PUBLICACIONES DE LA

nueva revista de enseñanzas medias

Didáctica de las MATEMÁTICAS

7

PUBLICACIONES DE LA

nueva revista de enseñanzas medias

Nº 7

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

HOMENAJE A D. PEDRO PUIG ADAM

Coordinadores del volumen:

José M.ª Benavente Barreda

M.ª Jesús Palacios de Burgos

M.ª Dolores de Prada Vicente

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

Dirección General de Enseñanzas Medias

Madrid

1985

PUBLICACIONES DE LA

nueva revista de enseñanzas medias

Tirada de este número: 8.000 ejemplares
Precio de este número: 400 ptas.

Edita y distribuye:
Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia,
Ciudad Universitaria, s/n. - 28040 Madrid

Publicidad:
Teléfono 449 66 63, Madrid

Redacción:
Dirección General de Enseñanzas Medias
Paseo del Prado, 28, 4.ª planta - 28014 Madrid

Imprime:
Rufino García Blanco
Avenida Pedro Díez, 3 - 28019 Madrid

Depósito legal: M - 22.627 - 1983

Prólogo

Quizá sea la Matemática, considerada como ciencia exacta por antonomasia, la disciplina más dura para la inmensa mayoría del alumnado medio. Y quizá sea ésta la razón de que, aquellos que se dedican a enseñarla, sientan de un modo acuciante la necesidad de buscar métodos didácticos para hacer más llevadera su asimilación por las mentes juveniles.

Las Ciencias Matemáticas, en efecto, son difíciles e incluso, en ocasiones, aburridas; esto es algo de lo cual, los profesores de esta asignatura dotados del suficiente espíritu crítico y pedagógico, han sido conscientes desde hace mucho tiempo. A este grupo selecto, que no utiliza la Matemática como un arma para demostrar al ignaro jovenzuelo que está a años luz de su sapiencia, sino que pretende hacer de esta ciencia un instrumento de formación y un motivo de goce y de autorrealización plena, pertenece, sin duda alguna, D. Pedro Puig Adam, uno de los más grandes matemáticos y, sobre todo, uno de los más grandes pedagogos españoles. De ahí que este número sobre didáctica de las Matemáticas se lo dediquemos, como modesto pero sincero homenaje, cuando se han cumplido veinticinco años de su muerte. Y es que Puig Adam, quizá más que ningún otro matemático español, se ocupó y preocupó de que su ciencia fuera algo que se pudiera aprender; con esfuerzo, sí; pero sin sufrimiento ni hastío. Muchas de sus ideas pedagógicas —algunas de las cuales recogemos en la primera parte de este número monográfico— son una clara anticipación de ideas actuales, en la más pura línea de la pedagogía activa, que trata de fundamentar los métodos didácticos en los heurísticos.

El presente volumen se estructura en cuatro grandes bloques: el primero se dedica a analizar la vida y la obra de Puig Adam; hay un recuerdo emocionado de su hija mayor, Emilia Puig Álvarez; una visión, a la vez objetiva y admirada de su labor científica, que escribe Fernández Biarge; un repaso a su obra escrita, hecho con cariño y humor por Pep Sales; y, sobre todo, tres artículos magistrales del propio Puig Adam, en los que pueden encontrar ideas valiosas tanto los matemáticos como los profesores ajenos a estas materias.

El resto del volumen lo constituyen tres bloques temáticos —Simulaciones, Experiencias y Estudios— bajo cuyos epígrafes hemos incluido un conjunto de artículos, elegidos entre los muchos que han llegado a la redacción. El primero de estos bloques engloba tres trabajos que proponen actividades de simulación, tan a menudo olvidadas a pesar de su reconocido e innegable interés didáctico. El apartado de Experiencias recoge unas reflexiones sobre las dificultades de aprendizaje que surgen en la resolución de problemas; la utilización del surgimiento histórico del número irracional como instrumento didáctico; una aplicación interdisciplinar de la trigonometría y una interesante propuesta de llevar la investigación a las aulas. En el bloque final de Estudios, una serie de trabajos más puramente teóricos, pero de indudable interés culminan en un desarrollado —y esperamos que útil— estudio bibliográfico.

Suponemos que la elección de los trabajos que componen este volumen, como toda elección, no habrá escapado a la subjetividad; sin embargo, hemos procurado que la muestra ofrecida fuera variada, tanto en la temática como en las propuestas. Por apartarse de la línea que nos habíamos marcado, y no por falta de valía intrínseca, nos hemos visto en la necesidad de no incluir algunos trabajos de interés indudable, que deseamos puedan ver la luz en futuras publicaciones.

Creemos que el conjunto puede ser útil al profesorado que se preocupe por la didáctica de las Matemáticas, sobre todo en la línea activa que pretende la Reforma de las Enseñanzas Medias.

LOS COORDINADORES

Aclaración

En el n.º 8 de NREM (invierno-84) y en el artículo "Revistas de temas educativos de España" se produjeron algunas omisiones, que ahora subsanamos en la medida que las conocemos, con nuestras disculpas a sus editores y redactores:

Boletín del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en F. y L. y en Ciencias. Madrid.

Boletín Informativo. Acción Educativa. Madrid.

Experiencias Pedagógicas. Fundación «Hogar del Empleado». Madrid.

Nuestra Escuela (FETE - UGT). Avenida de los Toreros, 3 y 5. Madrid.

Revista De Juventud. Revista de estudios e investigaciones. Ministerio de Cultura. Madrid.

Puig Adam, maestro

Don Pedro Puig Adam, visto por su hija Emilia

De nuestra redacción

Hacer una "nota biográfica", con las fechas y jalones principales del biografiado, resulta siempre un poco frío y distante. Esas biografías de puros datos son, en parte, como la historia que se limita a contarnos sobre reyes y batallas. La historia, también —quizá sobre todo—, es la pequeña historia, la que hacen los hombres de cada día y en cada día. Y con las biografías sucede igual: aparte de títulos y honores, un hombre es un ser esencialmente cotidiano, que tiene una familia, unos "tics", unas aficiones... Buscando todo esto —la "pequeña historia" de Puig Adam— hemos pedido a su hija mayor, Emilia Puig Álvarez, que nos recibiera y nos contara cosas del ilustre matemático. Y ella, cortés y amable, nos ha brindado datos inéditos, tanto de palabra como por escrito —pues está escribiendo una biografía de su padre—. Fruto de nuestra conversación con Emilia Puig es gran parte de lo que sigue, y que brindamos a nuestros lectores en la seguridad de que sentirán así más cerca a ese gran científico y maestro que fue Pedro Puig Adam.

De Peret a «le petit Pierre»

Nació Pedro Puig Adam en Barcelona, el 12 de mayo de 1900. Esto le hacía ilusión, y siempre que hablaba de su edad añadía: "yo voy con el siglo".

Peret —así le llamaban de pequeño, y así le llamaremos mientras nos refiramos a esta época de su vida— fue hijo único de un matrimonio joven. Su padre, Roberto Puig Dalmases, funcionario de la Empresa Maquinista Terrestre y Marítima, de la que llegó a ser secretario; su madre, Concepción Adam Gandó, hija de una familia de la burguesía media barcelonesa.

El padre de Peret, huérfano desde la adolescencia, era un buen catalán, honrado, trabajador, inteligente y recto. Su trabajo profesional y su hijo fueron, sin lugar a dudas, los objetivos de su vida. "Mi abuelo —dice Emilia Puig—, que en su juventud fue poco religioso y poco amigo de los curas, murió como un fervoroso católico, llevado al seno de la Iglesia por su hijo, a lo largo de los años". Fiel a sus ideas liberales de juventud, Roberto Puig no quiso que su hijo fuera a un colegio religioso, sino que le llevó a una Escuela Municipal. Luego, en casa, completaría la formación de Peret, enseñándole idiomas y música.

El pequeño Peret iba al colegio, con su delantalito a rayas y su pelo muy corto, casi al cero. La madre no tuvo ocasión de hacer rizos a su hijo porque el padre tuvo siempre por norma llevar al chico bien rapado. Peret era un niño de cabeza grande. Esto dio lugar a las burlas de sus compañeros de colegio —con la habitual "ternura" infantil—; y él confesaba que, desde muy pequeño, sufrió con su perímetro craneal, sobre todo cuando comprobó que no había manera de comprarle una gorrita marinera que le entrara en la cabeza. "Esto —nos cuenta su hija— lo superó relativamente pronto, porque siempre tuvo gran sentido del humor".

Pero el pequeño Peret era un chico listo y era, también, un buen niño. Los domingos, después de ir a Misa con su madre —que lo llevaba a hurtadillas— atravesaba Barcelona en un tranvía amarillo y llegaba a la torre que sus abuelos maternos tenían en San Gervasio. Su abuelo Faustino era sordomudo, y el chico, para entenderse con él, aprendió a expresarse con el alfabeto de las manos. Los dos jugaban mucho, y Peret se pasaba las horas muertas viendo pintar a su abuelo.

"Peret —nos dice su hija— era un niño seriecito y obediente, educado con el rigor y el respeto de la época. Siempre habló de "usted" a su padre y de "tu" a su madre. Sin embargo, tuvo en su infancia dos pataletas notorias —que él recordaba todavía—: una, porque, según el uso, hubo de recitar una *décima* en el cumpleaños de su primo Ramonet. (Aquel suplicio no se le olvidó jamás, y siempre lo recordó como un ejemplo de algo verdaderamente ridículo). La otra pataleta fue por unos borceguíes, con lazos a media pierna, que no fue capaz de soportar.

Y es que la madre de Peret —que era persona con fuertes tendencias depresivas— estaba desconsolada por no haber tenido una niña. "Un día —escribe Emilia— vistió a Pedrito de niña, le llenó de lazos y tirabuzones postizos y le llevó al fotógrafo, un circunspecto pariente de la familia. Y aunque al niño aquello no le hizo ninguna gracia, supo soportar como un caballero el capricho de su madre y no organizó la que hubiera sido la tercera pataleta histórica".

A todo esto, Peret, que tenía mucha facilidad para asimilar lo que le pusieran por delante, fue avanzando en el conocimiento de la lengua francesa, hasta tal punto que su padre decidió llevarle a un internado al país vecino. Esto, claro es, ocasionó una conmoción familiar, y la madre se puso enferma del disgusto. Pero Roberto Puig tenía su plan trazado, y el pequeño fue a un colegio de Lyon, el 26 de marzo de 1908, en donde estuvo hasta el 9 de junio de 1909. (Luego iría otra vez, de mayo a octubre de 1912).

En el colegio lo pasó mal al principio, y lloraba por las noches acordándose de la familia. Luego se fue haciendo a los compañeros, y sus cartas revelaban su progresiva adaptación al medio, así como la influencia del francés en el modo de redactar.

Y así fue como Peret pasó a ser "le petit Pierre", a quien tomaron rápidamente afecto compañeros y profesores. Y no es un modo de hablar: es que el chico debía de ser simpático, como demuestra un episodio de aquellos tiempos en Francia: un domingo, mientras paseaba por un parque, vio un grupo de gente que hacía un concurso de canciones. Se trataba de improvisar. "Le petit Pierre" se apuntó rápidamente: cantó una canción —que se inventó sobre la marcha— y se llevó un premio —una botella de champán, con la que fue corriendo al colegio—.

De su estancia en Francia guardaría siempre un recuerdo imborrable. Y de él también se acordaban, porque cuando se casó hizo una visita a su antiguo colegio, y allí, al presentarle a los alumnos, dijeron: «Este es "le petit Pierre", del que tanto os hemos hablado».

Y es que, según todas las trazas, el destino de Pedro Puig Adam era ya, desde pequeño, dejar huella.

Se hace camino al andar

Todas las biografías —que se publicaron, sobre todo con motivo de su muerte— reseñan la brillante trayectoria académica de Pedro Puig. Aunque estemos aquí atentos, sobre todo, a esas otras facetas más íntimas de su vida, no podemos tampoco, como es obvio, pasar por alto estos jalones académicos y profesionales. En grandes líneas, son éstos:

Hace el Bachillerato en el único Instituto que entonces había en la Ciudad Condal, y lo termina con Premio Extraordinario. Ingresa en la Escuela de Ingenieros Industriales y simultanea estos estudios con los de Exactas. Termina la Licenciatura con Premio Extraordinario también, y marcha a Madrid para hacer allí el Doctorado. En Madrid conoce a don Julio Rey Pastor, de quien fue primero discípulo y luego amigo y colaborador.

Realiza su Tesis Doctoral sobre problemas de mecánica relativista y obtiene con ella un nuevo Premio Extraordinario. Continúa los estudios de Ingeniería —que había interrumpido—, pero por breve tiempo, ya que, atraído por la docencia, se presentó a Cátedras de Instituto. Y es así como, a los veinticinco años, obtiene por oposición la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Media "San Isidro", de Madrid. La lucha es dura, porque tiene hasta veinte contrincantes, en su mayoría catedráticos. A raíz de este triunfo, Rey Pastor le propone colaborar con él en la redacción de libros de Matemáticas para el Bachillerato, hechos con espíritu didáctico.

En el Instituto "San Isidro" desarrolla una actividad docente larga y fructífera. (Allí fue profesor de Su Alteza Real D. Juan de Borbón y después de los hijos de éste, el actual Rey de España, D. Juan Carlos de Borbón, y su hermano, el Infante D. Alfonso, fallecido trágicamente en Estoril).

Su Alteza Real D. Juan Carlos de Borbón cuando era alumno del Instituto "San Isidro", de Madrid. El apunte que hizo Puig Adam del actual Rey de España fue realizado, muy posiblemente, mientras éste se examinaba, oralmente, ante un Tribunal.

Siendo ya catedrático, termina la carrera de Ingeniero Industrial. En 1934 comenzó sus enseñanzas en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, regentando la Cátedra de Cálculo.

Desde un principio dirigió sus esfuerzos a la didáctica de la Matemática, buscando nuevos métodos para acercar tan ardua disciplina a las mentes juveniles. En 1955 es nombrado miembro de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática. Con Rey Pastor escribió más de veinte libros de matemáticas. Escribió, además, un centenar —aproximadamente— de artículos científicos, de los que una tercera parte se refieren a la enseñanza de la matemática. Con todo merecimiento, pues, es designado para la Cátedra de Didáctica Matemática en la Facultad de Ciencias Matemáticas.

A la vez que desarrolla esta actividad docente y pedagógica, su inquietud científica le llevó a profundizar en los estudios de Automática, como consecuencia de unos cursos profesados en la Escuela de Ingenieros Industriales sobre aplicaciones técnicas de la Matemática. Estos estudios le llevan a crear y patentar algunos dispositivos de aplicación de técnicas digitales a los procedimientos de cálculo.

En 1956, en reconocimiento a su labor investigadora, la Academia de Ciencias le incluye entre sus miembros.

Un hombre flexible

Preguntamos a su hija Emilia por el carácter de Puig Adam, por "sus cosas", aquellas cosas que le hacían ser *él*. Y Emilia se sonríe al recordar: "Mi padre era muy despistado y desmemoriado para las cosas sin importancia. Pero no quería olvidarse nunca de las fechas entrañables y, por si se le pasaba, me encargaba a mí que se las recordara. Yo era su calendario". Nos cuenta también que en muchas ocasiones, a pesar de que le gustaba la vida de familia y hablar en la mesa con todos, se le notaba totalmente abstraído. Su mujer e hijos, en esos casos, le dejaban tranquilo. Al acabar le preguntaban si sabía lo que había comido; y en la mayor parte de los casos no era capaz de recordarlo. Un típico caso de "sabio distraído".

Con todo, batió su propio récord un día que tenía que dar una conferencia. Su mujer —que, conociéndole, le "revisaba" antes de salir, como casi todas las madres hacen con los críos pequeños— comprobó, horrorizada, que debajo del abrigo ¡no llevaba chaqueta! El celo "maternal" de su esposa le salvó, una vez más, de quedarse ante el público en mangas de camisa.

Pero estos "despistes" no le impedían —claro está— tener un nivel muy profundo de atención para las cosas verdaderamente importantes. "Un día —nos cuenta Emilia— siendo yo aún adolescente, en El Escorial, estaba hablando con una amiga y entre las dos estábamos censurando muy duramente a otra amiga común ausente. Mi padre, que trabajaba bajo un emparrado, en apariencia distraído, nos oyó. Y luego, ya a solas, habló conmigo muy seriamente, haciéndome ver que, antes de criticar conductas, *hay que ponerse en el lugar del otro.* Esto es algo que se me quedó muy grabado. Y luego pude comprobar que mi padre ejercía esta norma de conducta de un modo sistemático".

Puig Adam tenía esta extraña facultad —a medias ética, a medias psicológica— de "desdoblarse" en el "tú", de adoptar el punto de vista de los demás. Esta flexibilidad le hacía ser tolerante con las flaquezas ajenas, porque empatizaba, de un modo efectivo, con el "otro". Quizá radicase en esta flexibilidad su "garra" peculiar, su facilidad de conexión, que, entre otras cosas, le permitía ser un gran profesor.

Tenía Puig Adam un carácter alegre, y él decía que era un hombre feliz con su vida, tal y como era. Sólo se malhumoraba si tenía que formar parte de algún Tribunal de oposiciones, o de las famosas pruebas de Ingreso en la Escuela de Ingenieros Industriales. Y en relación con estos motivos de malhumor, le aterraban las recomendaciones.

Otra muestra de su flexibilidad era su gran sentido del humor, que completaba, intelectualizándolo, su natural contento y satisfecho con lo que tenía. "De todos modos —dice Emilia—, nosotros nos damos cuenta ahora de que nuestros padres vivieron de un modo muy modesto. Pero ellos no necesitaban más; se conformaban con lo esencial, y con el cariño que se tenían mutuamente. La verdad es que se preocuparon mucho de nosotros, de nuestro porvenir, y sólo cuando nos vieron encauzados mi padre pensó en comprar un piso más moderno. Desgraciadamente no lo llegó a habitar siquiera".

La familia

Cantar las virtudes de los que han muerto es un tópico, un recurso del fácil panegírico. Pero en el caso que nos ocupa parece que, tópico o no, era verdad. Nos dice su hija: "Mis padres formaban el matrimonio más unido que he conocido". «Poco antes de morir —añade—, papá me había dicho que mi madre había sido para él su "novia eterna"». Se conocieron por su común afición al piano, que tocaban juntos muchas veces, sobre todo durante el noviazgo.

El matrimonio tuvo tres hijos —dos mujeres y un varón— que fueron educados rectamente. "Mi padre nunca nos consintió en nada. Era más bien severo. En el recuerdo que guardo de él, sin embargo, veo que tuvo una evolución ascendente de ternura y compenetración. De muy pequeña, mi padre me resultaba algo distante y quizá exigente. Pero conforme fui creciendo me di cuenta de que podía consultarle muchas cosas y de que me atendía y me entendía".

A pesar de ser hombre muy ocupado y de estar con frecuencia "en las nubes" no le importaba que se le distrajera para atender a cualquier problema de sus hijos. Hombre de claros criterios morales, sabía aconsejarlos bien, "... e incluso —nos cuenta Emilia— mis amigas le consultaban muchas veces sus problemas".

Fue su hija mayor a estudiar a Roma. De su estancia allí conserva aún las cartas que su padre le escribía. "Me daba consejos llenos de buen sentido.

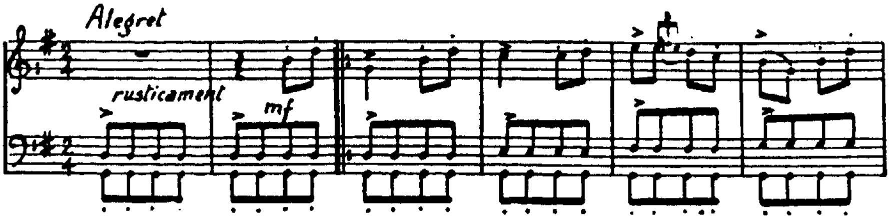
Otro gran matemático, Rey Pastor, visto por su amigo y colaborador Puig Adam

Podíamos hablarle de cualquier cosa, de nuestros problemas sentimentales, de nuestras amistades, y el opinaba, en muchas ocasiones, más como amigo que como padre". (Mientras nos cuenta estas cosas se le quiebra la voz y se le nublan algo los ojos. "Hace mucho que ha muerto, pero todavía, al recordarlo, me emociono". Lo dice como disculpándose. Pero es fácil de entender).

Cuando don Pedro Puig Adam notó que iba a morir pidió a su hija mayor que se quedase con él. "Me dijo que no saliera aquella tarde y me estuvo hablando de mi madre, encomendándomela, y también a mis hermanos. El sabía que había llegado el final". Era el 12 de enero de 1960.

Polifacetismo

Al margen de su actividad científica —de la que se da noticia independiente—, Puig Adam fue un espíritu inquieto y sensible, casi renacentista, por la amplitud y variedad de sus aficiones.



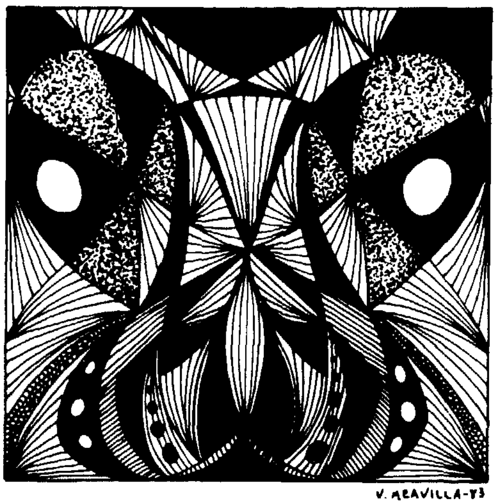
Fragmento de la partitura de uno de los bailes populares catalanes armonizados po. Puig Adam en 1937. Los expresivos dibujos también son suyos.

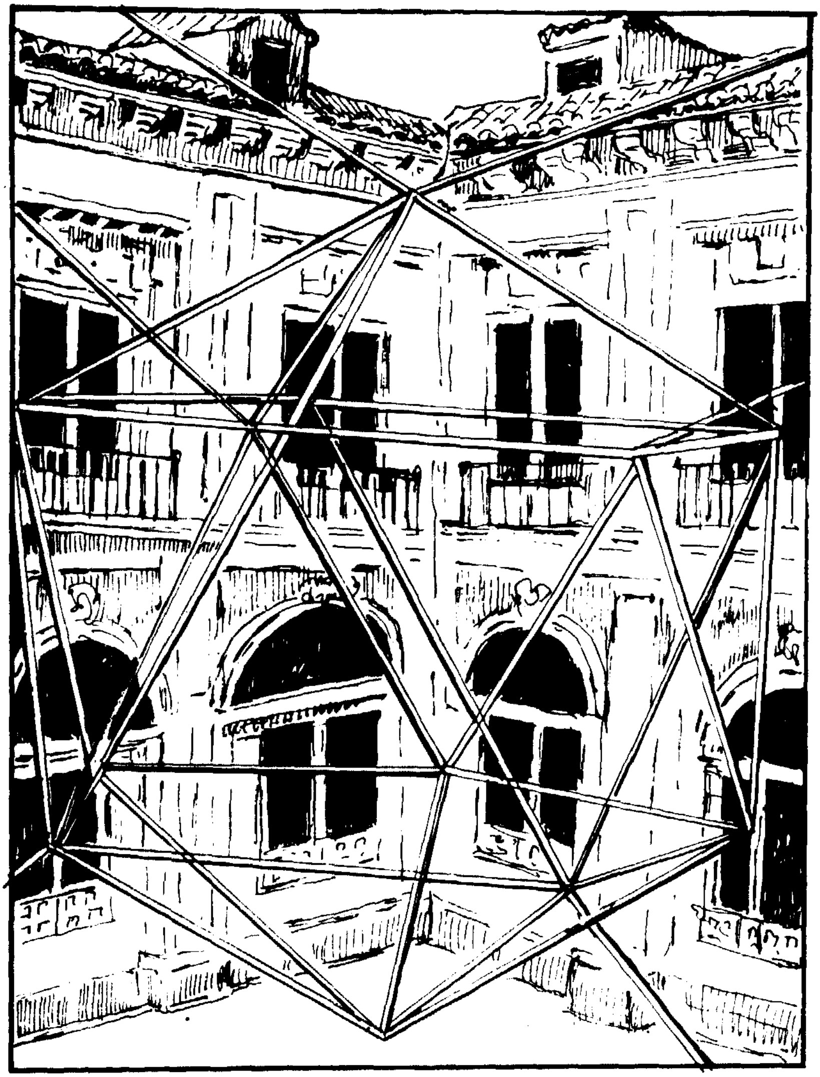
Después de matemático, desde luego, Puig Adam era músico. Tocaba el piano y componía. Se preocupó por el folklore de Cataluña y recopiló bailes y canciones. "Cuando me casé —nos cuenta Emilia –, toda la música que se interpretó en la ceremonia la había compuesto mi padre, exprofeso, para ese día".

Nos enseña algunas partituras, escritas con una primorosa "caligrafía musical", tan pulcras y cuidadas que podían ir a la imprenta directamente.

Pero, además de músico, Puig Adam era dibujante y pintor. Por lo que pudimos ver, mejor dibujante que pintor; pero esto es algo que decimos basándonos en escasos datos. Hay unas caricaturas de excelente factura y trazo; vemos un retrato de su hija mayor, en tonos sepias, impecable, y un par de óleos muy dignos y bien elaborados.

También, a veces, hacía versos. Con independencia de su posible calidad revela el hecho la amplitud de intereses del matemático. Pero este polifacetismo, en el fondo, no era simple "dilettantismo": obedecía, casi, a una actitud ética, a un modo de encarar la vida. En una alocución a sus alumnos de 7.º curso, en un acto académico del Instituto, el 26 de mayo de 1945, decía —entre otros muchos consejos llenos de buen sentido, de auténtico "seny"—: "Tended a ser un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y, al menos, maestros en algo, para bien de los demás". Y él, de verdad, puso en práctica este consejo, porque sabía que la especialización, el contemplar el mundo desde un solo punto de vista, constituye un grave riesgo de deformación intelectual. Por eso, junto a su maestría matemática, fue "aprendiz" de otras muchas cosas; aunque, eso sí, un muy digno aprendiz, porque en todo cuanto hizo dejó, sin duda alguna, la huella de su genio, la impronta de su profunda humanidad.





D. Pedro Puig Adam construyó este gran icosaedro de cinta, que suspendió en el patio del Instituto de "San Isidro", atirantándolo por sus vértices mediante cuerdas tensoras sujetas a los marcos de balcones y ventanas.

La obra científica de Puig Adam

Julio FERNÁNDEZ BIARGE *

A los jóvenes profesores de Matematicas puede resultarles difícil valorar justamente la contribución de Puig Adam a la Matemática española, y en particular lo que ellos mismos han recibido de este maestro cuyo XXV aniversario conmemoramos ahora. Gran parte de sus enseñanzas les habrán llegado anónimamente, de segunda o tercera mano, cuando se han hecho de uso común las innovaciones que él introdujo valientemente en un medio poco preparado para apreciarlas.

Aun los que no conozcan ninguna de sus publicaciones están siguiendo, sin saberlo, caminos que él abrió. Los que tuvimos la suerte de convivir con él algunos años, como compañeros de profesorado o como alumnos —como discípulos suyos, en ambos casos— recordamos cómo nos asombraba con sus creaciones, en las que la originalidad y la sensibilidad iban siempre unidas, y sabemos bien lo mucho que debemos a sus enseñanzas y a su ejemplo.

Nuestro recuerdo no puede separar su obra científica de su atractiva personalidad. Hacía de su vida íntegra su verdadera obra y por eso en ella aparecían, en armoniosa unidad, su magisterio didáctico, su producción científica, sus creaciones artísticas musicales, pictóricas y literarias, su abnegada labor de profesor de multitudes de alumnos y su amor a todos los que le rodeaban.

La investigación científica en Matemáticas no fue en él un oficio, sino el espontáneo ejercicio de uno de sus impulsos vocacionales que le llevaban a buscar la verdad y la belleza, de la misma manera que su dedicación a la Didáctica Matemática, que en sus últimos años se convirtió casi en una entrega total, no fue en el fondo sino una manifestación de su activo amor a los demás, centrado en sus alumnos y en todos los alumnos que por entonces sufrían una enseñanza de las Matemáticas tan falta de motivaciones como estéril.

* Catedrático de Álgebra y Cálculo de la Escuela de Ingenieros Navales de Madrid.

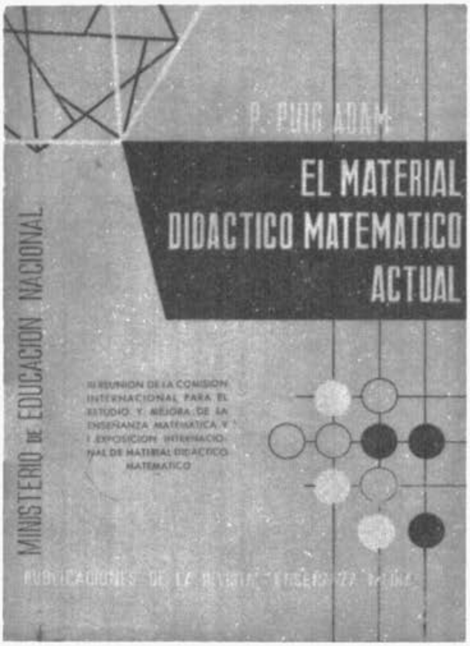
Los trabajos de investigación publicados por don Pedro llenarían de sorpresa a quien los estudiase sin haber conocido a su autor, por el fuerte contraste que se observa entre la profundidad y originalidad de sus hallazgos y la brevedad del desarrollo de sus consecuencias. Podría decirse que, descubierto el filón y comprobada su riqueza, lo entrega enseguida a su explotación por los demás. Con sólo alguna de sus ideas originales, un investigador de oficio podía haber llenado muchos años de trabajo.

La tesis doctoral de Puig Adam llevó el modesto título de *Resolución de algunos problemas elementales de Mecánica Relativista Restringida,* y tiene el especial mérito de haber sido escrita en 1921, cuando las teorías de Einstein, aún no bien comprendidas en muchos medios científicos, eran conocidas por muy pocos en España.

La inclinación posterior de don Pedro hacia la investigación aplicada a los problemas técnicos no puede interpretarse como una desviación de su línea de conducta, del mismo modo que sus estudios de ingeniería no fueron una simple concesión a consideraciones de orden económico, sino una etapa esencial en la formación del maestro. Una de las ideas más arraigadas en su pensamiento es precisamente que las Matemáticas, aun siendo de naturaleza abstracta, no deben desligarse nunca del juego de abstracciones y concreciones que, por una parte, las originan, y, por otra, les dan aplicación, so pena de perder lo más importante de su valor educativo e incluso de hacerse estériles para su evolución posterior. Por eso buscaba en la técnica, tanto una fuente de inspiración como un campo en que aplicar sus resultados. A esta línea de acción pertenecen sus trabajos *Sobre las catenarias de tensión mínima* y otros sobre *Comportamiento de materiales ferromagnéticos,* sobre *La estabilidad del movimiento de las palas del autogiro* y sobre *La absorción de la energía cósmica por la atmósfera.*

Como una nueva prueba de su habilidad para descubrir estructuras matemáticas en las actividades de la vida corriente, es decir, de llevar a cabo la operación de abstracción a que nos referíamos antes, publicó sus trabajos sobre las *Curvas de distribución por edades de una colectividad profesional* y sobre *Una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión.*

Su tratado de *Geometría Métrica,* publicado hacia 1947, constituye una verdadera revolución en el libro de texto técnico, tanto por su maravillosa exposición como por lo originalísimo de su concepción. Algunas partes de su contenido dieron lugar a publicaciones científicas en la *Revista Matemática Hispano-Americana.* Lo primero que llamó la atención en él es la elección de los axiomas del movimiento en sustitución de los de congruencia, habitualmente utilizados antes. Puig Adam explica brillantemente por qué prefiere hacerlo así: "Los axiomas de la congruencia —dice— conducen invariablemente a la *triangulación* de la Geometría, el rígido reticulado euclídeo cuyas mallas triangulares aprisionan las figuras dictando leyes de igualdad y proporción. Más educativo parece caracterizar desde un principio los movimientos y ligar a cada figura aquellas transformaciones que ponen de manifiesto sus propiedades". Todo el libro es fiel a esa idea, tan certeramente expuesta, y a pesar de que casi todos sus capítulos versan sobre temas clásicos,



la unidad que preside su construcción y la originalidad de su desarrollo, lo convierten en una excelente preparación para el estudio de otras ramas más modernas de la Geometría.

Dos o tres años después de su *Geometría Métrica,* publica sus Cursos Teórico-Prácticos de *Cálculo Integral* y *Ecuaciones Diferenciales,* sin más pretensiones que servir de ayuda a sus alumnos de la Escuela de Ingenieros Industriales; pero la riqueza de motivaciones que ofrecen, la brevedad de sus desarrollos en comparación con la utilidad que proporcionan y la agudeza con que están escogidos los ejemplos, hacen que estos textos todavía sean preferidos por muchos alumnos treinta y cinco años después.

En esas mismas fechas publica un trabajo sobre *Un teorema general de funciones compuestas y sus aplicaciones geométricas y físicas,* y otro sobre *La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos,* siempre fiel a la línea de mantener a la Matemática en fecunda conexión con la realidad.

Quizás la parte más original de su obra científica la constituyan sus trabajos sobre las *Fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales,* publicados en los años 1951 a 1953. Estos trabajos fueron inspirados, en perfecta consonancia con las directrices que se observan en toda su obra, por un problema de índole técnica: La impedancia de una línea eléctrica con autoinducción y capacidad repartidas en forma continua a lo largo de ella. Generalizando el paso al límite de una función de partición que conduce a la definición de la integral de Riemann, construye otra función de partición aplicando a las diferenciales de dos funciones dadas el algoritmo de las fracciones continuas. Obtiene así, por paso al límite, un funcional de la pareja de funciones citadas que resuelve el problema de partida. Este funcional no lineal tiene interesantes propiedades, y así como la integral de Riemann resuelve la ecuación diferencial consistente en la obtención de la primitiva de una función, el nuevo funcional resuelve la ecuación de Riccati. Trata también las fracciones continuas ramificadas, en correspondencia con la bifurcación de una línea de transporte eléctrico. En seis artículos científicos lanza la idea y muestra el campo de sus posibles aplicaciones; no lo agota. Realizado el verdadero acto creador, no se aferra a su explotación minuciosa; podía haber abordado la determinación de condiciones suficientes de convergencia más débiles, la posible generalización de Stieltjes, las fracciones continuas dependientes de parámetros, teoremas de acotación, o la expresión de la teoría mediante los "cumulantes integrales", que yo desarrollé más tarde. Pero él prefirió dejar el tema abierto y buscar nuevos campos en los que poder trabajar en forma más creativa.

En 1959 publica un artículo con el modesto título de *Un ingenio eléctrico para la resolución de problemas de lógica formal;* en la versión en francés, que publicó en *L'Enseignement des Sciences,* él mismo puso "jouet" en lugar de ingenio. Se trata de una originalísima muestra de cómo se puede hacer sencillo lo que sólo se había hecho de modo complicado, y de cómo esta sencillez puede arrojar nueva luz sobre el problema. El ingenio propuesto puede ser construido y comprendido plenamente por los alumnos, con materiales corrientes y económicos, y permite exhibiciones clarísimas acerca de problemas de lógica formal.

Poco después, la prematura muerte de don Pedro nos privó de la prometedora continuación de su labor creadora. En los últimos años, sobre todo, se volcó materialmente en su propósito de despertar una conciencia pedagógica en la enseñanza de las Matemáticas, por entender que ese era el mejor servicio que podía prestar a los que le rodeaban, a España y a la sociedad. No hemos hablado aquí, porque no era nuestro propósito, de su ingente labor en la Didáctica de las Matemáticas, tanto doctrinal como testimonial, que consumió sus mejores esfuerzos y dio los frutos más permanentes.

En los años que abarcó la vida de don Pedro, las Matemáticas dieron en España una salto gigantesco, partiendo casi de la nada para situarse, en ciertas parcelas, al nivel de los países más avanzados. Lo prodigioso de este cambio es que su realización se debió a un número reducidísimo de personas, repartidas apenas en dos generaciones. Los matemáticos de hoy día, profesores e investigadores, han encontrado para su labor un terreno abonado, donde pueden recoger el fruto con un esfuerzo razonable. Los pioneros que nos han legado esas tierras comenzaron su tarea en un desierto desolador. Eran hombres animados por una vocación inmune a la adversidad de las circunstancias, con visión clara de los logros que podían alcanzarse y capacidad creadora para abrir los caminos que todos hemos seguido. Eran muy pocos, y don Pedro Puig Adam ocupó un lugar destacado entre ellos.

Tres escritos de Puig Adam:

1. Enseñanza heurística de la Matemática

En la XXVI Semana Pedagógica de la Federación de Amigos de la Enseñanza el ilustre Catedrático don Pedro Puig Adam pronunció la siguiente conferencia:

Una vez más tengo el gusto de dirigirme a la Federación de Amigos de la Enseñanza, amablemente invitado por su Secretario en esta su XXVI Semana de Educación, y lo hago con verdadero placer, porque he entendido siempre que la enseñanza oficial y la privada deben actuar en estrecha colaboración en la tarea de mejorar sus métodos.

Todos los niños españoles, estudien donde estudien, son acreedores a la misma atención y tienen derecho a beneficiarse por igual de los avances que en materia de pedagogía se promuevan en España y fuera de ella. En consecuencia, todo el profesorado español, oficial y no oficial, tiene el deber de sentirse unido, contribuyendo con su trabajo y experiencia al mismo aliento de mejora, dejando a un lado antagonismos que no debieron haberse suscitado ni alimentado nunca, y con el pensamiento puesto tan sólo en lo que ha de ser objeto común de nuestros afanes: la mejor formación del niño español.

* * *

Decía hace pocos días en Valladolid, en conferencia sobre la formación del profesorado, que esta formación no termina nunca; que el profesor sigue mejorándola durante toda su vida; que continúa aprendiendo de sus propios alumnos mientras vive y enseña. La clase vivida es el mejor de los textos donde puede ir descubriendo día a día las facetas desconocidas de la inteligencia del niño. Desdichado el que se crea en posesión de un modo de hacer tan perfecto que no admite retoques ni mejoras. Y desdichados sus alumnos; porque la inamovilidad de procedimientos y la carencia de estímulos no es solamente signo de soberbia, sino también de muerte. Cuando se tiene un sentido autocrítico alerta y cuando se sabe leer en el libro eternamente abierto de la clase, nunca se termina el proceso de acumulación de experiencia y de mejora y adaptación consiguiente de procedimientos.

Leamos, pues, en este libro. ¿Cuál es el balance de satisfacciones que encontramos en él? ¿Qué nos dice la experiencia del éxito de nuestra enseñanza? ¿Qué interés hemos sabido despertar? ¿Cuántas vocaciones, cuántas voluntades hemos sabido atraer hacia nuestros estudios? Confesemos nuestra decepción. La Matemática sigue siendo el principal escollo con el que tropieza la niñez y la juventud que pasa por nuestras manos. Y menos mal si no hemos dejado un lastre de odio hacia ella. Porque si preguntáis, no ya a los pequeños, sino a los mayores, a los hombres de mi generación, de aquella que se formó a usanza clásica, con la zarabanda de postulados, teoremas, corolarios, escolios..., que llenaban nuestros textos, os declarará sin rodeos que la Matemática fue para la casi totalidad de ellos, no ya una disciplina difícil, sino un galimatías de enunciados y razonamientos que terminaron por aprenderse de memoria, como un suplicio impuesto al margen de toda comprensión y de todo interés. Toda la convicción que adquirieron la mayoría de los varones de nuestra generación fue la de su incapacidad para las matemáticas. "No sirvo", era la impresión que dejaba su estudio en la inmensa mayoría de los escolares de comienzos de siglo..., y, claro es, el aborrecimiento definitivo a lo impuesto e incomprendido es inevitable.

Pues bien, hay que empezar por declarar muy alto que este "Non possumus" con el que se resignaban los alumnos, y al que asentían tácitamente los profesores, es una lamentable falsedad, resultante tan sólo de un defectuoso sistema de educación. No hay nadie, absolutamente nadie, que pueda declararse específicamente negado para las matemáticas. Existen, sí, diferencias de ritmo en el aprendizaje de ellas, lo mismo que en cualquier otro aprendizaje; pero creer que para aprender matemáticas es necesaria una facultad especial únicamente reservada a cerebros de cierto privilegio, es un error que hay que combatir con energía, mejorando precisamente nuestros sistemas de enseñanza. Aquel verdadero horror a las matemáticas fue tan sólo la consecuencia de un verdadero error educativo. Error de programación; inadaptación del método; ineficacia del modo.

Errónea la programación clásica por presentar la Matemática dividida en compartimentos separados, dispuestos linealmente a lo largo del Bachillerato: Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría, tal como aparecieron históricamente a través de los genios griego, primero, y árabe, después. Equivocada por no tener en cuenta la génesis del pensamiento matemático de la humanidad y la evolución, en cierto modo paralela, del pensamiento matemático del niño, el cual se desarrolla concéntricamente en múltiples direcciones en lugar de agotar radialmente los recorridos; que se organiza mejor a través de unidades funcionales progresivas que en torno a las escuetas unidades deductivas clásicas.

Absurdo el método —método íntegramente lógico, hipotético-deductivo, tal como fue transmitiéndose de generación en generación desde los tiempos de Euclides— sin tener en cuenta que éste no escribió sus famosos elementos para uso de niños de once o doce años. Del todo absurdo y antiformativo, por escamotear el período intuitivo e inductivo seguido por la humanidad hasta llegar a la madurez sintética griega; por olvidar el largo proceso previo de edificación de categorías mentales, según gradación de abstracciones que es preciso ajustar al ritmo normal de crecimiento escolar.

Inoperante el modo por descuidar totalmente la captación de intereses, pretendiendo suplir esta falta de atracción natural del niño hacia el objeto de estudio con el único recurso de estímulos coactivos secundarios oscilantes entre la ñoñería y la crueldad; llamadas a la vanidad o al temor; espejuelo de premios, amenaza de castigos.

Una más extensa crítica de este tipo de enseñanza matemática tradicional y de sus consecuencias hallará quien le apetezca en la conferencia pronunciada en Semana análoga hace siete años y publicada en el número de *Atenas* de marzo del 51. Si me he permitido recordar hoy nuevamente esta crítica es tan sólo para empezar efectuando un balance de los progresos que en materia de programa y de método se han realizado ya en lo que va de siglo y para situar así en su adecuado marco las esperanzas de mejora en lo que se refiere al modo.

* * *

Si quisiéramos sintetizar en términos esquemáticos las cuestiones que determinan el proceso de aprendizaje del niño, podríamos centrarlos alrededor de estos tres interrogantes:

¿Qué es lo que el niño *debe* aprender?

¿Qué es lo que el niño *puede* aprender?

¿Como lograr que el niño *quiera* aprender?

Las necesidades sociales de cada momento histórico (junto a la constante del destino eterno) nos marcarán lo que el niño *debe* aprender. La evolución psicológica de su inteligencia nos dirá lo que el niño *puede* aprender. Pero tan importante como todo ello es que el niño *quiera.* Sólo así el aprendizaje será auténtico, por ser natural y no forzado. Hay que atraer su afecto al objeto del conocimiento. Despertar en él la voluntad del esfuerzo para adquirirlo, antes de imponerle dicho esfuerzo como un mero sacrificio.

Pues bien, la enseñanza tradicional matemática solamente prestaba atención al problema del programa, a lo que el niño debía aprender, y ello aún con visión tan retrospectiva y arcaica, que bien puede declararse hoy en gran parte inservible y caducada. Las humanidades de hoy no son las de antaño. No preparamos al niño para vivir el recuerdo de nuestro pasado, sino para vivir su futuro, lleno de exigencias técnicas y, por ende, científico-matemáticas.

Pero la gravedad del error de la enseñanza tradicional se manifestaba aún más ostensiblemente en las preguntas segunda y tercera de las formuladas, que son precisamente las relativas al método y al modo. No se prestaba ninguna atención a lo que el niño *podía,* en verdad, asimilar en cada etapa de su desarrollo, ni menos todavía se preguntaron nuestros profesores si nosotros, niños, teníamos algún deseo de aprender lo que nos enseñaban, pregunta que en aquellos tiempos hubiera parecido ridículamente absurda. De aquí el imperativo exclusivo de los modos indirectos y coactivos de estímulo.

Afortunadamente, los progresos en el conocimiento de la psicología intelectual en lo que va de siglo y, concretamente, los numerosos estudios realizados acerca de su evolución intelectual han promovido una indiscutible mejora en la cuestión de métodos. Así, la implantación de los métodos cíclicos, y de métodos intuitivos en los primeros años de Bachillerato permitieron ajustar mejor los procesos de aprendizaje a la continuidad del desarrollo intelectual del niño, salvando el abismo que existía antes entre la Escuela y el Instituto, brusquedad de salto característica de una enseñanza matemática elemental montada sobre dos vacíos: el empirismo instrumental de la aritmética primaria y el logicismo prematuro de las matemáticas clásicas del antiguo Bachillerato.

España no ha ido a la zaga en esta saludable evolución de métodos. Casi me atrevería a afirmar que en algunos períodos hemos ido en vanguardia, ignorándolo nosotros mismos. Me refiero, por ejemplo, a la modalidad característica de los métodos intuitivos introducidos en el Bachillerato español hacia 1926 y 27, operando con un concepto de intuición más cercano al de la auténtica actividad descubridora y generadora del pensar matemático que al sentido que a esta palabra se suele dar en la pedagogía tradicional. Intuición más significativa de evidencias interiorizadas, de adivinaciones, de experiencias imaginadas, que de observaciones y experiencias reales que constituyen el estrato inferior, la primera base sensible de nuestro conocimiento. Intuición que no excluye el uso del razonamiento, sino que se apoya, por el contrario, en una intensa actividad razonadora que todavía no es abstracta ni *reductiva,* como la actividad racional clásica. Intuición que busca el acceso directo e inmediato a la verdad apoyando los razonamientos en oportuno pedestal concreto. En este modo de concebir la enseñanza intuitiva y en la amplísima y variada llamada a imágenes vitales con las que se empezó a fomentar en la mente del niño español la elaboración subconsciente de abstracciones posteriores, radicó tal vez la singularidad avanzada de nuestra solución al problema de la enseñanza intuitiva de la Matemática en los primeros grados.

Reforma que fue acentuada posteriormente con la introducción insensible y progresiva de la evidencia lógica reductiva; desplazamiento gradual de las evidencias sensible e intuitiva anteriores; evolución paulatina, siempre más atinada que la presentación ex abrupto del método racional en un tercer curso, como se hacía, por ejemplo, en los programas del año 34. Evolución metódica que culmina en los cuestionarios recientes con la introducción de unas nociones de metodología de la matemática elemental en el quinto curso, última innovación que aporta una nueva y acusada personalidad en los programas españoles. La comparación de los textos y programas actuales con los más acreditados antes de 1926 permite apreciar los progresos realizados en materia de adaptación de métodos a la evolución intelectual del niño. Creo firmemente que hoy el niño español *puede* ya aprender las matemáticas que se le ofrecen a lo largo de su desarrollo, por lo mismo que se adaptan mejor a él.

* * *

Pero, como antes he dicho, esto no basta, es preciso que el niño, además, *quiera*. Y esta es nuestra nueva y actual cruzada. Nos encontramos ahora, pues, ante un problema de mejora de *modos*, el cual habrá de chocar con más prejuicios e inconvenientes que la reforma de métodos introducida en el año 1926, con ser respetable la oposición que la rutina ofendida opuso entonces a la innovación.

Para caracterizar en términos precisos y breves los motivos de esta conquista del querer del niño, me vais a permitir que me valga de conceptos y palabras vertidos ya en otras ocasiones.

La evolución de la Didáctica actual se caracteriza por una primacía del acto de aprender sobre el acto de enseñar, y por el desplazamiento consiguiente del centro de la enseñanza. El centro de la Didáctica clásica era el maestro; su acción, transmitir conocimientos. Se pensaba que quien tuviera la fortuna de recibir lecciones de un transmisor claro y ordenado había de aprender necesariamente, porque aprender en tal concepción de la enseñanza era eso: recibir, es decir, lo pasivo, lo condicionado, mientras lo activo, lo determinado era enseñar, era transmitir.

Se ha tardado no poco en tener conciencia clara de que el acto de aprender es mucho más complicado que lo que supone la recepción pasiva de conocimientos transmitidos; que no hay aprendizaje donde no hay acción, y que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno en su acción de aprendizaje. Esta acción del alumno ha terminado así primando sobre la acción del maestro, condicionándola totalmente y subvirtiendo la primacía inicial de sus papeles. El centro de la enseñanza ya no es hoy el maestro, sino el alumno. Rotunda verdad, que de puro sencilla muchos maestros no han asimilado todavía.

El interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición. En matemáticas, concretamente, las síntesis euclídeas resolvieron el problema de la sistemática transmisión de conocimientos matemáticos, separando totalmente la transmisión de la génesis. La solución, perfecta o casi desde un punto de vista lógico, era equivocada desde un punto de vista psicológico, porque la síntesis, al ocultar hipócritamente todo el proceso activo de elaboración en el que radica la génesis del conocimiento transmitido, pierde su vitalidad, en interés y en eficacia formativa, lo que gana en valores estrictamente lógicos. Por muy elevado que sea el concepto que el alumno tenga de su maestro, difícilmente se interesará en recibir pasivamente los productos elaborados a través de procesos sintéticos en los cuales él no ha tomado arte ni parte.

La acción no es sólo una necesidad vital del niño, cuya introducción en los procesos de aprendizaje marca la principal característica de la escuela moderna, sino que desde el punto de vista epistemológico es esencial en la formación del pensamiento mismo (y reproduzco ahora palabras textuales del prólogo de mi *Didáctica matemática heurística*). Pensamiento y acción aparecen de tal modo vinculados, que si no es posible concebir acción sin pensamiento que la conduzca, tampoco se concibe pensamiento sin acción que lo haya provocado.

Esta vinculación es tan esencial en matemáticas, que no hay concepto fundamental que no tenga su acción generadora, desde la noción de número natural (originada por la acción de coordinar conjuntos), hasta las nociones proyectivas (procedentes de acciones de proyectar, cortar, etc.) y topológicas (entrar, salir, situarse entre, etc.).

A la luz de la sistematización moderna de la matemática, esta concepción activa de la génesis del pensamiento matemático adquiere un más singular relieve que acusa la necesidad perentoria de una didáctica consecuente. Así, la Geometría moderna no es ya el estudio de tales o cuales figuras, sino el de las propiedades que permanecen invariantes en tales o cuales transformaciones (acciones efectuadas sobre ellas). El Álgebra moderna es el estudio de estructuras operacionales, una especie de dinámica de relaciones en la que ya no interesan los seres relacionados, sino las acciones relacionantes, es decir, las operaciones y sus leyes o propiedades.

Se siente, en resumen, la necesidad imperiosa de una didáctica no sólo activa, sino heurística en el sentido de procurar que el alumno elabore por sí mismo los conceptos y conocimientos que haya de adquirir, mediante el acicate de situaciones hábilmente creadas ante él por el maestro, con objeto de que el interés funcional y directo por ellas despertado sea suficiente para fomentar la actividad generadora. Más que interpretar la Matemática como un colosal depósito estratificado en los textos que las anteriores generaciones nos han legado, hemos de concebirla como una actividad pensante en eterna producción: la de ayer, la de hoy, la de mañana. Para que no falte esta última formamos a nuestros alumnos hoy. Sólo cultivando el espíritu de investigación y de conquista se asegura, a un tiempo, la firmeza de lo adquirido y la continuidad histórica del progreso. Y obsérvese cómo no perseguimos una didáctica facilona y blandengue, sino, por el contrario, una fortaleza de conocimientos y un impulso basados en el esfuerzo del niño, estimulando éste convenientemente, al tiempo que se gradúa y dosifica. No se trata, pues, de eludir dicho esfuerzo, sino de lograr que sea deseado.

* * *

Sin duda parecerá a muchos utópica quimera pretender que el niño *quiera*, que el niño se interese espontáneamente por el objeto del conocimiento matemático, y más quimérico aún que el niño descubra sus matemáticas; y, sin embargo, ambos objetivos son alcanzables simultáneamente por ser con frecuencia inseparables. Preguntad a los que han vivido, a los que han experimentado ya clases activas heurísticamente concebidas. Ellos os dirán la asombrosa inventiva de que hace gala el niño, aun a veces los que en las primeras reacciones parecen manifestarse más torpemente. Ellos os dirán la inmensa alegría del niño que por propia inventiva descubre la verdad, el goce de encontrar por sí mismo el nudo resolvente de un problema, el hallazgo de una ley, de una generalización, esa feliz sonrisa ante la evidencia primitivamente oculta. Ellos os dirán también la forma indeleble con la que estos hallazgos quedan fijados en la mente de sus descubridores. Y ¿qué de extrañar tiene que el niño descubra gozando y goce descubriendo, si es ley natural en el hombre no estimar tanto lo que se recibe como lo que se conquista?

El niño tiene una curiosidad innata, un interés vivísimo en descubrir, en enterarse, en querer saber cosas; todo es cuestión de encauzar ese interés, de captar su voluntad hacia el objeto del conocimiento. Pero ¿cómo hallar los estímulos eficaces en cada caso para promover espontáneamente su esfuerzo investigador en la dirección deseada?

Este es, señores, precisamente nuestro gran problema didáctico actual, problema para cuya solución pido la intensa colaboración de todos, porque no puede ser obra de un individuo, ni siquiera de una minoría; porque es necesario un amplísimo repertorio de recursos de que poder echar mano, un vasto cuadro de experiencias realizadas y anotadas para adaptar nuestra enseñanza a las modalidades exigidas en cada momento crítico; tal es asimismo la multiplicidad de perspectivas posibles de ambiente, de número y calidad de alumnos en los variados grados que abarca la Enseñanza Media. Lo que sí puedo aseguraros es que la solución de este problema no es una utopía. Llevo mucho tiempo experimentando y viviendo personalmente en la conducción heurística de la enseñanza matemática; he visto, además, la rápida adaptación, por simple contagio de este modo de hacer, en alumnos y compañeros que han conseguido ya notables éxitos y satisfacciones; y sé también lo bastante de experiencias internacionales análogas, para poderos asegurar que el problema tiene solución y que los niños son muy felices haciendo y descubriendo sus matemáticas. Sin duda, hay en la sala testigos presenciales de tales ensayos; compañeros y alumnos con suficiente riqueza de experiencias propias para confirmar la verdad de lo que estoy diciendo. Con toda seguridad también habrá, entre los presentes, profesores dedicados a la Enseñanza Primaria, que hayan experimentado la eficacia de los resultados que pueden ser obtenidos con el material de números en color, las famosas regletas de Guisenaire, que el profesor Cattegno maneja tan admirablemente y que ha propagado con tanto acierto ya en España, donde ha dejado seguidores de tanta eficacia como vocación. Este material es un ejemplo palpable, por su sencillez y multivalencia, de la riqueza de situaciones matemáticas que pueden ser creadas ante los niños y de cómo desde la más tierna edad pueden ellos descubrir sus matemáticas jugando y deleitándose. Tengo a gala haber servido de embajador en España a mi amigo Cattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, y estoy muy gozoso del éxito conseguido por el método de los números en color, ya que estimo que la reforma de modos debe tener su iniciación desde los primeros grados.

* * *

Pero no quiero hablaros hoy de las regletas. Se trata de una Semana dedicada a la Enseñanza Media, y aunque también en algunos temas de ella son las regletas utilizables y yo mismo he ideado algunas clases con ellas, veo horizontes mucho más amplios en la concepción de situaciones heurísticas aplicables a la Segunda Enseñanza. Me limitaré a citar solamente algunos ejemplos, muy pocos, de iniciación heurística de clases diversas con las que dar forma concreta a los principios generales anteriormente expuestos.

Anunciad, por ejemplo, a un grupo de niños de once a doce años que vais a exponerles un criterio para averiguar si un número es divisible o no por 9; y empezad los razonamientos conducentes a tal fin. Miradles a los ojos: ni uno solo brilla; pupilas neutras, inexpresión, aunque escuchen con la más exquisita y disciplinada atención. Al poco tiempo, furtivas miradas al techo, a la puerta, a las hojas del árbol que se ve tras la ventana, a la nube que pasa, a la mancha de tinta que sobre la mesa dibuja la silueta de un extraño perro..., pequeños suspiros y bostezos rápidamente contenidos; todo ello os acusará la impermeabilidad de los oídos y el aburrimiento y desinterés general, a menos que una oportuna pregunta y el cero subsiguiente a la ausencia de respuesta venga a restituir la atención perdida.

Decid, en cambio, a los niños que escriban un número cualquiera, de muchas cifras; que cambien el orden de ellas y resten los dos números así formados; que tachen de la diferencia obtenida una cifra, y adivinadles esta cifra tachada, conociendo la suma de las restantes, y veréis cómo el deseo de descubriros el truco mueve mágicamente el interés de toda la clase y enciende luz en las pupilas apagadas. El truco no tarda en ser descubierto, con general alegría; preguntadles entonces (como me atreví a hacerlo en pública y comprometida experiencia) si les basta con este descubrimiento, invitando incluso a dar la clase por terminada para aquellos que no sientan necesidad de más, y os sorprenderá ver espontánea en algún niño la curiosidad racional del ¿por qué? Un tímido "quisiera saber por qué" hace prender inmediatamente la curiosidad en los demás, de tal modo que ya nadie quiere marcharse hasta satisfacerla. Entonces los razonamientos que hagáis para satisfacer esta necesidad provocada a través de una adivinación estimulante, razonamientos que son los del criterio de divisibilidad por 9, serán acogidos con la auténtica atención que el propio interés despierta, y que antes faltaba en absoluto.

Otro ejemplo en clase de Álgebra: Preparad en el encerado una multiplicación de polinomios y borrad el multiplicador y los productos parciales, de tal modo que sólo quede escrito en el encerado, al entrar vuestros alumnos, el multiplicando y el producto. Pretextad contrariedad por haber sido borrada parte de la operación y pedid ayuda a vuestros alumnos para reconstruirla. He aquí otra situación estimulante que tampoco me ha fallado para llegar a conseguir que los muchachos reconstruyan, ¡y con qué ingenio!, el multiplicador y los productos parciales, inventando así ellos mismos la regla para la división de polinomios.

Y si del campo de la Aritmética y Álgebra pasamos al de la Geometría, más sugestivo si cabe desde el punto de vista heurístico, ¡qué amplia variedad de situaciones podéis crear para estimular el interés investigador de vuestros alumnos alrededor de cualquier modelo, de cualquier movimiento efectuado con figuras recortadas ante ellos, o mediante simples pliegues de papel!; ¡hasta con los elementos más corrientes de uso diario, como carpetas, agujas, un paraguas, una falleba, un sencillo juguete de contenido matemático, como los puzles, los mosaicos, el "robbot" mágico, el mecano, etc.! Porque no creáis que el modo heurístico necesite indispensablemente de una gran riqueza de modelos prefabricados.

Con un trozo de cordel podéis intrigar a vuestros alumnos invitándoles a describir a ciegas la mediatriz del segmento determinado por los extremos, sostenidos por dos de ellos. Basta partir, naturalmente, del punto medio, manteniendo tensas las dos mitades e ir acortándolas simultáneamente y por igual. Y podéis dar a continuación una bella lección a los mayores sobre trazado de cónicas sin más que alterar el punto de partida (con lo que describiréis hipérbolas homofocales) o deslizándole a lo largo de la cuerda para dibujar elipses a guisa de jardinero. Cada acción desarrollada ante ellos lleva aparejada un concepto adherente, como también una intuición anticipada del resultado del trazado, que podéis hacer objeto de amplia gama de preguntas con las que mantener vivo el interés de la clase entera.

Con un sencillo trozo de cristal oscuro y transparente podéis crear, a los ojos encandilados de vuestros alumnos, toda una rica variedad de situaciones y problemas en los que juegan esencialmente la simetría especular que el cristal, colocado verticalmente sobre el papel, realiza en las figuras dibujadas en él.

En abril de este año tuvo lugar en el Instituto de "San Isidro" una Exposición internacional de material didáctico matemático, simultánea a la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza matemática, cuyo tema era el referido material; reunión a la que asistieron unos cincuenta representantes extranjeros de doce países, nueve de ellos expositores. En esta Exposición tuve empeño, como miembro de la referida Comisión, en presentar, junto a modelos didácticos expresamente construidos, gran número de sugerencias de clases heurísticas, fundadas en el usò de material muy sencillo tomado de la vida misma, y en particular de la vida del niño, que es el juego y el juguete. No he de cansaros ahora repitiendo lo que allí visteis o pudisteis ver. Quiero recordar simplemente, a modo de ilustración, la divertida lección que sobre trayectorias parabólicas puede desarrollarse con el juego llamado "Bolavá"; la que sobre progresiones aritméticas puede urdirse proponiendo calcular la longitud de una serpentina sin desliarla; la intrigante iniciación al cálculo con expresiones irracionales cuadráticas mediante la propuesta de adivinación del número de piezas del rompecabezas que con el nombre de "Rombo" se expende en los bazares; la excitante iniciación a la Geometría analítica y a la ecuación de la recta conseguida con la problemática alineación de tres peones del juego llamado de "Cinco en línea"...

Omito más ejemplos, así como la referencia al material de filminas y películas, hoy ya empleadas con éxito en la enseñanza matemática, porque harían interminable esta charla y pudieran dejar por otra parte la falsa impresión de que para cultivar el modo heurístico es necesaria una cantidad de material inasequible a los presupuestos de los Colegios modestos. No hay tal cosa. Bien está si se dispone de material abundante con el que se pueda variar el aliciente de las situaciones estimulantes, la novedad es siempre factor infalible de interés; pero conste una vez más que puede interesarse fuertemente al alumnado con material muy sencillo y hasta sin material alguno, con la tiza y el encerado, con el lápiz y el papel, como en los ejemplos antes citados.

* * *

Y permitidme ahora que me anticipe a vuestra crítica, crítica que agradeceré al término de la conferencia, sin que me contraríe ni sorprenda; porque no hay nada, por excelente que sea, que no tenga ninguna contrapartida de reparos. Tan es así que, como os digo, quiero hacer yo mismo un análisis de las objeciones más frecuentes que se me han formulado.

Primera objeción: **Lentitud del procedimiento.**

Es la crítica más generalizada. Dada nuestra manera tradicional de hacer, en la que tendemos a suministrar lo más pronto posible reglas de acción a los alumnos para que cuanto antes sepan a qué atenerse ante una situación de examen, se nos antoja perdido lamentablemente el tiempo invertido en la espera de una solución espontánea de los pequeños, cuando en nuestra mano está librarles del atolladero. Grave error. No sabéis todo el fruto que los niños obtienen de estos momentos de espontáneo esfuerzo, mientras se hallan intensamente acuciados por el interés directo de la cuestión planteada. Es necesario tener mucho aguante para la espera, lo comprendo; yo mismo me confieso a veces impaciente. Pero ¡cuán gratas compensaciones proporciona el saber esperar! Lo esencial es estar atento a que el niño no deje de actuar mentalmente, de combinar, de seleccionar, de organizar sus ideas, actividad que se ve reflejada en los tanteos y garabatos emborronados, tan ricos de enseñanzas sobre los procesos de su pensar matemático en sus balbuceos, simplemente en sus movimientos de cabeza, de labios, en este mirar introspectivo y acuciante... Procede a veces rebajar suave y gradualmente el nivel del peldaño que se le ha puesto delante cuando es palpable que no va a superarlo; aunque en esto son frecuentes las sorpresas. ¡Cuántas veces, como antes os decía, los niños que en un principio parecían más torpes y alejados de toda comprensión, ven luego claro súbitamente, como si una luz providencial les iluminara y se acomodan tan rápidamente al ritmo de los demás que hasta incluso logran aventajarlos! Toda paciencia inicial es poca, y no se olvide que el tiempo que al principio parece perdido se recupera luego con creces por la seguridad con que el alumno asimila lo adquirido por su propio impulso. De nada sirve acelerar a la fuerza los procesos de aprendizaje si luego resulta nula o casi nula la cosecha, y hay que repetir y repetir para conseguir una fijación artificiosa de conocimientos.

Segunda objeción: **La falta de homogeneidad de la clase.**

No es, en verdad, objeción aplicable específicamente al método activo heurístico, sino también a cualquier otro método como, por ejemplo, el tradicional de explicación. Menos recursos tiene en éste el profesor para enterarse de la inadaptación posible de su ritmo al de comprensión de la clase. Precisamente el hecho de acusar más pronto los asincronismos del alumnado constituye un tanto a favor del activismo heurístico. Pero ello no nos excusa de hablar del problema. El planteamiento en común de las cuestiones estimulantes a un grupo de muchachos ofrece el natural inconveniente de que los mejor dotados se adelanten a dar la solución a los demás y de que éstos terminen acomodándose a que sus compañeros discurran por ellos. Este inconveniente se presenta especialmente en las clases en las que, bien sea por el elevado número, bien sea porque la limitación del material imponga su manipulación colectiva, resulta obligada asimismo la formulación de propuestas en grupos. En tal caso es preciso vigilar muy cuidadosamente que todos intervengan en el diálogo, menudeando y distribuyendo las preguntas, procurando que las más fáciles recaigan en los menos dotados para que todos sientan motivo de satisfacción en particular, y conteniendo si es preciso la impaciencia natural de los que inevitablemente se adelantan en ver claro, o en imaginarse que lo ven. Mejor resultado da en ocasiones invitarles a escribir en silencio las soluciones y respuestas en hojas que el profesor revisa una a una recorriendo constantemente las mesas, mientras plantea las preguntas y comenta las respuestas. En este modo de proceder, como en el del diálogo, es muy importante que los alumnos se autocorrijan enfrentando las opiniones y resultados contradictorios para que los mismos enfrentados decidan quién tiene razón. Y cuando nadie acierte, en lugar de un expeditivo y seco "estar mal", es preferible llevar el diálogo de modo que el error sea detectado por los mismos alumnos ante consecuencias visiblemente absurdas. Con ello resulta inevitable el desajuste de ritmo entre unos y otros, sobre todo cuando la clase es demasiado heterogénea. En este caso, el profesor debe tener un fino instinto de adaptación a un ritmo intermedio para que ni los más capaces lleguen a perder el interés por pobreza de estímulos, ni los menos rápidos lleguen asimismo a abandonarse, desalentados, por no poder seguir a los demás. No hay que decir que, en cuando es posible subdividir y organizar las clases, homogeneizando los grupos, ello favorecerá esta adecuación de ritmo y la simultánea vibración de la clase entera. En todo caso, no veo inconveniente en promover la ayuda de los mejor dotados en favor de los menos, cuando se tenga la seguridad de que éstos han dado de sí cuanto podían dar.

Tercera objeción: **El elevado número de alumnos de nuestras clases.**

Es, desde luego, el factor que puede influir más decisivamente en contra del modo heurístico de enseñar. En una clase concebida como salón de conferencias, el profesor puede acaso mantener la atención simultánea de sus alumnos, por numerosos que sean, con la magia de su palabra o, por lo menos, una apariencia de atención impuesta por disciplina. ¡La enseñanza tradicional se alimenta de tantas apariencias! Pero cuando la clase se convierte en taller y el profesor en auténtico maestro de tal taller, se comprende que debe limitar el número de sus discípulos operarios o aquellos cuyo trabajo pueda simultáneamente atender. La limitación del número es esencialísima en el modo de hacer activo y heurístico. Si no percibimos esta necesidad en nuestra propia carne de maestros, si no sentimos el rubor de la farsa que supone la macropedagogía, es inútil que hablemos de mejora de métodos ni de modos. Pero tengamos cuando menos la honradez de reconocer el fraude que estamos cometiendo en nuestra sagrada misión: la educación de nuestra juventud.

Para fijar un número, internacionalmente admitido como tope, os diré que ninguna clase de enseñanza media debería exceder de treinta alumnos. En una moderna institución de Lausanne me confesaba el director haberse puesto de acuerdo con el arquitecto en lo relativo a las dimensiones de las clases, con objeto de qoe los muros impidieran para siempre cualquier debilidad administrativa que pudiera hacer exceder tal número de las 24 plazas que justamente cabían en cada local. Y resulta muy significativo el hecho de que otros profesores suizos, en conversación privada con un compañero nuestro que recorría a la sazón los Centros de Enseñanza Media de la Suiza francesa, al preguntarles éste el número de alumnos que tenían en sus clases, tuvieran no pocos reparos en informar que aunque legalmente no debieran exceder de treinta, se habían visto forzados, por circunstancias excepcionales, a tener (y aquí bajaban la voz muy confidencialmente) ¡hasta treinta y cinco!

¡Y pensar que todavía nosotros mantenemos clases oficiales de 70, 80, 100 alumnos y aún más! Paso extraordinario y esperanzador, por el precedente que establece, es la declaración en la Ley de que no puedan exceder nuestras clases de cincuenta, lo que a partir de este año se ha puesto en práctica ya en los cursos primero y quinto del nuevo plan. Número todavía excesivo; pero, como digo, el hecho solo del reconocimiento legal de la necesidad de la fijación de un tope como principio marca un paso que, aunque tímido y tardío, merece toquemos a júbilo.

* * *

Por grande que sea la esperanza futura, no es mucho, pues, lo que de momento podemos lograr en la enseñanza oficial en sentido auténticamente heurístico con clases de cincuenta alumnos; pero no debemos acobardarnos por ello. Son múltiples los ensayos que llevo realizados en clases aún más numerosas, mediante una técnica de distribución de grupos pequeños y de jerarquización de alumnos en ellos; ensayos con los cuales he obtenido siempre resultados mucho mejores que los que se desprendían del sistema tradicional de explicación y pregunta.

Pero si en la esfera oficial estamos todavía forzados a tener cifras excesivas de alumnos, que nos impiden el pleno desarrollo de los nuevos modos, en la enseñanza privada y en los Colegios ya no tenéis tal imperativa contrariedad. Está en vuestra mano organizar y limitar los grupos docentes en la forma más eficaz para la enseñanza. Por eso fío más de momento en las posibilidades de reforma de modos en la enseñanza no oficial, si en verdad la desean. Tampoco he de regatear para ella mi esfuerzo personal si es requisito. Va en ello la felicidad de millarès de niños que sufren todavía estudiando matemáticas. Sólo aspiro, en principio, a convenceros o a poneros en camino para que los mismos niños os convenzan. Yo sé que una vez adquirida la convicción, la voluntad y el entusiasmo no han de faltaros para el logro. En los todavía escasos contactos personales que he vivido con elementos de vuestro profesorado que han seguido mis cursos de Metodología y Didáctica, tengo muestras elocuentes de que mi esperanza no es baldía.

Cuarta objeción: Mi único temor es que os acobarde **la obsesión de los exámenes.** Y aquí llegamos a la cuarta y última de las objeciones que me formulo y replico, porque sé que responde a temores que podéis noblemente sentir.

El régimen de pruebas constituye uno de los más graves problemas de la enseñanza. Aquí y fuera de aquí. Y ello debido a la inevitable antinomia que crea entre formación y preparación. Una reglamentación defectuosa del sistema de pruebas puede echar al traste el mejor de los planes educativos.

Y puede destruirlo por errores cometidos a veces con la mejor de las intenciones; pongo por ejemplo una intención uniformadora o excesivamente detallista. Me explicaré mejor.

Cuando a tal punto se detalla la prueba, se tecnifica, se automatiza, por así decirlo, un examen, se crea automáticamente también otra técnica, la de entrenamiento para dicha prueba, para dicho examen. Y la enseñanza, que debiera ser ante todo *formación* del educando, se convierte en *preparación*, que no es lo mismo, sino casi todo lo contrario.

En este punto las autoridades debieran actuar con extrema cautela. Porque los profesores tendemos, ¿no es cierto?, a que se nos fije y limite estrictamente la naturaleza de las pruebas que habrán de sufrir nuestros alumnos, con objeto de asegurar su éxito en el examen, éxito del que dependerá, según juicio tradicional de padres y examinadores, el prestigio del profesorado. El verbo "preparar" ha suplantado al de "formar" en el lenguaje académico de los comentarios: "¡Qué bien preparados los presentan!" No se nos ocurre decir: "¡Qué buena formación llevan!" Y no lo podemos decir porque, en rigor, los exámenes sólo han comprobado la preparación y no la formación.

Así resulta que el régimen de exámenes, que debiera constituir una verificación de eficacia de sistemas educativos, una prueba anticipada de la educación de los futuros ciudadanos para la vida, que es, en definitiva, la gran maestra y examinadora, se va convirtiendo poco a poco en un sistema de cláusulas contractuales entre el Estado y el profesorado para regular rendiciones de cuentas en la memoria de los niños a cambio de aprobaciones de saldo que autoricen el pase. Y de aquí que cuanto más estrechas sean dichas cláusulas, mejor se considere definido el contrato; cuanto mejor satisfechas aquéllas, mejor cumplido éste. De aquí que se tienda a fijar programas bien desmenuzados en preguntas que no puedan alterar los examinadores, en suministrar listas bien delimitadas de problemas, y, a ser posible, colecciones de ellos, sobre las que forzosamente hayan de versar las pruebas de examen. Y que no sean excesivas para que haya tiempo de explicarlos bien y repetirlos muchas veces durante el curso hasta memorizarlos y convertirlos en clichés mentales que puedan traerse a la memoria al estímulo del enunciado. Y ¡por favor!, que no haya variación aviesa de enunciados, aunque vengan a decir lo mismo para que los alumnos no se desorienten y ya sepan a qué clichés corresponden. ¡Nada de angustivas sorpresas! Todo bien previsto y esquematizado. Los niños así preparados, convertidos en autómatas, se lucirán en el acto del examen, mostrando lo bien que disparan la respuesta correspondiente a cada estímulo predeterminado. El colegio que mejores autómatas presente, aquel cuyos *robots* así fabricados tengan mayor capacidad de almacenaje de reflejos, es el que se llevará la palma de "buen Colegio".

Señores, quizá haya exagerado un poco la caricatura. Perdóneseme por la amargura que este cuadro de costumbres académicas tan arraigadas en nuestra Patria me produce. Ya sabéis que la ironía es, con frecuencia, el único escape que se permite el dolor frenado por la discreción. Pero ¿no os estremece también la subversión pedagógica que este estado de cosas supone? Porque decidme, en verdad, ¿de qué van a servir luego estos autómatas cuando la vida les obligue a actuar ante la inmensa variedad de estímulos imprevistos y tantas veces contradictorios? Actuará, sin duda, porque la vida, gran maestra, les enseñará también, llenando el vacío formativo que acarrean; pero actuarán, no *gracias* a su preparación, sino *a pesar* de ella.

¿Solución? No es fácil. Mientras las pruebas favorezcan a tal punto la técnica preparadora, yo aconsejaría a los profesores que tuvieran siempre presente la responsabilidad que ante Dios tenemos contraída de formar, por encima de todo, a nuestros alumnos para su vida futura; para la vida eterna ante todo, pero también para esta vida que nos ha tocado en suerte vivir, tan llena de miserias como de maravillas. Aunque los padres, a quienes debemos educar también a través de sus hijos, crean que nuestra misión es procurar el lucimiento de nuestros alumnos ante el efímero tinglado de los tribunales de examen, nuestra misión es mucho más elevada: se trata de hacerles útiles para Dios, para la Patria y para la sociedad en que han de desenvolverse y vivir y si es posible abandonarles al azar de unas pruebas, actuando como si no existieran, sea al menos el tiempo invertido en la específica preparación de ellas reducido al mínimo, para que no se anteponga y absorba la esencial labor de formación que nos incumbe. Os daréis cuenta entonces de que un alumno bien formado lleva implícita una fuerte preparación, mientras la recíproca no es cierta.

Y en cuanto a las autoridades, no me cansaré de rogarles, con todos los respetos, que constriñan y automaticen lo menos posible la acción del profesorado, que no le pongan en trance de convertirse en meros preparadores, que dejen margen de libertad suficiente para desarrollar su personal labor formativa. Y ya que no es posible prescindir en absoluto de un control examinador (porque tampoco voy a incurrir en la utopía de creer en una axiomática excelencia de todo el profesorado), procure al menos que se aquilate y mejore cada vez más el sistema de pruebas; pero no en un sentido detallista, sino en un sentido de ajuste a los procesos de la inteligencia en acción del niño ante los estimulantes vitales, perfeccionando la técnica de exploración y medida de dicha inteligencia y de asimilación auténtica de conocimientos, ideando sistemas de pruebas que tiendan a detectar cada vez mejor la madurez con preferencia al automatismo y al verbalismo memorista.

* * *

Señores, antes de terminar quisiera que, como impresión sustancial de esta charla, quedaran fijas en el recuerdo de mis oyentes las siguientes afirmaciones, que constituyen su resumen:

Primera.—La técnica de la enseñanza de la Matemática necesita una evolución que la adapte a las necesidades del mundo moderno y a las posibilidades intelectuales y reacciones afectivas del mundo infantil.

Segunda.—La evolución de modos de enseñar es tan necesaria como la de programas y métodos. No basta saber lo que el niño debe y puede aprender, sino que es indispensable lograr, además, que quiera aprenderlo.

Tercera.—Un gran problema didáctico queda abierto en esta cruzada de captación de voluntades para el aprendizaje de las matemáticas, cruzada en la que es necesaria la colaboración de todo el profesorado, tanto oficial como privado. Se trata de crear un vastísimo cuadro de situaciones estimulantes y eslabonadas para que los niños puedan gozar descubriendo las matemáticas que aprenden.

Cuarta.—La enseñanza de la Matemática se ha de desenvolver para ello en clima de clase activa, de clase taller, y no de clase pasiva, de clase conferencia. Se impone la reducción de los grupos y el incremento y formación consiguiente del profesorado necesario.

Quinta.—Esta cruzada es de trascendental urgencia social y patria, dada la posición axial que la Matemática ha tomado en el mundo moderno y en sus bases, esencialmente técnicas y económicas.

Sexta.—Pero además, y esto es lo más hermoso de nuestra tarea, es obra fundamental de caridad, porque habrá de llevar la alegría del aprendizaje de las matemáticas a los millares de niños españoles y de todo el mundo que todavía sufren estudiándolas.

Y aquí termino, agradeciendo la atención que se me ha prestado y poniéndome a disposición de ustedes para responder a las preguntas que tengan a bien hacerme sobre lo que he dicho. (El Dr. Puig Adam contestó, al final de su conferencia, a diversas cuestiones que le fueron planteadas por algunos de los asambleístas).

2. Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas*

¿Por qué "cibernético"? Según los recientes Congresos de los cibernetistas, en Namur y Zurich, la Cibernética puede definirse como "El arte de la eficacia en la acción".

Ahora bien, enfrentándonos con la cuestión de los problemas, nuestra principal *acción* como educadores no consiste en *resolverlos*, sino en *idearlos*, en *plantearlos*, y, paralelamente, no debemos considerarnos satisfechos con enseñar simplemente a resolverlos, sino que también debemos ejercitar a nuestros alumnos a proponérselos, en disponer su planteo.

Resolver un *problema* planteado es buscar el camino a seguir para ir a parar a una solución hallada ya por el creador del problema; pero, en general, eso no es crear; o por lo menos es reducir a mínima expresión la libertad creadora formada de combinaciones y selecciones. De aquí sacamos una consecuencia que, a primera vista, podrá parecer paradójica, y es que, siendo la actividad matemática de por sí un problema constante, toda educación matemática basada en la resolución clásica de problemas planteados resulta insuficiente.

La paradoja se aclara metafóricamente; no se aprende a jugar al ajedrez resolviendo los llamados "problemas" de ajedrez y, sin embargo, cada jugada es un problema. Ahora bien, cada jugada es un problema vivo, espontáneo, mientras que cada problema preparado es, generalmente, un problema artificial, muerto, raramente probable en el curso de una partida.

Algo parecido ocurre en Matemáticas. La actividad creadora del matemático se plantea constantemente problemas de inmensa variedad, naturales, vivos; mientras que los problemas en uso en la enseñanza no son más que manifestaciones particularísimas y a veces bien endebles de aquella actividad. Sin darnos cuenta de ello hemos ido reduciendo los fines de la enseñanza de la matemática al planear la mayoría de los problemas de las colecciones usuales y, consiguientemente, hemos reducido su eficacia.

---

* Este artículo apareció publicado en *Revista de Enseñanza Media* núm. 33-36, enero-febrero 1959.

En la adaptación de los medios al fin, es donde se encuentra, a mi parecer, la eficacia de toda acción. Para liberar la cuestión de los problemas de los márgenes que la canalizan hay que empezar, pues, por ensanchar la finalidad de su planteo y repasar cuáles han sido los fines que en tal empresa se han perseguido hasta ahora.

He aquí los más significativos:

1.° Explorar las aptitudes matemáticas en nuestros alumnos. Tal es el fin de los problemas "Tests", cuya naciente técnica, que no es fácil, alimenta sus raíces de la misma matemática, de la psicología y de la estadística.

2.° Excitar el interés de nuestros alumnos hacia las teorías nuevas y sugerir bajo forma activa las nociones a adquirir. Usaremos entonces los problemas "situaciones" que señalan la técnica didáctica del profesor.

3.° Afirmar la adquisición de las nociones y teorías repitiendo las ocasiones de aplicarlas, de fijarlas en la memoria y de dominar su uso. Son los problemas "ejercicios", los más usados en la enseñanza.

4.° Vigilar el aprendizaje del alumno. Problemas de pruebas o "exámenes".

5.° Comprobar la eficacia de los métodos de enseñanza. Problemas, "experiencias" en cierto modo análogos a los precedentes, pero cuyos sujetos no son ya los individuos, sino los colectivos.

No pretendo teorizar aquí sobre los caracteres diferenciales de estas varias especies de problemas y trazar una metódica de ellos, lo que ha constituido ya el objeto de múlitples obras, sin que se haya llegado a agotar el tema. Voy a limitarme a subrayar algún rasgo común que haga destacar su capital falta de eficacia educativa.

En cada prueba, test, examen, experiencia o simple ejercicio hay siempre varios elementos que actúan recíprocamente como elementos medidores y medidos. Si el profesor pretende medir a sus alumnos con el aparato de los problemas, no es menos verdadero que los alumnos se hacen a su vez medidores de la eficacia de la prueba y ésta como aquéllos juntos resultan también medidores de la objetividad del examinador y de la eficacia del profesor y de su método de enseñanza.

Precisamente en esta reversibilidad de juicios radica una de las más graves consecuencias de la tecnificación de las pruebas: la aparición inevitable de una técnica paralela de *preparación*. La preparación para los exámenes acaba por adulterar y desplazar completamente el impulso formativo que debe tener toda pedagogía bien concebida. Para un preparador (tal como llega a ser todo profesor obsesionado por la reciprocidad de juicios antes citada) el fin de su acción no es ya la formación de sus alumnos, su éxito en la vida, sino más bien su acierto en el acto efímero de la prueba. He aquí, pues, un ejemplo elocuente, del campo social, en que la observación (examen) obra lesivamente sobre lo observado (enseñanza), provocando una grave debilitación de sus fines naturales.

Siendo el fin de la enseñanza de las matemáticas el cultivo en el alumno de la actividad creadora matemática, basta pensar en la inmensidad de factores que entran en esta actividad para comprender cuántos de ellos dejamos de lado al proponer los problemas clásicos. En el fondo, la causa es siempre la misma. Salvo en la minoría de los problemas llamados de "situación" (desgraciadamente muy poco usados aún) se acostumbra a hacer de los otros asunto de corrección y de calificación que condiciona los enunciados y les da el carácter artificial comentado antes.

Así, si el problema no debe simplemente cumplir su estricto fin funcional educativo, sino que se le atribuye también el carácter de instrumento apto para medir algún factor de aprendizaje del alumno, su enunciado debe ser absolutamente preciso para que éste sepa sin ambigüedad lo que debe buscar y los datos de que dispone. Un enunciado con datos redundantes, por ejemplo, será juzgado como un acto de estupidez o de mala intención del que proponga el problema. El alumno acostumbrado a la "buena fe" y a la "infalibilidad" de los examinadores tratará de agotar todos los datos buscándoles aplicabilidad, por suponerlos necesarios. Y ¡desgraciado de él si no lo hace! Será entonces él quien será juzgado estúpido.

Este solo ejemplo pretende ilustrar cuanto hay de artificio en ese clima de enunciados tan ajustados en que se mueven los alumnos. No critico su uso ni tampoco su necesidad; pero sí su exclusividad, tan alejada de las imprecisiones y redundancias de los datos que se ofrecen a la curiosidad o a las necesidades del investigador en funciones.

Tal vez, gracias a esa artificiosidad de los problemas usuales, se puede especular sobre su morfología. El mismo Polya ha concretado en su libro *How to solve it* un cuadro de consejos para el ataque de sus soluciones. No falta en él la inevitable pregunta: "¿Has utilizado todos los datos, todas las condiciones del enunciado?", seguida de otras no menos juiciosas que apelan a la perfecta comprensión previa, a la semejanza posible con otros problemas de solución conocida, etc.

Desde el punto de vista creador, todo cuanto se llega a sacar de esta metodología clásica de los problemas es una cierta costumbre de trazar, de tender caminos que enlacen la solución buscada a las premisas establecidas en la red más o menos vasta de implicaciones lógicas en que están inmersas. Pero a medida que el campo se ensancha y los puntos de partida y de llegada se alejan de las perspectivas corrientes, estos sabios consejos metodológicos muestran una insuficiencia pareja a su generalidad.

Ciertamente, no es débil resultado de educación lógica conseguir que el alumno no adquiera un cierto dominio en esta ordenación implicativa. Pero, como he dicho en otras ocasiones, el espíritu lógico no es el único fin que hay que lograr en la formación de nuestros alumnos. Si pasamos del campo artificial descrito más arriba al dominio natural de la actividad creadora matemática, tanto pura como aplicada, encontraremos un sin fin de matices imprecisos al establecer las generalizaciones, las analogías, las combinaciones conceptuales intuitivamente presentidas. ¡Qué abundancia de datos, de condiciones, nos obligará a aguzar nuestra intuición de lo esencial para retener solamente lo indispensable de entre ellos!

Todos sabemos que aprender a plantear bien un problema es recorrer el principal camino para resolverlo. ¿Por qué, pues, alejamos esta actividad en el aprendizaje de nuestros alumnos, proponiéndoles siempre volver a seguir caminos preparaditos? La limitación de su libertad de selección facilita, sin duda, nuestra tarea de corrección, situándola en el camino de las implicaciones necesarias, que nos resulta cómodo, pero ello va en perjuicio de la formación matemática completa de los alumnos, que no puede manifestarse en lo que tal vez pudiera tener de más personal y creador.

El mismo Polya, después de escribir el librito antes citado, al servicio de la tradición escolástica, sintió la necesidad de completarlo con una hermosa obra en dos volúmenes: *Mathematics and Plausible Reasonning*, en la que el razonamiento implicativo cede su lugar al razonamiento plausible fundado en la inducción, en la analogía, en la inferencia... Y, a mi modo de ver, en esta obra se muestra mejor que en la primera el verdadero genio de Polya, bien conocido además como el de uno de los mejores proponentes de problemas.

Estimo que hay, en resumen, toda una interesante tarea a promover y a realizar, reconsiderando cuidadosamente los problemas en uso en nuestra enseñanza, poniendo en primerísimo plano su finalidad esencialmente educativa y desligándola de la de clasificación que le ha sido añadida artificiosamente. Una vez bien asegurado este deslinde, es de desear que una mayor libertad de selección y de combinación deje manifestar y desarrollar las facultades creadoras del alumno fuera de los términos habituales de los enunciados y aun invirtiéndoles de forma que se considere como metas o soluciones a alcanzar los enunciados que hay que proponer.

3. El decálogo del profesor de Matemáticas

Queremos terminar estas reflexiones sobre los problemas de la enseñanza de la Matemática, insertando aquí las sugerencias que el profesor Puig Adam, matemático hondamente preocupado por los problemas de la enseñanza, dirige a los profesores de Matemáticas de Enseñanza Media, pero que como él mismo señala, se extienden y se aplican en la debida proporción a toda la enseñanza de la Matemática [1].

Con ello deseamos, por una parte, rendir homenaje en la persona del fallecido profesor a cuantos profesores de Matemáticas han tenido, como él, la visión clara de su papel de educadores y al desempeño del mismo se han consagrado con ilusión y perseverancia. Catedrático del Instituto "San Isidro" de Madrid, su contacto real con la enseñanza de la Matemática constituía la experiencia que avalaba sus iniciativas. Por otra parte, a través de su cátedra de Metodología de la Matemática en la Universidad de Madrid, proyectaba sus inquietudes pedagógicas sobre los futuros profesores de Matemáticas. A su doble formación matemática y técnica (era doctor en Matemáticas e ingeniero) debía sin duda su gran sentido de las aplicaciones prácticas de la enseñanza.

La lectura de sus numerosos trabajos sobre la enseñanza de la Matemática, algunos de los cuales nos han sido de gran interés en la elaboración de estas páginas, deja el sabor emotivo y estimulante de una juventud de espíritu, constantemente renovada en el contacto diario y cordial con los alumnos.

Su preocupación por los problemas de la enseñanza le llevó a participar en cuantas reuniones y Congresos se organizaban sobre ellos. Era miembro de la Comisión Internacional para la Mejora de la Enseñanza de Matemática, y su actuación en este campo fue muy destacada. Refiriéndose al interés de los contactos internacionales, Walusinski afirma que a ellos les debe el haber encontrado a hombres como Puig Adam y a él se refiere en estos términos: "... sabía utilizar cierto talento de prestidigitador, había en él la preocupación de encontrar en el entorno del alumno una motivación para la actividad

[1] P. Puig Adam: "Decálogo de la Didáctica Matemática Media", en *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo VII, núms. 5 y 6. Madrid, 1955.

matemática. Lo que retengo de su ejemplo es, sobre todo, el notable liberalismo de su enseñanza. Sentía un ardiente amor a los niños, una maestría científica, una finura psicológica incomparable. Virtudes cardinales de un pedagogo" [2].

Al leer ahora el Decálogo (nótese que fue escrito en 1955) comprobamos que sigue en pleno vigor, totalmente de acuerdo con las más recientes aportaciones sobre la enseñanza de la Matemática. Ello puede deberse indudablemente a la condición de pionero del profesor Puig Adam, pero creemos que también es un índice de la validez permanente de ciertas características de un buen profesor de Matemáticas, aun en medio de este continuo afán por mejorar la enseñanza.

Como ya hemos indicado en este trabajo, el buen profesor de Matemáticas no es una creación de la Matemática "Moderna" o de sus sucesivas y necesarias revisiones. El respeto al alumno, verdadero centro de la enseñanza, la atención a sus características personales, a la evolución de sus posibilidades o a sus motivaciones, el asumir como propia la misión de consejero y guía del alumno en su trabajo, son rasgos propios de un buen educador de cualquier época. La consideración a las posibilidades específicas de la enseñanza de la Matemática como instrumento al servicio de la educación, hacen del educador un buen profesor de Matemáticas.

Pasamos a exponer los "preceptos" del Decálogo mencionado, acompañados de algunos breves comentarios.

I. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente

Es éste un principio de carácter general: en él se pone de relieve el papel central que el alumno ocupa en la enseñanza, así como la importancia de respetar el principio de individualización, al que nos referimos al tratar de los sistemas de enseñanza.

Cada alumno tiene sus propias aptitudes y exigencias, su peculiar campo de intereses, su ritmo personal de trabajo. Es precisa una cuidadosa observación del alumno, para detectar estas características personales, y para tenerlo muy en cuenta al organizar la enseñanza.

La atención a los rasgos individuales de cada alumno y el esfuerzo por mantenerse al día sobre las nuevas corrientes pedagógicas, son condiciones necesarias al buen educador.

II. No olvidar el origen concreto de la Matemática, ni los procesos históricos de su evolución

Es importante que el alumno no vea en la Matemática algo ya hecho, producto de un gusto especial por ciertas cuestiones abstractas. Ha sido la vida,

[2] G. Walusinski: *Pourquoi une mathématique moderne?*, pág. 140. Ed. Armand Colin. Paris, 1970.

con sus necesidades concretas, la que ha obligado al hombre a esforzarse por resolverlas; las principales conquistas humanas han tenido siempre el acicate de responder a una necesidad real.

Que el alumno conozca el origen de la Matemática y las líneas generales de su historia. A través de ello, llegará a comprender que la Matemática no es algo frío e intangible. Puede ser muy conveniente también que en los momentos oportunos el alumno tenga noticia de los principales matemáticos, de las incidencias de su vida. Ello puede contribuir a hacer más humana su visión de la Matemática. Que no sea sorprendente que un matemático determinado llegue a ser el personaje admirado de un alumno.

III. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social

En este punto, cabe situar el interés por conseguir que la Matemática contribuya a la integración social del alumno. Que se le presenten cuestiones reales, cuando menos verosímiles; que los datos estén actualizados y que se favorezcan las relaciones interdisciplinares.

La consideración de la enseñanza, más como actividad que como asimilación pasiva de una serie de conocimientos, justamente con la estructura propia del enfoque actual, favorecen sin duda la concepción de una Matemática única.

IV. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción

Se trata de atender a las posibilidades reales del alumno en cada momento. Para ello se ha de procurar que vaya dominando situaciones de dificultad creciente, pero que en el estudio de cada una de ellas pueda actuar con firmeza porque está en su plano adecuado de abstracción. En esta línea cabe también situar el cuidado por evitar los saltos en el vacío; la evolución intelectual es un proceso continuo que la enseñanza de la Matemática debe conocer y respetar.

V. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno

Ello implica el respeto al principio de actividad, al que ya nos referimos al tratar de los sistemas de enseñanza. Que el alumno no se limite a aceptar pasivamente los conocimientos matemáticos, sino que participe activamente en la elaboración y asimilación de los mismos; que se sienta y fundamentalmente sea una parte esencial en su propia formación.

Como consecuencia de todo esto, que el profesor asuma el papel de guía, estímulo y necesario control de la actividad del alumno. *Estas funciones son exclusivas de su misión; nadie puede sustituirle en ellas.* Por consiguiente, que el profesor les conceda una prioridad absoluta en su tarea.

VI. Estimular la actividad creadora, despertando el interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento

Se ha de motivar suficientemente al alumno. Para ello es necesario un buen conocimiento del campo de sus intereses y un perfecto dominio de las posibilidades de la enseñanza de la Matemática en cada nivel. Esto exige en particular el adoptar el punto de vista del alumno, y para un adulto normalmente no es fácil. Esta acomodación ha de ser el resultado de un constante contacto con los alumnos, que permita sumergirse en su mundo, así como de la intuición propia de un buen profesor.

VII. Promover en todo lo posible la autocorrección

La Matemática constituye un campo particularmente idóneo para desarrollar la autocorrección. El alumno casi siempre puede hacer comprobaciones para verificar lo correcto de sus resultados.

Que, en todo caso, el profesor no se limite, al corregir, a emitir sin más su veredicto ("bien", "mal"), sino que vaya guiando al alumno para llegar a conseguir que sea él mismo quien llegue a constatar sus posibles errores o, al menos, a advertirlos y razonarlos. Siempre será más formativo, menos decepcionante (él ha captado sus fallos) y facilitará su posterior trabajo matemático.

VIII. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas

Como ya señalábamos al hablar de automatismos mentales, es necesario graduar la actividad del alumno de modo que comprenda perfectamente, en primer lugar, la naturaleza del problema o de la operación, razone el proceso que conduce al algoritmo y la conveniencia de utilizarlo, antes de pasar a la mecanización que completará su aprendizaje.

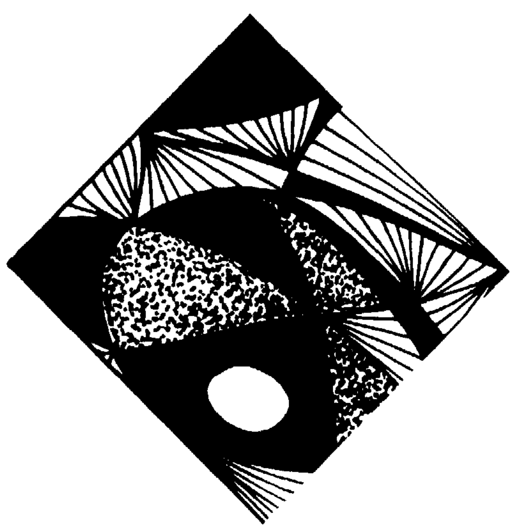
Que el profesor no ceda a la fácil tentación de permitir que el alumno adquiera agilidad en el manejo de cualquier operación, antes de poseer las nociones básicas a ella correspondientes.

IX. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento

La actual planificación de la enseñanza básica sitúa la enseñanza de la Matemática dentro de las "áreas de expresión". Ello resulta significativo. Ciertamente, la Matemática dispone de muy buenos recursos para hacer que el alumno llegue a expresarse con el grado de precisión exigible en cada nivel. Un medio especialmente apto lo proporciona el vocabulario de la teoría de conjuntos, la expresión clara y precisa, revela un orden mental muy propio de quien ha recibido una buena formación matemática.

X. Procurar que todo alumno tenga éxitos que eviten su desaliento

Entre los estímulos que puede ofrecer al alumno la enseñanza de la Matemática no es el menor el que supone haber conseguido algún triunfo. A un nivel elemental puede hablarse de alumnos menos dotados, pero nunca de alumnos específicamente negados para la Matemática. Por ello, es factible que todo alumno pueda contar con el aliciente del éxito. Para conseguir esto es conveniente que el profesor procure, al proponer una serie de actividades, que haya al menos alguna al alcance de todos los alumnos. La falta habitual de este estímulo origina una aversión hacia la Matemática y es con mucha frecuencia causa de un grave sentimiento de impotencia y frustración.



Semblanza bibliográfica de don Pedro Puig Adam *

Pep SALES RUFI **

1. Introducción

Las "obritas" de don Pedro Puig Adam, como él llamaba modestamente a sus tratados sobre Matemáticas o sus obras didácticas, han estado en la palestra de la educación matemática de este país desde 1928 hasta la actualidad.

Y han estado en vanguardia desde la Primaria hasta la Universidad y las Escuelas Técnicas, sirviendo de aliciente y de base a grupos y personas que han luchado, desde las épocas más duras de la dictadura hasta hoy, para obtener una enseñanza digna y basada en el respeto al alumno y su evolución, junto a una estrecha relación del saber matemático con la realidad, que es de donde nace su necesidad y donde se justifica su aplicación.

Don Pedro Puig Adam fue un propagandista de la investigación didáctica matemática, abogó por una estrecha relación Realidad-Matemática en la clase, investigador matemático de vanguardia (por ejemplo, resolvió una ecuación diferencial sobre la estabilidad de las palas del autogiro de De la Cierva).

Profesor en todos los niveles educativos: del Bachillerato, de la Enseñanza Laboral, de la Facultad de Exactas, de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales, de la de Ingenieros Aeronáuticos y otras muchas.

---

* Comentarios sobre las "obritas" que escribió don Pedro para colaborar en la obtención de unas generaciones de alumnos que no odiasen las Matemáticas.

** Profesor numerario de Matemáticas de Formación Profesional, miembro del Gabinet d'Ordenació Educativa de la Direcció General d'Ensenyaments Professionals i Artistcs del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

El autor es miembro del Grup Matemàtic Puig Adam, que reúne a Miquel Serra, Carles Sánchez, Xavier Sales, Pere Rajadell, Pere Roig, Ángel Jiménez, Joan M. Castells e Ignasi Blanco, profesores de Matemáticas de F. P. de Catalunya y Baleares que trabajan en la didáctica de las Matemáticas a partir de experiencias concretas en el aula, en una línea de desarrollo didáctico inspirada en el trabajo de Pere Puig Adam.

2. Su formación y sus maestros

Empezó a estudiar Ingeniería Industrial y Ciencias Exactas en Barcelona, su ciudad natal. Finaliza la carrera de Matemáticas con un doctorado en Madrid sobre *Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica Relativista Restringida,* que mereció la máxima calificación.

Discípulo de don Antonio Torroja y de don Julio Rey Pastor.

Don Antonio leería el discurso de bienvenida en su recepción a la Real Academia de Ciencias Exactas en 1952, y don Julio sería su maestro y compañero en la redacción de una treintena de obras didácticas desde 1928 hasta su muerte. Con ellas quisieron contribuir a la renovación de la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país, tan anquilosada como el panorama general de la Ciencia y su Didáctica en aquellos años.

Admirador de la obra del Institut-Escola, institución modélica de la Generalitat, fundado por el doctor Estalella, en la Barcelona republicana y que tenía como divisa: "Formar hombres buenos, y a poder ser... sabios".

A partir de entonces se concreta su profunda admiración por las ideas pedagógicas de Estalella, con quien había tenido un primer contacto por una carta entusiasta que le escribió con motivo de la publicación, junto a Rey Pastor, del primer libro de la Colección Intuitiva.

Ganó la cátedra del Instituto San Isidro en 1926. Mientras ejercía el magisterio acabó sus estudios de Ingeniería Industrial en la Escuela de Madrid.

Cuando acababa el curso corría a Barcelona, a las colonias que el Institut-Escola organizaba en la sierra del Montseny. Allí don Pedro era feliz: la vida al aire libre, la música, la danza..., confundiendo el placer de vivir y el gozo de aprender.

Se consideraba discípulo de don Esteban Terradas, que fue maestro en todos los aspectos de la Ciencia, y al cual iba a visitar siempre que los apretados horarios y la diversidad de dedicaciones de ambos se lo permitían, escuchando interesado su docta conversación sobre el último descubrimiento científico.

Quiso regresar a Barcelona tras la guerra civil para salvar lo que se pudiera de la obra pedagógica del doctor Estalella y de su Institut-Escola y fue director durante unos meses. Sólo pudo aportar sus esfuerzos para disminuir los efectos de la represión que se cernió sobre profesores y alumnos. Abandonó desilusionado su proyecto y regresó a Madrid, a su San Isidro y a su docencia en la Universidad.

Don Pedro inició para la docencia española un período muy fecundo de relaciones con los artífices y grupos de más avanzadas ideas sobre la didáctica matemática de la Europa de los años cincuenta: los Gattegno, Fletcher, Servais, Castellnuovo, Campedelli, y su organización: la Asociación para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas. A partir de 1955, el profesor Puig se convierte en un miembro muy activo de esta agrupación europea de investigadores. en didáctica.

La profesora Castellnuovo ha explicado más de una vez la gran valía del trabajo de don Pedro, y que en su propio país era menos conocido y reconocido que en otros lugares del mundo.

3. Su manera de pensar

Sobre el trabajo

Era un trabajador infatigable, impartía muchas horas diarias de clase: en el Instituto de San Isidro, en la Facultad de Ciencias Exactas, en la Escuela de Ingenieros Industriales. Y cuando le hablaban del exceso de trabajo que siempre llevaba encima, solía contestar: "el descanso consiste en cambiar de trabajo...".

Sobre el encasillamiento de las personas

En la muerte del Dr. Estalella, fundador y alma del Institut-Escola, que le causó fuerte impresión, decía:

"... la simplicidad de las clasificaciones de los hombres en apartados ideológicos, en casillas morales, en cuadros afectivos... me han hecho siempre sonreír con algo de escepticismo...". El Dr. Estalella murió en 1938, y Puig habla en su elogio del maestro de "... las tristes circunstancias actuales...", refiriéndose a la guerra civil.

Sobre la especialización

Aun conociendo la, entonces muy en boga, fiebre de la especialización, rompe lanzas por un nuevo "hombre renacentista" superador del taylorismo, que sea de ciencias o de letras tenga sensibilidad para la belleza y para el razonamiento lógico.

Sobre la belleza

En una conferencia en el Instituto Francés, de Madrid, en 1941, hace un tratamiento de gran erudicción de la belleza y los estudios estéticos a lo largo de la historia, recogida en su obra final, *La matemática y su enseñanza actual* (1960). Inicia un tratamiento científico de la belleza y una búsqueda rigurosa de la misma en el pensamiento matemático. En este tema tiene una gran influencia el doctor Estalella y toda una generación de pedagogos peninsulares progresistas de los años treinta.

Sobre el progreso

Se nos muestra como un enamorado del progreso y denota una gran intuición sobre los grandes temas que constituirán los nuevos paradigmas científico-técnicos: la cibernética junto a la teoría de la información y la energía del átomo.

En su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, el 5 de marzo de 1952, cita a Norbert Wiener y a las primeras aplicaciones de las máquinas que después llamaremos ordenadores.

Y, sin embargo, dice: "... quién osará mecanizar el *esprit de finesse* de Pascal?", recuerda un ejemplo de su infancia donde se ejemplifica la recursividad y relaciona la matemática más antigua con la más moderna, en una síntesis personal genético-histórica enlazando las paradojas de Epiménides y Russell.

Sobre el aprendizaje

En una escuela de postguerra, con un "la letra con sangre entra" como casi único recurso pedagógico oficialmente aceptado y utilizado, don Pedro intenta reiniciar aquel espíritu liberal de la única Pedagogía en la que cree: la basada en un respeto al alumno y en el empleo de los métodos activos.

Propagandista, aun sin muchas posibilidades de éxito en esta época, del método genético-histórico, que aúna las teorías sobre evolución psicológica del niño de Piaget con la visión biogenética de la Ciencia: "Nuestros bachilleres de hoy saben más Química que Lavoisier, pero menos Matemáticas que sus contemporáneos (Lagrange y Laplace)..." .

Defiende los métodos cíclicos para la enseñanza de las Matemáticas y el uso de la intuición.

Utiliza el modo heurístico y enseña a practicarlo a partir de lecciones concretas ("la didáctica matemática en acción"), defendiendo su bondad incluso en las condiciones difíciles del aula de aquellos años, a pesar de las dificultades que apuntaba: La lentitud del procedimiento, la falta de homogeneidad de la clase, el elevado número de alumnos por clase, la obsesión por los exámenes, que él denunció incansablemente.

Parecen problemas que todavía hoy día nos preocupan profundamente, ¿no es verdad?

Sobre la aplicación de los conocimientos

Decía: "Los únicos conocimientos que en verdad no se aplican son aquellos que no se tienen".

"Las Matemáticas son el filtro a través del cual estudiamos los fenómenos naturales. Hay tres fases en la adquisición de un concepto matemático:

1. Planteo o abstracción.

2. Resolutiva, de razonamiento lógico, de transformación formal, a veces automática.

3. De interpretación o concreción, o sea, traducción de los resultados abstractos al primitivo terreno concreto".

Defiende la utilidad y la belleza de la Matemática como razones para su estudio que deben lograr la superación de la "tradicional aversión que sienten los estudiantes" hacia ella.

Sobre la Matemática divertida

Conoce profundamente el tema, busca la motivación por medio de la recreación matemática, dándole un tratamiento riguroso y al mismo tiempo intentando vitalizar los aspectos lúdicos del aprendizaje. Juegos de patio, juegos de aula, construcción de modelos y máquinas.

Cita a Martin Gardner y a George Polya, autores noveles en los años cincuenta.

Sobre "los catedráticos"

Es posible que don Pedro no fuera muy feliz entre sus "compañeros de cuerpo", sobre todo desde los años de la postguerra hasta su muerte en 1960.

Toda su teoría didáctica chocaba con la pomposidad y el conservadurismo de la práctica docente de sus contemporáneos.

Su espíritu abierto y su afán renovador le granjearon más de una antipatía.

De hecho, ni en su Instituto de San Isidro ha quedado rastro de su obra didáctica, ni del material diseñado por él y construido por su maestro de taller, colaborador inapreciable de su Cátedra.

En la biblioteca actual del Instituto hay apenas tres o cuatro obras de don Pedro y unos maravillosos trípticos explicativos de unidades didácticas. Sus inmediatos sucesores en la cátedra no parece que valoraran su obra, acumulada tras largos años de docencia.

En 1953 decía: "... la formación del profesorado de Enseñanza Media había fomentado inconscientemente la falsa idea de que el Instituto era una Universidad en pequeño... ¡Cuánto camino había que recorrer (y falta por recorrer todavía en muchos centros) hasta llegar a la clase taller, a la cátedra sin estrado, a la cátedra sin cátedra, en la que el profesor, sin lugar especial para sí, está, sin embargo, en todas partes!".

Esta cita, desgraciadamente, puede ser hoy día tan vigente como entonces.

Sobre cómo se genera la didáctica

Solía decir que las mejores ideas didácticas procedían de sus alumnos. Ellos le decían cómo explicarles las cuestiones de manera que se entendieran fácilmente. Sus clases experimentales de los jueves por la tarde en el San Isidro tenían como finalidad la generación y prueba de nuevas ideas y nuevo material.

Decía, en Didáctica matemática heurística: "... la didáctica es, ante todo, adaptación al alumno...". Cuántas veces el carácter erróneo de estas espontaneidades (de los alumnos) da lugar a enseñanzas mucho más provechosas que la lección preparada, y cuántas otras también los alumnos dan en el clavo, señalando el camino didáctico más eficaz.

Sobre lo inútil

Escribió una Apología de la Inutilidad, discurso leído en la inauguración del curso 1945-46 en la entonces Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Madrid, en la que en tono sarcástico y con gran seriedad, habla de la dualidad de las matemáticas del matemático y de las del ingeniero, de las Matemáticas "útiles" y de las Matemáticas "inútiles".

4. Su material didáctico

Don Pedro escribió en *El material didáctico matemático* (Madrid, 1958):

"... la matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces".

"... Toda la educación matemática de que me ufanaba, no me había enseñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causas predominantes en la que juega más la intuición que la lógica. Y no se escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnológica posterior. Existe una cuestión de hábito que es preciso educar desde el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de matemáticas invadir el campo específico de la tecnología".

"... Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concreciones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar momentáneamente comprensiones dificultosas; pero para el educador matemático, que no pierde la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más: Representa algo substancial con su función educativa.

Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas. Hemos de estudiar la manera más acertada pedagógicamente de conseguirlos y también los materiales más dúctiles para su realización".

En la obra citada, don Pedro recopila y describe material didáctico matemático diseñado por profesores españoles y extranjeros y presentado en la exposición internacional que tuvo lugar en Madrid en 1957. Más de 130 modelos fueron presentados y se hallan descritos y fotografiados. Fue destacada la participación de los profesores de los Institutos Laborales.

El profesor Puig Adam fue un entusiasta del diseño y utilización de material didáctico. Participó en la redacción de un libro colectivo internacional sobre material didáctico matemático, de la AIAEM, publicado por Delachaux-Niestlé y traducido al castellano por Aguilar en 1960.

5. Su obra clasificada

Libros de texto

Matemáticas para Bachillerato. Plan 1938

1. En colaboración con Rey Pastor.
2. Publicados en Madrid, entre 1940 y 1947.
3. Editores: Nuevas Gráficas y Afrodisio Aguado.
4. Se encuentran en la Biblioteca de la Asociación de maestros "Rosa Sensat", de Barcelona.

Matemáticas. Plan 1957

1. En colaboración con Rey Pastor.
2. En Madrid, 1958 en adelante (hasta 1966).
3. Biblioteca Matemática.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Obras sobre didáctica

Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental

1. Con Rey Pastor.
2. Madrid, 1933.
3. Imprenta de A. de Marzo.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Didáctica matemática heurística

2. Madrid, 1956.
3. Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

El material didáctico matemático actual

2. Madrid, 1958.
3. Ministerio de Educación.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Ampliación de Matemáticas Curso Preuniversitario

2. Madrid, 1959.
3. Biblioteca Matemática.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

La Matemática y su enseñanza actual

2. Madrid, 1960.
3. Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Obras de Matemáticas superiores

Complementos de Aritmética y Álgebra

1. En colaboración con Rey Pastor.
2. Madrid, 1928.
3. Nuevas Gráficas.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Geometría Métrica

2. Madrid, 1947.
3. Biblioteca Matemática.
4. Reediciones periódicas.

Cálculo Integral

2. Madrid, 1950.
3. Biblioteca Matemática.
4. Reediciones periódicas.

Ecuaciones Diferenciales

2. Madrid, 1950.
3. Biblioteca Matemática.
4. Reediciones periódicas.

Obras de divulgación matemática

COLECCIÓN ELEMENTAL INTUITIVA. TODAS ELLAS EN COLABORACIÓN CON REY PASTOR

Elementos de Geometría

2. Madrid, 1928.
3. Nuevas Gráficas.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Elementos de Aritmética

2. Madrid, 1932.
3. Imprenta A. de Marzo.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Complementos de Geometría

2. Madrid, 1932.
3. Gráficas Literaria.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Lecciones de Aritmética

2. Madrid, 1932.
3. Imprenta A. de Marzo.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Nociones de Aritmética y Geometría

2. Madrid, 1931.
3. Imprenta A. de Marzo.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Matemáticas (método intuitivo)

2. Madrid, 1935.
3. Unión Poligráfica.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

COLECCIÓN RACIONAL. TODA ELLA EN COLABORACIÓN CON REY PASTOR

Elementos de Aritmética Racional

2. Madrid, 1944.
3. Nuevas Gráficas.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Elementos de Geometría Racional (en dos tomos)

2. Madrid, 1934.
3. Imprenta A. de Marzo.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Álgebra y Trigonometría

2. Madrid.
3. Biblioteca Matemática.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

Otras obras

Nociones de Álgebra y Trigonometría

1. Con Rey Pastor.
2. Madrid, 1931.
3. Gráficas Literaria.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Álgebra y Trigonometría

1. Con Rey Pastor.
2. Madrid, 1934.
3. Gráficas Literaria.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

La Matemática y su enseñanza actual (conferencia)

2. Madrid, 1934.
3. Asociación de Alumnos de Ingenieros de Montes.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Complementos de Álgebra y Geometría rectilínea

1. Con Rey Pastor.
2. Madrid, 1941.
3. García Enciso.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Nociones de Analítica y Cálculo

1. Con Rey Pastor.
2. Madrid, 1941.
3. Nuevas Gráficas.
4. Biblioteca "Rosa Sensat".

Le materiel pour l'enseignement des Mathématiques

1. Varios autores.
2. Paris-Neuchatel, 1957.
3. Delachaux-Niestlé.
4. Biblioteca Grup Matemàtic Puig Adam.

6. Conclusiones, estudio matemático y petición

Don Pedro tenía una maravillosa obsesión por su coherencia personal y la de su obra. Toda nueva elaboración parte de bases anteriormente conquistadas haciendo gala en ocasiones de un fuerte espíritu autocrítico.

Era un hombre con aficiones arraigadas, a las que jamás abandonó. La armonización musical de poesías propias o de otros autores, la dirección de corales (dirigió composiciones a ocho voces) eran actividades de pasatiempo que ejercía con dedicación profesional y que eran goce de sus amigos y discípulos.

Disfrutaba con el dibujo a mano alzada, captando con trazo fácil la fugacidad de un paso de danza o la expresión de una cara.

Sus amigos Pascual Ibarra y Angeleta Ferré conservan algunos de estos entrañables recuerdos.

El profesor Puig tiene un gran gusto para el juego con el lenguaje. Lo domina y le agrada explicitar los sentidos estricto y figurado utilizándolos e intercambiándolos. Ello aporta una cierta ambigüedad creativa y didáctica a ciertas frases.

Unos ejemplos pueden ser: "la belleza de lo matemático" y "las matemáticas de lo bello", la matemática es: "la ciencia de los esquemas" y "el esquema de la ciencia", y otras que se encuentran a lo largo de su obra.

Valora al hombre por encima de toda otra consideración, posiblemente a partir de su visión cristiana.

La tecnología, la vida cotidiana junto al disfrutar con el razonamiento puro son, para él mismo y para su práctica docente, las fuentes y motivaciones de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas.

Hagamos un breve recorrido por su obra a través de los años.

Año 1928, en los *Elementos de Geometría.*

"Aquí te presentamos, lector querido, a los que han de ser durante este curso tus compañeros de trabajo: unas tijeras, un ovillo de hilo, una regla, un par de escuadras, un compás, un rollo de papel de calco, unos cartones, un paquete de lápices y un montón muy grande de hojas de papel.

"Ni un solo día has de empezar la lección de Geometría sin tener al lado estos buenos compañeros, ni terminar de estudiarla sin dejar tu mesa materialmente llena de recortes y de papeles con figuras".

Año 1947, en la *Geometría Métrica.*

"No sé si este libro merece prólogo. Acaso sólo lo merezca la intención con que se ha escrito. Nació de una afectuosa indicación que quise obedecer y de una disconformidad que me acuciaba. Creció entre el afán de lo por lograr y el descontento por lo no logrado".

"... Creo que toda preparación termina en deformación cuando las pruebas que se exige superar se realizan en masa y contra reloj, y, por reacción di en querer hacer, ante todo, un libro formativo. Perdóneseme, pues, la rebeldía y vanidad de mi intento".

"... ¡Quién supiera, pues, escribir un libro capaz de despertar el respeto al rigor sin ahogar la intuición! ¡Quién supiera conjugar en él la honradez científica, el interés formativo y la eficacia práctica!... Tal ha sido la quimera constante del autor en la encrucijada de su triple tendencia pedagógica, científica y técnica, al acometer, temeroso de su impotencia, el empeño de escribir un libro para escolares, bajo el fuego cruzado de los críticos puros y de los críticos prácticos..."

Alguna vez dijo: "El que está de vuelta de todo, es que no ha ido nunca a ninguna parte..."

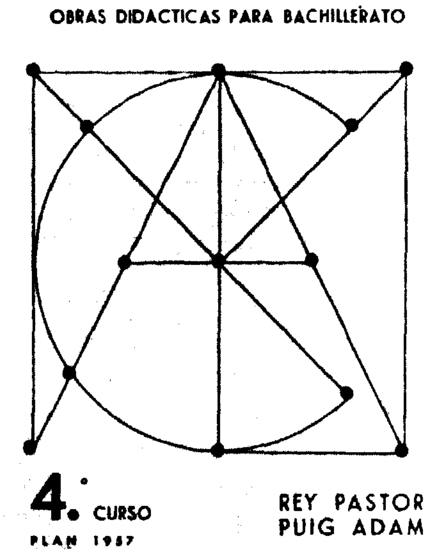
Año 1950, en su *Cálculo Integral,* decía:

"... Y es que ningún noble empeño es despreciable, ni ningún conocimiento puede tacharse de inútil a perpetuidad. Los únicos conocimientos que no se aplican jamás son los que no se tienen; los únicos esfuerzos baldíos de verdad son los que sólo se quedan en proyecto.

De noble empeño y esfuerzo califico, sin modestia, este libro del que poca gloria espero y menos provecho; pero me consuela pensar que acaso sirva y cumpla su misión; y misión y servicio son los motivos que alientan la vida del profesor".

Año 1956, en *Didáctica Matemática heurística,* decía:

"... Y termino esta ya demasiado larga introducción previniendo el peligro de un vicio que en ningún modo quisiera fomentar con este libro: el de la imitación; uno de los más graves y frecuentes en pedagogía... no pretenda (el profesor) aplicar en todo momento y ocasión la misma norma como receta conductora, ya que la buena didáctica no admite soluciones rígidas... Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus



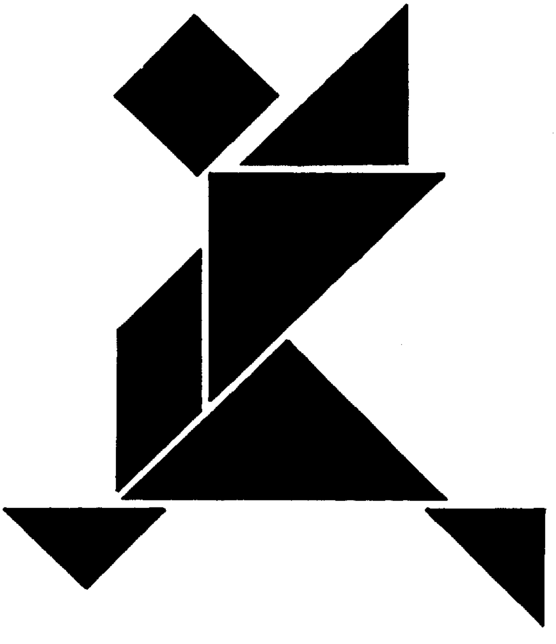
reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en en libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente".

Año 1933, en la *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental,* escribía:

"... Mientras un maestro de escuela debe considerarse completamente fracasado si sus alumnos salen a la vida sin los pertrechos indispensables, que significa saber leer, escribir y calcular correctamente; en cambio, un bachillerato que no haya dejado en la memoria de los alumnos indeleblemente grabada para siempre ninguna declinación latina, ninguna fórmula trigonométrica, ninguna especie botánica, podrá ser, sin embargo, un bachillerato eficaz si ha logrado despertar en el alumno la afición por la lectura de obras literarias, el hábito de razonamiento cuidadoso, el amor a la naturaleza y el sentido de observación, porque, en fin de cuentas, ese imponderable que se llama cultura general no es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el período escolar".

No quisiera acabar este trabajo sin agradecer a las personas e instituciones que lo han hecho posible. A Angeleta Ferrer y a Pascual Ibarra, con quienes hemos hablado durante horas del don Pedro que conocieron y amaron; a las bibliotecarias de la Asociación de Maestros "Rosa Sensat" (en cuya biblioteca se halla la mayor parte de la obra didáctica de Puig Adam, gracias a la donación de Angeleta Ferrer), cuya paciencia y profesionalidad fueron ayuda inestimable. Y a mis queridos compañeros del Grup Matemàtic Puig Adam, cuya paciencia y espíritu crítico han mejorado sustancialmente este trabajo. Un trabajo que espera ser inicio y no final de un estudio serio y de una recuperación completa para nuestras aulas, de la obra y del material didáctico de don Pedro Puig Adam. Obra y material todavía absolutamente necesarios para elevar el nivel de la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país.

Simulaciones



Experimentación didáctica e Investigación activa en clase de Matemáticas

J. M. MARTÍNEZ SÁNCHEZ *

Este artículo resume, con algunas modificaciones para su publicación, una serie de conferencias dadas a profesores de Bachillerato y contiene las ideas expuestas por el autor en las Jornadas de Didáctica celebradas en Alcalá de Henares durante el mes de julio de 1981.

Tratamos en todos los casos de motivar al profesorado sobre los métodos activos en la enseñanza, estimulándole a dar respuestas nuevas a los problemas cotidianos que se presentan en el ejercicio de la actividad docente.

Agradecemos la oportunidad que nos brinda el presente número monográfico de la *Nueva Revista de Enseñanzas Medias,* dedicado a la Didáctica de las Matemáticas, para dar más amplia difusión a estas ideas, de manera que puedan ser conocidas y contrastadas por un mayor número de profesores.

Queremos indicar, finalmente, que en el tiempo transcurrido desde que expusimos por primera vez el tema, han ido cambiando algunas cosas. En primer lugar, nos congratulamos de la aceptación que tienen los métodos activos en capas cada vez más amplias del profesorado; en segundo lugar, estas ideas, asumidas por las autoridades académicas, son actualmente fomentadas desde instancias oficiales. Todo ello es claramente positivo.

Sin embargo, ahora se corre el riesgo de la proliferación indiscriminada de experiencias y ensayos cuyo único aporte consista en su aparente novedad. También hemos de estar atentos sobre la aplicación de métodos y modelos útiles para determinadas etapas del desarrollo intelectual del alumno, pero triviales, cuando no claramente inadecuadas, en etapas posteriores.

* Inspector de Bachillerato del Estado.

Introducción

El fin inmediato que nos proponemos es presentar tres ejemplos de experiencias didácticas en Matemáticas realizadas con alumnos de Bachillerato, con la intención de que puedan servir a los profesores como sugerencias para emprender otras acciones análogas.

Las experiencias seleccionadas están ensayadas y contrastadas en el aula; no son especulaciones teóricas, sino que apuntan a una aplicación inmediata en clase y surgen de situaciones concretas que se presentaron en determinados momentos.

Pero este artículo tiene otra finalidad, más difícil de conseguir, que es convencer al profesorado de que sólo mediante su trabajo personal y propio, a ser posible creativo, se da respuesta, por un lado, a la mejora de la capacidad docente; por otro, a la elevación de la categoría profesional, y, finalmente, a la realización personal en el ejercicio de la tarea educativa.

Es una llamada a reivindicar, y asumir, el papel que la investigación debe desempeñar en la labor del profesor de Enseñanza Secundaria.

Estamos convencidos de que la investigación y la experimentación didáctica son medios posibles, si no los únicos, aunque no fáciles, para el perfeccionamiento del profesorado y la mejora de la enseñanza.

En este sentido, antes de exponer los ejemplos de las experiencias didácticas, hacemos unas consideraciones generales sobre investigación educativa y unas sugerencias para la acción, seguidas de algunas ideas sobre los temas susceptibles de estudio y experimentación.

Consideraciones generales sobre investigación educativa

Algunos autores consideran la investigación educativa como parte integrante de la investigación científica y que sus métodos son, por tanto, los métodos científicos aplicados a las Ciencias de la Educación. Entiendo que esto no es rigurosamente cierto, pero puede admitirse como punto de partida.

Ahora bien, en tanto que los métodos científicos aplicados a las Ciencias de la Naturaleza han conseguido avances espectaculares y han traído como consecuencia el desarrollo técnico, el cual ha cambiado usos y costumbres del mundo civilizado, no ha ocurrido otro tanto en las llamadas Ciencias del Hombre. Cierto que se han conseguido avances en algunas disciplinas, pero no podemos decir lo mismo de otras como la Ética o la Política, por ejemplo, donde el método científico no se ha mostrado especialmente fecundo.

En particular, la investigación en educación no ha conseguido resultados rigurosos que sean unánimemente aceptados, ni tampoco se ha conseguido una técnica pedagógica cuyos logros sean indiscutibles. Algo sí se ha avanzado, evidentemente, pero muchas veces estos avances son debidos a los aportes de otras disciplinas, o a resultados obtenidos en terrenos distintos al campo docente, en lugar de consecuencia directa de investigaciones en educación.

La verdadera investigación educativa es escasa, si bien algunos de sus logros son ciertamente valiosos.

Por otro lado, es frecuente que las teorías pedagógicas y la práctica docente estén alejadas entre sí. Si a esto añadimos que las investigaciones suelen realizarse fuera del medio escolar y por profesionales ajenos al mismo, no es de extrañar que sus resultados sean de difícil aplicación en clase.

Esto explica, de algún modo, las resistencias del profesorado para incorporar a su labor docente teorías que, o bien, son inaplicables en la situación real de los centros, o no muestran especiales ventajas sobre los modos ya consagrados por el uso.

Además, toda innovación conlleva un cambio de mentalidad y un nuevo modo de hacer que requiere un período de adaptación. Cuando esta adaptación no se cumple, sea por falta de tiempo y preparación, sea por natural resistencia a todo cambio, los resultados de la innovación son nulos o, en el peor de los casos, contraproducentes.

En educación, muchas veces, vale más hacer bien lo malo conocido, que hacer mal lo bueno por conocer.

Naturalmente, no se pretende negar los beneficios que todo avance comporta, lo que se trata de decir es que primero hay que comprobar esos supuestos beneficios y luego poner las condiciones para que se pueda aplicar o aprovechar.

Una posible vía de solución para eliminar las objeciones anteriores sería realizar investigaciones en los centros educativos por los propios profesores y ligada a la práctica docente diaria.

El tipo de investigación educativa que por sus características se adapta especialmente a nuestros fines es la conocida con el nombre de investigación activa o investigación por la acción.

La finalidad de la investigación activa es el estudio y resolución de los problemas educativos que se presentan al profesor, en una situación didáctica concreta, dentro del ámbito del centro. Aborda problemas particulares, cuya resolución es de inmediata aplicación a la práctica docente, y sus resultados se valoran más por su utilidad local, que por su validez universal.

La investigación activa surge siempre ante una situación real; se desarrolla integrada en la propia labor docente y como una actividad más de la misma. Sus resultados pueden ser aplicados directamente en clase y mejorar el rendimiento académico.

Para el profesor significa una toma de conciencia y un esfuerzo para responder de modo racional y sistemático a las exigencias de la realidad docente en la que está inmerso. Constituye, además, un medio idóneo para su actualización profesional y, simultáneamente, produce un cambio de mentalidad sobre su quehacer facilitándole la adaptación a situaciones nuevas.

Un caso particular de la investigación por la acción es la experimentación didáctica. Sus fines y procedimientos son los mismos, pero su ámbito de actuación queda restringido a aspectos parciales de una determinada materia.

La experimentación didáctica es la investigación activa que puede realizarse sin rebasar los límites de un seminario, por los profesores del mismo y dentro de las tareas que le son propias.

Creemos, por consiguiente, que la investigación activa y la experimentación didáctica reúnen condiciones para paliar algunos de los inconvenientes que actualmente padecen nuestros institutos y resolver muchos problemas con los que se enfrenta el profesorado de Bachillerato.

Sugerencias para la acción

Es consustancial con la naturaleza humana el afán de conocer y experimentar. Un profesor competente y dinámico nunca debe conformarse con los resultados que obtiene, siempre quiere mejorarlos; quiere que sus alumnos estén más motivados y trabajen con mayor entusiasmo. Esto sólo se consigue ensayando, planteando situaciones de aprendizaje distintas y buscando mejores formas de acción docente.

Cuando el profesor no actúa a título individual, sino formando parte de un grupo de trabajo, como puede ser un seminario didáctico, debe coordinar sus acciones con el resto del equipo. En este caso será necesario discutir y programar en común las tareas a desarrollar o las experiencias a realizar.

La investigación y la experimentación didáctica es una prerrogativa de los seminarios, recogida en la legislación vigente, y una necesidad para el profesorado si no quiere caer en la rutina y en el quehacer mimético, por tanto, esterilizante, además de aburrido.

La carencia de flexibilidad ante situaciones nuevas, la falta de información, así como por la dificultad para la comunicación y el trabajo coordinado, son situaciones que obstaculizan la puesta al día del profesorado y la adaptación de las innovaciones educativas. Todo ello puede superarse cuando se participa en una investigación, pues el afán por conocer estimula a vencer los inconvenientes y a esforzarse para lograr los resultados previstos.

Ahora bien, en nuestra situación actual los problemas que presenta cualquier tipo de investigación no son los más adecuados para ser resueltos en el medio escolar, compatibilizándolos además con la labor diaria de la docencia. Pero, justamente, la investigación por la acción elimina los inconvenientes citados y cumple los requisitos necesarios para realizarse con las demás tareas docentes.

Las actividades de aprendizaje pueden ser observadas sistemáticamente, analizadas con rigor y constituir modelos para su experimentación. El profesor, simplemente, viendo las reacciones de sus alumnos, observando el desarrollo y marcha de las clases y evaluando rigurosamente los resultados obtenidos puede deducir pautas de actuación para la mejora de su trabajo.

De este modo, cada clase es una oportunidad de aprendizaje en sí misma y banco de pruebas donde realizar experiencias. Con frase del inolvidable maestro Puig Adam: "La mejor y más maravillosa fuente de conocimientos para el profesor son sus propios alumnos".

Un bosquejo para el desarrollo de una investigación en el seno de los seminarios didácticos, viene resumida en los siguientes puntos:

1. Elegir un tema objeto de estudio, en función de su interés y posibilidades reales del seminario.

2. Plantear el tema y definir las dificultades con la mayor precisión posible.

3. Recopilar datos y recoger información sobre el tema elegido y otros análogos.

4. Comparar y analizar la información recogida, seleccionando la que se considere útil.

5. Discutir las ideas y opiniones sobre la mejor forma de resolver las cuestiones planteadas; se formula una hipótesis de trabajo basada en las soluciones previstas.

6. Diseñar una experiencia, a partir de la hipótesis de trabajo adoptada, fijando su desarrollo, duración y metodología a emplear.

Todo ello va ligado a determinadas actividades que se han de realizar en las condiciones ordinarias de las clases.

7. Se hace una distribución de tareas entre los miembros del equipo de investigación, asignando a cada uno misiones y objetivos concretos; a la vez que se procede al acopio de los materiales, medios y recursos necesarios.

8. Control periódico de la marcha del proceso y del grado de cumplimiento de las tareas encomendadas.

9. Análisis de los resultados finales, los cuales se contrastan con la hipótesis inicial para extraer las conclusiones que se deriven del contraste.

10. Las conclusiones obtenidas se traducen en normas operativas para su aplicación en clase.

Lo anterior se lleva a cabo mientras se realiza el trabajo en el instituto, y como una parte más del mismo. En ello radica, como ya se ha indicado, la peculiaridad de la investigación por la acción que debería ser una realidad cotidiana en las tareas de los profesores de Enseñanza Media.

El campo de experimentación

Sí, ¿pero cómo elegir el tema objeto de estudio? ¿Cuáles son adecuados para realizar experiencias? El campo de experimentación no está definido *a priori* y cualquier tema es válido tratado convenientemente; en cambio, sí está acotado por nuestras posibilidades reales de trabajo, por su finalidad docente y por los objetivos directos e inmediatos que nos propongamos conseguir.

Entre los objetivos podemos citar: aclaración de conceptos, introducción de nuevas ideas, formas de motivación, presentación atractiva de contenidos, materiales y juegos, enunciados de problemas intrigantes o provocadores de curiosidad, modelos de situaciones didácticas, etc.

Sin con ello agotar todas las posibilidades, podemos encuadrar los temas en tres grandes apartados:

a) Contenidos de la asignatura: conceptos y técnicas matemáticas.

b) Organización de los contenidos: métodos y sistemas de trabajo.

c) Modelos de aprendizaje: situaciones y actividades didácticas.

Estos apartados no son disjuntos entre sí, las líneas de trabajo se entrecruzan y ciertos aspectos de cada uno de ellos pueden perfectamente ser encuadrados en los otros dos restantes.

Simplemente esta distribución, que responde a la clásica división en: contenidos, métodos y didácticas, sirve como punto de partida para iniciar nuestra tarea.

A título indicativo, y sin ninguna otra pretensión, planteamos una serie de interrogantes relativos a cada apartado para mostrar cómo el profesor debe pararse a reflexionar sobre aspectos de su materia, que van desde los más conocidos y habituales, pero con un enfoque distinto, hasta otros más generales o ambiciosos que pueden ser útiles para su propósito.

En el primer apartado incluiríamos cuestiones como las siguientes:

i) ¿Qué queremos decir cuando decimos que la recta real es continua?, ¿qué queremos decir cuando decimos que la función $y = x^2$, o, simplemente, $y = x$ es continua? Clarificar conceptos, distinguir entre continuidad de la aplicación y continuidad de la gráfica.

Cuando decimos que un muro es continuo o que un cine es de sesión continua, ¿estamos expresando la misma noción de continuidad?

En el estudio de la continuidad en Bachillerato sólo suelen considerarse funciones reales de variable real, lo cual es natural, pero tiene el peligro, que acaba convirtiéndose en hábito, de no distinguir ciertas propiedades topológicas de los espacios de aplicación de las propiedades de continuidad intrínsecas de la función.

ii) Posiblemente tengamos noticia del Análisis No Clásico, el cual vuelve a poner de actualidad la noción de infinitésimo. ¿Qué sabemos del estado actual de la cuestión? ¿Puede esto tener alguna influencia sobre la matemática que explicamos en el Bachillerato? Por ejemplo: ¿modifican las ideas del Análisis No Clásico el concepto de límite y consecuentemente la noción de derivada?; ¿se podría introducir la derivación sin necesidad de explicar límites?, ¿sería esto más sencillo o tendría alguna otra ventaja?

En el siguiente apartado tendrían cabida cuestiones relativas a métodos y sistemas docentes, su comparación y contraste, organización de tareas, tipos de pruebas y ejercicios más adecuados para valorar a los alumnos y estimularles al trabajo, etc.

i) ¿Se debe utilizar la calculadora habitualmente en clase o sólo para ciertos temas? ¿Modifica este hecho y, más aún, la introducción y uso de los miniordenadores en el aula, el enfoque de la asignatura? Es decir: ¿matemática existencial o matemática algorítmica?, ¿deducción o enumeración?, ¿formalismo o intuicionismo? Sí, ambos aspectos, ¿en qué proporción y por qué?

ii) La simple cuestión de los enunciados de los ejercicios modifica no sólo la dificultad y modo de resolverlos, si no fundamentalmente el fin para el cual son propuestos. Compárense los siguientes enunciados de un mismo problema:

I. Si a, b, c $\in R^+$, demostrar que $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8 \cdot abc$.

II. Dados tres números reales positivos x, y, z, se pide demostrar:

1.° $(x-y)^2 \geq 0$;

2.° $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$;

3.° $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8\,xyz$.

La primera redacción es apta para un concurso o premio, se trata de eliminar candidatos y quedarse con los mejores; la calificación es de todo o nada, la solución es difícil y el enunciado disuasorio. La segunda redacción, al contrario, gradúa las dificultades, permite evaluar con más precisión el nivel de conocimientos de cada alumno y le estimula a proseguir un trabajo. Caso de éxito, los resultados son retenidos y recordados con mayor dificultad por los alumnos medios.

En el tercer y último apartado podrían situarse cuestiones del tipo siguiente:

i) Utilizando las propiedades de las progresiones aritméticas es fácil construir cuadrados mágicos de orden impar, pero no de orden par; mejor dicho, un cierto procedimiento válido en un caso no lo es de otro, ¿por qué?

Tampoco es difícil encontrar un algoritmo que sirva de modelo para la construcción de tales cuadrados, ¿qué diferencia sustancial habría entre realizar el modelo con o sin ordenador?

ii) Usando papel milimetrado en los problemas de cálculo gráfico, ¿de qué manera están implícitos los conceptos de aproximación y error?, ¿lo están de igual manera usando calculadora? ¿Qué podemos decir del uso simultáneo de calculadora y papel milimetrado en el cálculo aproximado? ¿Qué es cálculo aproximado?

¿En qué sentido está implícita la noción de "borrosidad"?, ¿lo está también en el punto *i)* de este mismo apartado?

Medite el lector no sobre lo anterior, que al fin y al cabo sólo son ejemplos, sino sobre lo que a él se le pueda ocurrir, persevere en el esfuerzo, y al final observará que no es tiempo totalmente perdido.

Ejemplos de experiencias didácticas

Hemos elegido tres ejemplos de experiencias didácticas como ilustración práctica de lo expuesto en los puntos anteriores. Con la primera experiencia se pretende que el alumno adquiera una idea más completa y general sobre un concepto; la segunda es un intento para organizar una parte de nuestra labor docente en un determinado aspecto; en la tercera, y última, la matematización de una situación real se traduce en una actividad de aprendizaje al requerir en concurso de los alumnos en su realización final.

Los ejemplos, publicados en su momento, se presentan completos en líneas generales, con una breve explicación y un esquema de su desarrollo. No entramos en más detalles, pues no se trata de dar soluciones, sino de sugerir ideas y marcar pautas de acción; para mayor información pueden consultarse los artículos que se citan al final de cada ejemplo.

I. Espacios métricos en retículos

Experiencia realizada para introducir una métrica en estructuras reticulares conocidas por los alumnos, generalizar la idea de distancia y precisar el concepto de espacio métrico en una situación no habitual. Nivel C. O. U.

Explicación: Partiendo del hecho de que a los alumnos se les presenta el concepto de distancia en la recta y el plano, o, lo que es equivalente, en estructuras con un orden total, $\mathbb{R}$, o en estructuras no ordenadas, $\mathbb{C}$; se trata de completar lo anterior definiendo una métrica en conjuntos parcialmente ordenados.

Ahora bien, estos conjuntos deben de alguna manera ser familiares al alumno para no acumular dificultad sobre dificultad y, además, que los resultados los encuadren dentro de hechos ya conocidos.

En este orden de ideas, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales, parcialmente ordenado por la relación de divisibilidad: a divide a b, notación a/b, equivale a decir que b es múltiplo de a en la relación opuesta y expresa que existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $b = a \cdot c$.

Para cada par de elementos a y b de $\mathbb{N}$ existe un extremo inferior: inf. $(a, b) = d$, que divide simultáneamente a los números a y b, siendo, por consiguiente, el máximo de los divisores comunes, notación usual m. c. d. $(a \cdot b) = d$; asimismo existe para cada par de números a y b un extremo superior, sup. $(a, b) = m$, que es múltiplo común de a y b, siendo el mínimo de los múltiplos comunes, dotación usual m. c. m. $(a, b) = m$. También utilizaremos la notación $a \wedge b$ para designar el m. c. m. (a, b) y $a \vee b$ para el m. c. d. $(a \cdot b)$, según convenga. Es decir:

$$a \wedge b = \text{m.c.m. } (a, b); \quad a \vee b = \text{m.c.d. } (a, b)$$

Se verifica que a.b. = m.d. y que si a/b entonces $a \leq b$ en la ordenación natural de $\mathbb{N}$.

Se establece una aplicación, norma, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, asignando a cada número natural *a* su logaritmo en base 10 (cualquier base mayor que uno sirve para nuestros fines:

$$a \rightsquigarrow \|a\| = \log a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Con lo anterior estamos en condiciones de definir una aplicación *d;* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, verificando las propiedades que caracterizan a la distancia; en efecto, para cada par a, b de números naturales definimos la distancia entre ambos como diferencia de las normas de su extremo superior e inferior. Es decir:

$$d(a, b) = \log m - \log d$$

siendo *m* y *d* el m.c.m. y el m.c.d. de *a* y *b*, respectivamente.

Para la aplicación $d: N \times N \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, así definida, se demuestran las propiedades:

1. $d(a, b) \geq o$; si $d(a, b) = o \Rightarrow a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Se hubiera podido definir la distancia mediante la diferencia m - d, entre el m.c.m. y el m.c.d., y la norma mediante la inyección natural de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, pero esto no es satisfactorio, a nuestro juicio, porque tal distancia no refleja la naturaleza multiplicativa del retículo ($\mathbb{N}$, /); definiendo la norma por medio del logaritmo tenemos que $d(a \cdot b) = \lg \frac{m}{d}$, es decir, la distancia es el logaritmo de los factores no comunes a *a* y *b*. Esto expresa, como si dijéramos, el "grado de indivisibilidad" entre *a* y *b*: "dos números están más próximos cuantos más factores comunes tengan", lo cual no deja de ser un resultado esperado y natural.

Desarrollo: Se empieza definiendo la distancia entre elementos de filas y cuadrículas; se recuerda la definición de norma y valor absoluto de números reales y complejos; distancia en la recta real, plano complejo y plano métrico. Se dice, finalmente, que se entiende por espacio métrico.

A continuación se presenta el ejemplo explicado anteriormente, se continúa definiendo una métrica en el conjunto $\mathcal{P}$ (A) de las partes de un conjunto A, parcialmente ordenado por la relación de inclusión, se finaliza con un ejemplo de métrica discreta en el conjunto de las proposiciones con las operaciones lógicas disjuntiva "o" y copulativa "y".

Para más detalles puede verse: "Algunos ejemplos de espacios métricos", *Gaceta Matemática,* núms. 1 y 2, Madrid, 1973.

II. Taxonomía de ejercicios y problemas

Intento una clasificación para establecer un orden de prelación y una sistemática de los distintos ejercicios y problemas a proponer a los alumnos para, aparte de ejercitarse en la realización de los mismos, utilizarlos con una finalidad didáctica que permita cubrir ciertos objetivos.

Estos objetivos pueden ser tanto de tipo cognoscitivo, como efectivo o psicomotor; es decir, se pueden utilizar los ejercicios y problemas, debidamente presentados, para la adquisición y aplicación de conocimientos, para formación de valores o para el fortalecimiento de la voluntad. Nivel B. U. P.

Explicación: Los ejercicios se encuadran según su finalidad en los siguientes tipos:

1. Ejercicios de motivación.
2. Ejercicios de asimilación.
3. Ejercicios de síntesis.
4. Ejercicios de repaso.
5. Ejercicios de exposición graduada.
6. Ejercicios de exposición libre.
7. Ejercicios de aplicación inmediata de conceptos.
8. Ejercicios de utilización de técnicas en situaciones concretas.
9. Ejercicios de búsqueda de soluciones óptimas entre varias alternativas dadas.
10. Ejercicios de investigación de soluciones en situaciones desconocidas.
11. Ejercicios de ordenación, sistematización y organización (métodos y técnicas).
12. Ejercicios de generalización y transferencia de conocimientos (teorías, sistemas y modelos).

Naturalmente, un ejercicio dado, podrá ser encuadrado en uno u otro tipo, según la presentación del mismo y de acuerdo a la finalidad que deseamos conseguir en él.

En la clasificación anterior se ha tenido en cuenta una gradación de menor a mayor dificultad, tanto en los conocimientos y técnicas suministrados por los ejercicios, como en la creciente complejidad y dificultad para la realización de los mismos.

Los seis primeros tipos de ejercicios, o ejercicios propiamente dichos, son para la adquisición de conocimientos y para su adecuada estructuración y exposición; no requieren, por parte del alumno, nada más que la voluntad de realizarlos y no requieren el aporte de ningún esfuerzo creativo, basta ejecutar las instrucciones para obtener el resultado; a lo más, el número 6 exige del alumno algo de su libre iniciativa. Los siguientes tipos son ya de dificultad creciente y requieren, por parte del alumno, la incorporación de factores no implícitos en el enunciado del ejercicio para la resolución del mismo, así como un cierto grado de tesón para alcanzar el éxito; estos ejercicios son los que llamaremos problemas, y van desde los más simples, aplicación inmediata de conceptos aprendidos, hasta la sistematización explícita de su trabajo o la elaboración de modelos y teorías generales que expliquen un conjunto de situaciones análogas.

Dentro de los ejercicios propiamente dichos, los dos primeros responden a la necesidad de introducir la información; el 3 y 4, al proceso interno de la misma, resumiéndola y memorizándola; los ejercicios del tipo 5 y 6 corresponden a la salida de la información y adiestran en la cantidad que debe salir y en la presentación de la misma.

Los problemas tipo 7 y 8 corresponden a lo que llamo proceso externo de la informacion y consiste en conectar los conocimientos adquiridos con la realidad objetiva; es decir, aplicar y utilizar los conocimientos en casos determinados, para lo cual es necesario saber seleccionar de entre todos los conocimientos, los apropiados, pero facilita esta selección en el enunciado del problema mediante una sugerencia adecuada.

Los problemas del tipo 9 y 10 son de una dificultad considerable, y el alumno no debe enfrentarse a ellos sin una previa preparación y mentalización. El enunciado de los mismos contiene datos suficientes para su resolución pero no suministra ninguna información sobre el camino a recorrer; los del tipo 9 son combinatorios, es decir, la elección entre diversas alternativas se ve dificultada al aumentar su número y en ciertos casos nos vemos obligados a idear un método de elección. Tanto éstos, como los del tipo 10, habitúan al alumno a perseverar en el esfuerzo para la obtención del éxito.

Por último, los tipos 11 y 12 se salen en parte del marco del alumno y requieren la cooperación estrecha con el profesor para su desarrollo y exposición. En resumidas cuentas, son problemas amplios que se plantean al profesor al empezar el curso y fijar los objetivos del mismo, y que se resuelven mediante las correspondientes actividades de clase, de tal manera que la solución es correcta si, al final del curso, el alumno ha asimilado los métodos y teorías que debemos transmitirle al programar la asignatura.

Desarrollo: A lo largo del curso, seleccionando los ejercicios según la finalidad prevista, presentando en la forma y momento oportuno, siguiendo su evolución y comprobando los resultados. Una de las mayores dificultades consiste en la elección y redacción de los enunciados; un mismo ejercicio, según su redacción, puede servir para una u otra finalidad. Conviene que los ejercicios estén graduados y, a veces, formando batería de manera que la solución de uno nos indique el camino para resolver el siguiente.

Hay que formar un archivo de ejercicios, de modo que la variedad en cada tipo sea amplia, cambiándolos, o modificando el enunciado, según se vaya viendo los resultados obtenidos.

Los alumnos deben estar informados, en todo momento, de qué se pretende de ellos con los ejercicios propuestos, tanto la finalidad inmediata como la remota. A veces es conveniente que los alumnos colaboren en la redacción de ejercicios con sus ideas, opiniones y sugerencias.

(Puede verse: "Problemas y ejercicios; utilidad didáctica", *Cursillos sobre Didácticas Matemáticas,* tomo XIII, Madrid, 1974).

III. Simulación de una situación real

Experiencia realizada para mostrar cómo la Matemática puede ser útil en el estudio de situaciones complejas y aparentemente alejadas del campo matemático. La experiencia tiene por finalidad motivar el estudio de la Matemática; pero, al involucrar en su desarrollo a los alumnos, es también un ejemplo de verdadera actividad de aprendizaje, que permite iniciar a los estudiantes en las tareas de programación e introducir la idea de algoritmo en procesos secuenciales no numéricos.

Se trata de analizar una situación en que se presenta la necesidad de efectuar ciertas consultas, de frecuencia y duración variables, para resolver algunas dificultades que aparecen al realizar tales consultas.

El estudio en tiempo real no es posible o no es práctico: procede, por consiguiente, establecer un modelo teórico que refleje la situación bajo ciertas hipótesis y simular el proceso en tiempo reducido. Nivel C. O. U.

Explicación

Aprovechando la circunstancia de que un grupo de alumnos de C. O. U. disponían de dos horas semanales, que podían ser utilizadas para prácticas y trabajos en grupo, formamos cinco equipos de trabajo con objeto de que profundizaran en el estudio de algunos temas de especial interés del programa. A cada equipo se le proporcionaba el contenido esquemático de los temas, los puntos de mayor dificultad, los ejercicios a realizar y la correspondiente bibliografía de consulta para ser utilizada en las sesiones semanales de estudio.

Para varios de los temas propuestos era necesario consultar un determinado libro, del que sólo disponíamos de un ejemplar, y se producía el inconveniente de que distintos equipos necesitaban consultar a la vez o que, cuando un equipo necesitaba hacer una consulta, el libro estaba siendo utilizado por otro equipo. A la vista de este inconveniente surgió la pregunta natural: ¿es suficiente, para nuestro trabajo, un solo ejemplar del libro?

Evidentemente, en este caso, el inconveniente se evita comprando más ejemplares. Sin embargo, surgen las siguientes consideraciones:

1. El uso de los libros es temporal y no son necesarios con posterioridad.
2. El inconveniente es mínimo, pues el tiempo que se pierde consultando es muy pequeño y no afecta al trabajo.
3. El inconveniente no es significativo, pues surge en algunas, pocas, sesiones, pero no en todas.

Por tanto, es lícito preguntarse si es necesario comprar más libros, y si es así, ¿cuántos?

Con el fin de obtener la información necesaria para saber si basta un solo libro, sin agotar todas las sesiones de estudio, es necesario reproducir, bajo condiciones e hipótesis determinadas, el proceso de consulta. Es decir, construir un modelo aceptable de las sesiones de estudio típicas, de dos horas de duración, cinco equipos de trabajo y un solo libro de consulta, que permita simular cuantas sesiones fueran necesarias para obtener la suficiente información sobre el proceso.

En efecto, la simulación nos permite determinar, para un gran número de casos y en breve tiempo, el porcentaje de utilización del libro, el tiempo dedicado a consultas y el tiempo que se pierde en esperas para consultar, en total y por equipos.

Desarrollo

Cada equipo lo representamos por una cartulina marcadas E_1, E_2, ..., E_5, en total cinco cartulinas. Al dorso de cada una anotaremos cuando el equipo correspondiente tenga necesidad de efectuar una consulta, así como los momentos en que empieza y finaliza la consulta.

El libro se representa por una ficha L, que sirve, a la vez, para acumular información sobre las consultas realizadas.

El tiempo que dura la sesión de trabajo, dos horas, se subdivide en 24 períodos de 5 m.; cada uno de estos períodos de tiempo se simulan mediante una tarjeta; en total veinticuatro, numeradas del 1 al 24. Dos tarjetas más, una marcada con "0", para indicar que la sesión no ha comenzado, y otra, marcada con "25", en la que se pone "FINAL TIEMPO", para indicar que el proceso ha terminado. Las 26 tarjetas forman un paquete que denominamos "paquete de tiempos" o "paquete T".

El transcurso del tiempo, durante la sesión de trabajo, se simula al ir retirando las tarjetas del paquete T; comienza la sesión al retirar la tarjeta "cero" y finaliza cuando sólo queda la tarjeta "veinticinco", en la que aparece el "FINAL TIEMPO".

Repetimos: como cada tarjeta representa 5 m. de tiempo real, al retirar una tarjeta se simula que han transcurrido 5 m. de la sesión de trabajo. En cada uno de esos 5 m., uno, o varios, equipos de trabajo pueden, o no, tener necesidad de consultar el libro, que, a su vez, puede en este instante estar disponible u ocupado.

La frecuencia y duración de las consultas no son fijas y se establecen, generalmente, por observaciones previas en situaciones reales. En nuestro caso, las sesiones de estudio ya realizadas nos indican que, en media, cada equipo venía a realizar cuatro consultas en las dos horas de trabajo.

Por consiguiente, en cada período de 5 m. hay una posibilidad, sobre seis, de realizar consultas. En este caso, la probabilidad de consultas es 1/6 y se los equipos tienen, o no ,necesidad de consultar, la extracción de una bola puede simular mediante el lanzamiento de un dado. Convenimos en que si se obtiene "AS" se produce la necesidad de consulta, y no se produce en caso contrario.

Asimismo, las consultas son de duración variable, desde las breves para ver una cita o dato, hasta las que requieren leer todo un epígrafe; en cualquier caso, no solían presentarse consultas de duración inferior a 5 m., ni superior a 30 m. Para esta experiencia llegamos a establecer, como aceptable, la siguiente distribución de tiempo para la duración de las consultas en promedio:

Dos consultas de 5 m.

Tres consultas de 10 m.

Tres consultas de 15 m.

Dos consultas de 20 m.

Una de 25 m.

Una de 30 m.

Esta distribución se puede materializar mediante una bolsa, en la que introducimos 12 bolas o discos numerados: dos ellos con el número 1, tres con el número 2, tres con el número 3, dos con el número 4, uno con el 5 y otro con el 6, que nos indican en cada caso cuantos períodos de 5 m. se han empleado en realizar la consulta.

La simulación de la duración de la consulta consiste en elegir una bola al azar, de entre las doce de la bolsa, y el número escrito en la misma nos indica el tiempo, en períodos de 5 m., que ha durado la consulta realizada.

Si en un instante dado, indicado por la tarjeta superior del paquete de tiempos, un equipo tiene necesidad de consultar, puede empezar la consulta si en ese instante el libro está disponible, o ponerse en espera para consultar cuando el libro esté ocupado. Los equipos en espera para consultar forman una "fila de espera" o "cola".

La fila de espera se simula colocando una a continuación de otra las cartulinas que representan los equipos que necesitan la consulta. El hecho de que el libro esté ocupado lo indicamos colocando encima de la ficha L, la cartulina del equipo que consulta. Un equipo o está trabajando, o está consultando, o está en espera para consultar.

Cuando un equipo que está consultando finaliza su consulta, vuelve a su posición de trabajo y su lugar lo ocupa el primero de la fila de espera, si lo hay.

Nota: Podría ocurrir que un equipo necesitase consultar cuando se acaba el tiempo de simulación. En este supuesto hay dos opciones, como ocurre en las situaciones reales: o prolongamos la sesión hasta que el equipo interesado acabe la consulta o, por el contrario, al finalizar el tiempo de trabajo, se suspende toda actividad y lo que quede pendiente se deja para la próxima sesión. Cualquiera de las opciones es válida, pero es conveniente, para la uniformidad de los cálculos, fijar una de ellas de antemano.

El proceso comienza poniendo el paquete T en cero, es decir, ordenadas las 26 tarjetas de menor a mayor numeración; se colocan los equipos en "posición" de trabajo y el libro en situación de "disponible". Se inicia la simulación al retirar la tarjeta 0, y comenzar a contar los 5 m. simbolizados por la tarjeta 1; durante estos 5 m. vemos, mediante lanzamientos del dado, si los equipos tienen, o no, necesidad de consultar. La extracción de una bola de la bolsa nos simula la posible duración de la consulta.

En el dorso de las cartulinas E de los equipos se anota: momento en que se produce la necesidad de consulta, principio de la consulta (T), duración de la consulta (D), fin de la consulta $F = T + D$. También se anotan los períodos de espera, los cuales vienen dados por la diferencia entre el principio de la consulta y el momento en que se produjo la necesidad de consultar.

En la ficha L del libro se anota: principio y final de las consultas y duración de las mismas (diferencia entre los valores anteriores).

Con ello tenemos:

1. El tiempo de espera para cada equipo.
2. La duración total de las consultas realizadas.
3. El tiempo de espera total.
4. El tiempo de utilización del libro.
5. Los porcentajes correspondientes de utilización del libro, del tiempo dedicado a esperar por equipos, del tiempo empleado en consultas y, para el control, el porcentaje de tiempo en que los equipos están trabajando.

El análisis del proceso permite confeccionar el correspondiente programa mediante el listado de los pasos sucesivos y las instrucciones a ejecutar en cada caso.

Asimismo, es conveniente realizar el organigrama para hacerse una idea global del proceso.

(Para información más completa y ejemplos de resultados obtenidos puede consultarse: "La simulación de modelos", *Revista de Bachillerato,* cuaderno monográfico, núm. 5, Madrid, 1980).

Conclusión

Hemos visto que parte de la actividad docente y de las obligaciones del profesorado, si se hacen sistemática y metódicamente, pueden traducirse en tareas de investigación de resultados aplicables en el aula.

Por supuesto, que la labor de investigación del profesor de Bachillerato no tiene por qué limitarse al tipo aquí descrito; si alguien puede hacer alguna otra, mejor que mejor. Simplemente, se trata de ver que la investigación activa es posible y desde luego deseable.

En resumen, sería interesante lograr que los profesores de Enseñanza Secundaria compaginasen docencia e investigación, consiguiendo que los institutos y seminarios fueran auténticos lugares de discusión y experimentación didáctica de donde surgieran las diversas sugerencias para la mejora de la enseñanza.

La estadística mediante experiencias de simulación

José COLERA *

> ... La clase, como colectivo de sujetos medibles en un cierto aspecto y medidores en otro, suministra gran riqueza de situaciones para hacer atractiva la teoría y práctica de la estadística y, en este sentido, dicha disciplina constituye uno de los capítulos más privilegiados de toda la enseñanza de la matemática en lo que se refiere a la fácil creación a su alrededor de centros de interés didáctico.
>
> PUIG ADAM: *La matemática y su enseñanza actual.*

> La probabilidad y la estadística son disciplinas de interés actual, y a veces son fundamentales en casi todas las ramas del conocimiento y en muchos quehaceres de la vida ordinaria.
>
> SANTALÓ: *La educación matemática, hoy.*

No hay simposio, reunión, jornadas de matemáticas en las que no se diga que la geometría, en los últimos años, ha sido lamentablemente relegada de la Enseñanza Media. "¡Hay que recuperar la geometría!", se afirma con mucha razón. La suerte de la estadística ha sido aún peor: su olvido no es de los últimos años, sino de siempre. Aunque en los programas oficiales aparezcan varios temas, es frecuentísimo que se dejen para final de curso y acaben no dándose. "¡Hay que encontrar la estadística!", habría que decir.

La ausencia de su estudio en nuestras clases es tanto más chocante cuanto que trata una materia de enorme interés actual y muy especialmente adecuada para desarrollarla con un método activo, participativo, opinión avalada por los dos autorizadísimos párrafos que encabezan este escrito.

A lo largo de estas páginas voy a presentar algunas experiencias susceptibles de ser llevadas al aula. Cuáles y cuándo quedará al criterio del profesor. En algunas de ellas, el cómo se explica con algún detalle.

---

* Coordinador de Matemáticas para la Reforma de las Enseñanzas Medias.

Se van tocar los siguientes temas:

— Frecuencia y probabilidad.
  - Ley de los grandes números.
  - Regularidad, pero menos. (Dicen que Mendel hizo trampa).

— Trabajando con muestras.
  - La elección de la muestra, ¿se la dejamos al azar o procedemos de forma más concienzuda?
  - ¿Cómo de grande ha de ser la muestra?
  - ¿Qué conclusiones podemos sacar de lo que nos dice la muestra?

— La curva normal y su omnipresencia.
  - Una distribución que aparece por doquier.
  - Posible explicación: el teorema central del límite.
  - ¿Podría ofrecerse a los alumnos algún test de normalidad?

Frecuencia y probabilidad

Veamos una serie de experiencias con las que se pretende que el alumno especule en la predicción de probabilidades "a priori", recoleccione datos y obtenga frecuencias que le permitan inferir e intuir la ley de los grandes números **(cuando el número de experimentaciones es muy grande, la frecuencia relativa tiende a estabilizarse).**

Empezaré por describir una serie de "generadores de resultados aleatorios". Unos son muy conocidos y utilizados; otros, menos. Todos ellos pueden usarse para experiencias de simulación. En muchos de ellos se puede calcular la probabilidad "a priori"; en algunos, este ejercicio es muy interesante:

Generadores de resultados aleatorios.—Entre paréntesis aparecen los valores de la variable.

- Dado (1, 2, 3, 4, 5, 6). Dados irregulares.
- Moneda (C, +).
- Cartas de una baraja (...).
- Dos monedas (CC, C +, + C, + +).
- Más monedas.
- Lanzamiento reiterado de una moneda hasta que salga cara (1, 2, 3, ...).
- Dos dados [par de números: (1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), ..., (6, 6)].
  suma de números: (2, 3, 4, ..., 11, 12).
- Lanzamiento de un palillo de dientes —o lápiz— sobre una familia de paralelas equidistantes: problema de la aguja de Buffon. (SI-NO toca el palillo una de las rayas.) La probabilidad depende de la distancia entre rayas y de la longitud del palillo.
- Moneda sobre una cuadrícula. (SI-NO toca la moneda alguna de las líneas de la cuadrícula). La probabilidad depende del lado de la cuadrícula y del diámetro de la moneda. La obtención geométrica de la probabilidad "a priori" es muy interesante.

- Una chincheta (punta hacia arriba o hacia abajo). La probabilidad depende de las características de la chincheta.
- Último dígito de un número telefónico (0, 1, 2, ..., 9).
- Dos últimos dígitos de un número telefónico (00, ..., 99).
- Urnas. La probabilidad depende no sólo de la composición sino también de que la extracción sea o no con reemplazamiento.
- Ruleta.

Experiencia 1

Objetivo: Observar experimentalmente la ley de los grandes números y representarla gráficamente.

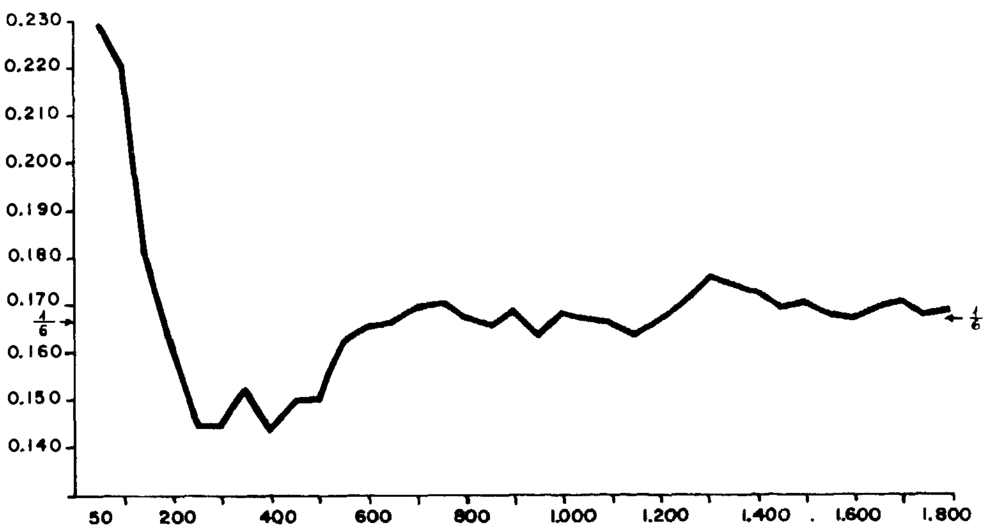
Diseño: Trabajo en grupos de dos. En cada grupo se tira un dado "muchas" veces (entre 100 y 200), se anotan los resultados y se calcula la frecuencia de una cara, por ejemplo el 5. Se compara la frecuencia absoluta con la de los otros grupos. Se obtienen frecuencias relativas (tres cifras decimales). Comparan unos grupos con otros y todos con $1/6 = 0{,}166$.

Suman las frecuencias absolutas cada dos grupos y obtienen la frecuencia relativa correspondiente. Comparan con 0,166.

Repiten el proceso hasta que suman las frecuencias absolutas de toda la clase.

Las frecuencias relativas en los sucesivos pasos, "probablemente" se han ido acercando a 0,166.

En total se han conseguido del orden de 2.500 tiradas. Si se recogen y se ordenan, podría calcularse la frecuencia del 5 cada 50 tiradas (de las 50 primeras, las 100 primeras, las 150 primeras...) y pasarlas a un diagrama cartesiano.



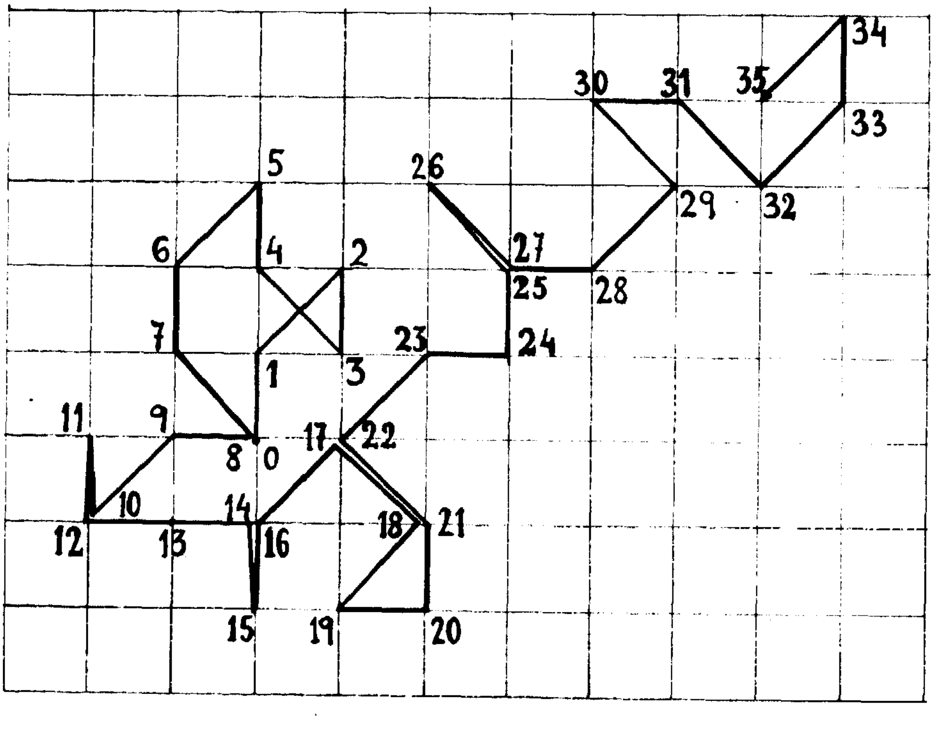
Variantes: En lugar de con el dado, los alumnos podrían lanzar chinchetas (todas del mismo tipo). Los siguientes pasos serían idénticos, salvo al comparar con la media esperada, pues en este caso se carece de referencia. Al terminar se podría especular sobre la probabilidad de que la punta quede hacia arriba.

Experiencia 2

Objetivo: Relacionar el movimiento browniano con movimientos al azar.

Diseño: Tómese un papel cuadriculado y dos dados distintos. En cada dado, 1, 2 corresponden al —1; 3, 4 corresponden al 0; 5, 6 corresponden al 1. Un dado señala la abscisa y el otro la ordenada.

Se supone que hay una partícula en un punto central de la cuadrícula. Cada tirada de los dados supone el movimiento de la partícula a uno de los ocho puntos que la rodean, o al mismo en que se encontraba. Váyase siguiendo el itinerario uniendo con un segmento cada dos posiciones sucesivas.



Variante: Numérense las sucesivas posiciones, pero únanse solamente cada 5 o cada 10 (como si se fotografiara la posición de la partícula sólo en algunos instantes).

Variante unidimensional

—9 —8 —7 —6 —5 —4 —3 —2 —1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Partiendo de 0 se decide a cara o cruz si se avanza un paso o se retrocede. Anótese la posición de cada tirada. (Problema del borracho).

Experiencia 3

Entre los problemas que el caballero/tahur De Meré le propuso a Pascal está el siguiente:

Dos jugadores han puesto 32 monedas cada uno y se las llevará el primero que gane tres juegos. La partida se interrumpe cuando uno de ellos gana por 2 juegos a 1. ¿Cómo han de repartirse las 64 monedas?

Del mismo tipo es el siguiente:

En las cajas de cerillas aparece:

Supongamos que por cada 4.000 cajas hay 1, 3, 10, 45 y 200, respectivamente, que bajo el rascador presentan cada una de las combinaciones anteriores.

Y, además, 990 del tipo , 951 del tipo y 1.800 del tipo , que no tienen premio. No hay ninguna combinación de otro tipo.

En una caja de cerillas levantamos el rascador y nos aparece la siguiente combinación

¿Cuánto hay que valorar esta caja vacía mientras no acabemos de arrancar el rascador?

El problema admite variantes, según que las figuras descubiertas sean unas u otras. La variante más difícil acaso sea la siguiente: "Una caja de cerillas cuesta 5 pesetas. Si levantamos el rascador y aparece , "¿cuánto vale, ahora, la caja llena?" O su equivalente: "¿Cuánto vale una caja de cerillas vacía con el rascador intacto?".

Regularidad, pero menos

Un médico le dice a su paciente: "Es una pena. Tiene usted una dolencia de la cual sólo sobreviven uno de cada diez". Y tras mirar sus archivos, añade: "Pero está usted de suerte. Hasta ahora he tenido nueve pacientes con esta enfermedad y se me han muerto los nueve. Usted es el décimo, le toca sobrevivir". (Este chiste creo haberlo leído en algún libro de Polya).

Sin llegar a esta exageración, sí es frecuente que cuando tarda mucho en salir un resultado (en una moneda, un dado o una ruleta) se tiende a pensar que es más probable que salga ¡ya!; ¡nos lo debe!

Sin embargo, la ley de los grandes números no dice nada de compensar las diferencias entre los valores obtenidos y los esperados (cada tirada es independiente de las anteriores). De tal modo que resultados demasiado próximos a lo esperado resultan sospechosos. Y si esta excesiva proximidad es reiterada, la sospecha llega a límites alarmantes. Así, parece ser que se ha demostrado (de entonces acá la estadística ha evolucionado mucho) que los resultados que exhibió Mendel eran tan regulares que, muy probablemente, estuvieran algo amañados. (Posiblemente tuviera que "retocarlos" para convencer a algún coetáneo cerril).

¿Cómo se pone de manifiesto esta falta de concordancia entre lo "esperado" y lo "obtenido" mediante las experiencias descritas anteriormente?

En la experiencia 1 obténgase, junto con la frecuencia relativa, f/n, la diferencia f - n/6, entre el valor obtenido y el esperado. Se verá cómo tiende a aumentar en valor absoluto.

La partícula de la experiencia 2 tiende a estar cada vez más lejos del punto de partida. Y el borracho, aun a bandazos, se aleja paulatinamente.

Trabajando con muestras

En nuestros cursos de Enseñanza Media se distingue entre población y muestra, y se habla de la necesidad de estudiar poblaciones por medio de muestras (cantidad desmesurada de inividuos, carestía de sondeo, proceso destructivo...). Incluso se trabaja con muestras y se calculan algunos de sus parámetros; es decir, se hace un estudio "descriptivo" de la muestra. Pero es muy raro que se dé el paso de estimar parámetros de la población a partir de los de la muestra, por las grandes dificultades teóricas que entraña.

Sin embargo, es posible un tratamiento del tema que permita a los alumnos, .de forma experimental, y sin usar fórmulas, llegar a conclusiones suficientemente claras como para entender las estimaciones que aparecen en los periódicos y para hacer las suyas propias.

¿En qué consiste la estimación de parámetros poblacionales mediante muestras? Supongamos que un alumno pretende saber la proporción de suspensos en matemáticas (parámetro a estimar) en la última evaluación entre los chicos de 1.º del Centro (población). Para ello pregunta a 20 chicos (muestra) entre los que hay ocho suspensos. La proporción obtenida en la muestra es $8/20 = 0,4$ o, si se prefiere, el 40 %.

Lo normal es asignar ese valor al parámetro buscado: "Estimamos que la proporción de suspensos en el Centro es del 40 %". Pero es obligado hacerse la siguiente pregunta: "¿Qué seguridad tenemos de que la afirmación anterior sea cierta?". La respuesta es terminante: "¡Ninguna!". Planteemos, pues, las cosas con más cautela: "¿Qué expectativas hay de que la proporción de suspensos sea próxima al 40 %?". Esta pregunta ya tiene una respuesta más esperanzadora. Intentemos llegar a ella.

Lo primero es cuestionarse si la muestra escogida es suficientemente buena en cuanto:

— Al tamaño. ¿Influye el número de elementos de la muestra en las conclusiones que obtengamos de ella?
— A la representatividad. ¿Cómo obtener una muestra representativa? ¿Es conveniente designar al azar los elementos que la componen o sería preferible una sensata elección de los mismos?

Las experiencias que a continuación se exponen responden a estas preguntas.

La elección de la muestra, ¿se la dejamos al azar o procedemos de forma más concienzuda? Hagamos la pregunta de otra manera: ¿No se podría, fácilmente, elegir una serie de elementos que *realmente* representen a la población sin estar sujetos a los caprichos del azar?

La respuesta espontánea de los alumnos es afirmativa. Casi me atrevo a decir que cualquiera que no esté algo puesto en estadística tiende a pensar que escogiendo con atención se consigue una muestra más acertada que dejándolo al azar.

Las siguientes experiencias van encaminadas a probar que las muestras aleatorias son, casi siempre, mejores que las subjetivas.

Experiencia 4

Objetivo: Comparar muestras obtenidas subjetivamente con muestras aleatorias.

Fase primera: Se forma la población y se obtienen muestras por métodos subjetivos.

1. Pídase a los alumnos que cada uno lleve a clase varios trozos de cable o cuerda de las longitudes que quieran (se les puede decir "entre 5 cm y 10 m"). Al día siguiente se dispondrá de una buena cantidad de trozos (entre 150 y 300) con longitudes muy variadas.
2. Se exponen los N trozos y se numeran de 1 a N.
3. Cada alumno escoge, tras estudiar atentamente la población, una o más muestras de tamaños, 10, 20, 30, 40 ó 50, anotando los números de los elementos en un papel.

   Cada muestra se selecciona procurando que **la media** de sus elementos sea **lo más parecida posible a la media de la población.**
4. Se miden los N trozos y se anotan sus medidas en la pizarra.
5. Se calcula la media $\bar{x}$ de la población, las medias $\bar{x}_i$ de las muestras seleccionadas por los alumnos y la diferencia $|\bar{x}_i - \bar{x}|$, error cometido, para cada muestra.

Fase segunda: Obtención de muestras aleatorias y comparación con las anteriores.

6. Se seleccionan, aleatoriamente, 10 muestras de cada uno de los tamaños siguientes: 10, 20, 30, 40, 50.
7. Se calculan sus medias $\bar{x}_j$, y sus errores $|\bar{x}_j - \bar{x}|$.
8. Se compara el error de cada muestra obtenida por los alumnos con cada uno de los errores de las diez muestras aleatorias de su mismo tamaño.

Observaciones

En la fase 3 no deben hablar unos con otros. Cada cual debe seguir su criterio para escoger la muestra "ideal".

Procúrese que algunos de los alumnos (de 4 a 6) escojan varias muestras cada uno. Unos, todas de 10 ó de 20; otros, una de cada tipo.

Los cálculos de medias los harán los propios alumnos, en grupos de a dos, valiéndose de calculadoras.

Para la obtención de muestras aleatorias pueden usarse: una urna con papeles numerados de 1 a N; tablas de números aleatorios; calculadora con tecla RDN.

Todo el experimento se simplifica notablemente si se posee un microordenador y se lleva preparado un programa adecuado.

Al terminar la fase primera, conviene explicarles a los alumnos en qué consistirá la segunda: obtención de muestras por sorteo. Opinarán, casi indefectiblemente, que éstas serán peores que las que han seleccionado sesudamente.

Resultados

Los resultados, naturalmente, hay que obtenerlos, y cada vez que se haga la experiencia ver qué pasa. Sin embargo, cabe esperar lo siguiente (y hasta ahora, así ha ocurrido):

Globalmente, las muestras aleatorias son mejores (y mucho mejores) que las escogidas.

Las muestras aleatorias son claramente mejores cuantos más elementos tienen, mientras que las otras, no; entre varias muestras escogidas por una misma persona, no suelen ser mejores las grandes que las pequeñas.

Las muestras aleatorias tienen su media unas veces por encima, otras por debajo de la media poblacional. Las medias de las diversas muestras escogidas por una misma persona suelen quedar siempre por encima o siempre por debajo de la media. Se produce un sesgo sistemático debido a la apreciación subjetiva de la población por ese individuo.

Variante

Es similar a la anterior, pero en lugar de trozos de cuerda se toman números. Selecciónense, por ejemplo, 80 números entre 1 y 50; 80 entre 50 y 150; 80 entre 150 y 500; 80 entre 500 y 5.000 Mézclense y ya se tiene la población de partida. Con ella se pueden hacer las mismas cosas que con la población de cables. Los resultados son similares.

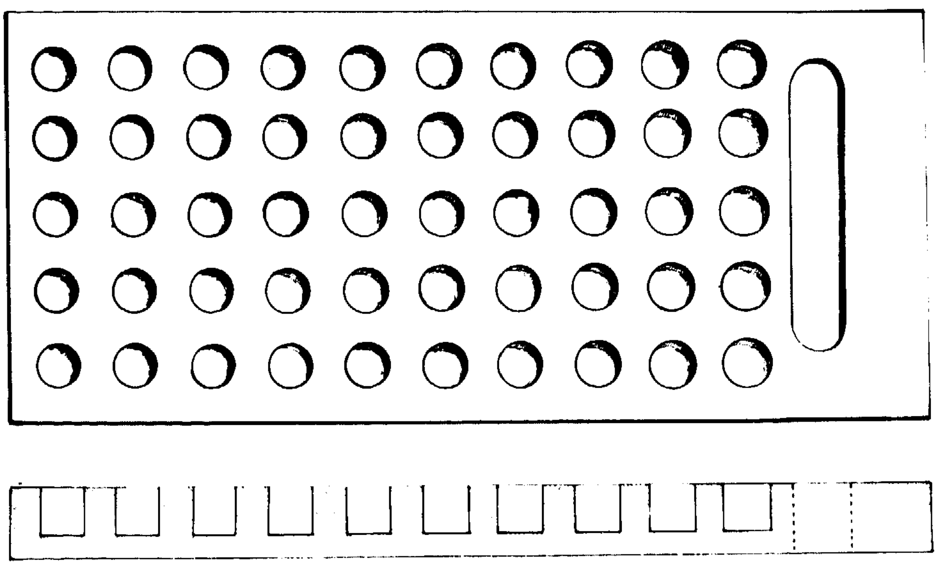
Experiencia 5

Objetivo: Obtener criterios para decidir hasta qué punto una muestra proporciona información sobre una población.

La idea de esta experiencia, así como la de la "pala de muestreo", está tomada de [13] (ver bibliografía).

Esta experiencia, que consta de dos partes, requiere el siguiente material:

— Una gran cantidad de bolas (1.000 blancas y 500 negras) que simularán los aprobados y los suspensos.
— Una caja en la que quepan con holgura 1.000 bolas.
— Una pala de muestreo, que consiste en una tabla con 50 orificios, en cada uno de los cuales quepa una bola, y repartidos así:



Introduciéndola en la masa de bolas se obtiene rápidamente una muestra de 50 (teniendo en cuenta sólo 1, 2, 4, etc., últimas filas, obtendremos muestras de 5, 10, 20, etc., elementos).

Primera parte: ¿Cuál es el tamaño ideal de la muestra?

Objetivo: Comprobar que cuanto mayor sea la muestra, más se puede afinar en la estimación de la proporción de bolas negras.

Fórmese una población de 1.000 bolas con el 40 % de negras (600 B, 400 N).

Obténganse 100 muestras de tamaño 5 y anótense los resultados "número de bolas negras".

Por ejemplo (los datos que aparecerán a continuación los he obtenido con un ordenador mediante un programa que simula esta experiencia):

n = 5

N.° de Negras	0	1	2	3	4	5
% de Negras	0	20	40	60	80	100
Cantidad de muestras	6	21	41	21	8	3

Obsérvese que el 90 % de las muestras están entre 1 y 4. Es decir, el 90 % de las muestras presentan proporciones de bolas negras comprendidas entre el 20 % y el 80 %.

Análogamente, obtengamos 100 muestras de cada uno de los tamaños siguientes: 10, 20, 30, 40 y 50.

Por ejemplo (obtenido con ordenador):

n = 10;

N.° de Negras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% de Negras	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Cantidad de muestras	1	4	9	23	29	24	6	4	0	0	0

El 90 % de las muestras tienen proporciones de negras entre 20 y 60 %. Para los siguientes tamaños obtuve los resultados:

n = 20 El 90 % están entre el 25 % y el 60 % de bolas negras.
n = 30 " " " " " 30 % y el 53 % " " "
n = 40 " " " " " 28,5 % y el 50 % " " "
n = 50 " " " " " 32 % y el 50 % " " "

Podemos llegar a dos conclusiones:

1. Al aumentar n (tamaño de la muestra), la distribución de las proporciones de las muestras se hace más estrecha: el intervalo en el cual se encuentran el 90 % de las muestras es cada vez menor.

2. Así como los pasos de n = 5 a n = 10, de n = 10 a n = 20 y de n = 20 a n = 30 suponen mejoras ostensibles, no ocurre otro tanto con los pasos de n = 30 a n = 40 y n = 40 a n = 50. Por tanto, conjugando la economía (muestrear es costoso) con la eficacia, decidimos que las muestras ideales para este caso son las de tamaño 30.

Segunda parte: ¿Qué información sobre la población proporciona la muestra?

Objetivo: Dada la composición de la muestra, obtener un intervalo dentro del cual sea muy probable que se encuentre la proporción de suspensos en la población.

Acabamos de ver que nuestra muestra de tamaño 20 no es la más adecuada. Si tuviéramos que volver a muestrear lo haríamos con el tamaño 30. Pero ya que la tenemos vamos a ver qué información nos da. En ella el 40 % de los alumnos están suspensos. Pasemos este dato a un lenguaje simulado de bolas blancas y negras:

De una población de composición ignorada extraemos 20 bolas y ocho de las cuales (el 40 %) resultan negras.

¿Sería posible este resultado con una población con el 20 % de bolas negras? ¿Y con el 25 %?, etc. Veámoslo.

Fabrico una población con 800 bolas blancas y 200 negras (P = 20 %). Extraigo 100 muestras de 20 y dan los siguientes resultados:

P = 20 %;	N.° de Negras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
	Cantidad de muestras	3	4	9	24	24	18	12	4	2	0 ...

Sólo el 2 % de las muestras tienen ocho bolas negras. Es muy poco probable que nuestra muestra proceda de esta población.

Análogamente, para otras proporciones se obtienen los siguientes resultados:

										10%	4%		
P = 25 %;	N.° de Negras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11...
	Cantidad de muestras	2	1	7	10	14	22	21	13	6	3	1	0...

El 8 se encuentra entre el 10 % superior de los resultados, pero no en el 5 % superior.

											11%	5%		
P = 30 %;	N.° de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
	Cantidad de m.	0	1	3	6	10	17	23	11	18	6	4	1	0...

4% 13%

P = 50 %;	% de N	...4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17...
	Cantidad de m.	...0	3	1	9	11	15	17	14	16	10	3	0	1	0...

5% 11%

P = 55 %;	N.° de N	...5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17...
	Cantidad de m.	...0	2	3	16	12	15	17	18	11	14	1	1	0...

5%

P = 60%;	N.° de N	...5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19...
	Cantidad de m.	...0	1	2	2	7	9	19	14	19	14	6	6	0	1	0...

Si. sólo estamos dispuestos a aceptar un riesgo del 5 %, diremos que la población tiene una proporción de negras superior al 20 % e inferior al 60 %.

Pero si estamos dispuestos a aceptar un riesgo de error del 11 %, podemos afirmar que la proporción de negras es

$$25\,\% < P < 55\,\%$$

Obsérvese que, a mayor riesgo, más finura en la apreciación, y viceversa.

NOTA.—"Simulando" a su vez las extracciones de bolas con un microordenador, estas experiencias se realizan con mucha rapidez y eficacia.

La curva normal y su omnipresencia

Los alumnos que hayan trabajado un poco en estadística, se han encontrado multitud de veces con distribuciones acampanadas: distribuciones de edades, pesos, notas..., la binominal, distribución de medias o proporciones en muestreo...

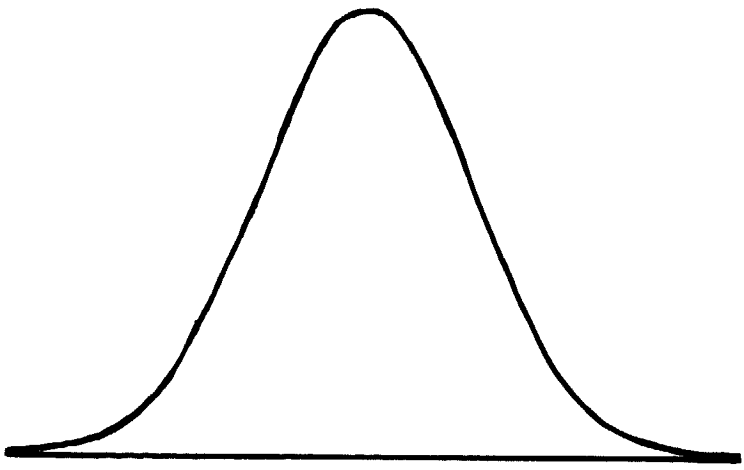
¿Por qué aparecen tanto y tan impensadamente? ¿Se puede definir con alguna precisión este tipo de distribuciones? Si tenemos una distribución concreta que parezca ser de este tipo, ¿disponemos de algún medio para decidir si lo es o no?

Las respuestas a estas preguntas deberíamos ser capaces de ponerlas al alcance de nuestros alumnos.

La curva normal: una distribución que aparece por doquier

La descubrió Gauss por primera vez al estudiar la distribución de medidas de una misma magnitud (o, si se prefiere, los errores cometidos al medir muchas veces una misma cosa).

Su gráfica es la de una curva simétrica y acampanada.



Está perfectamente definida su expresión matemática, pero es complicada. Por eso hay tablas que ayudan a usarla. Se presenta en muchas ocasiones y en los casos más inesperados. Veamos dos casos curiosos:

I. Tómese cualquier libro o periódico. En una página cualquiera se seleccionan cien o ciento y pico renglones que tengan, al menos, unos 50 caracteres. Cuéntese el número de veces que aparece una cierta letra (por ejemplo, la e) en cada uno de ellos. Se obtendrá una lista de ciento y pico números. Bien, estos números se distribuirán (¡seguro!) según una curva normal.

II. Constrúyase el siguiente aparato (Fig. 7).

Se llama aparato de Galton. Echense por el orificio de arriba unos cientos de perdigones. Si el aparato está bien construido, la altura que alcanzan los perdigones en las casillas en las que caen dibujarán la curva normal.

Esto parece trampa, ¿no? Si no sale la curva normal decimos que el aparato está mal construido, y se acabó. Lo cierto es que no resulta nada fácil conseguir que funcione correctamente, pues es fundamental que en cada tope la probabilidad de que el perdigón se vaya a la derecha o a la izquierda sea la misma: 1/2.

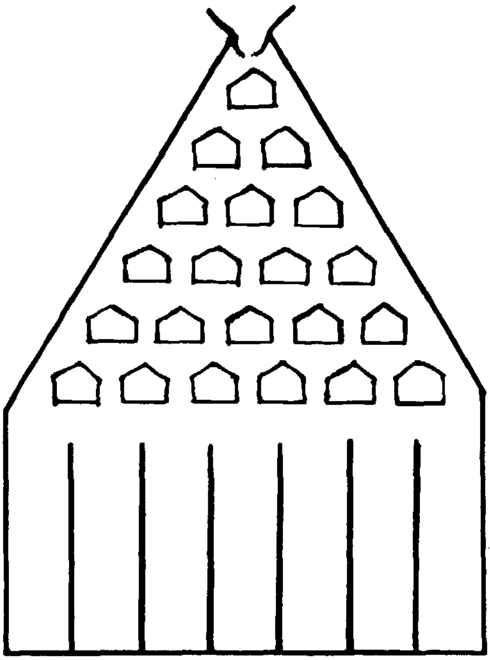
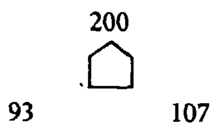


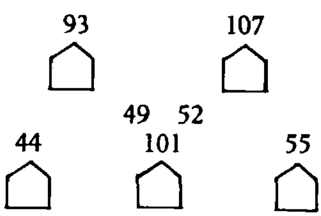
Figura 7

Veamos cómo se puede hacer lo mismo sin construir el aparato:

Tomamos, imaginariamente, 200 bolas. Para cada una de ellas decidimos, a cara o cruz, si va hacia la izquierda o hacia la derecha. C ⟶ izquierda; + ⟶ derecha. Por ejemplo, obtenemos 93 C, 107 +.



Volvemos a hacer lo mismo con las 93 y las 107:



Ahora tenemos tres cantidades: 44, 101 y 55. Volvemos a hacer lo mismo, teniendo en cuenta que las que van a la derecha del 44 se juntan con las que van a la izquierda del 101 y lo mismo con 101 y 55.

Repitiendo el proceso hasta un total de seis veces, obtendremos las siete columnas del aparato dibujado antes. Ahora sí que, con toda certeza, podemos asegurar que el diagrama de barras correspondiente se aproximará a la normal.

La curva normal aparece siempre que en la variable cuya distribución se estudia influyan muchas causas que sumen sus efectos. Así, la estatura de una persona depende de infinidad de circunstancias: la herencia paterna, la materna, la alimentación, el ejercicio... Por eso las estaturas de las personas se distribuyen según la curva normal.

La explicación de este hecho está en el siguiente teorema.

Teorema central del límite

Tomemos una población cualquiera. Por ejemplo, la distribución de resultados al lanzar un dado. Es así:

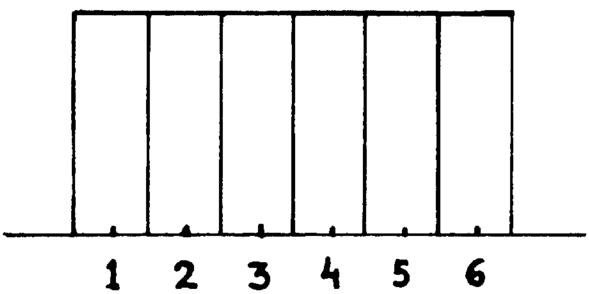


Figura 8

Tomemos ahora una muestra de esta población. Por ejemplo, obtenemos estos 10 elementos al azar: MUESTRA 1 = (6, 3, 6, 3, 3, 2, 1, 5, 2, 2). Su media es $\overline{x}_1 = 3{,}3$. Si repitiéramos este proceso muchas veces, tomando siempre muestras del mismo tamaño, sus medias $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, ..., formarían una nueva población. Hemos obtenido al azar 200 muestras concretas y sus medias se distribuyen del siguiente modo:

Obsérvese la forma acampanada de la distribución de medias muestrales, en contraste con la distribución uniforme de partida.

El teorema central del límite generaliza este resultado:

Cualquiera que sea la población de partida, la media de las muestras de

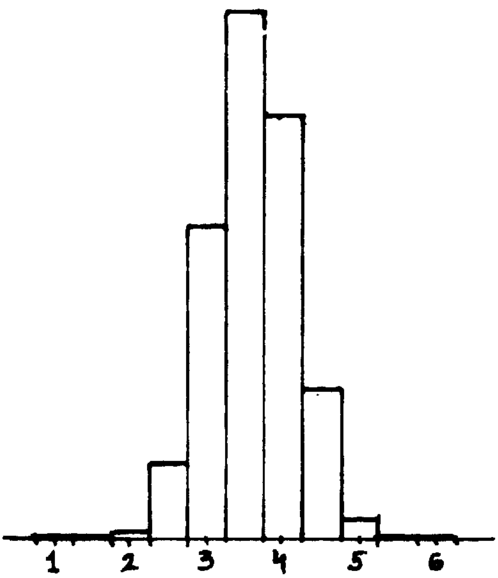


Figura 9

n elementos se distribuyen según la curva normal con tal de que n sea suficientemente grande.

En la práctica, con $n \geq 30$ ya es suficiente para que la distribución de medias sea muy similar a la normal.

El efecto del teorema central del límite se aprecia incluso con muestras muy pequeñas y con poblaciones de partida muy irregulares. Ya hemos visto cómo son las medias de muestras extraídas de una población uniforme. Veamos la distribución de medias de 100 muestras de tamaño 5 en otros tres tipos de poblaciones.

Es fácil llevar al aula esta experiencia. Para simular la población del tipo a) se introducen 16 papeletas con el número 1; 5 con el 2; 4 con el 3; ...; 2 con el 5. Una muestra de tamaño 5 se obtiene sacando cinco papeletas *con reemplazamiento.* La necesidad de hacerlo con reemplazamiento hace algo penosa la extracción de muestras. Si se quieren utilizar bolas y una pala de muestreo, con lo que la extracción de muestras es muchísimo más rápida, hay que poner bolas numeradas del 1 al 5 en las proporciones 6, 5, 4, 3, 2, pero en gran cantidad (por ejemplo, 60, 50, ..., 20) para que la extracción de una no altere sensiblemente la proporción de partida.

Y, desde luego, con un microordenador y un programa adecuado se aprecia esta propiedad con una elocuencia extraordinaria, pues se pueden tomar poblaciones con proporciones muy diversas y muestras de cualquier tamaño

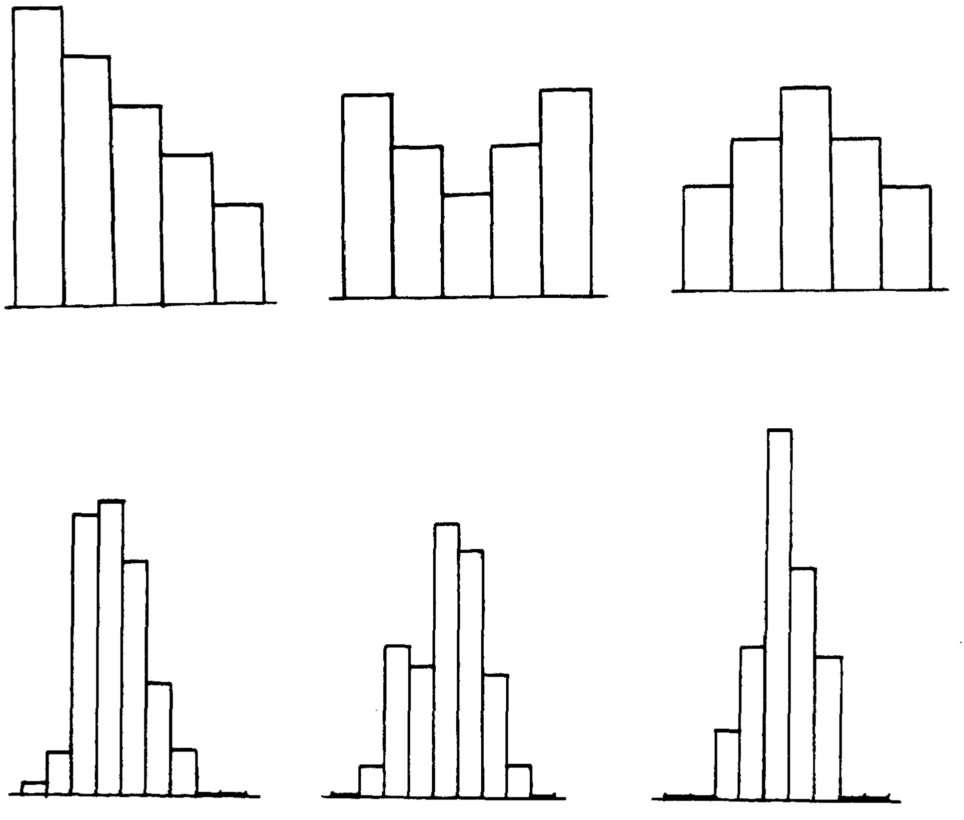


Figura 10

y conseguir que aparezcan en la pantalla, en pocos segundos, la distribución de la población y la de las medias muestrales.

Test de normalidad.—Como decíamos al comienzo de este epígrafe, y como se ha ratificado con el estudio del teorema central del límite, las distribuciones "parecidas" a la normal se presentan con mucha frecuencia. ¿Cómo decidir si los resultados de una muestra pueden llevarnos a la conclusión de que la población de partida es normal o no? Para ello están los test de normalidad.

El método gráfico, para el que se requiere el "papel probabilístico" o "papel gausso-aritmético", resulta muy fácil de aplicar porque en él la función de distribución de la curva normal se convierte en una recta. Además, su fundamento es perfectamente inteligible para alumnos de quince años.

Su descripción puede encontrarse en [5] y [7] de la bibliografía.

Bibliografía

1. *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 3. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1968.
2. *Matemáticas en el mundo moderno.* Ed. Blume, Madrid, 1974.
3. BAJPAI: *Métodos estadísticos para estudiantes de Ingeniería y Ciencias.* Ed. Limusa, México, 1981.
4. BONET, E.: *Fundamentos de estadística.* Ed. Teide, Barcelona, 1975.
5. CALOT, G.: *Curso de estadística descriptiva.* Ed. Paraninfo, Madrid, 1970.
6. DIXON/MASSEY: *Introducción al análisis estadístico.* McGraw-Hill, México, 1979.
7. DOMÉNECH, J. M.: *Métodos estadísticos para la investigación en ciencias humanas.* Ed. Herder, Barcelona, 1975.
8. GLAYMAN/VARGA: *Las probabilidades en la escuela.* Ed. Teide, Barcelona, 1975.
9. MOOD/GRAYBILL: *Introducción a la teoría de la estadística.* Ed. Aguilar, Madrid, 1976.
10. POLYA, G.: *La découverte des mathématiques.* Ed. Dunod, París, 1967.
11. POLYA, G.: *Matemáticas y razonamiento plausible.* Ed. Tecnos, Madrid, 1966.
12. PUIG ADAM, P.: *La matemática y su enseñanza actual.* Ed. Publicaciones de la Subdirección General de Enseñanzas Medias, Madrid, 1960.
13. SANDERS, W. J.: *Statitiscal inference in junior high and middle school.* NCTH 1981 Yearbook. "Teaching statistics and probability", National Council of Teacher of Mathematics", Virginia, 1981.
14. SANTALÓ, L.: *La educación matemática, hoy.* Ed. Teide, Barcelona, 1975.
15. SPIEGEL, M. R.: *Estadística.* McGraw-Hill, Colombia, 1969.
16. SWIFT/SCHAEFFER: *Information for samples: yes-no populations leadership conference. Statistic and probability in the classroom.* Williamsburg, Virginia, 1981.

Un modo asequible de iniciarse en la combinatoria

M.ª Teresa GONZÁLEZ MANTEIGA *

Uno de los objetivos fundamentales de la combinatoria es la resolución de problemas de recuento como los que enunciamos a continuación:

1. ¿De cuántas formas distintas se puede elegir delegado, subdelegado y asesor de un grupo de 40 alumnos?
2. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar diez personas en una fila de diez butacas numeradas?
3. ¿Cuántas quinielas distintas de 14 partidos se pueden rellenar?
4. ¿De cuántas fichas consta el juego del dominó?
5. ¿De cuántas formas se puede elegir una comisión de tres personas, para realizar un trabajo en equipo, de un grupo de 46?
6. En una carrera participan cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja, ¿cuántas *clasificaciones individuales* distintas se pueden dar, si se clasifican los cinco corredores?
7. ¿Cuántas *clasificaciones por equipos* distintas se pueden dar en la carrera del ejercicio anterior?

Para intentar resolver problemas como éstos, es necesario tener bien claro:

1.º Quién es el conjunto *A*, que llamaremos *alfabeto*, con el que se escriben los resultados.

2.º Cuántos elementos buscamos.

3.º Si en el grupo de *k* elementos que buscamos es importante el orden.

* Profesora de matemáticas en la Escuela universitaria de Ingenieros Técnicos de Montes y en el C. E. U.

4.º Si en estos grupos de k elementos han de estar necesariamente todos los elementos de A.

5.º Si en estos grupos de k elementos puede haber alguno repetido.

Teniendo en cuenta esto, los podemos resolver poniendo a funcionar el organigrama de la página siguiente.

- Así, *en el ejemplo núm. 1*

¿Quién es el conjunto A? Será el conjunto formado por los 40 alumnos de la clase. Por tanto, $n = 40$.

¿Cuántos elementos buscamos de A? Tres; por tanto, $k = 3$.

¿Importa el orden de estos k elementos? Evidentemente, *sí*, ya que el primero será el delegado; el segundo, el subdelegado, y el tercero, el asesor.

¿Tienen que estar necesariamente todos los elementos de A en el grupo buscado? *No*, ya que buscamos tres y podemos elegirlos entre 40.

¿Puede aparecer algún elemento repetido entre los tres buscados? *No*, ya que en este caso no tendríamos tres representantes.

Por tanto, la salida correspondiente a este ejercicio es la núm. 3 del organigrama y nos indica que el número de resultados es $V_{40,3}$.

- *En el ejemplo núm. 2*

$A = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10} \}$, el conjunto formado por las diez personas, $n = 10$.

$k = 10$, pues se van a sentar las diez personas.

Sí importa el orden de las diez personas.

Sí tienen que estar todos los elementos de A.

No puede repetirse ningún elemento de A.

La salida en este caso es la núm. 5 y, por tanto, el número de resultados es $P_{10} = V_{10,10}$.

- *En el ejemplo núm. 3*

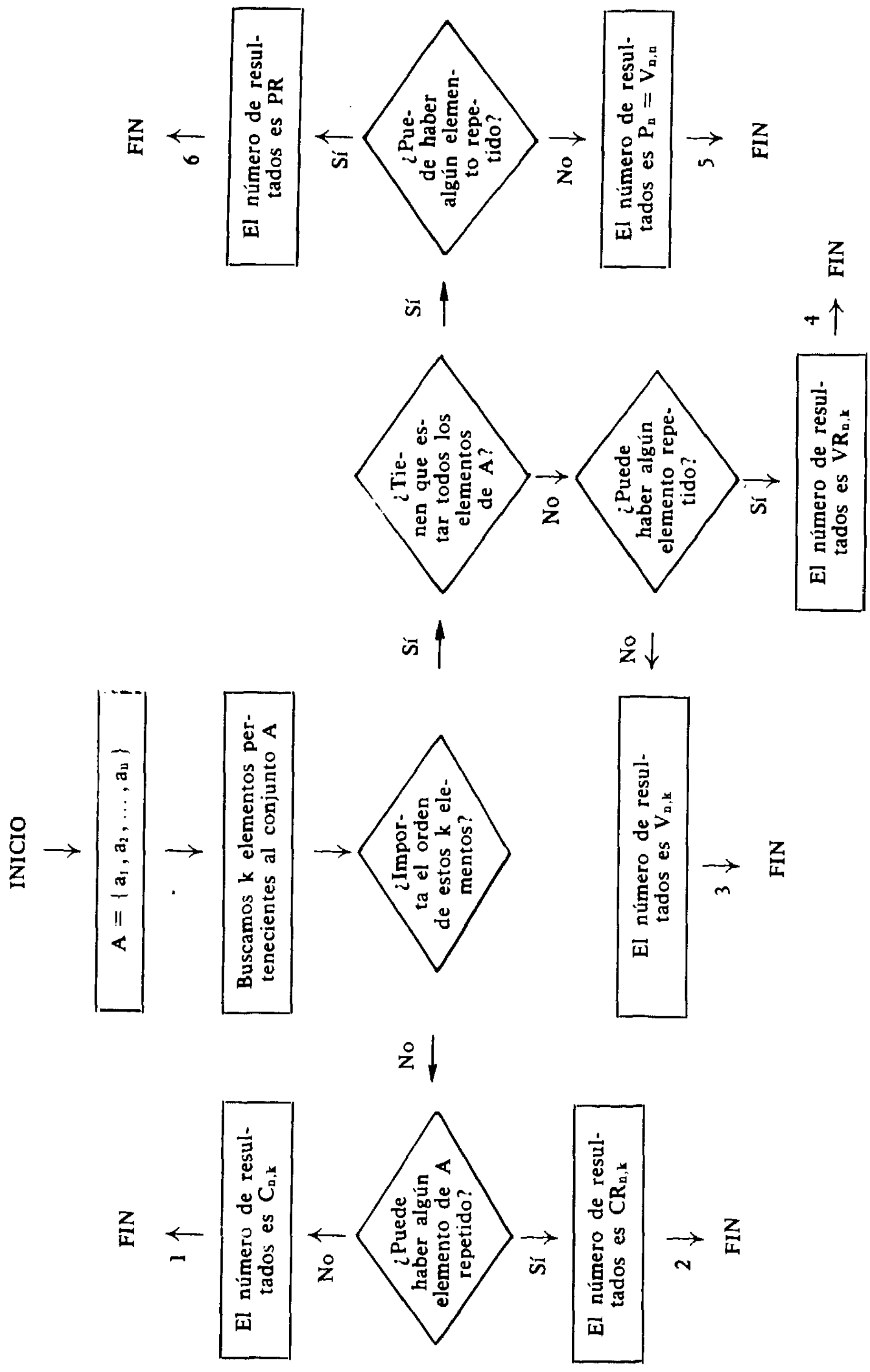
$A = \{ 1, X, 2 \}$, ya que el *alfabeto* para escribir las quinielas consta de estos tres símbolos, $n = 3$.

$k = 14$, ya que vamos a escribir quinielas de 14 partidos y, por tanto, buscamos 14 resultados. Ejemplo:

$1, X, 1, X, 1, 1, 1, 1, 1, 1, X, X, 1, 1$ es una quiniela.

Sí importa el orden de los 14 elementos.

No tienen que estar necesariamente todos los elementos de A; por ejemplo, en la quiniela anterior no aparece el 2.


INICIO
A = { a₁ , a₂ , ... , aₙ }
Buscamos k elementos pertenecientes al conjunto A
¿Importa el orden de estos k elementos?
No
¿Puede haber algún elemento de A repetido?
No
El número de resultados es $C_{n,k}$
1
FIN
Sí
El número de resultados es $CR_{n,k}$
2
FIN
Sí
¿Tienen que estar todos los elementos de A?
No
¿Puede haber algún elemento repetido?
No
El número de resultados es $V_{n,k}$
3
FIN
Sí
El número de resultados es $VR_{n,k}$
4
FIN
Sí
¿Puede haber algún elemento repetido?
No
El número de resultados es $P_n = V_{n,n}$
5
FIN
Sí
El número de resultados es PR
6
FIN

Sí puede haber algún elemento de *A* repetido.

La salida en el organigrama es la núm. 4 y, por tanto, el número de quinielas distintas es $VR_{3,14}$.

- *En el ejemplo núm. 4*

El alfabeto es ahora: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si convenimos en que *0* representa blanca, *1* un punto, 2 dos puntos, etc. Luego, $n = 7$.

$k = 2$, ya que las fichas de dominó constan de dos casillas. Ejemplo: blanca doble será *0-0*, uno-blanca será *1-0*, cinco-seis es *5-6* y seis doble es *6-6*.

No importa el orden de los dos elementos que buscamos, ya que sólo hay una ficha con un cinco y un seis.

Sí puede haber algún elemento de *A* repetido, ya que existe la ficha tres doble, es *3-3*.

La salida correspondiente en el organigrama es la núm. 2 y de ahí que el número de fichas de dominó es $CR_{7,2}$.

- *En el ejemplo núm. 5*

A es el conjunto formado por las 46 personas, $n = 46$.

$k = 3$, pues buscamos tres personas.

No importa el orden de los elementos, pues no se les da cargos distintos.

No puede haber ningún elemento de *A* repetido, pues el equipo no sería de tres personas.

La salida correspondiente es la núm. 1 y el número de resultados posibles es $C_{46,3}$.

- *En el ejemplo núm. 6*

$A = \{ B_1, B_2, B_3, N_4, N_5 \}$, indicando el color de la camiseta, blanca o naranja, y el número de dorsal de cada corredor, *1, 2, 3, 4, 5*. Es $n = 5$.

$k = 5$.

Sí importa el orden de los cinco corredores.

Sí tienen que estar todos en la *clasificación individual*.

No puede haber ningún corredor repetido.

En consecuencia, la salida es la núm. 6 y el número de *clasificaciones individuales* es $P_5 = V_{5,5}$.

- *En el ejemplo núm. 7*

$A = \{ B, N \}$, pues sólo nos fijamos en los equipos de los ciclistas. Tenemos cinco ciclistas, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja.

Buscamos cinco elementos que han de ser necesariamente tres blancos y dos naranjas.

Sí importa el orden de llegada.

Sí tienen que estar todos los elementos de A en cada *clasificación por equipos,* ya que tiene que haber en todas ellas tres con camiseta blanca y dos con camiseta naranja.

Sí puede haber algún elemento de A repetido, ya que necesariamente tienen que aparecer tres con camiseta blanca y dos con camiseta naranja.

La salida es la núm. 6 y el número de *clasificaciones por equipos* es $PR_5^{3,2}$, permutaciones con repetición de cinco elementos, de los que tres son del equipo blanco y dos del equipo naranja.

Como consecuencia, podemos observar que en la primera pregunta del organigrama: ¿Importa el orden de los k elementos?, si la respuesta es *NO* se trata de *combinaciones,* y en el caso de que la respuesta sea *SÍ* pueden ser *variaciones* o *permutaciones.* Para distinguirlas hacemos la pregunta: ¿Tienen que estar todos los elementos de A?, si la respuesta es *SÍ* se trata de *permutaciones* y si la respuesta es *NO* se trata de *variaciones.* La última pregunta en todas las salidas sirve para distinguir las combinaciones ordinarias de las combinaciones con repetición, las variaciones ordinarias de las variaciones con repetición y las permutaciones ordinarias de las permutaciones con repetición.

Es ahora el momento de deducir las fórmulas y de formar las variaciones con y sin repetición, las permutaciones ordinarias, las permutaciones con repetición y las combinaciones.

Variaciones con repetición

Si $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ el conjunto de las variaciones con repetición de orden k formadas con los elementos de A es el producto cartesiano $AxAx \ldots$ $\ldots xA = A^k$.

Ejemplo: si $A = \{ a, b, c \}$ vamos a formar el conjunto de las variaciones con repetición de orden *1, 2* y *3.* (Vid. Fig. 1).

Esta representación se conoce con el nombre de diagrama de árbol.

Observa que el conjunto de las variaciones con repetición de orden *2* se forman a partir de las variaciones de orden *1* (cada uno de los elementos de A) añadiendo a su derecha cada uno de los elementos de A; las de orden *3* se forman a partir de las de orden *2* añadiendo a su derecha cada uno de los elementos de A, y así sucesivamente.

El número de variaciones con repetición de orden k formadas con los n elementos del conjunto A lo escribiremos así: $VR_{n,k}$.

$$VR_{3,1} = 3 \; ; \; VR_{3,2} = 3 \cdot 3 = 3^2 \; ; \; VR_{3,3} = 3^3 \; ; \; \ldots \; ; \; VR_{3,k} = 3^k$$

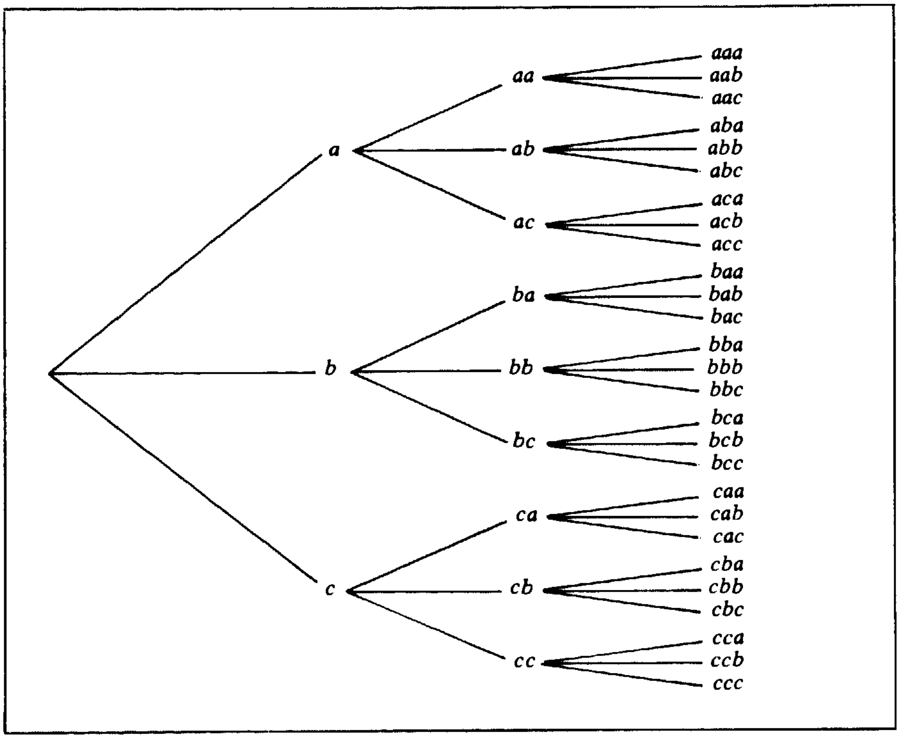


Figura 1

Si el conjunto A tiene n elementos, a partir del diagrama de árbol se deduce que:

$$VR_{n,1} = n \ ; \ VR_{n,2} = n^2 \ ; \ VR_{n,3} = n^3 \ ; \ \dots \ ; \quad \boxed{VR_{n,k} = n^k}$$

siendo k cualquier número natural positivo.

Variaciones ordinarias

El conjunto de las variaciones (o variaciones ordinarias) de orden k formadas con los n elementos del conjunto A es el subconjunto A^k formado por aquellas variaciones en las que no aparece ningún elemento de A repetido.

Ejemplo: Si $A = \{ a, b, c \}$ vamos a formar el conjunto de las variaciones de orden *1, 2, 3.*

No existen variariones ordinarias de orden superior al número de elementos de A; sin embargo, sí existen variaciones con repetición de orden k, siendo $k > n$.

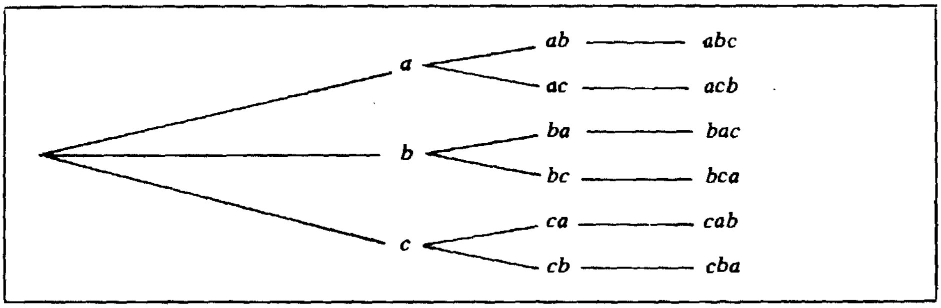


Figura 2

Las variaciones ordinarias de orden *2* se obtienen a partir de cada uno de los elementos de A (variaciones de orden *1*) añadiendo a su derecha todos los elementos de A salvo el que está escrito; las de orden *3*, añadiendo a la derecha de las de orden *2* cada uno de los elementos de A, salvo los que forman esa variación, y así sucesivamente, hasta llegar a las variaciones de orden n si A tiene n elementos.

El número de variaciones (o variaciones ordinarias) de orden k formadas con los n elementos del conjunto A, lo escribiremos así: $V_{n,k}$.

$$V_{3,1} = 3 \ ; \ V_{3,2} = 3.2 \ ; \ V_{3,3} = 3.2.1$$

Si el conjunto A tiene n elementos, del diagrama del árbol obtenemos:

$$V_{n,1} = n \ ; \ V_{n,2} = n(n-1) \ ; \ V_{n,3} = n \cdot (n-1)(n-2) \ ; \ \dots \ ;$$

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2) \ \dots \ [n-(k-1)] = n(n-1)(n-2) \ \dots \ (n-k+1).$$

$$V_{n,n} = n(n-1)(n-2) \ \dots \ 3.2.1 = n!$$

$$\boxed{V_{n,k} = n(n-1)(n-2) \ \dots \ (n-k+1) \frac{n!}{(n-k)!}, \ \text{siendo } 0 < k \leq n, k \in N}$$

Permutaciones ordinarias

Las variaciones ordinarias de orden n formadas con los n elementos del conjunto A se llaman permutaciones ordinarias de los elementos de A.

Para formar las permutaciones de los n elementos de un conjunto A basta con formar las variaciones ordinarias de orden n.

El número de permutaciones ordinarias de los n elementos de un conjunto A, lo indicaremos por P_n.

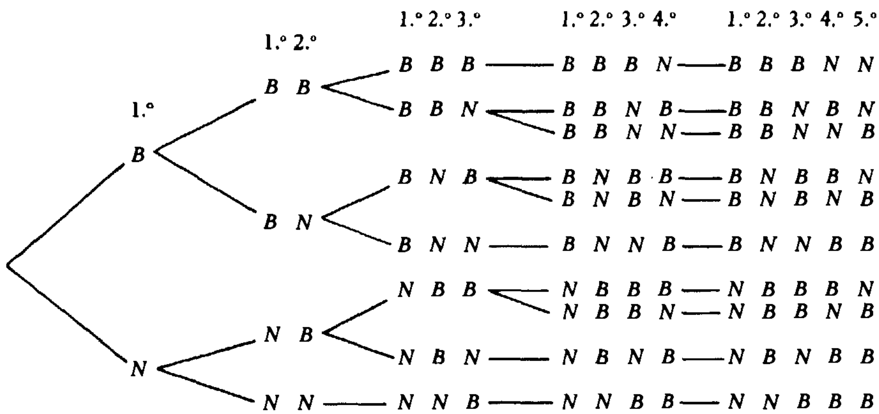
$$\boxed{P_n = V_{n,n} = n(n-1)(n-2) \ \dots \ 3.2.1 = n!}$$

Permutaciones con repetición

Empezaremos con nuestro ejemplo.

En una carrera participan cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja. ¿Cuántas *clasificaciones por equipos*, distintas, se pueden dar?

Suponemos que los corredores del equipo blanco llevan dorsales *1, 2, 3* y que los del equipo naranja llevan dorsales *4* y *5*. Las distintas *clasificaciones por equipos* son:



Hay diez *clasificaciones por equipos.*

En este caso el diagrama de árbol no sirve para calcular el número de permutaciones con repetición.

El número de *clasificaciones por equipos* de estos cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja lo indicaremos por $PR_5^{3,2}$.

Por cada una de estas *clasificaciones por equipos,* si observamos el número del dorsal de cada corredor, obtenemos $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 12$ *clasificaciones individuales* diferentes. En efecto, las *12 clasificaciones individuales* siguientes corresponden a la misma *clasificación por equipos: BBBNN,*

$B_1B_2B_3N_4N_5$	$B_1B_2B_3N_5N_4$
$B_1B_3B_2N_4N_5$	$B_1B_3B_2N_5N_4$
$B_2B_1B_3N_4N_5$	$B_2B_1B_3N_5N_4$
$B_2B_3B_1N_4N_5$	$B_2B_3B_1N_5N_4$
$B_3B_1B_2N_4N_5$	$B_3B_1B_2N_5N_4$
$B_3B_2B_1N_4N_5$	$B_3B_2B_1N_5N_4$

Sabemos que el número total de *clasificaciones individuales* es $P_5 = 5! = 120$.

El número de *clasificaciones por equipos*, 10, multiplicado por $P_3 \cdot P_2 = 12$ *clasificaciones individuales*, que corresponden a la misma *clasificación por equipos*, da 120 *clasificaciones individuales*. Es decir:

$$PR_5^{3,2} \cdot P_3 \cdot P_2 = P_5$$

por tanto:

$$PR_5^{3,2} = \frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

Análogamente si fueran nueve corredores, cuatro del equipo blanco, tres del equipo naranja y dos del equipo azul, el número de *clasificaciones por equipo* sería:

$$PR_9^{4,3,2} = \frac{P_9}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

ya que por cada *clasificación por equipos*, por ejemplo, *BBBBNNNAA*, se obtienen $P_4 \cdot P_3 \cdot P_2$ *clasificaciones individuales*.

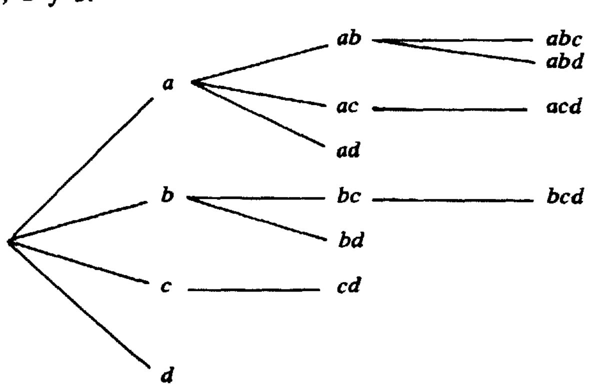
En general el número de permutaciones con repetición de n elementos de los que h_1 son iguales a a_1, h_2 son iguales a $a_2, \ldots$, h_k son iguales a a_k y siendo $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_k = n$ viene dado por:

$$\boxed{PR_n^{h_1, h_2, \ldots, h_k} = \frac{n!}{h_1! \cdot h_2! \ldots h_k!}}$$

Combinaciones ordinarias

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ las combinaciones ordinarias de orden k formadas a partir de los n elementos de A son los subconjuntos de A de cardinal k, esto es, subconjuntos de A que tengan k elementos.

Así, si $A = \{a, b, c. d\}$ vamos a formar las combinaciones de orden *1*, 2 y *3*:



Para formar las combinaciones de orden *2*, a partir de las de orden *1*, se escribe a la derecha de cada uno de los elementos de A todos los que le siguen en el conjunto A, con el objeto de contar cada subconjunto sólo una vez.

Como ocurría en el caso de las permutaciones con repetición, el diagrama de árbol no nos sirve para contar el número de combinaciones.

Escribiremos $C_{n,k}$ para indicar el número de combinaciones de orden k formadas con los n elementos de un conjunto A.

Teniendo en cuenta que por cada combinación de orden *3* se obtienen *3!* variaciones ordinarias. Ejemplo:

$$\{a, b, c\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{array} \right. \quad P_3 = 3! \text{ variaciones}$$

el número de combinaciones ordinarias de orden *3* multiplicadas por el número de permutaciones de los tres elementos da el número de variaciones ordinarias de orden *3*, es decir:

$$C_{n,3} \cdot P_3 = V_{n,3}$$

de donde:

$$C_{n,3} = \frac{V_{n,3}}{P_3} = \frac{\frac{n!}{(n-3)!}}{3!} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!}$$

Del mismo modo:

$$C_{n,k} \cdot P_k = V_{n,k}$$

y por tanto:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Se suele escribir:

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{siendo } 0 \leq k \leq n \ , \ k \in N}$$

Observa que sólo existen combinaciones ordinarias de orden k, siendo $k \leq n$.

Combinaciones de repetición

Empezaremos con nuestro ejemplo:

¿De cuántas fichas consta el juego del dominó?

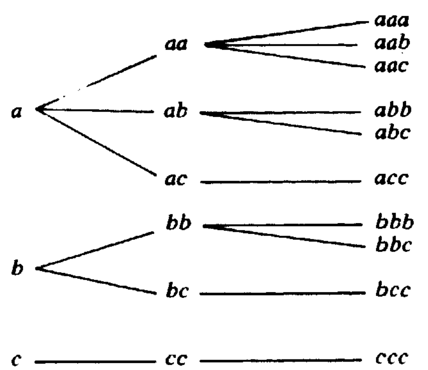
Convenimos en que *0* representa blanca, *1* representa un punto, *2* representa dos puntos, etc.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y las fichas de dominó son:

0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6.

Para formar las combinaciones de orden *2* se escriben a la derecha de cada elemento de *A*, este elemento y los que le siguen en el conjunto *A*. Para formar las de orden *3* se escribe a la derecha de cada una de las de orden *2* el último elemento de esa combinación de segundo orden y todos los que le siguen en el conjunto *A*, y así sucesivamente.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ vamos a formar las combinaciones con repetición de orden *1*, *2* y *3*:



De nuevo no nos sirve el diagrama de árbol para contar el número de combinaciones con repetición.

El número de combinaciones con repetición de orden *k* formadas con los *n* elementos del conjunto *A* lo indicaremos así: $CR_{n,k}$.

Una forma sencilla de contar el número de combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ podría ser la siguiente.

Convenimos en sustituir cada elemento repetido por x_1 o por x_2, según que el elemento repetido sea el primero o el segundo, cuando éstos están colocados en orden alfabético si son letras, o en el orden natural si son cifras.

Así, las combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ las sustituimos por:

$aaa \longrightarrow ax_1x_2$	$acc \longrightarrow acx_2$
$aab \longrightarrow ax_1b$	$bbb \longrightarrow bx_1x_2$
$aac \longrightarrow ax_1c$	$bbc \longrightarrow bx_1c$
$abb \longrightarrow abx_2$	$bcc \longrightarrow bcx_2$
$abc \longrightarrow abc$	$ccc \longrightarrow cx_1x_2$

Así el número de combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ es igual al número de combinaciones ordinarias de orden *3* formadas con los elementos de $B = \{a, b, c, x_1, x_2\}$. Es decir:

$$CR_{3,3} = C_{3+2,3} = C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Observamos que el conjunto B está formado por los elementos de A y dos letras auxiliares x_1, x_2 en el caso de las combinaciones con repetición de orden *3*.

$$CR_{n,3} = C_{n+2,3}$$

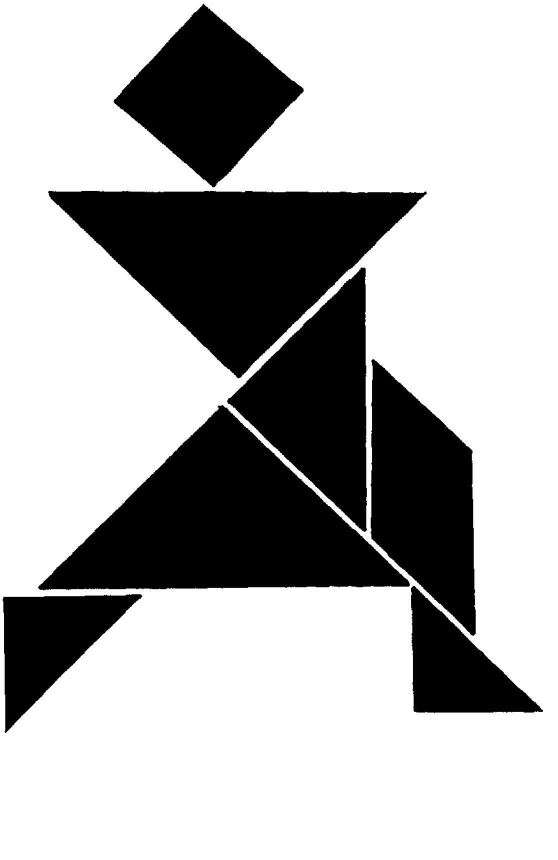
Para las combinaciones con repetición de orden k necesitaremos $(k-1)$ letras auxiliares distintas, y así:

$$\boxed{CR_{n,k} = C_{n+(k-1),k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

En el caso del dominó, el número de fichas es:

$$CR_{7,2} = C_{7+1,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28.$$

Experiencias



El surgimiento histórico del número irracional como instrumento didáctico

Carlos LÓPEZ FERNÁNDEZ *

1. Introducción

La historia de la Ciencia es una de las grandes olvidadas en los planes de estudio, no sólo del Bachillerato, sino de todos los niveles docentes.

Recientemente han aparecido algunas opiniones [1] sobre las ventajas que podría aportar su toma en consideración en los programas de B.U.P. La historia de la Ciencia, adecuadamente desarrollada como asignatura, aportaría a nuestros alumnos importantísimos aspectos formativos. Además de contribuir a que superaran esa falsa división entre Ciencias y Humanidades y facilitar la asimilación de ciertos conceptos científicos, podría ser utilizada como elemento desmitificador de las "verdades absolutas" de la Ciencia, colaborando así a una recepción antidogmática de los contenidos de ésta.

No es, sin embargo, el objetivo de este trabajo el abogar por la institucionalización de la historia de la Ciencia como asignatura de B. U. P. Es tal la sobrecarga de los programas en el actual plan de estudios, que sería prácticamente injustificable el introducir ninguna nueva disciplina por importante que ésta fuese en la formación del alumno. El objetivo es mucho más modesto. Se trata de mostrar que la historia de la Ciencia, aunque no sea impartida como tal, puede y debe ser utilizada en el desarrollo académico de las diversas disciplinas como un elemento pedagógico y formativo más.

Aceptando la conveniencia de utilizar un enfoque historicista para ciertas ideas científicas, hay una polémica establecida sobre la forma de llevarlo a cabo. A la hora de utilizar la historia de la Ciencia para la introducción de un concepto científico, ¿debe ser consciente el alumno de que se le está reproduciendo el surgimiento histórico de ese concepto o, por el contrario, debe ocultársele? En

---

* Profesor agregado de matemáticas en el I. B. "Alfonso X el Sabio" (Murcia).

[1] Ver Lázaro y García Amengual.

otros términos, la historia de la Ciencia, puesta a ser utilizada didácticamente, ¿debe ser manejada implícita o explícitamente? [2]. Muchas son las razones que podrían darse a favor de una u otra postura, pero tal vez lo más adecuado sea no renunciar a ninguna de ellas. La utilización de una u otra debe ir en función del objetivo concreto que se pretenda conseguir.

El presente trabajo ofrece una experiencia, llevada a cabo con alumnos de 1.º de B. U. P. del I. B. "Alfonso X el Sabio" (Murcia), sobre cómo utilizar en concreto la historia de la Matemática para la introducción de un concepto matemático: el número irracional. En la experiencia el enfoque historicista se maneja desde un punto de vista implícito pero, como se indicará al final, también es posible su utilización explícita.

2. Surgimiento del número irracional: problemas didácticos

La entrada en escena del número irracional es bastante similar en todos los textos de 1.º de B. U. P. Matices aparte, casi todos los autores siguen el siguiente esquema:

- Análisis de la biyección existente entre el conjunto Q de los números racionales y el conjunto de las expresiones decimales infinitas periódicas.
- Representación gráfica de los elementos de Q sobre una recta graduada mediante una unidad arbitrariamente elegida. La recta así completada, recta racional, es inmediatamente aplicada a la medida de longitudes desconocidas.
- Demostración, mediante reducción al absurdo, de la no pertenencia a Q de una expresión decimal infinita. Suele ser escogida la que se obtiene de calcular el radical $\sqrt{2}$.
- Esa expresión decimal irracional es a continuación representada mediante un punto, en la recta racional. Así se hace ver al alumno la insuficiencia de esta recta para la medida de longitudes.
- El proceso suele terminar con la definición genérica del conjunto R de los números reales y la representación gráfica, mediante intervalos encajados, de cualquiera de sus elementos en la hasta ahora llamada recta racional. Esta recta pasa a ser llamada real y es ofrecida al alumno como solución definitiva al problema de la medición y comparación de longitudes.

Este método, impecable desde el punto de vista matemático, ofrece algunos inconvenientes didáctico-metodológicos. Justo al contrario de como históricamente sucedió, el alumno quedará con la idea de que un buen día se demostró la irracionalidad de $\sqrt{2}$; en función de ello se construyó el conjunto R de los números reales (racionales e irracionales), aplicándose posteriormente éste a la medición y comparación de longitudes. Creerá seguramente que el número irracional, en lugar de ser una creación de nuestra mente para dar solución a un problema concreto, era algo que ya

[2] Simposio sobre la historia de la Ciencia en la Enseñanza (Valencia, mayo 1980). Ambas posturas fueron ampliamente debatidas en el coloquio que tuvo lugar tras la ponencia presentada por F. Hernán (Grupo Cero), sobre "Enseñanza e historia de las Matemáticas en el BUP".

estaba ahí antes de que el hombre pensara en él, algo que tenía poco menos que vida propia antes de su descubrimiento. Alguna mente humana lo encontró, lo desempolvó y lo presentó a los demás como solución al problema de la medida.

Este ahistoricismo puede ser, a la larga, negativo para el alumno, pues a base de repetírselo, tanto en ésta como en otras cuestiones matemáticas, le vamos inculcando, tema a tema y pregunta a pregunta, algo así como la existencia de un mundo de las Ideas Matemáticas (aquí Platón se apuntaría un buen tanto), al cual ciertas mentes privilegiadas tienen acceso, sólo de cuando en cuando, para contemplar esas ideas, recogerlas y traerlas hasta nosotros.

Junto a este inconveniente, el método expuesto presenta otro, que no por tópico es menos cierto. El esquema inicial de introducción del número irracional está preparado para ser enseñado de una forma muy concreta: explicación del profesor en la pizarra y toma de apuntes por parte del alumno. Se condena así a éste, una vez más, a ser un mero elemento pasivo-receptor de unos conocimientos previamente elaborados.

Los inconvenientes antes expuestos pueden obviarse en buena parte, al menos en este punto concreto del programa, si el método tradicional es reforzado (que no linealmente sustituido) con un planteamiento más historicista del problema. Si el número irracional surgió como una necesidad precisa para poder comparar longitudes y no al revés [3], ¿por qué no hacer que el alumno compare, con sus propias manos, longitudes y vea que para ello no le es suficiente con el número racional?, ¿por qué no dejarle planteado este problema el día antes de iniciar el tema primero de los dedicados a números reales, y hacerle ver unas clases más tarde que con los "nuevos" números que ha introducido en esos temas sí puede resolverlo? En otras palabras, ¿por qué no recurrir a plantearle al alumno el problema en los mismos términos en que los pitagóricos se toparon con él?

Es evidente que este enfoque histórico no es ninguna panacea didáctica, pero tiene sus ventajas. No evita el tener que reproducir el esquema tradicional, pero sí refuerza y rectifica a éste en unas direcciones muy concretas: acorta algo su exposición ulterior, hace que el alumno tome parte activa en el tema y, probablemente, le muestra con más claridad que ningún otro la necesidad de ampliar Q.

Esbozada ya la utilidad de plantear el problema del surgimiento de los números irracionales en unos términos historicistas, pasamos a ver cómo fue llevado esto a la práctica en una clase de 1.º B. U. P. [4]

[3] La prueba sobre la incomensurabilidad diagonal-lado fue aportada por la escuela pitagórica (s. V, a. d. c.), en tanto que el primer intento de elevar el cociente entre diagonal y lado a la categoría de número no se da hasta Eudoxo (siglo IV a. d. C.).

[4] En su aspecto teórico esta experiencia fue esbozada y debatida en la III Escuela de Verano de la Región Murciana, junto con otras similares dedicadas todas ellas a la aplicación didáctica de la historia de la Ciencia. El equipo de trabajo, dirigido por el profesor P. Marset (Universidad de Murcia), lo componían M. Valera, M. A. Iniesta y el firmante.

3. Desarrollo de la experiencia

La clase comenzó motivando al alumno sobre la utilidad práctica que la comparación de longitudes ha tenido en cualquier época histórica. Muchos son los ejemplos que se le pueden ofrecer en este sentido; citaremos sólo uno. Dibujando en la pizarra dos segmentos A y B, con $A > B$, puede suponerse que fueran las unidades de longitud de dos naciones antiguas distintas. Es evidente que para poder entenderse en ciertos intercambios comerciales les sería imprescindible el establecer la proporción que guardan entre sí las longitudes de ambos segmentos, es decir, tendríamos que comparar éstas.

En algunos casos la comparación será elemental, esto ocurrirá cuando A contenga un número exacto de veces a B. Si es n este número, la comparación la expresaríamos diciendo: la longitud A es a la longitud B como n es a 1.

Naturalmente, esto sólo sucederá en contadas ocasiones. Lo normal será que no se cumpla la condición expresada en el párrafo anterior. Entonces la cosa se complica y el encontrar la relación de comparación requiere métodos más generales. Abordémoslos.

Una vez dibujados en la pizarra dos segmentos cuyas longitudes no guardaban una relación de proporcionalidad evidente, se propuso a los alumnos el siguiente método para encontrarla (ver fig. 1).

Manejando como único instrumento para las traslaciones las esquinas de un folio en blanco, trasladar el segmento B sobre el A, determinando así el segmento sobrante, C, el cual se trasladará a la derecha de B. Tendremos entonces:

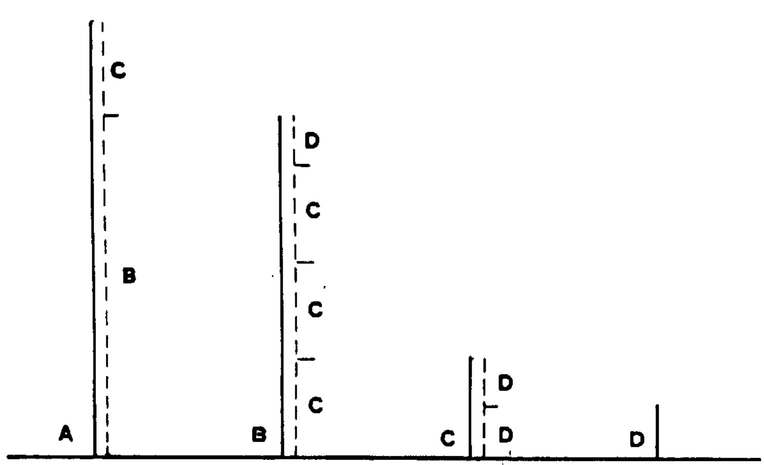


Figura 1

$$A = B + C \qquad [1]$$

A continuación se traslada el segmento *C* sobre el *B*. Como la longitud sobrante es claramente mayor que *C*, éste se traslada hacia arriba las veces necesarias hasta que la longitud sobrante no exceda la del segmento *C*. Según se desprende de la figura:

$$B = 3C + D \qquad [2]$$

Procediendo de forma análoga, se traslada *D* a la derecha de *C* y vuelve a llevarse ahora *D* sobre *C*, resultando en este caso una comparación exacta, ya que, según se desprende de la gráfica, *C* es doble que *D*. Entonces:

$$C = 2D \qquad [3]$$

Una vez obtenida una comparación exacta, es elemental el obtener la relación de proporcionalidad a partir de [1], [2] y [3].

Bastaría con hacer:

$$A = B + C \qquad [1]$$

$$B = 3C + D \qquad [2]$$

$$C = 2D \qquad [3]$$

de donde

$$B = 7D \quad y \quad A = 9D$$

Luego *A* es a *B* como 9 es a 7. Las longitudes ya están comparadas. Preguntados los alumnos sobre si este método sería válido para la comparación de dos longitudes cualesquiera, la respuesta fue ostentosamente afirmativa. Consideraron, al inquirirles el porqué, que debería ser una mera cuestión de paciencia el encontrar la relación a través de la comparación relativa de las longitudes sobrantes.

Al objeto de que comenzaran ya a tomar parte activa en la clase se les propuso que ellos mismos desarrollaran, en ese momento y según la técnica explicada, dos ejemplos prácticos de comparación de longitudes.

En el primer ejemplo se les entregó como único material una hoja fotocopiada con la gráfica que puede verse en la figura 2.

Naturalmente, *A* y *B* eran las longitudes a comparar. Las líneas auxiliares situadas a la derecha de ambos podían ser utilizadas para trasladar los segmentos sobrantes (*C*, *D*, etc.), evitando de esta forma el uso de escuadra y cartabón. Las traslaciones sucesivas las iban haciendo, al igual que en el ejemplo desarrollado en la pizarra, mediante la simple utilización de las esquinas de un folio en blanco.

Este primer ejemplo había sido previamente preparado de forma que ambas longitudes guardaban una relación sencilla, aunque no visible a simple vista. Como fácilmente podía determinarse con la técnica antes expuesta, la relación era: *A* es a *B* como 5 es a 3. Este resultado fue encontrado en apenas cinco minutos por la totalidad de la clase. La unanimidad fue absoluta.

Se pasó entonces al segundo ejemplo. En ese momento la confianza de los alumnos en la infalibilidad del método de comparaciones sucesivas era prácticamente total. Una nueva comparación (ver fig. 3) les fue propuesta.

Según podían comprobar antes de empezar, *A* correspondía a la longitud de la diagonal del cuadrado y *B* a la del lado. Comenzado el ejercicio, y conforme iban reproduciendo los pasos dados en ejemplos anteriores, el desconcierto comenzó a cundir. Mientras unos con sólo dos o

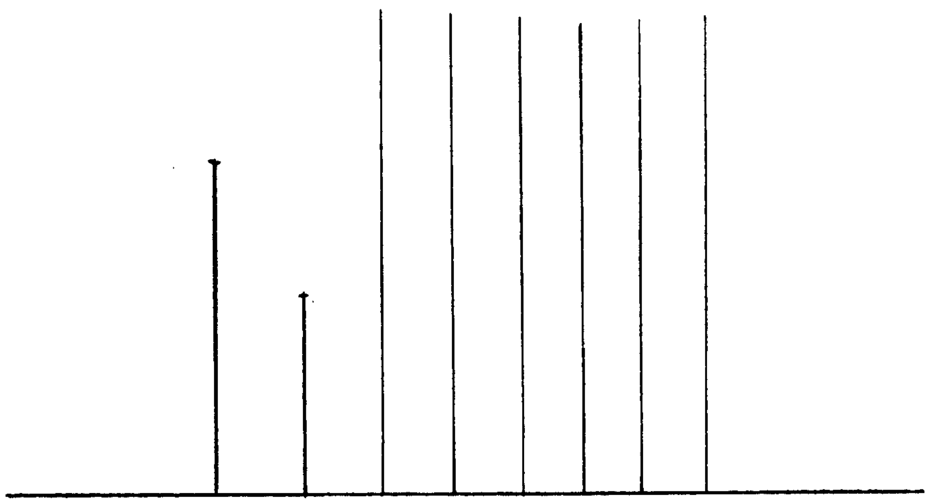


Figura 2

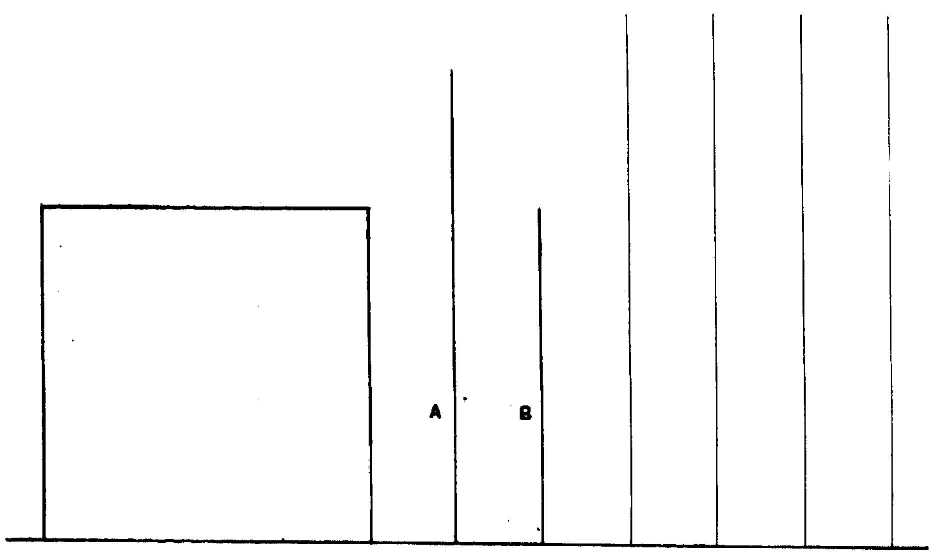


Figura 3

tres traslaciones ya habían llegado a un resultado, otros iban ya por la quinta o sexta y aún no conseguían llegar a la comparación exacta que les permitiera cortar el proceso. Finalmente, todos los alumnos, salvo seis, llegaron a un resultado concreto. Recogidas las hojas, se fueron anotando en la pizarra las proporciones de longitud obtenidas. Ante la extrañeza general observaron cómo donde antes se había dado unanimidad absoluta, ahora aparecían hasta un total de doce resultados distintos (totalmente dispares además; ej.: 13/5, 40/27, 8/7, 7/5, etc.), sobre un conjunto de veintisiete alumnos que llegaron a una solución concreta.

Aun con la evidencia del fracaso en el segundo ejemplo, fue recibida con incredulidad la afirmación del profesor de que esa enorme discrepancia de resultados era debida a que la relación de proporcionalidad entre las longitudes de la diagonal y el lado no era posible encontrarla mientras sólo manejaran números racionales. Si individualmente la habían creído encontrar era porque, debido a las limitaciones de sus sentidos, en un momento dado del proceso creían haber llegado a una comparación exacta que rigurosamente no lo era.

La demostración matemática sobre la imposibilidad de encontrar la relación de proporcionalidad diagonal-lado, expuesta a continuación en la pizarra, fue seguida con auténtica expectación. Como es sabido, dicha demostración puede ser efectuada de diversas maneras. En este caso, y dado que aún no se había hablado para nada de fracciones generatrices ni de expresiones decimales infinitas, se efectuó de la siguiente forma [5]:

— Conocimientos previos: Par $\times$ $\times$ par = par; impar $\times$ impar = = impar.
— Hipótesis de partida: Aceptemos que ha sido posible el comparar la diagonal y el lado, siendo p/q la relación de proporcionalidad obtenida, en la cual p y q son enteros primos entre sí.
— Demostración: si es cierta la hipótesis, podríamos considerar p y q como las longitudes de la diagonal y el lado, respectivamente. Como teorema de Pitágoras $p^2 = 2q^2$, valdría el siguiente razonamiento:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ es par} \Rightarrow p \cdot p \text{ es par} \Rightarrow p \text{ es par.}$$

Claro que, si p es par, entonces tendríamos que $p = 2r$, y

$$p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2 \Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2 \text{ es par} \Rightarrow q \cdot q \text{ es par} \Rightarrow q \text{ es par.}$$

Como dos números pares no pueden ser primos entre sí, hay que considerar falsa la hipótesis de partida y dar por demostrado el hecho de que no es posible encontrar la relación diagonal-lado.

El problema de encontrar esta relación quedaba entonces, al menos de momento, sin solución. Finalmente, se les anunció a los alumnos que, en los temas del programa a desarrollar en días sucesivos, serían introducidos unos nuevos números, llamados irracionales, los cuales nos permitirían dar solución cumplida al problema planteado.

[5] Ver Newman, R.
Naturalmente, al reproducir la demostración tal y como lo hacía la escuela pitagórica, se han utilizado los símbolos algebraicos modernos.

4. Conclusiones

Según se desprende del desarrollo de la experiencia, han sido cubiertos varios objetivos. A saber:

a) El alumno ha participado activamente en la clase.

b) El alumno adquiere conciencia de que hay un problema concreto, que puede tener una proyección práctica, imposible de solucionar en tanto sólo maneje el campo numérico *Q*.

c) El alumno recibirá a continuación una serie de clases sobre la construcción y posterior tratamiento teórico del conjunto *R*. Se le habrá hecho ir entonces de un problema concreto a una teoría construida inicialmente *ad hoc* para resolverlo. No obstante, podrán observar cómo dicha teoría alcanza posteriormente desarrollos autónomos, los cuales desbordan y arrinconan al problema inicial que la produjo. A su vez, observarán cómo más adelante pueden aplicar unos desarrollos a problemas prácticos. ¿No se le ha hecho recorrer, de esta forma, el proceso generador de la Matemática?

d) El alumno, sin saberlo, habrá reproducido la aparición del número irracional tal y como históricamente se produjo. Ha vivido la historia de la Matemática como un elemento más dentro del aprendizaje de ésta.

Dejando ya aparte las conclusiones concretas de esta experiencia, debe desprenderse de todo lo expuesto que la utilización de la historia de la Ciencia como elemento didáctico es un apoyo nada desdeñable.

¿Quiere esto decir que hemos de ir a una reelaboración de los programas de B. U. P., para poder abordar todos los conceptos matemáticos desde un punto de vista histórico? Tajantemente, no. Esto sería no sólo disparatadamente ambicioso, sino, en muchos casos, didácticamente desastroso. Es innegable que ciertos conceptos matemáticos, enfocados desde el punto de vista de su surgimiento histórico, no harían sino complicar e incluso distorsionar las ideas expuestas. Pero igual de innegable es que en ciertos puntos de los programas de B. U. P., el enfoque histórico sí puede ser extremadamente positivo.

La experiencia que hemos referido ha tomado a la historia como variable implícita. No obstante, y precisamente este mismo tema, puede ser desarrollado mediante enfoque histórico explícito. Terminaremos indicando que también así ha sido utilizado, concretamente como complemento a las explicaciones de la profesora de Filosofía (C. O. U.), en torno a la crisis del sistema filosófico pitagórico. Los alumnos, con las correcciones de planteamiento adecuadas, reprodujeron el problema de la comparación diagonal-lado como una de las claves de dicha crisis.

Bibliografía

1. Lázaro, I.: "Reflexiones históricas sobre la didáctica de la Ciencia", en *Revista de Bachillerato*, núm. 16, octubre-diciembre, 1980.
2. García Amengual, C.: "Algunas reflexiones sobre los objetivos de las Matemáticas", en *Revista de Bachillerato*, núm. 16, octubre-diciembre 1980.
3. Newman, R.: *Sigma, el mundo de la Matemática*. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1974.
4. Hofmann: *Historia de las Matemáticas*. Ed. Uteha, México, 1960.
5. Aleksandrov, A. D.; Kolmogorov, A. N., y Laurentiev, M. A.: *La Matemática: Su contenido, método y significado*. Ed. Alianza Universidad, Madrid, 1973.
6. Colerus, E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Ed. Doncel, Madrid, 1972.
7. *Actas del Simposium sobre la historia de las Ciencias y la Enseñanza*. Ed. Universidad de Valencia, Instituto de Ciencias de la Educación, Valencia.

Dificultades en la resolución de problemas

Análisis de una experiencia

M.ª Dolores DE PRADA VICENTE *

Es denominador común en la enseñanza de las matemáticas, el hecho de que los alumnos no saben resolver problemas y aun los más aventajados fracasan en algunos tipos de ellos cuya solución puede lograrse en el marco de los conocimientos que poseen.

¿A qué se debe esta dificultad? ¿Cómo poder subsanarla?

Cuando conozcamos por qué un determinado problema es difícil para nuestros alumnos, cuando averigüemos qué sucede en su actividad mental y por qué en algunos casos son incapaces de resolver los problemas por sí mismos, tendremos la posibilidad de elaborar una metodología que prevenga la aparición de defectos en el proceso y señale qué línea puede llevarles con más probabilidad al éxito en la resolución.

Esta afirmación, que parece idealista e inasequible, tendría sentido en el marco de una investigación didáctica seria sobre lo que sucede en la mente del alumno durante el proceso de resolución de problemas. Pero el proceso y la actividad mental son difíciles de conocer, evaluar e interpretar y arriesgado sacar conclusiones que permitan generalizar resultados. Consciente de estas dificultades y de sus limitaciones, me he aventurado, en la realización de una experiencia que pretende tímidamente y sin ambiciones generalizadoras, irnos introduciendo en el ámbito del discurso matemático de nuestros alumnos, para elaborar una metodología más adecuada a sus necesidades de aprendizaje en esta materia.

Análisis de la experiencia

La experiencia consistió en la selección de una serie de 20 problemas [1] y estudio de las soluciones dadas por 150 alumnos.

---

* Catedrática de matemáticas. Inspectora de Bachillerato del Estado.

[1] Los enunciados se presentan al final de este artículo.

Los alumnos pertenecían a cuatro grupos de 2.º de Bachillerato y uno de C. O. U. Todos ellos pertenecientes al mismo centro de Madrid. La base cultural de estos grupos era alta. Procedentes en su mayoría de clase social media alta. El nivel medio de conocimientos en Matemáticas era de 6.

El método utilizado fue el del experimento individual, pues de esta forma es más factible vigilar el proceso e intuir cuáles son los condicionantes de determinada actividad mental de los alumnos y captar los mecanismos ocultos que condicionan el resultado, y además, según Fox, "Si nos enteramos de cómo interaccionan determinados procesos en algunos individuos, es probable que lleguemos a saber más sobre esos procesos en abstracto y, a la larga, podremos aprender todo cuanto necesitemos sobre ello" [2].

Los problemas se seleccionaron de acuerdo con las hipótesis de nuestro trabajo y con el fin de detectar las dificultades en la actividad mental que condicionan el éxito en la búsqueda de la solución correcta.

La experiencia se realizó en cuatro fases:

1. Formulación de hipótesis y selección de los problemas.
2. Aplicación.
3. Evaluación y codificación.
4. Interpretación de resultados y conclusiones.

Algunos presupuestos previos

La formación en los alumnos de métodos generales de actividad mental constituye una importante misión de la docencia.

De los experimentos de Dunker y de la caracterización del raciocinio que nos ofrece V. N. Puchkin, se deduce, según afirma Landa, que: "Podrá enseñarse a un alumno la resolución de tantos problemas concretos como se quiera, pero si no se ha creado en él un método general para enfocarlos, unos medios generales para analizarlos, el alumno no aprenderá a resolver problemas por sí mismo. En semejantes circunstancias, la enseñanza no será progresiva, pues los conocimientos y hábitos creados, así como la experiencia pasada, no podrán ser utilizados con relación a un material nuevo" [3].

Según los psicólogos del aprendizaje (Ausubel, Bernstein, Landa), durante el proceso de resolución de los problemas se producen correlaciones entre los conocimientos de primer género que aporta el problema (datos) y las acciones que realiza el alumno con dichos datos. El conocimiento de los datos del problema actualiza las acciones de análisis de estos datos descubriendo relaciones que actualizan nuevos conocimientos: conocimientos de segundo género (axiomas, definiciones, teoremas). Estos conocimientos actualizan a su vez nuevas acciones y así hasta llegar a la solución.

---

[2] V. Fox: *El proceso de investigación en la Educación.* EUNSA, Pamplona.

[3] "La cibernética y algunos caminos para la racionalización de la enseñanza". Academia de Ciencias de la URSS, Moscú, 1962.

El paso de unos conocimientos a otros y la correlación entre conocimientos y acciones no siempre se llevará a cabo (aunque pueda realizarse espontáneamente) si no se produce:

1. La generalización de los conocimientos.
2. La generalización de las técnicas.
3. La actualización de los conocimientos y las técnicas.
4. El establecimiento de relaciones entre los conocimientos de primero y de segundo género.

Por generalización de conocimientos se entiende la transferencia de ideas y conceptos de unas situaciones a otras. Si no se da la transferencia no se produce el aprendizaje, no se elabora ese principio de orden superior no contenido en la experiencia pero que permite al alumno llegar a la solución y generalizar a toda una categoría de situaciones que plantean los problemas del mismo tipo.

La generalización de conocimientos supone en el alumno la habilidad para aplicar un conocimiento adquirido a todas las situaciones en las que es posible, aunque éstas estén enmascaradas. Por ejemplo: si se trata de conocimientos relativos a las propiedades de la proporcionalidad, éstos han de saber aplicarse en todas las situaciones en que se trabaje con magnitudes proporcionales, sea con números, segmentos u otros objetos.

Lo mismo que con los conocimientos, el alumno ha de saber hacer la transferencia de la utilización de una técnica (de asociación, operacional, etc.) de una situación a otra en la que esa técnica sea aplicable.

La actualización de los conocimientos y las técnicas supone la capacidad para traer a la mente en el momento de la resolución de un problema todos los conocimientos (axiomas, definiciones, propiedades, relaciones, etc.) que hacen referencia a los datos y todas las técnicas que pueden aplicarse a esos datos.

La experimentación ha demostrado que las propiedades que primero vienen a la mente suelen ser las que se utilizan con mayor frecuencia. Gracias a su aplicación reiterada las conexiones nerviosas que sirven de base a la actualización de estas propiedades tienen mayor solidez. De ahí que al resolver un problema, estas propiedades acuden en primer lugar, los alumnos se limitan a practicar un análisis unilateral, el facilitado por las conexiones más frecuentes, y con ello el problema resulta inalcanzable.

Muchos de los profesores afianzan este enfoque unilateral al seleccionar los problemas que proponen a sus alumnos. Un análisis de los cuadernos de éstos permite advertir que sus profesores plantean mayoritariamente ejercicios de aplicación y de automatización y lo mismo sucede con los libros de texto; y casi nunca se plantean problemas abiertos que no estén sujetos a un algoritmo para su resolución.

Hasta aquí se ha hecho un sucinto análisis de las dificultades en cuanto a la elaboración de las operaciones mentales necesarias para la resolución de un problema, sin embargo no son éstas las únicas causas del fracaso; los complejos factores que intervienen en el aprendizaje nos impiden analizarlos todos, y no podemos pasar por alto dos pilares que hay que afianzar: la motivación y la comprensión del problema.

La alegría, fruto de la resolución de un problema, del encuentro con la verdad, puede ser un elemento autosatisfactorio del esfuerzo realizado, pero no siempre funciona como elemento motivador que venza la pasividad ante un trabajo intelectual que se presenta como arduo. ¿Qué otros factores pueden motivar a querer resolver un problema? Seguramente hay muchos, y sin duda uno de ellos es su presentación: la forma en que esté redactado, el interés que suscite, la inteligibilidad que presente, la aplicabilidad que en él se vea, la curiosidad que despierte.

Polya, en su libro *Cómo resolver un problema,* afirma que es necesario: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución encontrada.

Comprender el problema es, primeramente, saber leer el problema y entender su significado; después, construir mentalmente el enunciado, reteniendo los datos en el campo de la conciencia, distiguiendo lo conocido y lo desconocido.

Algún lector puede pensar en la obviedad de muchas de estas afirmaciones. No se trata de ofrecer ningún descubrimiento sensacional sino de llamar la atención sobre datos fundamentales cuyo olvido está en la raíz de las dificultades que muchas veces encontramos para hacer frente a las necesidades concretas de nuestros alumnos.

Formulación de hipótesis y selección de los problemas

Partiendo de los presupuestos previos, de la experiencia personal, del examen de los cuadernos de trabajo de los alumnos y de los libros de texto, hemos llegado a la formulación de las siguientes hipótesis de trabajo:

H_1. El hecho de resolver muchos problemas no lleva espontáneamente al alumno a la elaboración de un método general de resolución de problemas.

H_2. Para llegar a la solución de un problema es necesaria, en primer término, una motivación, y uno de los factores que inciden en la motivación es la forma en que esté redactado el problema, el interés que suscite, la inteligibilidad que presente.

H_3. La variabilidad en la elección de tipo y forma del problema es un factor inherente a la construcción del método general de resolución de problemas.

H_4. Los defectos en la actividad mental que impiden que los alumnos acaben con éxito la resolución de un problema son:

- La no transferencia de ideas y conceptos de unas situaciones a otras.

— La no generalización de las técnicas.
— La no actualización de los conocimientos y de las técnicas.
— La falta de relaciones entre los conocimientos que aportan los datos y la actualización de otros conocimientos asociados a ellos.

De acuerdo con estas hipótesis se seleccionaron los problemas. Nueve de dichos problemas (núms. 1, 5, 6, 15, 16, 19, 20) eran variantes de problemas familiares al alumno y que éste había resuelto con otra redacción. Hipótesis 1.

Un mismo problema (núms. 7 y 8) se redactó de dos maneras distintas (una, mucho más atractiva que la otra, pero más larga y menos directa). Hipótesis 2.

Se seleccionaron siete problemas (núms. 5, 6, 8, 13, 14, 15, 19) que expresaban situaciones reales, y seis de investigación abierta. Estos son los que no contienen en su formulación la estrategia para resolverlos y por ello propician procesos de razonamiento divergente (núms. 8, 9, 10, 12, 14, 17).

Se propusieron problemas de cuatro categorías distintas: de reconocimiento, de aplicación, de investigación abierta y de situaciones reales. Hipótesis 3.

Se le pidió al alumno que en todos los problemas contestara a una serie de preguntas para seguir su proceso mental, que describiera en lo posible este proceso con sus explicaciones y en caso de no poder continuar la resolución explicara por qué. Hipótesis 4.

Aplicación

Se presentaron los problemas en varias sesiones y se les dio la posibilidad de elección entre los problemas que se propusieron en cada sesión, por ello no todos hicieron todos los problemas. En cuanto a los de investigación abierta se les permitió que los resolvieran utilizando todo tipo de apuntes, libros y material.

Salvo los problemas 2 y 4, por su especificidad, los restantes se propusieron en la misma redacción a los alumnos de 2.º y de C. O. U.

Se plantearon una serie de preguntas que todos los alumnos debían contestar a fin de poder detectar en lo posible en qué fase del proceso se había interrumpido la actividad de resolución. Las preguntas fueron las siguientes:

1. ¿Qué es lo que el problema pregunta?
2. ¿Qué se debe contestar?
3. ¿Qué relaciones entre los datos pueden ayudarte a encontrar la solución?
4. ¿Qué otros conocimientos (definiciones, propiedades, relaciones) o técnicas necesitas?
5. ¿Qué operaciones o fórmulas debes emplear?
6. Haz un gráfico o esquema del problema.

7. Calcula la solución.
8. Explica o enjuicia la solución encontrada.
9. ¿Para qué puede servirte haber resuelto este problema?

Evaluación y codificación

Se establecen tres categorías —bien, resuelto en parte, mal—, adjudicando porcentajes a cada una de ellas.

El aspecto cualitativo de la evaluación se lleva a cabo recogiendo las respuestas a las preguntas escritas y orales de los alumnos, y las observaciones del evaluador a partir de los fallos detectados en la resolución. Esto es lo que ha permitido hacer la interpretación de los resultados.

En la corrección se detectó ambigüedad en la redacción del problema número 3. Algunos alumnos entendieron el producto referido a los polinomios q(x) y r(x) y otros lo entendieron referido a cada uno de ellos. Por ello se optó por no calificar dicho problema.

CODIFICACIÓN

Número	SEGUNDO							C. O. U.						
	Fr.				%			Fr.				%		
	B	*R*	*M*	*T*	*B*	*R*	*M*	*B*	*R*	*M*	*T*	*B*	*R*	*M*
1	23		49	72	32		68							
2									8	17	35		22	78
3	AMBIGUO													
4								1	10	24	35	3	8	69
5	2	15	55	72	3	20	76							
6										35	35			100
7		8	28	36		22	78		5	30	35		14	86
8	8	11	78	97	8	11	80	10		21	31	32		67
9			38	38			100			35	35			100
10		30	7	37		81	9							
11								1	20	14	35	2	57	31
12	4	15	50	69	6	22	72							
13	1	3	68	72	1	4	95							
14	21		27	48	43		57	17		13	30	56		44
15	24	12	15	51	47	23	29	14	7	17	38	36	18	44
16	11	22	39	72	15	30	54							
17		3	35	38		7	93							
18								7	8	12	27	25	29	44
19														
20		17	18	35		48	52							

Interpretación de los resultados

La base para la interpretación de los resultados han sido las puntualizaciones de los alumnos a su propio proceso, las contestaciones a las preguntas y las observaciones del evaluador ante los fallos detectados.

Presentamos algunas de las justificaciones de los fallos.

Problema núm. 1

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque $4/x$ es un número racional."

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es un polinomio porque es una sucesión de elementos de 0 en la que son nulos todos los términos a partir del grado 3.º"

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque es una división."

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque es la división de la incógnita por un número racional."

"5 no es polinomio porque es un monomio."

"5 no es polinomio, le falta la incógnita."

"5 no es polinomio por no tener indeterminada."

"5 no es polinomio porque los polinomios constan de una incógnita con un coeficiente."

Como se ve, no han actualizado los conocimientos y no ha habido transferencia de aprendizaje, puesto que la definición de polinomio la saben aplicar bien en unos casos y en otros mal. No han sabido captar el concepto, aunque sepan de memoria la definición.

Problema núm. 2

"Necesito saber que es a."

"Me desorienta ese a."

"No sé lo que significa el entorno $N_r(L)$ ni qué tienen que ver s ó $a-s < x < a$ con $f(x) \in N_r(L)$."

"L tiene que ser la mitad del número de elementos del conjunto imagen de la función f(x)."

"No sé lo que quiere decir N_r."

"No puedo hacerlo, pues no recuerdo el concepto de entorno ni lo que significa la letra *a* que aparece en el enunciado."

Hay una falta de identificación en el lenguaje. Tampoco ha habido transferencia, puesto que saben utilizar la δ, pero se desconciertan cuando en el mismo contexto se usa otro lenguaje. No ha habido generalización.

Problema núm. 4

"Necesito la ecuación de las asíntotas de una hipérbola."

"No me acuerdo qué es una discontinuidad asintótica."

"Esto debe ser por el cuento de la vieja."

Hay una falta de actualización de los conocimientos, no recuerdan la teoría y como es un ejercicio algorítmico no lo pueden resolver.

Problema núm. 5

No comprenden el problema.

En general no saben plantear las ecuaciones, les sobran incógnitas.

Dicen que les faltan datos.

Dicen que les hace falta saber cuánto es lo que la segunda se lleva más que la primera.

Un alumno lo plantea y llega a encontrar que $a + b = 100$ y se da cuenta que está mal planteado y no sigue.

Estos fallos indican que no saben hacer la traducción de un lenguaje a otro, les desorienta este lenguaje, quizá el que les proponemos en los problemas de ecuaciones es más directo.

Problema núm. 6

"No lo sé, porque no sé cómo construir un embudo a partir de un círculo con o sin sector."

Hallan mal el radio del cono en función de la longitud del círculo de hojalata.

Derivan la altura del cono sin darse cuenta que está en relación con lo que se ha cortado.

No conocen la fórmula del volumen del cono.

"No sé cómo debe ser que el volumen sea máximo ni cómo relacionarlo después con la superficie del cono."

En este caso, los fallos son debidos a deficiencias en los conocimientos y en las operaciones mentales (no saben relacionar el radio del cono con el círculo de hojalata, ni la altura con la sección que cortan).

Problema núm. 7

Algunos no saben hacer una demostración.

Otros saben que para hacer una demostración hay que probar dos implicaciones, pero lo hacen mal porque no prueban lo que tienen que probar.

Algunos saben escribirlo en lenguaje matemático, pero de ahí no pasan. La intuición les dice que los divisores se agrupan en parejas, menos cuando un divisor es cuadrado, que no tiene pareja, pero no saben probar esta conjetura.

"No sé seguir, pues no sé lo que significa que n sea cuadrado."

Problema núm. 8

No llegan a generalizar.

Hacen conjeturas falsas y no las prueban.

Mezclan el número de orden con el número de armarios abiertos.

No hacen esquema y se pierden en el proceso.

Sacan falsas deducciones de los datos concretos. Por ejemplo:

12 .... 3 abiertos
n .... x abiertos

Llegan a descubrir que en 12 quedan abiertos el 1, 4 y 9, pero no hacen conjeturas ni llegan a generalizar.

Problema núm. 9

"No he encontrado la fórmula".

Creen que debe aplicarse el teorema de Pitágoras.

Creen que no hay datos suficientes.

Olvidan que el problema dice "de medida entera" y consideran que hay infinitos.

Uno hace una conjetura, pero no la comprueba.

Creen que n puede medir infinitos centímetros.

No se acuerdan cómo se halla el término general de una progresión aritmética.

Fallan la actualización de los conocimientos, a ninguno se le ha ocurrido pensar en la relación "un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia".

También ha fallado la comprensión. No han sabido leer el problema.

Problema núm. 10

Han buscado casos particulares pero ninguno ha llegado a generalizar.

Problema núm. 11

"Como no tengo el tercer lado, y dos lados no definen ni el perímetro ni el área, no lo puedo hacer."

"$h = \text{sen}\,\alpha$, $b = \cos\alpha$, $S = b \cdot h/2$, pero no sé cómo hallar α."

"No sé dónde puedo encontrar el otro lado y la altura. Sólo puedo hallar el área en el caso de un triángulo rectángulo."

La solución queda condicionada por el ángulo α y parece lógico. A nadie se le ha ocurrido dar una fórmula indeterminada que les permita encontrar infinitas soluciones.

Problema núm. 12

Lo ponen en dos posiciones, pero no generalizan a todas las posiciones posibles.

Problema núm. 13

"Creo que faltan datos".

"No sé cómo utilizar los datos que tengo para resolver el problema".

No distinguen los datos de lo que se les quiere preguntar.

Se encuentran perdidos, no saben cómo enfocarlo.

Problema núm. 14

Los que no lo resuelven bien es que no se han atenido a las proporciones que marca el padre.

No se han fijado en las relaciones que establece el problema.

Bastantes han dividido la herencia en seis partes: tres para el hijo, dos para la madre y una para la hija.

Otros buscan la solución justa sin atenerse a las proporciones.

Problema núm. 15

Suponen que se mueren la mitad de las gallinas, es decir, 15 gallinas y media.

Suponen que el número de semanas es igual al número de gallinas.

Consideran que no tienen datos suficientes.

Les da un número fraccionario de gallinas y no se inmutan.

Si la comida duró el doble es porque se consumió la mitad (no tienen en cuenta el número de gallinas que se van muriendo).

En general adolecen de falta de sistematización y defectos en el raciocinio.

Problema núm. 16

Consideran que faltan datos.

Lo dejan planteado con C y M (caballos y mulas).

Han encontrado tres ecuaciones con tres incógnitas: sacos del caballo, sacos del mulo y parte del total, que es un saco de cada animal.

Hay bastantes que sacan 5 y 7 porque quitan 1 en ambos.

En general no han sabido hacer la traducción de lenguajes.

Problema núm. 17

"No sé cómo comenzar."

"No entiendo el enunciado."

Uno ha probado y ha visto que a partir de 7 sale.

Otros hacen conjeturas falsas.

Algunos sacan la conclusión de que no es válido para los cuadrados perfectos.

Problema núm. 18

Consideran que el ortocentro es el centro de la circunferencia.

Confunden alturas con mediatrices y, por tanto, propiedades de las alturas con las de las mediatrices.

Eligen mal los ángulos que tienen que comparar y los triángulos, que tienen que ser iguales.

Confunden ortocentro con baricentro.

Consideran que los segmentos que pasan por el ortocentro son diámetros.

Problema núm. 20

Uno no sabe seguir porque no se acuerda de la fórmula.

Otro llega hasta $\left(\dfrac{36}{k-1}\right)\dfrac{2^{n-k+1}}{3^{k-1}} = \dfrac{36 \times 35 \times \ldots 2^{n-k+1}}{(k-1)\ (k-2) \ldots 3^{k}}$ y no sabe seguir porque no sabe qué hacer con tantos exponentes.

El término de mayor coeficiente es el término x.

La x tiene mayor coeficiente, ya que $2^{36} > 1/2^{36}$.

No sabe multiplicar potencias.

Resumiendo y sintetizando los fallos obtenidos se puede establecer la siguiente clasificación:

Fallos en las relaciones entre los conocimientos que aportan los datos y otros conocimientos asociados a ellos (62 %)

Núm. 6. No saben relacionar el radio del cono con el círculo de hojalata y por ello no saben qué hacer con el círculo.

Núm. 9. A ninguno se le ha ocurrido pensar en la relación "un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia".

Núm. 14. No se han fijado en las relaciones que establece el problema.

Fallos en la comprensión del texto y en la traducción de lenguajes (83 %)

Núm. 2. Hay una falta de identificación de los lenguajes simbólicos utilizados.

Núms. 5 y 9. No comprenden el texto y no saben hacer la traducción de lenguajes.

Núm. 7. No saben lo que quiere decir "probar".

Núm. 11. No se les ha ocurrido pensar en dar una fórmula del perímetro indeterminada.

Núm. 13. No distinguen los datos de las incógnitas.

Núm. 14. No se atienen a los datos, es decir, a las proporciones que establece el problema.

Núm. 15. Hacen suposiciones falsas sobre el enunciado del problema.

Núm. 16. No saben traducir el enunciado a una formulación matemática.

Núm. 17. No comprenden el enunciado.

Fallos en la generalización de los conocimientos (80 %)

Núm. 1. No ha habido transferencia y no se ha producido el aprendizaje del concepto de polinomio.

Núm. 2. No ha habido transferencia y no se ha producido el aprendizaje del concepto de límite.

Núm. 8. No llegan a generalizar.

Núm. 18. No se ha producido el aprendizaje de ortocentro, alturas y mediatrices.

Fallos en la generalización de las técnicas (73 %)

Núm. 8. No saben probar una conjetura.

Núm. 10. No saben generalizar a partir de casos particulares.

Núm. 12. No generalizan a todas las posibles construcciones, si no sólo a una o dos particulares.

Núms. 15 y 17. Hacen conjeturas falsas y no saben refutarlas.

Fallos en la actualización de los conocimientos y las técnicas

Núm. 4. No actualizan los conocimientos relativos a las asíntotas.

Núm. 6. No actualizan el volumen del cono.

Núm. 9. No actualizan todas las propiedades de los lados del triángulo.

Núm. 18. Actualizan unas propiedades de ortocentros, mediatrices y alturas, y otras, no.

Núm. 20. No actualizan los conocimientos del binomio de Newton.

Núm. 3. Sólo han traído a la mente una técnica, la de la regla de Ruffini.

Conclusiones

Dadas las características de la experiencia, en la cual no se ha utilizado grupo de control ni se han aislado variables de validez, no se puede hacer una generalización de los resultados, ni mucho menos buscar las causas, no obstante proponemos al profesorado algunas reflexiones suscitadas por estos resultados:

1. Los problemas familiares a los alumnos (los que éstos habían resuelto con otras variantes) núms. 1, 4, 5, 6, 15, 16, 19, 20 dan los siguientes porcentajes de éxito:

   Núm. 1, lo resuelven bien el 32 %.

   Núms. 4 y 5, lo resuelven bien el 3 %.

   Núm. 15, lo resuelven bien el 41,5 %.

   Núm. 16, lo resuelven bien el 15 %.

   Núms. 6 y 20, no lo hace bien nadie.

No parece que dichas categorías de problemas hayan sido generalizadas por los alumnos, por la cantidad de errores cometidos en su resolución y los tanteos caóticos que hemos advertido. En alguno de ellos, núm. 16, ha sido suficiente un cambio de lenguaje para que alumnos que resolvían problemas similares no hayan tenido éxito con éste.

Es curioso observar que el problema núm. 8 no era un problema familiar al alumno y, sin embargo, lo resuelve bien el 20 %, cosa que no sucede con el 4, 5, 6, 16 y 20, que son problemas que se han presentado más frecuentemente a estos alumnos.

2. Un mismo problema se expresó en dos formas diferentes (núms. 7 y 8). En su formulación más directa y más abstracta, donde se utilizaba la palabra "probar" no fue resuelto por ningún alumno. En su formulación más larga, pero más concreta y activa, fue resuelto bien por el 14 %, en parte bien por el 8 % y mal por el 72 %.

3. El éxito en la resolución de un problema depende de la corrección de las acciones y de las reflexiones del alumno durante el proceso y es importante para el profesor conocer este proceso a fin de ayudar al alumno en sus dificultades.

   Los defectos en la actividad mental observados están recogidos en el párrafo anterior. Estos resultados nos inducen a pensar que el defecto más frecuente en estos alumnos, que impide la resolución de problemas, es la incomprensión del texto y los fallos en la traducción de lenguajes. Problemas sencillos como el 4, 14, 15 y 16 no han podido ser resueltos debido a las dificultades en la traducción de lenguajes. Otros, como el 2, 5, 9, 7, 13 y 19, tienen textos que no comprenden la mayoría de los alumnos que no los han resuelto.

   Si ha habido una deficiente comprensión del problema y, por consiguiente, las acciones sobre los datos son insuficientes, no se producen las correlaciones entre los conocimientos de primero y de segundo género necesarias para llegar a la solución.

   Un recurso didáctico que se puede utilizar para ayudar a estos alumnos en la comprensión es el comentario matemático de textos (del cual hay una experiencia en marcha) [4], que incide en aspectos como: lectura comprensiva, interpretación, asociación, juicio crítico, síntesis, interdisciplinariedad y traducción de lenguajes.

4. Otro defecto en la actividad mental subrayado en esta experiencia es la no generalización de los conocimientos y de las técnicas, al no haberse realizado la transferencia de conceptos, ideas y técnicas de unas situaciones a otras.

   Para propiciar dicha generalización hay que utilizar en la enseñanza situaciones variadas, ejercicios de distintos tipos, problemas de una amplia gama de categorías, variantes en la forma, de un mismo problema.

[4] Ver *Apuntes de Educación.* Edit. Anaya.

5. Otros alumnos no han resuelto los problemas porque no trajeron a la mente todas las propiedades y los conocimientos necesarios para su resolución. Si no se presentan al alumno los conocimientos en sistemas organizados, es posible que no se produzca la actualización de todos ellos, sino que aparezcan caóticamente impidiendo la elección de aquel que conduzca a la solución.

6. Es muy difícil resolver un problema si se sigue un método a ciegas, los tanteos a ciegas son estériles, aunque son fructíferos los tanteos creadores y buscadores, ya que en éstos se sabe lo que se necesita obtener y se experimentan los posibles medios de obtener el objetivo.

Para resolver un problema se necesita saber qué es lo que hay que hacer y en qué orden. Se favorecerá el proceso proporcionando al alumno unas reglas o unas técnicas con cuya aplicación reiterada pueda ir formándose en su mente un método general de resolución.

Problemas propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

$$x^3 + 2x - 5 \ , \ \sqrt{x} + 4x^2 + 2 \ , \ 5 \ , \ \frac{x}{2} + \frac{3}{5} \ , \ \frac{4}{x} + 5x^2 + 2$$

2. Si para todo entorno $N_r(L)$ existe un número positivo s tal que si $a - s < y < a$, entonces $f(x) \in N_r(L)$.

   ¿Qué es L de la función f(x)?

3. Expresar como producto de polinomios

$$q(x) = 27 + 54x + 36x^2 + 8x^3$$
$$r(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

4. Escribir tres funciones con discontinuidad asintótica en los puntos $x_o = 3$, $x_o = -5$, $x_o = 0$.

5. Entre cinco personas se repartieron 100 medidas de trigo de tal suerte que la segunda recibió más que la primera, tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta.

   Además, las dos primeras obtuvieron la séptima parte de las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

6. Debemos construir la parte cónica de un embudo valiéndonos de un círculo de hojalata. Para ello se corta un sector en dicho círculo y con el resto se construye un cono. ¿Cuántos grados debe tener el arco del sector que se ha cortado para que el embudo alcance la mayor capacidad posible?

7. Sea d(n) el número de divisores positivos del entero n. Probar que d(n) es impar si y solamente si n es cuadrado.

8. Hay n armarios todos cerrados y n hombres. Supón que el primer hombre abre cada armario. El segundo hombre cierra cada segundo armario (contando de dos en dos). El tercer hombre cambia de estado (es decir, si estaba abierto lo cierra, y viceversa) cada tercer armario (contando de tres en tres). Si este procedimiento se continúa hasta que todos los hombres hayan pasado por todos los armarios. ¿Qué armarios quedarán abiertos?

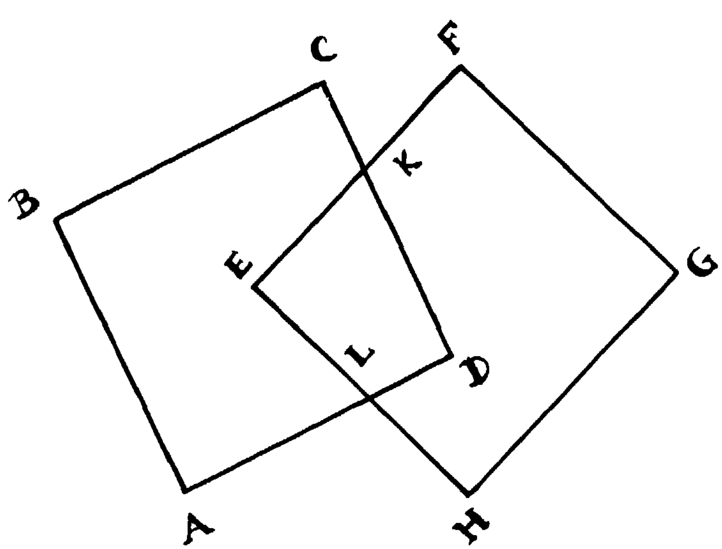
   Pista: Supón que $n = 12$ y averigua después de haber pasado los los 12 hombres qué armarios quedan abiertos. Intenta dar una regla general.

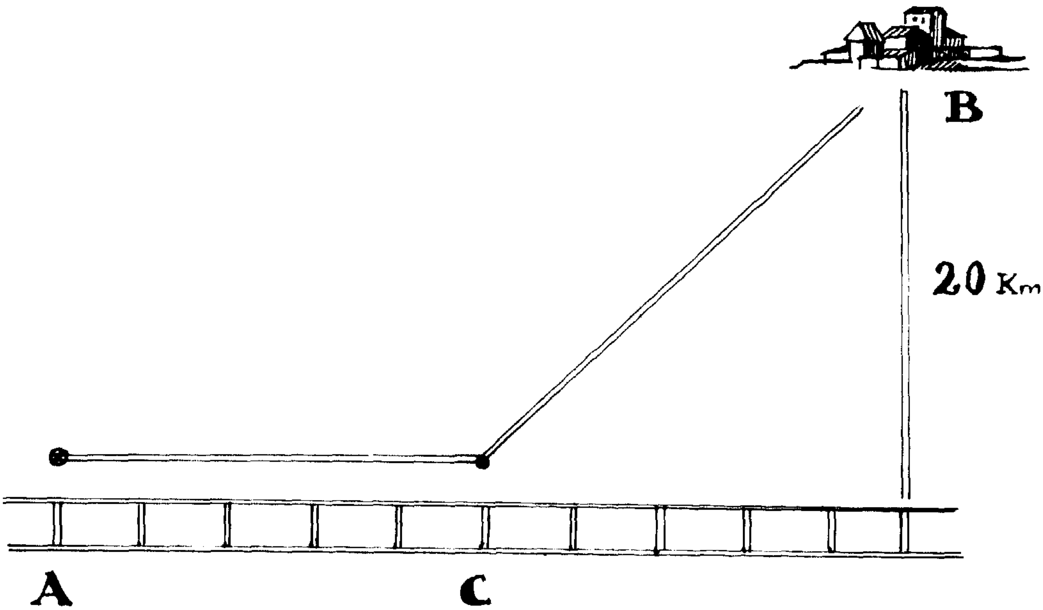
9. ¿Cuántos triángulos diferentes con lados de medida entera pueden ser dibujados teniendo el lado mayor longitud de 5 cm o de 6 cm? Intenta generalizar para n.

10. Escribir 525 como la suma de enteros consecutivos de todas las formas que sea posible.

11. Dos lados de un triángulo tienen longitudes de 4 cm y 6 cm. Hallar el perímetro y el área del triángulo.

12. ¿Qué valores son posibles para el área del cuadrilátero EKDL si ABCD y EFGH son cuadrados de lado 12 cm y E es el centro del cuadrado ABCD?





13. A 20 km del ferrocarril, por línea recta, está el lado B. ¿Dónde hay que construir el apeadero C para que en el viaje de A a B por la línea férrea AC y por la carretera CB se invierta el menor tiempo posible? La velocidad por ferrocarril es de 0,8 km/m y por carretera es de 0,2 km/minuto.

14. Un hombre que va a morir sabe que va a tener un heredero y hace el siguiente testamento:

    Deja un tercio de la herencia a la mujer y dos tercios al heredero si es niño.

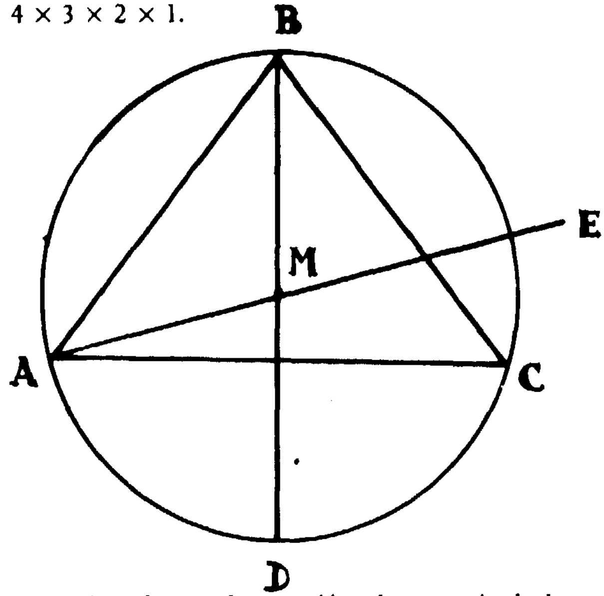
    Deja dos tercios a la mujer y un tercio al heredero si es niña. Nacen mellizos (niño y niña). ¿Cómo se repartirá la herencia?

15. Para 31 gallinas se ha preparado una cantidad de reservas de comida a base de 10 kg semanales para cada una. Esto se hacía en el supuesto de que el número de gallinas permaneciera invariable. Pero, debido a que cada semana disminuía en una el número de aves, la comida preparada duró doble tiempo del proyectado. ¿Qué cantidad de comida prepararon como reserva y para cuánto tiempo fue calculada?

16. Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesadas sacas. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga a lo que el mulo le dijo: ¿de qué te quejas? Si yo tomara un saco tuyo, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco tu carga se igualará a la mía. ¿Cuántas sacas llevaba cada uno?

17. ¿Para qué enteros positivos n, es n un factor del producto $(n-1)$ $(n-2)$ $(n-3) \times \ldots, 3 \times 2 \times 1$?

    Pista: 5 no es factor de $4 \times 3 \times 2 \times 1$, pero 6 sí lo es de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.



18. Se trazan dos alturas de un triángulo a partir de los vértices A y B y hasta su intersección con la circunferencia circunscrita en los puntos E y D. Demostrar que los segmentos de las rectas que van desde el ortocentro M hasta la circunferencia quedan divididos en dos partes iguales por los correspondientes lados del triángulo.

    Contestar a las siguientes preguntas:

    1. Escribir en lenguaje matemático qué es lo que hay que contestar.
    2. Buscar todas las propiedades, leyes y teoremas relacionados con lo que hay que demostrar.
    3. Decir si hay que trazar sobre la figura algún segmento, lado o figura suplementaria.

19. Una familia quiere comprar un piso de 6.500.000 pesetas. Pagan de entrada 1.300.000 pesetas. La Caja de Ahorros le concede un crédito hipotecario de 1.750.000 a pagar en diez años al 14 %. Tienen que pedir un crédito personal para pagar la diferencia al 18 %. ¿Por cuántos años tiene que suscribir este crédito si la familia sólo puede abonar una renta de 55.000 pesetas mensuales, en las cuales deben estar comprendidos los intereses y la amortización?

20. Dedúzcase el término que tiene mayor coeficiente en el desarrollo

$$\left(2x + \frac{y}{3}\right)^{36}$$

Los cálculos trigonométricos en cartografía

Una aplicación interdisciplinar Matemáticas-Ciencias Naturales

José A. ESQUIVEL GUERRERO *
Rafael YUS RAMOS **

Introducción

A menudo se ha dicho, y no sin fundamentos, que la Enseñanza Media, como otros niveles de enseñanza, es un campo de enfeudamientos, llamados familiarmente, por analogía, "reinos de Taifas", dada la gran diversidad, compartimentada de forma casi hermética, de los conocimientos y materias, lo que contribuye a fijar en nuestros alumnos una imagen pobre, cuando no irreal, del medio que le rodea y de la forma de llegar a conocerlo. Sin embargo, ya desde 1968, en la Conferencia de Berna (Bulgaria), aparece una nueva concepción globalizadora de la Ciencia, naciendo el concepto de Ciencia Integrada, como forma necesaria de enfocar la enseñanza de las Ciencias. Y más recientemente, en el marco conceptual de la Teoría de Sistemas, se ve cada vez más claramente la necesidad de enfoques integrados o sistémicos de todas las ramas del saber y, consecuentemente, en la forma de adquirir el mismo.

A la vista de estos planteamientos, va siendo cada vez más apremiante un cambio de enfoque en la enseñanza de las Ciencias en nuestro país, aunque somos conscientes de la enorme dificultad que ello conlleva, máxime cuando los protagonistas principales de estos cambios, los profesores, estamos educados desde nuestra más tierna infancia de una forma prematura e hipertrofiadamente especializada, amén de otras deficiencias que no entramos a analizar. Ciertamente, no olvidamos que paralelamente, se precisa de cambios cualitativos en la Administración y en la sociedad para llevar a término cualquier tentativa de cambio.

* Profesor agregado de matemáticas del I. B. "Reyes Católicos", de Vélez-Málaga.
** Profesor agregado de ciencias naturales del I. B. "Reyes Católicos", de Vélez-Málaga.

Creemos que estamos aún lejos de conseguir un enfoque completo de la Ciencia Integrada, aunque conocemos la existencia de ensayos y experiencias aisladas que están contribuyendo a "dinamitar" las sólidas barreras que existen entre las Ciencias.

Normalmente, las tentativas de conexión interdisciplinar suelen realizarse ante los currícula de los Seminarios implicados, en los que se buscan los puntos comunes. También, aunque más raramente, se podría empezar por un planteamiento integrador y, por tanto, global, pero podemos intuir las dificultades que podría traer actualmente. En nuestro caso, aunque en el hilo de estos planteamientos, este ensayo interdisciplinar nació de forma casi espontánea, como consecuencia de una lógica y necesaria coordinación entre dos Seminarios. Ello nos indica que, realmente, la conexión interdisciplinar no necesita forzarse y que, realmente, los alumnos han de ver que ante un problema determinado se precisan diversas herramientas, es decir, hemos de desmitificar la imagen del especialista a este nivel.

Sirva esta pequeña experiencia para plantear el problema, para pedir que se profundice en él, y al propio tiempo dar a conocer algunos trabajos sencillos que pueden aplicarse de forma creativa en nuestros centros.

Objetivos

Aunque implícitos en la precedente introducción, nuestros objetivos en esta experiencia pueden resumirse en:

1. Difuminar los límites entre dos asignaturas: Matemáticas y Ciencias Naturales, sin alterar la vigente estructuración académica.
2. Imprimir a las Matemáticas un enfoque más cercano a la realidad palpable del alumno.
3. Iniciar al alumno en la metodología científica, desde el planteamiento de un problema, toma concienzuda de datos y posterior análisis para la obtención de conclusiones.

La práctica nos ha demostrado que la consecución de estos tres objetivos, no sólo ha facilitado una nueva visión de la Ciencia en el alumno, sino que la didáctica de cada asignatura, considerada individualmente, ha sido reforzada de forma considerable, toda vez que ha permitido alcanzar objetivos que antes eran difíciles de abordar, como es la visión real de las representaciones cartográficas o bien el grado de aplicabilidad de ciertos conceptos matemáticos que ordinariamente se tratan de forma abstracta.

Experiencias

Se trataba de hacer un estudio topográfico y cartográfico de una parcela de terreno cercano al centro, donde los alumnos debían desarrollar diversos estudios de tipo ecológico y geológico, que se iniciaban en 1.º de B. U. P. y finalizaban en C. O. U., en orden creciente de complejidad metodológica. Lógicamente, la necesidad de cartografiar el marco de estos estudios exigió el uso de instrumentos y procedimientos de tipo matemático, concretamente, trigonométricos.

El material necesario es escaso y se menciona en cada caso. Sin embargo, es interesante tener en cuenta que, en contra de lo que se suele creer, la didáctica de las Ciencias no precisa de la utilización de aparatos muy sofisticados y de difícil acceso. Mas, al contrario, no sólo es contraproducente (el alumno se abruma fácilmente), sino que, en la medida de lo posible, deben ser los propios alumnos, con la ayuda de poco material, los que construyan de forma creativa los instrumentos, dándoles la oportunidad de diseñar y ajustar cada vez más la precisión de estos instrumentos. A este respecto damos a conocer un modelo de teodolito que sintetiza las diversas aportaciones de alumnos de 2.º de B. U. P. (Fig. 1). Aquí podríamos intentar otra conexión interdisciplinar con Diseño.

A) **Determinación de las curvas de nivel:** Se trata de medir los desniveles entre dos puntos consecutivos de un recorrido que se hace desde la parte más alta de un pequeño cerro. Se estudia en dos fases.

1. *Toma de datos:* que se verifica en 1.º de B. U. P., mediante un equipo rotatorio formado por 3-4 alumnos especializados en distintas tareas (Fig. 2). Cada grupo empieza a medir desde el punto más alto, siguiendo un recorrido determinado con la brújula, y realizando los siguientes pasos (Fig. 4):

   — Situar el teodolito en el punto x_i, que quedará señalado con la plomada. Conseguir la máxima horizontalidad de la platina horizontal y orientar el cero de la misma hacia el norte magnético, dado por la brújula.

   — Colocar una pértiga graduada a unos cinco pasos, dándonos el punto x_{i+1}. Alinear la línea vertical del visor con la pértiga y anotar el ángulo que forma el visor con el cero de la platina horizontal (α_i).

   — Situar la línea del visor en el cero de la platina vertical. Alinear la línea horizontal del visor con las divisiones de la pértiga y hacer que la mano del colaborador suba hasta señalar la línea divisada por el visor, dando la altura H_{i+1}. Se resta esta altura por la altura del teodolito (H_i), dándonos el desnivel $h_{i,i+1}$.

   — Mediante una cinta métrica larga bien tensa, se mide la distancia entre el punto i y la altura del desnivel $h_{i,i+1}$, dándonos la cifra $D_{i,i+1}$.

   Todos estos datos se van anotando en un cuadro de doble entrada en el que figuren todas las variables.

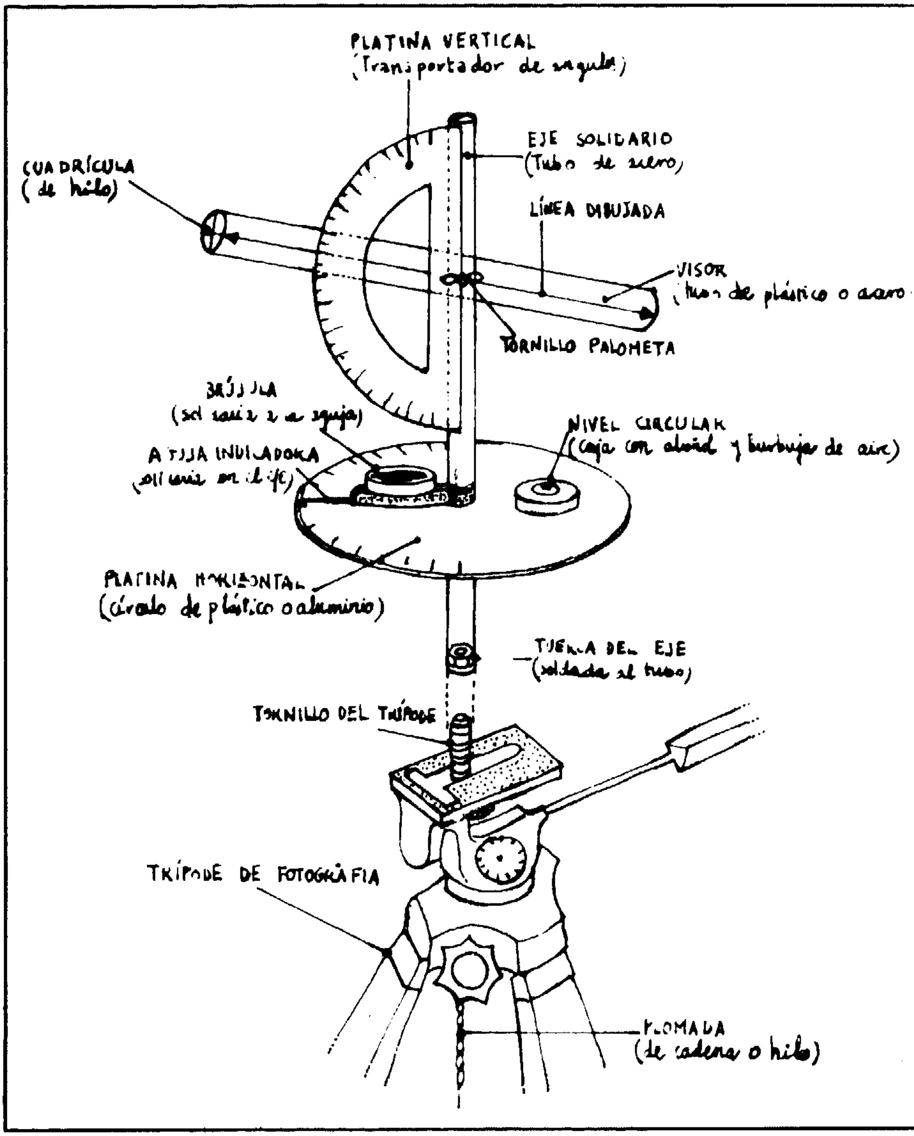


Figura 1

2. *Cálculo trigonométrico:* que se verifica en 3.º de B. U. P., y en el que se trata de determinar las coordenadas de los puntos $x_i (X_i - Y_i)$ tomando un eje de coordenadas cartesiano, con origen en el punto 1 (que hemos considerado como el más alto) y haciendo coincidir el eje OY con la dirección y sentido del norte magnético.

Por lo tanto, las coordenadas del punto 1 son, obviamente: $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$; las del punto 2 serían: $X_2 = D_{1,2} \operatorname{sen} \alpha_1$, y $Y_2 = D_{1,2} \cos \alpha_1$, se-

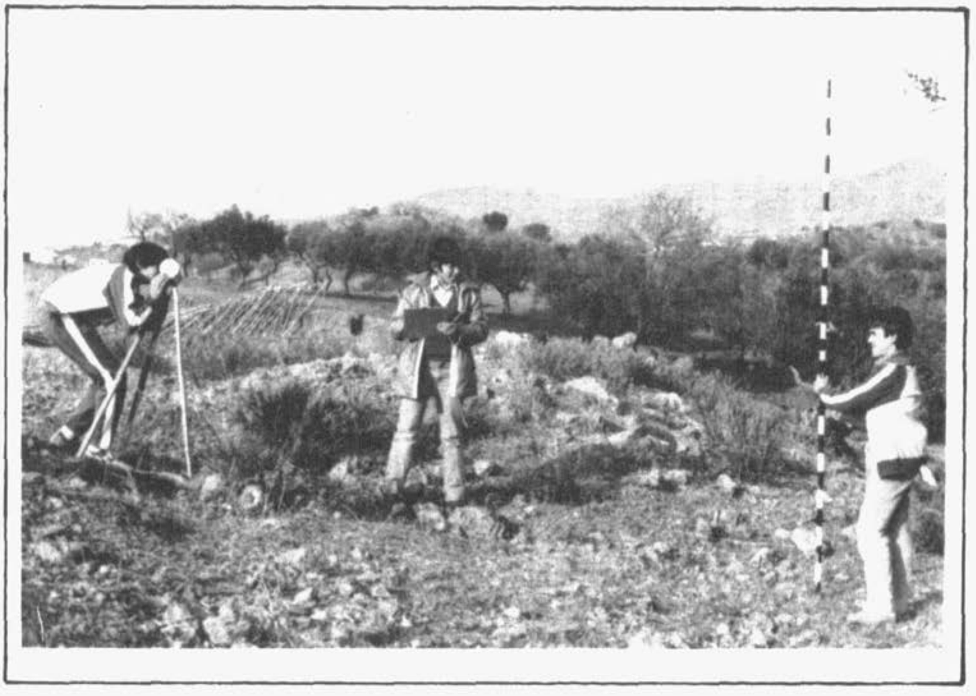


Figura 2

gún se aprecia en la Fig. 5. Por el mismo razonamiento, los siguientes puntos $Y_3 = Y_2 + Y'_3$, y como $Y_3' = D_{2,3} \cos \alpha_2$ nos queda que $Y_3 = Y_2 + D_{2,3} \cos \alpha_2$, y de igual modo se deduce que, como $X_3 = X_2 + X'_3$ y $X'_3 = D_{2,3} \cos \alpha_2$, el valor de $X_3 = X_2 + D_{2,3} \cos \alpha_2$.

De forma más general diremos, pues:

$$X_{i+1} = X_i + D_{i,i+1} \text{ sen } \alpha_i$$

$$Y_{i+1} = Y_i + D_{i,i+1} \cos \alpha_i$$

Los desniveles determinados se redondean según la equidistancia adoptada (por ejemplo, 1 metro) y estos datos se llevan a papel milimetrado. Las curvas de nivel se obtendrán, entonces, uniendo todos los puntos de igual altura. Para reajustar la curvatura de las líneas, conviene hacer el trazado de las mismas a la vista del terreno, resultando un gráfico como el de la Fig. 3.

Una modalidad interesante consiste en hacer un programa para la realización de estos cálculos en ordenador, con posibilidad de acoplarle algún programa que realice la representación gráfica. Naturalmente, esto se realizaría *a posteriori,* ya que de lo contrario no alcanzaríamos los objetivos propuestos.

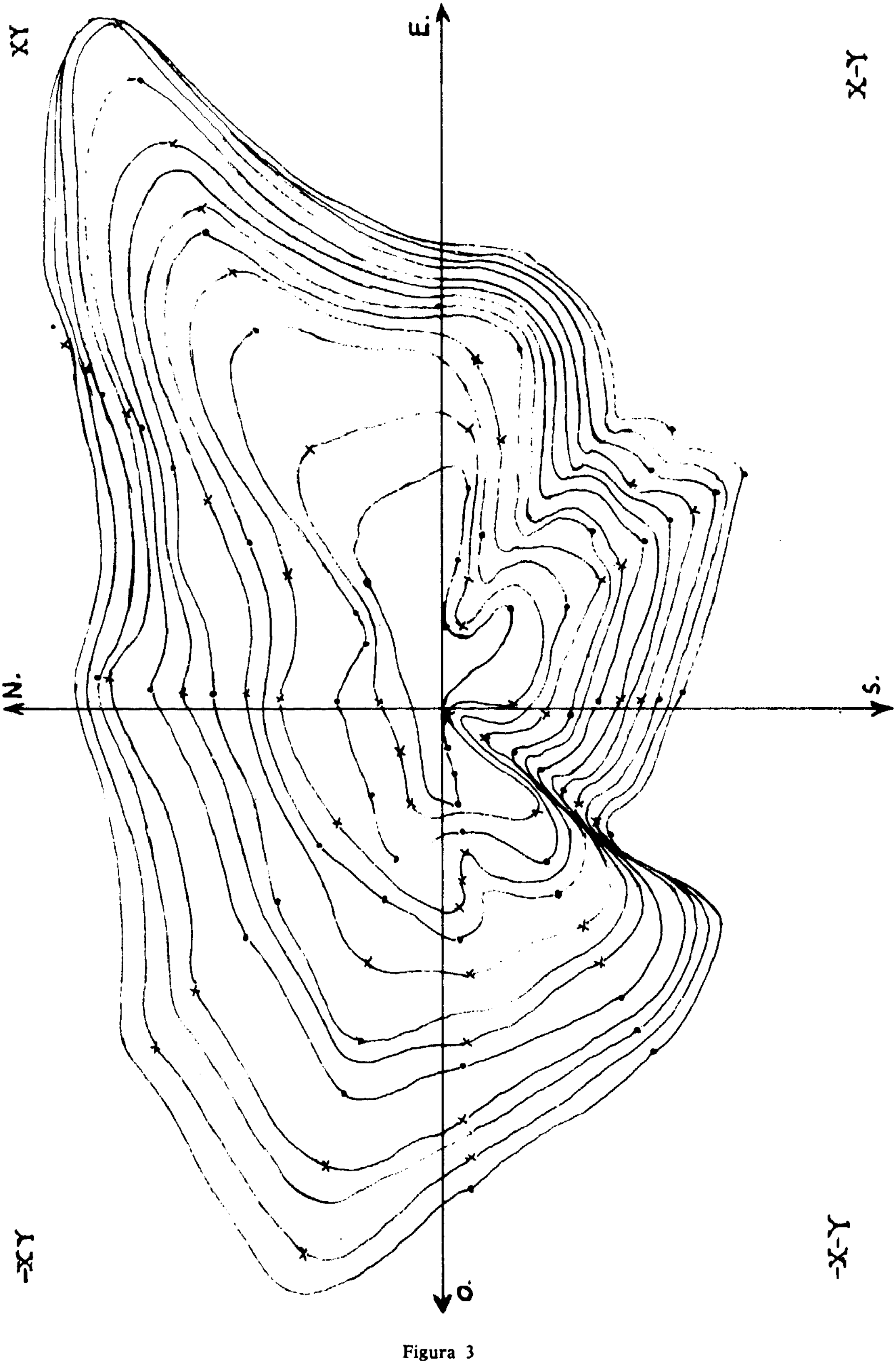


Figura 3

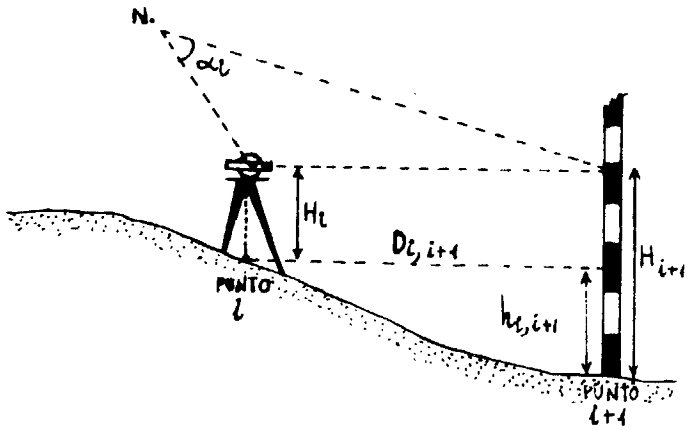


Figura 4

B) **Determinación del perfil de un transecto:** en el caso del estudio de las comunidades de un transecto lineal, en el que se sospeche variaciones apreciables según el nivel, es conveniente deducir el perfil del transecto, con el fin de cartografiar la estructura de la comunidad vegetal o animal. Para ello, procedemos siguiendo los pasos que se citan a continuación (Fig. 6):

— Se elige el punto más alto (A) y se instala el teodolito. Se nivela la platina horizontal.

— Un colaborador llevará una pértiga graduada a poca distancia (según el grado de precisión) y señala el punto B.

— Se alinea la línea horizontal del visor con las líneas divisorias de la pértiga y se pide al colaborador que deslice la mano hasta que señale la línea divisada por el visor. En este momento se determina la altura h_b que, restada la altura del teodolito (h_a). nos dará el desnivel D.

Estos desniveles se van llevando a papel milimetrado, de forma que las ordenadas sean los desniveles y abcisas las distancias.

C) **Determinación de alturas:** en ocasiones es preciso determinar la altura de un accidente geográfico. Hay dos casos posibles:

1. *La superficie de la base es horizontal* (Fig. 7), en cuyo caso:

— Mediante un teodolito, alineamos el visor con el punto más alto del objeto cuya altura tratamos de medir y anotamos el ángulo (α) que marca la platina vertical. A continuación damos un recorrido de 20-50 pasos en línea recta con el objetivo y, una vez en el punto B, anotamos el ángulo (β) que marca la platina vertical.

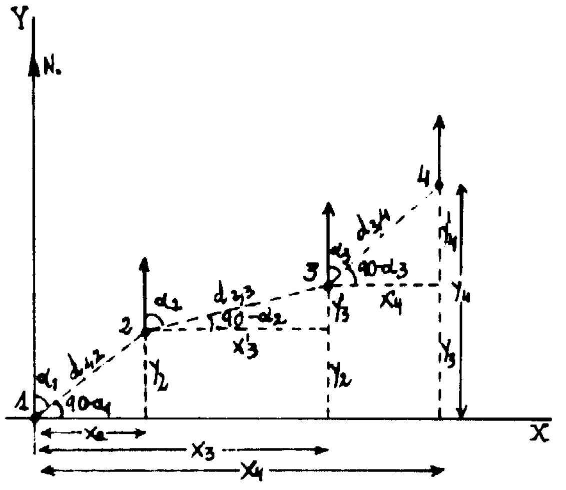


Figura 5

— La altura del objeto (H) sería: H = x + h, en donde x es la altura del visor o teodolito y h quedaría resuelta por un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{h}{AO} \\ \text{tg } \beta &= \frac{h}{BO} \end{aligned}\right\} \text{ y una vez resuelto: } H = x + \left(\frac{AB \text{ tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}\right)$$

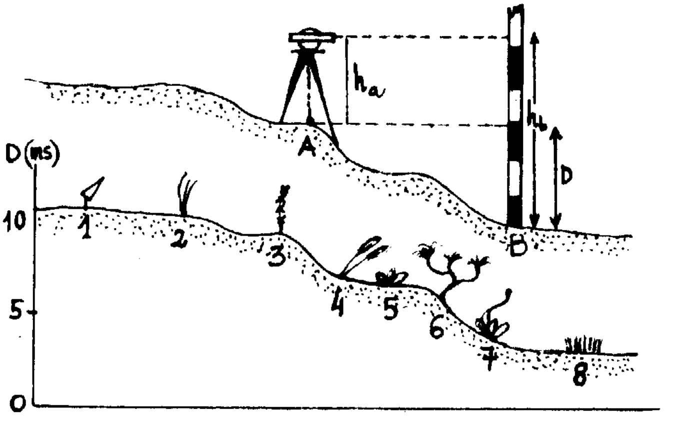


Figura 6

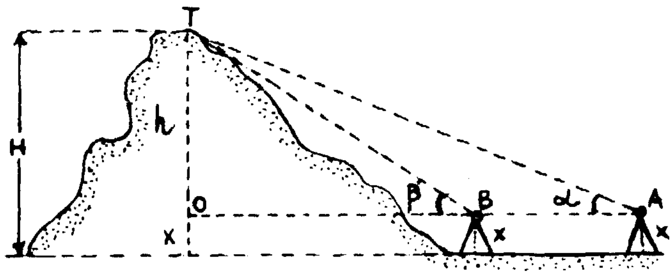


Figura 7

Cuando se trate de determinar la altura de un objeto cuya base vertical sea accesible (ejemplo: un árbol), el cálculo se ve simplificado alineando el visor de forma que éste forme 45° con la platina vertical. En este instante, la distancia entre el observador y el pie vertical del objeto es igual a la altura total, descontándole la altura del visor o teodolito (x).

2. *La superficie de la base no es horizontal* (Fig. 8) en cuyo caso:

— Medimos el ángulo α tomado desde un punto A. Avanzamos hasta un punto B y medimos el ángulo β, de igual modo que en el procedimiento anterior.

— Colocamos una pértiga en el punto A y medimos el desnivel ($\overline{MA} = \overline{BL}$) con respecto al punto B, mediante el teodolito. A continuación medimos la distancia AB mediante una cinta métrica.

— En el diángulo $\widehat{BLP}$ se tiene: $\overline{PL} = \dfrac{\overline{BL}}{\operatorname{tg}\beta}$ y en el triángulo $\widehat{BAL}$ se tiene: $\overline{AL} = \sqrt{\overline{BA}^2 - \overline{BL}^2}$, y por tanto: $\overline{PA} = \overline{AL} - \overline{PL}$.

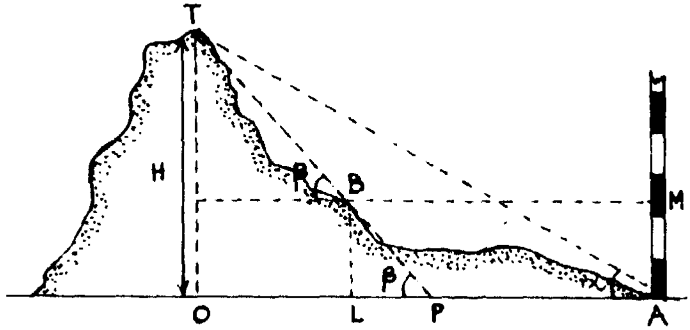


Figura 8

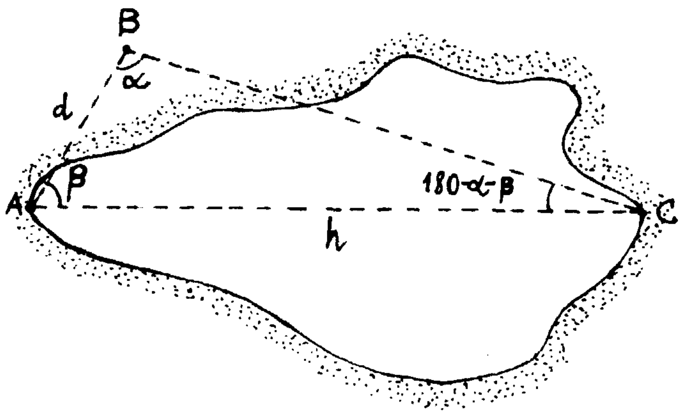


Figura 9

Con estos datos estamos en condiciones de aplicar el método anterior, de base horizontal.

D) **Determinación de anchuras:** encontramos diversos casos:

1. *Diámetro de una charca* (Fig. 9). En ocasiones, sobre todo para estudios de las comunidades de una charca o laguna, es conveniente cartografiar. Uno de los parámetros que hay que manejar es la anchura o diámetro, para lo cual procederemos así:

— Colocamos el teodolito en un punto A, una pértiga en un punto B y otra pértiga en un punto C. Determinamos el ángulo β mediante la platina horizontal.

— Desplazamos el teodolito al punto B, midiendo la distancia entre éste y el punto anterior, A, donde colocaremos ahora la pértiga de B. Ahora determinamos el ángulo α.

— Según el teorema de los senos: $\frac{\text{sen } \alpha}{h} = \frac{\text{sen } (180-\alpha-\beta)}{d}$, de donde deducimos el valor de $h = \frac{d \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } (180-\alpha-\beta)}$.

2. *Anchura de una vaguada* (Fig. 10): Para su determinación procedemos:

— Colocamos el teodolito en un punto A del borde de la vaguada, alineando con un punto fijo C del otro lado de la misma, de forma que el cero de la platina horizontal mire hacia C.

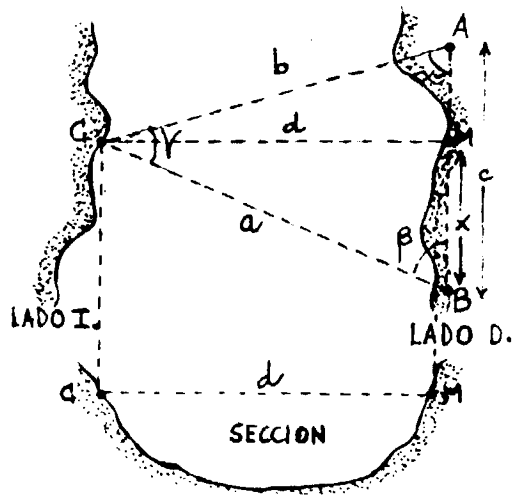


Figura 10

— Se elige otro punto B del mismo lado de A y se mide el ángulo α. Colocando el teodolito en B podremos medir el ángulo β. Medimos la distancia $\overline{AB}$.

— Como $\gamma = \pi - (\alpha - \beta)$ podremos aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}, \text{ de donde } a = \frac{c \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}.$$

— En el triángulo rectángulo $\widehat{BMC}$ se tiene: $\cos \beta = \frac{x}{a}$, de donde

$x = a \cdot \cos \beta$. De este modo, $d = x \cdot \text{tg } \beta = \sqrt{a^2 - c^2}$.

3. *Anchura de un río* (Fig. 11): Para su determinación procedemos con el mismo método y cálculo que en el caso anterior, ya que en realidad

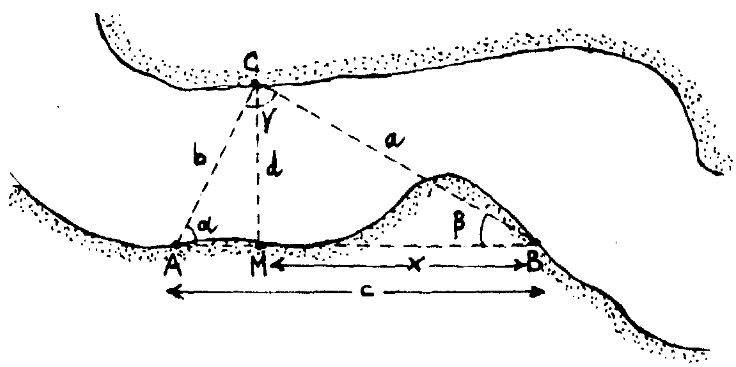


Figura 11

se trata de un caso similar: la medición de la distancia entre dos puntos y cuyo recorrido es difícil de hacer.

El lector podrá observar que existen multitud de posibilidades de aplicación de los conocimientos trigonométricos a casos reales, muchos de los cuales no podemos, por su extensión, reflejar aquí.

Bibliografía

Aberbuj, E.: *Para medir, aparatos y métodos.* Ed. Laia, Barcelona.

Casado Linarejos, J.: "Hacia una praxis de la educación interdisciplinar", en *Revista de Bachillerato,* núm. 1, págs. 4-12, 1977.

Casado Linarejos, J.: "La educación interdisciplinar en el área de las Ciencias", en *Revista de Bachillerato,* págs. 26-32, 1975.

Casado Linarejos, J.: "Proyectos de Ciencia integrada", en *Revista de Bachillerato,* páginas 63-79, núm. 16.

Esquivel Guerrero, J. A.: "Un enfoque distinto de la enseñanza de las Matemáticas en 3.° de B. U. P.", en *Actas de las Primeras Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas,* Cádiz, 1983 (inédita).

Puyol, R., y Estébanez, J.: *Análisis e interpretación del mapa topográfico.* Ed. Tebar Flores, Madrid, 1976.

Hernández, A. J.: *Experiencias de interdisciplinariedad: las Ciencias Naturales en Bachillerato.* Ed. Narcea, Madrid, 1978.

Investigaciones

Francisco HERNÁN *

No hace mucho, en un programa deportivo de la televisión, un redactor, instalado en una hermosa estación de montaña e impecablemente equipado para esquiar, anunciaba que en ese programa y en otros dos sucesivos iba a dar un breve curso de esquí a los espectadores que aún no tuviesen esa habilidad. Enseguida aparecieron en pantalla un par de monitores (ninguno de los cuales era él) que descendían parsimoniosamente por maravillosas laderas de Vermont (Canadá). El redactor, al que —se supone que para crear ambiente— no le faltaban ni las gafas ni los palos, explicaba los movimientos de los dos expertos.

Al cabo de diez minutos la primera lección estaba terminada. La locutora de enlace comentó: "Fácil, ¿no? El próximo sábado tendrán ustedes la segunda lección".

Yo, que aún no sé esquiar, solamente conseguí aprender que las manos deben pasarse por entre las cintas que hay en la parte superior de los bastones con objeto de no extraviarlos por el camino. Pero me perdí cuando se me decía que para girar a la izquierda hay que cargar todo el peso del cuerpo sobre la pierna derecha; ¿por qué no se hace otro tanto para montar en bicicleta o para conducir un coche? En cuanto a frenar, aunque las imágenes mostraban los esquíes en "fácil" convergencia, no pensé que fuese tan sencillo como los entendidos me estaban indicando.

¿Creía realmente el profesor que por el solo hecho de haber enseñado algo, los alumnos lo habíamos aprendido?

El aprendizaje del alumno

Muchos meses de lecturas, contradicciones, debates, titubeos; y muchas observaciones, decepciones y descubrimientos en mis propias clases, análogos a los que muchos compañeros hacen cada día, me habían hecho llegar a algu-

* Grupo Cero de Valencia.

nas conclusiones que no se correspondían con lo que acababa de ver. Por encima de todo, tengo el convencimiento de que es el alumno quien *hace* el aprendizaje construyendo sus propias estructuras conceptuales, dotando de significado a situaciones nuevas y complejas mediante *acciones* físicas y mentales y la rica interacción de ambas.

Hay capacidades que todos poseemos y que tenemos ya disponibles para la práctica. Y hay capacidades que están latentes y esperan ser activadas. El profesor es quien *hace* la enseñanza activando las capacidades adecuadas para la situación en estudio o, más en general, las capacidades que permitan tratar en el futuro las situaciones nuevas que puedan presentarse.

Es larga la lista de capacidades que el profesor puede activar durante el proceso del aprendizaje de las Matemáticas, y de motivos que puedan justificar su enseñanza. Desde actitudes personales, como adquirir confianza en sí mismo, capacidad de disfrutar pensando, confianza en que el pensamiento da resultado, capacidad para tomar decisiones, perseverando en la búsqueda de solución a un problema, autonomía intelectual, flexibilidad para tratar las situaciones...; pasando por capacidades particularmente importantes en Matemáticas, como clasificar, explorar, abstraer, conjeturar y modificar la conjetura en caso necesario, generalizar, distinguir entre conjetura y demostración, emplear la analogía como método sistemático de razonamiento, descodificar y codificar mensajes...; hasta desarrollar el sentido de apreciación de las Matemáticas, por su regularidad, por la manera a la vez sistemática e imaginativa con la que afrontan los problemas, por su belleza y su elegancia, por las múltiples relaciones con otras ciencias, con las formas artísticas, con la vida...

Sin embargo, creo que muchas de esas propuestas tienen un carácter más bien estático, como si hiciesen más referencia a lo que los profesores vemos o hemos visto que a lo que nuestros alumnos verán cuando, dentro de unos años, estén en situación de poner plenamente en práctica sus capacidades. Si consiguiésemos hacer una previsión acerca de cuáles serán las capacidades esenciales que se requerirán dentro de doce o quince años para vivir y sacar partido del mundo tal como será entonces y no tal como es ahora, seguramente de esa larga lista emergerían algunas que destacarían sobre las demás.

No pongo en duda que ser capaz de abstraer y generalizar, o de perseverar en la búsqueda de soluciones y tratarlas de un modo flexible, son elementos que ayudan a configurar una mente que esté preparada para la comprensión de los fenómenos matemáticos y la discusión de problemas en su sentido más amplio. Pero tengo la sensación de que, por paradójico que parezca, no son suficientemente abiertas. Hay algo cerrado impreso en ellas. Se puede dar un paso más y preguntarse: si hubiera que resumir en pocas palabras lo esencial de la actividad futura de nuestros alumnos, ¿dónde podría estar?

No encuentro mejor respuesta que ésta: en la capacidad de hacerse preguntas y tomar decisiones. Claro que eso no es lo único, pero ninguna otra capacidad me parece más importante que esa.

¿Y qué es hacerse preguntas y tomar decisiones ante una situación matemática, sino investigar?

La investigación escolar

No sé si los investigadores profesionales estarán completamente de acuerdo con esta idea. En cualquier caso, confío en que encuentren familiares algunos rasgos de lo que a continuación va a narrarse. Espero también que no consideren carente de sentido la afirmación principal contenida en este artículo, esto es, que los alumnos de Bachillerato *pueden* hacer investigaciones.

"Problema" e "investigación", los dos términos en torno a los cuales propongo aquí dar unas cuantas vueltas, son tanto en el lenguaje cotidiano como en el científico convenientemente vagos; del mismo modo que lo es el término "azul", que puede evocar distintas impresiones en distintos lectores, sin que por ello dejen de estar de acuerdo en que hay una amplia zona común a esas impresiones que justifica el uso de la misma palabra.

Para evitar, sin embargo, una excesiva vaguedad quizá convenga establecer una línea de demarcación entre ambas nociones. Aunque tal línea, como veremos, no debe carecer de flexibilidad.

Un problema es una situación que implica un objeto o propósito que hay que conseguir, hay obstáculos para alcanzar ese propósito y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo.

Un buen problema matemático es aquel que representa un desafío a las capacidades deseables en un matemático; no deja bloqueado de entrada a quien lo ha de resolver, es decir, la persona que lo acepta reconoce que el problema está a la altura de sus posibilidades; tiene interés por sí mismo, independientemente de que esté relacionado con otras disciplinas o con la vida cotidiana, o de que tenga una utilidad práctica inmediata. Por lo general, el camino marcado por un problema está claramente especificado.

Una investigación comporta casi todas las características de un problema, pero difiere en la última: lo esencial de una investigación está en que es el alumno quien elige su propia dirección; son las preguntas que el alumno se hace y las decisiones que ha de tomar con respecto a esas preguntas las que determinarán el camino que va a seguir.

Entra en el carácter de una investigación el que el profesor no limite ninguna iniciativa coherente, aunque no esté entre las que él había pensado de antemano.

En una investigación debe apreciarse más la larga atención dedicada a unas pocas ideas que la corta atención dedicada a muchas dispersas.

Una investigación es mucho más trabajo del alumno que trabajo del profesor (como casi todo en el aprendizaje de las Matemáticas).
El profesor debe animar a tomar nota de las reglas generales que el alumno vaya obteniendo; pero su tarea es más escuchar que hablar (como casi siempre en las clases).

Quien hace una investigación escribe acerca de las Matemáticas que ha estado haciendo. Escribir de Matemáticas es difícil; por eso hay que dejar tiempo para la redacción y presentación del trabajo.

Si se desea que los alumnos sean capaces de hacer investigaciones matemáticas, parece indispensable que los profesores también lo sean, y sepan elegir las situaciones propicias para que el alumno tome su propio camino y las decisiones ajustadas a su propósito.

El problema de las fichas amarillas y verdes

Hace algún tiempo me encontré [1] con un llamativo problema:

"Se tienen fichas amarillas a la izquierda de un espacio libre, a cuya derecha hay fichas verdes. Una cosa así:

...A A A   V V V...

Las fichas amarillas solamente pueden moverse hacia la derecha y las fichas verdes sólo hacia la izquierda.

Cada ficha puede o bien deslizarse un lugar, si hay hueco, o bien saltar sobre la inmediata de distinto color si el hueco es adyacente a esta última. Cada movimiento consiste en mover una sola ficha.

No es preciso mover alternativamente fichas de distinto color.

¿Cuál es el mínimo número de movimientos que hay que realizar para intercambiar los colores, es decir, para poner las verdes a la izquierda del hueco y las amarillas a la derecha?".

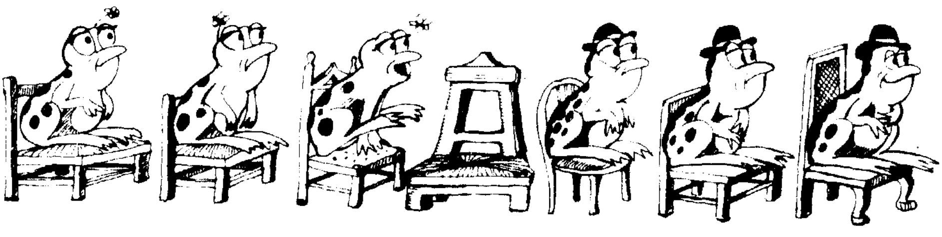
El problema me interesó, así que le dediqué toda mi atención. Lo propuse a los alumnos de tercer curso; les gustó. Muchos le dedicaron tanto o más tiempo que yo. Unos llegaron lejos, otros se quedaron a mitad de camino.

Tiempo después volví a verlo de nuevo en otra publicación [2]. Nada hay menos secreto ni menos privado que un atractivo problema de Matemáticas. Se extiende como una mancha de aceite y al final nadie sabe dónde tuvo su origen o quién lo propuso primero.

¡Pero qué distinto era esta vez! Su enunciado era menos rígido, más abierto, daba más opciones. La profesora que lo contaba comenzaba con la presentación de un juego: hay siete sillas, las tres primeras ocupadas por tres ranas macho y las tres últimas por tres ranas hembra, quedando en el centro una silla vacía.

[1] BELL, A. W.: *The Learning of General Mathematical Strategies*, University of Nottingham, 1976.

[2] ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS: *Teaching Styles*, A. T. M., Queen Street, Derby, 1984.



El objetivo: cambiar la posición relativa de los machos y las hembras, poner los machos a la derecha y las hembras a la izquierda.

La profesora no empezaba dando las reglas del juego, sino *preguntando* por ellas.

Las reglas del juego

Una vez acordadas las reglas y jugado el juego, preguntaba: "Y bien, ¿qué podemos hacer ahora? ¿Cómo podemos cambiar el juego sin cambiar las reglas?".

Aquello me pareció algo estupendo, así que decidí tomar la idea y me propuse hacerlo en dos clases distintas, una de 1.º y una de 2.º. También empecé preguntando: "¿Cuáles creéis que deberían ser las reglas del juego?".

Y poco a poco se fueron desgranando las siguientes:

1. "Saltar sobre una rana a la silla vacía".
2. "Una silla sólo puede estar ocupada por una rana".
3. "Mover alternativamente una rana macho y una hembra".
4. "Pueden permutar posiciones una rana macho y una hembra que estén al lado".
5. "Deslizarse a una silla vacía".
6. "Está permitido avanzar o retroceder".
7. "Cada vez se mueve una sola rana".

"¿Alguna más?".

"No, ya vale".

"Echemos un vistazo antes de ponernos a jugar". Las reglas 4 y 7 eran contradictorias, de modo que fue preciso elegir una de ellas. No hubo acuerdo en la elección. Propuse suprimir la 4. (Debo confesar que la iniciativa de esta regla 4 me pilló por sorpresa. Yo no había pensado en ella y como no podía prever las consecuencias de aceptar esta regla incliné la balanza hacia la regla 7 que me era más familiar. Tomé la decisión que me era más cómoda).

"Ya podéis empezar. ¿Cuántos movimientos necesitáis para cambiar las ranas de posición?".

Unos sacaron monedas y comenzaron a moverlas. Otros simbolizaron con M y H, respectivamente, e hicieron en su papel un listado de las consecutivas posiciones que iban obteniendo. Unos quince minutos más tarde comienza a oírse: 19, 21, 15...

"Ahora se pone más interesante —dije en voz alta—; una cosa es jugar y otra preguntarse por la forma más eficaz de jugar. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que se precisan?".

Los que tenían más de 15 lograron reducirlos a 15 evitando hacer movimientos hacia atrás, con lo que la regla 6 se reveló superflua. Mientras tanto, la regla 3 había mostrado igualmente su inadecuación.

El número mínimo es 15.

La pregunta "¿Qué puedes hacer ahora?" fue comprendida en seguida por algunos, que pasaron a 4 ranas macho y 4 ranas hembra; otros no supieron qué responder y tuve que abrirles calle. Los que habían manipulado monedas avanzaron con rapidez; los que hicieron un listado de las sucesivas posiciones del juego se metieron en un lío. Mientras los primeros encontraron los 24 movimientos que bastan, la mayoría de los segundos se pasaban.

"El número mínimo es efectivamente 24. ¿Cómo podemos seguir? ¿Cómo podemos cambiar el juego sin cambiar las reglas? Ensayad distintas posibilidades."

Ya estaba la investigación definitivamente en marcha.

"Pues poner más ranas a cada lado". "Muy bien; hazlo".

"Poner más ranas macho que hembra". "¿Ya tienes alguna regla general cuando hay el mismo número de ranas a cada lado?". "No, todavía no". "Entonces tal vez te convenga más generalizar primero el caso más fácil y ponerte luego con lo más difícil. Ya tienes dos problemas por resolver. Adelante".

"Poner dos sillas vacías". "Estupendo; cuando lo tengas resuelto pasas a 3, 4, n sillas vacías". (En el problema de las fichas amarillas y verdes se ponía como condición fija que hubiese un solo hueco en el centro. Ni yo, ni ninguno de los alumnos que lo hicieron en su momento, pensamos en la posibilidad de que hubiese más de un hueco. Nos habían propuesto el problema y lo habíamos hecho tal como nos lo habían propuesto).

Cada uno está ya a lo suyo y va a su propio ritmo.

(A muchas personas les gusta oír música mientras estudian; ese día me había llevado a clase una radio). Me llaman de vez en cuando para contarme cosas, para solventar alguna duda. Solamente entonces observo que la regla 1 ha sido comprendida de distintas formas. La mayoría han supuesto implícitamente que se ha de saltar sobre una rana del otro sexo; pero unos pocos han interpretado la regla como que se puede saltar sobre cualquier otra rana. ¿Por qué no había aparecido antes esta discrepancia? Pues porque cuando no hay más que una silla vacía, las dos interpretaciones conducen a los mismos resultados. La diferencia solamente se hace evidente cuando se supone que hay más de una silla vacía; cuando, para la desesperación de la mayoría, esto es, de los que han seguido la primera interpretación, el número de movimientos mínimo con la estrategia encontrada es mayor que el número de movimientos mínimo con la estrategia seguida con la segunda interpretación.

¡Ah! Pero estos últimos tienen nuevos problemas: no es igualmente fácil con números pares que con números impares. "Número impar de qué, ¿de ranas o de huecos?".

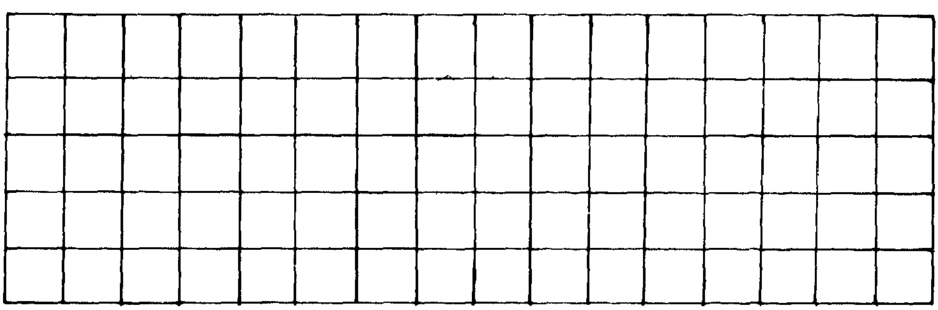
Y la historia sigue; pero creo que no es necesario llegar aquí hasta el final. Sobre todo teniendo en cuenta que la historia no tiene un guión que determine lo que ha de pasar, y otros profesores en otras clases pueden disfrutar de sus propias historias que les resultarán más vivas y más divertidas que la mera lectura de un relato ajeno.

Construcción de poliedros

Sí que quiero contar cómo aprendí de mis errores, que no fueron pocos, como se ha visto.

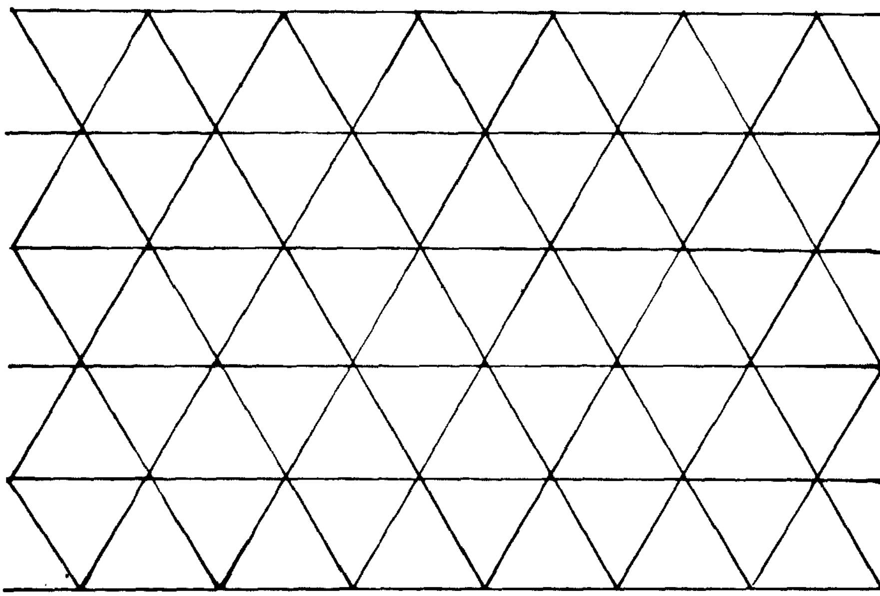
Mucha gente se lo pasa bien recortando y pegando. En Matemáticas abundan las ocasiones para recortar y pegar; una de las mejores es la construcción de poliedros de cartulina partiendo de sus desarrollos planos. ¡Pero incluso eso es aburrido cuando ya nos dan el desarrollo plano y sólo se nos deja la tarea manual de cortar y pegar! En Matemáticas, casi todo puede resultar aburrido cuando no se nos deja tomar iniciativas. Todo lo contrario ocurre cuando uno nota que lo que construye depende de sus propias ideas. Personas que no soportan estar veinte minutos ante un libro de texto son capaces de estar enfrascados durante una hora en una investigación. Como ésta que paso a referir.

Cuando de construir poliedros se trata, las tramas cuadradas disfrutan del



austero privilegio de la unicidad. El único poliedro convexo que puede construirse con todas sus caras cuadradas es el cubo. Cierto es que un cubo se puede construir partiendo de varios desarrollos planos distintos que consten de seis cuadrados en una sola pieza. Pero la variedad que contienen las tramas triangulares es mucho mayor.

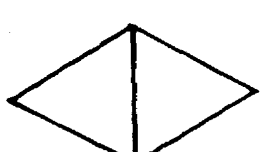
La verdad es que las tramas triangulares son una mina.



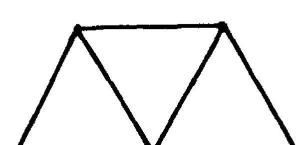
No sólo tres de los cinco poliedros regulares están formados por triángulos equiláteros, sino que hay multitud de poliedros no regulares cuyas caras son todas triángulos equiláteros iguales.

Es frecuente dar el nombre de *deltaedros* a los poliedros *convexos* cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. Tras la experiencia de las fichas y las ranas pensé en no cometer el error de limitar las iniciativas que cabe tomar en una trama triangular, limitaciones que derivarían de una situación cerrada, tal como "Construye todos los deltaedros" o "Alguien dice que solamente hay ocho deltaedros; trata de construirlos todos". Así que decidí proceder de manera menos ortodoxa y llamar deltaedro a todo poliedro que tenga como caras triángulos equiláteros iguales, y aceptar la noción vaga de poliedro que toma como carácter esencial el hecho de que "cierre", del mismo modo que una primera noción de polígono es una línea poligonal que "cierra".

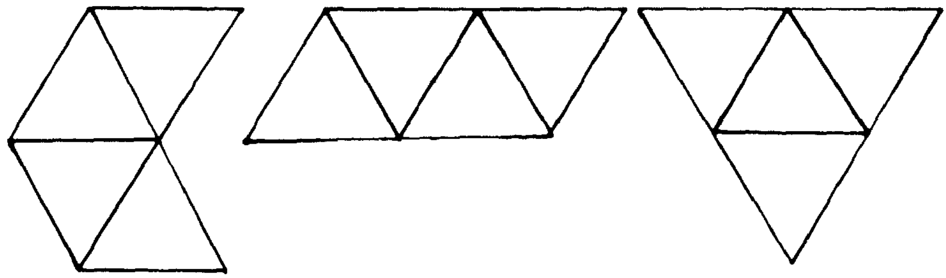
Empleamos para la trama triangular la siguiente terminología:



diamante-2



diamante-3

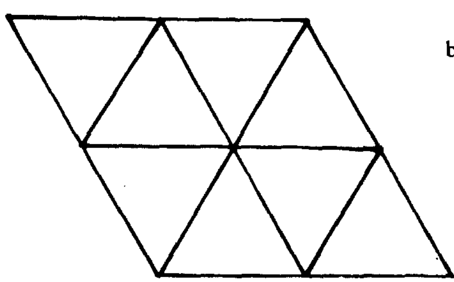


diamantes-4

y, en general, diamantes-n a las figuras *análogas* formadas por n triángulos equiláteros. Correlativamente, deltaedro-n es el poliedro que puede construirse a partir de un diamante-n.

La investigación, que ocupó una semana de clase, comenzó con algunas propuestas concretas:

— ¿Con qué diamantes-4 puedes construir deltaedros-4?
— ¿Hay más de un deltaedro-4 posible?
— Dibuja diamantes-5 y prueba a hacer algún deltaedro-5. (Es imposible, pero no era el momento adecuado para buscar una demostración de esa imposibilidad y seguimos adelante).
— Busca diamantes-6 con los que puedas hacer un deltaedro-6.
— Hay varios deltaedros-8. Construye todos los que puedas. ¿Cuál de ellos te parece más armonioso?



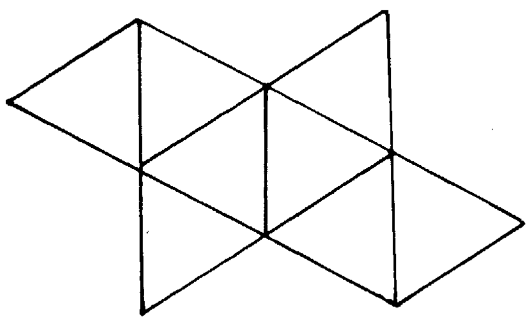
Este es un diamante-8. Piensa cómo habría que doblar para hacer un deltaedro-8.

Con estos comienzos y las observaciones y discusiones que los acompañaron, ya fue suficiente para echarse a volar. La siguiente propuesta ya fue general: "Investiga sobre deltaedros 10, 12, 14, 16, 18, 20... Si son bonitos, bien; si son "raros", mejor que mejor".

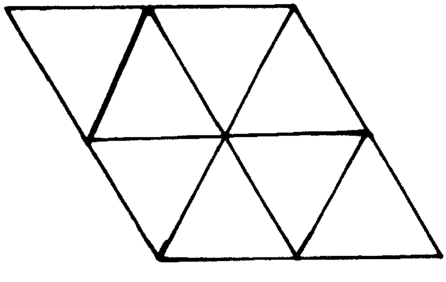
Pues bien, allí pasó de todo. Me hubiera resultado imposible prever la variedad de observaciones y descubrimientos que en cada lugar de la clase los alumnos iban haciendo. Estos son algunos de ellos:

— Alumnos que dudan inicialmente del deltaedro-6 porque "no dobla igual por todas partes".

  La observación tiene mucho sentido, porque previamente sólo habían construido el cubo y el tetraedro, que son poliedros regulares y "doblan" igual por todas partes; mientras que el deltaedro-6, no. Esta es una manera muy natural de distinguir entre poliedro regular y poliedro no regular.

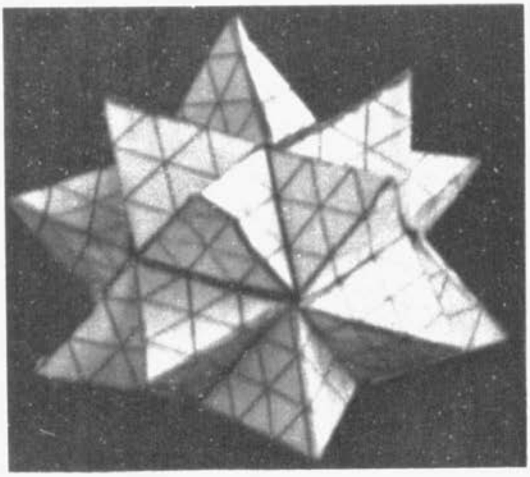
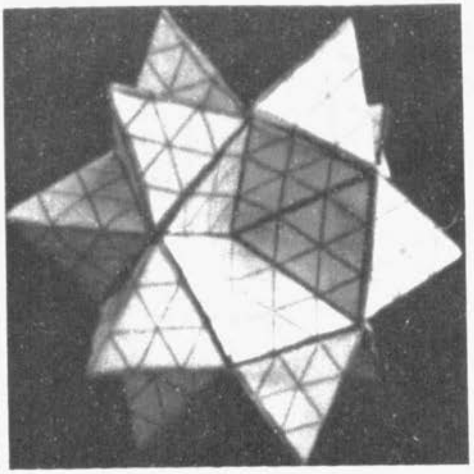


— Deltaedros-8. Un mismo desarrollo plano permite construir dos deltaedros-8 completamente distintos. Uno de ellos, el octaedro regular; otro, un deltaedro cóncavo que se obtiene uniendo el lado a con el a', el c con el c' y el d con el d'.

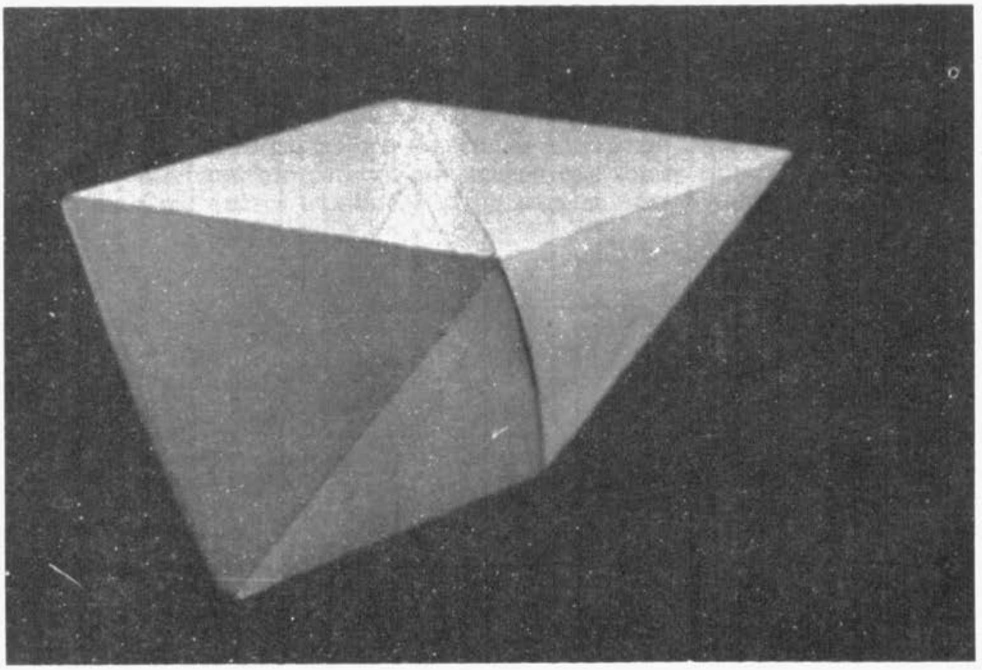


— Deltaedros "monstruos". Deltaedros flexibles, porque proceden de deltaedros unidos por una arista. Por ejemplo, dos tetraedros unidos por una arista; pero que se obtienen partiendo de un único desarrollo plano.

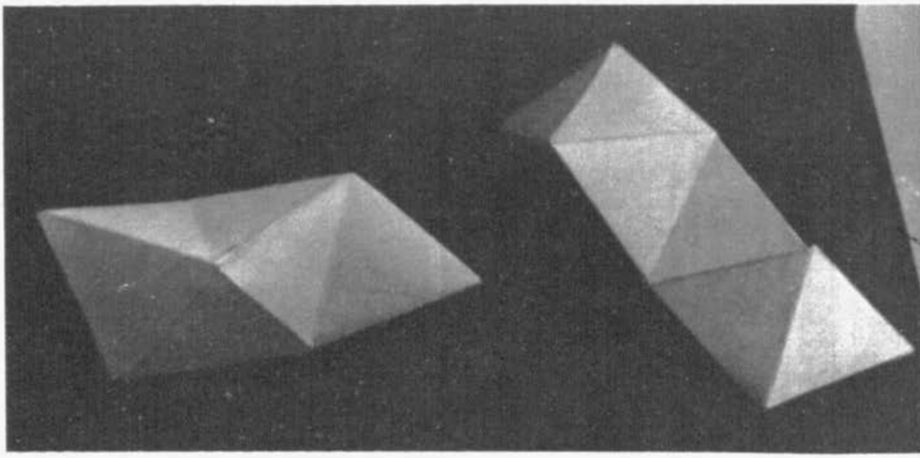
— Descubrimiento de un módulo generador de deltaedros, el tetraedro regular. Si se unen, por una cara, un deltaedro ya construido y un tetraedro se genera un nuevo deltaedro.

También la mera yuxtaposición de tetraedros genera nuevos deltaedros.

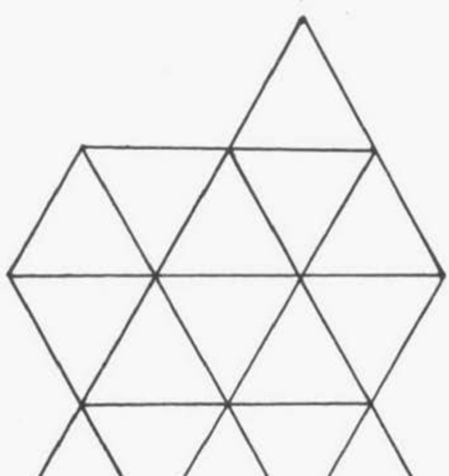


— Deltaedros "dudosos". El descubrimiento anterior presenta, sin embargo, nuevos problemas. Si se unen por una cara un octaedro regular y un tetraedro regular, la figura resultante ¿es un deltaedro? ¿O no lo es, porque dos de sus caras forman una sola cara que es un rombo?



— Deltaedros serpiente.

Hay material suficiente para ampliar la comprensión de diversos conceptos: poliedro regular, poliedro no regular, poliedros cóncavos y convexos, falsos poliedros, volúmenes, diedros, etc.



La enseñanza de las Matemáticas

Un profesor impaciente fracasará si intenta que sus alumnos hagan investigaciones. Una condición ha de prevalecer sobre todas cuando se propongan investigaciones en una clase. Esta condición es *disponer de todo el tiempo que haga falta.*

Pero si el profesor reflexiona un poco acerca de su propia actividad como matemático deberá reconocer que él mismo necesita muchísimo tiempo cuando se enfrenta a una situación matemática nueva.

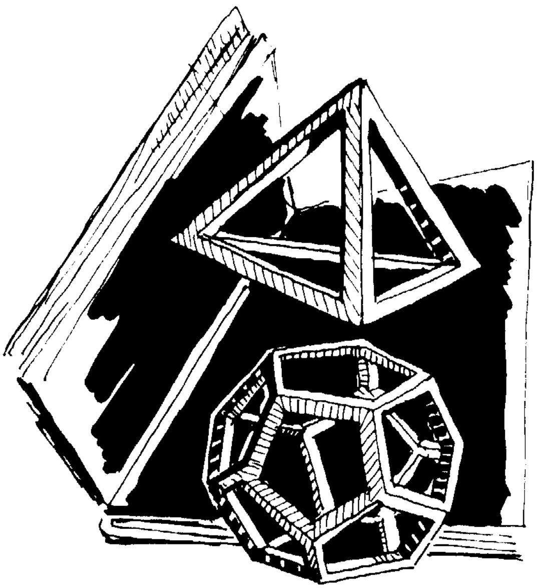
La enseñanza de las Matemáticas ha sido mala porque ha estado basada en el supuesto de que los alumnos (y los profesores) debían *repetir* las Matemáticas ya enlatadas.

Cuando los alumnos (y el profesor) *hacen* Matemáticas, y este es el único cambio verdaderamente radical, los esquemas de temporalización del aprendizaje se derrumban y nacen otros nuevos. Quizá se puedan enseñar muchas Matemáticas en una hora, igual que el profesor de esquí pretendía enseñar lo fundamental del esquí en treinta minutos. Pero ¿cuál es la opinión del que aprende? Su actitud lo suele transparentar: que mejor es alejarse y esperar ocasiones más razonables y más estimulantes.

Claro que no todos los alumnos tienen inicialmente la autonomía y la capacidad necesarias para emprender una investigación. ¿Pero qué mejor puede hacer el profesor que *animar* a que el alumno adquiera el gusto por hacerse preguntas y aprenda a tomar una situación en sus propias manos?

Vistas así las cosas, las investigaciones en "ranas" o en deltaedros no son sino un entrenamiento para cuando tengan que tomar en sus manos su propia vida. Creo que es una buena razón para enseñar Matemáticas.

Estudios



¿Matemáticas? Sí, gracias *

Antonio L. RODRÍGUEZ L.-CAÑIZARES **

I. Cuatro razones para lo mismo y dos para otra cosa

Existen, a mi entender, cuatro razones para aprender o enseñar Matemáticas [1]. Estas son:

1.º *Satisfacer el ego.*—El que estudia o enseña las Matemáticas y lo hace bien está reinventándolas y esto produce satisfacción. Poincaré señalaba la necesidad de incorporar todo conocimiento exterior a nuestra propia personalidad, "la reproducción de un razonamiento —decía Poincaré— contiene una parte subjetiva irreductible ... un perro que devora una oca almacena grasa de perro y no de oca". Hardy cuenta que su primera afición a las Matemáticas provinieron de su facilidad para resolver problemas que le hacían destacar de sus condiscípulos, y esto sustituía con ventaja a un puñetazo en la nariz, tan necesario a temprana edad. B. Russell confiesa en sus memorias (publicadas por Aguilar en 1971), que se aburría solemnemente en su niñez y juventud y que lo único que le salvó del suicidio fue su profunda curiosidad matemática.

---

* A M. L. Rodríguez Navarro, *in memoriam.*

** Inspección de Bachillerato. Granada.

[1] Fray Luis de León escribió este poema en el que mete en el mismo saco, con acierto, el aprendizaje y la enseñanza. El poema dice así: "De nuevo, oh Salamanca, / estoy aquí de la prisión salido, / la frente toda blanca, / el cuerpo envejecido, / ¡si las canas me hiciesen más temido! // sosegado ya un tanto / vuelvo a emprender la vía abandonada / sin rencor ni quebranto, / ¿fe y vida está salvada?, / ¡pues todo no ha quedado en la estacada! // Mañana hacia la Ciencia / seguiré sin sentir recelo alguno. / Ni cargo de conciencia, / ¡dulce oficio oportuno / que enseñar y aprender es todo uno!, / pero es camino largo / que hay que seguir tenaz con firme anhelo / a veces, cierto, amargo / hasta romper el hielo, / más grato cuanto más lejos del suelo, / ¡dulce camino loco!, / ¡empresa más feliz cuanto más nueva!, / que si es cierto que el poco / saber nos pone a prueba, / el mucho, si se alcanza, a Dios nos lleva".

2.º *Adquirir una herramienta de trabajo.*—Las Matemáticas son útiles, ya que forman parte indispensable de las tecnologías modernas, desde el microscopio electrónico hasta los viajes espaciales o los ordenadores. A la Física le resulta imprescindible y en menor medida al resto de las disciplinas que quieren ser arropadas con el prestigio de la Ciencia.

Galileo decía que el libro de la Naturaleza estaba escrito en lenguaje matemático ... y la Naturaleza se extiende por doquier. Puig Adam —maestro, entre otras cosas, de la Pedagogía de la situación— afirmaba con toda razón que los únicos conocimientos que no se aplican son los que no se tienen. C. Sagan, en su libro *Cosmos* (edit. por Planeta), dice: "Los hombres han evolucionado para admirarse de las cosas, comprender es una alegría y el conocimiento es requisito esencial para la supervivencia. Nuestro futuro depende del grado de comprensión del Cosmos".

3.º *Alcanzar un goce estético.*—Las Matemáticas son bellas, y la contemplación de la belleza constituye un alivio fundamental ante el problema de la falta de inmortalidad y otros problemas de menor fuste. "En la actualidad —dice G. Hardy— sería quizás difícil encontrar un hombre educado totalmente insensible al atractivo estético de las Matemáticas... Las obras de los matemáticos, como las de los poetas o las de los músicos deben ser bellas, pues las ideas deben estar engarzadas de modo armonioso, la belleza es el primer test que ha de superar un texto matemático, pues no hay lugar permanente en el mundo de las Matemáticas feas". Por su parte, Salvador de Madariaga, en su discurso de ingreso en la Real Academia de la Lengua —que leyó siendo octogenario—, confiesa: "Acercándome a los veinte años venía descubriendo a la vez la gran música europea y la gran matemática europea. Ahora bien, ocurría que dos de mis profesores de Matemáticas eran geniales: Henri Poincaré y Henri Becquerel; pero como profesores eran tan ineptos como lo hubiera sido Cristóbal Colón como profesor de Geografía; en cambio, hay en L'Ecole Polytecnique un profesor auxiliar, llamado Humbert, dotado por la Naturaleza de un asombroso don de exposición, que hacía nuestras delicias con sus lecciones de Análisis Algebraico. Y este es mi primer encuentro con la divina realidad: que pronto me puse a comparar mi goce al oír a Humbert por la mañana y mi goce al oír Bach o Beethoven por la tarde, goces, me decía con asombro, que eran de idéntica índole... Había, pues, en el álgebra un elemento estético indudable, y el atractivo de las lecciones de Humbert consistía precisamente en el poder que le asistía de ponerlo de manifiesto por su maestría en el arte de la exposición" (en este mismo discurso que, por cierto, lleva el título "De la belleza en la Ciencia", define la belleza "como el resplandor de un objeto —cosa o persona— que se mira con amor".

4.º *Ejercitar la mente.*—Los cantantes hacen gargarismos y los deportistas yoga. Las Matemáticas proporcionan al *homo sapiens* un medio excelente y barato de estar en forma. Platón, en el libro VII de *La República,* cuando se refiere a la Aritmética dice: "Es tal que todo Arte y toda Ciencia tiene que recurrir a ella. Incluso el Arte de la Guerra no puede dejarla de lado ... El cálculo y la aritmética son ciencias adecuadas para conducir a la verdad ... Convendría, Glaucón, hacer esta ciencia obligatoria y persuadir a los mandatarios del Estado que emprendiesen su estudio y se aplicasen en él, hasta que lleguen por pura inteligencia a penetrar en la naturaleza de los números no como los negociantes y vendedores, sino para extraer aplicaciones para la guerra y para facilitar el paso del mundo sensible a la verdad y a la esencia ... Tú ves, pues, amigo que estamos de enhorabuena con el carácter indispensable de esta ciencia porque es evidente que obliga al alma a servirse de la pura inteligencia para alcanzar la verdad en ella ... Y no has observado que los nacidos calculadores cogen al vuelo casi todas las ciencias y que los espíritus lentos cuando han sido ejercitados e iniciados en el cálculo, por encima de otro beneficio, obtienen una mejora de la penetración de su espíritu ... Por esta razón no podemos olvidarla; por el contrario, es necesario dirigir a ella los mejores espíritus".

En lo que respecta a la creación matemática, que aunque "adelantada" de la enseñanza y el aprendizaje es una cosa diferente a ellas, hay que decir que dos son las razones esenciales que provocan su existencia:

1.° *La necesidad de resolver problemas de orden práctico.*—Históricamente, el "nacimiento" [2] de las Matemáticas se debe a ello y hoy en día la Física sigue "provocando" la aparición de interesantes problemas que desarrollan las Matemáticas, no sólo en cuanto los contenidos, sino también a los métodos. Hay muchas ramas de las Matemáticas que se ven impulsadas en su desarrollo por necesidades apremiantes de la vida diaria. Sería tedioso poner mil y un ejemplos para ilustrar estas afirmaciones que, en todo caso, quedan reforzadas por el propio Hardy —matemático puro si los hay— que dijo: "La Matemática pura es, tomada en conjunto, claramente más útil que la aplicada. Un matemático puro lleva ventaja tanto por el lado estético como por el práctico. Porque lo que es útil, por encima de todo, es la técnica, y la técnica matemática es enseñada principalmente a través de las Matemáticas puras".

2.° *La satisfacción de la curiosidad.*—"He tenido hijos y nietos —dice Dieudonné— y veo que los críos se pasan el rato planteándole a uno ejercicios; ejercitando su sagacidad y curiosidad en enigmas, rompecabezas y crucigramas, con una alegría que nada consigue enturbiar... Existe una especie de curiosidad natural e innata en el ser humano que le impulsa a la resolución de adivinanzas. Sin ir más lejos, las nueve décimas partes de las Matemáticas, a parte de las que tienen su origen en necesidades de orden práctico, son debidas a la resolución de adivinanzas" [3].

[2] Platón alude humorísticamente en *La República* al nacimiento de la aritmética que se atribuía a Palámedes, indicando que Agamenón en el sitio de Troya no sabía cuántos pies tenía, ya que la invención de Palámedes no se había llevado aún a efecto y, en consecuencia, Agamenón no sabía contar (¡circunstancia verdaderamente terrible para un general con tanta tropa!).

[3] No hay matemáticas sin problemas. ¡Inexplicable la política educativa española de unos años atrás contra los problemas! (Desaparición de las pruebas de Reválida de Bachillerato, ídem pruebas de ingreso en las escuelas técnicas, ídem en algunas oposiciones para el ingreso en los cuerpos docentes...).

II. Filosofías de las Matemáticas

Tres son las principales filosofías de las Matemáticas: la platónica o idealista, la formalista y la intuicionista o constructivista. Las tres corrientes filosóficas nacieron aproximadamente con el siglo en que vivimos y sus divergencias no se han acabado todavía. Basta leer los artículos de Roger Apéry, "Matemática Constructiva", dictado en el Seminario de Filosofía y Matemáticas de la Escuela Normal Superior de la Rue d'Ulm, de París, y de Jean Dieudonné, "Matemáticas vacías y Matemáticas significativas" [4], para comprobar hasta qué punto las espadas están en alto. Dice Apéry (intuicionista): «Los formalistas pretenden conseguir mentalidades uniformes mediante la enseñanza de las Matemáticas modernas que consienten que los niños crean estar realizando una actividad matemática al rodear unos cuantos objetos por un cordel en lugar de enseñarles a contar, a calcular y a examinar las propiedades de las figuras. Los formalistas han creado un dios matemático (se refiere al grupo Bourbaki) integrado por varias personas que tratan de asegurarse la inmortalidad renunciando periódicamente sus miembros y revelando periódicamente las "buenas" definiciones y las "buenas" teorías».

Los formalistas han extirpado la intuición al rechazar la utilización de figuras en la enseñanza [5].

Por su parte, Dieudonné: "Existe una tendencia a consagrar gran número de estudios detallados a las corrientes de ideas heterodoxas, como el intuicionismo, que no influyen sobre más de un matemático de cada cien, ignorando lo que hacen los noventa y nueve restantes. Cierto que es legítimo sienta curiosidad por conocer y analizar todas las opiniones, pero no me parece que ésta sea la mejor manera de hacer epistemología; se tendría una visión muy deformada de los viajes si uno se limitara a consultar a las sectas religiosas que todavía creen que la Tierra es plana".

Estas referencias mutuas recuerdan otras de hace medio siglo cuando Couturat decía: "La logística da alas a la invención", y Poincaré le retrucaba: "Hace tiempo que tenéis alas y todavía no habéis volado" [6].

Las filosofías de las matemáticas surgieron a raíz de la crisis de querer fundamentar sólidamente las Matemáticas para que éstas resistieran a toda antinomia. El edificio matemático ya era enorme y había que evitar sustos. Lo cierto es que entonces y ahora una buena parte de los matemáticos conti-

---

[4] Recogidos en un libro editado en 1984 por Tusquets, editores, que lleva por título *Pensar la Matemática.*

[5] En nuestro país alcanzó hace años una gran difusión el libro de J. Dieudonné, *Álgebra lineal y Geometría elemental,* que fue publicado por Selecciones Científicas e iba dirigido a bachilleres brillantes. En dicho libro no aparece ninguna figura. El autor advierte en el prólogo que ni un bachiller de cada 1.000 entienden el libro sin ayuda, pero esta circunstancia no perturba el pulso del autor, que considera que en todo caso los textos de difícil lectura estimulan al lector y revelan el ingenio del autor. —Habría que recordar a Dieudonné que no es la misma proporción ni un bachiller de cada 1.000, que ni un bachiller de cada 100.000—.

[6] O en otra ocasión cuando dijo: "La Lógica ya no es estéril, ha engendrado la contradicción".

nuaron imperturbablemente produciendo matemáticas sin preocuparse de que su trabajo podía ser inutilizado. Y esta manera de pensar ha trascendido a los usuarios menores de la Matemática que desconocen en buen número la crisis habida en los fundamentos y en el mejor de los casos sólo ven las distintas escuelas filosóficas, posturas posibles ante las Matemáticas que definen a grandes rasgos la relación del individuo con el legado histórico de las Matemáticas y con las Matemáticas que espera encontrar en el futuro.

Es fácil encontrar diccionarios de Matemáticas tan completos como el de F. Vera (edit. por Kapelusz) o el recientemente aparecido de Bouvier-George (edit. por Akal) que no traen una palabra del asunto. (Y el propio libro de Maravall, *Filosofía de las Matemáticas,* edit. por Dossat, no habla nada de esto.)

Cualquiera de las tres filosofías señaladas tiene su atractivo innegable y es bueno conocer a grandes rasgos en qué consisten y quiénes militaron o militan en ellas, aunque sólo sea para ver cuál es la que más se acerca a la peculiar y personal manera de concebir las matemáticas que uno tiene —consecuencia del entorno y de algo que llevamos dentro— o para aumentar en el entusiasmo por las Matemáticas después de abrazar tal o cual credo filosófico.

Los rasgos mencionados son:

i) Platonistas o idealistas (Bolzano, Frege, Russell, Cantor, Hermite, Lebesgue, Hadamard...).

Existen todos los números reales, todas las funciones que puedan pensarse..., con independencia de los hombres que sólo pueden llegar a definir algunas. Toda pregunta relativa a un ente matemático y siempre que esté bien formulada tiene una respuesta afirmativa o negativa (aunque sea imposible en el momento de formularla contestarla, pero un espíritu infinitamente sabio sabe la respuesta). "La más excelsa perfección de Dios —dice Cantor— reside en la posibilidad de crear un conjunto infinito y su inmensa bondad le lleva a crearlo".

ii) Formalistas (Hilbert, Bourbaki...).

Se preocupan de la no contradicción de forma obsesiva y la admiten como casi sinónima a existencia. La preocupación por la lógica que tenía Hilbert ha ido remitiendo notablemente en los tiempos modernos, sobre todo tras las aportaciones de Gödel, que invalidaron el programa de fundamentación de las Matemáticas proyectado por Hilbert y esto hace que distingan mucho la matemática de la metamatemática (que dejan para los lógicos).

Distancian mucho las Matemáticas de las otras disciplinas y piensan que la razón de ser las Matemáticas tan útiles a las demás ciencias es debido a una "armonía preestablecida" (Leibnitz) o a un "milagro" (Bourbaki). Las Matemáticas que existen son las que han sido escritas y no las que están sobrevolando nuestras cabezas (como admiten los idealistas). Están muy contentos de sí mismos (¡y muy descontentos de los demás!). Desconfían notablemente de la intuición.

iii) Intuicionistas (Poincaré, Borel, Brower, Weyl, Apéry...).

Los entes matemáticos aparecen porque el matemático los define. Desconfían del axioma de libre elección y del razonamiento por reducción al absurdo. Las reglas de deducción con las que razona el matemático deben estar especificadas explícitamente. Un texto matemático se lee con la pluma en la mano. "La actividad matemática comporta —dice humorísticamente Apéry— 5 % de inspiración y 95 % de transpiración".

III. Matemáticas y juegos

Existe una relación muy estrecha entre Matemáticas y juegos, esto queda probado viendo el desarrollo de la Teoría de juegos (aunque no todos los juegos sôn matematizables o de su matematización no se saque provecho alguno). Para jugar se necesitan unos jugadores, unas reglas de juego, un "tablero" de juego, un manual de estrategias, un ambiente de juego... y empezar a jugar. No todos estos elementos son igualmente necesarios; se puede prescindir del "tablero" como hacen los jugadores de ajedrez que juegan a ciegas o sustituir algún jugador por una máquina electrónica o dedicarse a analizar las reglas. En todo caso, los jugadores están abstraídos y ponen toda su atención en el juego prescindiendo de todo lo demás. Para que los juegos sean "jugables", las reglas deben haber sido formuladas de forma que el juego se acabe en un tiempo razonable (o alcance su culminación o momento en que se prevé el resultado del mismo suponiendo que los jugadores jueguen bien) y previendo todas las situaciones posibles que se puedan presentar para poder siempre saber qué hacer. Asimismo, en un juego bipersonal no puede darse el caso de que en una partida y en un determinado estado del juego se dé por ganador al jugador A y en otra partida y con el mismo estado de juego se dé por ganador al jugador B.

En el siglo XIX, y como consecuencia de la aparición de las geometrías no euclidianas (1829, Lobatchevski; 1832, Janos Bolyai, y 1850, Riemann), la axiomática de Euclides perdió el carácter de axiomática verdadera. No obstante conservó la otra característica por la que era admirada, esto es la de ser una construcción racional perfecta. Pero ese *status* también era extensivo a las axiomáticas no euclídeas que acababan de nacer. El apriorismo de Kant quedaba desvanecido al igual que la frase que hiciera a medias con Platón, "sólo Dios hace Geometría, pero de acuerdo con la axiomática euclídea", y con ello nació una concepción lúdica de las axiomáticas y *a fortiori* de las Matemáticas (al ser el método axiomático el método por excelencia de esta ciencia y definitivo para asegurarse el haber ido por el buen camino).

Los axiomas pasaron a concebirse como arbitrarios puntos de partida, igualmente que lo son estados iniciales de los juegos. Nadie pregunta si el ajedrez sería más verdadero cambiando la posición inicial de los caballos por la de las torres o si se moviesen de forma diferente a como lo hacen. Podría concebirse forzando la similitud que una partida jugada por un matemático consistiría, dado un tiempo finito, una axiomática y unos teoremas deducidos de ella, en añadir uno nuevo siguiendo unas reglas de juego (lógica). Una rama axiomatizada de las Matemáticas aparecería como la expresión escrita de un juego hecho por uno o varios matemáticos. (¡Un juego interminable!).

"Podemos situar a principios de siglo —dice Fraïssé— el apogeo de la concepción lúdica de las axiomáticas. Hablemos ahora de su decadencia que se acelera a partir de la explosión provocada por los grandes descubrimientos lógicos de los años treinta de nuestro siglo. Parece que el surgimiento de diferencias entre axiomáticas y juegos está vinculado con el desarrollo y posterior hegemonía de la semántica, en detrimento de la sintaxis. Por analogía con la sintaxis gramatical, la sintaxis lógica es el estudio de la formalización, de la estructura de las fórmulas y de las reglas de deducción inmediata de una fórmula a partir de otra o de varias otras. Desde el punto de vista sintáctico, una teoría matemática se reduce, en líneas generales, a un sistema formal cuyas consecuencias se desarrollan por la aplicación de reglas formales de deducción sin preocuparse por el significado de la fórmula".

"La semántica —continúa Fraïssé—, por el contrario, a ejemplo de los filósofos y lingüistas se centra en el estudio de la significación de las fórmulas. Desde el punto de vista semántico, el estudio de una teoría exige, por una parte, la representación de las fórmulas, consideradas ellas mismas como entidades matemáticas con igual derecho que un número o un punto; por otra parte, requiere que se defina el valor de verdad de cada fórmula. Ello acarrea la representación de toda teoría en otra llamada metateoría, que no es, por lo demás, de naturaleza diferente a la de la teoría inicial y que, por consiguiente, es a su vez representable en una segunda metateoría, y así sucesivamente".

No es preciso insistir en el hecho de que no se puede hablar en términos de semántica versus sintaxis y al margen de que existan matemáticos (o logico-matemáticos) que se inclinan hacia uno u otro campo puede decirse que la semántica se ha desarrollado en parte y ha logrado "absorber" a la sintaxis a fuerza de profundizar en esta última.

En ocasiones el intento de demostrar la consistencia interna de una axiomática (problema sintáctico) se reduce a encontrar un modelo de tal axiomática que sea tan consistente como otro modelo conocido (problema semántico). Se ha comparado los descubrimientos hechos en una teoría por estudio de la metateoría (recurso semántico por excelencia en el que Gödel fue un maestro absoluto) con el efectuado por Galois cuando se le ocurrió trasladar "por representación" el problema de la existencia o no de soluciones por radicales de la ecuación quíntica a la teoría de grupos (entonces en ciernes).

Las Matemáticas, en suma, son una cosa y los juegos son otra. Para zanjar toda posible duda basta observar dos hechos:

1.° Que en juegos no existe el metajuego. La teoría de juegos, que podría alcanzar tal rango, no es un juego como tampoco lo es la programación que uno hace para poder jugar al parchís con su microordenador junto al brasero doméstico.

2.° Los jugadores, conociendo las reglas del juego, pueden jugar. Los matemáticos, con sólo el conocimiento de las reglas de deducción —cosa más difícil por pertenecer a la metateoría que es más sutil que la teoría— no pueden lanzarse a obtener ni siquiera deducciones inmediatas.

Llegado a este punto y una vez consumado el divorcio, por incompatibilidad de caracteres entre matemáticas y juegos, es oportuno cualquier esfuerzo para que éste sea civilizado y queden como buenos amigos. Trataré en el próximo parágrafo de dar otra visión más indulgente y divertida —condición *sine quae non* del juego— del sentido lúdico de las Matemáticas.

IV. Matemáticas de sustento y Matemáticas de divertimento

Además de la literatura matemática que aparece en los libros de texto en uso, o en desuso, y en las revistas especializadas (fuentes nutricias de la renovación de los libros) —*corpus* que constituyen toda la Matemática según los formalistas— y que ha sido redactada para mayor gloria de la Ciencia por sabios investigadores o docentes de renombre y a la que podría llamársele Matemáticas de sustento, existe otra literatura más ligera que algunos proscriben, por exigencias del guión o por olvido, y tratan como si de una subcultura se tratase, es la llamada Matemáticas recreativas o de divertimento. A medio camino entre la una y la otra se encuentra la literatura de divulgación o popularización científica, que logra los fines que pretende si enriquece a sus autores y editores, es decir, si se sustancia en libros que se convierten en *best sellers*.

Siempre me han producido impresión los epítetos que se aplican a las Matemáticas y que tratan de dividirlas en dos clases disjuntas. He aquí una muestra de botones:

— Matemáticas finitas y no finitas (o infinitesimales).
— Matemáticas elementales y superiores.
— Matemáticas puras y aplicadas.
— Matemáticas bourbákicas o no bourbákicas.
— Matemáticas útiles e inútiles (?).
— Matemática moderna y clásica (¡en singular!).
— Matemáticas triviales y significativas.
— Matemáticas recreativas y serias.
....

¡Qué difícil marcar los límites de separación en ciertas clasificaciones dicotómicas! (si es que tales límites existen).

En el caso de las Matemáticas recreativas y no recreativas se puede alegar que su lenguaje e incluso los modos de razonamiento empleados usualmente son recreativos, aunque sólo sea por comparación con los ordinarios (en Matemáticas encontramos gran cantidad de palabras con un significado específico distinto del empleado por el hombre de la calle; p. ej., existen conjuntos con un solo elemento o con ninguno, espacios abiertos y cerrados a la vez o relaciones simétricas y antisimétricas, ¡situaciones que serían insólitas en una puerta o en un mueble!).

El matemático tiene el privilegio de poder jugar a ser matemático en algunas conversaciones de su vida diaria, sin más que precisar con sensibilidad matemática las informaciones que recibe (un interesante ejemplo puede verse en el libro de Stewart, *Concepts of Modern Matematics*, traducido por Alianza, en el que tres científicos, uno de ellos matemático, viajan por Escocia en tren y ven a una vaca pastando que tiene la parte de piel que deja ver a sus observadores negra; el matemático, tras una larga discusión —¡nunca demasiado larga por tener lugar en un tren!—, concluye: "En Escocia, al menos, hay una vaca que, al menos, tiene un lado negro").

Los ejemplos siguientes pueden ser llevados a la práctica por el amable lector en su propio círculo de actividad sin tener que viajar a Escocia. Estos son:

— Sugerir a un padre que haya dicho a su hijo aquello de "si apruebas te compraré una bicicleta", que puede regalársela sin menoscabo de su prestigio y su palabra aunque el niño haya sido calabaceado.

— Recomendar a la Jefatura de Tráfico que retire las señales de curvas peligrosas, que hace que los conductores reduzcan la velocidad al tomarlas dejando sin valor la peligrosidad anunciada... y si hacen caso reclamar que las pongan (la señal de tráfico más peligrosa que conozco es la que reza a la salida de los túneles, "apagar la luz de cruce", especialmente cuando el túnel lo atravieso de noche).

— Advertir al presidente de la Comunidad de vecinos que cuando se vea en la obligación de agradar a tirios y troyanos (es decir, siempre) diga: "No puedo desautorizar tal o cual obra", ya que en el lenguaje jurídico y ordinario, al contrario de lo que ocurre en el lógico, negar dos veces no es afirmar; y en consecuencia no desautorizar una obra para los que la pretendan efectuar será una respuesta satisfactoria, mientras el resto dirá: "¡No ha podido autorizarla!".

Prescindiendo de la "forma", si ello es posible, y atendiendo sólo al contenido, hay ciertos temas que se han calificado recreativos por antonomasia (mosaicos, ver el libro de Coxeter, *Fundamentos de la Geometría*, publicado por Limusa; paradojas, problemas de Teoría de Números —en especial el análisis diofántico—, relojes, calendarios, topología combinatoria...). Algunos problemas surgidos como puro divertimento han dejado una huella imborrable en la historia de las Matemáticas (el problema del lanzamiento de dados del Caballero de Meré originó la fecunda correspondencia entre Fermat y Pascal, que marcan el nacimiento del Cálculo de Probabilidades; el problema de los puentes de Königsberg hizo que Euler iniciase la Topología; el problema de los cuatro colores propuesto por F. Guthrie en 1852 y resuelto por Appel y Haken en 1976, gracias al auxilio de un ordenador [7] y los trabajos previos de Heesch, marca una nueva etapa en el concepto de lo que se entiende por teorema demostrado).

[7] Esto le ha venido muy bien a los ordenadores tras el desprestigio que les acarreó en 1970 Matijasevic, que resolvió negativamente el décimo problema que D. Hilbert propuso en el II Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París, en 1900. Este problema preguntaba: "¿Existe un algoritmo que permita decidir si una ecuación diofántica posee o no soluciones?".

Sin embargo, el grueso de la Matemática recreativa, si se mide al peso, es sólo divertimento. En este sentido tienen que ver con la asociación disparatada de cuestiones que están de hecho muy alejadas entre sí. Como ejemplo sugiero el siguiente, que relaciona el programa de TVE., "Un, Dos, Tres; responda otra vez", con los multiplicadores de Lagrange. Y como supongo y espero, que el amigo lector, para su provecho, está más versado en la obra del turinés autor de la *Mecánica Analítica* que en los programas de TVE.; y en todo caso, en previsión de que este artículo pueda ser leído dentro de veinte años, sólo explicaré en qué consiste esencialmente el programa citado. Se trata de unos concursantes que responden a tres tipos de preguntas. Llamaremos x al número de preguntas respondidas del primer grupo, y al del segundo y z al del tercero. Según las reglas del programa el dinero ganado asciende a $25\,x\cdot y\cdot z$. Se trata de calcular la forma más rentable de distribuir el número de preguntas en los tres grupos, sabiendo que el número total de respuestas alcanza el valor N.

En símbolos:

$$f(x,y,z) = 25\ x\cdot y\cdot z$$

$$g(x,y,z) = 25\ x\cdot y\cdot z + \lambda\,(x\ y\ z - N)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 = 25\ yz + \lambda\ ;\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 = 25\,xz + \lambda\ ;$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 = 25\,xy + \lambda\ ;\ x + y + z = N \Rightarrow x = y = z = \frac{N}{3}$$

Se concluye, pues, que la estrategia óptima de los concursantes es la de ser igualmente hábiles en los tres tipos de preguntas (suponiendo que en total se vayan a responder N preguntas). Es notorio que el desconocimiento de la solución de este problema por parte de los concursantes viene proporcionando pingües beneficios a TVE., por lo que sería justo que pagase nuestro silencio con algún programa de divulgación matemática.

V. Marketing matemático

Si queremos que un producto se consuma, incluso en el caso de las Matemáticas, hay que promocionarlo, darle una envoltura especial que lo haga atractivo a las personas que lo desconocen, hacerle propaganda. El esoterismo o el secreto profesional no van bien con las Matemáticas y los dioses ya no castigan a nadie porque se vaya de la lengua y revele al resto de los mortales algún teoremita —como le ocurrió a Filolao— (si bien es cierto que deberían tener algo previsto para los descubridores de la racionalidad del número Pi o para los "demostradores" contumaces del último teorema de Fermat). La propaganda de un producto es lícita cuando éste no provoque un envenenamiento masivo y no esté contraindicado. Este es el caso de las Matemáticas (que han sido comparadas con el arsénico).

En nuestro país, y a pesar de la mejora experimentada de unos años a acá [8] y de las estadísticas que revelan el mercado del trabajo, faltan matemáticos (de profesión, de vocación y/o de afición) y con toda seguridad estamos en la cola de los países de la E. E. E. en cuanto a número de matemáticos por cada cien mil habitantes. En Francia, sin ir más lejos, amén de un gran número de revistas científicas disponen de al menos una de humor matemático, lo cual tiene su gracia.

Las Matemáticas, como las montañas o algunos monstruos mitológicos griegos (y *a fortiori* romanos), tienen dos caras. Una de ellas vertical, enhiesta, terrible para los neófitos. La otra, accesible, llana y agradable. Existen atajos y conexiones entre las caras; y aparte, claro está, influyen las estaciones (psicología del aprendizaje). Es buena la política de ciertos profesores (guías de esa excursión que supone todo curso, como decía Rey Pastor) de colocar lo más fácil de la asignatura al principio y al final, para entrar con buen pie y dejar buen sabor de boca. Asimismo, es prudente entremezclar en el avance de la asignatura la ascensión de los farallones con la suave brisa de los matorrales y monte bajo (Matemáticas recreativas). Ciertamente, en ocasiones la parada se hace en un campo de cardos y los chistes son aburridísimos [9], pero otras veces se acierta y esto justifica el intento. Para aumentar el número de éxitos (p) y en consecuencia disminuir el número de fracasos (q), nada más conveniente que hacer ejercicios para reforzar la mémoria —evitando así olvidar algún detalle que invalide el "divertimento", por ej., haberlo contado anteriormente— y aumentar la lectura —con prisa y sin pausa— de libros de Matemáticas recreativas, que haberlos haylos.

Epílogo

En Londres tuve ocasión de conocer una historia que revela la importancia que debemos darle al proselitismo matemático (me la refirió mi amigo el profesor del Imperial College Eduardo Ortiz, que a su vez la supo por Cotlar). Esta es la historia: Lanczos —matemático irlandés que colaboró con Einstein en el aparato matemático que necesitaba para sus teorías— se consideraba a sí mismo (con excesiva modestia) un matemático de segunda fila y estaba maravillado de la capacidad matemática y de los resultados que obtenía Henri Poincaré; y solía decir a sus discípulos y colaboradores que era bueno que existiese gente aficionada a las Matemáticas y profesionales de media talla, que en el cultivo y aprendizaje de las Matemáticas no sobraba nadie aunque su capacidad fuese escasa, pues es fácil que en medio de un gran número de practicantes de las Matemáticas pueda surgir un genio

[8] M. de Unamuno: *Amor y pedagogía*, ed. por Espasa-Calpe. "—Qué estudias ahora? / —Matemáticas. / —¿Matemáticas? Son como el arsénico; en bien dosificada receta, fortifican; administradas a todo pasto, matan".

[9] Ramón Tamames, en la quinta edición de su *Introducción a la Economía Española*, editado por Alianza, dice: "Un problema agudo y de gravísimas consecuencias es el de la escasez de licenciados en Ciencias Físicas y Exactas, penuria que se deja sentir en todo el sistema educativo español a través de una casi catastrófica enseñanza de las Matemáticas".

que produzca un avance significativo de las mismas. (¡Algo parecido a lo que en Física nuclear se llama masa crítica!).

Las Matemáticas pueden ser útiles para soportar el dolor (Pascal, pensando en la curva cicloide, perdió su dolor de muelas), el paso del tiempo (releer un teorema conocido rejuvenece), las frustraciones sociales (en Matemáticas sólo existe un camino real, o si existen varios también son reales), etcétera, etc., y para conocer disciplinas más difíciles como la Filosofía, la Historia y la Literatura que están bajo la influencia de la compleja conducta humana (pues las Matemáticas ejercitan la capacidad de reflexión, de relación y de abstracción con entes más sencillos ciertamente que los seres vivos).

Las Matemáticas son una ciencia humana por excelencia[10]; contra lo que pudiera pensarse en una apreciación superficial, están enraizadas en la cultura y en la historia (ya que las Matemáticas se desarrollan en el tiempo) y su grandeza o servidumbre tienen mucho que ver con el número de cultivadores que posea. En esto tienen razón los intuicionistas, no existen Matemáticas sin matemáticos. "Los entes matemáticos —dice Apéry—, en tanto que entes de razón sólo existen en el pensamiento del matemático y no en un mundo platónico independiente de la mente humana". De aquí la importancia de la enseñanza de las Matemáticas que forma la cantera de matemáticos y que dicha enseñanza no olvide el objetivo fundamental de transmitir entusiasmo por las Matemáticas (¡y aquí casi puede admitirse que el fin justifica los medios!).

Para no caer en la arrogancia hay que convenir, en contra de lo que G. Hardy declaraba en su precioso opúsculo "A mathematician's apology" [11], que la Matemática ha facilitado la adquisición de tecnologías que han producido grandes desastres a la Humanidad y nos ha dejado un miedo cerval ante su posible repetición (explosiones nucleares de Hiroshima y Nagasaki, por ejemplo), pero tales desastres han tenido más que ver con las zonas oscuras de la conducta humana que con las brillantes (productoras de la tecnología mencionada). Del hombre, como terrible claro-oscuro del Universo, sólo podemos esperar sorpresas.

Mientras tanto, y como alivio ante un holocausto nuclear, qué grato oír decir "à tout venant":

"¿Matemáticas? Sí, gracias."

---

[10] Sin que eso deje sin valor la concepción clásica del término Ciencias Humanas que se aplica a la Sociología, Psicología, Derecho..., explicable cuando se quieren matizar la metodología que se utiliza en contraste con otro tipo de ciencias entre las que se cuentan las Matemáticas.

[11] Traducido al castellano por la Edit. Ariel.

Números reales construibles

Juan Manuel MATEO CHARRIS *

El mayor problema con que nos encontramos en nuestra labor de enseñantes es la postura pasiva, e incluso negativa, ante las matemáticas que toman la generalidad de los alumnos de B. U. P.

Las causas son varias, pero la fundamental es la ausencia de motivación en los contenidos de los que se informa, de los que además se exige un manejo conciso y claro. Esta falta de motivación es particularmente grave en 1.º de B. U. P.

Los alumnos de 1.º, como adolescentes que son, están muy poco interesados en conceptos de tan escasa relación con la realidad como los polinomios o los complejos, valga el ejemplo, y mucho menos por la rutina de las operaciones.

Sin embargo, los adolescentes muestran una cierta inquietud producida por la necesidad de jugar, y a juegos que ellos entienden como inteligentes. Un ejemplo: Hace unos meses aparecieron en *El País* las reglas de un nuevo (o viejo) juego topológico ideado por matemáticos de la Universidad de Cambridge. Pues bien, a los pocos días me encontré, al entrar en clase, con varias alumnas jugando partidas en la pizarra. Las "jugadoras" no se distinguen especialmente por su interés en las matemáticas, sino más bien por su aversión a ellas. Y es evidente que el juego en cuestión tiene muchos valores formativos.

Por otra parte, es patente la fascinación de los alumnos por las calculadoras de bolsillo. El manejo de éstas es considerado como un juego, hasta el punto de entablarse auténticas competiciones entre alumnos que se vanaglorian de saber sacar el máximo partido a su calculadora. ¿Y no son precisas buenas nociones de lógica, e incluso de cálculo, para poder manejar correctamente una calculadora?

* Catedrático de matemáticas del I. B. "Jiménez de la Espada", de Cartagena.

Pasemos al juego de moda: los juegos electrónicos. Cuando nuestros alumnos destruyen naves marcianas están desarrollando no sólo sus reflejos, sino también su intuición geométrica, pues existe claramente *geometría* en la adivinación de una intersección entre dos líneas. En este sentido, la pantalla de un televisor y una lámina de papel en la que se trazan rectas que se cortan son curiosamente semejantes.

En definitiva, nuestros alumnos sólo se interesarán por la matemática si se les plantea de forma recreativa y actual, y creo por tanto que en pocos temas podríamos realmente interesarlos, en un mundo invadido por la electrónica, salvo en la informática y en la geometría, por lo que tiene de visual, pues no en vano vivimos en plena civilización de la imagen.

Pero así como la informática sólo tiene futuro, la geometría sólo tiene pasado, y su futuro dependerá de su capacidad de adaptación a los nuevos tiempos.

La geometría ha ido desapareciendo progresivamente de la enseñanza media. Se ha ido condensando con el tiempo, y ha ganado en generalidad y en coherencia (para un matemático), pero ha perdido aplicabilidad para el alumno. No nos engañemos: la vieja geometría del triángulo, de las construcciones, no podrá volver a menos que su estudio se incentive de acuerdo con los intereses del alumno.

Siguiendo esta línea voy a introducir los números reales construibles con regla y compás para 1.º de B. U. P.

La idea general del tema me ha sido proporcionada por los mismos alumnos, que una vez construidos los reales, establecen una diferencia muy clara entre números como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$ que saben dibujar y números como π, que la teoría asegura que están en la recta, pero que no saben dibujar con instrumentos *comunes*.

Ello nos lleva al problema de las construcciones con regla y compás, tema superior desde luego, pero que con los necesarios recortes puede adaptarse para los alumnos de este nivel.

Su interés es indudable:

a) Se construye de esta manera un cuerpo más amplio que el de los racionales y contenido en los reales.

b) Se trata de un cuerpo obtenido mediante operaciones de definición geométrica.

c) Una vez establecidos los axiomas, todas las construcciones se obtienen lógicamente a partir de dichos axiomas. Constituye un primer contacto del alumno con el método axiomático, propio de la geometría.

Desarrollo del tema

I. Se invita al alumno a participar en un juego: dibujar puntos utilizando sólo regla y compás. Los puntos así dibujados los llamaremos construibles, y se obtienen como intersección de rectas, de círculos y rectas, y de círculos. Una recta se podrá dibujar si contiene dos puntos construibles, y una circunferencia se podrá dibujar si su centro es un punto construible, y el radio es un segmento de extremos construibles.

Precisando, resultan los siguientes axiomas de constructibilidad.

Ax. 1. Existen dos puntos del plano construibles.

Ax. 2. La recta que pasa por dos puntos construibles es construible.

Ax. 3. El círculo de centro y radio construible es construible.

Ax. 4. Los puntos de intersección de rectas construibles son construibles.

Ax. 5. Los puntos de intersección de círculos construibles son construibles.

Ax. 6. Los puntos de intersección de rectas y círculos construibles son construibles.

(El Ax. 1 es necesario para empezar a construir. Los otros son las reglas de juego. Es fácil ver que es un sistema "completo" de axiomas).

II. Al cabo de poco tiempo los alumnos han construido una serie de puntos. Los más aventajados habrán construido, quizás, el punto medio de un segmento, o el círculo que pasa por tres puntos.

Es el momento de advertirles la necesidad de una sistematización de las construcciones. Resultan, pues, los siguientes teoremas reducidos exclusivamente de los axiomas.

Teorema 1. La recta paralela a una recta construible r que pasa por un punto construible A es construible.

Demostración: Basta tomar los dos puntos construibles B y C que, como mínimo tiene r, y trazar los círculos de centro A y radio $\overline{BC}$, y de centro C y radio $\overline{AB}$. Se cortarán en un punto D construible. La recta que pasa por A y D es, obviamente, la paralela a r buscada.

Teorema 2. La mediatriz de un segmento construible es construible.

Demostración: Sea el segmento $\overline{AB}$ construible. Los círculos de centros A y B, y radio $\overline{AB}$ se cortan en dos puntos C y D construibles. La recta que pasa por C y D es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Teorema 3. El círculo que pasa por tres puntos construibles A, B y C no situados en línea recta, es construible.

Demostración (conocida del alumno por la asignatura de dibujo): Basta trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que se cortarán en un punto D. El círculo de centro D y radio $\overline{AD}$ es construible y pasa evidentemente por A, B y C.

III. Con estos tres teoremas las posibilidades de construcción de puntos aumentan considerablemente.

Es el momento de plantear la posibilidad de asignarle a cada punto construido un par de coordenadas. Para ello, necesitaríamos un sistema de ejes cartesiano-rectangulares construibles.

Teorema 4. Existe al menos un sistema de ejes cartesiano-rectangulares construibles.

Demostración: Consideramos dos puntos construibles A y B. La recta AB y el círculo de centro A y radio $\overline{AB}$ se cortan en dos puntos B y B'. Construyamos la mediatriz del segmento $\overline{BB'}$.

El sistema de ejes cartesiano-rectangulares queda determinado tomando la recta que pasa por A y B como eje X, la mediatriz del segmento $\overline{BB'}$ como eje Y, y el segmento $\overline{AB}$ como unidad de medida.

Una vez coordenado el plano (la determinación de las coordenadas de un punto construible es puramente teórica, aunque utilizando resultados elementales de geometría métrica, el alumno puede averiguar las coordenadas de algunos puntos construibles), planteamos la reducción de la construcción del punto $P(a, b)$ a la de sus proyecciones $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$ sobre los ejes X e Y. Nos lo asegura el siguiente teorema:

Teorema 5. El punto de coordenadas (a, b) es construible si y sólo si los puntos de coordenadas $(a, 0)$ y $(0, b)$ (proyecciones sobre los ejes) son construibles.

Demostración: La demostración es trivial. Si $P(a, b)$ es construible, sus paralelas a los ejes lo son, y sus intersecciones con ellos determinan $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$, respectivamente.

Recíprocamente, si $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$ son construibles, la paralela al eje Y por P', y la paralela al eje X por P'' son construibles, y su intersección es $P(a, b)$.

IV. La correspondencia biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos del plano de coordenadas $P(a, 0)$ (*eje* X) definida de modo obvio

$$f: R \longrightarrow X$$
$$a \longrightarrow P(a, 0)$$

motiva la siguiente

Definición.—Un número real a es construible si el punto $P(a, 0)$ es construible.

Hecha la identificación anterior queda claro que construir números reales equivale a construir sus representaciones sobre una recta graduada, y es evidente que la elección de dicha recta es irrelevante, aunque por motivos "técnicos" supondremos que es el eje X.

Los números reales construibles, como reales que son, participan de las propiedades de las operaciones definidas en R, esto es, suma y producto, pero dados a y b números reales construibles, aunque existen $a + b$ y $a \cdot b$, no se puede asegurar en principio que sean construibles.

Vamos a comprobar que sí es cierto, es decir, que a partir de dos números reales construibles a y b pueden construirse también $a + b$ y $a \cdot b$.

Es evidente que tales construcciones se pueden considerar definiciones de dos operaciones *suma* y *producto*, en R_C, operaciones que se definen geométricamente (las primeras conocidas del alumno) y que resultan compatibles con la suma y producto de reales.

Más aún, dado cualquier $a \in R_C$ es posible construir $-a$ y a^{-1} (si $a \neq 0$), con lo que tendremos

— Un conjunto $R_C \subset R$ y dos operaciones $+$; restricciones de las operaciones suma y producto de R, tal que:

a) $(R_C, +)$ grupo abeliano.

b) $(R_C - \{0\}, .)$ grupo abeliano.

c) Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, pues $R_C \subset R$.

En resumen, $(R_C, +, .)$ es un cuerpo conmutativo (subcuerpo de R).

La razón de *c)* es válida para comprobar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y el producto en R_C.

Proposición 1.—Si a y b son reales construibles, también lo es $a + b$.

Demostración: Sean a y b números reales construibles, entonces son construibles $P(a, 0)$ y $P'(b, 0)$.

Trazamos un círculo de centro P y radio $\overline{OP'}$, que cortará al eje X en dos puntos P'' y p''' situados, respectivamente, a izquierda y derecha de P. Es evidente que si $b \geq 0$, entonces $P'''(a + b, 0)$ y si $b < 0$, entonces P'' $(a + b, 0)$.

Proposición 2.—Si a es construible, $-a$ es también construible.

Demostración: Si a es construible, lo es $P(a, 0)$. Trazamos el círculo de centro 0 y radio $\overline{OP}$, que corta al eje X en P y p'. Entonces, $P'(-a, 0)$.

Proposición 3.—Si a y b son construibles, entonces $a \cdot b$ es construible.

Demostración: Basta con demostrar la proposición para el caso $a > 0$,

$b > 0$. Si $a = 0$ ó $b = 0$ es trivial. Si alguno de ellos es negativo basta con tener en cuenta la regla de los signos y aplicar la proposición anterior.

Supongamos entonces a y b construibles y, por tanto, $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ construibles. Los puntos $A'(0, a)$, $B'(0, -b)$ y $P(-1, 0)$ son evidentemente construibles, y como no están alineados, el círculo que pasa por A', B' y P es construible y cortará al eje X en un nuevo punto C, de coordenadas $(a \cdot b, 0)$.

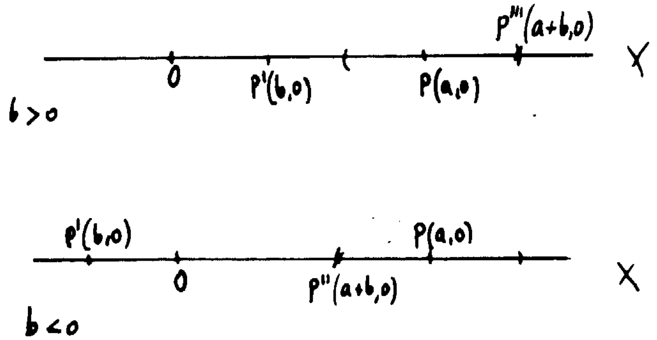


Figura 1

Nota: La justificación de que C tiene coordenadas (a · b , 0) exige el conocimiento de los ángulos inscritos en una circunferencia, así como de la semejanza de triángulos, temas del antiguo bachillerato elemental, pero que no sé si serán conocidos del alumno de 1.º.

En efecto, los triángulos $\widehat{0PA'}$ y $\widehat{0B'C}$ son semejantes porque:

a) Son rectángulos.

b) $\angle A'P0 = \angle A'B'C$, por estar inscritos en la circunferencia y abarcar el mismo arco.

Luego se verifica $\dfrac{0A'}{0C} = \dfrac{0P}{0B'}$, es decir, $\overline{0C} = a \cdot b \Rightarrow C$ tiene coordenadas $(a \cdot b, 0)$.

Proposición 4.—Si $a \neq \emptyset$ es construible, también lo es $1/a$.

Demostración: En efecto, el círculo que pasa por los puntos construibles $A(0, 1)$, $B(0, -1)$ *y* $P(-a, 0)$ cortará el eje X en otro punto P' de coordenadas $(1/a, 0)$. La justificación es análoga a la de la proposición anterior.

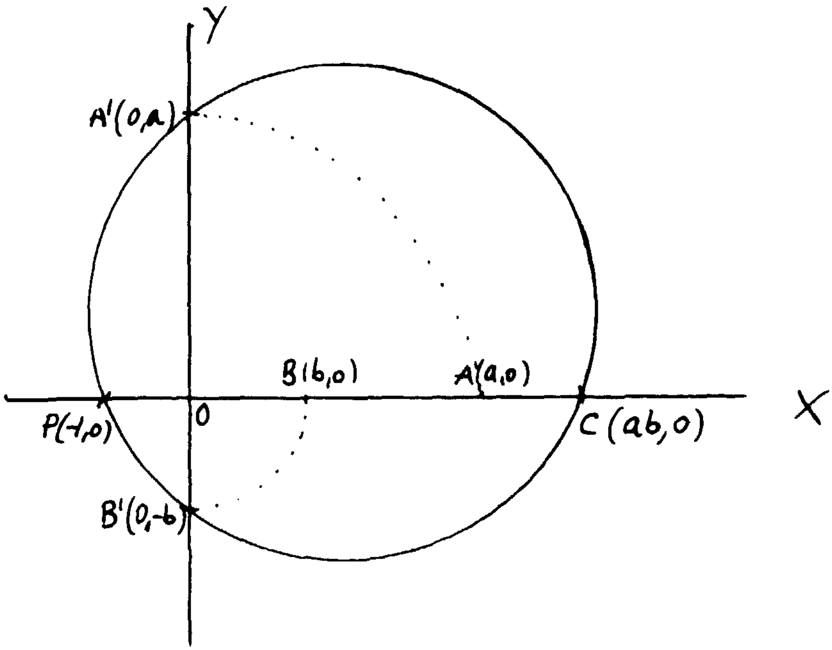


Figura 2

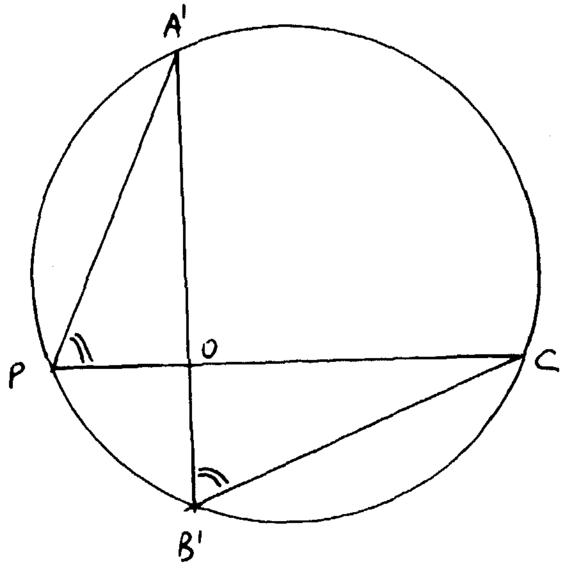


Figura 3

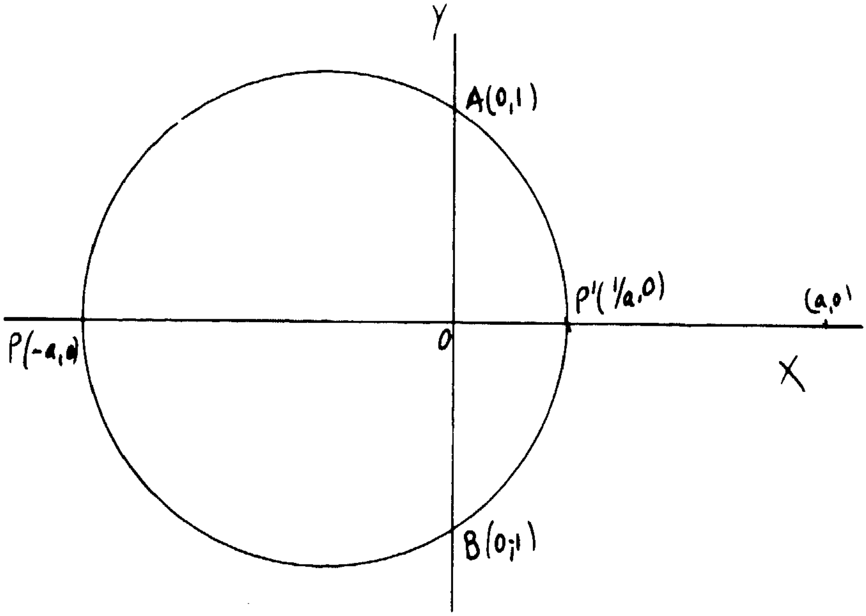


Figura 4

V. Consideraciones finales.

¿Qué números reales son construibles con regla y compás?

a) Es evidente que lo son todos los enteros y todos los racionales, y para ello basta con utilizar las construcciones de las cuatro proposiciones anteriores (se puede proponer al alumno que construya el número racional m/n, en algunos casos sencillos, por supuesto).

b) También lo son algunos irracionales. Como ejercicio se puede proponer la construcción de $\sqrt{2}$, y de este modo descubrirá el alumno que necesita usar más la regla y el compás de lo que esperaba.

Reiterando el proceso se puede construir $\sqrt{n}$, donde n es un número natural.

c) Por aplicación de las proposiciones 1, 2, 3, 4, se puede construir cualquier número real que se exprese como una operación "racional" (sumas, restas, productos y cocientes) de números racionales y raíces cuadradas de dichos números racionales. E incluso, más aún, con raíces de índice una potencia de dos, aunque esto ya no está al alcance del alumno de ningún modo.

d) Desgraciadamente no podemos seguir más adelante, y no podremos hacer comprender al alumno que no todos los números reales son construibles. Ya conocíamos el caso de π.

No hay que ir tan lejos. Un número real tan sencillo para el alumno (acostumbrado a operar con radicales) como $\sqrt[3]{2}$ tampoco es construible. Y este número está directamente relacionado con la famosa duplicación del cubo, imposible con regla y compás. Ya sólo queda hablar un poco de los clásicos teoremas de construcciones y de las fecundas ramas de la matemática que han nacido al intentar resolverlas, lo que demuestra, una vez más, que la matemática entra por los ojos y después se hace abstracción.

Bibliografía

COURANT, R., y ROBBINS, H.: *¿Qué es la matemática?* Ed. Aguilar, 1958.
ARTIN, E.: *La teoría de Galois.* Ed. Vicens-Vives, 1970.
CLARK, A.: *Elementos de álgebra abstracta.* Ed. Alhambra, Colección Exedra, 1974.

COMUNIDAD ESCOLAR

PERIODICO SEMANAL DE INFORMACION EDUCATIVA

Disposiciones legales al dia y un Consultorio para salir de dudas

Porque usted no lee cada dia el Boletin Oficial del Estado, ni el de su respectiva Comunidad Autónoma. Porque necesita saber dónde, cuándo y cómo hacer una instancia, solicitar una beca o presentar una reclamación. COMUNIDAD ESCOLAR le ofrece un seguimiento exhaustivo de todas las disposiciones legales de interés para profesores, padres y alumnos. Y un consultorio muy abierto para que no le queden dudas.

Desde enero, un recreo más a la semana

Una información educativa veraz y contrastada, de alcance nacional e internacional, elaborada por periodistas especializados y servida a Vd., cada semana. Con secciones de Salud, Universidad, Ciencia y Cultura... porque la escuela no agota su curiosidad, ni la nuestra.

Un semanario de información educativa abierto a toda la comunidad escolar

Con el nuevo año crece la comunidad escolar. A partir de enero contará con un nuevo semanario de información educativa.

Maestros y Profesores, padres y pedagogos hallarán en sus páginas la información veraz y contrastada, la opinión plural y contrapuesta, así como una completa guía de servicios diversificados que les permitirán conocer el día a día de la acción educativa.

El salto cualitativo que representa la edicion de un semanario de información educativa ha sido cuidadosamente preparado a la luz de una experiencia enormemente útil y enriquecedora. Desde mediados de abril de 1983, COMUNIDAD ESCOLAR, editado por el Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, ha venido cumpliendo una cita quincenal con un número cada vez mayor de lectores. La experiencia recogida a lo largo de más de año y medio de existencia, las críticas, opiniones y sugerencias recibidos de nuestros lectores y las exigencias que impone el seguimiento puntual de la actualidad informativa en educación, han sido tres poderosas razones que aconsejaban el cambio de periodicidad de nuestra publicación.

La mejor Bolsa de Trabajo y anuncios gratis

La más completa relación de ofertas y demandas de trabajo, tanto de la enseñanza pública como de la privada, aparecidas en boletines oficiales y en las secciones de anuncios de los principales diarios del país. Además, todos los lectores pueden insertar en nuestras páginas anuncios gratuitos no comerciales de hasta un máximo de 50 palabras, para buscar trabajo, hacer permutas o, simplemente, publicar avisos.

Ricardo Cid, Fabricio Caivano, Martinmorales y Romeu

Ricardo Cid Cañaveral seguirá dejando escribir a su boli alborotado, Fabricio Caivano se une a nosotros con un nuevo sacapuntas, Martinmorales promete un humor igual de descarado que hasta ahora y Romeu, acompañado de sus niños y viñetas, estará con nosotros desde enero.

BOLETIN DE SUSCRIPCION

COMUNIDAD ESCOLAR
SEMANAL

Señale ☒ el periodo de suscripcion que le interesa:

Precios de suscripcion (sin gastos de envio)		OFERTA	ORDINARIA
	☐ UN SEMESTRE (24 numeros)	800 ptas.	1.000 ptas.
	☐ UN AÑO (48 numeros)	1.600 ptas.	2.000 ptas.

Forma de pago. Señale ☒

☐ Cheque adjunto ☐ Contra reembolso
☐ Giro postal n.º ☐ Domiciliacion bancaria

D./D.ª ....

Domicilio ....

Localidad .... Tel. ....

.... Codigo Postal ....

Provincia ....

Deseo suscribirme a partir de ....

FIRMA

Sr. Director del Banco/Caja de Ahorros de ....

Sucursal/Agencia Urbana num. ....

Calle ....

Localidad .... Codigo ....

Ruego a Ud. se sirva cargar en mi cuenta núm. ...., hasta nuevo aviso, el importe de la suscripción semestral/anual al periódico COMUNIDAD ESCOLAR del Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Apdo. nº 169 F.D. MADRID.

.... a .... de .... de 198

Firmado:

Combinatoria, hoy

Sugerencias didácticas

Miguel DE GUZMÁN *

La figura de Pedro Puig Adam destaca señeramente entre los matemáticos de nuestro país que se han preocupado por la calidad de nuestra enseñanza matemática. Su personalidad armoniosa, su sentido estético, su buen gusto matemático, dieron a sus orientaciones didácticas un acierto integrador difícilmente repetible. Quiero aprovechar la oportunidad que me brindan los coordinadores de este número monográfico de la *Nueva revista de enseñanzas medias* dedicado a su memoria, para reconocer y agradecer la gran influencia que sobre mí ejerció a través de sus magníficos textos de Segunda Enseñanza escritos en colaboración con Julio Rey Pastor, y a través de sus textos de Geometría Métrica y Proyectiva, que también estudié a fondo con mucho agrado.

¿Qué es la combinatoria?

La combinatoria es un conjunto abigarrado de métodos y resultados con los que se trata de responder a preguntas del siguiente cariz: *¿Cómo y de cuántas maneras diferentes se puede realizar una cierta operación que nos proponemos?*

Es claro que tal pregunta tiene que estar en la base misma de cualquier intento de racionalización matemática de la realidad y, en efecto, la combinatoria, junto con la teoría de números, es la disciplina matemática más antigua. Sus comienzos suelen situarse nada menos que hacia el año 2.200 a. de C., con el libro chino *I Ching (Libro de los cambios),* donde aparecen por primera vez cuadrados mágicos, así como enumeraciones de las combinaciones de los dos símbolos, *yang,* masculino, y *ying,* femenino, con significaciones religiosas diferentes.

* Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid.

Es obvio también que, por su misma naturaleza, la combinatoria ha de invadir un enorme número de disciplinas, teóricas y aplicadas, donde el objeto de estudio depende fundamentalmente de los diferentes modos en que ciertos elementos de la estructura en cuestión interaccionan. Por ello no es sorprendente en absoluto oír invocar resultados de combinatoria y ver estimulado su desarrollo desde campos tan diversos como los siguientes: matemática discreta para la programación de ordenadores, diseño de experimentos, biología molecular, teoría de secuenciación *(scheduling theory)* para el buen funcionamiento de una fábrica o empresa, lógica, economía matemática, teoría de redes, cristalografía, mecánica estadística, teoría de grafos, geometría combinatoria...

La parte de la combinatoria que tradicionalmente se enseña entre nosotros en el nivel secundario no es sino la punta visible de un enorme iceberg. Existen, como veremos en las páginas que siguen, resultados más profundos y tan sencillos, o más, como los que se suelen explicar que presentan un interés extraordinario por la enorme variedad de problemas de muy distinta índole que permiten resolver.

La combinatoria, como la teoría elemental de números, se ha atrofiado notablemente en nuestra Enseñanza Primaria y Secundaria, siendo así que su simplicidad, su profundidad y su interés práctico, deberían haber hecho de ella un campo privilegiado del razonamiento matemático. No ha sido así en otros muchos países donde tales materias, junto con la Geometría Elemental, constituyen el núcleo básico de ideas alrededor del cual gira con provecho la actividad matemática de los alumnos desde los niveles inferiores.

Responsable principal de esta situación es probablemente la estructura de la formación que nuestros licenciados reciben actualmente en las Facultades Universitarias donde el énfasis suele colocarse en la orientación hacia la investigación en áreas más fáciles o más de moda, con grave olvido de que una gran parte de nuestros licenciados se dedicarán posteriormente a la Enseñanza Secundaria. De hecho en nuestras Facultades no suele ofrecerse a los estudiantes de Licenciatura ningún curso de teoría de números y, por supuesto, ninguno donde la combinatoria sea una ocupación central.

Sabor lúdico de la combinatoria

Una de las características atrayentes de la combinatoria es su sabor eminentemente lúdico, lo que podría hacer de ella, bien presentada, una verdadera fuente de interés y placer para nuestros estudiantes. La combinatoria nació en el juego místico *(I Ching)* o profano, y muchas de sus cuestiones más serias tienen su fuente en preguntas surgidas del ocio curioso y contemplativo del que, la experiencia enseña, suelen nacer las más profundas ideas. He aquí algunas de las clásicas más famosas:

1. *El problema de Josephus.*—Hegesipo, en su *De Bello Judaico,* cuenta que los romanos, después de capturar la ciudad de Jotapat, sitiaron a 40 hombres judíos en una cueva de las cercanías. Todos los 40, menos Josephus y otro, estaban dispuestos a matarse antes que entregarse. Los dos menos

decididos no se atrevían a declarar muy abiertamente su disensión. Josephus propuso en cambio que la automasacre tuviera lugar de modo ordenado. Que se colocaran todos en círculo y que, empezando por un lugar establecido, que se matara a cada tercero hasta que quedara sólo uno, que habría de suicidarse. Según cuenta Josephus se colocó en el lugar 16 y su compañero en el lugar 31. De este modo fueron los dos últimos y decidieron seguir viviendo un poco más.

2. *El problema de los oficiales* (Euler, 1779).—El gran Euler, que fue responsable en buena parte de la sistematización de la combinatoria, propuso el siguiente problema: Colocar 36 oficiales de seis rangos diferentes (es decir, seis generales, seis coroneles...) y de seis regimientos diferentes (A, B, C, D, E, F) en una formación cuadrada 6×6 de tal modo que en cada fila y en cada columna no haya ni dos del mismo rango ni dos del mismo regimiento. Euler mismo conjeturó en 1782, probablemente después de tres años de dar vueltas al puzzle, que tal formación es imposible. Más de un siglo pasó hasta que Tarry, mediante una sistemática enumeración, logró demostrar esta imposibilidad en 1900.

3. *El problema de las ocho reinas.*—Otro de los problemas antiguos, propuesto por F. Nauck en 1880. ¿Se pueden colocar ocho reinas en el tablero de ajedrez de modo que ninguna amenace a ninguna otra? ¿Se pueden colocar n reinas en un tablero $n \times n$ con esta misma condición? ¿De cuántas maneras?

4. *El problema del guardarropa.*—También muy antiguo y resuelto también por Euler. El número n de caballeros ensombrerados llegan a la ópera y dejan su sombrero al guardarropas. Este entrega a cada uno un número diferente, pero, un poco olvidadizo, no coloca la otra copia del número en el sombrero. A la salida, decide dar a cada uno que le entregue un número un sombrero al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ni un solo caballero reciba su sombrero? Sorprendentemente la probabilidad es, para cualquier número de caballeros, muy cercana a $1/e = 0{,}367\ldots$

5. *El problema del collar.*—Se trata de componer un collar de n cuentas con cuentas de k colores diferentes. ¿Cuál es el número $c(n, k)$ de collares diferentes que se pueden formar? El problema está resuelto desde hace tiempo y la solución se expresa en términos de la llamada función de Euler $\varphi(m)$ que es $\varphi(1) = 1$ y para $m > 1$ expresa el número de números naturales menores que m y primos con m. Con esto se tiene

$$c(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \varphi(d)\, k^{\frac{n}{d}}$$

es decir, el sumatorio se lleva a cabo por los números d divisores de n.

6. *El problema de las niñas del colegio* (Kirkman, 1850).—En 1850, T. P. Kirkman propuso el siguiente problema: La maestra de una clase de 15 niñas tenía la costumbre de sacarlas de paseo diariamente agrupándolas de tres en tres. Se trata de ayudarle a hacerse con una lista de grupos para cada uno de los siete días de la semana de modo que ninguna niña pasee con ninguna otra más de una vez por semana.

7. *El problema de empaquetamiento de esferas* (Newton, 1694).—Es fácil ver que en un plano se pueden colocar seis discos iguales tangentes a otro del mismo tamaño y cada uno tangente a otros dos de los seis.

En 1694 surgió una disputa entre Isaac Newton y David Gregory. ¿Cuántas esferas iguales tangentes a una del mismo tamaño pueden colocarse en el espacio sin que se solapen? Con un poco de cálculo se puede ver que si se sitúa un cubo de tamaño adecuado concéntrico con la esfera interior se pueden colocar otras 12 esferas del mismo radio centradas en los puntos medios de las 12 aristas del cubo de tal modo que sean tangentes a la esfera interior y cada una sea tangente a otras cuatro además de la central. Pero también se pueden colocar 12 esferas tangentes a una central sin que se solapen si se les centra en los doce vértices de un icosaedro regular apropiado concéntrico con la esfera interior. En este caso las esferas exteriores no son tangentes entre sí, sino que dejan amplio espacio entre ellas. Parece, pues, que tal vez colocándolas más astutamente quepa aún otra esfera al menos y así se puedan colocar 13 esferas iguales tangentes a una central del mismo tamaño sin que se solapen. Newton defendía el 12, Gregory el 13, pero ninguno supo demostrar su opción. En 1874 se demostró por fin que Newton tenía razón. En cuatro dimensiones aún hoy no se sabe si el número para el problema análogo será 24, 25 ó 26.

8. *El problema del viajante.*—Un agente comercial debe ofrecer sus productos en todas las ciudades de España de más de 30.000 habitantes saliendo de Sevilla y regresando finalmente a Sevilla. Los desplazamientos le ocasionan unos gastos cuya cuantía conoce. ¿Cómo debe programar su itinerario para que la suma total de sus gastos sea lo menor posible? La elaboración de tal itinerario de un modo manejable por los computadores existentes en la actualidad es todavía un problema abierto.

* * *

Cuestiones como las precedentes podrían multiplicarse fácilmente. Por citar algunos más de entre los nombres más famosos: el problema de los puentes de Königsberg, el problema de los cuatro colores, el problema de las tres granjas y los tres pozos, el problema de la iluminación de Hadwiger, el problema de Borsuk, el problema de Lebesgue sobre forma y área del recubridor universal mínimo para convexos de diámetro 1... Aunque en su origen hayan sido preguntas frívolas y curiosidades aparentemente sin mayor importancia, resulta que los métodos desarrollados para contestarlas han servido y siguen sirviendo para resolver problemas nada pueriles, sino cargados de profundas repercusiones en disciplinas tan serias como la mecánica estadística, el diseño de experimentos o la programación de ordenadores.

En lo que sigue trataré de presentar escuetamente una técnica interesante de la combinatoria a fin de mostrar su sabor y de hacer entrever algunas posibilidades no explotadas de este campo en la Enseñanza Secundaria.

Una muestra: el principio de inclusión y exclusión

Supongamos que en el plano se dan tres regiones A, B, C en la situación general de la figura. Supongamos asimismo que la señalan *n* puntos distribuidos en las diferentes partes que A, B, C determinan. En la figura, $n = 20$.

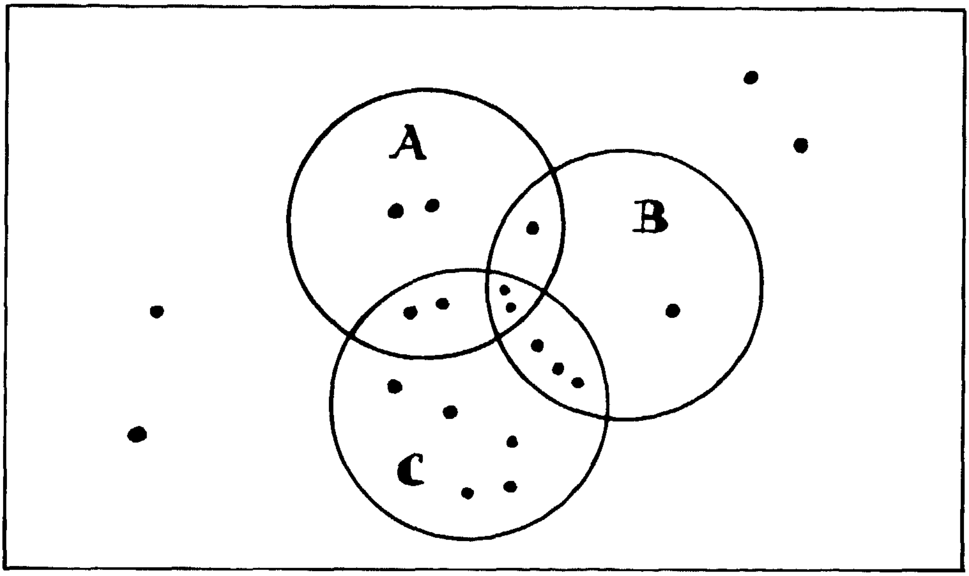


Figura 1

Sucede en muchas aplicaciones que interesa contar *el número de puntos que no están en ninguna de las regiones.* Si se conoce el número total de puntos *n* y el número de puntos en las regiones disjuntas $A-(B \cup C)$, $B-(A \cup C)$, $C-(A \cup B)$, $(A \cap B)-C$..., que A, B, C, determinan en su unión, es claro que la diferencia entre *n* y la suma de estos números nos dará el número de puntos que buscamos. Pero estos números no se suelen conocer, sino más bien se sabe el número de puntos en A, en B, en C, en $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Entonces el número de puntos en ninguna de las regiones se puede calcular del siguiente modo. Contamos todos los que hay, es decir, *n*. Restamos los que hay en A, B, C. Entonces hemos descontado dos veces los que hay en $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y tres veces los que hay en $A \cap B \cap C$. A fin de arreglar las cosas habrá que sumar los que hay en $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, pero entonces se cuentan tres veces los de $A \cap B \cap C$. Por eso habrá que restar los de $A \cap B \cap C$.

Con esto resulta:

$$\text{n.}^\circ\ (\text{fuera de } A \cup B \cup C) = n - [\text{n.}^\circ\ (A) + \text{n.}^\circ\ (B) + \text{n.}^\circ\ (C)] +$$
$$+ [\text{n.}^\circ\ (A \cap B) + \text{n.}^\circ\ (A \cap C) + \text{n.}^\circ\ (B \cap C)] - \text{n.}^\circ\ (A \cap B \cap C)$$

Si lo anotamos así:

E (0) = n.° de puntos en ningún conjunto.

W (0) = n.

W (1) = n.° de puntos en al menos 1 conjunto.

W (2) = n.° de puntos en al menos 2 conjuntos.

W (3) = n.° de puntos (al menos) 3 conjuntos.

resulta la fórmula

$$E(0) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3)$$

La consideración del plano, puntos, regiones, es sólo una ayuda para fijar la imaginación. Podemos considerar n elementos que pueden tener las propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que no son excluyentes. Entonces, llamando

E (0) = n.° de elementos con ninguna de las propiedades.

W (0) = n.

W (r) = n.° de elementos con al menos r de las propiedades.

obtenemos análogamente

$$\boxed{E(0) = W(0) - W(1) + W(2) \ldots + (-1)^N W(N)}$$

La fórmula, que se demuestra mediante un recuento semejante al anterior, se denomina *fórmula de la criba* (de Da Silva y Sylvester). Con un poco más de esfuerzo, igualmente asequible en una Enseñanza Secundaria, se puede obtener la fórmula más general.

$$E(r) = \binom{r}{r} W(r) - \binom{r+1}{r} W(r+1) + \ldots + (-1)^{N-r} \binom{N}{r} W(N)$$

que proporciona E (r), el número de elementos con exactamente r de las N propiedades en función de los números W (r), de elementos con al menos r de las N propiedades. Veamos algunas aplicaciones interesantes de estas fórmulas.

Problemas de las descolocaciones.—Consideremos los números 1, 2, 3, ..., s. Una permutación $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ será una *descolocación* cuando para todo $j = 1, 2, \ldots, s$ se verifica $a \neq j$, es decir, *ningún número se encuentra en su sitio*. Tratamos de contar el número de descolocaciones aplicando la fórmula de la criba. Nuestros elementos serán las $n = S!$ permutaciones. Las propiedades que consideramos posibles para la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_s$ son las s propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_s$, significando P_j que en la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_s$ se verifica $a_j = j$, es decir, que hay un número al menos en su sitio. Con el lenguaje de la fórmula de la criba es claro que el número de descolocaciones D_s de los s elementos será

$$E(0) = W(0) - W(1) + \dots + (-1)^s W(s)$$

Nos bastará calcular W (r), es decir, el número de permutaciones en las que al menos r números están en su sitio. La colocación de estos r números en su sitio nos ofrece $\binom{s}{r}$ posibilidades. Como los otros s-r números pueden estar en orden arbitrario, el número W (r) será $\binom{s}{r}(s-r)! = \frac{s!}{r!}$. Por tanto,

$$D_s = E(0) = S! - \frac{S!}{1!} + \frac{S!}{2!} - \frac{S!}{3!} + \dots (-1)^s \frac{S!}{s!} =$$

$$= s! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots (-1)^s \frac{1}{s!}\right)$$

Así, por ejemplo, $D_8 = 14.833$.

Propongámonos contar el número de formas diferentes en que ocho torres se pueden colocar en el tablero de ajedrez sin que ninguna amenace a otra y de modo que ninguna esté en la diagonal principal negra. Es fácil ver que este número es precisamente el de descolocaciones de ocho elementos y así es $D_8 = 14.833$.

El problema del guardarropa.—El problema 4 de los propuestos en la sección anterior se resuelve fácilmente con la fórmula de la criba. Si el número de caballeros es s, el número de modos posibles de entregar los sombreros sin que haya ni uno solo que se lleve el suyo es el número de descolocaciones, es decir, D_s. El número de todos los modos posibles de entregar los sombreros a los s caballeros es el número de permutaciones de s elementos, es decir, s! Por tanto, la probabilidad de que ni uno solo se lleve su sombrero es

$$\frac{D_s}{s!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^s \frac{1}{s!}$$

Como

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^s \frac{1}{s!} + (-1)^{s+1} \frac{1}{(s+1)!} + \dots$$

resulta

$$\left| \frac{D_s}{s!} - e^{-1} \right| = \frac{1}{(s+1)!} - \frac{1}{(s+2)!} + \dots < \frac{1}{(s+1)!}$$

Como $\frac{1}{(s+1)!}$ es un número muy pequeño en cuanto s es algo grande, resulta que la probabilidad que nos ocupa es *prácticamente* $0{,}367\ldots = e^{-1}$ *independientemente del número de sombreros.* Un resultado ciertamente llamativo.

Problema de las coincidencias.—Se organiza un juego para dos jugadores A y B.

Cada uno toma una baraja española. Cada uno se queda con las diez cartas de bastos y las baraja. A continuación los dos van sacando al tiempo una a una de sus cartas. Comparan las cartas sacadas de cada vez. El jugador A gana si hay exactamente una coincidencia, el jugador B gana si no hay ninguna coincidencia. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

Las mismas consideraciones que en el problema de los sombreros nos conduce a la solución, utilizando aquí también la fórmula de la criba y su generalización para E (1).

La función φ de Euler.—La fórmula de la criba tiene aplicaciones interesantes en teoría de números. Un ejemplo sencillo es el siguiente. Nos damos un sistema de N números naturales $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ tales que cada dos de ellos son primos entre sí. Tratemos de contar el número de números naturales *k* menores o iguales que un cierto *n* tales que ningún a_i divide a k.

Para la aplicación de la fórmula de la criba nuestro conjunto de elementos será el de los números $1, 2, 3, \dots, n$ y la propiedad P_i, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ será la de ser divisible por a_i. Como cada par de los números a_i son primos entre sí resulta que si *k* tiene las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \dots, P_{i_r}$ es que *k* es divisible por el producto $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_r}$. El número de naturales *k* menores o iguales que *n* divisibles por $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ es claramente

$$\left[\frac{n}{a_{i_1}, a_{i_2} \dots, a_{i_r}}\right]$$

representando por [x] para $x \geq 0$ el máximo entero menor o igual que x. Por lo tanto, el número de naturales menores o iguales que n que son divisibles por al menos r de los números $a_1, a_2, \dots, a_N$ es precisamente

$$W(r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N} \left[\frac{n}{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}}\right]$$

y así, por la fórmula de la criba, el número de naturales k, $k \leq n$, tales que ningún a_i divide a k es

$$n - \sum_{1 \leq i \leq N} \left[\frac{n}{a_i}\right] + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[\frac{n}{a_i\, a_j}\right] - \dots +$$

$$+ (-1)^N \left[\frac{n}{a_1, a_2, \dots, a_N}\right]$$

Con esto es fácil obtener una expresión sencilla para la llamada función de Euler. Ponemos $\varphi(1) = 1$ y para $n > 1$, $\varphi(n)$ es el número de naturales k, $k \leq n$, tales que k es primo con n.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_N$ los números primos divisores de n, entonces $\varphi(n)$ es el número que hemos hallado arriba poniendo $a_i = p_i$ y, por tanto,

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{n}{P_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{P_i\, P_j} + \ldots (-1)^N \frac{n}{P_1, P_2, \ldots, P_N}$$

Pero esta expresión se puede escribir más sencillamente, como es fácil ver:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{P_N}\right)$$

Así, por ejemplo, si $n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ y

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$$

Efectivamente, los naturales k, $1 \leq k \leq 60$, primos con 60 son los 16 siguientes:

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 59

Una sugerencia final

En la etapa actual del desarrollo de la Matemática, en que la Matemática discreta tiende hoy a ocupar un lugar eminente, la combinatoria proporciona una plataforma de acercamiento en multitud de problemas interesantes, profundos, de gran alcance y suficientemente simples como para ser explicados con provecho en nuestra Enseñanza Media.

La combinatoria, hoy, no se reduce, ni mucho menos, como la mayor parte de nuestros manuales pudieran sugerir, a triviales manipulaciones con combinaciones, permutaciones, variaciones y el triángulo de Tartaglia. Una nueva inspección a las obras reseñadas a continuación lo puede poner rápidamente de manifiesto.

La combinatoria presenta problemas estimulantes para cuya solución no es necesario hacerse con un instrumental complicado. Basta, como decía Gauss, con *contar inteligentemente* y con hacer *tentativas planificadas*. Las ideas están cerca de los elementos, son simples, variadas y dan fácilmente una sensación de la riqueza, profundidad y potencia del método matemático. ¿Por qué no explotarlas más a fondo en nuestra enseñanza? La bibliografía que sigue puede ayudar a introducirse en el campo con provecho.

HADWIGER, H., y DEBRUNNER, H.: *Combinatorial Geometry in the Plane* (translated by Victor KLEE) (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964).
HALL, M., Jr.: *Combinatorial Theory* (Blaisdell, Waltham, Mass., 1967).
ORE, O.: *Graphs and their Uses* (The Math. Assoc. of America, Washington, 1963).
ROUSE BALL, W. W., and COXETER, H. S. M.: *Mathematical Recreations and Essays*[12] (Univ. of Toronto, Toronto, 1974).
RYSER, H. I.: *Combinatorial Mathematics* (The Math. Assoc. of America, John Wiley and Sons., New York, 1963).

Una bibliografía de didáctica de las matemáticas

Luis PUIG y **Fernando CERDAN** *

Introducción

Hacer una bibliografía de didáctica de las matemáticas tropieza inevitablemente con la dificultad de ser ésta un campo de actividad múltiple y no una disciplina científica con objeto y método perfectamente definido. Historia de las matemáticas, teoría de las ciencias, teorías del desarrollo, teorías del aprendizaje, teorías de la instrucción, teorías del *curriculum*, materiales, tecnología, juegos y pasatiempos..., han de ser tomados en cuenta si se quiere que la didáctica pase de ser "el arte de enseñar" a ser el estudio y resolución de los problemas que se plantean en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un contexto socio - cultural determinado.

La difícil conjunción de tantas cosas tan diversas ha forzado, si se quería poner un poco de orden en tal maraña y no se quería exceder en mucho el espacio asignado, a tomar decisiones sobre qué libros incluir y cuáles no y cómo agruparlos, que en gran medida dependen de nuestras limitaciones y manías, aunque se pretenda justificar las opciones tomadas.

Se ha excluido, por ejemplo, toda referencia a la ola de informática que nos invade porque nos ha parecido que tiene particularidades suficientes como para constituir un capítulo aparte y que, en todo caso, la avalancha publicitaria que la acompaña es suficiente para que cualquiera pue-

* Profesores de la Escuela Universitaria de formación del profesorado de E. G. B. de Valencia.

da estar (excesivamente) informado sobre el asunto. Ejemplos de lo que podría constituir una bibliografía sobre el particular son el libro propagandístico de Seymour Papert "Mindstorms" (Basic Books, New York, 1980), el punto de vista más escéptico de Uri Leron en "Some Problems in Children's Logo Learning" (en Hershkowitz, ed., 1983, ver apartado B), el anuario de 1984 del NCTM, que informa sobre el estado de la cuestión en USA (Hansen, V. P., 1984, *Computers in Mathematics Education*, NCTM, Reston, VA) o el primer informe elaborado por la International Commission on Mathematical Instruction ("L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement", reproducido en *Mathématique et Pédagogie*, núm. 49, pp. 97-107, noviembre-diciembre 1984).

Tampoco se han incluido libros de problemas, juegos y pasatiempos, con la excepción del Polya y Kilpatrick (1974), por haber ejemplos suficientes en el mercado de fácil adquisición y generalmente conocidos.

Por otro lado, se han excluido también sistemáticamente las publicaciones producidas por grupos de trabajo, pese a que entre ellas se encuentran los trabajos más valiosos realizados en España en los últimos años.

En general se ha puesto más énfasis en las publicaciones extranjeras que en las españolas, con el criterio discutible de que éstas pueden ser conocidas por el lector y aquéllas no con la misma facilidad. Huelga decir que no se ha pretendido ser exhaustivo, por ignorancia (por ejemplo, de Alemania o la URSS sólo se dan referencia a través de traducciones) o a propósito. Se ha intentado sólo ofrecer ejemplos significativos de las distintas actividades que configuran el campo de trabajo que para nosotros puede etiquetarse con el nombre de "didáctica de las matemáticas". Las opciones tomadas han hecho dejar fuera muchos libros que merecerían estar e incluir algunos cuyo interés puede parecer tangencial o incluso dudoso.

1. Teoría de la ciencia

Este apartado y los dos que le siguen tienen caracteríticas distintas de los demás, ya que constituyen dominios relativamente externos a la didáctica de las matemáticas, pero que le proporcionan el suelo epistemológico. Al contrario de lo que se acaba de afirmar, que constituye el criterio general, aquí los libros en castellano son mayoría.

Para este apartado en particular, se ha hecho una selección de referencias de teoría de la ciencia parcial y partidista (con la excepción quizá de los libros de De Lorenzo y Le Lionnais) que tiene como eje central la obra de Lakatos, de cuyas ideas epistemológicas puede derivarse una "revolución" en la enseñanza de las matemáticas (cf. Joseph Agassi, "On Mathematics Education. The Lakatosian Revolution", *For the Learning of Mathematics*, vol. 1, pp. 27-31).

FEYERABEND, P.: *Tratado contra el método*. Tecnos, Madrid, 1981.

HANSON, N. R.: *Patrones de descubrimiento. Observación y explicación*. Alianza, Madrid, 1977.

HANSON, N. R.: *Constelaciones y conjeturas*. Alianza, Madrid, 1980.

HOFSTADTER, D. R.: *Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Brain*. Harvester, London, 1979.

KHUN, T. S.: *La estructura de las revoluciones científicas*. FCE, Madrid, 1977.

LAKATOS, I.: *Pruebas y refutaciones* Alianza, Madrid, 1978.

LAKATOS, I.: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, vol. 2. Alianza Ed., Madrid, 1981.
LE LIONNAIS, F.: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* EUDEBA, Buenos Aires, 1962.
LORENZO, J. DE: *La matemática y el problema de su historia.* Tecnos, Madrid, 1977.
LORENZO, J. DE: *El método axiomático y sus creencias.* Tecnos, Madrid, 1980.
POINCARE, H.: *Ciencia y método.* Espasa Calpe, Madrid, 1963.
POINCARE, H.: *La ciencia y la hipótesis.* Espasa Calpe, Madrid, 1963.
POPPER, K. R.: *La lógica de la investigación científica.* Tecnos, Madrid, 1977.

2. Historia de las matemácas

El papel de la historia de las matemáticas en la comprensión de la actividad matemática y sus implicaciones en el diseño del *curriculum* y la formación de profesores fue muy discutido a finales de la década de los 70, desde que la revista *Science* publicó en 1974 el polémico artículo de Stephen Brush, "Should the History of Mathematics be rated X?".

Xavier Valls ha recopilado unos "Materiales para la discusión de la historia de la ciencia y su posible uso didáctico" (EUPEGB de Gerona, manuscrito), que la describe. David Pimm, en "Why the History of Mathematics should not be rated X. The Need for an Appropiate Epistemology of Mathematics for Mathematics Education" (incluido en *Zweng*, 1982, ver apartado 9), defiende lo que el título indica, y Hans Freudenthal, en "Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics?" *(For the Learning of Mathematics*, vol. 2, pp. 30-33), rechaza el uso de anécdotas históricas que se sacan de la manga al comienzo de cada tema, abogando por la historia como conocimiento integrado con el conjunto del *curriculum* de matemáticas.

Una opinión menos optimista se puede encontrar en las discusiones que se produjeron en el Simposio "La Historia de las Ciencias y la Enseñanza", recogidas en las Actas del Simposio (ICE, Universidad de Valencia, 1980).

Aquí hemos relacionado, aparte de los libros que figuran por méritos propios, un conjunto de libros de historia en castellano ("populares" e incluso malos) como fuente de anécdotas históricas, y los dos que describen la opción bourbakista (Bourbaki, 1972, y Dieudonné, 1978).

Por otra parte, Groupe Inter-IREM (1982 a, 1982 b), Hocquenghem et al. (1981) y NCTM (1969) son libros diseñados para su uso más o menos directo en las clases, para los que la historia no se limita a una sucesión de anécdotas, pero que la hacen aparecer de forma más explícita de lo que Freudenthal mantiene que debe hacerse.

BABINI, S.: *Historia sucinta de las matemáticas.* Espasa Calpe, Madrid, 1969.
BOLL, M.: *Historia de las matemátiacs.* Diana, México, 1976.
BOURBAKI, N.: *Elementos de historia de la matemática.* Alianza, Madrid, 1972.
COLERUS, E.: *Breve historia de las matemáticas*, 2 vols. Doncel, Madrid, 1973.
COLLETE, J. P.: *Histoire des mathématiques*, vols. 1 et 2. Ed. de Rénouveau Pédagogique, Ottawa, 1973.
DIEUDONNÉ, J. (ed.): *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, 2 vols. Hermann, Paris, 1978.
DOU, A.: *Fundamentos de la matemática.* Labor, Barcelona.
GROUPE INTER-IREM: *Histoire des mathématiques pour les lycées.* CEDIC, Paris, 1982.
GROUPE INTER-IREM: *Le rigueur et le calcul. Documents historiques et épistémologiques.* CEDIC, Paris, 1982.
HOCQUENGHEM, M. L., *et al.*: *Histoire des mathématiques pour les collèges.* CEDIC, Paris, 1981.

NCTM: *Historical Topics for the Mathematics Classroom. 31th Yearbook.* NCTM, Reston, VA, 1969.

RADICE, L.: *La matemática de Pitágoras a Newton.* Laia, Barcelona, 1983.

REY PASTOR, J., y BABINI, J.: *Historia de las matemáticas,* vol. I. Gedisa, Barcelona, 1984.

VERA, F.: *Breve historia de la geometría.* Losada, Buenos Aires, 1963.

VERA, F. (ed.): *Científicos griegos.* Aguilar, Madrid, 1970.

3. Visión general de las matemáticas. Aspectos culturales

No hay didáctica posible sin un conocimiento de la materia, pero no es éste el lugar de relacionar textos de matemáticas. En efecto, un texto de álgebra, por ejemplo, suele presentarse como autosuficiente, buscando la coherencia interna y desarrollando un conocimiento minucioso de ésta. Sin embargo, cuando se trata de la enseñanza, el análisis previo de la materia que hay que enseñar requiere, a nuestro entender, mirarla desde otros puntos de vista distintos del de la coherencia interna. En este sentido, hemos seleccionado libros que se plantean el lugar de las matemáticas en el mundo, o que presentan las ideas matemáticas relacionadas con otras cosas, o las presentan de forma particularmente clara, original o inusual.

Los clásicos Alexandrov y otros (1973) y Courant y Robbins (1962) presentan una visión general del conjunto de las matemáticas; Newman, ed. (1969) y Kline (1974) hacen lo mismo a través de una recopilación de textos, y Kline (1962,1972) presenta también el conjunto de las matemáticas poniendo más énfasis en el origen social de las ideas matemáticas y en su influencia en la sociedad, a lo largo de la historia. Steen, ed. (1978, 1981) y Davis and Hersh (1982), más recientes, completan el panorama.

El resto de los libros tratan partes o conceptos fundamentales desde algunos de los puntos de vista señalados; por ejemplo, Griffiths (1976) presenta una aproximación sugestiva a la topología de superficies.

ALEXANDROV y otros: *Las matemáticas: su contenido, método y significado,* 4 vols. Alianza, Madrid, 1973.

BUDDEN, F. J.: *La fascination des groupes.* OCDL, Paris, 1976.

COURANT, R., y ROBBINS: *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid, 1962.

COXETER, H. S. M.: *Fundamentos de geometría.* Limusa Wiley, México, 1971.

DANTZIG, T.: *El número, lenguaje de la ciencia.* Hobbs Sudamericana, Buenos Aires, 1971.

DAVIS, M., and HERSH, R.: *The Mathematical Experience,* Penguin, London, 1982.

EVES, H.: *Estudio de las geometrías,* 2 vols. UTEHA, México, 1969.

GRIFFITHS, H. B.: *Surfaces.* CUP, London, 1976 (trad. francesa, *Surfaces.* CEDIC, Paris, 1977).

HALMOS, P. R.: *Teoría intuitiva de conjuntos.* CECSA, 1965.

HILBERT, D., and COHN-VOSSEN, S.: *Geometry and the Imagination.* Chelsea Publishing Co., New York, 1952.

KLINE, M.: *Mathematics: A Cultural Approach.* Addison Wesley, New York, 1962.

KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Addison Wesley, New York, 1972.

KLINE, M. (ed.): *Matemáticas en el mundo moderno. Selecciones de Scientific American.* Blume, Barcelona, 1974.

KLINE, M.: *Mathematics: The Loss of Certainty.* Oxford University Press, Oxford, 1980.

NEWMAN, R. S. (ed.): *Sigma. El mundo de las matemáticas,* vols. 1 a 5. Grijalbo, Barcelona, 1969.

PEDOE, D.: *La geometría en el arte.* Gustavo Gili, Barcelona, 1979.

RUSSELL, B.: *Los principios de la matemática.* Aguilar, Madrid, 1948.

STEEN, L. A. (ed.): *Mathematics Today: Twelve Informal Essays.* Springer, New York, 1978.

STEEN, L. A. (ed.): *Mathematics Tomorrow,* Springer, New York, 1981.

WEYL, H.: *La simetría.* Promoción Cultural, Madrid, 1975.

4. Curriculum

En este apartado se han incluido libros que tratan desde teorías generales de diseño de curriculum de cualquier materia (Gimeno, 1981) a ejemplos muy particulares de curricula de matemáticas (School Council, 1975-78), pasando por una teoría de evaluación que ha tenido gran influencia social (Bloom, 1956) o juicios críticos sobre curricula diseñados casi exclusivamente a partir de una teoría de evaluación (Gimeno, 1983).

Griffiths and Howson (1974) y Howson, Keitel and Kilpartrick (1981) examinan los factores que intervienen en el diseño, desarrollo e implementación de los curricula de matemáticas (sociedad, profesores, niños y matemáticas). En el segundo se presenta una clasificación de los curricula diseñados a partir de la reforma de los 60, con ejemplos significativos de cada uno de los tipos que muestra cómo el dar más peso a un factor u otro los determinan. Además señalan las estrategias que se han seguido o pueden seguirse para la introducción de reformas o innovaciones en éstos, en particular la estrategia investigación-desarrollo-difusión.

Cockcroft, ed. (1982) es un informe realizado por encargo de las autoridades educativas inglesas, donde se da cuenta del estado de la enseñanza de las matemáticas en su totalidad y se señala el marco en el que ha de situarse el diseño de nuevos curricula. NTCM (1981 b) es un informe similar en USA, y Shufelt, ed. (1983), la situación un año después. Kuntzmann (1976) presenta la evolución histórica de los curricula matemática en Francia en donde, como en España, los programas están fijados por el Ministerio competente. CBMS (1975) es un análisis de un curriculum particular.

Están también incluidos los informes de la UNESCO y algunos libros que discuten la reforma de los 60.

El resto de los libros son o libros de texto correspondientes a curricula de otros países, o libros en los que se analiza el curriculum de una parcela de las matemáticas, o se indican las directrices que deben seguirse en su enseñanza.

AMA: *The Teaching of Secondary School Mathematics.* CUP, London, 1973.

BLOOM, B. S.: *Taxonomy of Educational Objetives.* Longman, New York, 1956 (trad. castellana, *Taxonomia de los objetivos educativos.* Marfil, Alcoy, 1979).

BRENY, H. (ed.): *The Teaching of Statistics in Schools.* International Statistical Institute, 1976.

CASTELNUOVO, E.: *La via della matematica. I numeri.* La Nuova Italia, Firenze, 1977.

CASTELNUOVO, E.: *La matematica. La geometria.* La Nuova Italia, Firenze, 1979 (trad. castellana, *La matemática. La geometría.* Ketres, Barcelona, 1979).

CBMS: *Overview and Analysis of School Mathematics. Grades K-12.* NCTM, Reston, VA, 1975.

CHOQUET, G.: *L'Enseignement de la géométrie.* Hermann, Paris, 1964.

COCKCROFT, W. H. (ed.): *Mathematics Counts.* HMSO, London, 1982.

COOKE, C., and ANDERSON, I.: *The Mathematics Curriculum. Counting and Configurations.* Blackie, London, 1978.

ENGEL, A.: *L'enseignement des probabilités et la statistique,* 2 vols. CEDIC, Paris, 1979.

ENGEL, A.; VARGA, T., y WALSER, W.: *Hasard ou stratégie?* OCDL, Paris, 1976.

FIELKER, D.: *Removing the shakles of Euclid.* ATM, Nelson, Lancs, 1984.

GIMENO, J.: *Teoría de la enseñanza y desarrollo del curriculum.* Anaya, Madrid, 1981.

GIMENO, J.: *La pedagogía por objetivos: la obsesión por la eficiencia.* Morata, Madrid, 1983.

GLAYMANN, M., y VARGA, T.: *Las probabilidades en la escuela.* Teide, Barcelona, 1975.

GRIFFITHS, H. B., and HOWSON, A. B.: *Mathematics: Society and Curricula.* CUP, London, 1974.

HOWSON, A. B.; KEITEL, C. H., and KILPATRICK, J.: *Curriculum. Development in Mathematics*. CUP, London, 1981.
KLEIN, F. (s. f.): *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior*, 2 vols. Biblioteca Matemática, Madrid.
KLINE, M.: *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Siglo XXI, Madrid, 1973.
KLINE, M.: *Why the Professor Can't Teach*. St. Martin's Press, New York, 1977.
KUNTZMANN, J.: *Evolution et étude critique des enseignements de mathématique*. CEDIC, Paris, 1976.
LING, J.: *The Mathematics Curriculum. Mathematics Across the Curriculum*. Blackie, London, 1977.
MATTHEWS, G. (ed.): *Mathematics Through School*. John Murray, London, 1972.
MORRIS, R. (ed.): *Estudios en educación matemática*, 2 vols. UNESCO, Paris, 1981.
NCTM: *Geometry in the Mathematics Curriculum. 36th Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1973.
NCTM: *Application in School Mathematics. 1979 Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1979.
NCTM: *Teaching Statistics and Probability. 1981 Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1981 a.
NCTM: *Priorities in School Mathematics. Executive Summary of the PRISM Project*. NCTM, Reston, VA, 1981 b.
Nuffield Mathematics Project. John Murray, London, 1971.
OCDE (s. f.): *Programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*. OCDE, Paris.
PIAGET y otros: *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza, Madrid, 1978.
SANTALÓ, L. A.: *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Docencia, Buenos Aires, 1981.
SCHOOLS COUNCIL: *Mathematics for the Majority*. Chatto & Windus, London, 1970-74.
SCHOOLS COUNCIL: *Mathematics Applicable*. Heinemann, London, 1975-1978.
SERVAIS, W., y VARGA, T.: *Teaching School Mathematics*. Penguin Books - UNESCO, Paris, 1971.
SHUFELT, G. (ed.): *The Agenda in Action*. NCTM, Reston, VA, 1983.
SMP: *Teacher's Guides for Books A, B, C, D, E, F, G & H*. Cambridge University Press, London, 1969.
SMP: *SMP 11-16*. Cambridge University Press. London, 1983.
THAWAITES, B. (ed.): *The School Mathematics Project. The First Ten Years*. Cambridge University Press, London, 1972.
UNESCO: *New Trends in Mathematics Teaching (1966)*, vol. I. UNESCO, Paris, 1967.
UNESCO: *New Trends in Mathematics Teaching (1970)*, vol. II. UNESCO, Paris, 1970.
UNESCO: *New Trends in Mathematics Teaching (1972), vol. III*. UNESCO, Paris, 1973.
UNESCO: *New Trends in Mathematics Teaching*, vol. IV. UNESCO, Paris, 1979.
WHYNE, W.: *The Mathematics Curriculum: Geometry*. Blackie, London, 1977.

5. Aprendizaje e instrucción

En este apartado se da una visión general de los trabajos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas desde perspectivas predominantemente psicológicas.

Ausubel and Robinson (1971), Bruner (1978) y Gagné and Briggs (1974) son ejemplos de tres autores populares que tratan los problemas generales del aprendizaje y la instrucción.

En lo relativo al aprendizaje y la instrucción en matemáticas, Resnick and Ford (1981) es un tratado general; Brainerd, ed. (1982), Ginsburg, ed. (1983) y Lesh and Landau, ed. (1983) presentan un panorama casi completo de lo que se está haciendo actualmente en USA, y Kilpatrick and Wirszup (1969 - 75) y Krutevskii (1976) constituyen la información más fácilmente accesible de la URSS.

No se incluye aquí la obra de Piaget (ver el apartado 10), pero sí algunos ejemplos de su escuela (Copeland, 1974; Kamii, 1978, 1982; Lovell, 1977). Por su parte, los que trabajan en el paradigma del "information processing system" están representados por Simon (1979), aunque este libro estaría mejor clasificado en un apartado de estudios cognitivos (ver también en el apartado 7, Newell and Simon, 1972).

Bouvier (1981) es el único ejemplo de los problemas del aprendizaje desde el punto de vista de un matemático profesional, ya que los trabajos cruciales de Freundenthal se citan en el apartado 10.

Finalmente, Nimier (1976) se ha incluido aquí porque conviene considerar los procesos de aprendizaje no sólo desde el punto de vista de su eficacia, sino tener en cuenta que se está tratando con personas y no olvidar por tanto la componente efectiva.

AUSUBEL, D. P., and ROBINSON, F. G.: *School Larning*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., London, 1971.

BOUVIER, A.: *La mystification mathématique*. Hermann, Paris, 1981.

BRAINERD, C. J.: *Children Logical and Mathematical Cognition: Progress in Cognitive Development Research*. Springer Verlag, New York, 1982.

BRUNER, J.: *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1978.

COPELAND, R. W.: *How Children Learn Mathematics. Teaching Implication of Piaget's Research*. McMillan, Publishing Co., New York, 1974.

CROSSWHITE, F. J., and REIS, R. E. (eds.): *Organizing for Mathematics Instruction. 1977 Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1977.

GAGNE, R. M., and BRIGGS, L. J.: *Principies of instructional Design*. Hall, Rinehart & Winsotn, New York, 1974.

GINSBURG, H. P. (ed.): *The Development of Mathematical Thinking*. Academic Press, New York, 1983.

KAMII, C.: *Number in Preschool and Kindergarten*. NAEYC, Washington, D. C., 1982.

KAMII, C., and DE VRIES, R.: *Piaget. Children and Number*. NAEYC, Washington, D. C., 1978.

KILPATRICK, J., and WIRSZUP, I. (eds.): *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, 14 vols. NCTM, Stanford, CA, 1969-75.

KRUTESKII, V. A.: *The Psychology of Mathematics in School Children*. University of Chicago Press, Chicago, 1976.

LESH, R., and LANDAU, M. (eds.): *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, New York, 1983.

LOVELL, K.: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Morata, Madrid, 1977.

NIMIER, J.: *Mathématique et affectivité*. Stock, Paris, 1976.

PAYNE, J. N. (ed.): *Mathematics Learning in Early Childhood. 37th Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1975.

RESNICK, L. B., and FORD, W. W.: *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N. J., 1981.

SIMON, H. A.: *Models of Thought*. Yale University Press, London, 1979.

SKEMP, R.: *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Morata, Madrid, 1980.

6. Métodos, materiales

Los artículos de revistas constituyen la fuente usual y más abundante de ideas, materiales, métodos o puntos de partida, que pueden utilizarse en la práctica diaria de la enseñanza. En nuestro país no existe aún ninguna revista con la tradición suficiente como para ser la fuente a la que acudir para resolver estos problemas cotidianos. Tampoco hay en el mercado libros que sirvan para ello. Los que se recogen en este apartado son algunos ejemplos, presentados sin orden ni concierto, de lo que hay en otros países.

ATM: *Notes on Mathematics for Children*. Cambridge University Press, London, 1977.

BANWELL, C.; SAUNDERS, K., and TAKTA, D.: *Starting Points*. Oxford University Press, London, 1972.

BEARD, Col. R. S.: *Patterns in Space*. Creative Publications, Palo Alto, CA, 1973.

BOSSARD, Y.: *Rosaces, frises et pavages*, 2 vols. CEDIC, Paris, 1977-79.

CASTELNUOVO, E., and BARRA, M.: *Matematica nella realtá*. Boringhieri, Torino, 1976.

CUNDY, H. M., and ROLLET, A. P.: *Mathematical Models*. Oxford University Press, London, 1961 (trad. francesa, *Modèles Mathématiques*. CEDIC, Paris, 1978).

ERNST, B.: *The Magic Mirror of M. C.*

Escher. Ballantine Books, New York, 1976.
FIELKER, D. S.: *Cubes.* Cambridge University Press, London, 1969.
FIELKER, D. S., and MOLD, J.: *Squares.* Cambridge University Press, London, 1974.
GATTEGNO, C.: *Aritmética con números en color.* Cuissennaire de España, Madrid, 1965.
GATTEGNO, C., y otros: *El material para la enseñanza de las matemáticas.* Aguilar, Madrid, 1967.
LOCKWOOD, E. H.: *A Book of Courves.* CUP, London, 1961.
LOCKWOOD, E. H., and MACMILLAN, R. H.: *Geometric Symmetry.* CUP, London, 1978.
MCGILLAVRY, C. H.: *Fantasy & Symmetry. The Periodic Drawings of M. C. Escher.* Harry N. Abrams, New York, 1976.
NCTM: *Experiences in Mathematical Ideas,* vols. 1 & 2. NCTM, Reston, VA, 1971.
NCTM: *Instructional Aids in Mathematics. 34th Yearbook.* NCTM, Washington, D. C., 1973.
NCTM: *Experiences in Mathematical Discovery, units 1 to 10.* NCTM, Reston, VA, 1974.
NCTM: *Developing Computational Skills. 1978 Yearbook.* NCTM, Reston, VA, 1978.
PAIGE, D.; BAZIK, E.; BUDRECK, F.; THIESSEN, D., and WILD, M.: *Elementary Mathematical Methods.* John Wiley & Sons., New York, 1978.
RANUCCI, E. R., and TEETERS, J. L.: *Creating Escher-Type Drawings.* Creative Publications, Palo Alto, CA, 1977.
STEINHAUS, H.: *Mathematical Snapshots.* Oxford University Press, New York, 1969.
WENNINGER, M. J.: *Polyhedron Models.* CUP, London, 1971.
WENNINGER, M. J.: *Polyhedron Models for the Classroom.* NCTM, Washington, D, C., 1975.

7. Resolución de problemas

La literatura de resolución de problemas es inmensa y está de moda. NCTM (1981 b), citado en el apartado 4, declara que ésta es la prioridad fundamental para la década de los 80.

Los libros de Polya (1954, 1957, 1976) son los clásicos y hemos incluido los de Descartes porque Polya hace referencia a ellos e incluso reescribe las "reglas para la dirección del espíritu" (matemático).

Wickelgren (1974) y Hughes (1976) son libros que tratan de técnicas heurísticas. Greenes et al. (1977) y Thompson (1976) añaden además problemas directamente aplicables a las clases.

Mason, Burton and Stacey (1982) presenta el proceso de resolución de problemas en el corazón del pensamiento matemático; Burton (s. f.) es el informe final de un proyecto de investigación donde se trata de introducir en el curriculum de matemáticas la idea anterior, y Burton (1984) es el resultado comercial del proyecto.

Brown and Walter (1983) estudia cómo el ponerse un problema está íntimamente conectado con el proceso de resolución.

Schoenfeld (1983) describe cómo puede procederse para impartir un curso de resolución de problemas.

Newell and Simon (1972) es un libro que ya se ha convertido en clásico, porque inaugura un nuevo paradigma en el análisis de la resolución de problemas (no sólo de matemáticas), al considerar que el resolutor se comporta como un sistema de procesamiento de información.

El campo de la investigación está representado por Goldin and McClintock, ed. (1979), Hatfield and Bradnard, ed. (1978), Lesh et al., ed. (1979) y Lester and Garofalo (1982). Los volúmenes III, IV, VI, IX y XI de Kilpatrick and Wirszup, ed. (1969-75) informan de lo que se hace en la URSS. El anuario de 1980 del National Council of Teachers of Mathematics de USA (Krulik, ed., 1980) estuvo dedicado a la resolución de problemas en la escuela y trata, superficialmente, todos los temas relacionados, desde si puede enseñarse la heurística hasta el uso de las calculadoras para incrementar la habilidad al resolver problemas.

BROWN, S. I., and WALTER, M. J.: *The Art of Problem Posing*. Franklin Institute Press, Philadelphia, PA, 1983.

BURTON, L. (s. f.): *The Skills and Procedures of Mathematical Problem Solving*. Report of an SSRC Sponsored Project at the Politechnic of the South Bank, London.

BURTON, L.: *Thinking Things Through*. Basil Blackwell, Oxford, 1984.

DESCARTES, R.: *Discurso del método*. Edición de Risieri Frondizi. Alianza, Madrid, 1979.

DESCARTES, R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Edición de Juan Manuel Navarro Cordón. Alianza, Madrid, 1984.

GOLDIN, G. A., and McCLINTOCK, C. E., eds.: *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio, 1979.

GREENES, C. E.; GREGORY, J., and SEYMOUR, D.: *Succesful Problem Solving Techniques*. Creative Publications, Palo Alto, CA, 1977.

HATFIELD, L. L., and BRADBARD, D. A.. (eds.): *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop*. ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio, 1978.

HUGHES, B.: *Thinking Through Problems*. Creative Publications, Palo Alto, CA, 1976.

IREM de Strasbourg: *Le livre du problème*, 4 vols. CEDIC, Paris, 1973.

KRULIK, S. (ed.): *Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook*. NCTM, Reston, VA, 1980.

LESH, R.; MIERKIEWICZ, D., and KANTOWSKI, M. G. (eds.): *Applied Mathematical Problem Solving*. ERIC, Columbus, Ohio, 1979.

LESTER, F. K., and GAROFALO, J. (eds.): *Mathematical Problem Solving. Issues in Research*. Franklin Institute Press, Philadelphia, PA, 1982.

MASON, J.; BURTON, L., and STACEY, K.: *Thinking Mathematically*. Addison Wesley, London, 1982.

NEWELL, A., and SIMON, H.: *Human Problem Solving*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

POLYA, G.: *Mathematics and Plausible. Reasoning*, 2 vols. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954. (Traducción castellana, *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos, Madrid, 1966.)

POLYA, G.: *How to Solve It*, 2nd. edition. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. (Trad. castellana, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1965.)

POLYA, G.: *Mathematical Discovery*, 2 vols. John Wiley & Sons, New York, 1966. (Trad. francesa, *La découverte des mathématiques*, 2 vols. Dunod, Paris, 1967.)

POLYA, G., and KILPATRICK, J.: *The Stanford Mathematics Problem Book*. Teachers College Press, New York, 1974.

RUBENSTEIN, M.: *Patterns of Problem Solving*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.

SCANDURA, J. M.: *Problem Solving: a Structural Process Approach with Instructional Implications*. Academic Press, New York, 1977.

SCHOENFELD, A. H.: *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*. The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1983.

THOMPSON, M.: *Experiences in Problem Solving*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1976.

WICKELGREN, W. A.: *How to Solve Problems*. W. H. Freeman & Co., San Francisco, CA, 1974.

8. Formación de profesores

Cualquier libro de esta bibliografía forma parte de lo que un profesor puede utilizar para su formación, ya sea matemática, metodológica o práctica. Lo que hay en este apartado son libros escritos expresamente para formar profesores, cada uno de los cuales cubre un aspecto diferente.

Rusholme, ed. (1972) es un informe oficial acerca de la estrategia de formación inicial y permanente del profesorado (donde, por cierto, se puede encontrar el diseño de los "centros de profesores" y la descripción de las condiciones necesarias para que funcionen) NCTM (1981 c) contiene las recomendaciones que deben seguirse para formar profesores de matemáticas de todos los niveles y una relación bastante exhaustiva de lo que éstos deben saber y saber hacer.

Wain and Woodrow (1980) es un curso completo en métodos; Hoffer (1978) instruye a los profesores que han de tomar parte en el desarrollo de un *curriculum* determinado, y Krulik and Rudnick (1980) trata únicamente un tema.

Además, Freudenthal (1973, 1983), citados en el apartado 10, son dos libros imprescindibles para la formación matemática de los profesores.

HOFFER, A. (director): *Didactics and Mathematics. From Mathematics Resource Project.* Creative Publications, Palo Alto, CA, 1978.

KRULIK, S., and RUDNICK, J. A.: *Problem Solving: Handbook for Teachers.* Allyn & Bacon, Boston, 1980.

NCTM: *Guidelines for the Preparation of Teacher of Mathematics.* NCTM, Reston, VA, 1981.

RUSHOLME, J. (ed.): *Teacher Education and Training.* HMSO, London, 1972.

WAIN, G. T., and WOODROW, D. (eds.): *Mathematics Teacher Education Project. Student's Material & Tutor's Guide.* Blackie, London, 1980.

9. Informes, actas...

Begle (1979) y Shumway, ed. (1980) son resúmenes ordenados y clasificados de la investigación realizada hasta la fecha de su edición.

Las actas de International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME) e International Congress on Mathematical Education (ICME) son las últimas publicadas.

Los otros son la base del informe Cockcroft (ver apartado 4).

BEGLE, E. G.: *Critical Variables in Mathematics Education.* MAA & NCTM, Washington, D. C., 1979.

BELL, A. G.; COSTELLO, J., and KÜCHEMAN, D. E.: *A Review of Research in Mathematical Education. Part A: Research on Learning and Teaching.* NFER-NELSON, Windsor, 1983.

BISHOP, A. J., and NICKSON, M.: *A Review of Research in Mathematical Education. Part B: Research on the Social Context of Mathematics Education.* NFER-NELSON, Windsor, 1983.

HERSHKOWITZ, R. (ed.): *Proceedings of the seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, 1983.

SHUMWAY, R. J. (ed.): *Research in Mathematics Education.* NCTM, Reston, VA, 1980.

ZWENG, M., y otros (eds.): *Proceedings of the IV ICME.* Birkhause Boston, Inc., Boston, 1983.

10. Clásicos

Aquí se han agrupado los libros más importantes de aquellos autores cuya obra ha tenido influencia social.

DIENES, Z. P.: *La construcción de las matemáticas.* Vicens Vives, Barcelona, 1970.

DIENES, Z. P.: *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas.* Teide, Barcelona, 1973.

DIENES, Z. P.: *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Paidós, Buenos Aires, 1975.

FREUDENTHAL, H.: *Mathematics as an Educational Task.* D. Reidel, Dordrecht, 1973.

FREUDENTHAL, H.: *Weeding and Sowing.* D. Reidel, Dordrecht, 1978.

FREUDENTHAL, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel, Dordrecht, 1983.

PAPY, G.: *Matemática moderna, I a VI.* Eudeba, Buenos Aires, 1968.

PAPY, G.: *Groupes.* Dunod, Paris, 1970.

PIAGET, J.; INDELHER, B.: *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Guadalupe, Buenos Aires, 1967.

PIAGET, J.: *El lenguaje y el pensamiento en el niño. Estudios sobre la lógica en el niño.* Guadalupe, Buenos Aires, 1973.

PIAGET, J.: *Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático.* Paidós, Buenos Aires, 1975.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A.: *Génesis del número en el niño.* Guadalupe, Buenos Aires, 1975.

PUIG ADAM, P.: *Didáctica de la matemática eurística.* Institución de Enseñanza Laboral, Madrid, 1956.

Apéndice

Una de las opciones adoptadas al elaborar esta bibliografía ha sido la de incluir exclusivamente libros. Sin embargo, éstos suelen estar retrasados sobre lo que se está haciendo, por lo que si uno quiere mantenerse informado, ha de recurrir a las revistas especializadas y las publicaciones de organismos y grupos investigadores. La relación de estas fuentes de información y producción requeriría un espacio del que no se dispone aquí. En su defecto, puede recurrirse a la sección "Bibliografía y noticias" de la revista *Enseñanza de las ciencias*, al artículo de Juan Díaz Codino, "Metodología en la Investigación de Didáctica de las Matemáticas", *Epsilon*, número 1, págs. 94-101, o al *Boletín de Sumarios* del Instituto de Técnicas Educativas, de Alcalá de Henares, por citar fuentes recientes y fácilmente accesibles.

Índice

Págs.

Ilustraciones

Este número de **PNREM** contiene ilustraciones de:

— José M.ª Benavente Barreda (páginas 7, 18, 151, 161).

— Vicente Meavilla Seguí (páginas 17, 42 y 46).

— Melquíades Prieto Santiago (páginas 57, 107).

— Autores de los respectivos textos.

Diseño de cubierta, de Melquíades Prieto Santiago.

Maqueta, de José M.ª Benavente Barreda.

Los monográficos de 1985

N.° 7. Didáctica de las Matemáticas

N.° 8. La reforma: teoría y práctica

CONVOCATORIA

Los títulos de los monográficos pendientes que **Publicaciones de la NREM** ha programado para 1985 son los siguientes:

N.° 9. Técnicas de expresión y redacción
Recepción de originales hasta el 30 de abril de 1985).

N.° 10. Historia e historia del arte
(Recepción de originales hasta el 14 de agosto de 1985).

N.° 11. La informática
(Recepción de originales hasta el 14 de septiembre de 1985).

Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia
Ciudad Universitaria, s/n. - 28040 Madrid

HOJA DE PEDIDO Y SUSCRIPCIÓN DE LAS PUBLICACIONES DE LA NREM

Señale con una X los volúmenes que le interesan.

☐	**Manojuelo de estudios literarios ofrecidos a J. B. Blecua Teijeiro**	**200 Ptas.**
☐	**Nuestra aula, el laboratorio**	**200 Ptas.**
☐	**La técnica en la enseñanza**	**200 Ptas.**
☐	**Trabajos de campo**	**300 Ptas.**
☐	**Actividades artísticas y culturales**	**300 Ptas.**
☐	**La traducción: arte y técnica**	**300 Ptas.**

VOLÚMENES DE 1985:

Suscripción anual	**1.600 Ptas.**
Números sueltos	**400 Ptas.**

Forma de pago:

Giro postal ☐ Cheque adjunto ☐ Contra reembolso ☐

Don ....

Domicilio ....

Código postal .... **Localidad** ....

Provincia ....

Giro postal núm. ....

MEC

Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia