sqrt{5})$$
$$c\cup r_2=P_2=(1,2-\sqrt{5})$$

Vamos a encontrar la primera de las rectas, r_1. Para eso, buscamos el vector que une el centro de la circunferencia con el punto P_1, al que llamaremos $\vec{n}_1$ porque es normal (= perpendicular) a la recta r_1.

$$\vec{n}_1=(1,2+\sqrt{5})-(-1,2)=$$
$$=(2,\sqrt{5})$$

Eso nos permite encontrar la ecuación normal de la recta:

$$r_1 \equiv 2(x-1) + \sqrt{5} \cdot (y - (2+\sqrt{5})) = 0$$

Podemos hacer lo mismo con la otra recta r_2:

$$\begin{aligned}\vec{n}_2 &= (1, 2-\sqrt{5}) - (-1, 2) = \\ &= (2, -\sqrt{5}) \\ r_2 &\equiv 2(x-1) - \sqrt{5} \cdot (y - (2-\sqrt{5})) = 0\end{aligned}$$

14. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(3, 4), B(4, 1) y C(7, 3).

La ecuación de una circunferencia de radio r y centro (x_0, y_0) se puede escribir:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Por comodidad, vamos a renombrar varias cosas:

- $x_0 \to a = x_0$
- $y_0 \to b = y_0$
- $r^2 \to c = r^2$

y entonces queda:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$$

Los tres puntos deben cumplir la ecuación:

$$\begin{array}{lcl} (3,4) & \to & (3-a)^2 + (4-b)^2 = c \\ (4,1) & \to & (4-a)^2 + (1-b)^2 = c \\ (7,3) & \to & (7-a)^2 + (3-b)^2 = c \end{array}$$

Entonces tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (4-b)^2 = c \\ (4-a)^2 + (1-b)^2 = c \\ (7-a)^2 + (3-b)^2 = c \end{cases}$$

Desarrollando:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 9 + b^2 - 8b + 16 = c \\ a^2 - 8a + 16 + b^2 - 2b + 1 = c \\ a^2 - 14a + 49 + b^2 - 6b + 9 = c \end{cases}$$

Simplificando un poco:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + b^2 - 8b + 25 = c \\ a^2 - 8a + b^2 - 2b + 17 = c \\ a^2 - 14a + b^2 - 6b + 58 = c \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones puede parecer terrible; las incógnitas aparecen en varios lugares con distintos grados. Sin embargo, en las tres ecuaciones aparecen a^2 y b^2 con los mismos coeficientes.

Si a la primera le restamos la segunda, queda:

$$(-6a - 8b + 25) - (-8a - 2b + 17) = 0$$
$$2a - 6b + 8 = 0$$

Dividiendo entre 2:

$$a - 3b + 4 = 0$$

Si a la primera le restamos la tercera, queda:

$$(-6a - 8b + 25) - (-14a - 6b + 58) = 0$$
$$8a - 2b - 33 = 0$$

Lo que nos da un inocente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - 3b + 4 = 0 \\ 8a - 2b - 33 = 0 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema por el método de sustitución. Despejamos a de la primera ecuación:

$$a = 3b - 4$$

Sustituimos en la segunda:

$$8 \cdot (3b - 4) - 2b - 33 = 0$$
$$24b - 32 - 2b - 33 = 0$$
$$22b - 65 = 0$$
$$b = \frac{65}{22}$$

Por lo que a es:

$$a = 3 \cdot \frac{65}{22} - 4 =$$
$$= \frac{3 \cdot 65}{22} - 4 =$$
$$= \frac{3 \cdot 65}{22} - \frac{4 \cdot 22}{22} =$$

$$= \frac{195}{22} - \frac{88}{22} =$$
$$= \frac{107}{22}$$

Ahora podemos encontrar c:

$$(3-a)^2 + (4-b)^2 = c$$
$$\left(3 - \frac{107}{22}\right)^2 + \left(4 - \frac{65}{22}\right)^2 = c$$
$$\left(\frac{3 \cdot 22}{22} - \frac{107}{22}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 22}{22} - \frac{65}{22}\right)^2 = c$$
$$\left(\frac{66}{22} - \frac{107}{22}\right)^2 + \left(\frac{88}{22} - \frac{65}{22}\right)^2 = c$$
$$\left(\frac{-41}{22}\right)^2 + \left(\frac{23}{22}\right)^2 = c$$
$$\frac{1681}{22^2} + \frac{529}{22^2} = c$$
$$\frac{2210}{22^2} = c$$
$$c = \frac{2210}{22^2}$$

Por lo que r es la raíz positiva de c:

$$r = \sqrt{\frac{2210}{22^2}}$$
$$r = \frac{\sqrt{2210}}{22}$$

15. ¿Qué representa gráficamente la ecuación siguiente?

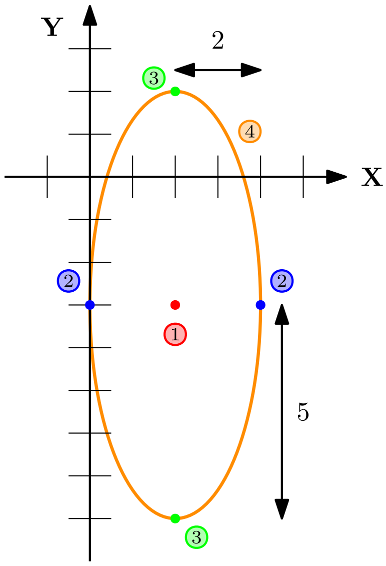
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

Es la ecuación de una **elipse**.

El centro de la elipse es el punto (2, -3) y la longitud de los semiejes es 2 y 5 unidades.

Hacer un esbozo (es decir, un dibujo incompleto que transmite la idea) es sencillo:

1. Dibujamos el centro (2, -3) como un punto.
2. Buscamos un punto que está horizontalmente 2 unidades a la derecha (4, -3) y otro 2 unidades a la izquierda (0, -3) y los dibujamos.
3. Buscamos un punto que está verticalmente 5 unidades hacia arriba (2, 2) y otro 5 unidades hacia abajo (2, -8) y los dibujamos.
4. Unimos los puntos por una línea ovalada que sea más o menos elíptica.



$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

1. dibujamos el centro
2. dibujamos los puntos que se encuentran a la derecha y la izquierda del centro
3. dibujamos los puntos que se encuentran encima y debajo del centro
4. unimos los puntos

Figura 117: Pasos para esbozar una elipse si conocemos la ecuación.

Sucesiones

Una sucesión de números reales es simplemente una lista ordenada de números.

Una forma más precisa de definirlas es como aplicaciones del conjunto de los números enteros (excepto el cero) al conjunto de los números reales. Y, en ese sentido, son parecidas a las funciones. Por lo que hay conexiones entre unas y otras.

De todas las familias de sucesiones, las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas son las dos familias más sencillas que aparecen con más frecuencia. Ambas familias pertenecen a una familia mayor: la de las sucesiones recurrentes (o recursivas).

1. Una sucesión es una progresión geométrica de razón 3/5 y su primer término es 125. Encuentra:
a) El término general
b) La suma infinita

Nos dicen que la razón es:

$$r = \frac{3}{5}$$

y el primer término es:

$$a_1 = 125$$

El término general de cualquier progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_n = 125 \cdot \quad \frac{3}{5}^{\,n-1}}$$

Opcionalmente:

$$a_n = 125 \cdot \quad \frac{3}{5}^{\,n} \cdot \quad \frac{3}{5}^{\,-1} =$$

$$= 125 \cdot \quad \frac{3}{5}^{\,n} \cdot \quad \frac{5}{3} \quad =$$

$$= \frac{625}{3} \cdot \quad \frac{3}{5}^{\,n}$$

Como la razón es menor que 1:

$$\frac{3}{5} < 1$$

podemos calcular la suma infinita:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

La suma **converge** y la fórmula para calcularla es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{125}{1-\frac{3}{5}}$$

$$S_\infty = \frac{125}{\frac{5}{5}-\frac{3}{5}}$$

$$S_\infty = \frac{125}{\frac{2}{5}}$$

$$S_\infty = \frac{625}{2}$$

> **2**. Demuestra la fórmula de la suma infinita de una progresión geométrica de razón menor que 1:
> $$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$
> sabiendo que la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:
> $$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}.$$

Para la demostración, vamos a hacer un límite; la suma infinita es la suma finita cuando n tiende a infinito:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Como la suma finita es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

y el término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

la suma finita también se escribe:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}$$

Ahora sustituyendo en el límite:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} =$$

Pero el límite de r^n cuando n tiende a infinito es 0 porque r es menor que 1 y, por lo tanto, es una exponencial decreciente:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0 - a_1}{r-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{-r+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-r} =$$

Como a_1 y r no dependen de n:

$$= \frac{a_1}{1-r}$$

$$\blacksquare$$

Quod erat demonstrandum.

3. De una progresión geométrica conocemos el quinto término y el octavo término. El quinto término es 1875 y el octavo término es 234375. Encuentra el término general y el término en la posición 12.

El término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde r es la *razón* (es decir, la división, el cociente de dos términos consecutivos) que en eslovaco se suele escribir q.

Sabemos que:

$$\begin{cases} a_5 = 1875 & \Rightarrow a_1 \cdot r^{5-1} = 1875 \\ a_8 = 234375 & \Rightarrow a_1 \cdot r^{8-1} = 234375 \end{cases}$$

Lo que nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1 \cdot r^4 = 1875 \\ a_1 \cdot r^7 = 234375 \end{cases}$$

Las ecuaciones no son lineales, así que no podemos usar el *método de reducción*. Pero podemos usar un método similar si dividimos los lados derechos y los lados izquierdos.

$$\frac{a_1 \cdot r^7}{a_1 \cdot r^4} = \frac{234375}{1875}$$
$$r^3 = 125$$
$$r = \sqrt[3]{125}$$
$$r = 5$$

Ahora que tenemos r podemos encontrar el primer término a_1 fácilmente sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema:

$$a_1 \cdot r^4 = 1875 \Rightarrow a_1 \cdot 5^4 = 1875 \Rightarrow 625a_1 = 1875$$
$$a_1 = \frac{1875}{625} = 3$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_n = 3 \cdot 5^{n-1}}$$

Y el término en la posición 12 es:

$$a_{12} = 3 \cdot 5^{12-1} = 3 \cdot 5^{11} = 146\,484\,375$$

4. De una progresión aritmética conocemos el quinto término y el octavo término. El quinto término es 23 y el octavo término es 38. Encuentra el término general y la suma de los 5 primeros términos.

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

donde d es la *diferencia* (es decir, la resta de dos términos consecutivos).

Sabemos que:

$$\begin{cases} a_5 = 23 & \Rightarrow a_1 + (5-1) \cdot d = 23 \\ a_8 = 38 & \Rightarrow a_1 + (8-1) \cdot d = 38 \end{cases}$$

Lo que nos da un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 23 \\ a_1 + 7d = 38 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema usando el *método de reducción* restando ambas ecuaciones:

$$(a_1 + 7d) - (a_1 + 4d) = 38 - 23$$

$$3d = 15$$

$$d = 5$$

Ahora podemos encontrar el primer término a_1 sustituyendo en una de las ecuaciones:

$$a_1 + 4d = 23 \Rightarrow a_1 + 4 \cdot 5 = 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 3$$

Por lo tanto, el término general de esta progresión aritmética es:

$$\boxed{a_n = 3 + (n-1) \cdot 5}$$

que también se puede escribir:

$$a_n = 5n - 2$$

Tenemos que calcular la suma de los 5 primeros términos. La fórmula de la suma de los n primeros términos es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Por lo tanto:

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} =$$

$$= \frac{(3 + 23) \cdot 5}{2} =$$

$$= \frac{26 \cdot 5}{2} =$$

$$= 13 \cdot 5 =$$

$$= 65$$

5. Encuentra la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

La suma se puede abreviar como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

que equivale a:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Como la suma es conmutativa, podemos reordenar los términos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Si sumamos ambas expresiones:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pero, como es una progresión aritmética, todas las sumas entre paréntesis tienen el mismo valor:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Hay n sumas, por lo que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Q.E.D.

6. Demuestra la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética usando el método de inducción:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Podríamos demostrar la fórmula como en el ejercicio anterior.

Para demostrar la fórmula por el método de inducción:

a) Demostramos que funciona cuando $n = 1$:

$$S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2}$$

$$S_1 = \frac{2a_1}{2}$$

$$S_1 = a_1$$

que es cierto por definición.

b) Suponemos que es cierto para n (*hipótesis de inducción*).

c) Demostramos que es cierta para $n + 1$.

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n + 1)}{2}$$

Como $a_{n+1} = a_n + d$:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n + d) \cdot (n + 1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n + a_1 + a_n + nd + d}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + \frac{a_1 + a_n + nd + d}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_1 + a_n + nd + d}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1} + a_n + d}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{2a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$\square$$

Como queríamos demostrar.

7. Te piden demostrar:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

pero no recuerdas ninguno de los métodos de demostración formal. No recuerdas la demostración donde se usa la suma y no recuerdas la demostración por el método de inducción.
¿Qué haces?

Puedes inventar una progresión aritmética cualquiera. Por ejemplo, una progresión aritmética con primer término $a_1 = 2$ y diferencia $d = 3$:

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = 2 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 1$$

Ahora calculas los cinco primeros términos:

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

La suma de los cinco primeros términos es:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

$$S_5 = 40$$

Si usamos la fórmula:

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \\ &= \frac{(2 + 14) \cdot 5}{2} = \\ &= \frac{16 \cdot 5}{2} = \\ &= 8 \cdot 5 = 40 \end{aligned}$$

No es una demostración propiamente dicha. Pero es mejor que **no hacer nada**.

8. Por 20 ejemplos de sucesiones.

Este tipo de pregunta es realmente sencilla; como una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales, las reglas que inventemos pueden ser lo sencillas o complejas que queramos:

1. La sucesión constante formada solamente por el 2:

   $\{2, 2, 2, 2, 2 \ldots\}$

   El término general es $a_n = 2$. Puede considerarse que es aritmética de diferencia $d = 0$ y geométrica de razón $r = 1$.

2. La sucesión de los números naturales:

   $\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

   El término general es $a_n = n - 1$. Es aritmética de diferencia $d = 1$.

3. La sucesión de los números pares:

   $\{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$

   El término general es $a_n = 2n - 2$. Es aritmética de diferencia $d = 2$.

4. La sucesión de los números impares:

   $\{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\}$

   El término general es $a_n = 2n - 1$. Es aritmética de diferencia $d = 2$.

5. La sucesión de las potencias de exponente natural de 2:

   $\{1, 2, 4, 8, 16 \ldots\}$

   El término general es $a_n = 2^{n-1}$. Es geométrica de razón $r = 2$.

6. La sucesión de los cuadrados perfectos mayores que cero:

   $\{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$

   El término general es $a_n = n^2$. No es ni aritmética ni geométrica.

7. La sucesión de los números primos:

   $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots\}$

   No tiene término general conocido. No es ni aritmética ni geométrica.

8. La sucesión que alterna 1 y -1, empezando por 1:

   $\{1, -1, 1, -1, 1 \dots\}$

   El término general es $a_n = (-1)^{n-1}$. Es geométrica de razón $r = -1$.

   O la que alterna 1 y -1, empezando por -1:

   $\{-1, 1, -1, 1, -1 \dots\}$

   El término general es $a_n = (-1)^n$. Es geométrica de razón $r = -1$.

9. La sucesión de Fibonacci, definida así: los dos primeros términos son 1 y los demás se obtienen sumando los dos anteriores.

   $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots\}$

   Existe término general, pero es complicado. La fórmula recursiva es:

$$F_n = \begin{cases} 1 & n \leq 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

10. La sucesión de los números triangulares donde el primero es 1, el segundo es 1 + 2, el tercero es 1 + 2 + 3...

    $\{1, 3, 6, 10, 15, 21 \dots\}$

    El término general es:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

11. La sucesión de los factoriales de los números naturales mayores que cero: 1!, 2!, 3!, 4!... Es decir: 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$...

    $\{1, 2, 6, 24, 120, 720 \dots\}$

$$a_n = n!$$

12. La sucesión de los recíprocos de los factoriales:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120} \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

13. La sucesión del número de letras que tiene el nombre del número en español: uno (3), dos (3), tres (4), cuatro (6), cinco (5), seis (4), siete (5)...

    $\{3, 3, 4, 6, 5, 4, 5 \dots\}$

14. La sucesión con término general:

$$a_n = \frac{n-1}{n+3}$$

15. La sucesión con término general:

$$a_n = n \cdot 2^n$$

16. La sucesión con término general:

$$a_n = n + 2^n$$

17. La sucesión con término general:

$$a_n = \ln n$$

18. La sucesión con término general:

$$a_n = n^n$$

19. La sucesión con término general:

$$a_n = 2^{\frac{1}{n}}$$

20. La sucesión con término general:

$$a_n = (n \cdot \pi)^{n^2+n}$$

Es fácil ser creativo como respuesta a esta pregunta.

9. ¿Qué fenómenos están relacionados con las progresiones geométricas?

Las progresiones geométricas tienen una estrecha relación con las funciones exponenciales. Por lo tanto, se aplican en contextos similares.

- crecimiento exponencial de una población de bacterias

  Al principio tenemos una bacteria que se divide en 2, que a su vez se dividen en 2 para dar 4...

  2, 4, 8, 16...

- decrecimiento exponencial en la desintegración radiactiva

  Al principio tenemos, por ejemplo, 1000000 isótopos que al cabo de un tiempo se convierten en la mitad (500000), que se convierten en la mitad (250000)...

- el interés compuesto

10. ¿Qué es una sucesión? ¿Y una sucesión recurrente/recursiva?

Una **sucesión** se puede definir:

- *Informalmente*:

  Una sucesión numérica es un conjunto ordenado de números.

- *Formalmente*:

  Una sucesión es una aplicación de $\mathbb{N}^*$ (es decir, $\mathbb{N} - \{0\}$, los números naturales excepto el cero) en otro conjunto A.

$$\boxed{\begin{array}{llll} a: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & A \\ & n & \longmapsto & a_n \end{array}}$$

Una sucesión recurrente/recursiva es aquella en la que se pueden calcular todos los términos usando algunos de los términos anteriores. Son ejemplos de sucesiones recurrentes:

- la sucesión de Fibonacci:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \vee n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

  Los dos primeros son iguales a 1. En otro caso, el término es igual a la suma de los dos términos anteriores.

- el factorial:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- todas las **progresiones aritméticas**

$$a_{n+1} = a_n + d$$

  Cada término es igual al anterior más una diferencia d.

- todas las **progresiones geométricas**

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

  Cada término es igual al anterior por una razón r.

11. Una progresión geométrica cumple $a_1 + a_2 + a_3 = 42$ y $a_4 + a_5 + a_6 = 336$. Encuentra r y a_1.

En cualquier progresión geométrica, tenemos que:

$$a_{n+1} = r \cdot a_n$$

Por lo tanto:

$$a_4 = r \cdot a_3 = r^2 \cdot a_2 = r^3 \cdot a_1$$
$$a_5 = r \cdot a_4 = r^2 \cdot a_3 = r^3 \cdot a_2$$
$$a_6 = r \cdot a_5 = r^2 \cdot a_4 = r^3 \cdot a_3$$

Si sustituimos en:

$$a_4 + a_5 + a_6 = 336$$

obtenemos:

$$r^3 \cdot a_1 + r^3 \cdot a_2 + r^3 \cdot a_3 = 336$$

Sacamos r^3 como factor común:

$$r^3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = 336$$

Pero sabemos que la suma entre paréntesis es 42:

$$r^3 \cdot 42 = 336$$
$$r^3 = 8$$
$$r = \sqrt[3]{8}$$
$$r = 2$$

En la primera ecuación:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 42$$

podemos hacer:

$$a_1 + r \cdot a_1 + r \cdot a_2 = 42$$
$$a_1 + r \cdot a_1 + r^2 \cdot a_1 = 42$$
$$a_1 \cdot (1 + r + r^2) = 42$$

Sustituyendo el valor de r:

$$a_1 \cdot (1 + 2 + 2^2) = 42$$
$$a_1 \cdot 7 = 42$$
$$a_1 = 6$$

12. Una progresión geométrica cumple que $a_2 - a_3 + a_4 = 105$ y $a_5 - a_6 + a_7 = 2835$. Encuentra la razón r y el primer término a_1.

Se nos dan las condiciones siguientes:

$$a_2 - a_3 + a_4 = 105$$
$$a_5 - a_6 + a_7 = 2835$$

Como en cualquier progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Usando eso, pueden reescribirse las ecuaciones:

$$a_1 \cdot r - a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = 105$$
$$a_1 \cdot r^4 - a_1 \cdot r^5 + a_1 \cdot r^6 = 2835$$

Si seguimos con el mismo procedimiento:

$$a_1 \cdot (r - r^2 + r^3) = 105$$
$$r^3 \cdot a_1 \cdot (r - r^2 + r^3) = 2835$$

La primera ecuación nos permite sustituir parte del lado izquierdo de la segunda:

$$r^3 \cdot 105 = 2835$$
$$r^3 = \frac{2835}{105}$$
$$r^3 = 27$$
$$r = 3$$

Sustituyendo este valor en la primera:

$$a_1 \cdot (3 - 3^2 + 3^3) = 105$$

$$a_1 \cdot 21 = 105$$
$$a_1 = \frac{105}{21}$$
$$a_1 = 5$$

13. Una progresión aritmética cumple que $a_2 - a_3 + a_4 = 11$ y $a_5 - a_6 + a_7 = 20$. Encuentra la diferencia d y el primer término a_1.

Se nos dan las condiciones siguientes:

$$a_2 - a_3 + a_4 = 11$$
$$a_5 - a_6 + a_7 = 20$$

Como en cualquier progresión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Usando eso, pueden reescribirse las ecuaciones:

$$a_1 + d - (a_1 + 2d) + a_1 + 3d = 11$$
$$a_1 + 4d - (a_1 + 5d) + a_1 + 6d = 20$$

Simplificando:

$$a_1 + 2d = 11$$
$$a_1 + 5d = 20$$

Si a la segunda ecuación le restamos la primera:

$$(a_1 + 5d) - (a_1 + 2d) = 20 - 11$$

$$5d - 2d = 9$$

$$3d = 9$$

$$d = 3$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$a_1 + 2 \cdot 3 = 11$$

$$a_1 + 6 = 11$$

$$a_1 = 5$$

14. Tres alumnos de un instituto bilingüe ven a uno de sus profesores hablando con una mujer en la calle antes de llegar al instituto. Llegan a la conclusión de que el profesor tiene novia y, al llegar al instituto a las 8:00, empiezan a decírselo a otros alumnos. Cada alumno se lo dice solamente a 3 personas que no lo sabían cada 20 minutos. Si hay 768 alumnos en el instituto, ¿a qué hora lo sabrán todos los alumnos?

En el momento inicial, solamente 3 personas creen saber que el profesor tiene novia.

$$P_1 = 3$$

Al cabo de veinte minutos, lo saben esas 3 personas y $3 \cdot 3$ personas más (porque cada una de las tres personas lo ha dicho a otras tres):

$$P_2 = P_1 + 3 \cdot P_1$$

$$P_2 = 3 + 3 \cdot 3$$

Obviamente podemos escribir esto de la siguiente manera:

$$P_2 = 4 \cdot P_1$$

$$P_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

Al cabo de otros 20 minutos, se repite el proceso:

$$P_3 = P_2 + 3 \cdot P_2$$

$$P_3 = 4 \cdot P_2$$

Como se ve, es una **progresión geométrica** de razón 4. Por lo tanto, la fórmula es:

$$P_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Ahora bien, si hay 768 alumnos en el instituto:

$$768 = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\frac{768}{3} = 4^{n-1}$$
$$256 = 4^{n-1}$$

Podemos factorizar 256:

$$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

La factorización de 256 es:

$$256 = 2^8$$

Por lo tanto:

$$2^8 = 4^{n-1}$$

Y al factorizar 4:

$$2^8 = \quad {2^2}^{\ n-1}$$

$$2^8 = 2^{2n-2}$$

Como las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales:

$$8 = 2n - 2$$

$$10 = 2n$$
$$n = 5$$

Como con cada nuevo valor de n, han pasado 20 minutos, tenemos:

$$5 \cdot 20 = 100$$

Sin embargo, el primer valor de n correspondía a las 8:00. Por lo que no debemos contabilizarlo:

$$100 - 20 = 80$$

80 minutos son 1 hora y 20 minutos. **¡Todos los alumnos creen que el profesor tiene novia a las 9:20!**

(Días después, los alumnos descubrieron que la mujer con la que hablaba el profesor era su prima, no su novia.)

15. Tres personas contraen una enfermedad infectocontagiosa sin ser conscientes de ello el día anterior a volver a su pueblo. Durante el primer día de enfermedad, cada uno de ellos contagia a otras 3 personas. Después del primer día, dejan de ser contagiosos y los nuevos infectados contagian a la misma cantidad de gente (3 personas cada uno). Si el pueblo tiene 120 habitantes, ¿cuánto tarda en infectarse toda su población?

Inicialmente, el número de infectados es 3:

$$3$$

Pero ya el primer día se infectan 3 personas más por cada uno de los tres infectados originalmente:

$$3 + 3 \cdot 3$$
$$3 + 9$$
$$12$$

de los cuales, 9 son nuevos infectados.

El segundo día los tres primeros infectados dejan de ser infecciosos. Solamente los 9 que se infectaron el primer día son infecciosos. Estos 9 infectarán a $9 \cdot 3$ personas:

$$12 + 3 \cdot 9$$
$$12 + 27$$
$$39$$

de los cuales, 27 son nuevos infectados. Que producirán $3 \cdot 27$ infectados el siguiente día...

El total de infectados en cualquier momento es:

$$3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \dots$$

es decir:

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots$$

Que es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 3 y primer término 3. La fórmula de la progresión es:

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$$
$$a_n = 3^n$$

La fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

donde r es la razón. En nuestro caso:

$$S_n = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$$
$$S_n = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2}$$

La suma alcanza la población entera cuando es 120:

$$120 = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2}$$
$$240 = 3 \cdot (3^n - 1)$$
$$80 = 3^n$$
$$81 = 3^n$$
$$n = 4$$

Si $n = 1$ es el día en el que los 3 primeros se infectan antes de llegar al pueblo, $n = 4$ es el tercer día después de la llegada de los tres.

16. Demuestra que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{10^n} = \frac{1}{89}$$

donde F_n es la sucesión definida por:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

La sucesión F_n es una variante de la sucesión de Fibonacci.

Escribimos sus primeros términos:

$$\{F_n\}_0^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots\}$$

A la suma infinita del enunciado la llamaremos S:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{10^n}$$

Escribiéndola explícitamente:

$$S = \frac{0}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \ldots$$

Su dividimos entre 10:

$$\frac{S}{10} = \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \dots$$

Ahora podemos restar ambas expresiones:

$$\begin{aligned} S - \frac{S}{10} &= \\ = \frac{0}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots + \\ - \quad \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{9S}{10} = \frac{0}{10^1} + \frac{1-0}{10^2} + \frac{1-1}{10^3} + \frac{2-1}{10^4} + \frac{3-2}{10^5} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{9S}{10} &= \frac{0}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots \\ \frac{9S}{10} &= \frac{1}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots \end{aligned}$$

Podemos sacar como factor común $1/10^2$:

$$\frac{9S}{10} = \frac{1}{10^2} \cdot \quad 1 + \frac{0}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

Pero lo que hay entre paréntesis es $1 + S$:

$$\begin{aligned} \frac{9S}{10} &= \frac{1}{10^2} \cdot (1 + S) \\ \frac{9S}{10} &= \frac{1}{100} + \frac{S}{100} \\ \frac{9S}{10} - \frac{S}{100} &= \frac{1}{100} \\ \frac{90S}{100} - \frac{S}{100} &= \frac{1}{100} \\ \frac{89S}{100} &= \frac{1}{100} \\ S &= \frac{1}{89} \end{aligned}$$

Como queríamos demostrar.

Este resultado es especialmente bonito porque indica que la representación decimal 1/89 indica los distintos términos de la sucesión de Fibonacci. El problema radica en que, a partir de cierto término, los términos de la sucesión de Fibonacci tienen más de una cifra y los dígitos se mezclan.

Límites de sucesiones

Este capítulo no se suele considerar parte del temario de maturita.

El infinito no es intuitivo. El infinito no se comporta como un número cualquiera. Y, por lo tanto, cuando trabajas con él, debes intentar no dejarte llevar por la intuición cotidiana que has desarrollado trabajando con números reales. Debes aprender que las reglas para el infinito son *distintas*. Es precisamente en el caso de los límites cuando mejor se ve que es así.

A través de ejemplos, vas a aprender a calcular límites finitos de sucesiones ilimitadas[42].

El límite infinito de una sucesión $\{a_n\}$ se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

y se puede leer:

- o *"el límite de a_n cuando n tiende a infinito"*
- o *"el límite, cuando n tiende a infinito, de a_n"*

Es decir, $n \to \infty$ se lee *"cuando n tiende a infinito"*. Y nos dice que n crece sin límite alguno.

Pero cuando n crece de forma ilimitada, los términos de la sucesión pueden:

- Acercarse cada vez más a un valor real. En ese caso, si

  $$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = k \in \mathbb{R}}$$

  decimos que $\mathbf{a_n}$ es **convergente** y que *"a_n converge a k"*.
- Acercarse cada vez más a $-\infty$ o ∞. En ese caso, si

  $$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \notin \mathbb{R}}$$

  decimos que $\mathbf{a_n}$ es **divergente** y que *"a_n diverge a $\pm\infty$"*.
- No acercarse ni a $\pm\infty$ ni a un valor real. En ese caso, si

  $$\boxed{\nexists \lim_{n\to\infty} a_n}$$

  decimos que el *"límite no existe"* o que *"la sucesión no tiene límite cuando n tiende a infinito"*

Hay otras convenciones a la hora de clasificar las sucesiones según sus límites infinitos. Hay quienes llaman *convergentes* a las que tienden a un número real, a más infinito o a menos infinito y llaman *divergentes* a las que no tienen un límite. Para nosotros, las *convergentes* son las que tienden a un número real, las *divergentes* son las que tienden a más infinito o menos infinito y *sin límite* a las que no tienen límite definido.

[42] Recuerda que una sucesión es *limitada* o *finita* cuando está formada por un número finito de términos y que es *ilimitada* o *infinita* si está formada por un número infinito numerable de términos.

1.

$$\lim_{n\to\infty} 2 =$$

Es una sucesión constante, en la que todos los términos valen 2. Por lo tanto, su límite es también el número 2:

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

No debes dejarte engañar por la aparición de una raíz cuadrada. Esa sucesión sigue siendo una sucesión constante. Todos los términos valen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y, por lo tanto, el límite es ese número[43].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \ln 2 =$$

Aunque aparece un logaritmo, en el interior del logaritmo hay una constante. Así que volvemos a tener una sucesión constante y el límite es el logaritmo neperiano[44] de 2:

$$\lim_{n\to\infty} \ln 2 = \ln 2$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} n =$$

Dentro del límite tenemos una expresión potencial (la variable está elevada a un número natural). Y es evidente que cada término de la sucesión es más grande que el anterior y no se acerca a un número real, sino que se acerca a más infinito.

Es decir, la sucesión diverge a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 =$$

[43]Que es el seno (y el coseno) de 45°. Es decir, de $\pi/4$.

[44]Recuerda que el logaritmo neperiano o natural de un número es el logaritmo en base e de ese número. Es decir $\ln m$ es el número al que hay que elevar e para que sea igual a m.

Como en el caso anterior, la sucesión diverge a infinito por razones similares:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} 2n =$$

Ahora tenemos un monomio (una constante multiplicada por una expresión potencial). Como el coeficiente es positivo ($2 > 0$), esta sucesión también diverge a más infinito:

$$\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5} \cdot n^2 \right) = \infty$$

Porque tenemos un monomio con coeficiente positivo.

8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n}{2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-5}{2} \cdot n \right) = -\infty$$

Porque tenemos un monomio con coeficiente negativo.

9.

$$\lim_{n\to\infty} (5n+3) =$$

Aquí tenemos el límite de un polinomio. El polinomio tiene dos términos: el de grado 1 ($5n$) y el de grado 0 (3). El coeficiente líder es 5.

Sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} 5n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

Es lógico suponer que:

$$\lim_{n\to\infty} (5n+3) = \infty + 3 = \infty$$

10.

$$\lim_{n\to\infty} \quad 7n^2 + 5n + 3 \quad =$$

De nuevo tenemos el límite de un polinomio. En este caso, el polinomio tiene 3 términos, su coeficiente líder es 7 y el término independiente es 3.

$$\lim_{n\to\infty} \quad 7n^2 + 5n + 3 \quad =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 7n^2 + \lim_{n\to\infty} 5n + \lim_{n\to\infty} 3 =$$

$$= \infty + \infty + 3 = \infty$$

Suma de infinitos

En cierto sentido, hay una regla intuitiva cuando sumamos infinitos:

$$\boxed{\infty + \infty = \infty}$$

Y, como has observado, si sumamos una constante positiva a infinito, el resultado sigue siendo infinito:

$$\boxed{\infty + k = \infty, \ \forall k > 0}$$

Incluso si *restamos* una constante positiva a infinito, el resultado sigue siendo infinito:

$$\boxed{\infty - k = \infty, \ \forall k > 0}$$

11.

$$\lim_{n\to\infty} (5n - n) =$$

Otra vez tenemos un polinomio. Pero ahora hay un signo menos.

$$\lim_{n\to\infty} (5n - n) = \lim_{n\to\infty} (5n) - \lim_{n\to\infty} (n) = \infty - \infty$$

Es muy tentador decir que eso es 0. Al fin y al cabo, 3 - 3 es cero, 1/2 - 1/2 es cero, e - e es cero...

Sin embargo, el infinito a veces no se comporta como esperamos. A veces no se comporta como nuestra intuición nos sugiere. Por eso es importante estar alerta cuando aparecen infinitos.

Observa que podemos hacer la resta en el límite original:

$$\lim_{n\to\infty} (5n - n) = \lim_{n\to\infty} 4n = \infty$$

Es decir, **en este caso**, $\infty - \infty$ es ∞.

12.

$$\lim_{n\to\infty} (5n - 6n) =$$

Es un caso parecido al anterior:

$$\lim_{n\to\infty}(5n-6n)=\lim_{n\to\infty}(5n)-\lim_{n\to\infty}(6n)=\infty-\infty$$

En el caso anterior, $\infty-\infty$ es ∞. ¿Ocurre lo mismo en este caso? Si hacemos la resta:

$$\lim_{n\to\infty}(5n-6n)=\lim_{n\to\infty}-n=-\infty$$

Es decir, **en este caso**, $\infty-\infty$ es $-\infty$.

13.

$$\lim_{n\to\infty}(5n-5n)=$$

Como en los dos casos anteriores, podríamos decir que tenemos $\infty-\infty$. Pero, nuevamente si hacemos la resta:

$$\lim_{n\to\infty}(5n-5n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

Es decir, **en este caso**, $\infty-\infty$ es 0.

Definición de indeterminación

En tres límites distintos, la misma operación con infinitos tiene resultados diferentes.

Una operación con límites es una **indeterminación** cuando el resultado de la operación depende del límite concreto.

- $\infty+\infty$ no es una indeterminación porque el resultado es siempre ∞
- $\infty-\infty$ sí es una indeterminación porque el resultado puede ser diferente en límites diferentes.

Existen otras indeterminaciones que descubrirás en este tema.

14.

$$\lim_{n\to\infty}(2\cdot(2n+1))=$$

Aquí podemos asumir que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}(2\cdot(2n+1))=$$

$$=\quad\lim_{n\to\infty}2\quad\cdot\quad\lim_{n\to\infty}(2n+1)\quad=$$

$$=2\cdot\infty=\infty$$

De hecho, si desarrollas el producto:

$$\lim_{n\to\infty}(2\cdot(2n+1))=\lim_{n\to\infty}(4n+2)=\infty$$

15.

$$\lim_{n\to\infty} \left(3n^2+2\right)\cdot(2n+1) \quad =$$

Aquí podemos asumir que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3n^2+2\right)\cdot(2n+1) \quad =$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty}(3n^2+2) \quad \cdot \quad \lim_{n\to\infty}(2n+1) \quad =$$
$$= \infty\cdot\infty = \infty$$

Puedes justificar que es así desarrollando la multiplicación:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3n^2+2\right)\cdot(2n+1) \quad =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad 6n^3+3n^2+4n+2 \quad = \infty$$

16.

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2\cdot(2n+1)\right) =$$

Aquí podemos asumir que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2\cdot(2n+1)\right) =$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty} -2 \quad \cdot \quad \lim_{n\to\infty}(2n+1) \quad =$$
$$= -2\cdot\infty = -\infty$$

Puedes justificar este resultado si desarrollas el producto, como en los ejemplos anteriores.

17.

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2n\cdot(2n+1)\right) =$$

Aquí podemos asumir que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2n\cdot(2n+1)\right) =$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty} -2n \quad \cdot \quad \lim_{n\to\infty}(2n+1) \quad =$$
$$= -\infty\cdot\infty = -\infty$$

Puedes justificar este resultado si desarrollas el producto, como en los ejemplos anteriores.

18.

$$\lim_{n\to\infty} \quad -2n\cdot(-3n^2) \quad =$$

$$= -\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

Y puedes justificar el resultado del mismo modo que en los casos anteriores:

$$\lim_{n\to\infty} \ -2n \cdot (-3n^2) \ = \lim_{n\to\infty} 6n^3 = \infty$$

Producto de infinitos

Puedes imaginar que el producto de infinitos no es una indeterminación:

$$\boxed{\infty \cdot \infty = \infty}$$

$$\boxed{k \cdot \infty = \infty,\ \forall k > 0}$$

El signo del resultado depende de los signos de los dos términos del producto según las reglas habituales:

- $+ \cdot + = +$
- $+ \cdot - = -$
- $- \cdot + = -$
- $- \cdot - = +$

19.

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - 3n) =$$

Aquí puedes ver que si separamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} (n^2) - \lim_{n\to\infty} (3n) = \infty - \infty$$

hemos llegado a la indeterminación $\infty - \infty$. ¿Cómo resolvemos esta indeterminación?

Podemos sacar factor común una n; todos los términos contienen n:

$$= \lim_{n\to\infty} ((n) \cdot (n-3)) =$$

$$= \ \lim_{n\to\infty} n \ \cdot \ \lim_{n\to\infty} (n-3) \ =$$

$$= \infty \cdot \infty = \infty$$

20.

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^3 + n) =$$

Aquí se llega a la indeterminación $-\infty + \infty$. Pero podemos resolverla de manera similar al caso anterior:

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^3 + n) = \lim_{n\to\infty} \ n \cdot (-2n^2 + 1) \ =$$

$$= \ldots = -\infty$$

Límites infinitos de polinomios

Si usas razonamientos similares para otros casos, descubrirás que **el límite infinito de un polinomio solamente depende del coeficiente líder**.

Si, en un polinomio $p(n)$, el coeficiente líder es k:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p(n) = k \cdot \infty}$$

Es decir:

- si el coeficiente líder es positivo, el polinomio tiende a infinito cuando ene tiende a infinito
- si el coeficiente líder es negativo, el polinomio tiende a menos infinito cuando ene tiende a infinito

Indeterminación: infinito - infinito

Como has visto, infinito menos infinito es una indeterminación.

Pero también son el mismo tipo de indeterminación las siguientes operaciones:

$$\boxed{\textbf{IND.}: \begin{cases} \infty - \infty \\ (-\infty) - (-\infty) \\ (-\infty) + \infty \\ \infty + (-\infty) \end{cases}}$$

Aunque, como ves, todas se pueden convertir en infinito menos infinito eliminando los paréntesis y reordenando.

¿Cómo se resuelven? Ya has visto cómo se resuelven en algunos casos, más adelante verás aparecer este tipo de indeterminación de nuevo y descubrirás otras maneras de resolverla.

21.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} =$$

La raíz cuadrada de un número crece si el número crece. Eso implica que este límite es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

22.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} =$$

La raíz cúbica de un número crece si el número crece. Se comporta de manera parecida a la raíz cuadrada. Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = \infty$$

23.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n} =$$

El límite de la raíz cuarta de ene también es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n} = \infty$$

24.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^2+2n+3} =$$

Este límite de una raíz quinta de un polinomio también tiende a infinito; el radicando (lo que hay dentro de la raíz) tiende a infinito cuando n tiende a infinito. Y, hablando sin exactitud, *"la raíz de infinito es infinito"*:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^2+2n+3} = \infty$$

Límites infinitos de raíces de polinomios

Como ves, el límite infinito de la raíz de un polinomio es infinito. No importa que el índice de la raíz sea 2 (raíz cuadrada), 3 (raíz cúbica), 4 (raíz cuarta), 5 (raíz quinta)...

Eso sí, para que tenga sentido, el radicando (lo que hay dentro de la raíz) debe ser siempre positivo para cualquier valor de n. Por lo tanto, el coeficiente líder del polinomio no podrá ser negativo.

25.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$

Podemos suponer que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{1}{\infty}$$

Si repartes un caramelo entre infinitos niños, puedes decir que a cada niño le tocan 0 caramelos. Si repartes (divides) algo finito en un número grandísimo de partes, cada parte será muy muy pequeña. En el infinito, podemos decir que es cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

26.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{n} = 0$$

No importa si el numerador es negativo; el límite sigue siendo 0 en el infinito.

27.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{-n} = 0$$

No importa si el denominador tiende a menos infinito; el límite sigue siendo 0 en el infinito.

De hecho, si te das cuenta, es el mismo límite que el anterior.

28.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n-4} = 0$$

No importa si el numerador es un polinomio que tiende a infinito. El límite sigue siendo cero.

29.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{-3n^3+5n^2-4n} = 0$$

No importa si el numerador es un polinomio que tiende a menos infinito. El límite sigue siendo cero.

30.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

No importa si el numerador es una raíz. El límite sigue siendo cero.

Límite de 1 entre infinito

Por lo tanto, podemos asumir que dividir un real entre infinito (o entre menos infinito), no es una indeterminación. Siempre tenemos el mismo resultado: cero.

$$\boxed{\frac{1}{\pm\infty} = 0}$$

31.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} =$$

Si aquí separamos los límites:

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(2n+1)}{\lim_{n\to\infty}(3n-1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

¿Es uno? ¿O es una indeterminación?

En este caso, como el grado del polinomio de arriba es igual al de abajo. Podemos hacer la división antes de hacer el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad \frac{2}{3} + \frac{5/3}{3n-1} \quad =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad \frac{2}{3} \quad + \lim_{n\to\infty} \quad \frac{5/3}{3n-1} \quad =$$

$$= \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

Otro modo de justificar este límite es el siguiente:

- $n \to \infty \Rightarrow (2n+1) \to 2n$
- $n \to \infty \Rightarrow (3n-1) \to 3n$

Por lo tanto, podemos hacer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Como intuyes, **infinito entre infinito es una indeterminación**.

Indeterminación: infinito entre infinito

Si tenemos un cociente entre infinitos, tenemos una indeterminación:

$$\boxed{\textbf{IND.} : \frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$$

32.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n-1} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ IND.} =$$

Tenemos una indeterminación. Podemos resolverla fácilmente de varias maneras:

- Modo 1: hacemos la división antes de hacer el límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \quad 1 + \frac{4}{2n-1} \quad =$$

$$= 1 + \frac{4}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

- Modo 2: usamos la equivalencia de límites.

  Como cuando n es muy grande, 2n + 3 es 2n y 2n - 1 es 2n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

- Modo 3: dividimos el numerador y el denominador entre la potencia más grande de n. (Equivale a sacar factor común y simplificar.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{n}}{\frac{2n-1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{2+\frac{3}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}} =$$

$$= \frac{2+0}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

33.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n-2} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ IND.} =$$

Tenemos una indeterminación. Podemos resolverla fácilmente de varias maneras:

- Modo 1: hacemos la división antes de hacer el límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad n-2+\frac{3}{n-2} \quad =$$

$$= \infty + \frac{3}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

- Modo 2: usamos la equivalencia de límites.

  Como cuando n es muy grande, n^2-1 es n^2 y $n-1$ es n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

- Modo 3: dividimos el numerador y el denominador entre la potencia más grande de n. (Equivale a sacar factor común y simplificar.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{n-2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{0}$$

Vamos a añadir un signo + como exponente a este cero, para subrayar que siempre es positivo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

34.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2-1} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ IND.} =$$

Tenemos una indeterminación. Podemos resolverla fácilmente de varias maneras. Pero ahora no podemos hacer la división:

- Modo 1: usamos la equivalencia de límites.

  Como cuando n es muy grande, $n-1$ es n y n^2-1 es n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Modo 2: dividimos el numerador y el denominador entre la potencia más grande de n. (Equivale a sacar factor común y simplificar.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-2}{n^2}}{\frac{n^2-1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \ldots = 0$$

Límites infinitos de fracciones algebraicas

Hay un modo relativamente sencillo de resolver límites infinitos de fracciones algebraicas.

Recuerda que:

- una **fracción algebraica** es un cociente de dos polinomios
- y una **función racional** es un cociente de dos funciones polinómicas

Es decir, son la misma cosa, pero:

- en álgebra las llamamos *fraciones algebraicas*
- y en análisis[45] las llamamos *funciones racionales*

Si el polinomio $P(n)$ tiene un coeficiente líder p y un grado g_P y el polinomio $Q(n)$ tiene un coeficiente líder q y un grado g_Q:

[45] La rama de las matemáticas que estudia las funciones.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} p/q & \text{si} \quad g_P = g_Q \\ p/q \cdot \infty & \text{si} \quad g_P > g_Q \\ 0 & \text{si} \quad g_P < g_Q \end{cases}}$$

Con esta pequeña regla, se puede llegar fácilmente al resultado del límite infinito de una fracción algebraica.

35.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-n+2} =$$

El grado del denominador es mayor que el grado del numerador y, por lo tanto, el límite es 0:

$$= 0$$

36.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n+1}{2n^2-n+2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n+1}{2n^2-n+2} =$$

El grado del numerador es mayor que el grado del denominador y, por lo tanto, el límite es:

$$= \frac{3}{2} \cdot \infty = \infty$$

37.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n+1}{3n^3+n^2+2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n+1}{3n^3+n^2+2n} =$$

El grado del numerador es mayor que el grado del denominador y, por lo tanto, el límite es:

$$= \frac{2}{3} \cdot \infty = \infty$$

38.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n+1}{3n^3+5n^2+7n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n+1}{3n^3+5n^2+7n} =$$

El grado del numerador es igual que el grado del denominador y, por lo tanto, el límite es:

$$= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

39.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^3 - 2n^4 + 1}{3n^3 + n^2 + 2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^3 + -2n^4 + 1}{3n^3 + n^2 + 2n} =$$

El grado del numerador es mayor que el grado del denominador y, por lo tanto, el límite es:

$$= \frac{-2}{3} \cdot \infty = -\infty$$

40.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n-1} =$$

Aquí podemos separar el límite en dos:

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1} =$$

$$= \infty + \infty = \infty$$

41.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} =$$

Aquí podemos separar el límite en dos:

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1} =$$

$$= \infty - \infty \textbf{ IND.}$$

Tenemos varios modos de resolver la indeterminación. Uno de ellos es aproximando:

- Cuando $n \to \infty$, $n + 2 \to n$.
- Cuando $n \to \infty$, $n - 2 \to n$.

Por lo tanto, el límite anterior equivale a:

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

42.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n-1} =$$

Volvemos a tener una indeterminación ∞ - ∞. Pero si tenemos:

- Cuando $n \to \infty$, $n^2 + 2 \to n^2$.
- Cuando $n \to \infty$, $n - 2 \to n$.

Por lo tanto, el límite anterior equivale a:

$$= \lim_{n\to\infty} \ n - \sqrt{n} \ =$$

¡Pero sigue siendo una indeterminación!

Pero, ¿qué crece más rápidamente? ¿n o $\sqrt{n}$?

Piensa que n^3 crece más rápido que n^2. Y n^2 crece más rápido que n. Como $\sqrt{n}$ es igual a $n^{1/2}$, es lógico suponer que la raíz crece más despacio que una potencia con exponente natural positivo. Por lo tanto:

$$= \infty$$

Crecimiento de potencias con exponente racional positivo

Como has visto, si tenemos que ordenar lo rápido que crecen potencias con exponente racional cuando n tiende a cero, podríamos tener esto (abusando del lenguaje):

$$\ldots > n^3 > n^2 > n > n^{1/2} > n^{1/3} > \ldots$$

De hecho, puedes imaginar que es cierto lo siguiente (si abusamos nuevamente del lenguaje):

$$\ldots > n^2 > n^{3/2} > n > \ldots$$

Es decir, solamente tenemos que comparar el tamaño de los exponentes. El que tenga el exponente racional positivo mayor, tiende más rápido a infinito.

43.

$$\lim_{n\to\infty} \ln n =$$

El logaritmo natural (o logaritmo neperiano) es una función creciente. Crece muy lentamente, pero se acerca a infinito cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Recuerda que el logaritmo natural de un número es el logaritmo en base e de ese número:

$$\ln n \equiv \log_e n$$

44.

$$\lim_{n\to\infty} \log n =$$

El logaritmo decimal (o logaritmo en base 10) es una función creciente. Crece muy lentamente, pero se acerca a infinito cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$$

Recuerda que el logaritmo decimal de un número es el logaritmo en base 10 de ese número:

$$\log n \equiv \log_{10} n$$

45.

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 n =$$

El logaritmo en base 2 es una función creciente. Crece muy lentamente, pero se acerca a infinito cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$$

46.

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} n =$$

El logaritmo en base 1/2 es una función decreciente. Y tiende a menos infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} n = -\infty$$

Esto se puede demostrar usando las propiedades del cambio de base de los logaritmos:

$$log_{\frac{1}{2}} n = \frac{\log_a n}{\log_a \frac{1}{2}}$$

El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos:

$$= \frac{\log_a n}{\log_a 1 - \log_a 2} =$$

El logaritmo de 1 en cualquier base es 0:

$$= \frac{\log_a n}{-\log_a 2} =$$

Si cogemos base 2:

$$= \frac{\log_2 n}{-\log_2 2} = \frac{\log_2 n}{-1} = -\log_2 n$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} n = \lim_{n\to\infty} -\log_2 n = -\infty$$

Límites infinitos de logaritmos

$$\lim_{n\to\infty} (\log_b n) = \begin{array}{ccc} +\infty & \text{si} & b > 1 \\ -\infty & \text{si} & b < 1 \end{array}$$

47.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

La sucesión $\{(-1)^n\}$ es {-1, 1, -1, 1, -1, 1. . . }. Como ves, no podemos decir que tiende a -1 o que tiende a 1. Por lo tanto, esta sucesión no es ni convergente ni divergente. El límite **no existe**:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Recuerda: no todos los límites existen

Recuerda que no todos los límites existen.

Es fácil olvidar esto.

48.

$$\lim_{n\to\infty} (-2)^n$$

$$\nexists \lim_{n\to\infty} (-2)^n$$

Puedes ver que esto es así porque la sucesión está formada los siguientes términos: -2, 9, -16, 25, -36, 49, -64, 81. . .

Como ves, los términos impares se acercan a - infinito y los términos pares se acercan a infinito. Por lo tanto, el límite no existe.

Sucesiones acotadas y no acotadas

En los dos ejemplos anteriores, hay una diferencia fundamental.

- La sucesión con término general $(-1)^n$ siempre está entre dos valores:

  $$(-1)^n \in [-1, 1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Por lo tanto decimos que tiene cota superior y cota inferior. Decimos que está acotada superiormente e inferiormente. O simplemente decimos que está **acotada**.

- La sucesión con término general $(-2)^n$ no está siempre entre dos valores fijos.

  Por lo tanto, la sucesión no está acotada. (En este caso, ni superior, ni inferiormente.)

Esto será importante en algunos ejemplos posteriores.

49.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} =$$

Puedes ver que la sucesión está formada por: -1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5... Los términos en posiciones impares son todos negativos, pero tienden a 0. Los términos en posiciones pares son todos positivos, pero tienden también a cero.

La sucesión converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

En general, cuando tenemos una **sucesión acotada** multiplicada por una sucesión que tiende a cero, el límite tiende a cero. O si tenemos una sucesión acotada dividida entre una sucesión que tiende a infinito, el límite tiende a cero.

50.

$$\lim_{n\to\infty} 2^n =$$

Es fácil ver que esta sucesión diverge a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

51.

$$\lim_{n\to\infty} e^n =$$

Es fácil ver que esta sucesión diverge a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$$

52.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}^{\;n} =$$

Cuando la base es menor que 1 y el exponente tiende a infinito, el límite se acerca a 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}^{\;n} = 0$$

53.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} =$$

Este límite equivale a:

$$= \lim_{n\to\infty} (2^{-1})^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

que es el límite anterior:

$$= 0$$

Límites infinitos de exponenciales

Como ves:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad 1 < a \\ 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}}$$

Y, abusando del lenguaje:

$$\boxed{a^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad 1 < a \\ 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 < a \\ \infty & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}}$$

54.

$$\lim_{n\to\infty} 1^n =$$

Tenemos una exponencial nuevamente, pero en esta ocasión, la base es 1. La base no es mayor que 1 y no es menor que 1. ¿Qué ocurre ahora?

Es fácil ver que la sucesión es 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1... Es decir, es la sucesión constante igual a 1.

Por lo tanto, este límite es:

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Indeterminación: 1 elevado a infinito

Pero en otros casos, 1^{∞} no es 1. 1^{∞} es una indeterminación:

$$\boxed{\textbf{IND.} : 1^{\infty}}$$

¿Cómo se resuelve este tipo de indeterminaciones?

Podemos hacer:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)\cdot b_n}}$$

55.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = L$$

La base tiende a 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

y el exponente tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

Por lo tanto tenemos la indeterminación 1^{∞}. Y podemos resolverla del siguiente modo:

$$\lim_{n\to\infty}\left({\color{blue}1+\frac{1}{n}}\right)^{\color{red}n}=L$$

$$L=e^{l}$$

donde l es:

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\left({\color{blue}1+\frac{1}{n}}\right)-1\right)\cdot {\color{red}n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n=\lim_{n\to\infty}1=1$$

Entonces el límite L es:

$$L=e^{1}=e$$

¡El número e!

El número e

De hecho, la definición del número e es precisamente ese límite:

$$\boxed{e\equiv\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

Si la sucesión es:

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Si calculas el primer término de la sucesión:

$$e_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}=2$$

Y los siguientes:

$$e_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}=2.25$$

$$e_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}=2.\overline{370}$$

$$\dots$$

$$e_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2.7048138\dots$$

$$\dots$$

$$e_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2.71692\dots$$

$$\dots$$

Puedes ver que se acerca al valor decimal que da tu calculadora científica:

$$e \approx 2.718281828459$$

Cosas que debes recordar del número e:

1. **Es aproximadamente 2.7.**

   No es necesario que sepas muchos decimales de e, pero sí aproximadamente cuál es su valor. Si sabes que e es aproximadamente 2 coma 7, es suficiente.

2. **Es un número real irracional.**

   - Es decir, pertenece al conjunto de los irracionales:

     $$e \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

   - Es decir, no es racional:

     $$e \notin \mathbb{Q}$$

   - Es decir, no se puede escribir como fracción.
   - Es decir, no tiene fracción generatriz.
   - Es decir, su representación decimal (n-aria, con n = 10) no es ni exacta ni periódica.
   - Es decir, sus representaciones n-arias no son ni exactas ni periódicas.
   - Es decir, es irracional como $\sqrt{2}$, $\ln 2$ y π.

3. **Es un irracional trascendente.**

   - Es decir, no es solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.
   - Es decir, no es un irracional algebraico.

     $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico porque es solución de una ecuación polinómica con coeficientes racionales: $x^2 - 2 = 0$.

   - Es decir, es irracional trascendente como π.

56.

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{n-2}{n+1} \quad ^{n} = L$$

Es fácil ver que al resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ de la base, su límite es igual a 1:

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{n-2}{n+1} \quad = 1$$

Y el exponente tiende a ∞. Por lo tanto, tenemos la indeterminación 1 elevado a infinito.

La resolvemos:

$$L = e^l$$

donde l es:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+1} - 1\right) \cdot n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right) \cdot n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2-(n+1)}{n+1}\right) \cdot n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{n+1} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{n+1} = -3$$

Por lo tanto:

$$L = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

57.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{n+1}\right)^n =$$

Esto no es una indeterminación, porque la base tiende a 2 y el exponente tiende a infinito. Y 2 elevado a infinito es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{n+1}\right)^n = \infty$$

58.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{3n+1}\right)^n =$$

Esto no es una indeterminación, porque la base tiende a 2/3 (que es menor que 1) y el exponente tiende a infinito. Y 2/3 elevado a infinito es cero:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{3n+1}\right)^n = 0$$

59.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

Asumiendo que el argumento del seno (lo que hay dentro) está en radianes[46], podemos ver que los términos de la sucesión son:

$\sin \frac{\pi}{2}$, $\sin \pi$, $\sin \frac{3\pi}{2}$, $\sin 2\pi$, $\sin \frac{5\pi}{2}\ldots$

Que es lo mismo que:

1, 0, -1, 0, 1, 0, - 1, 0. . .

Esta sucesión no converge a un número real ni diverge a más o menos infinito. Es decir, el límite no existe:

[46]Cosa que podemos hacer; no se indican las unidades.

$$\nexists \lim_{n\to\infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

60.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{e^n} =$$

Parecería que, como en el caso anterior, el límite no existe.

Pero, como veías, la parte de arriba (la del seno) está acotada. Es decir, está comprendida entre dos valores. Y la parte de abajo (la de la exponencial) tiende a infinito.

Por lo tanto, el límite es cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{e^n} = 0$$

Crecimiento de potencias, exponenciales y logaritmos

Antes comparamos el crecimiento de potencias con exponente racional.

Ahora podemos comparar también exponenciales y logaritmos.

Como regla general, **EXPONENCIAL** (con base mayor que 1) > **POTENCIA** (con exponente racional) > **LOGARITMO** (con base mayor que 1)

1. ¿Cómo se resuelve una indeterminación infinito partido infinito en un límite como el siguiente?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

donde $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios.

Nos piden el límite cuando n tiende a infinito de una fracción algebraica, es decir, de un cociente de dos polinomios.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\pm\infty}{\infty}$$

Si:

- p = coeficiente líder de $P(n)$
- q = coeficiente líder de $Q(n)$
- g_P = grado de $P(n)$
- g_Q = grado de $Q(n)$

entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} p/q & \text{si} \quad g_P = g_Q \\ p/q \cdot \infty & \text{si} \quad g_P > g_Q \\ 0 & \text{si} \quad g_P < g_Q \end{cases}}$$

Esto se puede:

- ejemplificar con casos concretos.
- justificar de varias maneras distintas tal y como aparece en los ejemplos anteriores

Matemáticas financieras

Usamos el término *"matemáticas financieras"* para las matemáticas relacionadas con las *finanzas*, los *negocios*, el *comercio*, la *hacienda pública*... En general, para todo aquello relacionado con la economía. Y, en particular, para todo lo relacionado con la administración del dinero y el intercambio de dinero entre dos personas.

Pero la verdad es que casi cualquier capítulo del libro tiene matemáticas que se usan en economía. Las funciones son relaciones entre dos magnitudes, como pueden ser los beneficios de una empresa de bombillas y la cantidad de bombillas que produce. Las sucesiones expresan relaciones entre cantidades reales y discretas y en economía, muchas veces hay cantidades discretas, como cuando un capital depende de un número de meses. Y podríamos dar muchos más ejemplos.

La diferencia de este capítulo es precisamente el vocabulario que se usa. Cosas como *capital*, *beneficios*, *préstamo*, *prestamista*, *prestatario*, *interés simple*, *interés compuesto*, *rédito*...

Los conceptos y las leyes financieras que se ven en el instituto son muy básicos y pueden no coincidir exactamente con los que encuentres fuera del instituto. En la *"vida real"*, la ley matemática que especifica las condiciones de cualquier transacción monetaria está especificada en algún tipo de contrato. Aunque esas condiciones suelen estar especificadas en lenguaje *legal* y *financiero* y no en lenguaje *matemático*.

1. Explica la diferencia entre el **interés simple** y el **interés compuesto**.

Vamos a ilustrar la diferencia con un ejemplo: tenemos dos capitales iniciales iguales de 100 euros. El interés es el mismo: 10 % mensual. Pero uno de los intereses es simple y el otro es compuesto.

	simple	compuesto
C_0	100	100

Al cabo de un mes, en ambos casos tenemos que sumar el 10 % del capital inicial al capital inicial:

$$C_1 = C_0 + \frac{10}{100} \cdot C_0$$

	simple	compuesto
C_0	100	100
C_1	110	110

Pero al cabo de dos meses, las cosas son diferentes:

- En el interés simple, sumamos el 10 % del capital **inicial** al capital anterior:

$$C_2 = C_1 + \frac{10}{100} \cdot C_0$$

- En el interés compuesto, sumamos el 10 % del capital **anterior** al capital anterior:

$$C_2 = C_1 + \frac{10}{100} \cdot C_1$$

	simple	compuesto
C_0	100	100
C_1	110	110
C_2	120	121

Es decir: tenemos:

- En el interés simple:
$$C_n = C_0 + \frac{r}{100} \cdot C_0 + \ldots + \frac{r}{100} \cdot C_0$$
Donde el mismo término se repite n veces:
$$C_n = C_0 + n\frac{r}{100} \cdot C_0$$
$$C_n = C_0 \left(1 + n \cdot \frac{r}{100}\right)$$

- En el interés compuesto:
$$C_n = C_0 + \frac{r}{100} \cdot C_0 + \frac{r}{100} \cdot C_1 + \ldots$$
Que lleva a:
$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Desde el punto de vista económico, podemos decir que:

- En el interés simple, el interés **no se capitaliza**.

  Porque los intereses se calculan siempre a partir del capital inicial.

- En el interés compuesto, el interés **sí se capitaliza**.

  Es decir, el interés genera interés.

Desde el punto de vista matemático:

- En el interés simple:
  - los capitales son una **progresión aritmética**
  - los capitales son una **función afín**
- En el interés compuesto:
  - los capitales son una **progresión geométrica**
  - los capitales son una **función exponencial**

2. ¿Cuánto tiempo es necesario para que un capital inicial de 20000 euros se convierta en 30000 euros si el interés simple es de un 5 % anual?

El capital inicial es:

$$C_0 = 20\,000$$

Al cabo de un año, tendrá el capital inicial más el cinco por ciento de ese capital inicial:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_1 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_1 = 20\,000 + 1\,000$$
$$C_1 = 21\,000$$

Al cabo de dos años, tendremos que sumar el capital del año anterior más el cinco por ciento del capital inicial:

$$C_2 = C_1 + C_0 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_2 = 21\,000 + 20\,000 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_2 = 21\,000 + 1\,000$$
$$C_2 = 22\,000$$

Claramente el capital es una progresión aritmética de diferencia:

$$d = 20\,000 \cdot \frac{5}{100}$$
$$d = 1\,000$$

Cuando $n = 1$ el capital es $C_1 = 21\,000$. Por lo tanto, el capital en el año n es C_n:

$$C_n = C_1 + (n-1) \cdot d$$
$$C_n = 21\,000 + (n-1) \cdot 1\,000$$

Queremos saber cuándo el capital es de 30000 euros:

$$30\,000 = 21\,000 + (n-1) \cdot 1\,000$$
$$9\,000 = (n-1) \cdot 1\,000$$
$$9 = n - 1$$
$$n = 10$$

El capital será exactamente de 30000 euros al cabo de 10 años.

3. ¿Cuánto tiempo es necesario para que un capital inicial de 20000 euros se convierta en 30000 euros si el interés compuesto es de un 5 % anual?

El capital inicial es:

$$C_0 = 20\,000$$

Al cabo de un año, tendrá el capital inicial más el cinco por ciento de ese capital inicial:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_1 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_1 = 20\,000 + 1\,000$$
$$C_1 = 21\,000$$

Al cabo de dos años, tendremos que sumar el capital del año anterior más el cinco por ciento del **capital anterior**. Es la diferencia esencial entre el interés simple y el compuesto.

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_2 = 21\,000 + 21\,000 \cdot \frac{5}{100}$$
$$C_2 = 21\,000 + 1\,050$$
$$C_2 = 22\,050$$
$$\ldots$$

Si usamos la fórmula:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$
$$30000 = 20000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$$
$$\frac{30000}{20000} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$
$$\frac{3}{2} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

Para despejar, tenemos que usar logaritmos:

$$n = \log_{21/20}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Muchas calculadoras no tienen una tecla para calcular logaritmos en bases arbitrarias. Podemos hacer un cambio de base y transformar el logaritmo en logaritmos decimales:

$$n = \frac{\log(3/2)}{\log(21/20)}$$

O, lo que es lo mismo:

$$n = \frac{\log(3) - \log(2)}{\log(21) - \log(20)}$$
$$n = 8.310386223$$

Es decir, necesitamos más de ocho años para conseguir ese capital.

Combinatoria

La **combinatoria** es la parte de las matemáticas discretas que estudia cómo contar cuántos elementos tiene un conjunto finito.

La tarea puede parecer tan sencilla como en las preguntas *"¿cuántos días tiene la semana?"* o *"¿cuántas sillas hay en una habitación en la que hay 5 filas de sillas si en cada fila hay 8 sillas?"*. Pero, en general, **contar puede ser muy difícil**.

Las técnicas de recuento que se estudian en el instituto sirven para multitud de casos sencillos y no tan sencillos y ayudan a entender otros temas como la probabilidad o la fórmula del binomio de Newton.

1. Si tenemos el conjunto de símbolos:

$$A = \{\triangle, \square, \times, \oplus, \ominus, \odot\}$$

¿Cuántas combinaciones de 3 de ellos podemos obtener sin repetir ninguno de ellos?

El conjunto A tiene una cardinalidad igual a 6 ($|A| = 6$). Es decir, tiene 6 elementos.

Nos piden cuántos conjuntos de **3** elementos podemos formar a partir de los elementos del conjunto A sin repetir ninguno de ellos. Ejemplos de las combinaciones que buscamos serían:

$$\{\triangle, \square, \times\}$$
$$\{\triangle, \square, \oplus\}$$
$$\ldots$$

Como no pueden repetirse, los siguientes conjuntos no serían válidos:

$$\{\triangle, \triangle, \times\}$$
$$\{\times, \times, \times\}$$
$$\{\triangle, \oplus, \oplus\}$$
$$\ldots$$

Además, tal y como está planteado el problema, no importa el orden.

$$\{\triangle, \square, \times\} = \{\triangle, \times, \square\} = \ldots$$

Es decir:

- Cogemos una parte de un conjunto
- No se repiten elementos
- No importa el orden

por lo tanto tenemos que calcular las **combinaciones sin repetición**:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3}$$

Este coeficiente binomial se puede calcular:

- con la fórmula
- con la tecla `nCr` de la calculadora científica
- con el triángulo de Pascal (de Tartaglia, aritmético)

Con la fórmula:

$$\begin{aligned}\binom{6}{3} &= \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \\ &= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \\ &= \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20\end{aligned}$$

Es decir: hay 20 combinaciones distintas.

2. ¿Cuántas maneras hay de enviar a tres alumnos de una clase de 26 personas a hablar con la directora si los tres alumnos cumplen la misma función en el encuentro?

Estamos seleccionando una parte de un conjunto. Y, como los tres alumnos cumplen la misma función, no importa el orden en el que los seleccionamos. Y, evidentemente, no podemos coger dos veces al mismo alumno, por lo que no hay repetición.

Con estas condiciones, estamos ante un problema de combinatoria en el que tenemos que calcular el número de **combinaciones sin repetición** de 3 alumnos en una clase de 26.

$$C_{26,3} = \binom{26}{3}$$

Usar el triángulo de Pascal (o *de Tartaglia* o *aritmético*) para calcular este coeficiente binomial no es buena idea porque tendríamos que calcular 27 filas (la primera fila corresponde al cero).

Con la fórmula:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\binom{26}{3} &= \frac{26!}{3!\cdot(26-3)!} = \\ &= \frac{26!}{3!\cdot 23!} =\end{aligned}$$

Por las propiedades del factorial:

$$= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{3! \cdot 23!} =$$
$$= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} =$$
$$= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{6} =$$
$$= 26 \cdot 25 \cdot 4 =$$
$$= 2600$$

3. ¿Cuántas maneras hay de enviar a tres alumnos de una clase de 26 personas a hablar con la directora si un alumno será el presidente, otro será el vicepresidente y otro el secretario?

Ahora sí importa el orden, no cogemos todos los elementos y no hay repetición. Nos piden calcular las **variaciones sin repetición** (o variaciones ordinarias).

$$V_{n,m} = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$
$$V_{26,3} = \frac{P_{26}}{P_{26-3}} = \frac{26!}{(26-3)!} =$$
$$= \frac{26!}{23!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} =$$
$$= 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$$

4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra GUSTAVO?

Cada ordenación es una **permutación** porque cogemos todos los elementos, importa el orden y no hay elementos repetidos.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 5040$$

5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra ADOLFO?

Cada ordenación es una **permutación** porque cogemos todos los elementos, importa el orden y **hay** elementos repetidos. Por lo tanto se trata de permutaciones con repetición.

La letra *"O"* aparece 2 veces, las restantes letras aparecen una sola vez (1, 1, 1 y 1). En total hay 6 letras, por lo que el número de permutaciones con repetición es:

$$PR^6_{2,1,1,1,1} = \frac{P_6}{P_2 \cdot P_1 \cdot P_1 \cdot P_1 \cdot P_1}$$

Pero, por supuesto, podemos prescindir de los elementos que no se repiten:

$$\begin{aligned} PR_2^6 = \frac{P_6}{P_2} &= \\ = \frac{6!}{2!} &= \\ = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} &= \\ &= 360 \end{aligned}$$

6. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra BÉCQUER?

Se trata de un conjunto de 7 letras. Si consideramos que todas son distintas (es decir, consideramos que *'E'* es lo mismo que *'É'*) entonces se trata de permutaciones sin repetición de los siete elementos de un conjunto:

$$P_7 = 7! = 5040$$

En el caso de que consideramos que las dos son indistinguibles, se trata de permutaciones con repetición:

$$\begin{aligned} PR^7_{2,1,1,1,1,1} &= \frac{7!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \\ &= \frac{5040}{2} = 2520 \end{aligned}$$

El problema se complica si consideramos que la tilde se puede mover de manera independiente y puede colocarse encima de algunas letras. En ese caso debemos considerar que *"E"* y *"É"* son distintas.

En español, solamente puede estar encima de una vocal: É y Ú. En eslovaco puede estar sobre la letra r: Ŕ. En polaco puede estar sobre la letra c: Ć. Suponiendo que sean las únicas posibilidades tendremos que contar los órdenes posibles para la tilde en cada letra: É, Ú, Ŕ y Ć.

En total:

$$4 \cdot 5040 = 20160$$

7. Simplifica la expresión:

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!}{(n-2)!} &= \\ = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} &= \\ = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) &= \\ = n \cdot (n^2 - 1) &= \end{aligned}$$

$$= n^3 - n$$

8. Resuelve la ecuación siguiente:

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 4n$$

Tenemos dos coeficientes binomiales. Un coeficiente binomial se calcula con:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Usando esto en la ecuación, obtenemos:

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = 4n$$

Por la recursividad del factorial:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} +$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3! \cdot (n-3)!} = 4n$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2!} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} = 4n$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = 4n$$

Multiplicando toda la ecuación por 6:

$$3n \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 24n$$
$$3n \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) - 24n = 0$$

Podemos sacar n como factor común:

$$n \cdot (3(n-1) + (n-1) \cdot (n-2) - 24) = 0$$

Por lo tanto, o $n = 0$ o se cumple:

$$3(n-1) + (n-1) \cdot (n-2) - 24 = 0$$
$$3n - 3 + n^2 - 3n + 2 - 24 = 0$$
$$n^2 - 25 = 0$$
$$n^2 = 25$$
$$n = \pm\sqrt{25}$$

$$n = \pm 5$$

Tenemos tres soluciones: 0, -5 y 5. Pero en un coeficiente binomial, el número que aparece arriba siempre debe ser un número natural (incluyendo el cero) mayor que el número que aparece arriba.

Por lo tanto, la única solución es 5.

9. Una baraja[a] de naipes[b] para el juego de póquer[c] contiene 52 cartas diferentes.
En una partida de póquer, cada jugador recibe un conjunto de cinco cartas y no importa el orden en el que recibe cada carta. Este conjunto de cartas es una *"mano"*. ¿Cuántas *manos* diferentes puede recibir el primer jugador en una partida de póquer?

[a]**baraja:** conjunto de cartas para un juego.
[b]**naipe:** carta en un juego de mesa.
[c]**póquer:** en inglés y eslovaco, *"poker"*.

Es fácil darse cuenta de que el número de manos diferentes que puede recibir el primer jugador es el número de combinaciones de 5 elementos en un conjunto de 52.

No se trata de permutaciones ni de variaciones; el orden en el que el jugador recibe las cartas no es importante. Y son combinaciones ordinarias (= combinaciones sin repetición) porque un jugador no puede recibir la misma carta dos veces en la misma mano.

Por lo tanto, lo que buscamos se puede escribir como el coeficiente binomial:

$$\begin{matrix}52\\2\end{matrix} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} =$$
$$= \frac{52!}{5! \cdot 47!} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5! \cdot 47!} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 24}{4 \cdot 3} =$$
$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 6}{3} =$$
$$= 52 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 6 =$$
$$= 2\,598\,960$$

Hay dos millones quinientas noventa y ocho mil novecientas sesenta manos diferentes.

10. En el juego del póquer, una de las manos más valiosas es la que en español se llama *full* (y en inglés, *full house*): un trío de cartas del mismo número más una pareja de cartas del mismo número.

Por ejemplo, una mano que tiene un 5 de diamantes, un 5 de picas, un 5 de corazones, un 7 de tréboles y un 7 corazones es un *full*.
¿Cuántas manos posibles hay así?

Para cada número, hay 4 tríos posibles porque hay cuatro tipos de cartas posibles: corazones ($\heartsuit$), picas ($\spadesuit$), diamantes ($\diamondsuit$) y tréboles ($\clubsuit$).

Si, por ejemplo, el número es el 2, hay:

- un trío que no incluye el 2 de corazones,
- un trío que no incluye el 2 de picas,
- un trío que no incluye el 2 de diamantes,
- y un trío que no incluye el 2 de tréboles.

Es fácil llegar a la conclusión de que hay 52 tríos así; cada trío es el que no incluye una carta. Y hay un total de 52 cartas.

Visto de otro modo, hay 13 números distintos y para cada número que hay, cogemos 3 cartas de 4:

$$13 \cdot \binom{4}{3} = 52$$

Las parejas posibles no incluyen cartas del número que ha aparecido en el trío. Quedan 12 números entre los que escoger. Para cada número que hay (que no haya aparecido en el trío) cogemos 2 cartas de 4:

$$\begin{gathered}
12 \cdot \binom{4}{2} = \\
= 12 \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \\
= 12 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \\
= 12 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \\
= 12 \cdot 3 \cdot 2 = 72
\end{gathered}$$

En total:

$$52 \cdot 72 = 3744$$

hay 3744 *fulls* diferentes.

11. Simplifica la expresión:

$$\frac{n^2-25}{(n+3)!} + \frac{5}{(n+2)!} + \frac{-1}{(n+1)!} =$$

Sabemos que:

- $(n+3)! = (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!$
- $(n+1)! = (n+2) \cdot (n+1)!$

Por lo tanto, el **mínimo común múltiplo** de los 3 denominadores es $(n+3)!$, que escribiremos $(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!$

$$= \frac{n^2 - 25 + 5 \cdot (n+3) - (n+3) \cdot (n+2)}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!} =$$
$$= \frac{n^2 - 25 + 5n + 15 - (n^2 + 2n + 3n + 6)}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!} =$$
$$= \frac{n^2 + 5n - 10 - (n^2 + 5n + 6)}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!} =$$
$$= \frac{-16}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!} =$$
$$= \frac{-16}{(n+3)!}$$

12. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras existen que tengan sus cuatro dígitos diferentes?

Suponemos que los dígitos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Es decir, que nos piden los números en representación decimal posicional.

Números naturales que cumplen esas condiciones son 1234, 3421, 1023… Y números que no las cumplen son 0321, 1021…

Podemos ver que:

- importa el orden,
- no cogemos todos los elementos (cogemos 4 cifras de un conjunto de 10),
- y no se repiten cifras

Por lo tanto, estamos ante un problema de variaciones sin repetición (= variaciones ordinarias):

$$V_{10,4} = \frac{P_10}{P_{10-4}} = \frac{10!}{(10-4)!}$$
$$V_{10,4} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$
$$V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$
$$V_{10,4} = 5040$$

Pero esto contabiliza los casos que empiezan por 0, que no se consideran números de 4 cifras. Por ejemplo, 0321 no se considera un número de cuatro cifras. Ese número se escribe 321 y se considera un número de tres cifras.

Por lo tanto, tenemos que contar cuántos números que cumplen esa condición empiezan por cero. Pero esto equivale a buscar todos los números naturales de tres cifras en las que las cifras no se repiten y ninguna de las cifras es 9. Es decir: cogemos 3 cifras de un conjunto de 9.

$$V_{9,3} = \frac{P_9}{P_{9-3}} = \frac{9!}{(9-3)!}$$
$$V_{9,3} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$
$$V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$$
$$V_{9,3} = 504$$

Por lo tanto, lo que buscamos es la resta de estas dos variaciones:

$$5040 - 504 = 4536$$

Hay 4536 números naturales que cumplen las condiciones.

13. En una clase hay 21 alumnos. Entre todos, deciden que hay que enviar a 3 alumnos para hablar con el profesor de matemáticas para cambiar la fecha de un examen y 2 alumnos para hablar con la profesora de biología para cambiar la fecha de otro examen. Deciden sortear (= echar a suertes) quiénes serán esos alumnos. ¿Cuántas maneras distintas existen?

No importa el orden de los alumnos en los grupos. Por lo que, para el grupo de 3 alumnos, estamos calculando combinaciones:

$$\begin{matrix} 21 \\ 3 \end{matrix} = \frac{21!}{3! \cdot (21-3)!} =$$
$$= \frac{21!}{3! \cdot 18!} =$$
$$= \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18!}{3! \cdot 18!} =$$
$$= \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= 7 \cdot 10 \cdot 19 =$$
$$= 1330$$

Pero además tenemos que hacer grupos de 2 alumnos. Y, como no podemos coger los 3 del otro grupo, tenemos que escoger entre 21 - 3 = 18.

$$\begin{matrix} 18 \\ 2 \end{matrix} = \frac{18!}{2! \cdot (18-2)!} =$$
$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{2! \cdot 16!} =$$
$$= \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} =$$
$$= 9 \cdot 17 =$$
$$= 153$$

Por lo tanto, la cantidad total es el producto de ambos números:

$$1330 \cdot 153 =$$
$$= 203\,490$$

Es decir:

$$\binom{21}{3} \cdot \binom{18}{2} = 203\,490$$

¿Qué hubiese pasado si contamos primero el número de grupos de 2 y **después** los de 3?

$$\binom{21}{2} = 210$$
$$\binom{21-2}{3} = 969$$

$$\binom{21}{2} \cdot \binom{19}{3} = 203\,490$$

¡El mismo resultado!

Esto ocurre porque:

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{m-n}{l} = \binom{m}{l} \cdot \binom{m-l}{n}$$

14. Demuestra que:

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{m-n}{l} = \binom{m}{l} \cdot \binom{m-l}{n}$$

Empezamos transformando el lado izquierdo:

$$LI = \binom{m}{n} \cdot \binom{m-n}{l} =$$
$$= \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \cdot \frac{(m-n)!}{l! \cdot (m-n-l)!} =$$
$$= \frac{m!}{n! \cdot l! \cdot (m-n-l)!}$$

Hacemos algo similar con el lado derecho:

$$LD = \binom{m}{l} \cdot \binom{m-l}{n} =$$

$$= \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!} \cdot \frac{(m-l)!}{n! \cdot (m-l-n)!} =$$
$$= \frac{m!}{l! \cdot n! \cdot (m-l-n)!} =$$
$$= \frac{m!}{n! \cdot l! \cdot (m-n-l)!} = LI$$

$$LD = LI$$

QED.

15. Demuestra que 6 semanas tienen 10! segundos sin usar la calculadora para ello.

Se trata de un simple de ejercicio de cambio de unidades en el que es necesario conocer la definición del factorial y hay que saber factorizar números naturales.

Podemos hacer el cambio con factores de conversión en distintos pasos:

$$\begin{aligned} 6 \text{ semanas} = 6 \text{ semanas} \cdot \frac{7 \text{ días}}{1 \text{ semana}} &= \\ = 6 \cdot 7 \text{ días} &= \\ = 6 \cdot 7 \text{ días} \cdot \frac{24 \text{ horas}}{1 \text{ día}} &= \\ = 6 \cdot 7 \cdot 24 \text{ horas} &= \\ = 6 \cdot 7 \cdot 24 \text{ horas} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1\text{hora}} &= \\ = 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} &= \\ = 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1\text{min}} &= \\ = 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \end{aligned}$$

Por supuesto, se podrían usar todos los factores de conversión en un solo paso y, en este caso, debido a los factores de conversión, bastaba multiplicar para obtener el último resultado.

Por lo tanto, nos piden demostrar que 10! es igual a ese número. Pero 10! es:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por lo tanto, a partir de:

$$6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 =$$

tenemos que llegar a la expresión en la que aparecen todos los números naturales del 1 al 10 una sola vez como factores.

Ya aparecen dos de ellos, el 6 y el 7. Los señalamos entre paréntesis para que quede más claro:

$$= (\mathbf{6} \cdot \mathbf{7}) \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 =$$

El número 24 es 8 por 3:

$$= (\mathbf{6} \cdot \mathbf{7}) \cdot 8 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 60 =$$
$$= (\mathbf{3} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8}) \cdot 60 \cdot 60 =$$

Y 60 es 6 por 10:

$$= (\mathbf{3} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8}) \cdot 6 \cdot 10 \cdot 60 =$$
$$= (\mathbf{3} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 6 \cdot 60 =$$

Unamos otra vez que 60 es 6 por 10. Y ahora, además, que 10 es 2 por 5:

$$= (\mathbf{3} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 =$$
$$= (\mathbf{3} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 =$$
$$= (\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 6 \cdot 6 =$$

Seis es 2 por 3:

$$= (\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$$

Dos por dos es 4. Y tres por tres es 9.

$$= (\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{10}) \cdot 4 \cdot 9 =$$
$$= \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{4} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{6} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{10} =$$

Y añadir un uno no cambia el número:

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$$
$$= 10!$$

Q.E.D.

16. El vagón de un tren tiene 80 plazas. Si solamente hay 2 personas en el vagón, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

La primera persona puede sentarse en cualquiera de los 80 asientos. Hay 80 opciones, 80 posibilidades, 80 maneras…

La siguiente persona sólo puede sentarse en los 79 asientos que han quedado libres. Suponemos que la segunda persona no puede sentarse donde ya hay sentada una persona.

Por el **principio del producto**, hay $80 \cdot 79$ maneras de que los dos pasajeros se sienten en el vagón de tren.

Es decir:

$$80 \cdot 79 = 6320$$

Hay 6320 maneras distintas.

Hay otro modo de llegar al resultado que puede ser interesante; nos da una técnica aplicable en otros casos. En el vagón hay una persona A, una persona B y 78 huecos libres. Hay que ver todas las maneras de ordenar los 78 huecos libres y las dos personas.

Estamos **ordenando** los elementos de un conjunto. Y estamos ordenando **todos los elementos**. Por lo tanto, se trata de permutaciones. Pero como los huecos son indistinguibles entre si, equivale a decir que hay elementos que se repiten. Por lo tanto tenemos permutaciones con repetición:

$$\begin{aligned} PR^{80}_{78,1,1} = \frac{P_{80}}{P_{78} \cdot P_1 \cdot P_1} = \\ = \frac{80!}{78! \cdot 1! \cdot 1!} = \\ = \frac{80!}{78!} = \\ = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78!}{78!} = \\ = 80 \cdot 79 = \\ = 6320 \end{aligned}$$

17. En el alfabeto Morse se usan dos símbolos: el punto (.) y la raya (-) para representar letras y números[a]. Hay, además, un espacio largo para separar una letra (o número) de la siguiente.
¿Cuántas letras y números diferentes se pueden representar con tres símbolos?

[a]En realidad, también permite representar otros símbolos que no son ni letras ni números.

El orden es importante;

. - .

- . .

. . -

son diferentes. Y, evidentemente, la repetición está permitida.

Por lo tanto, son variaciones con repetición:

$$VR_{2,3} = 2^3 = 8$$

Podemos comprobarlo fácilmente:

- Con 3 puntos y 0 rayas:

. . .

- Con 2 puntos y 1 raya:

$$. \ - \ .$$
$$- \ . \ .$$
$$. \ . \ -$$

- Con 1 punto y 2 rayas:

$$- \ . \ -$$
$$. \ - \ -$$
$$- \ - \ .$$

- Con 0 puntos y 3 rayas

$$- \ - \ -$$

Es fácil ver que hay exactamente ocho.

18. El sistema binario de notación posicional usa dos dígitos (0 y 1) para representar los números. Calcula cuántos números enteros diferentes se pueden representar usando 8 dígitos.

Los números que cumplen esas condiciones serán:

$$00000000_{(2}$$
$$00000001_{(2}$$
$$00000010_{(2}$$
$$\dots$$
$$11111111_{(2}$$

Estamos cogiendo 8 elementos de un conjunto de 2, con repetición, pero donde nos importa el orden. Por lo tanto, son variaciones con repetición:

$$VR_{2,8} = 2^8 = 256$$

Otro modo de razonarlo es sabiendo que el número más pequeño es representado por:

$$00000000_{(2} = 0$$

Y el mayor es:

$$11111111_{(2} =$$
$$= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Es la suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica de razón 2 y primer término 1:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_0 \cdot (1 - r^n)}{1 - r} = \\
&= \frac{1 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = \frac{1 - 2^8}{-1} = 2^8 - 1 = \\
&= 256 - 1 = 255
\end{aligned}
$$

Si el primero es 0 y el último es 255, hay 256 números.

Probabilidad

La probabilidad está muy relacionada con la combinatoria y con la estadística.

El estudio matemático serio de la probabilidad, de lo *"frecuente"* que es un suceso, empezó con el interés en los juegos de azar: tirar dados, tirar una moneda, juegos de cartas... Y en parte por el interés económico de los mismos: las apuestas. Las loterías y los casinos pueden funcionar porque es mucho más probable que ganen ellos que la gente que juega a ellos.

1. ¿Cuáles son las distintas definiciones de probabilidad?

La definición **clásica** o **laplaciana** (por Laplace) dice que la probabilidad de que ocurra un suceso es igual al cociente del número de casos favorables entre el número casos posibles. Esto asume que todos los casos favorables son igual de probables, es decir, que son equiprobables.

En el caso de la tirada de un dado de seis caras, con caras numeradas del 1 al 6, la definición clásica nos dice que la probabilidad de obtener un 3 al tirar un dado es 1 entre 6; solamente hay una cara con un 3 y hay seis caras diferentes:

$$P(X=3)=\frac{1}{6}$$

Es la definición que usamos casi todo el rato en el instituto.

Pero tiene limitaciones: asume que ciertos sucesos son equiprobables, no sirve cuando hay una cantidad infinita de sucesos posibles diferentes...

La definición **empírica** o **frecuentista** dice que la probabilidad de que ocurra un suceso es el límite cuando se hacen infinitos experimentos, entre la frecuencia de ese suceso y el número de veces que se ha hecho el experimento.

En el caso de la tirada del dado, si f_3 es la frecuencia de aparición del tres (el número de veces que sale el número 3) y n es el número de experimentos:

$$P(X=3)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_3}{n}$$

Esta definición tiene ventajas sobre la anterior. Pero también desventajas: ¿cuántos experimentos hay que hacer para acercanos al valor de la probabilidad que buscamos? ¿Y si no podemos repetir el experimento?

La definición **subjetiva** es la menos matemática; se basa en una simple estimación por parte de una persona. Como cuando decimos, *"¿creo que hay un 90 % de probabilidades de que apruebes maturita?"*. Es decir, expresa una *creencia*.

La definición más precisa de probabilidad es la **axiomática** que establece una serie de principios/postulados/axiomas que la probabilidad debe cumplir. Como, por ejemplo:

- La probabilidad es un número del intervalo [0, 1].

  Un suceso es un suceso seguro cuando su probabilidad es 1.

  Un suceso es un suceso imposible cuando su probabilidad es 0.

- La probabilidad de un suceso contrario es igual a uno menos la probabilidad del suceso:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- La probabilidad de la unión de sucesos excluyentes es la suma de las probabilidades de cada suceso:

  Es decir, si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing \ldots$ $A_2 \cap A_3 = \varnothing \ldots$ entonces:

$$\begin{gathered} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) \end{gathered}$$

- ...

2. ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de una moneda?

Si $\odot$ es *cara* y $\oplus$ es *cruz*, el espacio muestral es:

$$E = \{\odot, \oplus\}$$

Si todos los sucesos son equiprobables (= tienen la misma probabilidad), la probabilidad de que sea cara es:

$$P(\odot) = \frac{1}{2}$$

y de que sea cruz:

$$P(\oplus) = \frac{1}{2}$$

3. ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas?

Si $\odot$ es *cara* y $\oplus$ es *cruz*, el espacio muestral del lanzamiento de una sola moneda es:

$$E_1 = \{\odot, \oplus\}$$

El espacio muestral de lanzar dos será el producto cartesiano:

$$E = E_1 \times E_1$$

Es decir:

$$E = \{(\odot, \odot), (\odot, \oplus), (\oplus, \odot), (\oplus, \oplus)\}$$

Pero, por comodidad, en este caso podemos escribir cada par sin usar comas y paréntesis:

$$E = \{\odot\odot, \odot\oplus, \oplus\odot, \oplus\oplus\}$$

Esto nos permite calcular las probabilidades de varios sucesos:

a) P(alguna cara o alguna cruz) $= 4/4 = 1$

Se trata de un **suceso seguro**; siempre ocurre.

b) P(tres caras) $= 0/4 = 0$

Se trata de un **suceso imposible**; nunca ocurre.

c) P(al menos una cara) $= 3/4$

Porque el conjunto de sucesos que tienen *al menos una cara* es:

$$\{\odot\odot, \odot\oplus, \oplus\odot\}$$

que tiene 3 elementos.

d) P(las dos monedas iguales) $= 2/4 = 1/2$

Porque el conjunto de sucesos que tienen *las dos monedas iguales* es:

$$\{\odot\odot, \oplus\oplus\}$$

que tiene 2 elementos.

e) P(exactamente una cara) $= 2/4 = 1/2$

Porque el conjunto de sucesos que tienen *exactamente una cara* es:

$$\{\odot\oplus, \oplus\odot\}$$

que tiene 2 elementos.

Decir *"tienen exactamente una cara"* equivale a *"tienen una cara"*. El adverbio solamente subraya esto.

4. ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de un dado? Calcula las probabilidades de:
a) obtener un 1
b) obtener un número par
c) obtener un número distinto de 3
d) obtener un número menor que 7
e) obtener un número mayor que 6

Si no se especifica nada, podemos suponer:

1. que el dado es un dado cúbico de seis caras,
2. que cada cara está etiquetada con un número diferente del 1 al 6,
3. que todas las caras son equiprobables.

Podemos escribir el espacio muestral:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

a) La probabilidad de obtener un 1 es

$$\text{casos favorables} = |\{1\}| = 1$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

b) La probabilidad de obtener un número par:

$$\text{casos favorables} = |\{2, 4, 6\}| = 3$$
$$P(X = \text{impar}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) La probabilidad de obtener un número distinto de 3:

$$\text{casos favorables} = |\{1, 2, 4, 5, 6\}| = 5$$
$$P(X \neq 3) = \frac{5}{6}$$

Lo cual equivale a calcular la probabilidad de obtener 3:

$$P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Y usar que:

$$P(X = 3) + P(X \neq 3) = 1$$

porque son sucesos complementarios, para obtener:

$$P(X \neq 3) = \frac{5}{6}$$

d) La probabilidad de obtener un número menor que 7:

$$\text{casos favorables} = |\{1, 2, 4, 5, 6\}| = 6$$
$$P(X < 7) = \frac{6}{6} = 1$$

Es, evidentemente, un **suceso seguro**.

e) La probabilidad de obtener un número mayor que 6:

No hay ninguna cara cuyo número sea mayor que 6.

$$\text{casos favorables} = |\{\}| = |\varnothing| = 0$$

Es decir, es un **suceso imposible**.

5. En español decimos que un dado está **cargado** cuando las caras no son equiprobables. Es decir, hay caras que son más probables de obtener en un lanzamiento que otras caras. Para un dado cargado en el que obtener 6 es el doble de probable que obtener cualquier otro número, calcula las probabilidades de:

a) obtener cada uno de los seis números
b) obtener un número distinto de 6
c) obtener un número impar

En este caso, no podemos contar el número de casos favorables y dividirlo entre el número de casos posibles; los seis sucesos elementales (obtener 1, obtener 2, obtener 3. . .) no son equiprobables (= no tienen la misma probabilidad).

Pero sabemos que la probabilidad de obtener 6 es el doble que la de obtener cualquiera de los demás. Por lo que **todos los demás lados sí son equiprobables**. Si usamos $P(1)$ para la probabilidad de obtener un 1, P(2) para la de obtener un 2 y así sucesivamente, sabemos:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$$

Por comodidad, llamaremos a esta probabilidad p:

$$p \equiv P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$$

y sabemos que:

$$P(6) = 2p$$

Pero, además, la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\begin{gathered}
P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \\
p + p + p + p + p + 2p = 1 \\
7p = 1 \\
p = \frac{1}{7}
\end{gathered}$$

Por lo tanto:

$$P(6) = 2p = \frac{2}{7}$$

a) Por lo tanto:

$$\begin{gathered}
P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{7} \\
P(6) = \frac{2}{7}
\end{gathered}$$

b)

$$\begin{gathered}
P(\overline{6}) = \\
= 1 - P(6) = \frac{5}{7}
\end{gathered}$$

c) Para obtener un número impar, tenemos que obtener 1, 3 o 5:

$$\begin{gathered}
P(\text{impar}) = P(1) + P(3) + P(5) = \\
= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \\
= \frac{3}{7}
\end{gathered}$$

6. Se tira un dado dodecaédrico en el que las caras están numeradas con los números naturales a partir del 1. ¿Cuáles son las siguientes probabilidades?

a) De obtener un 2 en una tirada.
b) De obtener un 13 en una tirada.
c) De obtener un número impar.
d) De obtener un número primo.
e) De obtener un número menor que 4.

Un dado dodecaédrico tiene 12 caras. Por lo tanto, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La cardinalidad de ese conjunto es el número de **casos posibles**:

$$|E| = 12$$

a) El conjunto de casos favorables está formado solamente por el número 2:

$$\text{casos favorables} = |\{2\}| = 1$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{12}$$

b) De obtener un 13 en una tirada.

Obtener un 13 es un **suceso imposible**. Su probabilidad es 0:

$$P(X = 13) = 0$$

c) De obtener un número impar.

El conjunto de los números impares que están dentro del espacio muestral es:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Son 6 en total. Por lo tanto:

$$P(X = \text{impar}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

d) De obtener un número primo.

El conjunto de números primos que están dentro del espacio muestral es:

$$\{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Por lo tanto:

$$P(X = \text{primo}) = \frac{5}{12}$$

e) De obtener un número menor que 4.

El conjunto de casos favorables es:

$$\{1, 2, 3\}$$

Por lo tanto:

$$P(X < 4) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

7. Escribe el espacio muestral de los resultados de tirar un dado ordinario (es decir, hexaédrico) y una moneda simultáneamente.

El espacio muestral de tirar solamente el dado sería:

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El espacio muestral de tirar solamente la moneda sería:

$$E_2 = \{\odot, \oplus\}$$

donde $\odot$ representa *cara* y $\oplus$ representa *cruz*.

El espacio muestral de la tirada de ambas cosas es el producto cartesiano de ambos espacios muestrales:

$$E = E_1 \times E_2 =$$

$$= \{(\odot,\ 1), (\odot,\ 2), (\odot,\ 3), (\odot,\ 4), (\odot,\ 5), (\odot,\ 6), (\oplus,\ 1), (\oplus,\ 2), (\oplus,\ 3), (\oplus,\ 4), (\oplus,\ 5), (\oplus,\ 6)\}$$

El espacio muestral tiene 2×6 elementos. Es decir: tiene 12 elementos.

8. Una bolsa contiene 10 bolas. De ellas, 5 son rojas, 3 son azules y el resto son verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

a) sea roja
b) sea azul
c) sea verde
d) sea amarilla
e) sea roja o sea azul
f) no sea roja

Tenemos que tener en cuenta que:

- Total de bolas = 10
- Bolas rojas = 5
- Bolas azules = 3
- Bolas verdes = 2
- Bolas amarillas = 0

a)

$$P(\text{roja}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b)

$$P(\text{azul}) = \frac{3}{10}$$

c)

$$P(\text{verde}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

d)

$$P(\text{amarilla}) = \frac{0}{10} = 0$$

El suceso *"que salga una bola amarilla"* es un suceso imposible.

e)

$$P(\text{roja} \cup \text{azul}) = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Como la intersección de estos dos sucesos es el conjunto vacío, podemos también calcularlo así:

$$P(\text{roja} \cup \text{azul}) = P(\text{roja}) + P(\text{azul}) = \frac{4}{5}$$

f)

$$P(\overline{\text{roja}}) = \frac{10-5}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

También se puede calcular:

$$P(\overline{\text{roja}}) = 1 - P(\text{roja}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

9. En un grupo de personas, el 80 por ciento son mujeres. De las mujeres, el 20 por ciento son fumadoras. De los hombres, el 10 por ciento son no fumadores.
Calcula la probabilidad de que al escoger una persona al azar:
a) sea mujer
b) sea hombre
c) sea fumadora
d) sea no fumadora
e) si es mujer, sea fumadora
f) si es fumadora, sea mujer

Vamos a introducir la siguiente notación:

- mujer $= M$
- hombre $= \overline{M}$
- fumador $= F$
- no fumador $= \overline{F}$

Hemos escogido esa notación porque consideramos que "mujer" y "hombre" son sucesos complementarios y lo mismo ocurre con "fumador" y "no fumador".

$$P(M) = 0.80$$

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.80 = 0.20$$

Nos dan dos probabilidades condicionadas, la probabilidad de que, si es mujer, sea fumadora:

$$P(F|M) = 0.20$$

y la probabilidad de que, si es hombre, sea no fumador:

$$P(\overline{F}|\overline{M}) = 10$$

Podemos encontrar las probabilidades de los complementarios:

$$P(\overline{F}|M) = 1 - P(F|M) = 1 - 0.20 = 0.80$$
$$P(F|\overline{M}) = 1 - P(\overline{F}|\overline{M}) = 1 - 0.10 = 0.90$$

Por otro lado, sabemos que:

$$P(F) = P(F|M) \cdot P(M) + P(F|\overline{M}) \cdot P(\overline{M})$$
$$P(F) = 0.20 \cdot 0.80 + 0.90 \cdot 0.20$$
$$P(F) = 0.34$$

Por lo tanto:

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.34 = 0.66$$

Por el teorema de Bayes:

$$P(F|M) = \frac{P(M|F) \cdot P(F)}{P(M)}$$

sustituyendo:

$$0.20 = \frac{P(M|F) \cdot 0.34}{0.80}$$
$$0.20 \cdot 0.80 = P(M|F) \cdot 0.34$$
$$0.16 = P(M|F) \cdot 0.34$$
$$\frac{0.16}{0.34} = P(M|F)$$
$$P(M|F) \approx 0.47$$

10. En un instituto bilingüe eslovaco-español, un 40 % de los alumnos han leído *“La vida de Lazarillo de Tormes y de sus fortunas y adversidades”*, un 60 % de los alumnos han leído *“Lazarillo Z”* (la versión con zombis de la anterior) y un 20 % ha leído ambas. Calcula la probabilidad de que al escoger un alumno al azar:

a) haya leído alguno de los libros

b) no haya leído ninguno de los libros
c) haya leído solamente uno de los liros

Podemos representar:

- L = ha leído el *Lazarillo de Tormes*
- $\overline{L}$ = no ha leído el *Lazarillo de Tormes*
- Z = ha leído *Lazarillo Z*
- $\overline{Z}$ = no ha leído *Lazarillo Z*

Sabemos que la probabilidad de que haya leído el *Lazarillo* es de un 40 %:

$$P(L) = 0.40$$

por lo tanto, la probabilidad de que no lo haya leído es:

$$P(\overline{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0.40 = 0.60$$

Y la probabilidad de que haya leído *Lazarillo Z* es de un 60 %:

$$P(Z) = 0.60$$

por lo que la de que no lo haya leído es:

$$P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) = 1 - 0.60 = 0.40$$

Nos dicen que la probabilidad de que haya leído ambos libros es del 20 %:

$$P(L \cap Z) = 0.20$$

Entonces, la probabilidad de que haya leído un libro **o** el otro libro es:

$$P(L \cup Z) = P(L) + P(Z) - P(L \cap Z)$$
$$P(L \cup Z) = 0.40 + 0.60 - 0.20$$
$$P(L \cup Z) = 0.80$$

Por lo tanto, no han leído ninguno de los dos libros:

$$P(\overline{L \cup Z}) = P(\overline{L} \cap \overline{Z}) = 1 - 0.80 = 0.20$$

Para encontrar la probabilidad de que no haya leído un libro **o** el otro libro:

$$P(\overline{L} \cup \overline{Z}) = P(\overline{L}) + P(\overline{Z}) - P(\overline{L} \cap \overline{Z})$$
$$P(\overline{L} \cup \overline{Z}) = 0.60 + 0.40 - 0.20 = 0.80$$

11. En una especie de plantas, las flores pueden tener dos colores: blanco y azul. El color se debe a un par de alelos en los que el blanco es recesivo y el azul es dominante. ¿Cuál es la probabilidad de obtener flores blancas de la descendencia de dos plantas heterocigóticas de flores azules?

ALUMNO: Čo!? ¡Qué? Pero si esto es genética. Es biología.

PROFESOR: Y probabilidad. No hay una frontera que separe las matemáticas de la biología. Hay puntos en común y las matemáticas pueden ser una herramienta valiosa para las personas que se dedican a la biología.

ALUMNO: `[Con resignación.]` De acuerdo. De acuerdo. ¿Cómo se hace el ejercicio?

Primero vamos a elegir símbolos para los alelos:

- A = el alelo dominante = color azul
- a = el alelo recesivo = color blanco

Las posibles combinaciones son:

- AA = homocigótico color azul
- Aa = heterocigótico color azul
- aA = heterocigótico color azul
- aa = homocigótico color blanco

Por lo tanto, nos dicen que las plantas originales son heterocigóticas de color azul y son Aa (o aA, que para nuestro caso es lo mismo).

Por lo tanto, para obtener la descendencia, tenemos que combinar cada alelo de una planta con cada alelo de la otra. Realmente es un producto cartesiano:

$$\begin{gathered}\{A, a\} \times \{A, a\} = \\ = \{(A, A), (A, a), (a, A), (a, a)\} =\end{gathered}$$

Por comodidad escribiremos cada par de otra manera:

$$= \{AA, Aa, aA, aa\}$$

Solamente uno de los casos corresponde a flores blancas (aa) y hay cuatro casos. Por lo tanto:

$$\begin{gathered}P(\text{blanco}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \\ = \frac{1}{4} = \\ = 0.25 = \\ = 25\,\%\end{gathered}$$

Es una probabilidad de un cuarto. O, lo que es lo mismo, de un 25 por ciento.

12. En un grupo de estudiantes hay 10 chicas aficionadas al *k-pop*, 3 chicas que no son aficionadas al *k-pop*, 5 chicos aficionados al *k-pop* y 2 que no lo son. Calcula:

a) La probabilidad de escoger un aficionado al *k-pop* en el grupo
b) La probabilidad de escoger una chica en el grupo
c) La probabilidad de escoger una chica aficionada al *k-pop*
d) La probabilidad de que, si escogemos una chica, sea aficionada al *k-pop*
e) La probabilidad de que, si escogemos un aficionado al *k-pop*, sea una chica

Primero identificaremos cada uno de los sucesos:

- X = chica
- $\bar{X}$ = chico (consideramos que es el complementario)
- K = aficionado al *k-pop*
- $\bar{K}$ = no aficionado al *k-pop*
- U = conjunto de todos los estudiantes (= conjunto universal)

Nos dicen:

- Hay diez chicas aficionadas al *k-pop*:

$$|X \cap K| = 10$$

- Hay dos chicas no aficionadas al *k-pop*:

$$|X \cap \bar{K}| = 3$$

- Hay cinco chicos aficionados al *k-pop*:

$$|\bar{X} \cap K| = 5$$

- Hay dos chicos no aficionados al *k-pop*:

$$|\bar{X} \cap \bar{K}| = 2$$

Podemos hacer una tabla para visualizar mejor los datos:

	X	$\overline{X}$	
K	10	5	15
$\overline{K}$	3	2	5
	13	7	20

a) La probabilidad de escoger un aficionado al *k-pop* en el grupo es $P(K)$:

$$P(K) = \frac{|K|}{|U|} =$$
$$= \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

b) La probabilidad de escoger una chica en el grupo es $P(X)$:

$$P(X) = \frac{|X|}{|U|} =$$

$$= \frac{13}{20}$$

c) La probabilidad de escoger una chica aficionada al *k-pop* es $P(X \cap K)$:

$$P(X \cap K) = \frac{|X \cap K|}{|U|} =$$
$$= \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

d) La probabilidad de que, si escogemos una chica, sea aficionada al *k-pop* es $P(K|X)$.

Es una probabilidad *condicionada* y la condición es *"si es una chica"*. Se calcula:

$$P(K|X) = \frac{|X \cap K|}{|X|} =$$
$$= \frac{10}{13}$$

Observa que la notación para la probabilidad condicionada se parece a una división. Y a la derecha de la barra vertical aparece el *"divisor"*. Eso puede ayudarte a recordarlo.

e) La probabilidad de que, si escogemos un aficionado al *k-pop*, sea una chica es $P(X|K)$.

También es una probabilidad *condicionada* y la condición es *"si es aficionado al k-pop"*. Se calcula:

$$P(K|X) = \frac{|X \cap K|}{|K|} =$$
$$= \frac{10}{15}$$

13. En un grupo de personas, la probabilidad de escoger un hombre es de 1/4, la probabilidad de escoger un hombre fumador es 1/16 y la probabilidad de escoger una persona que fume es de 1/2. Calcula:

a) La probabilidad de escoger una mujer
b) La probabilidad de escoger un persona que no fume
c) La probabilidad de escoger un hombre no fumador
d) La probabilidad de escoger una mujer fumadora
e) La probabilidad de que, si escogemos un hombre, sea fumador
f) La probabilidad de que, si escogemos un fumador, sea hombre

Primero identificaremos cada uno de los sucesos:

- $\bar{X}$ = hombre
- X = mujer (consideramos que es el complementario)
- F = fumador
- $\bar{F}$ = no fumador
- U = conjunto de todas las personas (= conjunto universal)

Nos dan los siguientes datos:

- La probabilidad de escoger un hombre es de 1/4:

$$P(\bar{X}) = \frac{1}{4}$$

- La probabilidad de escoger un hombre fumador es de 1/16:

$$P(\bar{X} \cap F) = \frac{1}{16}$$

- La probabilidad de escoger una persona que fume es de 1/2:

$$P(F) = \frac{1}{2}$$

Como consideramos que el complementario del conjunto de hombres es el de mujeres (son sucesos contrarios):

$$P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Como el contrario de *fumador* es *no fumador*:

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de escoger un hombre que no sea fumador es:

$$P(\bar{X} \cap \bar{F}) = P(\bar{X}) - P(\bar{X} \cap F) =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

Hemos contestado a los tres primeros apartados:

a) La probabilidad de escoger una mujer es:

$$P(X) = \frac{3}{4}$$

b) La probabilidad de escoger un persona que no fume es:

$$P(\bar{F}) = \frac{1}{2}$$

c) La probabilidad de escoger un hombre no fumador es:

$$P(\bar{X} \cap \bar{F}) = \frac{3}{16}$$

Para contestar el cuarto apartado (d), tenemos que tener en cuenta cuántos fumadores hay y cuántos de ellos son hombres:

$$P(X \cap F) = P(F) - P(\bar{X} \cap F) =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

Por lo tanto:

d) La probabilidad de escoger una mujer fumadora

$$P(X \cap F) = \frac{7}{16}$$

Los dos últimos apartados (e y f) son sobre probabilidad condicional.

e) La probabilidad de que, si escogemos un hombre, sea fumador se escribe:

$$P(F|\bar{X}) =$$

y se puede calcular:

$$= \frac{P(\bar{X} \cup F)}{P(\bar{X})} =$$
$$= \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}$$

f) La probabilidad de que, si escogemos un fumador, sea hombre se escribe:

$$P(\bar{X}|F) =$$

y se puede calcular:

$$= \frac{P(\bar{X} \cup F)}{P(F)} =$$
$$= \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8}$$

14. Entre los dados que se utilizan para los *juegos de rol*, están los cinco sólidos platónicos[a] que, en la jerga del *rol* se llaman a veces D4, D6, D8, D12 y D20.
¿En cuál es más probable obtener un número primo?

[a]Existe un dado D10 de 10 caras, pero no es un sólido platónico.

Los sólidos platónicos (o sólidos perfectos) son el tetraedro regular, el cubo (= el hexaedro regular), el octaedro regular, el dodecaedro regular y el icosaedro regular. Y generalmente se omite la palabra *“regular”*.

El dado D4 es un **tetraedro**, el dado D6 es un **cubo**, el dado D8 es un **octaedro**, el dado D12 es un **dodecaedro** y el dado D20 es un **icosaedro**.

Suponemos que las caras están numeradas desde el 1 hasta el número de lados que tiene el dado. Por lo tanto, los espacios de sucesos E de cada uno de ellos, los sucesos de *ser primo* P y las probabilidades de que sean primos son:

- D4

  $E = \{1, 2, 3, 4\}$

  $P = \{2, 3\}$

$$P(P) = \frac{|P|}{|E|} =$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- D6

  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  $P = \{2, 3, 5\}$

$$P(P) = \frac{|P|}{|E|} =$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- D8

  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

  $P = \{2, 3, 5, 7\}$

$$P(P) = \frac{|P|}{|E|} =$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- D12

  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

  $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$$P(P) = \frac{|P|}{|E|} =$$
$$= \frac{5}{12}$$

- D20

  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$$P(P) = \frac{|P|}{|E|} = \\ = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de que sea primo es la misma para D4, D6 y D8. La probabilidad de que sea primo es algo más pequeña para D12. Y la más pequeña en el caso del dado D20. Es decir:

$$\frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{2}{5}$$

Como se puede comprobar buscando fracciones equivalentes con el mismo denominador. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 60:

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60} > \frac{5}{12} = \frac{25}{60} > \frac{2}{5} = \frac{24}{60}$$

15. Un alumno tiene que hacer un examen que tiene tres preguntas. Sabe que las tres preguntas son de temas diferentes. Y sabe que hay 25 temas diferentes.
El alumno tiene que hacer bien **al menos** dos preguntas para aprobar, pero solamente ha estudiado 15 temas. ¿Cuál es la probabilidad que tiene de aprobar?

¿Cuántas combinaciones de 3 preguntas con temas diferentes existen?

Para la primera pregunta, podemos escoger entre 25 temas. Para la segunda pregunta tenemos que escoger entre 24 temas (no podemos repetir el tema de la primera pregunta). Y para la tercera pregunta tenemos que escoger entre 23 temas, porque hay dos temas que no podemos escoger (el de la primera pregunta y el de la segunda).

Pero el orden no importa, tenemos que dividir entre los modos posibles de ordenar todas las preguntas: $3! = 6$.

Por lo tanto hay:

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = \\ = 2\,300 \text{ exámenes}$$

Hemos calculado las combinaciones de 3 elementos en un conjunto de 25 elementos:

$$\binom{25}{3} = 2\,300$$

Queremos saber cuántos exámenes contienen dos preguntas o tres preguntas que haya estudiado el alumno, porque el alumno aprueba si contesta **al menos** dos bien.

¿Cuántos hay que tienen 3 preguntas de los 15 temas que ha estudiado? Se puede calcular de un modo similar al cálculo anterior:

$$\binom{15}{3} = 455$$

¿Cuántos hay que tiene 2 preguntas de los 15 temas que ha estudiado? Es decir, hay una pregunta de un tema que no ha estudiado. Para la primera pregunta, tenemos que escoger entre 15 y para la segunda entre 14. Pero, como la tercera pregunta debe ser de los temas que no ha estudiado, tenemos: 25 - 15 = 10.

Se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \binom{15}{2} \cdot \binom{10}{1} &= \\ = \binom{15}{2} \cdot 10 &= \\ = 1\,050 \end{aligned}$$

La probabilidad que nos piden es:

$$\begin{aligned} \frac{455 + 1050}{2300} &= \\ = \frac{1505}{2300} &= \\ = \frac{301}{460} &= \\ \approx 0.654347826\ldots \end{aligned}$$

Casi dos tercios.

Podríamos haber calculado la probabilidad de suspender.

- Exámenes en los que no conoce ninguna de las tres preguntas:

$$\begin{aligned} \binom{10}{3} \cdot \binom{15}{0} &= \\ = \binom{10}{3} \cdot 1 &= \\ = \binom{10}{3} &= 120 \end{aligned}$$

- Exámenes en los que no conoce dos de las preguntas:

$$\begin{aligned} \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{1} &= \\ \binom{10}{2} \cdot 15 = 45 \cdot 15 = 675 \end{aligned}$$

Es decir, hay 120 + 675 = 795 exámenes que puede suspender. Las probabilidades de suspender son:

$$\begin{aligned} \frac{795}{2300} &= \\ = \frac{159}{460} &= \\ \approx 0.345652173\ldots \end{aligned}$$

Es decir, un poco más de un tercio.

Sin embargo, este razonamiento asume varias cosas que en la vida real pueden no ser ciertas. Por ejemplo, aunque un alumno haya estudiado los 25 temas, puede hacer mal el ejercicio de un tema que conoce.

El consejo es: **estudia todos los temas y asimílalos**. Que formen parte de ti y salgan de manera natural. Eso se consigue con estudio prolongado a lo largo del tiempo y práctica prolongada.

16. ¿Es espacio muestral o espacio de sucesos?

Son cosas diferentes.

Imagina que lanzas un dado tetraédrico con los vértices numerados del 1 al 4. Hay 4 sucesos elementales:

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

Eso es el **espacio muestral**.

Pero el **espacio de sucesos** está formado por todos los subconjuntos de E:

$$\begin{aligned} S = \quad & \{\varnothing, \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ & \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\ & \{1,2,3,4\}\} \end{aligned}$$

Cada uno de esos subconjuntos de E puede representar un suceso no elemental (o varios). Por ejemplo:

- $\varnothing$ = sale el número 5 (suceso imposible)
- $\{1, 2\}$ = sale un número menor que 3
- $\{1, 3\}$ = sale un número impar
- $\{1, 3, 4\}$ = sale un número distinto de 2
- $\{1, 2, 3, 4\}$ = sale un número

Estadística

La estadística es la parte de las matemáticas que analiza grandes conjuntos de datos para describir todo ese conjunto o para predecir características de un conjunto mayor al que pertenece el conjunto de datos que tenemos.

Si preguntas a un grupo de matemáticos cuál es su rama menos favorita de las matemáticas, probablemente te dirán que es la estadística. Pero esto es solamente mi opinión personal; no he analizado el conjunto de datos de todos los matemáticos del mundo o una parte de ellos. Es decir: no he usado la estadística para obtener una conclusión. Por lo tanto solamente es una *impresión* o una *opinión* personal que puede ser incorrecta.

Eso hace que la estadística sea **imprescindible** para analizar la realidad. Las ciencias naturales (la física, la química, la biología y la geología), las ingenierías (que para mí incluyen, en cierto sentido, a la medicina y la veterinaria), las ciencias sociales (la sociología, la economía...), la psicología e incluso las Humanidades (la lingüística, la historia...)... Todas ellas llegan a mejores resultados cuando analizan los datos con las herramientas de la estadística.

1. ¿Qué problemas tiene la realización de un **censo**?

Una población es el conjunto de todos los valores que tiene de una variable estadística. Por ejemplo:

- todas las medidas de las estaturas (= las alturas) de cada uno de los habitantes de Nové Mesto nad Váhom
- todas las medidas de los pesos (o las masas, si queremos ser más precisos desde el punto de vista de la física) de las personas que cruzan un puente a lo largo de un día
- todas las parejas de longitudes y periodos de oscilación de todos los péndulos simples que existen, han existido o existirán
- ...

Una **muestra** es la medida de una parte de una población. Para una población determinada se pueden coger muchas muestras diferentes. Cuando el tamaño de una muestra coincide con el tamaño de la población, tenemos un **censo**.

Por ejemplo:

- si la población es el conjunto de todas las estaturas de todos los habitantes de Nové Mesto nad Váhom
- una muestra puede ser el conjunto de 100 estaturas de personas que se han encontrado en la Plaza de la Libertad de la ciudad
- una muestra puede ser el conjunto de 50 estaturas de personas que se han encontrado en la Plaza de la Libertad y en las entradas de la iglesia católica y la iglesia evangélica
- un censo es el conjunto de las medidas de todas las estaturas de todos los habitantes de Nové Mesto nad Váhom

No siempre es posible hacer un censo.

- puede que sea necesario demasiado tiempo para realizar el censo y los datos cambien en ese periodo de tiempo

  Si tardamos varios meses en hacer un censo de las estaturas de un conjunto de personas y hay niños, probablemente las estaturas hayan cambiado mucho.

- puede que sea complicado por cuestiones económicas y logísticas

  Si queremos hacer un censo de las alturas de todos los habitantes de Eslovaquia, ¿cuántas personas tienen que hacer las medidas? ¿Cómo convencemos a toda la población para que se mida? ¿Cómo y dónde se van a hacer las medidas? ...

- puede que sea económicamente inviable

  Si tenemos una empresa que fabrica bombillas y queremos comprobar la duración de las bombillas, si hacemos un censo, **tenemos que comprobar la duración de todas las bombillas**. Entonces no venderíamos ninguna bombilla.

- puede que la población sea infinita

  ¿Es posible hacer un censo de todas las parejas de longitudes y periodos de oscilación de todos los péndulos simples que existen, han existido o existirán? No, porque a efectos prácticos es una población infinita.

2. Se pregunta a 10 personas cuántos libros leen al cabo de un mes. Las respuestas son: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3.

a) Construye una tabla estadística con la frecuencia absoluta, la frecuencia absoluta acumulada, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada.
b) Calcula los parámetros de centralización de la población.
c) Calcula los parámetros de dispersión de la población.

La frecuencia absoluta simple f_i indica el número de veces que aparece un valor x_i. Para contar, es aconsejable tachar de diferentes maneras cada valor distinto.

x_i	f_i	F_i
1	3	
2	5	
3	2	

La suma de todas las frecuencias absolutas simples es el número de datos:

x_i	f_i	F_i
1	3	
2	5	
3	2	
	$N = f_i$	
	10	

La frecuencia absoluta acumulada F_i es el número de datos que son menores o iguales que x_i. O, lo que es lo mismo, $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$:

x_i	f_i	F_i
1	3	3
2	5	8
3	2	10
	$N =$ f_i	
	10	

La última frecuencia acumulada coincide con el número de datos. (Siempre lo hace.)

La frecuencia relativa [simple] h_i se obtiene dividiendo f_i entre N:

x_i	f_i	F_i	h_i
1	3	3	$\frac{3}{10}$
2	5	8	$\frac{5}{10}$
3	2	10	$\frac{2}{10}$
	N		h_i
	10		1

La frecuencia relativa acumulada H_i se obtiene dividiendo F_i entre N o $H_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_i$:

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	3	3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	5	8	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$
3	2	10	$\frac{2}{10}$	$\frac{10}{10}$
	N		h_i	
	10		1	

Para poder calcular las medidas o parámetros de centralización y dispersión, es conveniente calcular $x_i \cdot f_i$ y $x_i^2 \cdot f_i$:

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	3	3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	3	3
2	5	8	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$	10	20
3	2	10	$\frac{2}{10}$	$\frac{10}{10}$	6	18
	N		h_i		$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
	10		1		19	41

Las **medidas de centralización** son:

- la **media aritmética simple**:

$$\bar{x} = \frac{x_i \cdot f_i}{f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{19}{10} = 1.9$$

- la **moda** es el dato que más se repite. Es decir, el dato para el que f_i es más grande:

$$\text{Moda} = 3$$

Como solamente hay una moda, los datos son *unimodales*.

- la **mediana** es el dato que queda en la mitad de todos los datos si los ordenamos. Para encontrarlo calculamos la mitad del número de datos: N/2 = 5. La frecuencia acumulada

F_i alcanza este valor por primera vez cuando x_i es 2 (el dato anterior tiene una frecuencia acumulada de 3, que es menor que 5).

$$\text{Mediana} = 2$$

Otro modo de verlo:

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3$$

La mitad de los datos está…

$$1, 1, 1, 2, 2, \boxed{\textbf{aquí}}, 2, 2, 2, 3, 3$$

5 datos están a la derecha y 5 a la izquierda. Como está entre dos números 2, la media es 2.

Las **medidas de dispersión** son:

- el rango o recorrido, que es la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño:

$$\text{rango} = \text{recorrido} = 3 - 1 = 2$$

- la **varianza** s_x^2:

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$
$$s_x^2 = \frac{41}{10} - 1.9^2$$
$$s_x^2 = 4.1 - 1.9^2$$
$$s_x^2 = 4.1 - 3.61$$
$$s_x^2 = 0.49$$

- la **desviación típica** o **desviación estándar** s_x:

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$
$$s_x = \sqrt{0.49}$$
$$s_x = 0.7$$

- el **coeficiente de variación** CV:

$$CV = \frac{s_x}{\bar{x}}$$
$$CV = \frac{0.7}{1.9}$$
$$CV \approx 0,368$$

Es de un 36,8 %.

Un coeficiente pequeño indica que la mayoría de los datos está muy cerca de la media aritmética. Un coeficiente grande, indica que los datos están muy dispersos. Muy *separados* de la media aritmética simple.

> **3**. ¿Qué relación hay entre las dos fórmulas de la varianza?

La varianza de una variable estadística x se puede calcular:

$$s_x^2 = \frac{(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}$$

o también:

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

Podemos demostrar que son iguales de varias maneras. Una de ellas es transformando una fórmula en la otra. Vamos a transformar la primera en la segunda:

$$s_x^2 = \frac{(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}$$

Por la identidad notable del cuadrado de una resta:

$$s_x^2 = \frac{(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x}) \cdot f_i}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i + \bar{x}^2 \cdot f_i - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x} \cdot f_i}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \frac{\bar{x}^2 \cdot f_i}{N} - \frac{2 \cdot x_i \cdot \bar{x} \cdot f_i}{N}$$

Hay cosas que son constantes y podemos sacar de las sumatorias:

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \bar{x}^2 \cdot \frac{f_i}{N} - 2\bar{x} \cdot \frac{x_i \cdot f_i}{N}$$

Pero la suma de todas las frecuencias es N: $\quad f_i = N$.

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \bar{x}^2 \cdot \frac{N}{N} - 2\bar{x} \cdot \frac{x_i \cdot f_i}{N}$$

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot \frac{x_i \cdot f_i}{N}$$

Y la última fracción es, por definición, la media aritmética simple $\bar{x}$:

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x}$$

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2$$

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$\blacksquare$$

Como queríamos demostrar.

4. La nota media de un alumno es de un 75 por ciento. El alumno recuerda tres de sus notas (60 por ciento, 70 por ciento y 80 por ciento). Pero no recuerda la cuarta. ¿Cuál es el valor de la cuarta?

Suponiendo que todas las notas tienen el mismo peso (la misma importancia), la nota media es la *media aritmética simple*:

$$\bar{x} = \frac{x_i \cdot f_i}{N}$$

En nuestro caso:

$$75 = \frac{60 \cdot 1 + 70 \cdot 1 + 80 \cdot 1 + x_4 \cdot 1}{4}$$
$$4 \cdot 75 = 60 + 70 + 80 + x_4$$
$$300 = 210 + x_4$$
$$x_4 = 90$$

La nota que no recordaba es un 90 por ciento.

5. Un alumno español tiene las siguientes notas:

a) Tres exámenes importantes: $10, 9, 6$
b) Dos exámenes pequeños: $10, 8$
c) Dos tareas entregadas: $6, 7$

Si los exámenes importantes tienen un peso del 100 %; los pequeños, del 50 % y las tareas, del 25 %; ¿cuál es su nota final?

Como las notas tienen importancias diferentes, **no podemos calcular la media aritmética simple**. Tenemos que calcular la **media aritmética ponderada**:

$$\frac{10 \cdot 100 + 9 \cdot 100 + 6 \cdot 100 + 10 \cdot 50 + 8 \cdot 50 + 6 \cdot 25 + 7 \cdot 25}{100 + 100 + 100 + 50 + 50 + 25 + 25} =$$
$$= \frac{3725}{450} =$$
$$\approx 8.28$$

Esa nota, en España, sería un **notable**[47]. Lo que en Eslovaquia es un 2.

6. ¿Qué es una muestra estadística? ¿Cuándo podemos decir que una muestra es significativa?

Una **población estadística** es el conjunto de todos los valores de una variable estadística (o de varias variables estadísticas) que se pueden medir. Por ejemplo: las estaturas (= las alturas) de todos los habitantes de Nové Mesto nad Váhom, el género musical favorito de todos los habitantes de Europa...

Una **muestra** es la medida de esos valores. Y normalmente la muestra tiene un tamaño menor que la población entera; hay razones por las cuales puede ser muy difícil, muy inconveniente o

[47]Sí, como las identidades notables.

incluso imposible, hacer una muestra de toda la población. (Una muestra del tamaño de una población se llama **censo**.)

La acción de tomar una muestra se llama **muestrear**.

Decimos que una muestra es representativa de una población cuando las propiedades de la muestra describen bien las propiedades de la población.

Imaginemos que estudiamos la cantidad de libros que lee una persona en un mes en la ciudad de Trenčín:

- Si escogemos a una sola persona o a dos personas, es difícil que la muestra sea significativa de toda la población. La muestra no es significativa porque es demasiado pequeña.
- Si escogemos solamente a las personas que salen de la biblioteca pública es probable que la muestra no sea significativa porque es probable que las personas que vayan a la biblioteca lean más que las personas que no van a la biblioteca.
- ...

La parte de la estadística que da modos de saber el tamaño que debe tener una muestra para que sea significativa y cómo debe tomarse la muestra es la **estadística inferencial**. Y esa parte está fuera del temario que se estudia en un instituto eslovaco.

Miscelánea

Una *"miscelánea"* es una mezcla de cosas. Este capítulo se llama así porque contiene ejercicios que unen o mezclan conceptos de temas distintos.

Al principio del libro, decía que las matemáticas son como un continente. Pero las fronteras entre una parte y otra no existen en realidad. Todo está interconectado con todo. Y a veces las conexiones son sorprendentes e inesperadas.

Si has visto los ejercicios de capítulos anteriores, habrás observado que, por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas aparecen en muchos sitios diferentes. O que usamos los símbolos de la teoría de conjuntos y de la lógica en todos lados. Y probablemente tú puedes poner muchos más ejemplos.

Piensa que, por ejemplo, una ecuación lineal de dos incógnitas (*álgebra*) se puede representar como una recta (*geometría*) y no es nada más que una representación de una función afín (*funciones*) o un conjunto de puntos en el plano donde los puntos son pares cartesianos (*teoría de conjuntos*). O piensa como el teorema del binomio de Newton (*álgebra*) incluye los coeficientes binomiales que cuentan el número de combinaciones posibles de los términos del binomio (*combinatoria*)...

He intentado que los ejercicios de este capítulo sean mezclas que podrían encajar en varios capítulos a la vez. Pero a la vez, por contener cosas de varios temas, no encajarían bien en ningún capítulo concreto.

Intenta hacerlos sin mirar las respuestas.

Como no conoces el contexto de cada ejercicio (no sabes a qué *"capítulo"* o *"tema"* pertenece), descubrirás mejor qué sabes y qué no sabes. Verás si eres capaz de detectar correctamente un problema y buscar las herramientas necesarias en toda tu *caja de herramientas*. Y también es posible que encuentres las respuestas correctas con métodos mejores que los que doy yo.

En matemáticas siempre hay más de un camino correcto entre el punto de partida y el destino.

1. Sea el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{rcrcl} \sin\alpha\cdot x & + & \cos\alpha\cdot y & = & 0 \\ \cos\alpha\cdot x & - & \sin\alpha\cdot y & = & 1 \end{array}$$

Resuelve el sistema para las incógnitas x e y según el parámetro α.

A pesar de que aparecen senos y cosenos, se trata de un sistema de ecuaciones lineales; los senos y cosenos tienen como argumento un parámetro, no una incógnita. Los senos y cosenos de alfa solamente son coeficientes y, por lo tanto, es fácil ver que las ecuaciones son lineales en x e y.

Hay numerosas maneras de resolver el sistema de ecuaciones: igualación, reducción, sustitución, regla de Cramer...

Vamos a resolver el sistema varias veces de varias maneras diferentes:

1. Por sustitución:

   Despejamos y de la primera ecuación:

$$\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y = 0$$
$$\cos\alpha \cdot y = -\sin\alpha \cdot x$$
$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$$

   Aunque el seno partido el coseno es igual a la tangente, dejaremos así la expresión.

   Ahora sustituimos la expresión que es igual a y en la segunda ecuación:

$$\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x = 1$$

   Si multiplicamos todo por el coseno de alfa:

$$\cos^2\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) \cdot x = \cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha \cdot x + \sin^2\alpha \cdot x = \cos\alpha$$

   Si sacamos x como factor común:

$$x \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos\alpha$$

   Pero, según el **teorema fundamental de la trigonometría**, el cuadrado del seno de un ángulo más el cuadrado del coseno del mismo ángulo siempre es igual a uno:

$$x = \cos\alpha$$

   Como y es:

$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$$

   entonces:

$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$$
$$y = -\sin\alpha$$

   Por lo tanto:

$$K = \{(x, y)\} = \{(\cos\alpha, -\sin\alpha)\}$$
$$|K| = 1 \Rightarrow \texttt{SCD}$$

2. Por igualación:

   Despejamos y de la primera ecuación:

$$\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y = 0$$
$$\cos\alpha \cdot y = -\sin\alpha \cdot x$$
$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$$

   Despejamos y de la segunda ecuación:

$$\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y = 1$$
$$\cos\alpha \cdot x - 1 = \sin\alpha \cdot y$$
$$\frac{\cos\alpha \cdot x - 1}{\sin\alpha} = y$$
$$y = \frac{\cos\alpha \cdot x - 1}{\sin\alpha}$$

   Igualamos las dos expresiones para y:

$$-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x = \frac{\cos\alpha \cdot x - 1}{\sin\alpha}$$

   Multiplicamos ambos lados por el seno de alfa y por el coseno de alfa. Hacemos esto para eliminar los denominadores.

$$-\sin^2\alpha \cdot x = \cos^2\alpha \cdot x - \cos\alpha$$

   Llevamos todos los términos con x al mismo lado y los términos independientes al lado contrario:

$$\cos\alpha = \cos^2\alpha \cdot x + \sin^2\alpha \cdot x$$

   Sacamos x como factor común:

$$\cos\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \cdot x$$

   Por el **teorema fundamental de la trigonometría**, la expresión entre paréntesis es igual a 1:

$$\cos\alpha = x$$
$$x = \cos\alpha$$

   Si sustituimos en:

$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$$

tenemos:

$$y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha$$
$$y = -\sin\alpha$$

$$K = \{(x,y)\} = \{(\cos\alpha, -\sin\alpha)\}$$
$$|K| = 1 \Rightarrow \texttt{SCD}$$

3. Por reducción:

   Si E_1 es la primera ecuación y E_2 es la segunda ecuación, podemos eliminar la incógnita y si multiplicamos la ecuación 1 por el seno de alfa y la ecuación 2 por el coseno de alfa y sumamos ambas:

$$\sin\alpha\cdot E_1 + \cos\alpha\cdot E_2$$

$$\sin\alpha(\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y) +$$
$$\cos\alpha(\cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y) =$$
$$= \sin\alpha\cdot 0 + \cos\alpha\cdot 1$$

$$\sin^2\alpha\cdot x + \cos^2\alpha\cdot x = \cos\alpha$$

   Si sacamos x como factor común:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot x = \cos\alpha$$

   Pero, por el **teorema fundamental de la trigonometría**, la expresión entre paréntesis es igual a 1:

$$x = \cos\alpha$$

   Ahora podemos sustituir en una de las ecuaciones o usar reducción para eliminar x. Vamos a usar reducción para eliminar x. Para eso, multiplicamos la primera ecuación por el coseno de alfa, la segunda, por el seno de alfa y restamos:

$$\cos\alpha\cdot E_1 - \sin\alpha\cdot E_2$$

$$\cos^2\alpha\cdot y + \sin^2\alpha\cdot y = -\sin\alpha$$

   Si sacamos y como factor común:

$$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\cdot y = -\sin\alpha$$

Por el **teorema fundamental de la trigonometría**:

$$y = -\sin\alpha$$

$$K = \{(x, y)\} = \{(\cos\alpha, -\sin\alpha)\}$$
$$|K| = 1 \Rightarrow \texttt{SCD}$$

4. Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{matrix} 0 & \cos\alpha \\ 1 & -\sin\alpha \end{matrix}}{\begin{matrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{matrix}}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 \end{matrix}}{\begin{matrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{matrix}}$$

Tenemos 3 determinantes distintos de orden 2 que son muy fáciles de calcular; solamente tenemos que hacer el producto de la diagonal principal y restarle el producto de la diagonal secundaria:

$$x = \frac{-\cos\alpha}{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$
$$y = \frac{\sin\alpha}{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

Multiplicando por -1 los numeradores y los denominadores:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$
$$y = \frac{-\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

Pero, por el **teorema fundamental de la trigonometría**, los denominadores son iguales a 1:

$$x = \cos\alpha$$
$$y = -\sin\alpha$$

$$K = \{(x, y)\} = \{(\cos\alpha, -\sin\alpha)\}$$
$$|K| = 1 \Rightarrow \texttt{SCD}$$

2. Sean las parábolas $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = -x^2 + 10x + 24$. Encuentra la ecuación de la línea recta que une los vértices de ambas parábolas. Encuentra los puntos en los que la recta corta los ejes de coordenadas.

La parábola de la función $f(x)$ es una parábola vertical *feliz*, porque el coeficiente líder es positivo (es 1). La parábola de la función $g(x)$ es una parábola vertical *triste*, porque el coeficiente líder es negativo (es -1).

Encontrar los vértices de las dos parábolas es relativamente sencillo; sabemos que para cualquier función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

las coordenadas del vértice son:

$$V = (x_v, y_v) = \quad \frac{-b}{2a}, f(x_v)$$

Encontramos las de la parábola de $f(x)$:

$$x_v[f] = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$
$$y_v[f] = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

Llamaremos F a ese vértice:

$$F = (1, -4)$$

Encontramos las de la parábola de $g(x)$:

$$x_v[g] = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$$
$$y_v[g] = g(5) = -(5)^2 + 10 \cdot 5 + 24 = 49$$

Llamaremos G a ese vértice:

$$G = (5, 49)$$

Para la recta que une los vértices F y G necesitamos un vector director. Por ejemplo, el vector que va desde F hasta G:

$$\overrightarrow{FG} = G - F = (5, 49) - (1, -4)$$
$$\overrightarrow{FG} = (4, 53)$$

Una ecuación continua de esa recta es:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+4}{53}$$

Ahora que tenemos una de las ecuaciones de la recta, podríamos encontrar los puntos de intersección con los ejes sustituyendo $x = 0$ y despejando y para encontrar uno de los puntos y después haciendo lo mismo con $y = 0$ y despejando x.

Sin embargo, vamos a hacerlo encontrando la ecuación canónica o segmentaria de la recta.

$$53(x-1) = 4(y+4)$$
$$53x - 53 = 4y + 16$$
$$53x - 4y = 16 + 53$$
$$53x - 4y = 69$$
$$\frac{53x}{69} - \frac{4y}{69} = 1$$
$$\frac{x}{69/53} + \frac{y}{-69/4} = 1$$

Es decir, la recta corta:

- el eje X en:
$$\frac{69}{53}, 0$$
- el eje Y en:
$$0, \frac{-69}{4}$$

3. Un cuadrado tiene de vértices los puntos (0, 0), (4, 0), (4, 4) y (0, 4). El cuadrado es atravesado por la línea recta de ecuación $r \equiv -x + y = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un punto del cuadrado aleatoriamente esté por debajo de esa recta? (Suponemos que todos los puntos son equiprobables.)

La probabilidad estará relacionada con el área total del cuadrado y el área del cuadrado que esté por encima de la recta.

En este caso, es conveniente hacer el dibujo; nos ayuda a visualizar el problema.

Para eso, vamos a hacer una tabla de valores para dibujar la recta r. Si despejamos y de la ecuación de la recta, nos queda: $y = x + 1$. La pendiente de la recta (el coeficiente líder) es 1 y es positivo, por lo que la recta es creciente. La ordenada en el origen también es 1, lo cual nos indica que la recta corta el eje Y en el punto (0, 1).

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

Hemos calculado cinco puntos, pero realmente sólo necesitamos 2 puntos para dibujar la recta. Sin embargo, en este problema en particular, es útil tener esos puntos adicionales.

Por el dibujo, se ve claramente que el cuadrado queda dividido en dos zonas por la recta: un triángulo arriba y un pentágono irregular abajo.

El área total del cuadrado es:

$$A = 4 \cdot 4 = 16$$

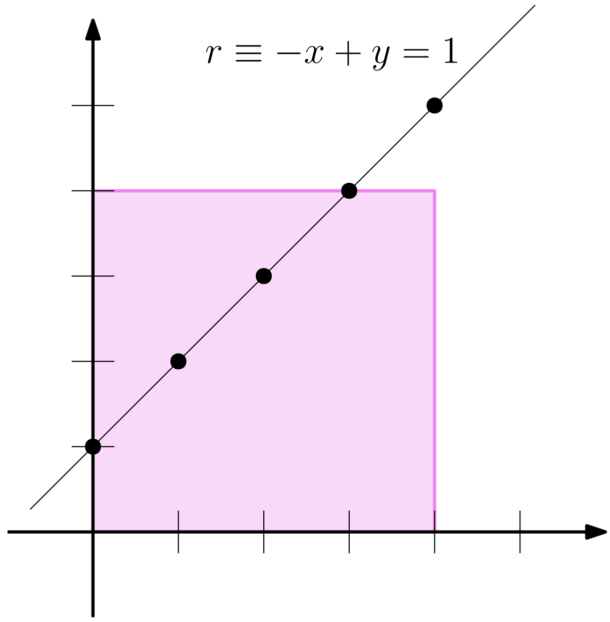


Figura 118: El cuadrado de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4) y (0, 4) y la recta $r \equiv -x + y = 1$.

El área del triángulo superior es sencilla de calcular; el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura. Tanto la base como la altura son de 3 unidades. Por lo tanto:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

El área del pentágono inferior se calcula restando:

$$\begin{gathered} A_{\text{pentágono}} = A - A_{\text{triángulo}} = \\ = 16 - \frac{9}{2} = \frac{32}{2} - \frac{9}{2} = \frac{23}{2} \end{gathered}$$

La probabilidad de que esté debajo es igual al área del pentágono dividida entre el área total del cuadrado:

$$P = \frac{23/2}{16} = \frac{23}{32}$$

$$P = 0.71875 = 71.875\,\%$$

4. Las ecuaciones de movimiento de un tiro parabólico (en unidades del *Sistema Internacional*) son:

$$\begin{aligned} x &= 30t \\ y &= 10 + 10t - 5t^2 \end{aligned}$$

Encuentra la ecuación de la trayectoria y el punto más alto del movimiento.

Nos dan dos ecuaciones: una para la coordenada X del objeto y otra para la coordenada Y del objeto. Es decir, nos dan las **ecuaciones paramétricas** de la trayectoria, donde el parámetro t es el tiempo.

Para encontrar la ecuación implícita de la trayectoria, necesitamos eliminar el parámetro. Si despejamos t de la primera ecuación:

$$t = \frac{x}{30}$$

podemos sustituir en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} y &= 10 + 10 \cdot \frac{x}{30} - 5 \cdot \left(\frac{x}{30}\right)^2 \\ y &= 10 + \frac{1}{30} \cdot x - \frac{5}{900} \cdot x^2 \\ y &= 10 + \frac{1}{30} \cdot x - \frac{1}{180} \cdot x^2 \end{aligned}$$

Ya tenemos la ecuación implícita de la trayectoria. Y, reordenando:

$$y = -\frac{1}{180} \cdot x^2 + \frac{1}{30} \cdot x + 10$$

vemos que y es una función cuadrática en x. Por lo tanto, la curva (la trayectoria) es una parábola[48].

Como el coeficiente líder es negativo, la parábola es una parábola de curvatura negativa. Es una parábola **triste**. Y el vértice de la parábola será el punto más alto.

El vértice de una parábola $ax^2 + bx + c$ está en:

$$\begin{aligned} x_v = \frac{-b}{2a} &= \frac{-1/30}{2 \cdot (-1/180)} = \\ &= \frac{-(-180)}{2 \cdot 30} = \\ &= \frac{180}{60} = \\ &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_v &= y(x_v) = y(3) = \\ &= -\frac{1}{180} \cdot 3^2 + \frac{1}{30} \cdot 3 + 10 = \\ &= -\frac{9}{180} + \frac{1}{10} + 10 = \\ &= -\frac{9}{180} + \frac{18}{180} + \frac{1800}{180} = \\ &= \frac{-9 + 18 + 1800}{180} = \\ &= \frac{1809}{180} = \end{aligned}$$

[48]No era una sorpresa, ¿verdad? Por esa razón se llama "tiro **parabólico**".

$$= \frac{201}{20} =$$
$$= 10.05 \text{ m}$$

La altura máxima es de 10 metros y ¡5 centímetros!

5. Muchos alumnos comenten un error muy grave cuando escriben:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

en lugar de:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

¿Hay alguna dupla[a] (x, y) para la que sea cierta la expresión que escriben los alumnos que cometen el error?

[a]Es decir, alguna pareja.

La identidad notable:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

nos dice que el cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados **más el doble del producto** de los números. Y es una **identidad** porque es verdadera siempre, para cualquier pareja de valores (x, y), si x e y son números reales (o números complejos).

La expresión:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

no es una identidad, sino una ecuación. Porque se cumplirá solamente para algunos valores.

Si usamos la identidad notable en el lado izquierdo de la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2$$
$$2xy = 0$$
$$xy = 0$$
$$x \cdot y = 0$$

Y un producto es cero si y solamente si alguno de los números es cero:

$$x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$$

Es decir, la expresión errónea solamente es cierta si alguno de los números es cero.

6. Resuelve la siguiente ecuación:

$$9^{\sin^2 x} = 3 - 9^{\cos^2 x}$$

La ecuación parece terrible e imposible porque combina razones trigonométricas y exponenciales. En las ecuaciones trigonométricas es habitual intentar que solamente aparezca una razón trigonométrica y aquí aparecen 2 (el cuadrado de un seno y el cuadrado de un coseno).

El teorema fundamental de la trigonometría es:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Por lo que:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Sustituyendo en nuestra ecuación:

$$9^{\sin^2 x} = 3 - 9^{1-\sin^2 x}$$

Por las propiedades de las potencias:

$$9^{\sin^2 x} = 3 - 9^1 \cdot 9^{-\sin^2 x}$$
$$9^{\sin^2 x} = 3 - 9 \cdot 9^{-\sin^2 x}$$
$$9^{\sin^2 x} = 3 - 9 \cdot \quad 9^{\sin^2 x} \quad {}^{-1}$$

Ahora podemos hacer un cambio de variable:

$$x \to t = 9^{\sin^2 x}$$

Con lo que la ecuación queda:

$$t = 3 - 9t^{-1}$$

Multiplicando por t:

$$t^2 = 3t - 9$$
$$t^2 - 3t + 9 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática:

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

El discriminante es claramente negativo, por lo que no existen soluciones reales.

$$K = \{\} = \varnothing$$
$$|K| = 0$$

7. Resuelve la siguiente ecuación:

$$4^{2\cos^2 x} - 16^{\sin^2 x} = 6$$

Es una ecuación similar a la anterior. Podemos cambiar el cuadrado del seno por el cuadrado del coseno o viceversa usando el teorema fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Con lo que la ecuación queda:

$$4^{2\cos^2 x} - 16^{1-\cos^2 x} = 6$$

Por las propiedades de las potencias:

$$4^{2^{\cos^2 x}} - 16^{1-\cos^2 x} = 6$$
$$16^{\cos^2 x} - 16^{1-\cos^2 x} = 6$$
$$16^{\cos^2 x} - 16^1 \cdot 16^{-\cos^2 x} = 6$$
$$16^{\cos^2 x} - \frac{16}{16^{\cos^2 x}} = 6$$

Hacemos el cambio de variable:

$$x \to t = 16^{\cos^2 x}$$

$$t - \frac{16}{t} = 6$$

Multiplicando por t y reordenando:

$$t^2 - 16 = 6t$$
$$t^2 - 6t - 16 = 0$$

Nos queda una ecuación cuadrática en t:

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} =$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} =$$
$$= \frac{6 \pm 10}{2} =$$
$$= 3 \pm 5$$

$$t_1 = -2 \wedge t_2 = 8$$

Al deshacer el cambio de variable tenemos dos ecuaciones:

$$16^{\cos^2 x} = -2$$

$$16^{\cos^2 x} = 8$$

Para que sea más claro, vamos a hacer un cambio de variable adicional:

$$x \to y = \cos^2 x$$

$$16^y = -2$$

$$16^y = 8$$

Como una exponencial real no puede ser negativa, solamente la segunda ecuación nos dará soluciones reales:

$$16^y = 8$$

Factorizando:

$$2^{4\ \ y} = 2^3$$

$$2^{4y} = 2^3$$

$$4y = 3$$

$$y = \frac{3}{4}$$

Ahora tenemos que deshacer el cambio de variable:

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El coseno es positivo en el primer cuadrante y en el cuarto cuadrante y es negativo en el segundo cuadrante y en el tercer cuadrante. El ángulo en el primer cuadrante es 30°, el ángulo en el cuarto cuadrante es 360° - 30° = 330°, el ángulo en el segundo cuadrante es 180° - 30° = 150° y el ángulo en el tercer cuadrante es 180° + 30° = 210°.

Tenemos 4 familias de soluciones:

$$K_1 = \{30° + n \cdot 360°;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$K_2 = \{150° + n \cdot 360°;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$K_3 = \{210° + n \cdot 360°;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$K_4 = \{330° + n \cdot 360°;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Podemos combinar las soluciones en dos conjuntos:

$$K_I = K_1 \cup K_3 = \{30^\circ + n \cdot 180^\circ;\ n \in \mathbb{Z}\}$$
$$K_{II} = K_2 \cup K_4 = \{150^\circ + n \cdot 180^\circ;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

El conjunto de soluciones es:

$$K = K_I \cup K_{II}$$
$$K = \{30^\circ + n \cdot 180^\circ\} \cup \{150^\circ + n \cdot 180^\circ\}$$

Y su cardinalidad es álef sub cero. Es decir, es un conjunto infinito numerable:

$$|K| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

8. Se sabe que la siguiente fórmula es cierta:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Que equivale a:

$$e^{-1} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots$$

El escritor Isaac Asimov (1920-1922) en un ensayo llamado *“Signos de admiración”*[a]) reescribía la serie anterior de la siguiente manera:

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} - \frac{7}{8!} \dots$$

y la llamaba *serie de Asimov*.
Demuestra que es correcta.

[a]*“Exclamation Point!”* se publicó por primera vez en la revista *The Magazine of Fantasy and Science Ficción* en julio de 1965. El ensayo aparece en varias de sus colecciones de ensayos.

La serie original para e^{-1} es:

$$e^{-1} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots$$

es decir:

$$e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Pero el factorial de 0 y el factorial de 1 son 1:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$
$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Podemos escribir unos cuantos términos más:

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \dots$$

La expresión empieza a parecerse a la serie de Asimov. Pero en la serie de Asimov no aparecen factoriales de números impares. Eso nos da la idea de agrupar términos:

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \quad \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \quad - \quad \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} \quad \dots$$

El mínimo común múltiplo de 3! y de 4! es 4!, el mínimo múltiplo de 5! y 6! es 6!... Y como 4! = 4 · 3!, 6! = 6 · 5!...

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \quad \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} \quad - \quad \frac{6}{6!} - \frac{1}{6!} \quad \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} \dots$$

Tal y como queríamos demostrar.

Se puede escribir:

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+2)!}$$

Cuando se trabaja con series infinitas, hay que ser cuidadoso; propiedades que tienen las sumas finitas no se cumplen siempre en sumas infinitas.

8. Demuestra la fórmula de la cardinalidad del conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

El conjunto potencia de A es el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A.

Si el conjunto A tiene, por ejemplo, 2 elementos:

- hay 1 subconjunto con 0 elementos (el vacío)
- hay 2 subconjuntos con 1 elemento
- hay 1 subconjunto con 2 elementos (el propio conjunto)

Si el conjunto A tiene, por ejemplo, 3 elementos:

- hay 1 subconjunto con 0 elementos (el vacío)
- hay 3 subconjuntos con 1 elemento
- hay 3 subconjuntos con 2 elementos
- hay 1 subconjunto con 3 elementos (el propio conjunto)

Es fácil ver que, si el conjunto tiene $|A| = n$ elementos, entonces hay $\binom{n}{m}$ conjuntos con m elementos. Por lo tanto:

$$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Que se puede escribir también:

$$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}$$

¿Hay algún modo de demostrar que es igual a 2^n? Vamos a hacer una pequeña transformación

$$2^n = (1+1)^n =$$

y ahora aplicamos el teorema del binomio de Newton:

$$= \binom{n}{0} 1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1} 1^1 \cdot 1^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} 1^n \cdot 1^{n-n} =$$

Pero todas las potencias de 1 son iguales a 1, por lo que:

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} =$$

que, por lo que habíamos visto, es precisamente:

$$= |\mathcal{P}(A)|$$

$$\blacksquare$$

Como queríamos demostrar.

9. Resuelve la ecuación:

$$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{40}x + \sqrt{12} = 0$$

Cuando estudias ecuaciones cuadráticas, puedes llegar a dos conclusiones equivocadas: 1) que los coeficientes siempre son números enteros, 2) que las soluciones siempre son números racionales. La conclusión 2 es un error conceptual muy grave. Este ejercicio es un ejemplo en el que los coeficientes no son ni enteros, ni racionales: son números irracionales.

$$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{40}x + \sqrt{12} = 0$$

Usando la fórmula:

$$x = \frac{\sqrt{40} \pm \sqrt{(-\sqrt{40})^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40} \pm \sqrt{40 - 4 \cdot \sqrt{3 \cdot 12}}}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40} \pm \sqrt{40 - 4 \cdot \sqrt{36}}}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40} \pm \sqrt{40 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40} \pm \sqrt{16}}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{40} \pm 4}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

El número 40 es 4 por 10:

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 10} \pm 4}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10} \pm 4}{2 \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{10} \pm 2}{\sqrt{3}} =$$

Podemos racionalizar:

$$= \frac{\sqrt{10} \pm 2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{10} \pm 2) \cdot \sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{30} \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Por lo tanto:

$$K = \quad \frac{\sqrt{30} + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{30} - 2\sqrt{3}}{3}$$

$$|K| = 2$$

La ecuación tiene coeficientes irracionales y soluciones irracionales.

10. Encuentra el mínimo de la función:

$$f(x) = \mathop{}_{n=1}^{4} (x - n) \cdot (2x + 3n)$$

La letra sigma mayúscula, o, para ser más precisos, el símbolo sumatorio, es un modo de abreviar una suma. Es decir, la función que definen es:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (2x + 3 \cdot 1) + (x - 2) \cdot (2x + 3 \cdot 2) +$$
$$+ (x - 3) \cdot (2x + 3 \cdot 3) + (x - 4) \cdot (2x + 3 \cdot 4)$$

Pero vamos a intentar trabajar con la expresión original:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} (x-n)\cdot(2x+3n)$$

Hacemos la multiplicación:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} 2x^2 + 3nx - 2nx - 3n^2$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} 2x^2 + nx - 3n^2$$

Podemos separar la sumatoria en tres sumatorias:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} 2x^2 + \sum_{n=1}^{4} nx - \sum_{n=1}^{4} 3n^2$$

Y podemos sacar de la sumatoria todos los factores que no llevan el índice de la sumatoria:

$$f(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{4} 1 + x \sum_{n=1}^{4} n - 3 \sum_{n=1}^{4} n^2$$

Sumar 1 cuatro veces es igual a 4:

$$f(x) = 2x^2 \cdot 4 + x \sum_{n=1}^{4} n - 3 \sum_{n=1}^{4} n^2$$

$$f(x) = 8x^2 + x \sum_{n=1}^{4} n - 3 \sum_{n=1}^{4} n^2$$

La suma siguiente es fácil de calcular:

$$\sum_{n=1}^{4} n = 1+2+3+4 = 10$$

por lo que:

$$f(x) = 8x^2 + 10x - 3 \sum_{n=1}^{4} n^2$$

Y la última suma es:

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$$

Por lo tanto:

$$f(x) = 8x^2 + 10x - 3\cdot 30$$

$$f(x) = 8x^2 + 10x - 90$$

Es una **función cuadrática** por lo que su gráfica es una **parábola** y, como el coeficiente líder es positivo, es una parábola *alegre* y el **vértice es un mínimo absoluto**.

El vértice se encuentra con:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot 8} = \frac{-5}{8}$$

Y la otra coordenada es:

$$y_v = f(x_v) = 8 \cdot \left(\frac{-5}{8}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{-5}{8}\right) - 90 =$$

$$\begin{aligned} &= 8 \cdot \frac{25}{8^2} - \frac{50}{8} - 90 = \\ &= \frac{25}{8} - \frac{50}{8} - 90 = \\ &= -\frac{25}{8} - 90 = \\ &= -\frac{25}{8} - \frac{720}{8} = \\ &= -\frac{745}{8} \end{aligned}$$

11. Encuentra al menos una solución real de la ecuación:

$$x^x = 3^{324}$$

Esta ecuación no cae en ninguna de las categorías habituales. No es polinómica porque la incógnita no está elevada a un número entero; no es exponencial porque la base no es un número constante…

Podemos intentar modificar el lado derecho de manera que la base y el exponente coincidan. Para eso factorizamos paso a paso el exponente, transformando la base:

$$\begin{aligned} 3^{324} &= 3^{2 \cdot 162} = 9^{162} = \\ &= 9^{2 \cdot 81} = 81^{81} \end{aligned}$$

Como:

$$x^x = 81^{81}$$

entonces una solución es:

$$x = 81$$

12. Si x_1 y x_2 son las dos raíces de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabemos que la media aritmética simple de ambas raíces es la x del vértice de la parábola. Calcula la desviación típica (= desviación estándar) de las soluciones.

Sabemos que el vértice es:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Y también que la media aritmética simple de las raíces es igual a la x del vértice:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_v = \frac{-b}{2a}$$

La varianza se calcula:

$$s_x^2 = \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

En nuestro caso, las soluciones aparecen una sola vez (las dos frecuencias absolutas simples son 1):

$$s_x^2 = \frac{x_1^2 \cdot 1 + x_2^2 \cdot 1}{2} - x_v^2$$
$$s_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \quad \frac{x_1 + x_2}{2}^{\ 2}$$
$$s_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}$$
$$s_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4}$$
$$s_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{4}$$

Por las identidades notables:

$$s_x^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}$$

Por lo que la desviación típica (que tiene que ser positiva) es:

$$s_x = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

Es decir, es la mitad de la distancia entre las raíces. O, lo que es lo mismo: es la distancia entre cualquiera de las raíces y el vértice.

13. El determinante de una matriz cuadrada de orden n se calcula haciendo todos los productos posibles de elementos que no están ni en la misma fila ni en la misma columna. ¿Cuántos productos son necesarios para calcular un determinante de orden 4? ¿Y de orden

n?

El determinante de una matriz de orden 1 es simplemente el único elemento que tiene: tenemos que hacer *1 producto* para calcularlo.

El determinante de una matriz de orden 2 es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria: tenemos que hacer *2 productos* para calcularlo. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) =$$

$$= 14$$

El determinante de una matriz de orden 3 se calcula con seis productos, como sabes por la regla de Sarrus. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot 2)+$$

$$+((-3) \cdot (-7) \cdot 1)+$$

$$+(4 \cdot 5 \cdot 5)+$$

$$-(5 \cdot 1 \cdot 1)+$$

$$-((-3) \cdot 4 \cdot 2)+$$

$$-((-7) \cdot 5 \cdot 2) =$$

$$= 214$$

La idea es que en una matriz de orden 4, los productos tienen que empezar por uno de los cuatro elementos de la primera columna. Para cada uno de ellos, podemos coger solamente 3 elementos de la segunda columna; no podemos coger un elemento que esté en la misma fila que el elemento escogido para la primera columna. Para cada uno de ellos, nos quedan 2 elementos de la tercera columna y 1 de la segunda.

Por el principio del producto, tenemos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

¡24 productos!

Es evidente que para una matriz de orden n es necesario hacer:

$$P_n = n!$$

productos. Y el factorial crece **muy rápido**.

14. En una pradera hay una pequeña plantación de lechugas. La plantación rodeada por una valla en forma de hexágono regular de perímetro 60 metros. Una oveja está en el exterior atada a uno de los postes de la valla (uno de los vértices del hexágono) con una cuerda de 24 metros. ¿Cuál es el área de la zona en la que puede pastar la oveja?

Podemos hacer una estimación inicial considerando que, de no existir la zona vallada, la oveja podría comer hierba en un círculo de radio 24 metros:

$$S_{\text{sin hexágono}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 24^2 = 576\pi \text{ m}^2$$

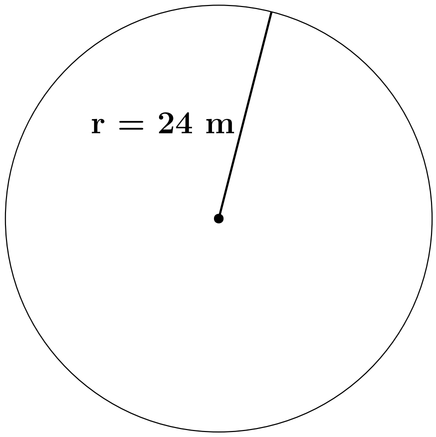


Figura 119: Si no existiese la zona vallada hexagonalmente, la oveja podría comer en un área circular de radio 24 metros.

Pero la zona vallada existe. Por lo tanto, lo que buscamos tiene que ser más pequeño:

$$S < S_{\text{sin hexágono}} = 576\pi \text{ m}^2$$

$$S < 576\pi \text{ m}^2 \approx 1810 \text{ m}^2$$

Como el hexágono (seis lados) es regular y el perímetro[49] es de 60 metros, cada lado mide 10 metros. Como el hexágono es regular, puede demostrarse que cada uno de los ángulos internos es de 120 grados sexagesimales.

Si tenemos en cuenta que no puede recorrer todo el círculo y dibujamos la superficie que puede recorrer, podemos ver que son cinco sectores circulares. Uno grande de radio 24 metros, dos medianos de radio 14 metros y dos pequeños de radio 4 metros.

El sector mayor tiene un radio de 24 metros y un ángulo interior de 240 grados; el ángulo interior del hexágono es 120 grados. Y 360 grados menos 120 grados es 240 grados.

Los dos sectores medianos tienen un radio de 14 metros y el ángulo interior es de 60 grados, como se puede ver en el dibujo.

Los dos sectores pequeños tienen un radio de 4 metros y el ángulo interior es de 60 grados, como se puede ver en el dibujo.

El área de un sector circular de radio r y ángulo α es:

$$S_{\text{sector circular}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

[49]**perímetro:** longitud de la suma de todos los lados.

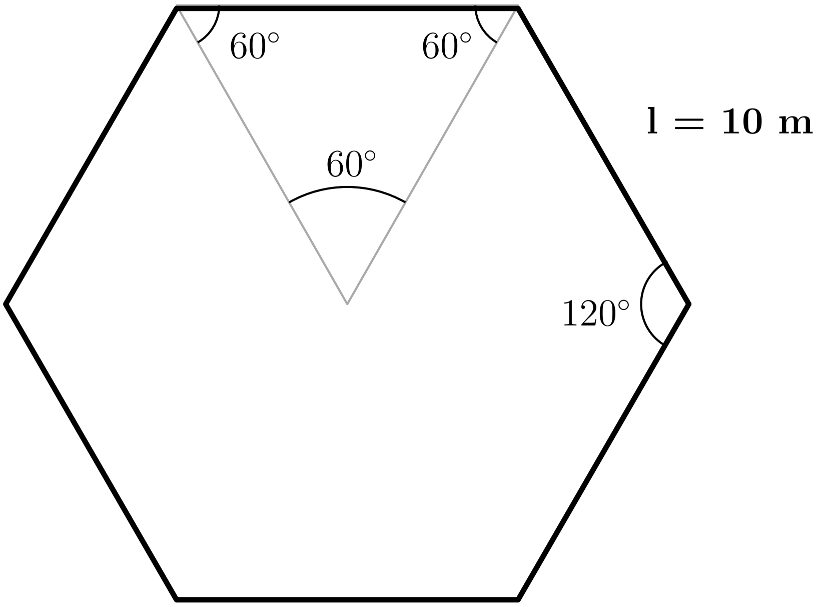


Figura 120: Un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos iguales. Esos triángulos son equiláteros y sus ángulos son de 60 grados. Por lo tanto, el ángulo interno del hexágono es de 120 grados.

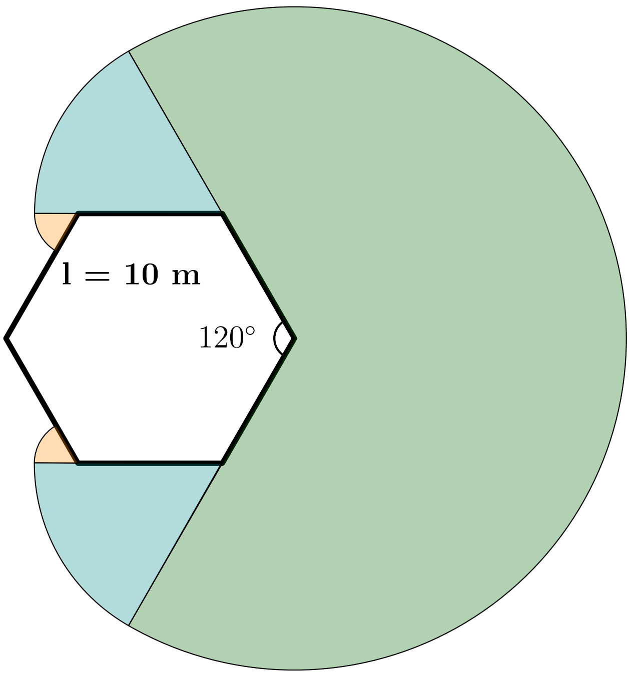


Figura 121: La superficie a la que puede llegar la oveja está formada por cinco sectores circulares.

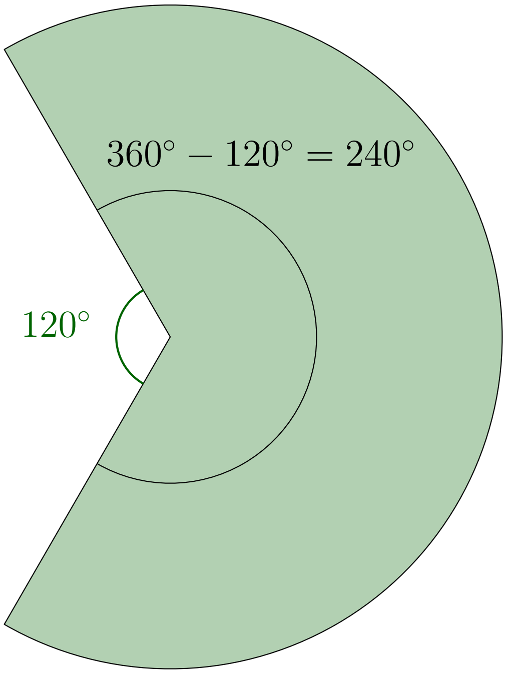
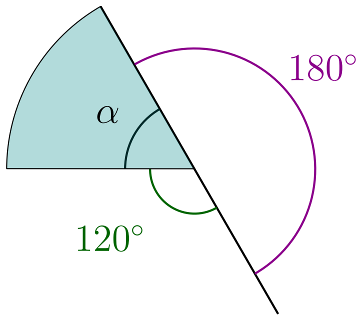
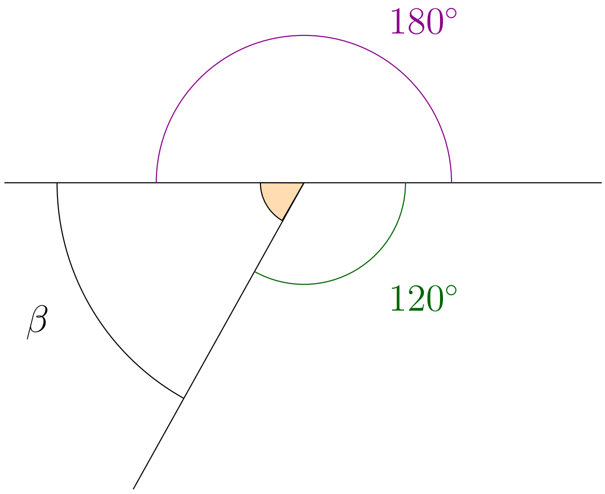


Figura 122: El sector mayor, con forma de *comecocos* (*pacman*) tiene un radio de 24 metros y un ángulo interior de 240 grados.



$$\alpha = 360° - 120° - 180° = 60°$$

Figura 123: Los sectores medianos tienen un radio de 14 metros y un ángulo interior de 60 grados.



$$\beta = 360° - 120° - 180° = 60°$$

Figura 124: Los sectores pequeños tienen un radio de 4 metros y un ángulo interior de 60 grados.

El área que buscamos es, por lo tanto:

$$\begin{aligned} S = S_{\text{comecocos}} + 2 \cdot S_{\text{sector mediano}} + 2 \cdot S_{\text{sector pequeño}} = \\ = \pi \cdot 24^2 \cdot \frac{240°}{360°} + 2 \cdot \pi \cdot 14^2 \cdot \frac{60°}{360°} + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{60°}{360°} = \\ = 384\pi + \frac{196}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi = \\ = \frac{1364}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \frac{1364}{3}\pi \text{ m}^2}$$

Aproximadamente:

$$S \approx 1428.4 \text{ m}^2$$

(Que no supera el límite superior que estimamos al principio.)

Detección de errores

El matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955) escribió en un artículo científico[50]:

> *An old conjecture of Goldbach's maintains that there even come along again and again pairs of primes of the smallest possible difference 2, like 57 and 59.*

Es decir:

> *Una vieja conjetura de Goldbach mantiene que aparecen una y otra vez pares de primos cuya diferencia es la más pequeña posible 2, como 57 y 59.*

Pero **57 no es un número primo**. Es divisible entre 3; $5 + 7 = 12$, que es divisible entre 3. Su factorización es $57 = 3 \cdot 19$, así que claramente no es un número primo.

Weyl, un gran matemático profesional de importancia histórica, se equivocó[51]. Y las personas que revisaron su artículo antes de publicarlo, no detectaron el error.

Cualquier persona que hace matemáticas puede equivocarse. Los alumnos de matemáticas cometen errores. Los profesores de matemáticas cometen errores. Incluso los matemáticos profesionales cometen errores. **Tú** puedes cometer errores y **yo** puedo cometer errores.

Y como podemos equivocarnos, es importante:

- **evitar** equivocarse,
- **detectar** los errores,
- **corregir** los errores.

Un error puede ser el resultado de un despiste, de un momento en el que la atención de la persona que está haciendo matemáticas no es grande. Ese despiste puede ser de tipos muy diferentes:

- olvidar un signo o un término
- copiar dos veces un término que aparecía una sola vez en la línea anterior
- cambiar el orden de dos dígitos en un número
- ...

Pero un error realmente grave es el error conceptual. Es el error que muestra que quien está haciendo las matemáticas no entiende lo que está haciendo. Es el error que demuestra que la persona que lo comete no comprende los conceptos que usa. Son errores conceptuales:

- escribir que el cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados
- escribir que, para multiplicar un número entero por una fracción, hay que multiplicar el numerador y el denominador
- escribir que la potencia de una potencia es la base elevada a la suma de los exponentes

[50] Weyl, H. (1951). *A half-century of mathematics. The American mathematical monthly*, 58(8), 523-553.
[51] De hecho, podríamos añadir otro error: la *conjetura de los primos gemelos* que menciona no es de Goldbach.

- no saber separar la parte literal del coeficiente en un polinomio
- ...

Cuando una persona detecta el error que comete otra, la que detecta el error no siempre puede estar segura de si ha sido un *despiste* o ha sido un *error conceptual*. Si la persona que detecta el error es un profesor y tú eres quien lo ha cometido, no te interesa que crea que puede ser un error conceptual. Por eso debes intentar evitar los errores.

Un modo de aprender a evitarlos es detectar los errores que cometen otros y saber corregirlos. Los siguientes ejercicios consisten precisamente en detectar dónde se ha cometido un error.

Las **consecuencias de los errores** matemáticos pueden ser muy diferentes y pueden ser realmente graves.

Mientras eres estudiante, la consecuencia principal de tus errores matemáticos es que pueden bajar tus notas. Y, en el peor de los casos, hacer tu camino académico más difícil y cerrar algunas puertas cuando termines tus estudios.

Pero en la *"vida real"*, las consecuencias de un error matemático pueden ser muy graves:

- Si el personal médico que aplique medicamentos a pacientes hace mal las operaciones matemáticas para saber la dosis que debe aplicar a un determinado paciente o no interpreta bien un separador decimal, **pueden morir seres humanos**.
- Si un ingeniero no tiene en cuenta las unidades, una sonda que se dirige a Marte, puede estrellarse contra el planeta. El resultado es una pérdida económica enorme y la pérdida de todo el trabajo hecho por varios millares de personas durante muchos años.
- Si la hoja de cálculo Excel tiene errores matemáticos en algunas de sus funciones estadísticas y varios economistas publican un artículo que influye en las decisiones políticas de varios gobiernos del mundo, eso puede facilitar una crisis económica en esos países o en el mundo entero.
- ...

¿Crees que estos ejemplos son poco realistas? Piensa en ello.

1. Como nos piden desarrollar la expresión:

$$(5x + 3y)^2 =$$

tenemos que elevar al cuadrado el primer término y el segundo término:

$$= 5x^2 + 3y^2$$

Hay dos errores graves.

El primer error está relacionado con una de las identidades notables. El cuadrado de una suma **no** es la suma de los cuadrados. El cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados más el doble del producto. Las identidades notables se usan con mucha frecuencia y, por lo tanto, es imprescindible memorizarlas y saber usarlas correctamente. El desarrollo correcto sería:

$$(5x + 3y)^2 =$$
$$= (5x)^2 + (3y)^2 + 2(5x)(3y) =$$

El otro error está relacionado con no elevar al cuadrado toda una expresión:

$$5x^2 \neq (5x)^2$$

Por eso, **siempre que en una expresión sustituyas una variable (una *"letra"*) por una expresión, usa paréntesis**:

$$= (5x)^2 + (3y)^2 + 2(5x)(3y) =$$

El cuadrado de un producto es el producto de los cuadrados y los paréntesis se pueden quitar en otras partes:

$$\begin{aligned} &= 5^2 \cdot x^2 + 3^2 \cdot y^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y = \\ &= 25x^2 + 9y^2 + 30xy \end{aligned}$$

De las dos expresiones anteriores, normalmente se escribe sólo la última. Hemos escrito la anterior para subrayar el origen del error.

Es mejor que hagas un paso más en lugar de un paso menos. Saltar pasos suele causar problemas incluso a matemáticos experimentados.

2. Para resolver la ecuación cuadrática

$$-3x - 2x^2 + 1 = 0$$

podemos usar la fórmula de las ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4 + 12}}{-6} = \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-6} = \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-6} = \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{-3} = \\ &= \frac{1 \mp \sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

El primer error es identificar mal los coeficientes de la ecuación cuadrática que aparecen en la fórmula:

- a es el coeficiente líder, el que va con el cuadrado de la incógnita. Por lo tanto es -2.
- b es el coeficiente del término de grado 1. Por lo tanto es -3.
- c es el término independiente. Por lo tanto es 1.

Por lo tanto, siempre es aconsejable **ordenar la ecuación cuadrática** antes de aplicar la fórmula:

$$-3x - 2x^2 + 1 = 0$$
$$-2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

A continuación, vamos a evitar cometer otros dos errores que se cometen en el paso equivalente:

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} =$$

Aquí hemos tenido cuidado al sustituir $-b$ por $-(-3)$, donde un signo menos proviene de la fórmula y el otro es parte del propio número b. Y al escribir b^2, hemos colocado paréntesis porque el signo menos forma parte de b.

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{-4} =$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{-4} =$$
$$= \frac{-3 \mp \sqrt{17}}{4}$$

$$K = \quad \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$
$$|K| = 2$$

3. Nos piden desarrollar la expresión:

$$\sin(x + 30°) =$$
$$= \sin(x) + \sin(30°) =$$

Como el seno de 30 grados es un medio:

$$= \sin(x) + \frac{1}{2}$$

El seno de una suma no es la suma de los senos. La fórmula del seno de una suma es más compleja:

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)$$

Por lo tanto:

$$\sin(x + 30°) =$$
$$= \sin(x) \cdot \cos(30°) + \cos(x) \cdot \sin(30°) =$$
$$= \sin(x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x) \cdot \frac{1}{2} =$$

No podemos hacer muchas más manipulaciones. Podemos sacar un medio como factor común:

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}\sin(x) + \cos(x) \right)$$

O podemos escribirlo como fracción:

$$= \frac{\sqrt{2}\sin(x) + \cos(x)}{2}$$

4. Nos piden desarrollar la expresión:

$$\log(x \cdot y) =$$

que da:

$$= \log(x) \cdot \log(y)$$

Es un error muy grave porque el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos:

$$\log(x \cdot y) =$$
$$= \log(x) + \log(y)$$

5. Nos piden desarrollar la expresión:

$$\log(x) + \log(y)$$

que da:

$$= \log(x + y)$$

Es un error grave porque el logaritmo de una suma no es, en general, la suma de los logaritmos. La suma de los logaritmos es el logaritmo del producto.

Lo correcto es:

$$\log(x) + \log(y) =$$
$$= \log(x \cdot y)$$

6. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & -1 \\ 2x - y & = & 0 \end{array}$$

tiene el conjunto de soluciones:

$$K = \{1, 2\}$$

Es decir, hay 2 soluciones ($|K| = 2$).

Un sistema de ecuaciones lineales **no puede tener 2 soluciones**. En los sistemas de ecuaciones lineales solamente hay tres posibilidades:

- el sistema tiene 0 soluciones: es un *sistema incompatible*
- el sistema tiene 1 solución: es un *sistema compatible determinado*
- el sistema tiene infinitas soluciones (una cantidad finita numerable): es un *sistema compatible indeterminado*

El problema aquí está en que la solución:

$$(x, y) = (1, 2)$$

es un par ordenado (= una dupla). La solución está formada por dos números, pero es solamente una solución; la solución completa incluye las dos incógnitas x e y.

Por lo tanto, lo correcto es decir que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

tiene el conjunto de soluciones:

$$K = \{(1, 2)\}$$

Es decir, hay 1 solución ($|K| = 1$).

7. Por la relación fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

Podemos llegar a:

$$\sin^2 = 1 - \cos^2$$

$$\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$$

En este caso tenemos dos problemas graves:

- el seno y el coseno **siempre deben tener un argumento**

  No podemos escribir:

  $$\boxed{\sin}$$

  porque siempre debe ser el seno de *algo*:

  $$\boxed{\sin(x)}$$

- cuando eliminamos un cuadrado (pasándolo al otro lado como raíz cuadrada), siempre debemos escribir un signo más/menos

  No podemos escribir:

$$\boxed{x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4}}$$

Lo correcto es:

$$\boxed{x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}}$$

La corrección sería:

Por la relación fundamental de la trigonometría:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Podemos llegar a:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

8. Como:

$$-3m^2 = 0$$

entonces:

$$m^2 = 3$$
$$m = \pm\sqrt{3}$$

Este error es un error **muy grave**. Para eliminar el -3 del lado izquierdo no podemos sumar 3. Queremos *"separar"* el -3 de m^2 y los dos están unidos por una **multiplicación**, así que tenemos que **dividir**:

$$-3m^2 = 0$$
$$\frac{-3m^2}{-3} = \frac{0}{-3}$$
$$m^2 = \frac{0}{-3}$$
$$m^2 = 0$$
$$m = \pm\sqrt{0}$$
$$m = \pm 0$$
$$m = 0$$

9. Tenemos:

$$\frac{7}{4}^{\,2} = \frac{14}{4}$$

Hay errores **muy graves**:

- elevar al cuadrado no es igual a multiplicar por dos[52]
- al elevar una fracción se elevan tanto el numerador como el denominador.

Lo correcto es:

$$
\begin{aligned}
&\frac{7}{4}^{\;2} = \\
&= \frac{7^2}{4^2} = \\
&= \frac{49}{16}
\end{aligned}
$$

10. Tenemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 5^2$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 25 - 1}$$

Lo correcto es:

$$
\begin{aligned}
1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= 5^2 \\
1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= 25 \\
\operatorname{tg}^2 \alpha &= 25 - 1
\end{aligned}
$$

A este error lo llamo *anacoluto matemático*[53]. Un anacoluto o *solecismo* es cuando se cambia la construcción de una frase antes de completarla:

«Mi novia... su gato es naranja.»

O incluso sin la pausa:

«Mi novia su gato es naranja.»

Aquí se ha empezado la frase de una manera y se ha cambiado de construcción antes de terminarla. La frase sin anacoluto sería:

«El gato de mi novia es naranja.»

o quizás:

«Mi novia tiene un gato que es naranja.»

He llamado *anacoluto matemático* a ese error porque en lugar de completar la oración (solamente había escrito el lado izquierdo) con el lado derecho que le corresponde, se ha completado con el lado derecho del **paso siguiente**.

11. Entonces:

$$= 12^2 + \quad \sqrt{5}^{\;2} - 2 \cdot 12\sqrt{5} =$$

$$= 144 + 5 - 24\sqrt{5} =$$

[52]Excepto en el caso del número dos: $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2$.

[53]La palabra eslovaca es *anakolút* y se usa en lengua.

$$= 125\sqrt{5}$$

La primera expresión parece venir de la identidad notable del cuadrado de una diferencia. Pero el problema está en el último paso; no podemos hacer 144 + 5 - 24, porque el 24 está unido por una multiplicación a la raíz cuadrada de 5.

Lo correcto sería:

$$= 12^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 12\sqrt{5} =$$
$$= 144 + 5 - 24\sqrt{5} =$$
$$= 149 - 24\sqrt{5}$$

Y no podemos simplificar más la expresión.

12. Como el cateto opuesto a es 3 y la hipotenusa es 5, el seno del ángulo α (el opuesto a a) es:

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$
$$\sin(\alpha) = 0.6^\circ$$

El seno de un ángulo es un número ¡sin unidades! Porque es la división de dos longitudes. Por lo tanto, no es correcto decir:

$$\sin(\alpha) = 0.6^\circ$$

Pero sí es correcto:

$$\sin(\alpha) = 0.6$$

Números complejos

Primero se introducen los números naturales, que nos sirven para contar.

En segundo lugar, se introducen los números enteros. Con ellos podemos hacer todas las restas. Y podemos distinguir entre *tener algo* (cuando el número es positivo) o *deber algo* (cuando el número es negativo).

En tercer lugar, se introducen los números racionales. Con ellos podemos hacer todas las divisiones (excepto entre cero).

En cuarto lugar, se da el paso más difícil: se introducen los números reales. Los números reales llenan completamente los huecos entre cualquier par de números racionales, permiten asignar todas las representaciones decimales posibles a un número, permiten resolver ecuaciones como $x^2 = 2$ e incluir números como π, e, $\ln 2\ldots$

Pero el paso final es cuando se introducen los **números complejos**. Aunque se pueden crear nuevos conjuntos de números, en varios sentidos, los números complejos son el final del camino.

Las propiedades de los complejos conectan la trigonometría con la función exponencial, las operaciones aritméticas con las transformaciones geométricas en el plano... Y los convierten en una herramienta muy valiosa en muchas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería.

Los números complejos no forman parte del temario de maturita.

1. Sean los números complejos siguientes:

$$z_1 = 3i - 3,\ z_2 = 2i + 3,\ z_3 = -2,$$
$$z_4 = 2 - \sqrt{2}i,\ z_5 = \frac{3}{4}i$$

Calcula:

a) $\Re(z_1)$
b) $\Im(z_1)$
c) $|z_1|$
d) $\bar{z}_1$
e) $\Re(z_2)$
f) $|z_4|$
g) $z_1 + z_2$
h) $z_3 - 3z_4$
i) $z_4 \cdot z_5$
j) $\frac{z_2}{z_4}$

a) $\Re(z_1) =$

Es la parte real, que también se puede escribir:

$$= \text{Re}(z_1) =$$
$$= \text{Re}(3i - 3) = -3$$

b) $\Im(z_1) =$

Es la parte imaginaria, que también se puede escribir:

$$= \text{Im}(z_1) =$$
$$= \text{Im}(3i - 3) = 3$$

c) $|z_1| =$

Es el módulo:

$$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

d) $\bar{z}_1$

Es el **complejo conjugado** de z_1, cuya parte real es igual, pero la parte imaginaria cambia de signo:

$$\bar{z}_1 = z_1^* =$$
$$= \overline{3i - 3} = -3i - 3 = -3 - 3i$$

e) $\Re(z_2) =$

$$= \text{Re}(2i + 3) =$$
$$= 3$$

f) $|z_4| =$

$$= \ 2 - \sqrt{2}i \ =$$
$$= \ \sqrt{2^2 + \ \sqrt{2}^{\ 2}} =$$
$$= \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

g) $z_1 + z_2 =$

$$= (3i - 3) + (2i + 3) =$$
$$= 5i$$

El resultado es un número imaginario puro.

h) $z_3 - 3z_4 =$

$$= (-2) - 3 \cdot (2 - \sqrt{2}i) =$$
$$= -2 - 6 + 3\sqrt{2}i =$$
$$= -8 + 3\sqrt{2}i$$

i) $z_4 \cdot z_5 =$

$$= (2 - \sqrt{2}i) \cdot \frac{3}{4}i =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4}i - \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}i^2 =$$

$$= \frac{3}{2}i - \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2}i$$

j) $\frac{z_2}{z_4}$

$$\frac{z_2}{z_4} = \frac{2i+3}{2-\sqrt{2}i} = \frac{3+2i}{2-\sqrt{2}i} =$$

Podemos hacer la división *racionalizando*:

$$= \frac{3+2i}{2-\sqrt{2}i} \cdot \frac{2+\sqrt{2}i}{2+\sqrt{2}i} =$$

$$= \frac{(3+2i)\cdot(2+\sqrt{2}i)}{(2-\sqrt{2}i)\cdot(2+\sqrt{2}i)} =$$

Suma por diferencia es diferencia de cuadrados:

$$= \frac{(3+2i)\cdot(2+\sqrt{2}i)}{2^2 - \ \ \sqrt{2}i\ \ ^{2}} =$$

$$= \frac{(3+2i)\cdot(2+\sqrt{2}i)}{4+2} =$$

$$= \frac{(3+2i)\cdot(2+\sqrt{2}i)}{6} =$$

$$= \frac{3\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{2}i + 2\cdot 2i + 2\sqrt{2}i^2}{6} =$$

$$= \frac{6 + 3\cdot\sqrt{2}i + 4i - 2\sqrt{2}}{6} =$$

Separando:

$$= \frac{6-2\sqrt{2}}{6} + \frac{3\cdot\sqrt{2}+4}{6}i =$$

$$= \frac{3-\sqrt{2}}{3} + \frac{3\cdot\sqrt{2}+4}{6}i$$

La parte real es:

$$\Re\ \ \frac{z_2}{z_4}\ \ = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$$

y la parte imaginaria es:

$$\Im \quad \frac{z_2}{z_4} \quad = \frac{3 \cdot \sqrt{2} + 4}{6}$$

2. Sea el número complejo:

$$z = 3 + 4i$$

Escríbelo en forma binómica, cartesiana, polar, trigonométrica y exponencial.

La forma binómica es la que nos dan:

$$z = 3 + 4i$$

La forma cartesiana es la forma que usamos para duplas (= pares ordenados):

$$z = (3, 4)$$

Las tres formas restantes requieren conocer el **módulo** y el **argumento** del número complejo.

Calculamos primero el módulo:

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

El argumento es:

$$\theta = \arg(z) = \arctan \quad \frac{4}{3} \quad =$$
$$\approx 53.130°$$

Por lo tanto:

- La forma polar es:

$$z = 5_{53.130°}$$

- La forma trigonométrica es:

$$z = 5 \cdot (\cos(53.130°) + i \cdot \sin(53.130°))$$

- La forma exponencial es:

$$z = 5 \cdot e^{i \cdot 53.130°}$$

3. Sea el número complejo:

$$z = 3_{\frac{\pi}{6}}$$

> Escríbelo en forma binómica, cartesiana, polar, trigonométrica y exponencial.

Nos dan la forma polar:

$$z = 3_{\frac{\pi}{6}}$$

Donde:

- el módulo es
$$r = 3$$
- el argumento es
$$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Las formas trigonométrica y exponencial son inmediatas:

- Forma trigonométrica:

$$z = 3 \cdot \quad \cos \quad \frac{\pi}{6} \quad + i \cdot \sin \quad \frac{\pi}{6}$$

- Forma exponencial:

$$z = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Para escribir las formas binómica y cartesiana, debemos calcular la parte real y la parte imaginaria:

$$\begin{aligned} x = \Re(z) = r \cdot \cos(\theta) = \\ = 3 \cdot \cos \quad \frac{\pi}{6} \quad = \\ = 3 \cdot \cos(30^\circ) = \\ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \Re(z) = r \cdot \sin(\theta) = \\ = 3 \cdot \sin \quad \frac{\pi}{6} \quad = \\ = 3 \cdot \sin(30^\circ) = \\ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

- Forma binómica:

$$z = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

- Forma cartesiana:

$$z = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

4. Encuentra el número complejo que cumple:

$$z - 2\bar{z} = 5$$

Si $z = (x, y)$, el complejo conjugado $\bar{z} = (x, -y)$. Y el número real 5 es (5, 0).

$$(x, y) - 2 \cdot (x, -y) = (5, 0)$$
$$(x - 2x, y + 2y) = (5, 0)$$
$$(-x, 3y) = (5, 0)$$
$$(x, y) = (-5, 0/3)$$
$$(x, y) = (-5, 0)$$

Podríamos haber usado la forma binómica para realizar la operación.

5. Encuentra el número complejo que cumple:

$$z \cdot \bar{z} - z \cdot i = 2 + i$$

Si:

- $z = x + iy$
- $\bar{z} = x - iy$

donde x es la parte real e y es la parte imaginaria. Por lo tanto:

$$(x + iy) \cdot (x - iy) - (x + iy) \cdot i = 2 + i$$
$$x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 - xi - y^2 \cdot i^2 = 2 + i$$
$$x^2 - ixy + ixy + y^2 - xi + y^2 = 2 + i$$
$$x^2 + 2y^2 - xi = 2 + i$$

La parte real de la derecha debe ser igual a la parte real de la izquierda y la parte imaginaria de la derecha debe ser igual a la parte imaginaria de la izquierda:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ -x = 1 \end{cases}$$

Luego: $x = -1$. Y entonces, sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
(-1)^2 + 2y^2 &= 2 \\
1 + 2y^2 &= 2 \\
2y^2 &= 1 \\
y^2 &= \frac{1}{2} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\
y &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto hay dos números complejos que cumplen las condiciones:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\
z_2 &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i
\end{aligned}
$$

6. Sea el número complejo:

$$z = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Calcula:
a) z^3
b) $z^{\frac{1}{3}}$

a)

$$
\begin{aligned}
&z^3 = \\
&= \left(3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}\right)^3 = \\
&= (3)^3 \cdot e^{3 \cdot i \cdot \frac{\pi}{6}} = \\
&= 27 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&z^{\frac{1}{3}} = \\
&= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi n}{3}},\ n = 0, 1, 2
\end{aligned}
$$

Hay tres raíces:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi 0}{3}} = \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{18}} \\
z_2 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi 1}{3}} = \\
&= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6}}{3}} = \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{13\pi}{18}} \\
z_3 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi 2}{3}} = \\
&= \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6}}{3}} = \sqrt[3]{3} \cdot e^{i \cdot \frac{25\pi}{18}}
\end{aligned}
$$

7. ¿Qué ocurre con las raíces de un número complejo en el plano?

Las raíces *n-simas* se distribuyen en los vértices de un polígono regular de n lados cuyo centro es el origen de coordenadas.

Por ejemplo, hay tres raíces cúbicas de 1. Una de ellas es real, las otras dos tienen componentes imaginarias.

La real es, evidentemente, el número 1 que está en el eje X. Como hay tres raíces, para encontrar las otras dos solamente tenemos que girar 120° ese punto alrededor del origen de coordenadas. Y el resultado son tres puntos que forman un triángulo equilátero cuyo centro es el origen de coordenadas.

En forma polar, las tres son $1_{0°}$, $1_{120°}$, $240_{0°}$.

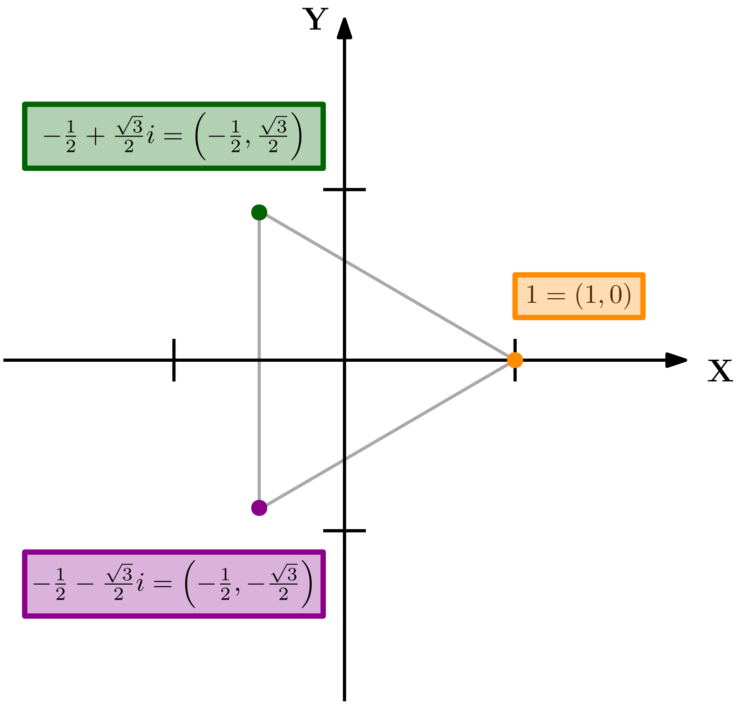


Figura 125: Las raíces complejas de 1 en el plano complejo.

8. Demuestra que no es posible ordenar los números complejos.

Vamos a suponer que es posible ordenar los números complejos.

Suponemos que $i > 0$. Si es así, al multiplicar por i:

$$i \cdot i > 0 \cdot i$$
$$i^2 > 0$$

El cuadrado de la unidad imaginaria i es -1, por definición. Por lo tanto:

$$-1 > 0$$

Pero esto es una contradicción; -1 no es mayor que 0 y 0 no es menor que -1.

Si suponemos que $i < 0$, entonces al multiplicar por i:

$$i \cdot i > 0 \cdot i$$
$$i^2 > 0$$
$$-1 > 0$$

Llegamos a la misma contradicción.

No es posible definir una relación de orden como la de los números reales para los números complejos.

9. Encuentra el valor del parámetro real m para que el producto:

$$(m - i) \cdot (3 + 4i)$$

sea:
a) un número real
b) un número imaginario puro

Podemos *bautizar* al número como z:

$$z = (m - i) \cdot (3 + 4i) =$$
$$= 3m + 4mi - 3i - 4i^2 =$$
$$= 3m + 4mi - 3i - 4 \cdot (-1) =$$
$$= 3m + 4mi - 3i + 4 =$$
$$= (3m + 4) + (4m - 3)i$$

a) Para que sea un número real, su parte imaginaria debe ser cero:

$$\Im(z) = 0$$
$$(4m - 3) = 0$$
$$4m = 3$$
$$m = \frac{3}{4}$$

b) Para que sea un número imaginario puro, su parte real debe ser cero:

$$\Re(z) = 0$$
$$(3m + 4) = 0$$
$$3m = -4$$
$$m = \frac{-4}{3}$$

10. Encuentra el valor del parámetro real m para que el cociente:

$$\frac{m-i}{3+4i}$$

sea:

a) un número real

b) un número imaginario puro

Llamamos z al resultado que queremos encontrar:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{m-i}{3+4i} = \\
&= \frac{m-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \\
&= \frac{(m-i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \\
&= \frac{(m-i)\cdot(3-4i)}{3^2-(4i)^2} = \\
&= \frac{3m-4mi-3i+4i^2}{3^2-(4i)^2} = \\
&= \frac{3m-4mi-3i-4}{9+16} = \\
&= \frac{3m-4}{25} + \frac{-4m-3}{25}i
\end{aligned}$$

a) Para que sea un número real, su parte imaginaria debe ser cero:

$$\begin{aligned}
\Im(z) &= 0 \\
\frac{-4m-3}{25} &= 0 \\
4m &= -3 \\
m &= \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

b) Para que sea un número imaginario puro, su parte real debe ser cero:

$$\begin{aligned}
\Re(z) &= 0 \\
\frac{3m-4}{25} &= 0 \\
3m &= 4 \\
m &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

11. Encuentra los números reales a y b para que los números complejos $z_1 = 2a - 3bi$ y $z_2 = 3 + 5i$ cumplan:

a) $z_1 = -z_2$

b) $z_1 = -\bar{z}_2$

c) $z_1 \cdot \bar{z}_2 = 2$

a) $z_1 = -z_2$

z_1 es igual al **opuesto** de z_2:

$$2a - 3bi = -(3 + 5i)$$
$$2a - 3bi = -3 - 5i$$

Las partes reales tienen que ser iguales entre si y las partes imaginarias tienen que ser iguales entre si:

$$\begin{cases} 2a = -3 & \to a = -3/2 \\ -3b = -5 & \to b = 5/3 \end{cases}$$

b) $z_1 = -\bar{z}_2$

z_1 es igual al **opuesto** del **complejo conjugado** de z_2:

$$2a - 3bi = -\overline{(3 + 5i)}$$
$$2a - 3bi = -(3 - 5i)$$
$$2a - 3bi = -3 + 5i$$

Las partes reales tienen que ser iguales entre si y las partes imaginarias tienen que ser iguales entre si:

$$\begin{cases} 2a = -3 & \to a = -3/2 \\ -3b = 5 & \to b = -5/3 \end{cases}$$

c) $z_1 \cdot \bar{z}_2 = 2$

El producto del primero por el complejo conjugado del segundo es igual a 2:

$$(2a - 3bi) \cdot (3 + 5i) = 2$$
$$6a + 10ai - 9bi - 15bi^2 = 2$$
$$6a + (10a - 9b)i - 15b \cdot (-1) = 2$$
$$6a + (10a - 9b)i + 15b = 2$$
$$(6a + 15b) + (10a - 9b)i = 2$$

Las partes reales tienen que ser iguales entre si y las partes imaginarias tienen que ser iguales entre si. Y la parte imaginaria de la derecha es 0; 2 es un número real:

$$\begin{cases} 6a + 15b = 2 \\ 10a - 9b = 0 \end{cases}$$

Podemos multiplicar la primera ecuación por 10 y restarle el producto de 6 por la segunda:

$$
\begin{aligned}
10 \cdot (6a + 15b) - 6 \cdot (10a - 9b) &= 10 \cdot 2 - 6 \cdot 0 \\
150b + 54b &= 20 \\
204b &= 20 \\
b &= \frac{20}{204} \\
b &= \frac{5}{51}
\end{aligned}
$$

Sustituimos en la segunda:

$$
\begin{aligned}
10a - 9 \cdot \frac{5}{51} &= 0 \\
10a &= \frac{45}{51} \\
a &= \frac{45}{51 \cdot 10} \\
a &= \frac{9}{51 \cdot 2} \\
a &= \frac{9}{102}
\end{aligned}
$$

12. Sea la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 13x = 0$$

Encuentra el conjunto de soluciones complejas, el conjunto de soluciones reales y compara la cardinalidad de ambos conjuntos.

Es una ecuación cúbica sin término independiente. Podemos sacar x como factor común:

$$
\begin{aligned}
&x \cdot (x^2 - 6x^2 + 13x) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x^2 + 13x = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Una de las soluciones es 0. Las otras podemos obtenerlas al resolver la ecuación cuadrática con la fórmula:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{-1 \cdot 16}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \\
&= 3 \pm 2i
\end{aligned}
$$

Que son dos soluciones complejas, conjugadas una de la otra.

El conjunto de soluciones complejas es:

$$K_{\mathbb{C}} = \{0, 3+2i, 3-2i\}$$

y el de soluciones reales es:

$$K = \{0\}$$

Sus cardinalidades son:

$$|K_{\mathbb{C}}| = 3$$
$$|K| = 1$$

13. Sea la ecuación:

$$x^2 - 4ix - 13 = 0$$

donde i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Encuentra el conjunto de soluciones complejas, el conjunto de soluciones reales y compara la cardinalidad de ambos conjuntos.

Usando la fórmula:

$$\begin{aligned} x = \frac{-(-4i) \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-13)}}{2 \cdot 1} &= \\ = \frac{4i \pm \sqrt{-16+52}}{2} &= \\ = \frac{4i \pm \sqrt{36}}{2} &= \\ = \frac{4i \pm 6}{2} &= \\ = 2i \pm 3 = \pm 3 + 2i \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$K_{\mathbb{C}} = \{3+2i, -3+2i\} \to |K_{\mathbb{C}}| = 2$$
$$K = \{\} = \varnothing \to |K| = 0$$

14. Demuestra las fórmulas del seno de la suma de dos ángulos y del coseno de la suma de dos ángulos.

Nos piden demostrar las fórmulas del seno de una suma y del coseno de una suma:

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Se puede demostrar geométricamente. Pero con números complejos la demostración puede resultar más cómoda.

Por la fórmula de Euler:

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

Pero por las propiedades de las potencias:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

A partir de ahora modificaremos solamente el lado izquierdo:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} =$$

por la fórmula de Euler:

$$\begin{gathered}
(\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) = \\
= \cos(x) \cdot \cos(y) + i\cos(x) \cdot \sin(y) + \\
+ i\sin(x) \cdot \cos(y) + i^2 \sin(x) \cdot \sin(y) = \\
= \cos(x) \cdot \cos(y) + i\cos(x) \cdot \sin(y) + \\
+ i\sin(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) = \\
= (\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)) + \\
+ i(\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y))
\end{gathered}$$

Comparando las partes real e imaginaria llegamos a las dos fórmulas:

$$\begin{gathered}
\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \\
\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)
\end{gathered}$$

Como queríamos demostrar.

15. Demuestra que en una ecuación cuadrática con coeficientes reales, si existen soluciones complejas, las dos son conjugadas complejas una de la otra.

Para la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, las soluciones son:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde dentro de la raíz tenemos el discriminante, que se puede representar como Δ o D:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si el discriminante es negativo, solamente tiene soluciones complejas. No hay soluciones reales.

Si $\Delta < 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-1 \cdot |\Delta|}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\, i$$

Puede verse que las dos soluciones solamente se diferencian en el signo de la parte imaginaria. Por lo tanto, las dos soluciones complejas son conjugadas complejas una de la otra. Tal como queríamos demostrar.

16. Si la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces complejas, ¿el vértice está en la media aritmética simple de las dos soluciones complejas?

Si tiene dos raíces complejas y los coeficientes a, b y c son reales, las dos raíces deben ser conjugadas complejas una de la otra:

$$x_1 = \alpha + \beta i$$
$$x_2 = \alpha - \beta i$$

Sabemos que al factorizar:

$$f(x) = a \cdot (x - (\alpha + \beta i)) \cdot (x - (\alpha - \beta i))$$
$$f(x) = a \cdot (x - \alpha - \beta i) \cdot (x - \alpha + \beta i)$$
$$f(x) = a \cdot (x^2 - \alpha x + \beta i \cdot x +$$
$$-\alpha x + \alpha^2 - \alpha\beta i +$$
$$-\beta i \cdot x + \alpha\beta i - \beta^2 i^2)$$

La mayoría de los términos entre paréntesis se cancelan:

$$f(x) = a \cdot (x^2 - \alpha x +$$
$$-\alpha x + \alpha^2 +$$
$$-\beta^2 i^2)$$

$$f(x) = a \cdot (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

Comparando tenemos que:

$$b = -2a\alpha$$

Como:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

sustituyendo:

$$x_v = \frac{-(-2a\alpha)}{2a}$$
$$x_v = \alpha$$

Por otro lado, la media aritmética de x_1 y x_2 es:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i)}{2} = \alpha$$

Es decir, efectivamente también en este caso la media aritmética simple de las soluciones complejas nos da el vértice.

17. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las operaciones aritméticas más comunes en los números complejos?

Como podemos representar cada número complejo como un punto en el plano, es natural preguntarse si las operaciones aritméticas dentro de los complejos tienen también una interpretación geométrica.

- El módulo de un número complejo es la **distancia** del punto al origen de coordenadas:

  Por ejemplo, el número complejo $3+4i$ está a 5 unidades del origen de coordenadas porque su módulo es 5.

- Sumar (o restar) un número complejo $x + yi$ (donde la parte real x y la parte imaginaria y son positivas) equivale a mover el punto x unidades a la derecha (o la izquierda) e y unidades hacia arriba (o hacia abajo).

  Es decir, sumar o restar equivale a una **traslación**.

  - Sumar o restar un número real positivo es mover el punto horizontalmente hacia la derecha o hacia la izquierda.

    Por ejemplo, si al número complejo $2 + 3i$ le sumamos 5, el resultado es $7 + 3i$. Que es el mismo punto desplazado 5 unidades a la izquierda.

  - Sumar o restar un número imaginario puro (cuya parte imaginaria es positiva) es mover el punto verticalmente hacia arriba o hacia abajo.

    Por ejemplo, si al número complejo $2 + 3i$ le sumamos $2i$, el resultado es $2 + 5i$. Que es el mismo punto desplazado 2 unidades hacia arriba.

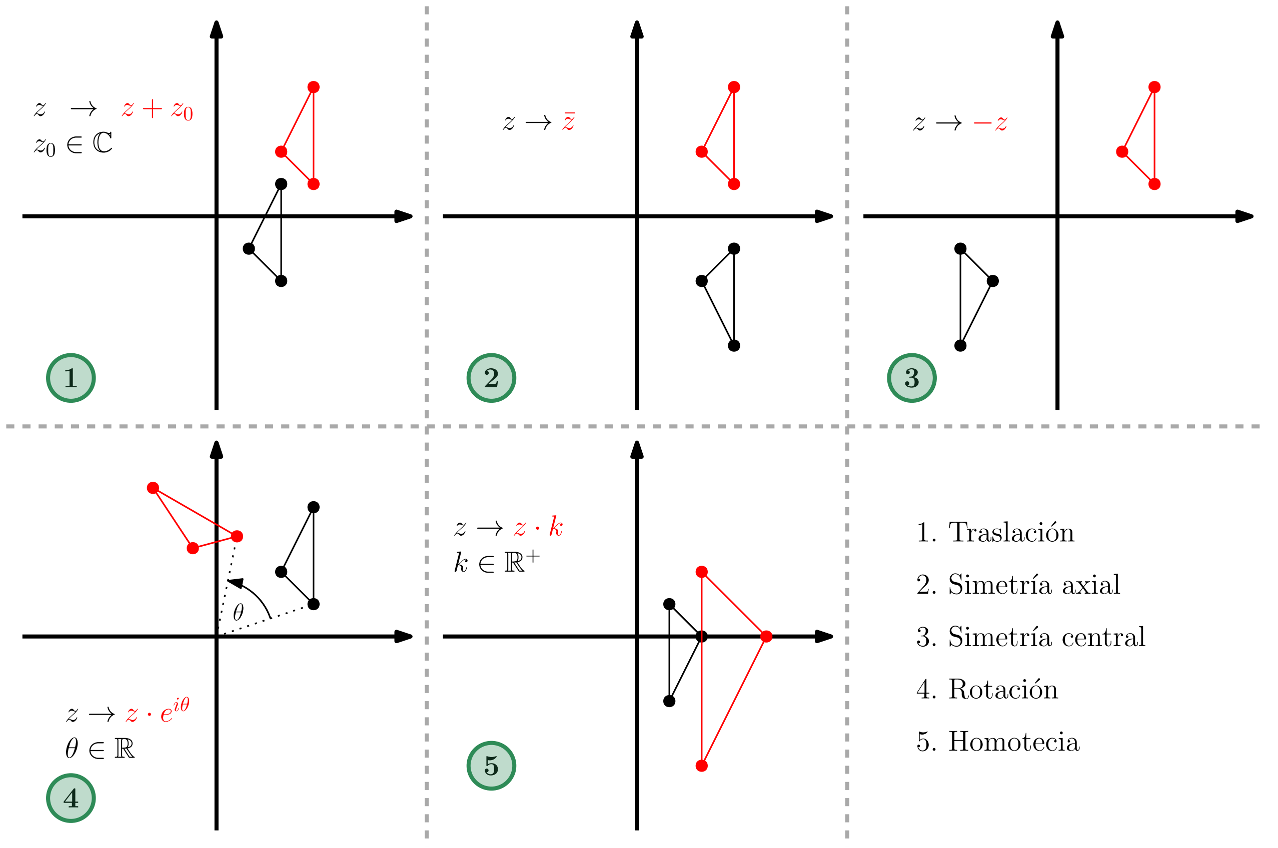


Figura 126: Geometría y aritmética de los números complejos.

- Hacer el complejo conjugado equivale a reflejar el punto respecto al eje horizontal (el eje X). Es decir, es una **simetría axial** respecto al eje X.
- Hacer el opuesto equivale a reflejar el punto respecto al origen de coordenadas. Es decir, es una **simetría central** respecto al origen de coordenadas.
- Multiplicar por un número en la forma $e^{i\theta}$, donde θ es un número real, es una **rotación** un ángulo θ alrededor del origen de coordenadas.
- Multiplicar por un número real k positivo equivale a una homotecia de razón k con centro en el origen de coordenadas.

Bibliografía

Todos mis alumnos saben que una tarea en la que aparezca información consultada en una fuente externa (que puede ser un libro, una revista, una página *web* de Internet. . .) tiene que tener una *sección de referencias*, una *sección de fuentes* o una *bibliografía*.

Sin embargo, debido al proceso de creación del libro, no puedo estar seguro de todas las fuentes que han podido influir en este libro. Espero que este crimen sea leve y perdonable.

Los contenidos esenciales que se imparten a todo el alumnado eslovaco de una Sección Bilingüe son básicamente un reflejo de lo que se espera de ellos en una maturita de matemáticas en eslovaco. Las obras de referencia que siguen están orientadas a alumnos que se preparan una maturita.

- En español:
  - VV.AA., (2009). *"Materiales para la preparación de la prueba de maturita. Matemáticas"*. Embajada de España. Agregaduría de Educación en Eslovaquia.

    ISBN: 978-80-89137-60-2
- En eslovaco:
  - Teplička, I. (2019). *"Matematika pre maturantov a uchádzačov na vysokých školách"*. Enigma Publishing.

    ISBN: 978-80-8133-068-1
  - Boroš, M. (2022). *"Maturita z matematiky"*. IKAR.

    ISBN: 978-80-551-8431-9
  - Vošický, Z. (2007). *"Matematika"*. Fragment.

    ISBN: 978-80-8089-103-9
  - Čermák, P. y Červinková. P. (2004). *"Zmaturuj z matematiky"*. Didaktis.

    ISBN: 80-89160-01-8
- En checo:
  - Hruška, M. (2012). *"Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení"*. Agentura Rubico.

    ISBN: 80-7346-149-2

Cómo se hizo

El texto está escrito en el lenguaje de marcado `Markdown` en el editor `Textadept`.

El programa `pandoc` ha sido el responsable de la generación del PDF a partir de Markdown. Y, para ello, `pandoc` utiliza `LaTeX` (concretamente, `pdflatex` de `TeX Live`).

He creado la mayoría de las figuras con el editor `Ipe`. Excepto la imagen de la portada, he creado el resto de imágenes usando `gnuplot`.

Varios lenguajes de programación han formado parte del proceso, tales como `Object Rexx` y `Lua`.

Algunos programas matemáticos han sido de ayuda como la calculadora `Qalculate!` y el sistema de cálculo simbólico `Maxima` a través de `wxMaxima`.

La portada

La imagen de la portada es un dibujo hecho con bolígrafo por mi mismo. Lo he escaneado y después lo he vectorizado a SVG con `Inkscape`.

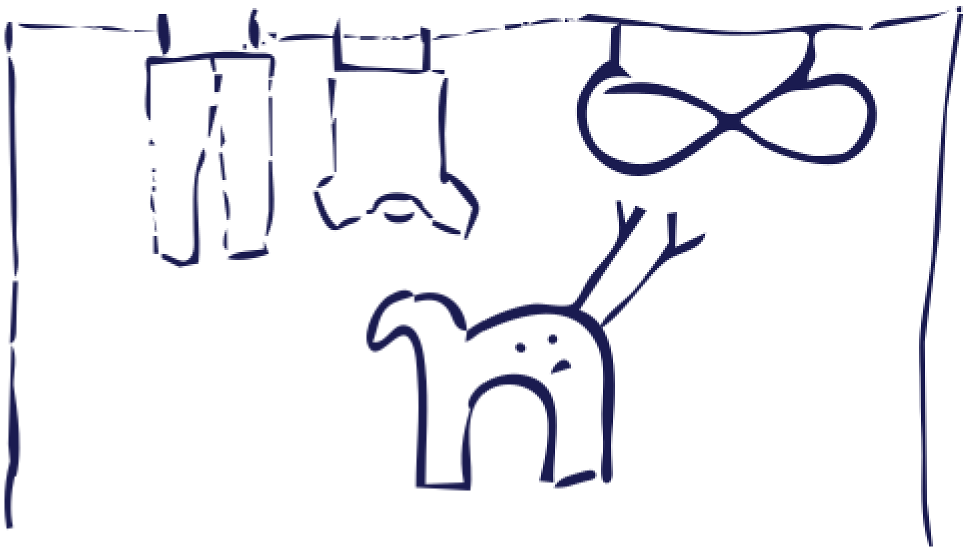


Figura 127: $n \to \infty$

Es *ene* que tiende a infinito. ;)

El verbo **tender** significa dos cosas:

1) Acercarse a algo.
2) Colgar la ropa en una cuerda para que se seque tras lavarla.

Las herramientas

Todas las herramientas que aparecen aquí son gratuitas, libres y multiplataforma.

- `Textadept`

  https://orbitalquark.github.io/textadept/

- `pandoc`

  https://pandoc.org/

- `Ipe`

  https://ipe.otfried.org/

- `gnuplot`

  http://www.gnuplot.info/

- `Inkscape`

  https://inkscape.org

- `Qalculate!`

  https://qalculate.github.io/

- `wxMaxima`

  https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/index.html

Agradecimientos

Hay varias personas y grupos de personas a los que quiero agradecer la influencia o ayuda que han tenido sobre este pequeño libro.

El primer agradecimiento es para la promoción 2017-2022 del *Bilingválne slovensko-španielske gymnázium* de Nové Mesto nad Váhom. Empecé este librito por ellos.

Fueron mi primer segundo curso en una Sección Bilingüe de Eslovaquia y nunca olvidaré el susto que me llevé al entrar en su clase una de las primeras veces y ver en la pizarra $\langle 1; 2\rangle$.

Pensé: *"¿En Eslovaquia estudian mecánica cuántica y espacios de Hilbert en secundaria? ¡Están locos?"* Pensé eso porque en mecánica cuántica existe una notación *bra* y *ket* de Dirac que es similar: $\langle 1|2\rangle$.

Resultó que simplemente eran intervalos cerrados que en España se escriben: $[1, 2]$.

El segundo agradecimiento es para el resto de promociones de alumnos que he tenido en el *gymnázium* bilingüe de Nové Mesto. Continué este proyecto por todos ellos.

A Viktória Balušíková, por varias preguntas sobre algunos de los ejercicios de trigonometría que he añadido al libro.

A Simon Magál, por el problema de la oveja y la valla hexagonal.

A Robin van der Vliet, por mencionar la curiosidad de que 6 semanas son 10! segundos.

A Alexandra Tkachenko, por darme a conocer la notación alternativa para los valores de verdad de una proposición lógica, por señalarme un error en la forma aritmética del valor de verdad de la negación lógica y por indicarme que la forma manuscrita de $\mathbb{N}$ puede coincidir con la tipográfica.

A Ján Malár por señalar un error de numeración en la sección sobre ecuaciones exponenciales. Y a Adam Pala por señalarme un error en un enunciado en la misma sección.

A Lea Fedorov por encontrar muchos errores dispersos por todo el libro.

A Alžbeta Pankuchová por señalar un error en un ejercicio de planos.

A Bianka Suchá, por señalar un error en una tabla de verdad usada para demostrar una de las leyes de De Morgan.

A Klára Kubišová, por indicarme un error con el signo de un elemento en un determinante.

A los profesores de matemáticas de las Secciones Bilingües que he tenido la suerte de conocer en Eslovaquia durante mis años allí. Ninguno de ellos es responsable de los errores que puedan permanecer en el texto. Pero han sido un apoyo en múltiples ocasiones.

Y a Joaquín Támara Espot por su paciencia y confianza en mí para sacar adelante la versión definitiva.

EMBAJADA
DE ESPAÑA
EN ESLOVAQUIA

AGREGADURÍA DE EDUCACIÓN

ACCIÓN
EDUCATIVA
EXTERIOR